Державний заклад

«Південноукраїнський національний педагогічний університет

імені К. Д. Ушинського»

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ ТА БІНОМ НЬЮТОНА

Методичні рекомендації для організації самостійної роботи та дистанційного навчання за курсом «Елементарна математика» здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Одеса – 2020

УДК: 37.016:51(075.4)
Т83

Рекомендовано до друку вченою радою Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Протокол №___ від ______2020 року.

Рецензенти:
Папач О. І., кандидат педагогічних наук, завідувач кафедри методики викладання і змісту освіти КЗВО «Одеська академія неперервної освіти»
Волкова М. Г., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Тумбрукакі А. В., Кушнірук А. С., Нєдялкова К. В.

Елементи комбінаторики та біном Ньютона : методичні рекомендації для організації самостійної роботи та дистанційного навчання за курсом «Елементарна математика» здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Одеса : ФОП Бондаренко М. О., 2020. 35 с.

Методичні рекомендації призначені для організації самостійної роботи та дистанційного навчання за курсом «Елементарна математика» здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем 1-го року навчання спеціальності 014 Середня освіта (Математика). У них викладено теоретичні основи теми «Елементи комбінаторики та біном Ньютона», структуровано завдання для самостійної роботи, рекомендовано перелік навчальної літератури.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Сучасні вимоги до освітнього процесу вимагають нових підходів до організації навчання: змішаного або дистанційного, що призводить до потреби створення методичних порад та вказівок щодо самостійного опрацювання певних тем курсу шкільної математики.

Проблема включення елементів комбінаторики до змісту шкільної математичної освіти та визначення відповідного навчального матеріалу не нова; вона була та залишається в центрі уваги вчених математиків і методистів.

Наразі, програма передбачає вивчення елементів комбінаторики в шкільному курсі математики, і пояснюється це тим, що сучасна математична освіта неможлива без формування ймовірнісно-статистичного мислення. Стохастична лінія не є основною змістовною лінією шкільного курсу математики, однак її введення посилює прикладну спрямованість шкільного курсу математики, що, в свою чергу, позитивно впливає на мотивацію навчання.

Крім того, введення стохастичної лінії посилює розвиваючу функцію шкільного курсу математики, адже, згідно з концепцією розвиваючого навчання, освіта повинна забезпечувати не суму знань, а здатність самостійно формулювати проблеми і знаходити оптимальні шляхи їх розв’язання. Отже, визначальними є ті зміни у змісті шкільної математичної освіти, які сприяють розвитку мислення взагалі та його специфічних видів, зокрема ймовірнісно-статистичного. Основним методичним орієнтиром навчання учнів елементів комбінаторики є формування в учнів творчого, нестандартного мислення.

Методичні рекомендації призначені допомогти здобувачам першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальності 014 Середня освіта (Математика) в організації самостійної роботи та дистанційного навчання за змістовим модулем «Елементи комбінаторики та біном Ньютона», що входить до навчальної дисципліни «Елементарна математика». Також, розроблені матеріали будуть корисними для студентів старших курсів в контексті вивчення методичних особливостей навчання здобувачів середньої освіти елементів комбінаторики та біному Ньютона.

1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

1.1. Поняття про комбінаторну задачу. Правила суми та добутку

У практичному житті серед різноманітних задач зустрічаються такі, в яких треба вибирати з деякої множини об'єктів підмножини об'єктів, які мають ті чи інші властивості, розміщувати їх в певному порядку, знаходити число способів, за якими таке розташування можливе. Такі задачі називають *комбінаторними задачами*, оскільки в них ідеться про ті чи інші комбінації об'єктів. Розділ математики, що вивчає комбінаторні задачі, називається *комбінаторикою* (від лат. combinaret – з'єднувати, сполучати). Термін «комбінаторика» ввів Г. Лейбніц, а окремі комбінаторні задачі зустрічаються ще в II ст. до н. е.; що вже в працях стародавніх індійських учених знайдені формули числа перестановок і комбінацій та ін.

ОСНОВНІ ПРАВИЛА КОМБІНАТОРИКИ

В основі розв'язання більшості комбінаторних задач лежать два правила ***правило суми*** і ***правило добутку.***

Правило суми.

Якщо деякий об'єкт ***a*** *можна вибрати* ***m*** *різними способами, а інший об'єкт* ***b*** *можна вибрати* ***n*** *різними способами, причому будь-який вибір* ***a*** *відрізняється від будь-якого способу вибору* ***b****, то вибір «або* ***a****, або* ***b****» можна здійснити* ***m + n*** *способами.*

Зауважимо, що при використанні правила суми треба слідкувати, щоб жоден із способів вибору об'єкта a не збігався з будь-яким способом вибору об'єкта b. Якщо ж такі збіги існують, правило суми втрачає силу, і ми отримаємо лише $m + n - k$ способів вибору, де k – кількість збігів.

На мові множин правило суми можна сформулювати таким чином: нехай множина A складається з m елементів, а множина B складається з n елементів, причому множини не перетинаються. Тоді множина $A \cup B$

складається з $m + n$ елементів, тобто, якщо множини A та B скінчені, причому $A \cap B = \varnothing$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Тобто, правило суми відображає той факт, що число елементів в об'єднанні множин, які попарнонеперетинаються, дорівнює сумі числа елементів у кожній з множин.

Задача 1.1.1. В одному ящику містяться 10 пронумерованих білих кульок, а в іншому – 5 пронумерованих чорних. Випадковим чином вибирають одну кульку з будь-якого ящика. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. Нехай A – множина білих кульок першого ящика, B – множина чорних кульок другого ящика. Тоді білу кульку можна вибрати 10 способами, чорну – 5 способами, а тому за правилом суми, маємо 10 + 5 = 15 способів вибрати яку-небудь кульку.

Відповідь. 15.

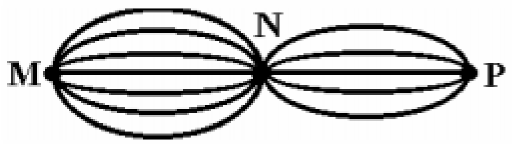
Узагальнити правило суми можна таким чином, нехай об'єкт a_1 можна обрати n_1 способами, об'єкт a_2 можна обрати n_2 способами,…, об'єкт a_k можна обрати n_k способами, причому вибір одного об'єкта виключає одночасний вибір другого об'єкта. Тоді вибір «або a_1, або a_2,…, або a_k» можна здійснити $n_1 + n_2 + \dots + n_k$способами.

Правило добутку.

*Якщо деякий об'єкт **a** можна вибрати **m** різними способами і після кожного такого вибору інший об'єкт **b** можна вибрати **n** різними способами, то одночасний вибір пари «**a** і **b**» у вказаному порядку можна здійснити $m \cdot n$ способами.*

Задача1.1.2. Із міста M в місто N ведуть 8 доріг, а з міста N в місто P – 4 дороги. Скільки шляхів, що проходять через місто N, ведуть із міста M в місто P?

