УДК 378.091.33-027.22:53 **DOI: https://doi.org/10.24195/2617-6688-2020-2-14**

Як цікаво розповісти студентам про теорію похибок: методичний аналіз викладу основ обробки результатів вимірювань

***Соколов Євгеній Петрович*[1]**
Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна
E-mail: esocolov_g@gmail.com
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-9489-4911
Scopus ID 255731x0

***Лозовенко Оксана Анатоліївна*[2]**
Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна
E-mail: oksana_loz@i.ua
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-0838-6879
Scopus ID 253740x0

У статті автори продовжують доповідати про результати, що були отримані ними в процесі створення спеціального вступного лабораторного практикуму «Пошук фізичних закономірностей». Метою цього практикуму є формування в студентів базових навичок щодо обробки результатів вимірювань. Теоретичною основою практикуму є психологічна концепція поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна, відповідно до якої складну діяльність обробки результатів вимірювань потрібно розбити на прості дії. Кожну з цих дій окремо «пред'явити» студентам та відповідно відпрацювати. Для проєктування першого заняття лабораторного практикуму автори провели методичний аналіз викладу основ обробки результатів фізичних вимірювань, що пропонуються у традиційних лабораторних практикумах. Було виявлено три варіанти викладу цього матеріалу та показано їхній зв'язок із точковою, синкретичною та навчально-інтервальною парадигмами. Для кожного із варіантів викладу подано діаграму дій. У тесті статті розглянуто текст першого, спеціально сконструйованого заняття практикуму з теми – «Поняття про довірчий інтервал» (Лабораторна робота №1 «Дослід Бюффона – де-Моргана»). У першій частині заняття було виокремлено та спростовано положення наївно-точкової та точкової парадигм. Це відбувається двічі: під час формулювання трьох перших «неприємних» аксіом теорії вимірювань та в процесі обговорення результатів вимірювань. У другій частині заняття впродовж чотирьох етапів формувалося правильне відношення між значенням вимірюваної величини та довірчим інтервалом. При цьому було мінімізовано кількість обчислень розглядалася прямо вимірювана величина і студентам пропонувалася «точка опори» у вигляді апріорно відомого істинного значення. Таке заняття дозволяє наочно та яскраво продемонструвати «справедливість» основних «аксіом» теорії вимірювань. Порівняльне вимірювання залишкових знань у студентів, які навчалися за запропонованою методикою, та студентів, які навчалися за традиційною методикою, що було проведено авторами у 2017-2018 навчальному році, доведено краще засвоєння описаного вище матеріалу студентами першої групи.

***Ключові слова**: лабораторна робота, фізичний практикум, довірчий інтервал, навчально-інтервальна парадигма, синкретична парадигма, точкова парадигма.*

Вступ. Авторами було розроблено зміст вступного лабораторного практикуму «Пошук фізичних закономірностей», головною метою якого було б формування в студентів базових навичок щодо обробки результатів вимірювань (Соколов, Лозовенко, 2018). Теоретичною основою була обрана концепція поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна (Гальперін, 1966). Відповідно до цієї концепції складну діяльність обробки результатів вимірювань потрібно розбити на прості дії, кожну з яких необхідно окремо «пред'явити» студентам та спеціально з ними відпрацювати. Виявилося, що для кожного з 14 занять практикуму знайшлася змістовна тема для обговорення. У такій ситуації, так само, як і в традиційному практикумі, на одному (першому) занятті було запропоновано увесь матеріал, що зазвичай об'єднують під назвою «основи теорії похибок». Таке рішення породжує певні проблеми.

1. Кількість термінів та правил «теорії похибок» набагато перевищує рекомендовану кількість

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики Національного університету «Запорізька політехніка»*

[2] *кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики Національного університету «Запорізька політехніка»*

навчальних одиниць, які можна виносити на одне заняття. Чи можна розповісти про все, що треба, не втративши при цьому його якості?

2. Як базова система поглядів розробленого практикуму було запропоновано навчально-інтервальну парадигму – систему поглядів, в основу якої покладене трактування результатів експериментального дослідження як довірчого інтервалу. У зв'язку з цим виникла ще одна проблема: яким чином потрібно побудувати розповідь, щоб акцентовано було саме на цій головній ідеї навчально-інтервальної парадигми?

3. Матеріал, який пропонується є сухим та формальним, що практично всі без виключення визнають: необхідно одразу закріпити його практичним застосуванням до реального вимірювання. В традиційному курсі такою першою лабораторною роботою зазвичай є робота з визначення густини тіла (див., наприклад, (Методичні вказівки, 2009)). А чи не можна замінити її іншою роботою, у якій: а) кількість обчислень була б мінімальною; б) розглядалася б лише величина, як безпосередньо вимірюється; в) було б «apriory» відоме істинне значення величини, що вимірюється дало б це студентам додаткову точку опори; г) яскраво та наочно підтверджувалися б основні "аксіоми" теорії вимірювань.

Мета та завдання дослідження. Здійснити методологічний аналіз викладу основ обробки результатів фізичних вимірювань, що пропонується у традиційних лабораторних практикумах, спроєктувати такий виклад матуріалу практикуму «Пошук фізичних закономірностей», який би відповідав поставленим вимогам; подати текст першого заняття практикуму «Пошук фізичних закономірностей».

Матеріали та методи дослідження. Для проведення методологічного аналізу було використано теоретичні методи дослідження та результати аналізу практичного досвіду роботи зі студентами.

