ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені К.Д. УШИНСЬКОГО

К.В. Нєдялкова

Загальна методика навчання математики: практичний курс

Навчальний посібник

Одеса
2014

УДК: 378.147+51

ББК: 74.262

Рекомендовано до друку вченою радою Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського». *Протокол №3 від 30.10. 2014 року*.

Рецензенти:

Акуленко І.А., доктор педагогічних наук, професор кафедри математики і методики навчання математики Черкаського національного університету імені Б. Хмельницького.

Папач О.І., кандидат педагогічних наук, завідувач кафедри природничо-математичних дисциплін Одеського обласного інституту вдосконалення вчителів.

Нєдялкова К.В.

Загальна методика навчання математики: практичний курс [Навчальний посібник] / Катерина Василівна Нєдялкова. – Одеса: …, 2014. - 256 с.

В навчальному посібнику розглянуто актуальні питання формування деяких складових методичної компетентності учителя математики в процесі фахової підготовки у педагогічному ВНЗ, зокрема при вивченні студентами – майбутніми вчителями математики практичного курсу фахової дисципліни «Загальна методика навчання математики». Рекомендовано студентам, викладачам, аспірантам, магістрантам, методистам, учителям.

ISBN

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс загальної методики навчання математики є базовим для вивчення студентами педогогічних ВНЗ – майбутніх учителів математики - методики навчання окремих предметів (спеціальної методики навчання математики); він навчає викладанню математики в школі на основі загальних дидактичних засад з урахуванням виховних можливостей цього предмету та вікових особливостей учнів. Отож, від якості засвоєння студентами цього курсу залежить подальша успішна професійна підготовка майбутніх учителів математики.

Сучасний стан підготовки майбутніх учителів у педагогічних ВНЗ, підходи до її удосконалення висвітлюються у працях А. Алексюка, І. Акуленко, Н. Бібік, І. Богданової, В. Бондаря, С. Гончаренко, Н. Глузман, В.Гриньової, Н. Кічук, Л. Коваль, О. Комар, К. Крутій, Н. Кузьміної, А. Кузьминського, З. Курлянд, А. Линенко, Н. Морзе, Л. Пєтухової, О. Пєхоти, О. Савченко, О. Скафи, С. Скворцової, В. Сластьоніна, Н. Тарасенкова, О. Хижньої, Л. Хомич, А. Хуторського та ін.

Аналіз трактувань поняття *«професійна підготовка вчителя»*, зроблений у дослідженні [154], дозволив авторам дійти висновку, що її слід розуміти як *систему, головною метою якої є формування готовності майбутніх педагогів до професійної діяльності, що виявляється в оволодінні ними знаннями із загальнопедагогічних та спеціальних (фахових) дисциплін, практичних умінь і навичок, розвитку особистісних професійних якостей, розкритті творчого потенціалу особистості, оволодінні методикою роботи з новими технологіями навчання.* Водночас, у зв'язку із затвердженням Постановою Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. № 1341 Національної рамки кваліфікацій [119], оновлюються цілі й професійної підготовки в педагогічних ВНЗ. Тобто, *метою професійної підготовки майбутнього вчителя, у тому числі вчителя математики, є набуття ним професійної компетентності.*

Спираючись на дослідження [179, с. 100-104], під *професійною компетентністю вчителя, у тому числі вчителя математики,* будемо розуміти:

- властивість особистості, що виявляється у здатності до педагогічної діяльності, а саме до організації навчально-виховного процесу на рівні сучасних вимог;

- єдність теоретичної й практичної готовності педагога (предметно-теоретичної, психолого-педагогічної та дидактико-методичної) до здійснення педагогічної діяльності;

- спроможність результативно діяти, ефективно розв'язувати стандартні та проблемні ситуації, що виникають у процесі навчання.

Виходячи із загальної мети підготовки вчителя в педагогічному ВНЗ, узагальнюючи деякі положення дослідження [154], під *підготовкою майбутнього вчителя математики будемо* розуміти:

1) процес набуття майбутнім учителем математики професійної компетентності;

2) результат процесу підготовки, який відповідає бажаному рівню сформованості професійної компетентності.

Відтак, методична компетентність учителя є складовою його професійної компетентності. Набуття майбутнім учителем методичної компетентності є одним із завдань підготовки в педагогічному ВНЗ. Як зазначено у дослідженні [154, с. 36-37], *під* ***методичною компетентністю*** *розуміється системне особистісне утворення, яке виявляється у здатності до здійснення та організації процесу навчання з предмета на рівні сучасних вимог, спроможності успішного розв'язування методичних задач, що ґрунтується на теоретичній і практичній готовності до викладання предмета.* ***Методичні компетенції*** *розглядаються як основа, внутрішній резерв методичної компетентності, що виявляються в наявності предметно-наукових, дидактико-методичних та психологічних знань, умінь розв'язування методичних задач, наявності досвіду діяльності із навчання предмета та емоційно-ціннісного ставлення до цього процесу*.

Узагальнюючи деякі положення дослідження [154], методичну компетентність учителя математики будемо розглядати як композицію таких компонентів: мотиваційно-ціннісного, когнітивного, діяльнісного та рефлексивно-творчого.

Мотиваційно-ціннісний компонент забезпечує спрямованість на ціннісне засвоєння знань з циклу методико-математичних дисциплін та самовдосконалення у професійній діяльності під час навчання математики школярів основної та старшої школи. Він включає систему мотивів, цінностей, бажань, зацікавленість у роботі, позитивне ставлення до навчання математики учнів основної і старшої школи.

Когнітивний компонент представляє систему пізнавальних розумових конструктів, що забезпечують адекватне сприймання, відображення, осмислення інформації щодо сутності навчання математики в основній та старшій школі; пізнання і конструювання процесу навчання математики, що виявляється в наявності аналітико-синтетичних, прогностичних, конструктивно-проектувальних умінь, які базуються на знаннях психолого-педагогічних та методичних дисциплін.

Діяльнісний компонент забезпечує реалізацію професійних мотивів (мотиваційно-ціннісний компонент) і виявляється у здатності вчителя ефективно діяти під час навчання школярів основної та старшої школи математики, актуалізуючи в потрібний момент накопичені професійні знання та вміння (когнітивний компонент) та володіючи технологією розв'язання методико-математичних задач у процесі навчання математики учнів основної та старшої шкіл.

Рефлексивно-творчий компонент розкривається через здатність вчителя до професійної рефлексії, що спрямована на аналізування своєї діяльності із навчання математики учнів основної і старшої шкіл та оцінювання її результату; наявність рефлексивної позиції та самоаналізу;

прагнення до постійного самовдосконалення і здатність творчо підходити до розв'язування методичних задач.

Ураховуючи можливість розгляду методичної компетентності як системи компетентностей нижчого порядку, кожна з яких базується на окремих компетенціях, у дослідженні [154] було деталізовано компонентний склад когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності. С. О. Скворцовою та Я.С. Гаєвець представлено когнітивний та діяльнісний компоненти методичної компетентності через сукупність складових: *нормативної, варіативної, спеціально-методичної, контрольно-оцінювальної, проектувально-моделювальної та технологічної*.

Конкретизуємо сутність деяких складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики.

I. Нормативна складова когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Зміст	***Компетенції***
1) готовність користуватися нормативними документами; 2) здатність реалізовувати цілі і завдання навчання математики в середній школі	1) знання нормативних документів: *Державного стандарту базової і повної середньої освіти*, навчальних програм з математики (5-9 класів, 10-11 класів (рівень стандарту, академічний, профільний і поглиблений рівні); критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів з математики, що навчаються на різних освітніх рівнях; 2) уміння користуватися нормативними документами; 3) досвід користування нормативними документами; 4) знання цілей і завдань навчання математики в основній та старшій школах на різних освітніх рівнях та змісту шкільного курсу математики; 5) уміння реалізовувати цілі, завдання та зміст навчання математики в основній та старшій школах на різних освітніх рівнях; 6) досвід реалізації цілей і завдань навчання математики в основній та старшій школах на різних освітніх рівнях.

ІІ. Варіативна складова когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Зміст	*Компетенції*
1) готовність складати календарне планування для кожного року навчання за програмою з математики будь-якого рівня, за будь-яким підручником, рекомендованим МОН України; 2) готовність працювати за будь-яким підручником для 5-11 класів, рекомендованого МОН України, дидактико-методичними матеріалами, що підкріплюють даний підручник; 3) здатність обирати підручник, дидактико-методичні матеріали, що його підкріплюють, які є найбільш ефективним для досягнення результатів навчання, визначених відповідною програмою; 4) готовність реалізовувати варіативну складову робочих навчальних планів (які визначаються типовими навчальними планами і, в першу чергу, Базовим навчальним планом); 5) здатність обирати відповідні програми і реалізовувати поглиблене вивчення математики, допрофільне та профільне навчання математики, курси за вибором, факультативи з математики; 6) готовність проводити позакласні заходи з математики, індивідуальні заняття з учнями (з метою корекції знань, підготовки до олімпіад різного рівня, участі в Малої академії наук та ін.).	1) знання особливостей реалізації змісту програм до певного року навчання в чинних підручниках; 2) знання про побудову календарно-тематичного планування; 3) уміння складати календарно-тематичний план з математики для кожного року навчання, для кожного з чинних підручників; 4) досвід складання календарно-тематичного плану з математики для кожного року навчання; 5) знання методичних систем, реалізованих у чинних підручниках з математики; 6) уміння визначати відмінності в методичних системах щодо ефективної реалізації вимог до загальноосвітньої підготовки, визначених програмою; 7) уміння виконувати логіко-дидактичний і логіко-математичний аналіз чинних підручників з математики (зокрема з метою визначення порядку опанування окремих тем); 8) досвід аналізування чинних підручників; 9) уміння аналізувати варіативну складову робочих навчальних планів, типових навчальних планів, Базового навчального плану; 10) уміння користуватися програмами для допрофільної підготовки і профільного навчання математики, поглибленого навчання математики, курсів за вибором, факультативів з математики;

11) досвід користування програмами для допрофільної підготовки і профільного навчання математики, поглибленого навчання математики, курсів за вибором, факультативів з математики;

12) знання особливостей організаціїї поглибленого і профільного навчання математики, допрофільної підготовки з математики; проведення курсів за вибором, факультативів з математики;

13) уміння реалізовувати поглиблене і профільне навчання математики; допрофільну підготовку з математики; проводити курси за вибором, факультативи з математики;

14) досвід організаціїї поглибленого і профільного навчання математики; допрофільної підготовки з математики; проведення курсів за вибором, факультативів з математики;

15) знання особливостей організаціїї позакласних заходів з математики, індивідуальних занять з учнями (з різним цілепокладанням);

16) уміння проводити позакласні заходи з математики, індивідуальні заняття з учнями (з різним цілепокладанням);

17) досвід проведення позакласних заходів з математики, індивідуальних занять з учнями (з різним цілепокладанням).

III. Проектувально-моделювальна складова когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Зміст

1) здатність моделювати та організовувати процес навчання математики в основній та старшій школах відповідно до нової редакції Держстандарту (освітня галузь «Математика») і нових навчальних програм з математики;

2) здатність обирати ефективні форми, методи, засоби і прийоми організації діяльності учнів у процесі навчання математики, що відповідають меті, завдання і змісту уроку;

4) здатність проектувати уроки з окремих тем курсу математики основної і старшої шкіл за різними підручниками, користуючись відповідними дидактико-методичними матеріалами;

5) спроможність проектувати систему і послідовність дій учнів з урахуванням їхніх вікових та індивідуальних особливостей, психолого-педагогічних особливостей навчання математики в основній і старшій школах

Компетенції

1) знання про прийоми організації діяльності учнів, зокрема самостійної, та керування цією діяльністю в процесі навчання математики в основній та старшій школах;

2) уміння застосовувати прийоми організації діяльності учнів, зокрема самостійної, та керування цією діяльністю у процесі навчання математики в основній та старшій школах;

3) досвід використання прийомів організації діяльності учнів, зокрема самостійної, та керування цією діяльністю у процесі навчання математики в основній та старшій школах;

4) знання специфіки методів, форм і засобів навчання математики учнів основної і старшої шкіл;

5) уміння добирати необхідні засоби, методи, форми навчання математики учнів основної і старшої шкіл;

6) досвід застосування засобів, форм та методів навчання математики учнів основної і старшої шкіл;

7) знання, вміння і досвід реалізації дидактичних принципів у навчанні математики;

8) знання про типологію уроків і можливі структури уроку математики;

9) уміння складати розгорнути конспекти уроків та конспекти фрагментів уроків з окремих тем шкільного курсу математики за різними підручниками, на різних освітніх рівнях, користуючись

відповідними дидактико-методичними матеріалами;

10) досвід проектування та проведення уроків з окремих тем шкільного курсу математики за різними підручниками, на різних освітніх рівнях, користуючись відповідними дидактико-методичними матеріалами.

Зауважимо, що у даному навчальному посібнику виклад матеріалу відбувається в контексті *компетентнісного підходу до вищої освіти*; проводиться аналіз представлених практичних занять з точки зору формування у студентів – майбутніх учителів математики нормативної, варіативної і проектувально-моделюувальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики.

Зазначимо, що **метою вивчення курсу «Загальна методика навчання математики» є дослідження засад дидактики стосовно математики як навчального предмету основної та старшої шкіл; формування у студентів усіх складових методичної компетентності учителя математики; з'ясування можливостей виховання учнів у процесі навчання математики; підготовка майбутніх фахівців до вивчення спеціальної методики навчання математики.**

Об'єктом вивчення даного курсу є загальні питання, що становлять теоретичні й організаційні основи процесу навчання математики на всіх освітніх рівнях.