Розв'язання. Нехай A – множина доріг із міста M в місто N, B – множина доріг із міста N в місто P.



Тоді будь-який шлях. Що веде із міста M в місто P, можна розглядати як впорядковану пару (x; y), де $x \in A$, $y \in B$, а тому, за правилом добутку, кількість шуканих шляхів дорівнюватиме: $8 \cdot 4 = 32$.

Відповідь. 32.

Узагальнене правило добутку. Якщо об'єкт a_1 можна обрати n_1 способами, об'єкт a_2 можна обрати n_2 способами,…, об'єкт a_k можна обрати n_k способами, то вибір впорядкованої системи об'єктів (кортежу) «і a_1, і a_2,…, і a_k» можна здійснити $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

При розв'язуванні багатьох комбінаторних задач часто доводиться користуватися *факторіалом.* Позначається $n!$ і читається «ен-факторіал». Отже, *факторіалом* натурального числа *n* називається добуток всіх натуральних чисел від 1 до *n* включно:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Вважають $0! = 1$, $1! = 1$.

Отже, за означенням факторіала маємо:

$0! = 1!$, $2!=1\cdot 2 = 2$, $3!=1\cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4!=1\cdot 2 \cdot 3\cdot 4 = 24$, $5!=1\cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 =120$.

1.2. Розміщення. Перестановки. Комбінації

Розміщення без повторення

Означення. Якщо M − скінченна непорожня множина, яка має n елементів, і k − будь-яке натуральне число, таке, що $1 \le k \le n$, то кортеж завдовжки *k*, компоненти якого не повторюються і є елементами множини *M*, називається ***розміщенням без повторення з n елементів по k елементів***.

З цього означення та поняття кортежу випливає, що розміщення без повторення з *n* елементів по *k* різняться між собою порядком компонент або самими компонентами.

Кількість розміщень без повторень з *n* елементів по *k* позначається $\boldsymbol{A_n^k}$.

Теорема 1.2.1. Кількість розміщень без повторень з n елементів по k дорівнює: $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$.

Доведення. Нехай M − будь-яка скінчена множина, яка має n елементів, і k − натуральне число таке, що $1 < k \leq n$. Знайти A_n^k − це означає підрахувати, скільки існує кортежів завдовжки k, компоненти яких є елементами множини M, за умови, що компоненти в кортежі не повторюються. Їх буде стільки, скількома способами можна вибрати один такий кортеж з елементів множини M. Першу компоненту можна вибрати n способами, тому що в множині M є n елементів. Другу компоненту можна вибрати $(n - 1)$ способами, бо після вибору першої компоненти залишається $(n - 1)$ елемент, і т. д. Якщо вибрано $(k - 1)$ компоненту, то останню k-ту компоненту можна вибрати $n - (k - 1) = n - k + 1$ способами.

З цих міркувань, за правилом добутку, одержуємо, що один такий кортеж можна вибрати

$$n(n-1)\dots(n-k+1)$$

способами. Отже,

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1). \tag{1}$$

Формулу (1) можна записати по-іншому. Помножимо і поділимо праву її частину на $(n - k)!$. Будемо мати

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{2}$$

Формулою (1) зручно користуватися при розв’язуванні задач, а (2) – в теоретичних міркуваннях.

Задача 1.2.1. Скільки різних трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5 і 6, якщо цифри в запису числа не повторюються?

Розв’язання. Трицифрові числа є кортежами завдовжки 3, компоненти в яких не повторюються і вибираються із множини $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, що містить 6 елементів, а тому вони є розміщеннями з 6 елементів по 3 . Їх кількість $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Відповідь. 120.

Перестановки без повторення

Серед розміщень без повторень виділяють їх окремий вид.

Означення. Якщо M – довільна непорожня множина, яка містить n елементів, то розміщення без повторення з n елементів по n називаються ***перестановками без повторення n елементів***.

З цього означення та поняття кортежу випливає, що перестановки з n елементів різняться між собою порядком слідування елементів у них.

Кількість перестановок без повторення з n елементів позначається $\boldsymbol{P_n}$. Тому, що перестановки без повторення з n елементів є розміщення без повторення з n елементів по n, то маємо

$$P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \qquad (3)$$

Теорема 1.2.2. Для довільного натурального числа n

$$P_n = n!$$

Задача 1.2.2. У понеділок у класі 5 уроків. Потрібно скласти розклад занять на цей день, якщо мають бути заняття з 5 різних дисциплін. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. Розклад уроків на понеділок є кортежем завдовжки 5, компонентами якого є 5 різних дисциплін, а тому кількість таких розкладів буде дорівнювати кількості перестановок без повторення з 5 елементів.

Отже, $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

Відповідь: 120.

! Дайте означення перестановки без повторення, не користуючись поняттями розміщення без повторення, та виведіть формулу для знаходження їх кількості.

Комбінації без повторення

Означення. Якщо M − довільна множина, яка має n елементів, і k − будь-яке ціле невід'ємне число, яке задовольняє умову $k \leq n$, то довільну підмножину M, яка містить k елементів, називають ***комбінацією без повторення*** з n елементів по k елементів.

На основі поняття множини та означення комбінації без повторення одержуємо, що комбінації з n елементів по k різняться між собою принаймні одним елементом.

Кількість комбінацій без повторення з n елементів по k позначається C_{n}^{k}
За означенням комбінації без повторення одержуємо:

1) $C_n^0 = 1$, для будь-якого числа n;
2) $C_n^1 = n$, для будь-якого числа n;
3) $C_n^n = 1$, для будь-якого числа n.

Теорема 1.2.3. Для довільних натуральних чисел n і k таких, що $k \leq n$,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (4)$$

Доведення. Для кожної комбінації з n елементів множини M утворимо всі можливі перестановки з k елементів, які розмістимо в стовпчик. Усі такі перестановки становитимуть таблицю, яка має P_k рядків і C_n^k стовпчиків. Отже, всіх перестановок є , $P_k \cdot C_n^k$ і вони є розміщенням без повторення з n елементів по k елементів множини M. Покажемо, що таблиця містить усі такі розміщення. Дійсно, будь-яке розміщення без повторення з n елементів по k елементів множини M породжено деякою k елементною підмножиною множини M, а, значить, воно знаходиться в стопчику побудованої таблиці, який відповідає цій підмножині. Отже,

$$P_k \cdot C_n^k = A_n^k.$$

Звідси $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}. \qquad (5)$$

Задача 1.2.3. У студентській групі 25 осіб. Деканату потрібно направити в школу трьох студентів. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. Студентську групу можна розглядати як множину, яка містить 25 елементів. З цієї множини потрібно виділити підмножину, яка містить три елементи, а тому способів вибору трьох студентів буде стільки, скільки існує комбінацій без повторення з 25 елементів по 3. Маємо

$$C_{25}^3 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 26}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300.$$

Властивості комбінацій

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

2. $C_n^k = C_n^{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}$ – рекурентна формула.

3. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

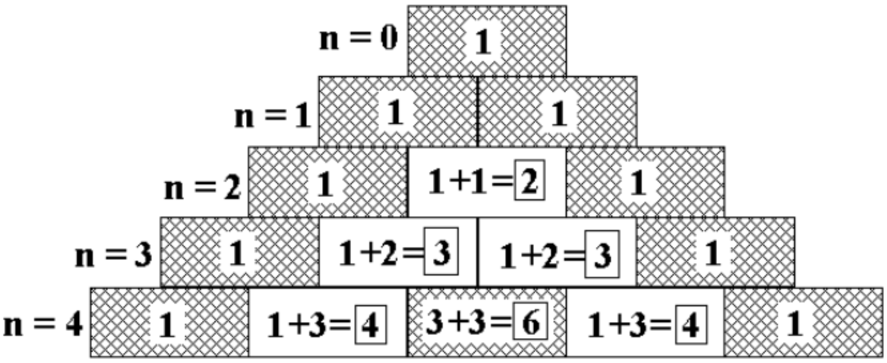
4. Трикутник Паскаля.

Властивість 3 дозволяє обчислити C_n^k. Знаючи C_{n-1}^k та C_{n-1}^{k-1}.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\
 & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\
C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
\end{array}$$

....

Трикутник Паскаля має наступну властивість: кожний елемент рядка, крім крайніх, дорівнює сумі двох елементів, що стоять над ним у попередньому рядку.



0							1						
1						1		1					
2					1		2		1				
3				1		3		3		1			
4			1		4		6		4		1		
5		1		5		10		10		5		1	
6	1		6		15		20		15		6		1

5. Кількість усіх підмножин n-елементної множини дорівнює 2^n:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n,$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Традиційно розв’язування простих комбінаторних задач зводиться до визначення виду сполуки, про яку йдеться в задачі, і застосування відповідної формули. Отже, основна проблема, що може виникнути – визначення виду сполуки. Враховуючи характеристичні властивості кожного виду сполук, можливо цей процес алгоритмізувати (рис. 1); при цьому ключовими є запитання:

- Чи враховується порядок розміщення елементів?
- Чи всі елементи входять у сполуку?

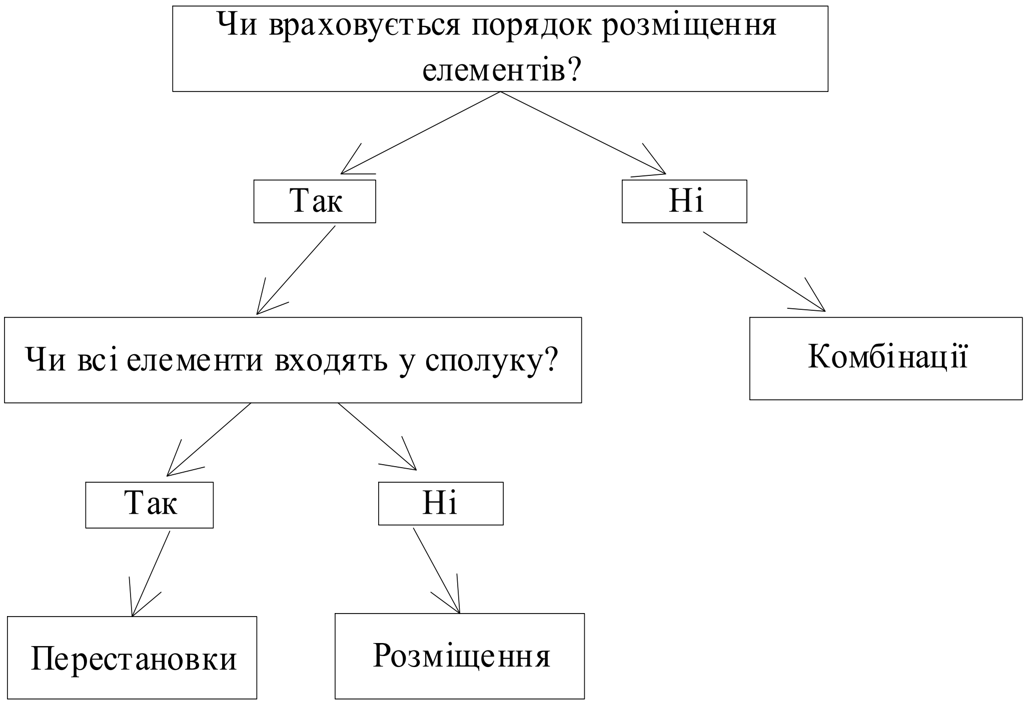


Рис. 1

1.3. Сполуки з повтореннями

Розміщення з повтореннями

Означення. Якщо M − довільна непорожня множина, у якій n елементів, і k − будь-яке натуральне число, то кортеж завдовжки k, компонентами якого є елементи множини M, ***називається розміщенням з повтореннями з*** $\boldsymbol{n}$ ***елементів по*** $\boldsymbol{k}$ ***елементів***.

З цього означення та поняття кортежу одержуємо, що розміщення з повтореннями з n елементів по k відрізняються між собою елементами або порядком їх слідування.

Кількість розміщень з повтореннями з n елементів по k позначається $\overline{A_n^k}$

Теорема 1.3.1. Для довільних натуральних чисел n і k

$$\overline{A_n^k} = n^k. \qquad (6)$$

Доведення. Нехай M − довільна множина, яка має n елементів, причому $n > 1$, і k − будь-яке натуральне число, яке також більше 1. Знайдемо $\overline{A_n^k}$. Ця кількість буде дорівнювати числу можливих виборів одного кортежу завдовжки k, компонентами якого є елементи множини M. Компоненти кортежу можуть повторюватися, тому кожну з них можна вибрати n способами, усього компонент є k. Отже, за правилом добутку, один кортеж можна вибрати

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k-\text{разів}} = n^k$$

способами. Отже, $\overline{A_n^k} = n^k$.

Задача 1.3.1. Скільки різних чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1 і 2?

Розв'язання. Чотирицифрове число є кортежем завдовжки 4, компоненти якого вибираються із двохелементної множини $M = \{1, 2\}$, а тому кількість таких чисел буде дорівнювати кількості розміщень з повтореннями з двох елементів по 4, тобто $\overline{A_2^4} = 2^4$.

Відповідь: 16.