Результати дослідження. З поняттям «обробка результатів фізичного експерименту» пов'язана велика кількість найрізноманітніших понять. У цій публікації розглянемо лише окремі поняття, які безпосередньо використовуються під час обробки результатів фізичного експерименту (рис. 1), залишаючи на майбутнє розгляд понять, що пов'язані з математичними моделями процесу вимірювання.

Поняття, які розглядаються, можна розбити на дві групи. До першої, які пов'язані з об'єктом вимірювання, увійшло поняття «істинне значення вимірюваної величини» (рис. 1, *а*). Визначення його числового значення і є метою експериментального дослідження. До другої групи, які можна назвати «групою фізичних величин, які безпосередньо використовуються під час обробки результатів вимірювання», увійшло шість понять (рис. 1, *б*): це набор результатів вимірювання x_i, три поняття з математичної *теорії точкового оцінювання*: середнє значення $\overline{x}$, абсолютна похибка Δx та відносна похибка ε (Гаусс, 1957); два поняття з математичної *теорії інтервального оцінювання*: довірча ймовірність α та довірчий інтервал I_α (Колмогоров, 1946; Нейман, 1944; Student, 1908).

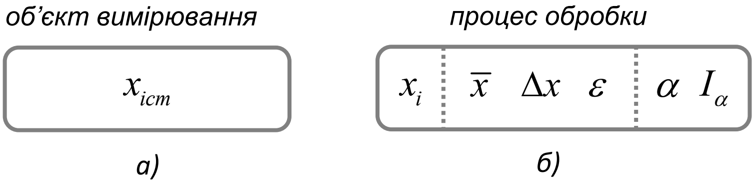

Рис. 1. Перші поняття, які пов'язані з обробкою результатів вимірювання

Приступаючи до аналізу відношень цих понять при різному викладанні «теорії похибок», значимо одну важливу особливість цих понять, яку називаємо фізичними величинами. На відміну від звичайних понять, такі поняття додатково містять ще і числові значення. Тому відношення між фізичними величинами можуть бути двох типів. Перший тип відношень – це відношення між числовими компонентами, що задаються математичними формулами. Тут відсутні жодні суперечності – всі, хто викладає відповідний матеріал, використовують одні й ті самі формули. Другий тип відношень – це змістові відношення, що задаються висловлюваннями. Саме цими відношеннями (трактовками) і відрізняються різні підходи, тому саме ці змістові відношення підлягали аналізу в запропонованій статті.

Перший варіант викладу, якщо ставиться мета повністю розкрити тему «основи теорії похибок». У такому випадку на вивчення цієї теми відводиться повних три заняття (Методичні вказівки, 1983). На наш погляд, такий підхід можна схарактеризувати французьким прислів'ям «*L'art d'ennvyer consiste a tour dire*» – заняття такого типу невимовно нецікаві як для студентів, так і для викладачів. На наш погляд, під час першого знайомства не слід намагатися дати всі результати математичної статистики. Звернімося до аналізу викладів, у яких матеріал є розумно обмеженим. Пропонуємо під час викладу означеного матеріалу орієнтуватись на наявну, вже сформовану у студентів *точкову парадигму* (Соколов, Лозовенко, 2019). Точкова парадигма – це система уявлень, яка базується на твердженні, що результат лабораторної роботи є середнім значенням результатів вимірювань $\overline{x}$. У такому випадку ці уявлення достатньо доповнити поняттям абсолютної похибки Δx , яка зазвичай визначається як «розпорошеність» результатів, а поняттям відносної похибки ε , яке трактується як точність методу вимірювання. Останній крок – репрезентація зручної «інтервальної» форми запису відповіді $x = \overline{x} \pm \Delta x$, яка дозволяє записати одночасно два розрахованих раніше числа (рис. 2, *а*). Такий розумний підхід використовується для методичного забезпечення шести перших вступних лабораторних робіт (Гольдін, 1983).

Аналогічно побудовано виклад матеріалу у випадку *синкретичної парадигми* (Соколов, Лозовенко, 2019). Синкретична парадигма – це розповсюджена система поглядів щодо поняття «результат лабораторного дослідження», в якій до уявлень точкової парадигми додаються уявлення про довірчу імовірність α та довірчий інтервал I_α . У цьому випадку додається ще одна дія – перерахунок абсолютної похибки $\Delta x^\alpha = t_{n-1}^\alpha \Delta x$, де t_{n-1}^α – відповідний коефіцієнт Стьюдента (рис. 2, *б*) (Сохацький, 2015). З практичного погляду, обидва підходи «чудові» – виконав вказані обчислення і «відповідь у кишені». Є лише одне «але»… Залишається незрозумілим, як отримані числа пов'язані з істинним значенням величини, яка вимірюється. Зазвичай для цього відношення пропонується формула «середнє є наближеним значенням істинного». Водночас нами (Соколов, Лозовенко, 2019) була показана неспроможність такого підходу.

Для практикуму «Пошук фізичних закономірностей» була запропонована *навчально-інтервальна парадигма* (Соколов, Лозовенко, 2019). Сутність цієї системи полягає у тому, що результатом вимірювання є *довірчий інтервал*. Не претендуючи на охоплення всіх досягнень математичної статистики, в межах навчально-інтервальної парадигми поняття довірчої імовірності залишається, однак фіксується її значення $\alpha_0 = 0,68$.