Основні завдання курсу підпорядковуються завданням методики навчання математики як навчальної дисципліни в педагогічному ВНЗ і визначаються так:

- засвоєння студентами основ методики навчання математики як науки;
- з'ясування особливостей шкільних програм з математики для основної та старшої шкіл, змісту шкільного курсу математики і підручників для різних типів шкіл (класів);
- формування і розвиток професійної компетентності вчителя математики, зокрема усіх складових методичної компетентності;
- виявлення можливостей використання нових інформаційних і освітніх технологій при навчанні математики в основній і старшій школах;
- формування і розвиток творчих рис особистості майбутнього вчителя математики, вмотивованого до подальшої професійної діяльності.

Важливими з точки зору майбутньої професійної діяльності є наступні ***змістовні лінії даного курсу***:

✓ елементи методичної системи: цілі та завдання, зміст, форми, засоби, методи і принципи навчання математики в основній і старшій школах;

✓ методи розумової діяльності (наукового пізнання і дослідження) та їх використання при навчанні математики в основній і старшій школах;

✓ математичні поняття та методика їх формування в учнів основної і старшої шкіл;

✓ методика навчання доведень теорем учнів основної і старшої шкіл;

✓ задачі у навчання математики учнів основної і старшої шкіл.

Отож, весь зміст курсу загальної методики навчання математики поділено на п’ять змістових модулів, які об’єднані у три модулі («*Елементи методичної системи», «Методи і прийоми розумової діяльності. Математичні поняття і методика їх формування», «Методика навчання учнів доведень теорем. Задачі у навчанні математики»)*, до яких заплановано три модульних контрольних роботи; їх орієнтовні зміст і оцінювання представлено у даному навчальному посібнику, а розподіл балів виглядає так:

МКР №1	МКР №2	МКР №3	Сума
33 бали	34 бали	33 бали	100 балів

Як зазначають Н. Тарасенкова та І. Акуленко у дослідженні [167], *встановлення рівня навчальних досягнень студентів з методики начання математики необхідно здійснювати комплексно*, враховуючи: 1) рівень сформованості методичних знань; 2) рівень сформованості методичних умінь; 3) рівень навчально-пізнавальної активності студентів у процесі навчання, що віддзеркалює змістовий, операційний і мотиваційний аспекти професійної діяльності майбутніх учителів математики. Авторами запропоновано характеристику навчальних досягнень студентів з курсу «Методика навчання математики» за шкалою ECTS, варіант узгодження національної системи оцінювання зі шкалою ECTS та критерії оцінювання навчальних досягнень студентів з курсу «Методика навчання математики», відповідно до яких і здійснюється встановлення рівня навчальних досягнень студентів з курсу «Загальна методика навчання математики».

Практичний курс загальної методики навчання математики спрямований на закріплення і поглиблення теоретичних знань, формування у студентів професійно-необхідних методичних умінь і навичок застосування набутих теоретичних відомостей. Із-поміж них:

- розуміти значення і взаємозв’язок елементів цілісної методичної системи; вміти доцільно визначати цілі та завдання, відбирати зміст навчання, застосовувати адекватні форми, засоби і методи навчання математики учнів основної і старшої шкіл;
- уміти виділяти загальні методи і прийоми розумової діяльності, використовувати їх при навчанні математики учнів основної і

старшої шкіл; володіти спеціальними методами розумової діяльності;

- вміти застосовувати правила визначення і класифікації математичних понять, формулювати означення різних видів, знаходити помилки в «означеннях», застосовувати прийоми запобігання помилок в учнів; володіти методикою формування математичних понять в учнів основної і старшої шкіл;
- уміти доводити теореми шкільного курсу математики, у тому числі різними способами; володіти методикою навчання школярів основної і старшої шкіл доведень теорем;
- володіти методикою навчання учнів розв’язуванню задач, розуміючи їх роль і функції у навчанні математики;
- вміти виконувати логіко-дидактичний і логіко-математичний аналіз навчального матеріалу;
- вміти проектувати і аналізувати урок як основну форму організації навчання математики;
- володіти методикою організації позакласної роботи з математики, методикою проведення факультативних занять з математики.

Формування всіх складових методичної компетентності учителя математики спирається на глибокі та міцні знання, уміння й навички, отримані студентами при вивченні шкільного курсу математики, вищої математики, педагогіки, психології, суспільних наук.

Контролюючі заходи в процесі викладання загальної методики навчання математики здійснюються в рамках модульно-рейтингової системи: проводяться письмові модульні контрольні роботи по основним темам програми. В рейтингову оцінку студента включаються і бали, які можна заробити в процесі самостійної роботи над окремими питаннями деяких тем, які заздалегідь повідомляються студентам, і успішне опанування яких гарантує високий бал з даної дисципліни.

Додамо, що розроблений курс передбачає здобуття студентами деякого досвіду творчої діяльності вчителя математики.

Наприкінці вступного слова хотілося б висловити щіру подяку моїм вчителям і колегам, доцентам кафедри математики і методики її навчання Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К.Д. Ушинського Коростіянець Тамарі Петрівні та Івановій Світлані Володимирівні, чий досвід викладання дисципліни «Методика навчання математики» було проаналізовано і узагальнено в представленому навчальному посібнику; а також професору кафедри Скворцовій Світлані Олексіївні, чиї наукові розробки і дослідження слугували теоретичним підгрунттям розробленого курсу.

Практичне заняття №1

Тема: *Методика навчання математики як наука і як навчальний предмет у системі підготовки вчителя математики. Цілі та зміст математичної освіти у середній школі.*

Мета: засвоєння студентами особливостей методики навчання математики (МНМ) як науки і як навчального предмету; обговорення актуальних питань розвитку шкільної математичної освіти; конкретизація професійних умінь учителя математики; виявлення рівня готовності студентів до вивчення курсу МНМ; засвоєння студентами особливостей математики як навчального предмету в школі; усвідомлення цілей навчання математики; обговорення змісту шкільного курсу математики (ШКМ); з'ясування реалізації дидактичних принципів у процесі навчання математики; аналіз нормативних актів, інструктивно-методичних матеріалів і діючих програм з математики.

1.1. Основні теоретичні питання

які мають опанувати студенти до даного заняття

1.1.1. Методика навчання математики як наука і як навчальна дисципліна: її предмет, цілі та завдання.

Цілі і завданя будь-якої навчальної дисципліни у середній школі визначаються, насамперед, цілями і завданнями, що стоять перед освітою взагалі. Далі із відповідної науки відбирають той матеріал, що підлягає вивченню, підвергають його відповідній дидактичній обробці, визначають, за допомогою яких методів, засобів, форм організації навчання можна реалізувати поставлені цілі та завдання. Інакше кажучи, необхідними для вирішення є такі проблеми: навіщо вчити, що вчити, як вчити.

Такі ж самі питання постають і перед учителем у його повсякденній роботі: при підготовці до викладання нового матеріалу він визначає мету, відбирає навчальний матеріал, складає послідовність його вивчення, намічає методи і прийоми організації навчальної роботи.

Всі поставлені питання щодо математики вирішуються наукою, що має назву „методика навчання математики" (МНМ). Отже, ми можемо дати чітке визначення цієї науки.

МНМ – це наука про математику як навчальний предмет і закономірності процесу навчання математики учнів різних вікових груп [157, с. 6]**.**

У більш широкому розумінні, МНМ – наука про навчання математиці на всіх освітніх рівнях, а також про самостійне її вивчення.

Предметом МНМ є процес навчання учнів математиці у середній школі.

Мета МНМ – забезпечення вирішення задач, покладених суспільством перед математичною освітою у середній школі.

Завдання МНМ – відповісти на чотири основні запитання:

1. Навіщо навчати математики? (Мета навчання);
2. Що треба вивчати? (Зміст навчання);
3. Як треба навчати математики? (Методи, організаційні форми і засоби навчання математики);
4. Як розвивати і виховувати учнів у процесі навчання математики? [157, с. 6].

МНМ належить до циклу педагогічних наук. Вона спирається на математику як науку, відбираючи з неї і піддаючи дидактичній обробці зміст навчального матеріалу, на педагогіку, психологію, логіку, філософію, кібернетику і на узагальнений педагогічний досвід роботи вчителів.

МНМ у педагогічному ВНЗ – це навчальна дисципліна, що входить до структури “ШКМ і методика його навчання”.

Структура МНМ:

1. Загальна методика навчання математики, що розглядає загальні питання, що становлять теоретичні й організаційні основи процесу навчання математики.
2. Спеціальна методика навчання математики, предметом якої є методика навчання окремих розділів і тем ШКМ.

Процес навчання, зокрема математики, - складний процес керування пізнавальною діяльністю школярів, який реалізується вчителями з використанням низки допоміжних засобів – підручників, наочних посібників, технічних засобів навчання (ТЗН) тощо. Тому очевидно, що треба говорити про <u>методичну систему навчання</u> учнів математики. Схематично складові її елементи можна зобразити так (схема 1.1):

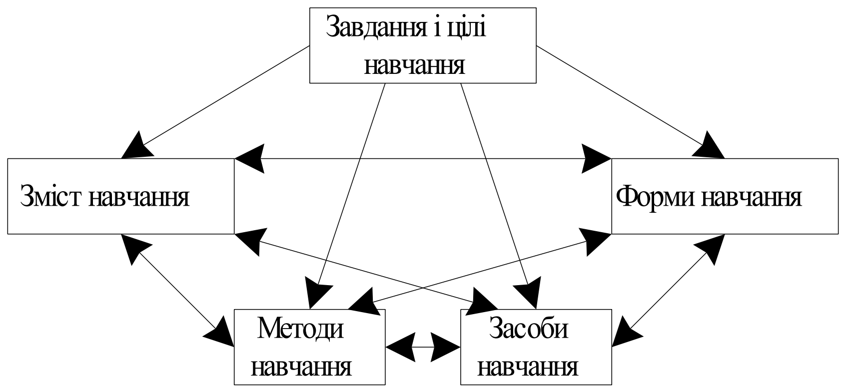


Схема 1.1

<u>Визначальним елементом цієї системи є завдання і цілі навчання</u>, що суттєво впливають на решту елементів системи і, насамперед, на зміст навчання. *Методична система навчання – складне динамічне утворення*. <u>Основними причинами, які викликають удосконалення цієї системи є</u>: зміна завдань навчання, що виникають у зв’язку з розвитком суспільства, науки; розвитком уявлень про пізнавальні можливості учнів, їхню пізнавальну діяльність і про способи керування цією діяльністю.

1.1.2. Історія розвитку шкільної математики і методики її навчання.

Джерела науки МНМ можна побачити у Стародавньому Єгипті, Стародавній Греції. Зокрема Платон і Арістотель розробили свої педагогічні системи, у тому числі і навчання математики.

Велику увагу навчанню математики приділяв видатний чеський педагог Я.А.Коменський, швейцарський педагог І.Песталоцці. Їхні книги (відповідно) "Велика дидактика", де приділялася увага викладанню аріфметики у початковій школі і "Наочне учення про число" вважаються першими працями по МНМ.

Як самостійна наука МНМ сформувалася у ІІ половині XIX ст.

Народження МНМ у Росії можна пов'язати з першим російським підручником аріфметики Л.П.Магніцького, за яким вивчали аріфметику в школах протягом півстоліття. У цій книжці вперше в Росії числа записувалися арабськими цифрами, а не слав'янськими буквами.

Великий вплив на розвиток МНМ спричинили видатні математики різних стран і часів, які завжди проявляли великий інтерес до навчання молодді математики. Серед них – Леонард Ейлер, автор книг "Керівництво до аріфметики", "Універсальна аріфметика", що стали прототипами підручників по систематичним курсам аріфметики й алгебри.

Деякі основи дидактики математики, а саме геометрії, у Росії були закладені Семеном Ємель'яновичем Гурьєвим (1760-1814), членом Петербуржської Академії наук, який розробляв реформу математичної освіти, де ставив і вирішував низку питань загальної методики. Великий вклад у розвиток МНМ було зроблено Н.І.Лобачевським (1792-1856), який виступав за поступовий розвиток понять і не припускав, щоб вивчення напам'ять загальних правил і механічні обчислення заміняли судження, умовиводи. Не можна не згадати А.Н.Острогорського (1840-1907), чий труд "Матеріали по методиці геометрії" присвячений викладанню систематичного курсу геометрії. Ярким представником російської школи дидактики математики був С.І.Шорох-Троцький (1853-1923), що висунув метод доцільних задач, який не втратив значення і сьогодні.

У XX ст. традиції продовжуються – на сучасну МНМ суттєвий вплив здійснюють багато видатних математиків. Серед них – академік А.М.Колмогоров (1903-1987), який протягом багатьох років був представником комісії з математичної освіти у Радянському Союзі та якому належить велика кількість підручників і навчальних посібників. Слід пригадати і А.П.Кисельова (1852-1940), за підручниками якого навчалося не одне покоління, О.Я.Хинчина, О.І.Маркушевича (1908-1979) та інших.

В Україні над проблемами методики математики плідно працювали К.Ф.Лебединцев, О.М.Астряб (1879 - 1962), К.М.Щербина (1864 - 1946) та ін.

Серед відомих праць К.Ф.Лебединцева: "Курс алгебри для средних учебных заведений", "Введение в современную методику математику" та ін.

О.М.Астряб був першим завідувачем кафедри елементарної математики і методики математики Київського педагогічного інституту і працював у ньому з 1920 р. Серед праць: “Наочна геометрія”, яка видавалася в Німеччині, Японії та ін. країнах “Методика викладання стереометрії” та ін.

Треба згадати діяльність у галузі математичної освіти України М.П.Кравчука (1892 - 1942). У 30-х рр. XX ст. за редакцією М.П.Кравчука було видано “Робочі книги з математики”. У 40-х рр. його було репресовано і зіслано до Сибіру; повертаючись із зіслання в Україну, вчений помер.