Перестановки з повтореннями

Означення. Якщо $M = \{ x_1 , x_2 ,\ldots, x_n \}$ − довільна множина, у якій n елементів, і $(k_1, k_2,\ldots, k_n)$ − впорядкований набір n натуральних чисел, то кортеж, компонентами якого є елементи множини M, у якому x_1 повторюється компонентою k_1 разів, елемент x_2 повторюється компонентою k_2 разів і т. д., елемент x_n повторюється компонентою k_n разів, називається ***перестановкою з повторенням типу*** $(k_1, k_2,\ldots,k_n)$.

На основі поняття кортежу і означення перестановки з повторенням одержуємо, що перестановки з повтореннями одного і того ж типу різняться між собою порядком слідування компонент.

Кількість перестановок з повтореннями типу$(k_1, k_2,\ldots,k_n)$ позначається $\boldsymbol{P(k_1, k_2,\ldots,k_n)}$.

Теорема 1.3.2. Для довільних натуральних чисел $n > 1$, $k_1, k_2,\ldots,k_n$

$$P(k_1, k_2,\ldots,k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}. \qquad (7)$$

Доведення проведіть самостійно.

Комбінації з повтореннями

Означення. Якщо n і k − довільні натуральні числа більші 1, і є n видів елементів, причому елементи одного виду між собою не відрізняються, то довільну сукупність із k елементів з даних n видів елементів називають ***комбінацією з повтореннями з n елементів по k елементів***.

З означення комбінації з повтореннями n елементів по k випливає, що вони різняться між собою кількістю елементів принаймні одного виду.

Кількість комбінацій з повтореннями з n елементів по k позначається $\overline{\mathbf{C}_{n}^{k}}$.

Теорема 1.3.3. Для довільних натуральних чисел n і k, більших 1,

$$\overline{C_n^k} = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}. \qquad (8)$$

Доведення проведіть самостійно.

1.4. Завдання для самостійної роботи

1.4.1. Записати за допомогою рекурентної формули

$n!$; $(n–3)!$; $(n+1)!$

1.4.2. Знайти значення виразу

1) $8! + 9!$;

2) $10! – 7!$;

3) $(6! – 5!) : 120$;

4) $\frac{14!}{12!}$;

5) $\frac{16!}{18!}$;

6) $\frac{9!}{5!\cdot 4!}$;

7) $\frac{7!+6!+5!}{8!-7!}$;

8) $C_{10}^3 + C_9^4$;

9) $(A_{12}^4 - A_{11}^4) : A_{10}^3$;

10) $A_{13}^3 : (A_{15}^3 + A_{14}^3)$;

11) $C_{199}^{197} + C_{199}^{198}$;

12) $C_{16}^{12} - C_{15}^{11}$;

13) $A_{12}^4 \cdot 7! : A_{11}^9$;

14) $C_{21}^4 : (C_{19}^3 + C_{19}^4 + C_{20}^3)$

1.4.3. Скоротити дріб:

1) $\frac{k!}{(k-2)!}$; 2) $\frac{(p-1)p(p-2)(p-3)(p-4)!}{(p-2)!}$

1.4.4. Спростити вираз:

1) $\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$;

2) $\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$;

3) $P_{x+2} : (A_x^k \cdot P_{x-k})$;

4) $C_{m-2}^n + 2C_{m-2}^{n-1} + C_{m-2}^{n-2}$;

5) $P_{15} : (A_{14}^x \cdot P_{14-x})$;

6) $(A_k^x + A_k^{x-1}) : A_k^{x-4}$.

1.4.5. Довести тотожності:

1) $\frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4} = (n-4)^2$;

2) $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$;

3) $\frac{A_{n+3}^n}{(n+2)A_{n+1}^{n-2}} - 3 = n$;

4) $A_n^{n-1} = P_n$

5) $A_n^k + kA_n^{k-1} = A_{n+1}^k$;

6) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$;

7) $A_n^1 = \frac{P_n}{P_{n-1}}$;

8) $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+2}^k$;

9) $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m$;

10) $\frac{A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1}}{A_{n+k}^n} = k^2$;

11) $C_n^{m+1} + C_n^{m-1} + 2C_n^m = C_{n+2}^{m+1}$;

12) $C_{n+1}^{x-2} + C_{n+1}^x + 2C_{n+1}^{x-1} = C_{n+3}^x$;

13) $P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2})$

1.4.6. Розв’яжіть рівняння:

1) $\frac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89$;

2) $\frac{P_{x+3}}{A_x^5 P_{x-5}} = 720$;

3) $\frac{A_{x+1}^3 - C_x^4}{C_x^4} = 23$;

4) $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$;

5) $C_{k+3}^{k+1} = C_{k+1}^{k-1} + C_k^{k-2} + C_{k+1}^k$;

6) $\frac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$;

7) $A_x^2 = 28x - 12C_x^3$;

8) $A_{x+1}^{x-2} = P_x + P_{x-1}$;

9) $\frac{C_{x+1}^5 P_{x-2}}{P_{x+1}} = 2$;

10) $C_x^5 = C_x^7$;

11) $A_7^x = x\,A_7^{x-1}$;

12) $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + C_n^5 + C_n^6 +$
$+C_n^7 = 127$;

13) $12C_{x+3}^{x-1} = 55A_{x+1}^2$;

14) $C_{4x+9}^{4x+4} = 5 \cdot A_{4x+7}^3$;

15) $\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}$;

16) $x^2 \cdot C_{x-1}^{x-4} = A_4^2 \cdot C_{x+1}^6 - x \cdot C_{x-1}^{x-4}$;

17) $C_{x+3}^{x+1} = C_{x+1}^{x-1} + C_{x+1}^x + C_x^{x-2}$;

18) $\frac{A_x^3 + 3A_x^2}{P_{x+1}} = \frac{1}{2}$;

19) $A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1} = \frac{30}{7}P_x$;

20) $\frac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4}P_3} = 210$;

21) Знайти C_n^{19}, якщо $C_n^{12} = C_n^8$;

22) $\frac{n!}{(n-2)!} = 72$.

1.4.7. Комбінаторні задачі

1. Скількома способами можливо одягти хлопчика в дитячий садок, якщо є 12 футболок, 6 брюк, 8 пар шкарпеток та 3 пари кросівок?

2. Скількома способами можна оббити 6 стільців, якщо маємо 10 видів тканини?

3. Скількома способами можна оббити 6 стільців, якщо є 12 видів матеріалу?

4. З 8 членів студентського колективу потрібно обрати голову, його заступника та секретаря. Скількома способами це можна зробити?

3. Задано цифри 1, 2, 3, 4, 5. Скільки трицифрових чисел можна записати за допомогою цих цифр, якщо а) цифри можуть повторюватися; б) цифри не повторюються?

4. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 2, 4, 6 так, щоб цифри не повторювались?