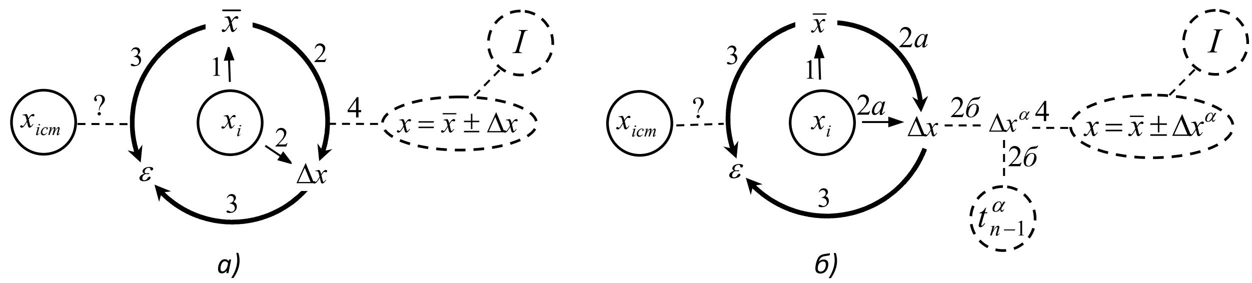

Рис. 2. Діаграми викладу для точкової (а) та синкретичної (б) парадигм

За такого підходу відношення між істинним значенням величини, яка вимірюється, та довірчим інтервалом стає головним (рис. 3). При цьому фізичні величини $\overline{x}$ і Δx позв'язуються з довірчим інтервалом відношенням «$\overline{x}$ та Δx є параметрами довірчого інтервалу». Відзначимо, що такий підхід був реалізований в інших практикумах (Lippmann, 2003; Pillay та ін., 2008). Нове, що додаємо до цієї ідеї – це спеціальна навчальна лабораторна робота «Дослід Бюффона – де-Моргана», яка, на наш погляд, найкраще відповідає зазначеним на початку статті вимогам.

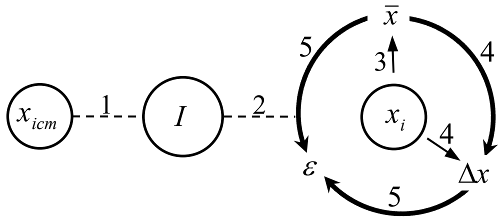

Рис. 3. Діаграма викладу для навчально-інтервальної парадигми

Наводимо текст заняття.

1. Три перші «неприємні» аксіоми теорії вимірювань. Навчаючи дитину, намагаємося подати її чітку та прозору систему знань без жодних двозначностей та сумнівів. І це правильно! Натомість, напевно, буде не зовсім правильно, якщо вже сформований дослідник не буде помічати тих складних та неоднозначних відношень, які існують між Світом та нашим знанням про нього.

Питання про можливість пізнання Світу завжди цікавила філософів, які висловлювали з цього приводу прямо протилежні думки: від найоптимістичніших до найбільш песимістичних. Одну з таких песимістичних думок засвідчують три теореми софіста Горгія (Рассел, 2001):

1. В цьому світі нічого немає.

2. А якщо щось й існує, то воно є непізнаваним.

3. А якщо щось ми і зможемо пізнати, то не зможемо нічого розказати іншому.

Це сумні та дивні твердження. І, можливо, від них можна було б і відмахнутися, якби не одне «але» – людство пам'ятає їх ось уже майже дві з половиною тисячі років! Чому? Напевне, тому, що в них є щось таке, що відображає ті глибокі та повністю неусвідомлені зв'язки, які існують між нашими знаннями та Світом.

Математик Дмитро фон-дер-Флаас (Флаас-фон-дер, 2010), розмірковуючи над системою знань сучасної математики, віднайшов, що чимало в ній можна схарактеризувати словами Горгія. Більш того, він додав до цих сумних тверджень ще і четверте, не менш сумне:

4. А якщо щось і зможемо розказати, то це нікому не буде цікавим.

У фізиці стикаємося з проблемами пізнання вже на найпершому етапі її вивчення – під час виконання навчальних лабораторних робіт. Що це за проблеми, і як фізики їх вирішують, розглянемо в першій лабораторній роботі.

Постановка завдання. Нехай метою дослідження є знаходження шляхом вимірювання істинного значення $x_{іст}$ деякої фізичної величини x. Ми проводимо n вимірювань та отримуємо для вимірюваної величини ряд значень x_1, x_2, …, x_n. Як за цими результатами знайти істинне значення величини, що вимірюється?

І ось тут, практично на першому кроці, у фізиці з'являються три перших неприємних тверджень! Чи можна стверджувати, що результат *i*-го вимірювання (величина x_i), збігається з істинним значенням $x_{іст}$? Тут всі завжди солідарні: «Звичайно, ні!». Ось ми і отримали перше неприємне твердження:

1. Жодне із виміряних значень x_i не буде дорівнювати $x_{іст}$!

Чимало студентів вбачають простий вихід з цього положення. «Потрібно розрахувати середнє арифметичне!», за їхніми словами. Звичайно, розрахувати середнє арифметичне значення усіх результатів вимірювань корисно, але чи буде воно збігатися з істинним? Ні, не буде. Це наше друге неприємне твердження:

2. Середнє значення усіх вимірювань $\overline{x}$ не буде збігатися з $x_{іст}$!

І, нарешті, третє наше твердження фіксує той факт, якщо випадково яка-небудь величина і збігається з $x_{іст}$, то «грім не гряне і фанфари не зазвучать». Тобто ця подія пройде абсолютно непомітно для нас:

3. А якщо випадково або x_i, або $\overline{x}$ і збігається з $x_{іст}$,

то ми ніколи про це не дізнаємося!

Ці три очевидних твердження є для теорії вимірювань найважливішими твердженнями і повністю визначають всю філософію роботи з експериментальними даними. Для того, щоб у вас не залишилося ані краплинки сумнівів у їхній правильності, запрошуємо вас перевірити все на досліді!