Виокремимо *основні історичні етапи у розвитку вітчизняної шкільної математичної освіти* [181]*:*

- 1700-1800 рр.: період виникнення перших світських шкіл (1703 р. – “Арифметика” Л.Ф.Магницікого, 1739 р. – переклад на рос. мову “Начал” Євкліда”, 1740 р. – “Універсальна аріфметика” Л.Ейлера);
- 1800 – 1860 рр.: період становлення світської шкільної освіти. Перші дослідження в галузі МНМ (1802 р. – утворено Міністерство народної освіти, 1830 р. – перша методична книга з математики: “Руководство по арифметике” Ф.І.Буссе, книги Н.І.Лобачевського, праця С.Є.Гурьєва “Досвід удосконалення елементів геометрії”, М.В.Остроградський “Руководство начальной геометрії”. Проведені реформи мали ярко виражений становий характер);
- 1860 – 1900 рр.: період розвитку масової середньої освіти. Широке обговорення проблем МНМ (систематичне обговорення проблем математичної освіти у журналах, на з’їздах працівників освіти);
- 1900 – 1917 рр.: період всеросійських з’їздів викладачів математики (період руху за реформу математичної освіти; I, II Всеросійські з’їзди викладачів математики, 1912 р., 1814 р.);
- 1917-1932 рр.: період становлення післяреволюційної школи, пошук нових шляхів математичної освіти, формування МНМ у радянській єдиній трудовій політехнічній школі;
- 1932-1964 рр.: період удосконалювання загальноосвітньої трудової політехнічної школи (діяльність П.С.Александрова, А.Я.Хинчина, А.І.Маркушевича та ін.);
- 1965-1984 рр.: період реформи шкільної математичної освіти та несподіване її припинення (методичні ідеї А.Н.Колмогорова);
- 1984 – 1990 рр.: поновлення ідей А.Н.Колмогорова, 1990 р. - “Концепція розвитку шкільної математичної освіти”; помітна невідповідність змісту середньої математичної освіти вимогам часу;
- 1990 і наступні роки - період сучасних перетворень. Реформування триває.

1.1.3. Сучасне реформування шкільної математичної освіти.

Щодо шкільної математичної освіти, то *основні напрямки її реформування (удосконалення*) на сучасному етапі розвитку такі [20, 21]:

1. Гуманізація математичної освіти;
2. Диференціація та стандартизація математичної освіти:
   - формування стандарту математичної освіти;
   - моніторінг математичної підготовки;
   - забезпечення рівневої диференціації навчання математики;

- реалізація профільної диференціації навчання;
3. Посилення прикладної спрямованості навчання математики;
4. Реформування змісту шкільної освіти:
   - посилення розвиваючої функції навчання математики;
   - модернізація змісту математичної освіти;
   - посилення функціональної лінії;
   - реформування традиційних змістових ліній;
   - удосконалення геометричної освіти;
   - модернізація засобів навчання;
5. Реформування процесу навчання математики:
   - технологізація навчання математики;
   - оновлення методів навчання математики;
   - розширення організаційних форм навчання математики;
   - позашкільні заходи математичної освіти;
6. Підготовка і перепідготовка вчителів математики;
7. Управління математичною освітою.

1.1.4. Математика як шкільний навчальний предмет. Цілі навчання математики. Значення ШКМ у загальній освіті. Зміст ШКМ.

У наш час важко знайти таку галузь людської діяльності, де б можна було б обійтися без математики, причому із часом діапазон її практичного застосування зростає. Математичні методи застосовуються у медицині, історії, лінгвістиці та інших науках. Зростає на тільки кількість наук, що вже не можуть обійтися без математики та її методів, але й обсяг математичних знань, який використовується цими науками. Тому так важливо, щоб молодь мала фундаментальну математичну підготовку.

Визначаючи цілі навчання математики у школі, треба виходити із наступних міркувань:

1) Цілі навчання у школі взагалі.

Навчання у школі повинно забезпечити формування всебічно розвиненої, соціально зрілої особистості кожного школяра. В учнів повинно бути сформовано науковий світогляд, певні наукові, моральні, правові знання.

2) Роль математики у житті суспільства.

Математика виникла на зарі людства, у зв'язку із вирішенням практичних задач. Математичні знання необхідні у практичній, науковій, трудовій діяльності людини.

3) Можливості математики як науки.

Для розвитку суспільства математика володіє великими можливостями. На прикладі математики можна продемонструвати учням, яку роль відіграє наука взагалі, шлях її розвитку, пояснити закони природи, формувати діалектичний світогляд. На уроках математики більше, ніж на інших уроках, ми вчимо дітей мислити.

Отже, із вищеозначеного, можна сформулювати **цілі навчання математики у середній школі**.

Загальноосвітні:

1) формування в учнів предметної математичної компетентності, сутнісний опис якої подано у розділі «Державні вимоги до загальноосвітньої підготовки учнів» програм з математики, і яка забезпечить свідому, активну пізнавальну діяльність у процесі навчання і самоосвіти;
2) оволодіння учнями математичними методами пізнання реальної дійсності;
3) оволодіння учнями усним і письмовим математичним мовленням зі всіма притаманними йому якостями: простотою, логічністю, ясністю.

Практичні:

1) формування в учнів умінь та навичок застосовувати отримані знання для розв'язання життєвих практичних задач, при вивченні інших навчальних предметів;
2) формування вмінь та навичок користування математичним обладнанням;
3) формування в учнів умінь та навичок самостійно здобувати знання (працювати з навчальною і науково-популярною літературою).

Виховні:

1) формування діалектичного світогляду;
2) прищеплення усталеного інтересу до вивчення математики;
3) виховання морально-етичних й естетичних якостей особистості учнів;
4) розвиток мислення, виховання математичної культури.

У своєї практичній роботі з учнями кожен вчитель повинен досягати намічених цілей. Для цього він має *володіти високою математичною культурою, педагогічним тактом, уміти розвинути інтерес учнів до математики і розкрити дітям перспективи при вивченні шкільного предмета, показати математику як науку з широкими можливостями в багатьох сферах людської діяльності*.

На сучасному етапі розвитку шкільної математичної освіти її **зміст** відбивають такі *змістові лінії*:

- числа і дії над ними;
- вирази і їх перетворення;
- рівняння і нерівності;
- функціональна лінія;
- геометричні фігури і їх властивості;
- геометричні побудови;
- геометричні перетворення;
- координати і вектори на площині і в просторі;
- геометричні величини, їх вимірювання та обчислення;
- стохастична лінія (комбінаторика, елементи статистики і теорії ймовірностей).

Важливо, щоб факти, що викладаються у ШКМ охоплювали перевірений, відшліфований зміст математики усіх попередніх періодів її розвитку, а методологія, трактовка математичних понять, мова викладання були сучасними.

Концентричний розвиток основних змістових ліній відображується у *програмах з математики*. У 2005 році було розроблено програму з математики для загальноосвітніх навчальних закладів для 12-річної системи навчання. У 2012 році у зв'язку з переходом на 11-річний термін навчання розроблено нові навчальні програми з математики для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів, для учнів 10-11 класів (*рівень стандарту, академічний, профільний та поглиблений рівні*).

Програми розробляються на основі *Державного стандарту базової і повної середньої освіти*, що набув чинності з 1 вересня 2013 року [42]. У пояснювальній записці програми з математики зазначається, що в основу побудови змісту й організації процесу навчання математики покладено *компетентнісний підхід*, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності як здатності учня успішно діяти в навчальних і життєвих ситуаціях і нести відповідальність за свої дії.

Водночас з розробкою нових програм з математики для початкової, основної та профільної старшої школи, уточнюються чинні и створюються нові нормативні документи щодо обов'язкових результатів навчання, тобто створюються *державні стандарти математичної підготовки*. На черзі - розробка вимірників цього стандарту з метою забезпечення еквівалентності математичної підготовки в усіх областях країни.

Державний стандарт спрямований на виконання завдань загальноосвітніх навчальних закладів II і III ступеня і визначає вимоги до освіченості учнів основної і старшої школи. Він ґрунтується на засадах особистісно - зорієнтованого, компетентнісного і діяльнісного підходів, що реалізовані в освітніх галузях і відображені в результативних складових змісту базової і повної загальної середньої освіти.

При цьому *особистісно зорієнтований підхід* до навчання забезпечує розвиток академічних, соціокультурних, соціально-психологічних та інших здібностей учнів [42, с. 5].

Компетентнісний підхід сприяє формуванню ключових і предметних компетентностей. До ключових компетентностей належить уміння вчитися, спілкуватися державною, рідною та іноземними мовами, математична і базові компетентності в галузі природознавства і техніки, інформаційно-комунікаційна, соціальна, громадянська, загальнокультурна, підприємницька і здоров'язбережувальна компетентності, а до предметних (галузевих) — комунікативна, літературна, мистецька, міжпредметна естетична, природничо-наукова і математична, проектно-технологічна та інформаційно-комунікаційна, суспільствознавча, історична і здоров'язбережувальна компетентності [42, с. 5].

Діяльнісний підхід спрямований на розвиток умінь і навичок учня, застосування здобутих знань у практичних ситуаціях, пошук шляхів інтеграції до соціокультурного та природного середовища [42, с. 6].

Основною метою освітньої галузі "Математика" є формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших освітніх галузей у процесі шкільного навчання, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку їх уваги, пам'яті, логіки, культури мислення та інтуїції [41, с. 20].

Завданнями освітньої галузі «Математика» є [42, с. 20]:

- ✓ розкриття ролі та можливостей математики у пізнанні та описанні реальних процесів і явищ дійсності, забезпечення усвідомлення математики як універсальної мови природничих наук та органічної складової загальної людської культури;
- ✓ розвиток логічного, критичного і творчого мислення учнів, здатності чітко та аргументовано формулювати і висловлювати свої судження;
- ✓ забезпечення оволодіння учнями математичною мовою, розуміння ними математичної символіки, математичних формул і моделей як таких, що дають змогу описувати загальні властивості об'єктів, процесів та явищ;
- ✓ формування здатності логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи у процесі розв'язування навчальних і практичних задач, використовувати математичні знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів;
- ✓ розвиток умінь працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, шукати і використовувати додаткову навчальну інформацію, критично оцінювати здобуту інформацію та її джерела, виокремлювати головне, аналізувати, робити висновки, використовувати отриману інформацію в особистому житті;
- ✓ формування здатності оцінювати правильність і раціональність розв'язання математичних задач, обґрунтовувати твердження, розпізнавати логічно некоректні міркування, приймати рішення в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації.

Державний стандарт складається із:

1) загальної характеристики складових змісту освіти;

2) Базового навчального плану загальноосвітніх навчальних закладів II—III ступеня згідно з додатком 1;

3) державних вимог до рівня загальноосвітньої підготовки учнів згідно з додатком 2.

Інваріантна складова Базового навчального плану формується на державному рівні і є обов'язковою для реалізації в усіх навчальних закладах, що дають повну загальну середню освіту. *Варіативна складова Базового навчального плану* формується загальноосвітнім закладом з урахуванням особливостей регіону та індивідуальних освітніх запитів учнів.

На основі Базового навчального плану, який визначає загальні засади організації навчально-виховного процесу у загальноосвітніх закладах, МОН України розробляє *типові навчальні плани*, в яких зміст освітніх галузей реалізується шляхом вивчення навчальних предметів і курсів інваріантної складової. Загальноосвітні заклади на основі типових навчальних планів складають щороку *робочі навчальні плани*, в яких конкретизується варіативна складова загальної середньої освіти з урахуванням особливостей організації навчального процесу.

Отже, нині школи України працюють за навчальними планами, які певною мірою враховують національні особливості нашої держави і нові соціальні вимоги до форм і рівня освіти. Вони відповідають вимогам рівневої і профільної диференціації, потребам індивідуальної та групової роботи з окремими категоріями учнів.

1.2. Зміст практичного заняття №1

1. Твір-опитування (пропонує викладач) (15 хв.).
2. Основні професійні вміння учителя математики (повідомлення викладача) (10 хв.).
3. Сучасне реформування шкільної математичної освіти [4] (доповіді студентів) (15 хв.).
4. Розв’язання методичних завдань (пропонує викладач) (40 хв.).

1.3. Дидактико-методичні матеріали до практичного заняття №1

1.3.1. Питання до актуалізації опорних теоретичних знань студентів у процесі заняття

1. Дайте означення МНМ як науки.
2. Яка мета МНМ?
3. Сформулюйте завдання МНМ.
4. З якими іншими науками пов’язана МНМ?
5. Навіщо вивчають МНМ у педагогічному ВНЗ?
6. Яка структура МНМ?
7. Що предсталяє собою методична система навчання учнів математики?
8. Які елементи методичної системи є визначальними?
9. Чому методична система – динамічне утворення? Що впливає на необхідність її удосконалення?
10. Книги яких педагогічв можна вважати першими працями з МНМ?
11. Коли МНМ сформувалася як самостійна наука?
12. З яким підручнииком пов’язано народження МНМ у Росії?
13. Які вчені зробили внесок у становлення шкільного курсу геометрії?
14. Які вчені зробили внесок у розвиток методики алгебри, алгебри і початків аналізу?
15. Коли ШКМ сформувався як сукупність чотирьох самостійних предметів? Які це предмети?

16. Які вчені XX століття зробили внесок у розвиток МНМ як науки?
17. Які вчені працювали над проблемами МНМ в Україні?
18. Які сучасні вчені (кінець XX початок XXI століть) зробили значний внесок у розвиток ШКМ та МНМ?
19. Назвіть основні напрямки реформування шкільної математичної освіти на сучасному етапі.
20. Із яких міркувань виходять, визначаючи цілі навчання математики у школі?
21. Сформулюйте цілі навчання математики у середній школі.
22. Перелічте основні змістові лінії ШКМ.
23. На який головний документ спираються автори при розробці шкільних навчальних програм з математики?

1.3.2. Твір-опитування

Мета: оцінка готовності студентів до вивчення курсу «Загальна методика навчання математики»; формування мотивації навчання.