5. Скільки п’ятицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 3, 4, 6, 5 (цифри з запису числа не повторюються)?

6. Скількома способами з 10 солдат можливо сформувати наряд з 3 солдат?

7. Скільки чотиризначних чисел можна записати з цифр 1, 6, 7, 9 так, щоб цифри не повторювались? Знайти суму цих чисел.

8. Задано цифри 1, 2, 3, 4, 5.

а) Скільки парних п’ятизначних чисел можна скласти з цих цифр (цифри не повторюються)?

б) Скільки можна скласти чисел, більших за 30000?

в) Скільки можна скласти чисел, більших за 54000?

9. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 2, 3, 4, 5?

10. В класі 34 вільних місця. Скількома способами можна розсадити 8 учнів?

11. Скількома способами з 3-х інженерів та 9-ти економістів скласти комісію у складі 7 осіб так, щоб до неї ввійшов хоча б один інженер?

12. Скількома способами з 4-х інженерів та 8-ми економістів скласти комісію у складі 6-ти осіб так, щоб до неї увійшло не менше 3-х інженерів?

13. Скількома способами з 6-ти квадратів та 4-х трикутників скласти набір з 5-ти фігур так, щоб в ньому було не більше двох трикутників?

14. Скількома способами з 5-ти книжок з математики та 4-ох книжок з фізики обрати 3 книги так, щоб в цей набір увійшло не більше, ніж 2 книги з математики?

15. Скількома способами з 6-ти ромашок та 4 тюльпанів скласти букет з 5-ти квітів так, щоб було не більше 2-х тюльпанів?

16. З 8 дівчат та 5 юнаків необхідно створити ансамбль в 6 осіб так, щоб він містив не більше 3-х дівчат. Скількома способами можна це зробити?

17. Скількома способами з 4-х медичних працівників та 8-ми вчителів скласти комісію у складі 6 осіб так, щоб до неї ввійшли не менше за 3-х медиків?

19. Скількома способами можна переставити букви у слові «логарифм» так, щоб 2, 4 і 6 місця були зайняті приголосними буквами?

20. Скільки дільників має число 210?

21. Скільки дільників має число 330?

22. Скільки дільників має число 30030?

23. Знайти кількість парність дільників числа 3570.

24. З групи в 15 осіб необхідно обрати бригадира та 4 членів бригади. Скількома способами це можна зробити?

25. Скільки можна скласти 6-значних чисел з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, щоб непарні цифри стояли на непарних місцях, а парні – на парних? (цифри в запису числа не повторюються).

26. З цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 скласти різні п’ятизначні числа, що не містять однакових цифр. Скільки серед них буде таких, що містять цифри 2, 4 та 5 одночасно?

27. З 30 чоловік скласти групи по 10 в кожній. Скількома способами можна це зробити?

28. Скільки чисел, більших за 100, можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, якщо кожна цифра в запису числа використовується не більше одного разу?

29. Від шахового гуртка необхідно надіслати дві команди по 3 особи на різні змагання. Відомо, що це можна зробити 560 способами. Скільки учнів у гуртку?

30. У вазі 12 пронумерованих білих і рожевих гвоздик. Відомо, що букет з двох білих і однієї рожевої гвоздики можна скласти 105 способами. Скільки у вазі гвоздик кожного кольору?

31. В ящику лежать кілька білих і чорних пронумерованих кульок. Відомо, що взяти один білий і один чорний кульки разом можна 120 способами, а два білих і два чорних разом - 2970 способами. Скільки в ящику білих і чорних кульок окремо?

32. У фірмі «Свято» Дідів Морозів на 4 більше, ніж Снігуроньок. Для привітання вибирають 4 пари. Скільки працює Дідів морозів та Снігуроньок, якщо це можна зробити $\frac{10!}{48}$ способами?

33. З десяти слів чоловічого роду, восьми жіночого і чотирьох середнього потрібно вибрати по одному слову. Скількома способами це можна зробити?

34. Скільки чисел, менших 8000, можна записати за допомогою цифр 5, 7 і 9? Скільки серед них існує таких, у запису яких цифри не повторюються?

35. На курсі навчається 50 студентів. Для ведення курсових зборів потрібно обрати голову, секретаря і трьох членів президії. Скількома способами це можна зробити?

36. Є два офіцери, три прапорщики і п’ять солдатів. Скількома способами можна вибрати наряд із одного офіцера, одного прапорщика і двох солдатів?

37. Скількома способами можна розставити на полиці в ряд шість різних чашок?

38. Скільки є шестицифрових чисел, записаних різними цифрами, першою цифрою яких є число 5?

39. Скільки наборів букв можна скласти з усіх букв слова «математика»?

40. У магазині є червоні, зелені та сині олівці. Потрібно купити 5 олівців. Скількома способами це можна зробити, якщо олівці одного кольору між собою не різняться і можуть бути закуплені олівці одного, двох або трьох кольорів?

41. Скільки різних чисел можна записати за допомогою цифри 8, яка в запису числа повторюється 2 рази, і цифри 7, яка в запису числа повторюється 3 рази?

2. ФОРМУЛА БІНОМА НЬЮТОНА

2.1. Біном Ньютона

$x + a, a + b, x + y$ – кожний двочлен, в алгебрі називається ***біномом***.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$(a+b)^0$	$=$	1	0	1
$(a+b)^1$	$=$	$a+b$	1	1 1
$(a+b)^2$	$=$	$a^2+2ab+b^2$	2	1 2 1
$(a+b)^3$	$=$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	3	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$=$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	4	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	$=$	$\ldots$	5	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	$=$	$\ldots$	6	1 6 15 20 15 6 1

Для будь-яких $n \in N$ і $a \in R, b \in R$ має місце рівність

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{C_n^0 a^n} + \boldsymbol{C_n^1 a^{n-1} b} + \boldsymbol{C_n^2 a^{n-2} b^2} + \cdots + \boldsymbol{C_n^{n-1} a b^{n-1}} + \boldsymbol{C_n^n b^n}. \qquad (9)$$

Ця формула відома в математичній літературі як *біном Ньютона*і дозволяє, користуючись формулою для обчислення числа комбінацій з n елементів по k елементів, обчислювати коефіцієнти в розкладі n-гостепеня двочлена.

Цю формулу можна доводити по-різному, зокрема методом математичної індукції.

Доведення (*методом математичної індукції*).

1) $n = 1$ $\quad (a+b)^1 = C_1^0 a^1 + C_1^1 a^{1-1} b$

$$a + b = a + b$$

2) $(\forall\, k \epsilon N, k > 1)$

Дано:

$(a+b)^k = \ C_k^0 a^k + \ C_k^1 a^{k-1} b + \ C_k^2 a^{k-2} b^2 + \cdots + \ C_k^{k-1} a^1 b^{k-1} + C_k^k b^k$.