2. Спільне проведення лабораторної роботи 1 «Дослід Бюффона – де-Моргана». Член Паризької академії наук граф Жорж-Луї де Бюффон і перший президент Лондонського математичного товариства Аугустус де-Морган увійшли в історію науки не лише як великі спеціалісти у своїх галузях, але і як люди, які не полінувалися підкинути звичайну монетку більше 5000 разів. Навіщо вони це зробили? Вони хотіли дослідним шляхом визначити ймовірність випадання «герба». Сьогодні і ми з вами будемо підкидати монетку, але, звичайно, не 5000 разів, а всього лише три рази.

2.1. Мета лабораторної роботи – визначити шляхом прямих вимірювань ймовірність випадання «герба» під час підкидання монети. Чому було обрано таку незвичну величину для вимірювань? Тому, що нам заздалегідь відоме її істинне значення. Істинне значення імовірності випадання «герба» дорівнює ½, тобто $x_{іст} = 0,5$, і ми отримуємо рідкісну можливість порівняти конкретні результати вимірювань із відомим істинним значенням.

Лабораторна робота зазвичай проводиться таким чином. Усі присутні (позначимо їхню кількість через N) одночасно, на рахунок «один, два, три» підкидають монетку і в тому випадку, якщо в них випав «герб», піднімають руку. Викладач підраховує загальну кількість «гербів» (позначимо це число $N_{герб}$) і заносить цей результат до таблиці. Імовірність випадання «герба» в *і*-ому досліді ($i = 1,\ 2,\ 3$)визначаємо за формулою $x_i = N_{герб} \big/ N$, а середнє арифметичне значення результатів вимірювань – за формулою $\overline{x} = \left(x_1 + x_2 + x_3\right) \big/ 3$. В таблиці 1 наведено результати одного з таких вимірювань (останні два стовбці заповнюються пізніше).

Таблиця 1

Результати експерименту в групі РТ-317 у 2017 році

№	*Загальна кількість учасників,* N	*Кількість «гербів»,* $N_{герб\,i}$	*Ймовірність випадання «герба» в і-ому досліді,* x_i		
1	21	9	$0,429$		
2	21	13	$0,619$		
3	21	10	$0,476$		
Середнє арифметичне значення $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$				$\overline{x} = 0,508$	

Отримані та занесені до таблиці числа засвідчують переконливе підтвердження наведеним раніше твердженням.

– Скажіть, чи збігається результат якогось із вимірювань з істинним значенням?

– Ні, жодного збігання!

– А середнє значення?

– Теж не збігається.

І тут вже не лише ми, а й наші готові сформулювати головний висновок: «Шляхом вимірювань не можна знайти істинне значення величини, яка вимірюється!».

Це дійсно так! Знову виникає запитання: «Якщо ж має бути відповідь лабораторної роботи?».

2.2. Відповідь на запитання «Що є відповіддю?» змінювалася з розвитком людського знання (рис. 4). Колись давно відповіддю вважалася звичайна фраза: «Чи має сенс мені починати війну?» – звернувся більш ніж дві з половиною тисячі років тому великий цар Крез до дельфійського оракула. «Якщо почнеш війну – паде велике царство!» – відповів провісник. Відповідь надихнула Креза, він почав війну, і царство пало! Його царство.

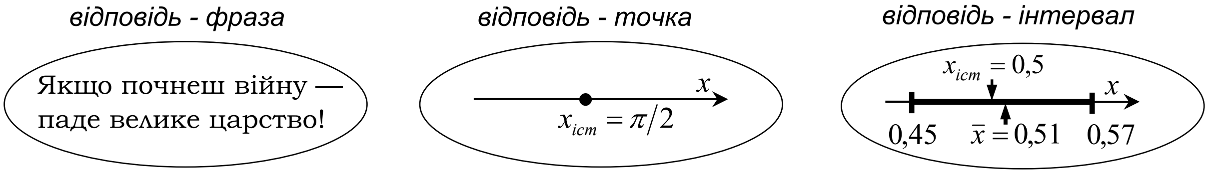

Рис. 4. Три форми відповіді

Розвиток математики привів до кристалізації математичного поняття відповіді. «Відповідь – це число!» – кажуть математики. Настільки всі звикли до цієї думки, що вважають її єдиною правильною. Але це не так! Ми тільки-но з’ясували, що відповідь до лабораторної роботи повинна мати іншу форму.

Запам’ятаємо! В результаті розвитку науки та техніки було прийнято таку думку щодо форми відповіді до лабораторної роботи (експерименту): *відповіддю до лабораторної роботи є не число, як у математиці, а інтервал, який розраховується за певними правилами.* Цей інтервал називається *довірчим* інтервалом. Мається на увазі, що він містить істинне значення величини, яка вимірюється. Наведемо правила, за якими його слід розраховувати інтервал.

2.3. Інтервал можна задати двома способами. Можна задати його крайні точки і записати $a \le x \le b$ (рис. 5, *а*). Такий запис використовують математики. Фізики задають інтервал по-іншому (рис. 5, *б*): вони задають координату його середини $\bar{x}$ (цю величину завжди будемо називати *серединним значенням*) та його півширину Δx (друга назва Δx – абсолютна похибка), після чого записують $x = \bar{x} \pm \Delta x$.

Правила обчислення $\bar{x}$ та Δx такі:

1. Серединне значення (середина довірчого інтервалу) дорівнює середньому арифметичному всіх результатів вимірювань:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

2. Півширина довірчого інтервалу (абсолютна похибка) розраховується за формулою

$$\Delta x = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}}.$$

Величини виду $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$, квадрати яких додаються під коренем, називаються випадковими відхиленнями *і*-го вимірювання.