1. Що вивчає математика?
2. Наведіть приклад означення будь-кого математичного поняття. Проаналізуйте структуру наведеного Вами означення. Які види означень Ви знаєте? Наведіть приклади.
3. Як Ви вважаєте: учень – це об’єкт чи суб’єкт навчання? Обгрунтуйте свою точку зору.
4. Як ви розумієте прикладну спрямованість математики як науки? Наведіть приклади.
5. Які засоби навчання Ви знаєте? Від чого залежить вибір конкретних засобів навчання?
6. Які прийоми оцінки діяльності учнів Ви вважаєте найбільш результативними? Чому?
7. Що таке теорема? Логічна структура теорем, види теорем? Який існує зв’язок між прямим і оберненим, протилежним даному і протилежним оберненому твердженнями? На конкретному прикладі проілюструйте зв’язок між всіма чотирма видами теорем.
8. Якими прийомами роботи з книгою Ви володієте? Які прийоми роботи з книгою Ви знаєте, але поки що не використовували?
9. Наведіть знайомі Вам методи розв’язування математичних задач. Які з методів найчастіше застосовуються в ШКМ?
10. Які Ви знаєте форми планування роботи вчителя? Як плануєте свою роботу в університеті? Як аналізуєте результати виконання своїх планів, якщо такі мають місце?

До аналізу твору – опитування

Викладачеві пропонується ознайомитися із роботами студентів, зробити певні висновки і зауваження, проте оцінку не ставити і конкретні результати публічно не оголошувати.

Тексти твору – опитування можуть бути роздрукованими або представленими на слайді.

До аналізу наведемо деякі означення [176]:

Означення з точки зору традиційної технології навчання

Означення з точки зору особистісно-зорієнтованої технології навчання

Освіта — процес трансляції знань, формування умінь і навичок учня.

Освіта — процес формування неповторної, гармонійно розвиненої особистості учня.

Учень — об'єкт навчання, виховання та управлінської діяльності.

Учень — суб'єкт самоосвіти, самопізнання та самовиховання.

Учитель виконує інформаційну, виховну роль.

Учитель виконує консультативну роль, активізує процес самоосвіти і самовиховання учнів.

Управлінська діяльність у навчальному закладі орієнтована на підвищення рівня успішності учнів, поліпшення їхньої поведінки.

Управлінська діяльність у навчальному закладі орієнтована на забезпечення особистісного розвитку учнів і педагогів.

Застосування особистісно-орієнтованої технології спонукає учня бути активним співрозмовником, суб'єктом навчально-виховної діяльності та продуктивної праці.

1.3.3. Основні професійні вміння вчителя математики

(повідомлення викладача)

У *професійному розвитку людини* виокремлюють чотири етапи: виникнення професійних намірів, професійне навчання, професійна адаптація і реалізація особистості у самостійній праці, причому до етапу адаптації відносяться не тільки перші роки праці за фахом, але й навчання у ВНЗ.

Сучасне трактування поняття *«професійна підготовка вчителя»* визначає його як *систему, головною метою якої є формування готовності майбутніх педагогів до професійної діяльності, що виявляється в оволодінні ними знаннями із загальнопедагогічних та спеціальних (фахових) дисциплін,* *практичних умінь і навичок, розвитку особистісних професійних якостей, розкритті творчого потенціалу особистості, оволодінні методикою роботи з новими технологіями навчання.* *Метою професійної підготовки майбутнього вчителя, у тому числі вчителя математики, є набуття ним професійної компетентності.*

Під *професійною компетентністю вчителя, у тому числі вчителя математики,* розуміють:

- властивість особистості, що виявляється у здатності до педагогічної діяльності, а саме до організації навчально-виховного процесу на рівні сучасних вимог;
- єдність теоретичної й практичної готовності педагога (предметно-теоретичної, психолого-педагогічної та дидактико-методичної) до здійснення педагогічної діяльності;
- спроможність результативно діяти, ефективно розв'язувати стандартні та проблемні ситуації, що виникають у процесі навчання.

Під *підготовкою майбутнього вчителя математики* розуміють:

1) процес набуття майбутнім учителем математики професійної компетентності;

2) результат процесу підготовки, який відповідає бажаному рівню сформованості професійної компетентності.

Методична компетентність учителя є складовою його професійної компетентності. Набуття майбутнім учителем методичної компетентності є одним із завдань підготовки в педагогічному ВНЗ. *Під **методичною компетентністю** розуміється системне особистісне утворення, яке виявляється у здатності до здійснення та організації процесу навчання з предмета на рівні сучасних вимог, спроможності успішного розв'язування методичних задач, що ґрунтується на теоретичній і практичній готовності до викладання предмета. **Методичні компетенції** розглядаються як основа, внутрішній резерв методичної компетентності, що виявляються в наявності предметно-наукових, дидактико-методичних та психологічних знань, умінь розв'язування методичних задач, наявності досвіду діяльності із навчання предмета та емоційно-ціннісного ставлення до цього процесу*.

Основні загальнопедагогічні якості вчителя, зазначені в професіограмі (за основу взято професіограми В. О. Сластьоніна, Є. І. Антипової, М. І. Болдирєва): високі моральні якості; психологічна готовність і позитивне ставлення до педагогічної праці; любов до дітей і гуманне ставлення до них; прагнення до професійного самовдосконалення; критичне оцінювання свого досвіду, результатів своєї діяльності; відкритість до застосування нових технологій навчання і виховання; впливовість особистості педагога; допитливість; контактність із учнями, батьками, спільнотою; психолого-педагогічна спостережливість; грамотне та виразне мовлення; інтелектуальна активність; уміння займатися суспільною діяльністю; організаторські вміння та ін.

До *спеціальних якостей,* необхідних учителю математики, віднесемо: 1) математичну спрямованість особистості, тобто загальну орієнтацію особистості в галузі просторово-кількісних явищ, здатність до засвоєння математичних практичних і наукових положень, математичну інтуїцію; 2) сприймання просторово-кількісної інформації, тобто підвищену чутливість до математичного матеріалу, домінування математичних образів, математичну спостережливість; 3) здатність до переробки математичної інформації, тобто здатність до логічного мислення в галузі кількісних і просторових відношень, числової і знакової символіки, до швидкого і широкого узагальненння математичних об'єктів, відношень і дій, гнучкість мисленевих процесів у математичній діяльності; 4) уміння зберігати математичну інформацію: пам'ять на цифри, числа и формули; 5) математичний склад розуму: схильність до математичної точності суджень, доведень, до обчислювальних дій і задач; чіткість просторових уявлень, здатність наочно уявляти абстрактні математичні відношення і залежності.

Учителю математики у своїй практичній роботі необхідно виконувати *різні види діяльності*: аналізувати різноманітну літературу, включаючи програми, підручники, навчально-методичні комплекти та інші засоби навчання, і на цій основі з урахуванням вікових можливостей учнів відбирати необхідний матеріал і з нього конструювати предметний зміст уроку або іншого виду занять зі школярами; планувати свою роботу і вчити учнів планувати навчальну роботу; організовувати різні види діяльності учнів і в певній мірі керувати ними; оцінювати свою діяльність і діяльність учнів, вчити їх оцінці і самооцінці.

Вчитель повинен вміти замислюватися разом із учнями над поставленими проблемами, переживати з ними радість “відкриття” чи успіху при отриманні правильних результатів доведень, розв’язків задач; артистично створити проблемну ситуацію для отримання різних варіантів доведень чи різних способів розв’язування задач за допомогою запитань “Цікаво, що буде, коли…?”, пошук відповіді на які збуджує інтерес учня до математики, втягує його в ров’язання проблем практичного характеру.

Формування методичної компетентності вчителя математики у педагогічному ВНЗ включає забезпечення необхідного рівня знань, умінь, навичок, до числа яких відносяться: синтез наукових, предметних, культурологічних знань; цілісність бачення процесу навчання математики і діяльності вчителя; уміння передбачати наслідок із методичних дій, які використовуються; сформованість потреби в систематичній роботі з самоосвіти; формування позицій вчителя-гуманіста, який володіє методикою проведення педагогічного експерименту. Сформованість цих основ педагогічної майстерності є необхідними умовами для розвитку методичної творчості вчителів математики у майбутній професійній діяльності.

Методична культура вчителя математики передбачає сформованість загальних, спеціальних і конкретних умінь, які сприються на глибокі знання і навички, придбані при вивченні математики, педагогіки, психології, суспільних дисциплін і пов'язані з викладанням математики у системі освіти. Вона є частиною загальної культури особистості вчителя і передбачає придбання студентами деякого досвіду творчої діяльності вчителя математики.

Кваліфікований учитель математики повинен володіти *методичними вміннями*, із-поміж яких: логічно послідовно будувати бесіду евристичного чи проблемного характеру; наочно-образно ілюструвати пояснення матеріалу чи розповідь про математичні факти; логічними наголосами та інтонацією виділяти суттєві ознаки та властивості математичного явища чи факту; передбачати у сприйманні учнями матеріалу можливість появи труднощів і спланувати шляхи їх подолання способом виділення окремих частин і їх ґрунтовного аналізу чи конкретизації; узагальнювати ряд математичних фактів чи способів розв’язування задач (рівнянь, нерівностей, текстових задач тощо); систематизувати матеріал на одному уроці в систему знань, здобутих на попередніх етапах навчання та ін.

Методичні уміння є надзвичайно важливими, бо в сукупності із знаннями теоретичного матеріалу з математики вони відображають рівень здобутої загальної математичної культури майбутнього вчителя.

Дидактичні уміння складаються з методичних умінь по навчанню школярів математики і з психологічних умінь урахування рівня розвитку мисленевих операцій учнів, особливостей сприймання, запам’ятовування ними інформації, рівня розвитку уяви й аналітико-синтетичної діяльності.

Врахування рівня розвитку психічних функцій школярів і відповідно до цього здійснення відбору найефективніших методів викладання і комбінування їх з іншими методами, добір адекватних засобів навчання і логічних прийомів, що забезпечують гнучкість мисленевої діяльності школярів – це *логічно-психологічні уміння* вчителя математики, які є в структурі дидактичних умінь і повинні бути сформовані у майбутнього вчителя математики.

1.3.4. Методичні завдання до практичного заняття №1

1. Зазначте основні компоненти методичної системи навчання учнів математики. Що є визначальним елементом цієї системи? Чи є вона динамічною? Що спричинює її вдосконалення?
2. Проаналізуйте взаємозалежність методів і форм навчання. Наведіть приклади.
3. Проаналізуйте зв'язок методики навчання математики як науки з іншими науками.
4. Якими нормативними документами повинен вміти користуватися вчитель математики?
5. На засадах яких підходів ґрунтується Державний стандарт базової і повної середньої освіти? У чому сутність цих підходів? Що належить до ключових і предметних компетентностей?
6. Які завдання освітньої галузі «Математика», зазначені у Державному стандарті?

7. Охарактеризуйте нову програму з математики 2012 року для учнів 5-9 класів. Що відображено у пояснювальній записці? Яка структура програми?

8. Проаналізуйте Інструктивно-методичний лист про вивчення математики у 2014-2015 навчальному році. Чому в цьому листі зроблено акцент на викладанні математики у 6 класі?

9. Яка роль вивчення математики у формуванні наукового світогляду школярів?

10. Охарактеризуйте компоненти змісту навчання математики та існуючи між ними зв'язки.

11. Яке співвідношення між змістом математики як науки та як навчального предмету?

12. Запропонуйте прийоми, що сприяють посиленню виховних можливостей математики як шкільного предмету.

13. Опишіть обов'язкові результати навчання, наприклад, з теми „Подільність чисел” (6 кл.) (можна обирати інші теми).

14. Наведіть приклад завдання з діючого підручника 6 класу, виконання якого можна (не можна) віднести до обов'язкових результатів навчання з теми „Подільність чисел”.

1.4. Домашнє завдання

1. Реалізація принципів дидактики у процесі навчання математики (з наступною перевіркою у вигляді самостійної роботи контролюючого характеру) [104, розділ 2], [157, с. 41-43], [15, §16].
2. Опишіть обов'язкові результати навчання із самостійно обраної теми із курсу алгебри 8 класу (див. програму з алгебри для 8 класу).
3. Наведіть приклад завдань з діючого підручника геометрії 7 класу, виконання якого 1) можна і 2) (не можна) віднести до обов'язкових результатів навчання (див. програму з геометрії для 7 класу).

1.5. Література

Основна: [15], [45], [88], [96], [99], [104], [114], [115], [143], [144], [157].
Додаткова: [9], [16], [19], [20], [21], [25], [41], [42], [57], [74], [90], [105], [120], [142], [181], [184].

1.6. Аналіз практичного заняття №1

з точки зору формування у студентів нормативної, варіативної та проектувально-моделювальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Нормативна складова

У процесі практичного заняття №1 формується готовність користуватися нормативними документами: студенти – майбутні вчителі математики одержують первинні знання про структуру і зміст Державного стандарту базової і повної середньої освіти, структуру і зміст програм з математики для основної і старшої шкіл. Студенти ознайомлюються з поняттям «критерії оцінювання навчальних досягнень учнів». Також аналізується інструктивно-методичний лист про навчання математики у 2014-2015 навчальному році, з'ясовуються особливості цих методичних рекомендацій. Отже, на початковому рівні формуються вміння користуватися нормативними документами. Крім того, студенти одержують певні знання про цілі і завдання навчання математики в основній і старшій школі на різних освітніх рівнях.

Варіативна складова

Упродовж практичного заняття №1 студентами проводиться первинний порівняльний аналіз програм з математики для старшої школи різних рівнів (рівень стандарту, академічний, профільний, поглиблений рівні). Майбутні учителі математики мають можливість зазначити відмінності щодо цілей і завдань, а також змісту навчання математики в старшій школі на різних освітніх рівнях. Аналізуючи Інструктивно-методичний лист про навчання математики у 2014-2015 навчальному році, робиться акцент на методичних особливостях навчання математики, зокрема у 6 класі. Студенти одержують перший досвід аналізування чинних підручників з математики. Аналізуючи Державний стандарт, майбутні фахівці знайомляться з поняттями «Інваріантна та варіативна складова Базового навчального плану», одержують уявлення про призначення та зміст варіативної складової Базового навчального плану.