Довести, що

$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + \ C_{k+1}^1 a^k b + \ C_{k+1}^2 a^{k-1} b^2 + \cdots + \ C_{k+1}^k a b^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}$.

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k \cdot (a+b) \quad =$$

$$= \left(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \cdots + C_k^{k-1} a^1 b^{k-1} + C_k^k b^k\right) \cdot (a+b) =$$

$$= \ C_k^0 a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) a^k b + \cdots + \left(C_k^{k-1} + C_k^k\right) a b^k + C_k^k b^{k+1} =$$

$C_k^0 = C_{k+1}^0 = 1, \ C_k^k = C_{k+1}^{k+1} = 1$

$C_k^m = C_{k-1}^m + C_{k-1}^{m-1}$

$$= \ C_{k+1}^0 a^{k+1} + \ C_{k+1}^1 a^k b + \ C_{k+1}^2 a^{k-1} b^2 + \cdots + \ C_{k+1}^k a b^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}.$$

3) $(\forall\, n \in N)$:

$$(a+b)^n = \ C_n^0 a^n + \ C_n^1 a^{n-1} b + \ C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + \ C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \ .$$

Покажемо доведення формули (9) із застосуванням похідної.

Доведення. Якщо розкрити дужки у виразі $(a+x)^n$, тобто помножити біном $(a+x)$ на себе n разів, то одержимо многочлен n-го степеня відносно змінної x такого виду:

$$(a+x)^n = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_\kappa x^\kappa + \ldots + A_n x^n \quad (10).$$

Отже, необхідно знайти A_0, A_1, ..., A_n.

Щоб знайти A_0, підставимо в обидві частини рівності (10) замість x значення 0, і маємо $A_0 = a^n$, а враховуючи, що $C_n^0 = 1$, $A_0 = C_n^0 a^n$.

Щоб знайти A_1, візьмемо похідну від обох частин рівності (10), маємо:

$$n(a+x)^{n-1} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots + kA_\kappa x^{\kappa-1} + \ldots + nA_n x^{n-1} \quad (11).$$

Знову підставимо $x=0$, і маємо: $A_1 = na^{n-1}$, а, враховуючи, що $C_n^1 = n$, $A_1 = C_n^1 a^{n-1}$.

Аналогічно, щоб знайти A_2, візьмемо похідну від обох частин рівності (11):

$$n(n-1)(a+x)^{n-2} = 2A_2 + 6A_3x + \ldots + k(k-1)A_\kappa x^{\kappa-2} + \ldots + n(n-1)A_n x^{n-2}.$$

Підставивши $x=0$, маємо: $n(n-1)a^{n-2} = 2A_2$, тобто $A_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2} = C_n^2 a^{n-2}$.

Інші коефіцієнти знаходяться таким самим способом. Якщо продиференціювати k разів рівність (10), то одержимо:

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(a+x)^{n-k} = k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot A_\kappa + \ldots +$$
$$+(k+1)k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2A_{k+1}x + \ldots + n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)A_n x^{n-k}$$

Виконуючи підстановку $x=0$, маємо: $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a^{n-k} = k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot A_\kappa$, звідки

$$A_k = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}a^{n-k} = C_n^k a^{n-2}.$$

Підставляючи знайдені A_0, A_1, ..., A_k в рівність (10), отримаємо формулу бінома Ньютона.

Задача 2.1.1. Знайти розклад $(x + a)^6$.

Розв'язання.

$$(x + a)^6\ x^6 + C_6^1 x^5 a + C_6^2 x^4 a^2 + C_6^3 x^3 a^3 + C_6^4 x^2 a^4 + C_6^5 x^1 a^5 + a^6 = \cdots$$

1 6 15 **<u>20</u>** 15 6 1

Задача 2.1.2. Знайти розклад $(a + b)^7$.

Розв'язання.

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Властивості розкладу бінома Ньютона

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

1. Кількість доданків у розкладі (9) дорівнює $n + 1$.
2. У кожному доданку сума степенів при a та b дорівнює n.

   Показники степеня букви a спадають від n до 0, показники степеня букви b зростають від 0 до n.
3. (k + 1)-й член розкладу ($0 \le k \le n$) має вигляд:

   $\boldsymbol{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k}$ – загальний член розкладу (12)

2.2. Біномні коефіцієнти та їх властивості

$\boldsymbol{C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^k, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n}$ – біноміальні коефіцієнти

1. Біномні коефіцієнти членів розкладу, рівновіддалених від його кінців, рівні між собою:

   $C_n^0 = C_n^n,\ \ C_n^1 = C_n^{n-1}, \ldots,\ \ C_n^m = C_n^{n-m}.$

2. Якщо показник степеня $\boldsymbol{n}$ – парне число, то середній член розкладу має найбільший біноміальний коефіцієнт; якщо $\boldsymbol{n}$ – непарне число, то біноміальні коефіцієнти двох середніх членів рівні між собою та також є найбільшими (див. трикутник Паскаля).

$$
\begin{array}{c}
C_0^0 \\
C_1^0 \quad C_1^1 \\
C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 \\
C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

3. Перший біномний коефіцієнт дорівнює 1, другий – n, коефіцієнт $(k + 1)$-го члену розкладу дорівнює коефіцієнту k-го члена, помноженого на $\frac{n-k+1}{k}$:

$$C_n^k = C_n^{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}$$ – рекурентна формула.

4. Сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n, \qquad (13)$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

5. Сума біноміальних коефіцієнтів, що стоять на парних місцях розкладу, дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів членів, що стоять на непарних місцях:

$$C_n^1 + C_n^3 + \dots = C_n^0 + C_n^2 + \dots = 2^{n-1}.$$

Задача 2.2.1. Знайдіть середній член розкладу бінома $\left(2x + \frac{y}{2}\right)^8$

Розв'язання.

$$T_5 = C_8^4 (2x)^4 \left(\frac{y}{2}\right)^4 = \dots = 70x^4y^4$$

Задача 2.2.2. В розкладі $(x^3 - 3y^2)^{10}$ знайдіть коефіцієнт при x^9y^{14}.

Розв'язання.

$T_{k+1} = C_{10}^{k}(x^3)^{10-k}(-3y^2)^k$, $\qquad x^9y^{14} = (x^3)^3(y^2)^7$

$k = 7,\ T_{7+1} = T_8 = C_{10}^{7}(x^3)^{10-7}(-3y^2)^7 =$

Задача 2.2.3. Довести, що сума всіх коефіцієнтів розкладу бінома $(2a-b)^n$ при будь-якому натуральному $\boldsymbol{n}$ дорівнює 1.

Розв'язання. В розкладі (1) покладемо: a = b = 1, отримаємо $(2-1)^n = 1$.