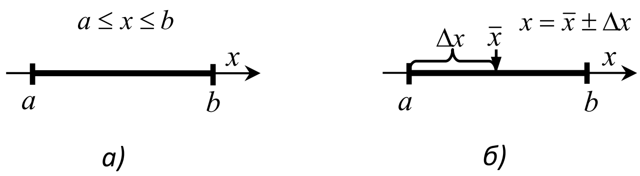

Рис. 5. Задання інтервалу в математиці (а) та у фізиці (б)

Обчислення величин $\bar{x}$ та Δx за наведеними вище формулами є головним складником процесу обробки експериментальних даних. Після знаходження цих величин ми отримуємо можливість записати відповідь у стандартному вигляді:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x.$$

Знайдемо тепер відповідь до мікролабораторної робити, що розглядається.

2.4. Ми вже обчислили серединне значення $\bar{x}$ (середнє арифметичне) для наших вимірювань. Тому нам залишилося обчислити лише півширину довірчого інтервалу (абсолютну похибку) Δx. Обчислення ці доволі об’ємні, і тому відводимо для них у таблиці два допоміжних стовбці (див. таблицю 2).

Першим заповнюється стовбець випадкових відхилень Δx_i, а потім – стовбець їхніх квадратів Δx_i^2. Після цього проводиться сумування та прикінцевий розрахунок півширини довірчого інтервалу (абсолютної похибки). Цей етап дає можливість познайомити студентів з двома «правилами гарного тону» під час роботи з числами.

2.5. Перше «правило гарного тону»: *використовуйте показникову форму запису*.

Пояснення. Ось два завдання на обчислення:

$$\frac{20}{5} = \dots , \qquad \frac{0{,}00002}{500} = \dots$$

Скажіть, яке з них будь-який учень виконає швидко і без помилок, а який може виявитись і «не по зубах»?

Звичайно, всі одразу скажуть: «Перше завдання просте, відповідь тут очевидна – 4. А ось відповідь у другому випадку …?».

Все правильно. Людині подобаються цілі числа, особливо числа першого десятка, ну, можливо, першої сотні. Тут ми легко орієнтуємося. Коли числа стають занадто великими або занадто малими, ми втрачаємо над ними контроль і вимушені «наосліп» покладатися на калькулятор. А що буде, якщо загубиш калькулятор …?

Таблиця 2

Повна таблиця результатів експерименту в групі РТ-317

№	N	$N_{герб\,i}$	*Ймовірність випадання «герба» в і-ому досліді,* x_i	*Випадкове відхилення і-го вимірювання,* $\Delta x_i = x_i - \overline{x}$	*Допоміжний стовбець,* Δx_i^2
1	21	9	$0{,}429$	$-0{,}079$	$62{,}4 \cdot 10^{-4}$
2	21	13	$0{,}619$	$0{,}111$	$123{,}2 \cdot 10^{-4}$
3	21	10	$0{,}476$	$-0{,}032$	$10{,}2 \cdot 10^{-4}$
Серединне значення $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$				$\overline{x} = 0{,}508$	
Абсолютна похибка (півширина довірчого інтервалу) $\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$					$\Delta x = 0{,}0571$

Так ось, цю проблему можна вирішити остаточно, якщо використовувати показниковий запис, тобто якщо перетворювати всі числа у числа першого десятку або сотні, а нулі «складати у мішок» – записувати в показник ступеня числа 10. У другому прикладі можемо 500 представити як $5 \cdot 10^2$, а «незручне» число $0{,}00002$ перетворити у число $20 \cdot 10^{-6}$. Після цього другий приклад перетворюється на елементарний:

$$\frac{0{,}00002}{500} = \frac{0{,}000020}{5 \cdot 10^2} = \frac{20 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^2} = 4 \cdot 10^{-8}.$$

Отже, у подальших лабораторних роботах завжди будемо категорично вимагати, щоб відповіді було записано у показниковому вигляді!

2.6. Повертаємося до побудови довірчого інтервалу. Зазначимо, що вже було обчислено для нього і серединне значення $\overline{x} = 0,508$, і його півширину (абсолютну похибку) $\Delta x = 0,0571$, тому можемо записати «сиру» відповідь як результату експерименту:

$$x = 0,508 \pm 0,0571.$$

Водночас така відповідь ще вимагає доопрацювання.

З позиції математики записи $m = 0,5$ кг і $m = 0,50$ кг абсолютно еквівалентні, а ось відповідно з вимогами теорії вимірювань – ні! В першому випадку стверджується, що нам відома маса тіла з точністю до одного знаку, а в другому – з точністю до другого знаку після коми. Точність вимірювань – важливий параметр. Збільшення точності на порядок (у десять разів) зазвичай потребує принципово нового обладнання, а вартість більш точних вимірювань може бути в тисячу разів більшою ніж вартість звичайних вимірювань.

Коли зазначають все, що показує калькулятор, то вочевидь претендують на те, що ці вимірювання проведено з точністю до десяти знаків після коми! Звичайно, це не так. Тому будемо більш об'єктивними і будемо округляти здобуті результати відповідно до загальноприйнятих правил.

Правила округлення кінцевого результату.