Проектувально-моделювальна складова

Практичне заняття №1 передбачає ознайомлення студентів зі структурою і особливостями методичної системи навчання математики: аналізується зміст ШКМ, на конкретних прикладах визначається взаємозалежність методів і форм навчання на уроках математики. Також на занятті формуються знання щодо реалізації дидактичних принципів у процесі навчання математики.

Практичне заняття №2

Тема: *Урок – основна форма організації навчання математики.*

Мета: з’ясувати особливості сучасного уроку з математики; охарактеризувати підготовку вчителя до уроку; докладно проаналізувати переглянутий відео-урок; дослідити особливості самостійної роботи учнів.

2.1. Основні теоретичні питання,
що мають опанувати студенти до даного заняття

2.1.1. Урок як основна форма організації навчання математики.

У 20-х роках XX ст. в Україні виник новий спосіб навчання – *колективний*. Навчання відбувалося без уроків та розкладу, в формі організованого діалогу пар учнів, які, вивчивши різноманітні теми, по черзі навчали один одного. Повністю на цю форму навчання не перейшла ні одна сучасна школа, проте її елементи широко використовуються і нині (наприклад, в інтерактивних технологіях) [138].

Основним підходом до організації навчально-виховного процесу в сучасній школі залишається *класно-урочна система*, за якою провідною формою є ***урок,*** який характеризується єдністю мети, змісту, засобів, методів і форм організації навчальної діяльності.

За М. І. Махмутовим, ***урок – це основна форма організації учителем навчання, що забезпечує реалізацію в єдиному процесі змісту, засобів, форм і методів навчання, і застосовується систематично (у визначених часових границях) для розв’язування дидактичних завдань – навчання (освіти), виховання і розвитку учнів, які об’єднані в колектив класу*** [93]**.**

Мета уроку повинна бути сформульованою конкретно, також повинні бути вказані засоби досягнення цієї мети. Загальна дидактична мета уроку звичайно “розкладається” на три більш конкретні дидактичні цілі: освітні, розвивальні і виховні, що реалізуються у завданнях уроку.

До *освітніх цілей* відносять формування предметної математичної компетентності (зокрема, математичних знань, умінь, навичок); до *виховних* – виховання особистості учнів; до *розвивальних* – розвиток їхнього інтелекту, рис характеру тощо.

Вибір методів, організаційних форм і засобів навчання залежить від поставлених цілей уроку. Обраним методам і прийомам реалізації цілей мають відповідати свої організаційні форми діяльності учнів на уроці: колективні (робота класу), групові (група 2-4 учні) та індивідуальні. Так реалізується взаємозв’язок між основними елементами методичної системи.

У дидактиці існують різні *класифікації уроків*, які побудовані за різними ознаками [132]:

- За основними етапами навчального процесу та його стадіями (типологія уроків С.В.Іванова): вступні уроки; уроки первинного ознайомлення з матеріалом; уроки утворення понять; встановлення законів, правил; уроки застосування одержаних знань на практиці; уроки навичок (тренувальні); уроки повторення і узагальнення; мішані або комбіновані уроки.

- За ознакою основного способу їх проведення (типологія уроків І.М.Казанцева): уроки з різноманітними видами занять, уроки-бесіди; уроки-лекції; уроки-екскурсії; кіноуроки; уроки самостійної роботи учнів у класі; лабораторні і практичні заняття.
- За дидактичною метою (типологія, розроблена ще К.Д.Ушинським): комбінований урок, в якому поєднуються різні цілі і види навчальної діяльності; уроки подання нових знань; уроки закріплення вивченого, зокрема уроки формування навичок і умінь; уроки повторення, систематизації і узагальнення вивченого; уроки перевірки і оцінювання знань.

М.І. Махмутов також пропонує класифікувати сучасний урок *на основі принципу проблемност*і, виділяючи проблемні та непроблемні уроки [93, с. 78].

З погляду логіки процесу навчання урок (комбінованого типу) складається з *3 структурних компонентів*:

1) актуалізації опорних знань і способів діяльності;
2) формування нових знань і способів діяльності;
3) застосування знань, формування умінь і навичок.

Структура уроку, зокрема з математики, може бути такою:

Тема:

Мета:

Завдання:

1) навчальні;
2) виховні;
3) розвивальні.

Тип уроку:

Обладнання:

Хід уроку:

І. Актуалізація опорних знань:

1) постановка мети і завдань уроку (мотиваційний компонент);
2) перевірка ЗУН. Може реалізовуватися через:
   - математичний диктант;
   - фронтальне опитування (або ущільнене опитування);
   - самостійну роботу та ін.;

ІІ. Формування нових знань і способів дій:

1) підготовка до сприйняття нового;
2) ознайомлення із новим матеріалом;
3) первинне закріплення;

ІІІ. Застосування знань, формування умінь і навичок:

1) систематизація і спілкування за темою розділу за раніше вивченим матеріалом;
2) розв’язання задач;

3) підведення підсумків уроку;
4) домашнє завдання.

Не можна не відзначити, що, незважаючи на широке визнання у світі, класно-урочна система має деякі недолікі. Найістотнішими із них є: зорієтованість на середнього учня, часто висока складність навчання для слабких учнів як за рахунок темпу, так і змісту навчання; неможливість у повній мірі реалізувати в навчальному процесі індивідуальні особливості учнів [138, с. 4]. Тому у XX ст. до уроку залучились такі форми, як консультації, заліки, семінари, практичні заняття тощо. У XXI ст. з'являється новий тип уроку – інтерактивний урок, який, на думку О.І. Пометун, здатний подолати існуючи недоліки.

2.1.2. Шляхи підвищення ефективності уроків математикми.

Сформулюємо *вимоги до сучасного уроку математики*:

1) цілеспрямованість;
2) раціональна побудова свідомості учнів (важливо не стільки навчати математичним фактам, як розвивати мислення);
3) опримальний вибір засобів, методів і прийомів навчання і виховання на уроці;
4) організаційна чіткість уроку.

Зазначимо *основні риси високопродуктивного, результативного уроку*:

▪ створення і підтримання високого рівня пізнавального інтересу і самостійної інтелектуальної активності учнів;

▪ економне і доцільне використання часу;

▪ застосування різноманітних методів і засобів навчання, що відповідають цілям уроку;

▪ формування і розвиток особистісних якостей учнів, в першу чергу, механізмів самокерування особистістю, що сприяють навчанню;

▪ обсяг і міцність здобутих ЗУН;

▪ високий рівень міжособових взаємовідносин учителя й учнів.

Досягти цього можливо при *виконанні наступних умов*:

♦ учитель вільно володіє фактичним матеріалом уроку;

♦ матеріал подається на високому рівні, а контролюється згідно здібностей учнів;

♦ учитель знає методику кожного питання, весь арсенал засобів, прийомів і методів;

♦ учитель знає індивідуальні особливості учнів класу;

♦ урок заздалегідь продуманий до дрібниць;

♦ створено відповідний психологічний клімат;

і дотриманні наступних принципів:

♦ зв'язку теорії з практикою: вчити застосовувати знання в незвичних ситуаціях;

♦ доступності: учень діє на межі своїх можливостей, учитель визначає ці можливості і рівень складності завдань;

♦ свідомості: учні повинні знати, який матеріал, коли і навіщо вони вивчатимуть;

♦ міцності: даються основи запам'ятовування;

♦ наочності: відпрацювання вміння спостерігати;

♦ оптимізації: виділення головного, урахування часу.

Отже, підсумовуючи, виділимо *основні шляхи підвищення ефективності уроків математики* [157, с.107]:

1) раціональний вибір мети і завдань уроку, його змісту і структури;
2) застосування методів і прийомів активного навчання учнів;
3) вміле поєднання колективних, групових та індивідуальних форм навчання, спрямоване на впровадження диференціації навчально-виховного процесу на основі досягнення обов'язкових результатів навчання;
4) систематичне використання різних видів самостійної роботи учнів;
5) посилення зв'язку теоретичного матеріалу і задач; посилення прикладної спрямованості;
6) раціональне поєднання традиційних наочних посібників і технічних засобів навчання з новими іформаційними технологіями;
7) удосконалення міжпредметних зв'язків;
8) реалізація органічного зв'язку навчання, розвитку і виховання учнів;
9) удосконалення форм і методів контролю успішності учнів.

2.1.3. Підготовка вчителя до уроку.

Процес підготовки вчителя до уроку – творчий процес, у процесі якого проявляється рівень сформованості всіх компонентів його професійної компетентості.

Для ефективної підготовки до уроку вчителеві необхідні такі матеріали:

1) тематичне (поурочне) планування (на рік або на півроку);
2) календарно-тематичний план (на рік або на півроку);
3) поурочне планування (бажано розробляти комплексно для всієї теми).

Напочатку кожного півріччя складається календарно-тематичний план, який включає весь навчальний матеріал програми, розподілений по уроках. Він затверджується адміністрацією школи. Враховуючи обставини, учитель може вносити певні корективи до календарно-тематичного плану. Автори методичних посібників і підручників пропонують зразки тематичних поурочних планів, які можна взяти за основу, і при цьому враховувати стан успішності учнів у попередньому класі, конкретні особливості учнів і умови праці в даному класі.

Тематичне планування (розробка уроків для всієї теми) є ефективною формою планування роботи вчителя, оскільки дає можливість чітко спланувати систему уроків, повторення з метою актуалізації опорних знань і поточне повторення для закріплення раніше вивченого, передбачити наочні посібники і застосування технічних засобів навчання, самостійні і контрольні роботи, систему вправ, які виконуватимуться на уроці та вдома.

Готуючись до конкретного уроку, вчитель аналізує календарно-тематичний план, конспект попереднього уроку, домашнє завдання, передбачає форми контролю. Далі вивчає матеріал підручника, методичних посібників. Намічає дидактичну мету, відбирає зміст навчального матеріалу, враховуючи потреби рівневої диференціації, моделює структуру уроку, відбирає доцільні методи і прийоми досягнення мети, організаційні форми, засоби навчання. Потім складається план або план-конспект уроку. Корисно розробляти плани-конспекти для всієї теми, або хоча б визначити зміст і продумати декілька наступних уроків згідно тематичного плану.

2.1.4. Інші форми організації навчання математики.

Серед інших форм організації навчання математики виділяють *лекційно-практичну систему*, яка дає змогу забезпечити реалізацію психолого-педагогічних принципів розвиваючого навчання математики, оптимально розподілити навчальний час. Зокрема, за такої системи є можливість швидкими темпами викласти теоретичний матеріал, а основну увагу приділити формуванню навичок і умінь, активізувати самостійну роботу учнів. Така форма організації навчально-виховного процесу, в якій виділяються *лекції, практикуми з розв'язування задач, семінари* є найбільш вдалою у школах (класах) з поглибленим теоретичним і практичним вивченням математики. На семінарах здійснюється глибокий аналіз інформації, можливе як тематичне обговорення матеріалу, так і проблемне обговорення якогось питання.

Серед форм навчання, які спрямовані на активізацію пізнавальної діяльності учнів, важливу роль відіграють різні види *самостійної роботи* як навчального, так і контролюючого характеру.

Серед форм організації навчання математики можна виділити *факультативні заняття, математичні гуртки, математичні вечори, математичні КВК* тощо.

2.2. Зміст практичного заняття №2

1. Перевірка домашнього завдання (20 хв.):
    - Самостійна робота (контролюючого характеру з теми: «Реалізація принципів дидактики у процесі навчання математики») (10 хв.).
    - Обговорення розв'язання методичних завдань (10 хв.).
2. Перегляд уроку з математики (відкритий урок із конкурсу «Вчитель року» або семінарів учителів математики) (необхідне обладнання: комп'ютер, мультимедійний проектор, екран) (45 хв.).
3. Аналіз переглянутого уроку (сумісна робота) (15 хв.).

2.3. Дидактико-методичні матеріали до практичного заняття №2

2.3.1. Питання до актуалізації опорних теоретичних знань студентів у процесі заняття

1. Що представляє собою урок як основна форма організації навчання математики?
2. Охарактеризуйте дидактичні цілі уроку.
3. За якими ознаками проводять класифікацію уроків?
4. Наведіть приклади уроків, які класифіковані за основними етапами навчального процесу та його стадіями. Хто автор цієї типології уроків?
5. Наведіть приклади уроків, які класифіковані за ознакою основного способу їх проведення. Хто автор цієї типології уроків?
6. Наведіть приклади уроків, які класифіковані за дидактичною метою. Хто автор цієї типології уроків?
7. З яких структурних компонентів може складатися урок, зокрема математики?
8. Яким може бути алгоритм уроку комбінованого типу?
9. В якій формі може бути проведена актуалізація опорних знань?
10. Яка послідовність формування нових знань і способів дій як етапу уроку?
11. Яка послідовність застосування знань, формування умінь і навичок як етапу уроку?
12. Сформулюйте вимоги до сучасного уроку з математики.
13. Зазначте основні риси високопродуктивного, результативного уроку.
14. При виконанні яких умов можна досягти високопродуктивного уроку?
15. При виконанні яких принципів можна досягти високопродуктивного уроку?
16. Сформулюйте основні шляхи підвищення ефективності уроків математики.
17. Що представляє собою підготовка вчителя до уроку?
18. Наведіть приклади інших форм організації навчання математики. В яких навчальних ситуаціях їх доцільно використовувати?

2.3.2. Орієнтовний зміст самостійної роботи (контролюючого характеру)

з теми: «Реалізація принципів дидактики у процесі навчання математики»

Варіант 1

1. Охарактеризуйте дидактичний принцип міцності знань у навчанні математики.
2. Зазначте три аспекти реалізації принципу науковості у навчанні математики.