Задача 2.2.4. Знайти той член розкладу бінома $\left(x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^{-1}}\right)^m$, який містить x^5, якщо сума всіх біномних коефіцієнтів дорівнює 128.

Розв'язання. По-перше знайдемо m. $2^m = 128$, m = 7.

$T_{k+1} = C_m^k(x\sqrt{x})^{m-k}(\sqrt[3]{x^{-1}})^k$

$T_{k+1} = C_7^k(x\sqrt{x})^{\ 7-k}\left(\sqrt[3]{x^{-1}}\right)^k = C_7^k x^{\frac{3(7-k)}{2}} x^{\frac{-k}{3}} = C_7^k x^{\frac{3(7-k)}{2}-\frac{k}{3}}$.

За умовою маємо: $x^{\frac{3(7-k)}{2}-\frac{k}{3}} = x^5$, та рівняння $\frac{3(7-k)}{2} - \frac{k}{3} = 5$, розв'язавши яке отримаємо k = 3.

Відповідь. Четвертий.

2.3. Завдання для самостійної роботи

1. Написати розклад бінома $(x-2y)^5$.
2. Записати перші чотири та останні чотири доданки в розкладі $(5 + 2x)^{16}$.
3. Знайдіть два середніх члена розкладу

   1) $(a^3 - ab)^{31}$; 2) $\left(z^3 - z^{-\frac{1}{2}}\right)^7$.
4. Знайти суму біноміальних і суму всіх коефіцієнтів розкладу бінома $(6x-7)^8$.
5. Чому дорівнює сума біномних коефіцієнтів розкладу бінома $(x+a)^{10}$, які стоять на парних місцях?
6. У розкладі бінома $\left(\sqrt[6]{b^5}a^{-\frac{1}{6}} - \sqrt[5]{ab}\right)^n$ визначити елемент, який не містить $\boldsymbol{a}$, якщо коефіцієнт 3-го члена розкладу дорівнює 55.
7. Які члени розкладу (за номером) бінома $(a^4 - a^{-1})^{10}$ містять $\boldsymbol{a}$ з від'ємним показником? Знайдіть ці члени.

8. У розкладі бінома $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt{a^{-1}}\right)^{15}$ визначити елемент, який не залежить від $\boldsymbol{a}$.

9. У виразі $(1+x)^{56}$ розкриті дужки та зведені подібні доданки. Знайти коефіцієнти при x^8 та x^{48}.

10. В розкладі бінома $(1+x)^n$ п'ятий, шостий та сьомий біноміальні коефіцієнти утворюють арифметичну прогресію. Визначити n.

11. За допомогою формули бінома Ньютона обчислити 99^3.

12. Знайти п'ятий член розкладу бінома $\left(\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^n$, якщо відношення коефіцієнта третього члена до коефіцієнта другого члена дорівнює 11:2.

13. Знайдіть член, який має x^4 в розкладі бінома $\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^9$.

14. В розкладі бінома $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt{a^{-1}}\right)^{15}$ знайти член, який не залежить від a.

15. В розкладі бінома $\left(\frac{a\sqrt[3]{a}}{6}+\frac{1}{\sqrt[15]{a^{28}}}\right)^n$ визначити член розкладу, що не містить a, якщо сума біноміальних коефіцієнтів перших трьох членів розкладу дорівнює 79.

16. Знайти найменше значення показника m в розкладі $(1+x)^m$, якщо відношення коефіцієнтів двох будь-яких сусідніх членів розкладу дорівнює 7:15.

17. В розкладі $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^n$ відношення п'ятого члена до третього дорівнює $7 : \sqrt[3]{3}$. Знайти ці члени.

18. Знайти середній член розкладу $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{14}$.

19. Знайдіть середній член розкладу $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{12}$, не виписуючи сам розклад. Чому дорівнює сума біноміальних коефіцієнтів цього розкладу?

20. В розкладі бінома $\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^n$ коефіцієнт третього члена дорівнює 28. Знайти середній член розкладу.

21. Шостий і десятий біноміальні коефіцієнти рівні між собою. Обчисліть їх.
22. Шостий і десятий біноміальні коефіцієнти розкладу $(x + a)^n$ рівні між собою. Запишіть четвертий член цього розкладу.
23. В розкладі бінома $\left(x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ сума коефіцієнтів на 240 менша за суму коефіцієнтів розкладу $(a + b)^n$. Знайти третій член першого розкладу.
24. В розкладі бінома $\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{y}{x}\right)^n$ визначити член розкладу, що не містить x, якщо біноміальний коефіцієнт третього члена розкладу на 5 більше за біноміальний коефіцієнт другого члена розкладу.
25. В розкладі бінома $\left(y\sqrt[4]{y}+y^{-\frac{1}{2}}\right)^m$ знайти член, який містить y^3, якщо сума коефіцієнтів розкладу, що стоять на непарних місцях, дорівнює 128.
26. Знайти A_n^2, якщо п'ятий член розкладу $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ не залежить від x.
27. Знайти члени розкладу бінома $(a^4 - a^{-1})^{10}$, що містять a з від'ємним показником.
28. Знайти значення x в виразі $\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\lg x+1}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$, четвертий член розкладу якого дорівнює 200.
29. Знайти середній член розкладу $\left(\sqrt{a}-\sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^m$, якщо коефіцієнт п'ятого члена відноситься до коефіцієнта третього як 14:3.
30. В розкладі бінома $\left(x^{-1}+\sqrt{x}\right)^n$, коефіцієнт четвертого члена відноситься до коефіцієнта шостого як 5:18. Знайти в цьому розкладі член, який не містить x.

Після опрацювання розглянутих тем доцільною є така контрольна робота:

1 варіант

1. Розв'язати рівняння: $C_{4x+9}^{4x+4} = 5 \cdot A_{4x+7}^{3}$.
2. Від шахового гуртка необхідно надіслати дві команди по 3 людини на різні змагання. Відомо, що це можна зробити 560 способами. Скільки учнів у гуртку?
3. Знайти значення x у виразі $\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\lg x+1}} + \sqrt[12]{x}\right)^{6}$, четвертий член розкладу якого дорівнює 200.
4. Абонент забув дві останні цифри номера і набирає їх навмання. Знайти ймовірність того, що він набере їх вірно, якщо абонент лише пам'ятає, що цифри парні та різні.
5. Троє гравців грають в преферанс. Кожен отримає по 10 карт, і ще дві йдуть в прикуп. Гравець бачить, що серед його карт немає жодного туза. Він бере прикуп. Знайти ймовірність того, що там лежать два туза, якщо в колоді 32 карти.