1) Округлення починається з округлення Δx *. Значення абсолютної похибки округляється до однієї значущої цифри, якщо ця цифра буде 2, 3, …, 9, і до двох цифр, якщо першою з них буде 1.*

Приклади:

$$\Delta x = 0,003268 \quad \rightarrow \quad \Delta x = 0,003,$$
$$\Delta x = 517,634 \quad \rightarrow \quad \Delta x = 500,$$
$$\Delta x = 17,634 \quad \rightarrow \quad \Delta x = 17.$$

2) Другим – округлюється $\overline{x}$ *. Його округлюють до цифр того самого розряду, який залишився після округлення абсолютної похибки.*

Приклади:

$$x = 2,7481 \pm 0,0\underline{3} \quad \rightarrow \quad x = 2,75 \pm 0,03,$$
$$x = 43606,7 \pm \underline{5}00 \quad \rightarrow \quad x = 43600 \pm 500,$$
$$x = 542,7 \pm 1\underline{7} \quad \rightarrow \quad x = 543 \pm 17,$$

Використовуючи ці правила, отримуємо остаточну відповідь щодо прописаної лабораторної роботи:

$$x = 0,51 \pm 0,06.$$

2.7. Прийнято доповнювати цю відповідь обчисленням відносної похибки вимірювання ε. Вона обчислюється за формулою

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\overline{x}},$$

зазвичай округлюється до однієї або двох значущих цифр (якщо перша цифра одиниця) і часто записується у відсотках. Відносна похибка, як і інші відносні величини, корисна тим, що полегшує розуміння ситуації.

У нашому випадку $\varepsilon = \Delta x / \overline{x} = 0,12$ або 12%, тому переходимо до запису висновку, в якому засвідчимо всю знайдену нами інформацію.

2.8. Наприкінці зазвичай наводимо висновок до лабораторної роботи: «*Висновок*: у лабораторній роботі виміряли ймовірність випадання «герба». Вона дорівнює $x = 0,51 \pm 0,06$. Відносна похибка вимірювань складає $\varepsilon = 12\%$ ».

3. Загальна дискусія «Четверта «неприємна» аксіома». Було одержано відмінний результат – запропонований інтервал «піймав» істинне значення (рис. 6). Все добре… Але чи завжди довірчий інтервал, який побудований за зазначеними правилами, буде «ловити» істинне значення?

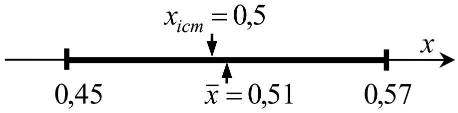

Рис. 6. В мікролабораторній роботі інтервал «піймав» істинне значення!

Це питання завжди викликає певний сумнів, оскільки відбувається конфлікт психології та логіки. Усі ми *бажаємо*, щоб прописані правила були ідеальними, натомість логіка не дає для цього жодних аргументів – лише абсолютно неінформативна відповідь $0 \leq x < \infty$ завжди «ловить» істинне значення. Це спричиняє сформулювати четверте неприємне твердження:

4. Інтервал, побудований за розробленими правилами, «ловить» істинне значення величини, яка вимірюється, усього у 68% випадках.

Тому у третині випадків істинне значення може вислизнути з побудованого інтервалу. А що робити, якщо було отримане технічне завдання забезпечити більш високу імовірність правильної відповіді? В цьому випадку потрібно просто збільшити ширину довірчого інтервалу, помноживши його на спеціальний коефіцієнт (коефіцієнт Стьюдента), який тим більший, чим більшу ймовірність треба забезпечити. Значення цих коефіцієнтів можна знайти в спеціальних довідниках.

Отже, розмову про Світ та його пізнаваність ми завжди завершуємо найголовнішим і найоптимістичнішим, на наш погляд, твердженням А. Ейнштейна: «*Найбільш незрозуміле у нашому світі є те*, *що він усе-таки зрозумілий*».

Результати дослідження. За результатами проведеного методологічного аналізу було побудоване перше заняття практикуму «Пошук фізичних закономірностей». У першій частині заняття було виокремлено і спростовано положення наївно-точкової та точкової парадигм. Це відбувається двічі: під час формулювання трьох перших «неприємних» аксіом, а потім під час обговорення результатів вимірювань.

У другій частині заняття було сформовано правильне відношення між значенням величини, яка вимірювалась, і довірчим інтервалом. Цей процес відбувався у чотири етапи. На першому етапі створювалися відношення «довірчий інтервал імовірно «ловить» істинне значення». На другому етапі відношення «довірчий інтервал може «ловити», а може «не ловити» істинне значення». На третьому етапі формувалося заключне відношення навчально-інтервальної парадигми – «інтервал, побудований за правилом $x = \overline{x} \pm \Delta x$ «ловить» істинне значення у 2/3 випадках ($\alpha_0 = 68\%$)». На четвертому, пропедевтичному, етапі формувалося основне положення інтервальної парадигми – «у випадку, якщо задане більше значення довірчої імовірності, слід збільшити ширину довірчого інтервалу, помноживши абсолютну похибку на коефіцієнт Стьюдента».

Обговорення результатів. Зауваження щодо назви для середини довірчого інтервалу. Оскільки ми стоїмо на позиції інтервальної парадигми, то обрали для цієї величини назву «серединне значення», яка найбільш повно відображає її логічний зміст. Терміни «середнє значення» та «найбільш імовірне значення», які зазвичай використовують для зазначеної величини, на наш погляд, є не дуже вдалими. Перший з них вказує, насамперед, на спосіб обчислення. Крім того, серединне значення довірчого інтервалу не завжди є середнім арифметичним значенням результатів вимірювання. Що стосується другого терміну, то це термін теорії ймовірностей, зв'язок якого з питаннями, що розглядаються, занадто туманний.

На завершення відзначимо, що порівняльне вимірювання залишкових знань у студентів, які навчалися за запропонованою методикою, та студентів, які навчалися за традиційною методикою, що було проведено авторами у 2017-2018 навчальному році, засвідчило краще засвоєння описаного вище матеріалу студентами першої групи (Соколов, Лозовенко, 2018).