Варіант 2

1. Охарактеризуйте дидактичний принцип свідомості й активності у навчанні математики.
2. Чим може бути викликана недоступність у навчанні математики?

2.3.3. Орієнтовний план аналізу уроку математики

(за основу взято [15; с.117])

1. Загальні відомості про урок (тема, мета уроку, його місце в системі уроків, тип уроку, доцільність вибору саме такого типу, структура уроку та ін.).
2. Дотримання дидактичних принципів навчання (науковість, доступність викладу, свідомість засвоєння, індивідуальний підхід до учнів, прикладна спрямовасть та ін.).
3. Виховання та розвиток учнів на уроці (моральне, екологічне, естетичне та інші види виховання; розвиток логічного мислення тощо).
4. Методи навчання (якими методами і прийомами подавався і закріплювався новий матеріал, чи був реалізований диференційований підхід до учнів, як організовувалася самостійна робота, як задавались додому і перевірялись домашні завдання та ін.).
5. Використання засобів навчання (класна дошка, таблиці, моделі, технічні засоби навчання (проектор, компьютер, інтерактивна дошка), підручник та інші друковані джерела тощо).
6. Методика роботи з поняттями (яким методом вводилося поняття, як закріплювалося відповідне означення, як відпрацьовувалися його суттєві онаки та ін.).
7. Методика роботи з теоремами (оцінка підготовчого (мотивуючого) етапу, робота з формулюванням теореми, метод доведення, закріплення доведення, формування практичних навичок застосування даної теореми, доцільність доведення теореми різними способами та ін.).
8. Методика роботи з задачним матеріалом (доцільність вибору саме цих задач (системи задач), формування в учнів навичок та умінь розв’язування математичних задач тощо).
9. Психологічна обстановка на уроці (активність учнів, керування їхньою увагою, запам'ятанням, ставлення вчителя до учнів, взаємовідносини учнів із учителем та один із одним, поведінка учнів тощо).
10. Оцінювання знань і вмінь учнів.
11. Підготовленість учителя до уроку (загальна математична культура, математичне мовлення, готовність до рефлексії та самовдосконалення та ін.).
12. Інші зауваження.
13. Висновки і пропозиції.

2.3.4. Типи аналізу уроку (за М.І. Махмутовим) [93; с.175]

1) повний аналіз (проводиться з метою контролю за якістю організації навчально-виховного процесу, для вивчення стилю діяльності вчителя, його досвіду);

2) короткий аналіз (проводиться з метою загальної оцінки його якості, науково-теоретичного рівня; відображує лише основні дидактичні категорії);

3) комплексний аналіз (передбачає всебічний аналіз і застосовується при аналізі декількох уроків за однією темою);

4) аспектний аналіз (проводиться при обмеженості часу або при необхідності обговорення лише однієї зі сторін уроку).

При цьому можна виділити такі ***аспекти***:

1) дидактичний (передбачає аналіз уроку за основними дидактичними категоріями: постановка мети уроку, дотримання дидактичних принципів, логіки викладу, застосування засобів і методів навчання, організація самостійної роботи учнів тощо);

2) психологічний (передбачає вивчення психологічного клімату на уроці, відносин між вчителем та учнями, взаємовідносин між учнями, дотримання педагогічної етики тощо);

3) виховний (проводиться з метою вивчення виховного впливу уроку на учнів);

4) методичний (передбачає вивчення діяльності вчителя і учнів, точніше, їхню взаємодію в основних структурних компонентах уроку. Той, хто аналізує, розглядає сукупність методів і прийомів діяльності вчителя і учнів тільки на етапі актуалізації опорних знань або тільки на етапі формування нових понять тощо);

5) організаційний (передбачає вивчення приоймів організації уроку, використання обладнання, наочних засобів, ведення вчителем документації, дотримання санітарно-гігієнічного режиму тощо).

2.4. Домашнє завдання

1. Самостійна робота учнів (доповіді студентів) [157; Частина I, розділ 8, §2 с.110], [15; розділ VII, §21], [104; розділ 6, §3]. Скласти опорний конспект.
2. Перевірка і оцінка результатів навчання (доповіді студентів). Самостійно обрати джерела інформації і скласти опорний конспект.
3. Розглянути план-коспект уроку з теми „Додавання двох чисел з різними знаками” [104; розділ 6, §2, с. 185] і надати його аналіз (дидактичний, методичний і організаційний аспекти).
4. Розглянути конспект інтерактивного уроку [138, с. 73] і надати його аналіз (дидактичний, методичний і організаційний аспекти).

5. Проаналізувати запропоноване тематичне поурочне планування за підручником [99, с. 196-197]; скласти тематичне поурочне планування за підручником [45].

2.5. Література

Основна: [15], [45], [93], [99], [138], [104], [157].
Додаткова: [105], [132], [153], [172].

2.6. Аналіз практичного заняття №2 з точки зору формування у студентів нормативної, варіативної та проектувально-моделювальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Нормативна складова

Аналізуючи переглянутий урок з математики на практичному занятті №2 студенти мають необхідність визначити його місце у системі уроків з даної теми, отже, звернутися до програми з математики певного класу (певного рівня вивчення математики в основній або старшій школі). До того ж, майбутні учителі математики аналізують досвід вчителів реалізації цілей і завдань навчання математики. На даному практичному занятті у студентів продовжує формуватися поняття «перевірка і оцінка результатів навчання»: визначаються критерії оцінювання навчальних досягнень учнів з математики, звертаючись до відповідних нормативних документів, зазначаються способи, функції, принципи перевірки та ін.

Варіативна сладова

Аналіз представленого уроку на цьому практичному занятті формує у студентів знання особливостей реалізації змісту програми до певного року навчання з математики, за певним чинним підручником. Якщо запропонований до розгляду відео-урок відбувався у класі з поглибленим вивченням математики або у профільному класі, тоді студенти мають можливість одержати певні знання щодо організації та проведення поглибленого або профільного навчання математики, водночас набуваючи вмінь користування відповідними програмами. Також на даному практичному занятті майбутні вчителі математики набувають умінь аналізувати і складати тематичний поурочний план для певного року навчання за конкретним підручником.

Проектувально-моделювальна складова

У процесі практичного заняття №2 студенти одержують знання про прийоми організації діяльності учнів, у тому числі самостійної навчальної діяльності учнів при навчанні математики, аналізують досвід учителів організації такої діяльності. Конкретиується сутність поняття «самостійна робота учнів». Обговорюючи представлений урок, студенти аналізують доцільність вибору тих чи інших методів, форм, засобів навчання математики, переймають досвід роботи вчителя математики. Практичне заняття №2 передбачає формування знань студентів про типологію уроків і можливі структури уроку з математики, оцінку доцільності вибору вчителем математики уроку саме такого типу, такої структури.

Практичне заняття №3

Тема: *Засоби навчання математики.*

Мета: обговорення засобів навчання як елементу методичної системи; з’ясування можливостей інтенсифікації навчально-виховного процесу за рахунок доцільного вибору засобів навчання; виявлення особливостей використання деяких засобів навчання математики у навчальному процесі.

3.1. Основні теоретичні питання,
що мають опанувати студенти до даного заняття

3.1.1. Коротка історія розвитку засобів навчання.

З давніх давен для навчання використовували різні засоби. Ще 2000 р. до н. е. засобами навчання математики в Єгипті були папіруси, а у Вавілоні – клінописні дощечкі. У школі писців вони слугували (в сучасному розумінні) підручниками, збірниками задач, розв’язниками та зошитами. Вже в ті далекі часи були створені таблиці множення, таблиці вираження дробів з чисельником 2 та ін. До засобів навчання відносились і засоби обчислення: камінці, вузлики, абак, рахівниця тощо.

За часів Я.Коменського та Г. Песталоцці обов’язковим компонентом навчання вважалася наочність. Я. Коменський вважав наочність “золотим правилом” педагогіки, вважаючи, що навчання слід починати “не словесним міркуванням про речі, а з предметного за ним спостереженням”.

На посиленні наочності у викладанні математики наполягав і видатний педагог-математик М.Остроградський, вважаючи наочність єдиним способом спрощення вивчення геометричних фігур, описової геометрії, фізики та інших наук. Вчений пропонував в кожній школі виготовляти і використовувати таблиці.

Велике значення засобам навчання у педагогічному процесі надавав відомий педагог-методист С.Шорох-Троцький. Саме цим питанням присвячена його робота “Мета і засоби викладання нижчої математики з точки зору вимог загальної освіти” (1892). До засобів навчання він відносив: підручники, задачники, наочні посібники, а також внесення історичного елементу у викладання, пропедевтичні курси, спілкування між учнем і учителем тощо.

Дещо інший погляд на засоби навчання знаходимо в роботах І.Скворцова “Записки з педагогіки. Загальна дидактика” (1903). Він розглядає:

- прямі засоби навчання: демонстрація (наочність), вправи і задачі, заучування напам’ять і повторення, екзамени;
- непрямі засоби навчання: дисципліна з її допоміжними знаряддями (нагороди і покарання).

Отже, зазначимо, що в педагогічній та методичній літературі термін “засоби навчання” вживався досить довгий час у двох значеннях:

1) пристосування для здійснення навчальної діяльності;

2) прийом чи спосіб навчання.

З часом у шкільній практиці і дидактиці терміни “спосіб навчання”, “прийом навчання” і “метод навчання” почали застосовувати для означення характеру і видів навчальної діяльності вчителя й учнів, а термін “засоби начання” – для назви предметів шкільного обладання. Основні засоби навчання математики поділяли на друковані, демонстраційні, обчислювальні, креслярські та ін., як зображено на схемі 2.1.

2.1.2. Класифікація засобів навчання.

Сучасна педагогіка тлумачить поняття засобів навчання ширше.

Засоби навчання – це об’єкти будь-якої природи, які формують навчальне середовище та використовуються вчителем і учнем у процесі навчальної діяльності [12].

Об’єкти, що входять до засобів навчання, можна класифікувати за різними ознаками: складом об’єктів, суб’єктами діяльності, властивостями, впливом на якість знань, способом відтворення факту, що вивчається, та ін.

<u>*За складом об’єктів*</u> засоби навчання поділяються на матеріальні та ідеальні. До *матеріальних засобів* навчання відносяться, наприклад, підручники і навчальні посібники, таблиці, обчислювальні прилади, креслярські інструменти тощо. *Ідеальні засоби навчання* – це ті засвоєні раніше знання та вміння, що використовуються вчителем і учнем для вивчення математики. З них учень дістає способи міркування, доведення, розв’язування задач та ін. Ідеальні засоби начання можуть представлятися у двох формах: вербалізації та матеріалізації.

Вербалізація – це виклад засобів міркування, аналізу, доведення за допомогою мови. Саме за допомогою ідеальних засобів навчання у вербальній формі проводяться фронтальна бесіда з класом з наперед визначеної теми, усне опитування учнів у рамках теоретичного оцінювання тощо.

Матеріалізація – це подання вказаних засобів у вигляді абстрактних символів: графіків, таблиць, схем, діаграм. Ідеальні засоби навчання у матеріальній формі учні використовують, записуючи коротку умову задачі або теореми, виконуючи завдання математичного диктанту, подаючи відповіді до тестових завдань тощо.

Матеріальні та ідеальні засоби навчання не суперечуть, а доповнюють одні одних, впливаючи на якість засвоєння матеріалу учнями. Матеріальні засоби пов’язані в основному з розвитком інтересу та уваги, здійсненням практичних дій, засвоєнням суттєво нових знань. Ідеальні засоби впливають на розуміння матеріалу, логіку міркувань, запам’ятовування, культуру мови, розвиток інтелекту. Між сферами впливу матеріальних та ідеальних засобів немає чітких меж. У кожному конкретному випадку вони по-різному впливають на засвоєння знань та формування вмінь.