2 варіант

1. Розв'язати рівняння: $\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}$.
2. У вазі 12 пронумерованих білих і рожевих гвоздик. Відомо, що букет з двох білих і однієї рожевої гвоздики можна скласти 105 способами. Скільки у вазі гвоздик кожного кольору?
3. Знайти середній член розкладу $\left(\sqrt{a} - \sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^{m}$, якщо відомо, що коефіцієнт п'ятого члена відноситься до коефіцієнта третього, як 14: 3.
4. В ящику 3 білих і 7 чорних кульок. Беремо навмання одну кульку і, не дивлячись на неї, відкладаємо в сторону. Потім беремо ще одну кульку. Вона виявилася білою. Знайти ймовірність того, що і перша кулька - біла.

5. При грі в бридж колода 52 карти ділиться порівну між чотирма гравцями. Знайти ймовірність того, що кожен гравець отримає по одному тузу.

3 варіант

1. Розв'язати рівняння: $x^2 \cdot C_{x-1}^{x-4} = a_4^2 \cdot C_{x+1}^6 - x \cdot C_{x-1}^{x-4}$.
2. У ящику лежать кілька білих і чорних пронумерованих кульок. Відомо, що взяти одну білу і одну чорну кульки разом можна 120 способами, а дві білих і дві чорних разом - 2970 способами. Скільки в ящику білих і чорних кульок окремо?
3. У розкладі бінома $\left(x^{-1} + \sqrt{x}\right)^n$ коефіцієнт четвертого члена так відноситься до коефіцієнта шостого члена, як 5:18. Знайти в цьому розкладі член, який не містить x.
4. На столі стоять 7 ящиків. У двох з них лежить приз, а решта - порожні. Гравець може вибрати будь-які два ящика. Знайти ймовірність наступних подій: A - в обох ящиках лежать призи; B - обидва ящика порожні.
5. На діжках лото написані числа від 1 до N. З цих N діжок навмання вибирають два. Знайти ймовірність наступних подій: A - на обох діжках числа, менші, ніж k (2 < k < N); B - на одному з діжок число, більше, ніж k, а на другому - менше, ніж k.

4 варіант

1. Розв'язати рівняння: $C_{x+3}^{x+1} = C_{x+1}^{x-1} + C_{x+1}^{x} + C_{x}^{X-2}$.
2. У фірмі «Свято» Дідів Морозів на 4 більше, ніж Снігуроньок. Для привітання вибирають 4 пари. Скільки працює Дідів Морозів та Снігуроньок, якщо це можна зробити $\frac{10!}{48}$ способами?

3. У розбитті бинома $\left(x\cdot\sqrt[5]{\frac{x}{3}}-\frac{b}{\sqrt[7]{x^3}}\right)^n$ знайти доданок, що містить x^3, якщо сума біноміальних коефіцієнтів членів, що стоять на непарних місцях дорівнює 2048.
4. Яка ймовірність того, що навмання вибране число від 1 до 12 буде дільником числа 12 або простим числом?
5. У ліфт семиповерхового будинку на першому поверсі увійшли три людини. Кожен з них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність наступних подій: A - всі пасажири вийшли на 4 поверсі; B - всі пасажири вийшли на одному і тому ж поверсі; C - всі пасажири вийдуть на різних поверхах?

Список використаних джерел

1. Алексеев В. М. Элементарная математика. Решение задач. Киев : Выща школа, 1989. 383 с.
2. Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. Є. Дискретна математика. Підручник. К. : Вища школа, 2002. 288 с.
3. Виленкин Н. Я. Индукция. Комбинаторика. Пособие для учителей. Москва : Просвещение, 1976. 48 с.
4. Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. Комбинаторика. М. : ФИМА, МЦНМО, 2006. 400 с.
5. Галицкий М. Л. Сборник задач по алгебре: учеб. пособие для 8-9 кл. с углубл. изучением математики / М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. 12-е издание. Москва : Просвещение, 2006. – 301 с.
6. Задачник-практикум по математике. Пособие для студентов / под ред. Н. Я. Виленкина. Москва : Просвещение, 1977. 208 с.
7. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. ІІ. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. – Х.: Вид-во «Ранок», 2011. 384 с.
8. Зуб О. М., Коберник Г. І., Нещадим А. Ф. Математика : посібник для студ. пед. Факультетів. К. : Науковий світ, 2000. 417 с.
9. Дискретна математика: Методичні вказівки для студентів спеціальностей напряму «Прикладна математика». Частина І /Укл.: Філіпчук М. П. Чернівці : Рута, 2006. 60 с.
10. Курс математики: Навчальний посібник / В.Н. Боровик, Л.М. Вивальнюк та ін. К. : Вища шк., 1995. 392 с.
11. Лаврова Н. Н., Стойлова Л. П. Задачник-практикум по математике. Москва : Просвещение, 1986. 184 с.

12. Математика : посібник для педагог. ін-тів / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, В. М. Костарчук, Ю. В. Костарчук, З. Г. Шефтель. К. : Вища школа, 1980. 400 с.
13. Математика : Учеб. пособие для студ. пед. ин-ов / Виленкин Н. Я. и др. Москва : Просвещение, 1977. 352 с.
14. Нелін Є. П., Роганін О. М. Математика. Комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання. Харків : Гімназія, 2018. 288 с.
15. Нелін Є. П., Роганін О. М. Математика. Тренувальні тестові завдання. Харків: Гімназія, 2018. 200 с.
16. Нєдялкова К.В. Загальна методика навчання математики: практичний курс. Навчальний посібник. Одеса : ТОВ «Рекламсервіс», 2014. 256 с.
17. Никольская И. Л. Математическая логика: Учебник / И. Л. Никольская. М. : Высшая школа, 1981. – 124 с.
18. Нікольський Ю. В., Пасічник В. В., Щербіна Ю. М. Дискретна математика. Підручник. Львів : «Магнолія Плюс», 2005. 608 с.
19. Практикум з розв'язування задач з математики / за ред. В. І. Михайловського. Київ : Вища школа, 1989. 423 с.
20. Современные основы школьного курса математики: Пособие для студентов пед. ин-тов / Н. Я. Виленкин, К. И. Дуничев, Л. А. Калужнин, А. А. Столяр. Москва : Просвещение, 1980. 240 с.
21. Соколенко Л. О. Наукові основи шкільного курсу математики: Навчально-методичний посібник для студентів університетів спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Частина 1. Чернігів : «Десна Поліграф», 2020. 144 с.
22. Соминский И. С., Соминский И. С. Л. И., Яглом И. М. Головина. О математической индукции. М. : Наука, 1967. 144 с.
23. Шнеперман Л. Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел: Учеб. пособие для физ.-мат. факультетов пед. Институтов. Москва : Высшая школа, 1982. 223с.

Інформаційні ресурси

1. Офіційний сайт Міністерства науки і освіти України. http://www.mon.gov.ua.
2. Сайт шкільних підручників з математики. https://portfel.info.
3. Цифровая библиотека НАЭС Украины. http://lib.iitta.gov.ua.