Висновки.

Проведений методичний аналіз викладів основ обробки експериментальних даних, відповідає точковій, синкретичній та навчально-інтервальній парадигмам. Сконструйоване навчальне заняття, в якому, по-перше, мінімізована кількість обчислень, по-друге, розглядається прямо вимірювана величина, по-третє, надається студентам «точка опори» у вигляді апріорно відомого істинного значення, і яке, найголовніше, дозволяє наочно та яскраво продемонструвати справедливість основних «аксіом» теорії вимірювань. *Перспективи подальших досліджень* вбачаємо у продовженні конструювання занять, пов'язаних із обробкою результатів вимірювань у межах навчально-інтервальної парадигми. Особливої уваги, на нашу думку, потребує процес переходу від вимірювань параметрів фізичних *об'єктів* до вимірювання параметрів фізичних *законів*.

Література

Гальперин П. Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий. *Исследования мышления в советской педагогике: сборник статей*. М : Наука, 1966. С. 236-276.

Гаусс К. Ф. Избранные геодезические сочинения. Под общ. ред. С. Г. Судакова. Т. 1. М : Изд-во геодезической литературы, 1957. 152 с.

Колмогоров А. Н. К обоснованию метода наименьших квадратов. Т. 1. УМН, 1946. Выпуск 1 (11), С. 57-70.

Лабораторные занятия по физике: Учебное пособие под ред. Л.Л. Гольдина. М : Наука, 1983. 704 с.

Методические указания к лабораторным работам по физике для всех специальностей. Механика, молекулярная физика и термодинамика. Запорожье, ЗМИ, 1983. 59 с.

Методичні вказівки до лабораторних робіт з фізики. Механіка. Молекулярна фізика. Частина 1. Запоріжжя: ЗНТУ, 2009. 90 с.

Нейман Ю. Статистическая оценка как проблема классической теории вероятности. УМН, 1944. Выпуск 10. С. 207-229.

Соколов Є. П., Лозовенко О. А. Вимірювання рівня залишкових знань з фізичного практикуму студентів ЗНТУ. *Тиждень науки*. Тези доповідей науково-практичної конференції, Запоріжжя, 16-20 квітня 2018 р. Запоріжжя : ЗНТУ, 2018. С. 537-539.

Соколов Є. П., Лозовенко О. А. Логічний аналіз уявлень про поняття «Результат лабораторної роботи». *Збірник наукових праць "Педагогічні науки"*, № 86. Херсонський державний університет, 2019. С. 352-359.

Соколов Є. П., Лозовенко О. А. Реалізація ідеї поетапного формування розумовий дій в університетському лабораторному практикумі з фізики. *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія педагогічна*. Вип. 24: STEM-інтеграція як важлива передумова управління результативністю та якістю фізичної освіти. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. С. 80-84.

Сохацький В. П. Методичні вказівки до методик обробки експериментальних результатів лабораторних робіт із курсу загальної фізики. КНУ імені Тараса Шевченка. Київ, 2015. 26 с.

Рассел Б. История западной философии. Ред. Смоленков В.Е., сопровод. ст. Светлов Р.В., Санкт-Петербург : Азбука, 2001. 956 с.

Флаас-фон-дер Д. Г. Теоремы софиста Горгия и современная математика. *Квант*. 2010. №5. С. 16-23.

Lippmann R. F. Students' Understanding of Measurement and Uncertainty in the Physics Laboratory: Social construction, underlying concepts, and quantitative analysis: PhD Thesis. University of Maryland, College Park, 2003. 115 p.

Pillay S., Buffler A., Lubben F., Allie S. Effectiveness of a GUM-compliant course for teaching measurement in the introductory physics laboratory. *European Journal of Physics*, 2008. 29. pp. 647-659.

Student (W. S. Gosset) The problem error of a mean. *Biometrika*, 1908. 6 (1), pp. 1-24.

How to tell about errors not boringly: methodological analysis of expounding the basis of data processing

Sokolov Yevgeny[3]
National University «Zaporizhzhia Polytechnic», Zaporizhzhia, Ukraine

Lozovenko Oksana[4]
National University «Zaporizhzhia Polytechnic», Zaporizhzhia, Ukraine

---

The authors continue to report about results they have obtained in the process of creating a special introductory one-semester Laboratory Physics course «Search for Physics laws». It is known that the teaching experience and the results of the performed tests show that most students do not acquire the basic skills for conducting an experimental research. This course was built on the basis of the algorithm of systematic construction of students' skills for carrying out an experimental research. The authors have used Galperin's stepwise teaching procedure which was developed on the assumption that learning any kind of knowledge involves different kinds of

[3] *Ph. D. in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Physics Department at the National University «Zaporizhzhia Polytechnic»*

[4] *Ph. D. in Pedagogy, Associate Professor of the Physics Department at the National University «Zaporizhzhia Polytechnic»*

actions. The authors have analysed different ways of how to expound the basic ideas of data analysis, and shown their connection with the point, syncretic and training-interval paradigms. Action diagrams are provided for each type of expounding. As an example of using the training-interval paradigm for teaching first-year students of a technical university, a specially designed lab session is presented in the article. The topic of the session is "The concept of a confidence interval". Laboratory Work 1 "The Buffon-de Morgan Experiment". This lab session meets several important requirements: a) the number of computations is minimised; b) a directly measurable quantity is considered; c) students are provided with a "fulcrum" in the form of a priori known true value of a quantity. A general view on measuring physics quantities is summarised in four quite unexpected for students "unpleasant axioms": 1) none of measured values coincides with the true value of a quantity; 2) the mean of measured values does not coincide with the true value of a quantity; 3) even if, by a lucky chance, one of measured values or the mean coincided with the true value of a quantity, we would never know about it; 4) a confidence interval catches the true value of a measured quantity only in 68% of cases. The authors claim that the presented lab lesson allows demonstrating the equity of these "axioms" clearly and vividly, and that the organised laboratory sessions in the new way are significantly more successful in improving students' basic skills of error analysis than traditional laboratory sessions.