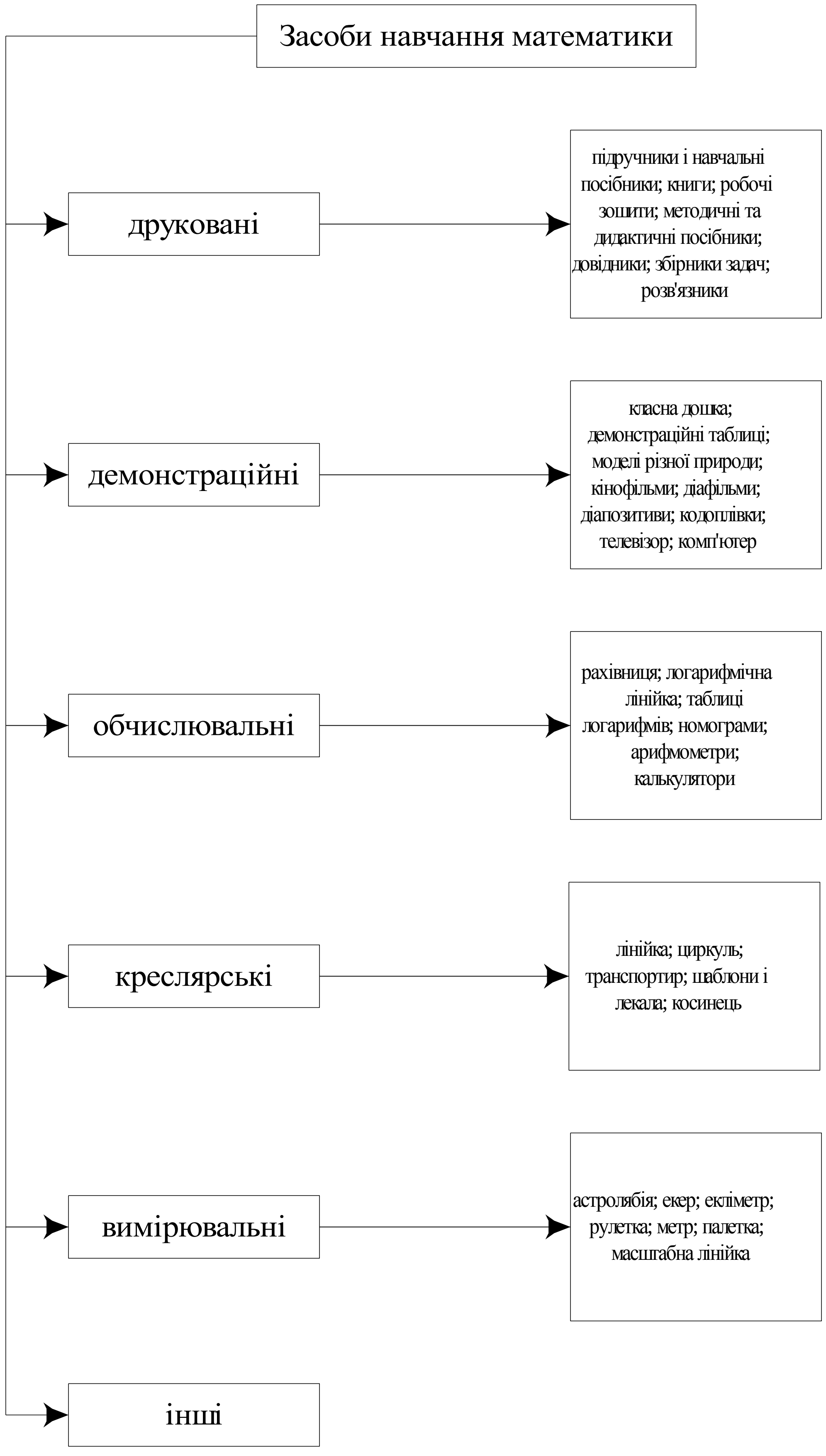

Засоби навчання математики
друковані
підручники і навчальні посібники; книги; робочі зошити; методичні та дидактичні посібники; довідники; збірники задач; розв'язники
демонстраційні
класна дошка; демонстраційні таблиці; моделі різної природи; кінофільми; діафільми; діапозитиви; кодоплівки; телевізор; комп'ютер
обчислювальні
рахівниця; логарифмічна лінійка; таблиці логарифмів; номограми; арифмометри; калькулятори
креслярські
лінійка; циркуль; транспортир; шаблони і лекала; косинець
вимірювальні
астролябія; екер; екліметр; рулетка; метр; палетка; масштабна лінійка
інші

Схема 2.1

За суб'єктами діяльності засоби навчання можна поділити на засоби викладання та засоби учіння. *Засобами викладання* користується в основному вчитель для організації навчального процесу (кодоскоп з кодоплівками, портрети математиків, моделі просторових тіл, методичний посібник для вчителя тощо), а *засобами учіння* – учні для засвоєння знань та формування умінь (зошит, калькулятор, довідники тощо). Іноді засоби викладання відрізняються від засобів учіння лише розмірами (учнівськи креслярські інструменти та шаблони для дошки, демонстраційні таблиці з формулами й учнівські довідкові таблички), іноді місцем і призначенням у навчальному процесі (збірник задач, транспортир, розгортка многогранника). І все ж значна частина засобів навчання використовується як у викладанні, так і в учінні (підручник, комп'ютер, класна дошка).

2.1.3. Засоби навчання як компонент цілісної методичної системи навчання математики. Роль та функції засобів навчання у навчально-виховному процесі.

Кожний з компонентів методичної системи навчання математики впливає на решту компонентів, зокрема і на засоби навчання. У той же час удосконалення засобів навчання дає можливість інтенсифікувати навчальний процес і вимагає змін у методах і формах навчання. За допомогою засобів навчання як невід'ємної складової навчального процесу можна суттєво підвищити продуктивність праці всіх його учасників. Через їх використання у свідомості учнів фіксуються наочні та чуттєві образи предметів та явищ. Наочні образи виступають як обов'язковий елемент і чуттєва основа пізнання. Як знаряддя праці вчителя і учнів, засоби навчання сприяють оптимальному поєднанню теоретичних і практичних компонентів знань, приведенню змісту освіти у відповідність з рівнем розвитку науки і техніки. Засоби навчання можуть бути введені в навчальний процес двома способами: в готовому вигляді або конструюватися в спільній діяльності з учнями.

Існує кілька підходів до визначення *місця і ролі засобів навчання* у навчальному процесі:

♦ Засоби навчання розглядаються головним компонентом методичної системи. Лише засоби навчання забезпечують досягнення поставлених цілей, а решта компонентів (методи, форми і навіть зміст) мають відповідати і обумовлюватися специфікою засобів навчання.

♦ Засоби начання ототожнюються із засобами наочності і контролю, які створюють комфорт, але без них можна й обійтися. Роль засобів навчання принижується, вважається, що засоби не впливають на якість знань учнів, а тому їх використання не є обов'язковим – досить дошки, крейди і пояснень вчителя.

♦ Засоби навчання виконують певні функції в системі діяльності вчителя й учнів. У комлексі з іншими компонентами методичної системи вони забезпечують якість знань і розвиток учнів.

Функції засобів навчання багатогранні: *навчальні, виховні, розвивальні, коригуючі та контролюючі*. За допомогою відповідних засобів навчання можна розкривати зміст та обсяг понять, демонструвати різні шляхи доведення теорем і розв'язування задач, формувати необхідні уміння та навички, організовувати контроль і самоконтроль, здійснювати управління різними видами навчально-пізнавальної діяльності учнів, збуджувати і підтримувати інтерес до вивчення математики тощо.

2.1.4. Характеристика деяких засобів навчання математики.

Підручник є основним засобом навчання, навколо якого групуються всі інші засоби. Підручник спрямований насамперед на учнів, тому і зміст, набір прикладів, мова, стиль викладення розраховані безпосередньо на учня. У той же час підручники є методичним посібником для вчителя, оскільки містить вправи для урока, необхідний теоретичний матеріал.

Кожний шкільний підручник має пройти три стадії: експериментальну перевірку, досвідну перевірку, локально-масове впровадження.

Основні вимоги до підручника: відповідність програмі; науковість і доступність; забезпечення розвитку пізнавальної самостійності, контролю і самоконтролю; відповідні мова та стиль викладення.

Останнім часом з'явився зовсім новий вид підручників – електронний. Але навіть широке застосування комп'ютерних технологій повинно бути використано для підтримки друкованого навчального матеріалу, ефективного розвитку логічного мислення учнів і їхнього просторового уявлення, але не для заміни друкованого слова електронним зображенням, а процесу розв'язання – відповідями на питання вибіркового тесту.

Залучення *комп'ютера* на різних етапах навчання допомагає реалізувати основний принцип особистісно-орієнтованого підходу в освіті – принцип діяльності. ПК може бути використаний для:

- демонстрації нових понять, фактів;
- відпрацьовування алгоритмів розв'язання різних задач;
- тренінгу, що вимагає нових знань і придбання умінь;
- самоперевірки засвоєння понять, знань;
- контролю (перевірки) якості засвоєння знань і набутих навичок;
- творчої навчальної діяльності учнів.

Навіть в умовах широкого використання в різних галузях науки, побуту, навчальної діяльності ПК існує низка ситуацій, коли доцільно використовувати *мікрокалькулятор*, що зумовлено економічними, ергономічними, психологічними та іншими факторами.

Зазначимо основні дидактичні можливості та напрями застосування мікрокалькуляторів:

- мікрокалькулятор слугує засобом обчислень, необхідність в яких визвана логікою навчальної роботи (при розв'язанні задачі, наприклад прикладної, коли найважливішою його частиною є пошук числового результату);
- мікрокалькулятор є засобом проведення численого експерименту, який штучно організується вчителем у навчальних цілях для

підведення до вивчаємого факту, глибокого його засвоєння на творчому рівні;

- мікрокалькулятор вимагає перегляду методики розв'язання широкого класу задач, пропонуючи для цього більш ефективні, порівняно з традиційними, способи. Це стосується задач, пов'язаних з порівнянням дійсних чисел, розв'язанням рівнянь, знаходженням інтегралів, де доцільніше скористуватися приблизними численими методами тощо;
- мікрокалькулятор використовується в доведеннях і міркуваннях. Наприклад, з його допомогою можна встановити факт подільності конкретних чисел, з'ясувати в конкретній геометричній задачі форму досліджуваної фігури, її властивості, а також спростувати помилкове міркування;
- пропедевтика за допомогою мікрокалькулятора подальшого вивчення можливостей ПК і програмування. Особливу роль тут грають мікрокалькулятори, які можна програмувати.

Інтерактивна дошка - останнім часом широко впроваджується у навчальний процес як засіб навчання, що суттєво впливає на використання методів і форм навчання. Це гнучкий інструмент, що об'єднує в собі простоту звичайної маркерної дошки з можливостями комп'ютера; у комбінації з мультимедійним проектором стає великим інтерактивним екраном, одним дотиком руки до поверхні якого, можна відкрити будь-який комп'ютерний додаток або сторінку в Інтернеті й демонструвати потрібну інформацію або просто малювати. Усе, що намальовано або написано, програмне забезпечення інтерактивної дошки дозволяє зберегти у вигляді комп'ютерних файлів, роздрукувати, послати по електронній пошті, навіть зберегти у вигляді Web-сторінок і розмістити їх в Інтернеті. Застосування інтерактивної дошки у системі навчання, зокрема математики, відкриває нові можливості учителям, викладачам щодо інтенсифікації навчального процесу за рахунок заощадження часу, полегшення сприймання інформації учнями, посилює їхню зацікавленість процесом навчання. До того ж, при роботі з інтерактивною дошкою учні засвоюють інформацію не тільки через аудіальний і візуальний канали сприйняття, але й через кінестетичний канал, який майже не використовується в сучасній педагогіці. Тому діти, які недоотримали інформації через цей канал - є потенційними «невстигаючими». Цю ситуацію можуть виправити саме інтерактивні технології - кожен учень інтуїтивно обирає найбільш зручний для себе спосіб сприйняття інформації при роботі з інтерактивною дошкою.

Дидактичний матеріал слугує доповненням до системи задач, запропонованих підручником, є добрим помічником учителю в організації і проведенні навчання математики, зокрема самостійних робіт. Структура навчальних посібників "дидактичний матеріал" приблизно однакова для кожного класу: на початку передмова автора, далі йдуть самостійні роботи 4-6 варіантів, далі варіанти контрольних робіт.

3.2. Зміст практичного заняття №3

1. Перевірка домашнього завдання (25 хв.).
2. Логіко-дидактичний і логіко-математичний аналіз навчального матеріалу (повідомлення викладача) (10 хв.).
3. Підручник як основний засіб навчання. Аналіз сучасних підручників з математики (сумісна робота) (15 хв.).
4. Складання конспектів фрагментів уроків із застосуванням мікрокалькулятора:
   1) на етапі мотивації;
   2) на етапі введення нового матеріалу;
   3) на етапі закріплення;
   (сумісна робота) (30 хв.).

3.3. Дидактико-методичні матеріали до практичного заняття №3

3.3.1. Питання до актуалізації опорних теоретичних знань студентів у процесі заняття

1. В яких значеннях в педагогіці довгий час вживався термін «засоби навчання»?
2. На які види поділялися засоби навчання (на етапі становлення цього поняття)?
3. Дайте означення поняттю «засоби навчання» з точки зору сучасної педагогіки.
4. Як поділяються засоби навчання за складом об’єктів?
5. Дайте тлумачення поняттю «вербалізація» у контексті вивчення засобів навчання.
6. Як розуміти матеріалізацію у контексті вивчення засобів навчання?
7. Як поділяються засоби навчання за суб’єктами діяльності?
8. Охарактеризуйте різні підходи до визначення місця і ролі засобів навчання у навчальному процесі.
9. Які функції засобів навчання?
10. Охарактеризуйте підручник як засіб навчання.
11. Для реалізації яких цілей можна використовувати комп’ютер у навчальному процесі?
12. Зазначте основні дидактичні можливості та напрями застосування мікрокалькулятору на уроках математики.
13. Чим відрізняється мультимедійна дошка від інших технічних засобів навчання?

3.3.2. Питання до перевірки домашнього завдання

1. Зазначте різницю між поняттями «мета уроку» і «завдання уроку».
2. Чи можна вважати повторення і закріплення тотожними поняттями?
3. Який механізм формування умінь і навичок?
4. Що оцінюємо, коли аналізуємо урок?
5. Яки види самостійної роботи учнів на уроці Вам відомі?
6. Що повинен визначити вчитель, плануючи самостійну роботу?
7. Що можна віднести до творчих самостійних робіт з математики?
8. Зазначте способи перевірки домашніх завдань.

3.3.3. Приклад опорного конспекту «Самостійна робота учнів»

Самостійну роботу учнів розглядають як:
1) метод навчання і виховання;
2) форму організації навчання учнів математики;
3) форму організації навчальної діяльності учнів.

Види самостійної роботи:

1. За дидактичною метою:
- навчального характеру;
- контролюючого характеру.

2. За формою проведення:
- усні і письмові;
- класні і домашні;
- короткочасні і довготривалі.

3. За мірою самостійності:
- відтворюючи самостійні роботи за зразком;
- реконструктивно – варіаційні;
- евристичні;
- творчі (дослідницькі).

4. За мірою індивідуалізації:
- загальнокласні;
- групові;
- фронтальні;
- індивідуальні.

5. За джерелом знань і методом:
- робота з підручником;
- робота з довідковою літературою;
- розв’язування і складання задач;
- навчальні вправи;
- твори і описи;
- завдання за схемами, рисунками, графіками.