***Keywords**: laboratory work, Physics practical course, confidence interval, training-interval paradigm, syncretic paradigm, point paradigm.*

References

Cokhatskyi, V.P. (2015). *Metodychni vkazivky do metodyk obrobky eksperymentalnykh rezultativ laboratornykh robit iz kursu zahalnoi fizyky [Methodical instructions for methods of processing of experimental results of laboratory works in the course of general physics]*. KNU imeni Tarasa Shevchenka. Kyiv [in Ukrainian].

Flaas-fon-der, D.G. (2010). *Teoremy` sofista Gorgiya i sovremennaya matematika [Sophist Gorgias theorems and modern mathematics].* Kvant, Vols 5, pp. 16-23 [in Russian].

Gal`perin, P.Ya. (1966) *Psikhologiya my`shleniya i uchenie o poe`tapnom formirovanii umstvenny`kh dejstvij [Psychology of thinking and the doctrine of the phased formation of mental actions]*. Issledovaniya my`shleniya v sovetskoj pedagogike: sbornik statej. M : Nauka, 1966. S. 236 – 276 [in Russian].

Gauss, K.F. (1957). *Izbranny`e geodezicheskie sochineniya [Selected Surveying Works].* Pod obshh. red. S. G. Sudakova. T. 1. M : Izd-vo geodezicheskoj literatury`[in Russian].

Kolmogorov, A.N. (1946). *K obosnovaniyu metoda naimen`shikh kvadratov [To the justification of the least squares method].* T. 1. UMN, Vols. 1 (11), pp. 57-70 [in Russian].

Laboratorny`e zanyatiya po fizike (1983). [Physics Labs]: Uchebnoe posobie pod red. L.L. Gol`dina. M: Nauka. Glavnaya redakcziya fiziko-matematicheskoj literatury` [in Russian].

Lippmann, R.F. (2003). Students' Understanding of Measurement and Uncertainty in the Physics Laboratory: Social construction, underlying concepts, and quantitative analysis: PhD Thesis. University of Maryland, College Park [in English].

Metodicheskie ukazaniya k laboratorny`m rabotam po fizike dlya vsekh speczial`nostej (1983). [Guidelines for laboratory work in physics for all specialties]. Mekhanika, molekulyarnaya fizika i termodinamika. Zaporozh`e, ZMI [in Russian].

Metodychni vkazivky do laboratornykh robit z fizyky (2009). [Guidelines for laboratory work in physics]. Mekhanika. Molekuliarna fizyka. Chastyna 1. Zaporizhzhia: ZNTU [in Ukrainian].

Nejman, Yu. (1944). *Statisticheskaya oczenka kak problema klassicheskoj teorii veroyatnosti [Statistical estimation as a problem of the classical theory of probability]*. UMN, Vols. 10, pp. 207-229 [in Russian].

Pillay S., Buffler A., Lubben F., & Allie S. (2008). Effectiveness of a GUM-compliant course for teaching measurement in the introductory physics laboratory. *European Journal of Physics*, Vols. 29, pp. 647-659 [in English].

Rassel, B. (2001). *Istoriya zapadnoj filosofii [History of Western Philosophy]*. Red. Smolenkov V.E., soprovod. st. Svetlov R.V., Sankt-Peterburg : Azbuka [in Russian].

Sokolov, Ye.P., & Lozovenko, O.A. (2018). *Vymiriuvannia rivnia zalyshkovykh znan z fizychnoho praktykumu studentiv ZNTU [Measuring the students' level of residual knowledge after the physics labs in ZNTU]*. Tyzhden nauky. Tezy dopovidei naukovo-praktychnoi konferentsii, Zaporizhzhia, 16-20 kvitnia 2018 r. Zaporizhzhia: ZNTU, pp. 537-539 [in Ukrainian].

Sokolov, Ye.P., & Lozovenko, O.A. (2019). *Lohichnyi analiz uiavlen pro poniattia «Rezultat laboratornoi* *roboty» [Logical analysis of ideas about a concept of “the result of laboratory work”].* Zbirnyk naukovykh prats “Pedahohichni nauky”, № 86. Khersonskyi derzhavnyi universytet, pp. 352-359 [in Ukrainian].

Sokolov, Ye.P., & Lozovenko, O.A. (2018). *Realizatsiia idei poetapnoho formuvannia rozumovyi dii v universytetskomu laboratornomu praktykumi z fizyky [Realization of the idea about systematic construction of mental actions in university laboratory physics course].* Zbirnyk naukovykh prats Kamianets-Podilskoho natsionalnoho universytetu imeni Ivana Ohiienka. Seriia pedahohichna. Vyp. 24: STEM-intehratsiia yak vazhlyva peredumova upravlinnia rezultatyvnistiu ta yakistiu fizychnoi osvity. Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi natsionalnyi universytet imeni Ivana Ohiienka, pp. 80-84 [in Ukrainian].

Student (W.S. Gosset). (1908). The problem error of a mean. *Biometrika*, Vols. 6 (1), pp. 1-24 [in English].

Accepted: June 05, 2020