3.3.4. Приклад опорного конспекту «Перевірка та оцінка результатів навчання»

Способи перевірки домашніх завдань

Письмових вправ і задач:

1) учитель проходить по рядах і перевіряє наявність домашнього завдання у зошитах учнів;
2) учень коментує завдання або читає відповіді – інші перевіряють;
3) один (декілька) учнів біля дошки – інші перевіряють з місця в зошитах;
4) учні перевіряють домашнє завдання один у одного (взаємоперевірка);
5) перевірка зошитів учнів учителем;
6) запропонувати вирішити на дошці (в зошитах) завдання, аналогічне домашньому або саме те, що було задано на дом;
7) правильні відповіді із розв'язанням представлені на слайді, учні проводять самоперевірку або взаємоперевірку та ін.

Теоретичного матеріалу:

1) фронтальне опитування;
2) індивідуальне опитування;
3) ущільнене опитування;
4) різні види тестів (на доповнення, вибіркові: альтернативні, перехресного вибору, множинного вибору);
5) математичний диктант.

Види оцінювання*:* поточне (первинне) і підсумкове (вторинне).

Методи оцінювання: усне, письмове.

Функції перевірки:

- контролююча;
- навчаюча;
- діагностична;
- прогностична;
- розвиваюча;
- орієнтуюча;
- виховна.

Принципи перевірки:

- цілеспрямованість;
- об'єктивність;
- всебічність;
- регулярність;
- індивідуальність.

Форми перевірки:

- індивідуальна;
- групова;
- фронтальна.

3.3.5. Логіко-дидактичний і логіко-математичний аналіз навчального матеріалу

(за основу взято [140, с. 12-15])

Логіко-дидактичний аналіз навчального матеріалу являє собою комплексне дослідження, частина якого, пов'язана із з'ясуванням структури навчального матеріалу, називається *логічним аналізом*. Під логічною структурою навчального матеріалу розуміємо сукупність понять, тверджень і логічних зв'язків між ними. Предметом логічного аналізу є наступні два моменти: 1) виділення найбільш важливих понять і тверджень, які визначають зміст теми, розділу або навчального предмету і 2) виділення тих зв'язків і відношень, в яких знаходяться ці поняття і твердження між собою (внутрішні зв'язки) та з іншими поняттями і твердженнями (зовнішні зв'язки).

Результати логічного аналізу використовуються для *дидактичного аналізу* навчального матеріалу. Навчальний текст, який аналізується, перш за все розбивається на математичний (в словесній або символьній формі) та допоміжний, який виконує різні дидактичні функції і характеризує дидактичний апарат підручника.

Дидактичний аналіз включає: аналіз навчального матеріалу з точки зору реалізації дидактичних принципів, застосування доцільних методів навчання, можливостей навчання основним аспектам математичної діяльності: математичному опису емпіричного матеріалу (МОЕМ), логічної організації математичного матеріалу (ЛОММ) і застосуванню теорії (ЗТ).

Логіко-дидактичний аналіз здійснюється над навчальним матеріалом, різним за обсягом: одне поняття, одне твердження, одне доведення, підтема, тема, розділ і, нарешті, весь курс (див. схему 3.1).

Логіко-математичний аналіз навчального матеріалу – це, так би мовити, читання шкільного підручника уважними і компетентними очами вчителя. Вивчаючи таким чином підручник для визначеного класу, вчитель повинен відповісти собі на низку запитань:

- Які нові поняття, об'єкти вводяться?
- Чи даються їм означення?
- До якого виду відноситься таке означення?
- Чи зустрічалися раніше означення з такою структурою чи ми маємо справу з новою структурою означень?
- Які пізнавальні і навчальні дії можна виконувати для розкриття структури означення і його застосування?
- Який можливий змістовий матеріал для розкриття всіх операцій і дій?

Відповіді на ці запитання дозволять зробити висновок про *логічну структуру означення поняття або об'єкту*.

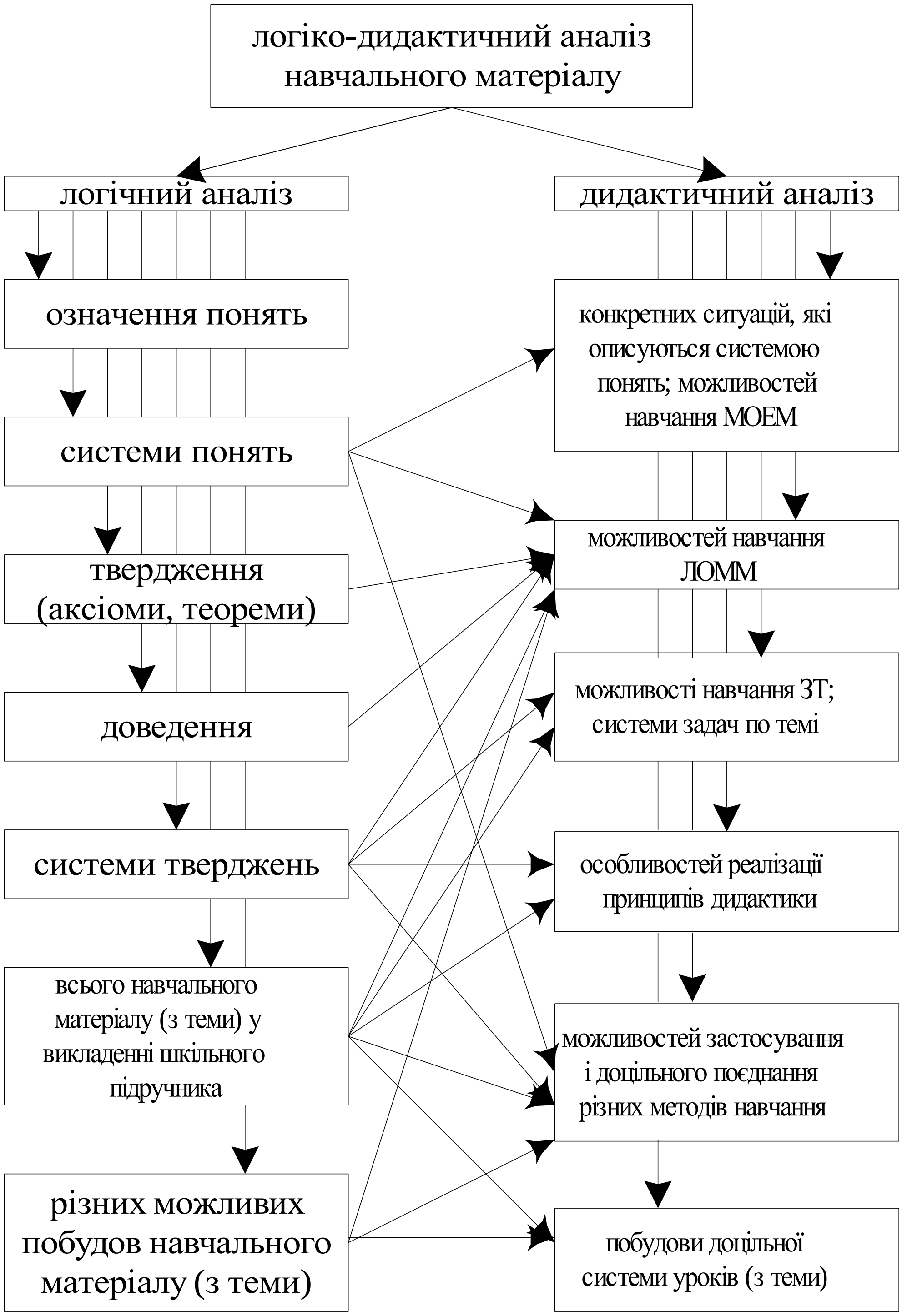


Схема 3.1

Відповіді на наступні запитання дозволять встановити *математичний зміст навчального матеріалу*:

- Яка математична ідея полягає в основі фундаментальних означень, групи означень конкретної теми, розділу підручника або окремого означення?

- Які математичні дії можливі з тими або іншими математичними об’єктами?
- Як обґрунтовуються ті чи інші властивості об’єкту або поняття?
- Які можливі трактовки означуваного поняття?
- Які математичні задачі можуть розкрити найкращим чином те чи інше поняття?

У випадку виконання логіко-математичного аналізу тверджень необхідно з’ясувати їх структуру і встановити, чи зустрічалися раніше твердження з аналогічною структурою, проста чи складна теорема, чи вірно обернене твердження до даної теореми і т. ін., з’ясувати обґрунтованість математичних доведень.

Тільки виконавши логіко-математичний аналіз основних компонентів (теоретичних знань і математичних задач) навчального матеріалу шкільних підручників, можна приступати до розробки методики навчання поняттю, темі, розділу підручника тощо.

3.3.6. Конспекти фрагментів уроків із застосуванням мікрокалькулятора

1) На етапі мотивації [153, с. 208]

11 клас.

Тема: Показникова функція.

У ч и т е л ь: Послухайте задачу: Один жартівник розповів анекдот редактору газети в 9 годин ранку, щоб той надрукував цей анекдот у газеті наступного дня. Таким чином, в 9 годин анекдот знали тільки двоє. Але протягом однієї години кожний з них не утримався й розповів цей анекдот ще одному знайомому, тому в 10 годин анекдот знали четверо. За наступну годину кожний із чотирьох розповів анекдот ще одній людині, так що в 11 годин анекдот знали ще 8 осіб. Цей процес тривав доти, поки анекдот не довідалися один мільйон жителів міста. Через який час це відбулося?

Для розв’язання цієї задачі введемо змінну: нехай через x годин анекдот знають $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{x}$ осіб. Так як один мільйон дорівнює 10^6, то потрібно знайти таке значення x, щоб виконувалась рівність: $2^{x} = 10^6$.

Не володіючи засобами логарифмування *учні знаходять за допомогою мікрокалькулятора* приблизно такий степінь числа 2, при якій виходить число, близьке до 10^6. Таким степенем є 20.

У ч и т е л ь: Дивно! Як швидко розносяться по світу чутки й анекдоти! На наступний день уже не потрібно буде друкувати анекдот у газеті. Через скільки годин його будуть знати 1000000 осіб?

У ч н і: Через 20 годин!

2) На етапі введення нового матеріалу

8 клас. (Поглиблене вивчення математики)

Тема: Поняття ірраціонального числа. Дійсні числа (за підручником [97]).

У ч и т е л ь: Як ми охарактеризуємо множину раціональних чисел?

У ч н і: Цілі числа разом із дробовими утворюють множину раціональних чисел.

У ч и т е л ь: Так, вірно. Можна сформулювати таке означення:

Означення 1. Раціональне число – це число, що можна подати у вигляді відношення $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, а n – натуральне.

Наприклад: $7=\frac{7}{1}$; $-5=\frac{-5}{1}$; $0{,}25=\frac{1}{4}$; $5{,}9=\frac{59}{10}$.

Звідки і назва: у перекладі з латинської мови *ratio* означає «відношення».

Також у 6 класі ви дізнались, що кожне раціональне число можна подати у вигляді скінченого десяткового дробу або у вигляді нескінченого періодичного десяткового дробу. Для дробу $\frac{m}{n}$ таке подання можна отримати виконавши ділення m на n «куточком». Ми, щоб заощадити час, *скористаємося мікрокалькулятором*. Як представимо $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{11}$?

У ч н і: (виконавши обчислення на мікрокалькуляторі): $\frac{5}{8}=0,625$; $\frac{5}{11}=0,454545\ldots$.

У ч и т е л ь: У запису 0,454545… цифри 4 і 5 періодично повторюються, тому таку групу цифр називають <u>періодом дробу</u> і пишуть так: $\frac{5}{11}=0,(45)$.

Цікаво, що будь-який скінчений десятковий дріб і будь яке ціле число можна подати у вигляді нескінченого періодичного десяткового дробу:

0,625=0,625000…=0,625(0);

6=6,000=6,(0).

Тому, зробивши узагальнення, можна сформулювати ще одне означення поняття «раціональне число»:

Означення 2: Раціональним число називається число, яке можна подати у вигляді нескінченого періодичного десяткового дробу.

Сьогодні ми познайомимося з новими числами, які не є раціональними.

Розглянео рівняння: $x^2=2$. Оскільки 2>0, то рівняння має два корені: $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$. Однак число $\sqrt{2}$ - не є раціональним: його не можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m і n – натуральні числа. (Доведення цього факту здійснює вчитель або пропонує всім або деяким учням розібрати його вдома за підручником самостійно).

Отже, не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2, тобто числа $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ - не є раціональними. Вони отримали назву «ірраціональні числа» (приставка «ір» означає заперечення). Приймемо таке означення:

Означення: ірраціональним числом називається число, що можна подати у вигляді нескінченого неперіодичного десяткового дробу.

Наприклад: дізнаємося, чому дорівнює $\sqrt{2}$, *скориставшись мікрокалькулятором*: $\sqrt{2} = 1{,}414213562$. Правильно писати: $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$.

За допомогою спеціальної комп'ютерної програми можна встановити, що $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097\ldots$.

Ви вже зустрічалися із числом π (воно дорівнює відношенню довжини кола до його діаметра); це число також ірраціональне: $\pi = 3{,}1415926535897932384626433832795028841971693993 7\ldots$.

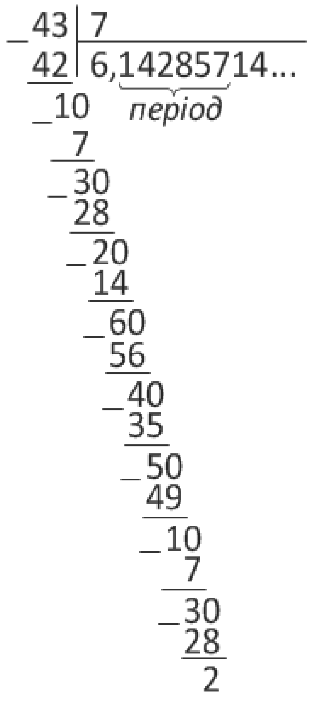
3) На етапі закріплення

<u>Завдання 1:</u>

8 клас.

У ч и т е л ь: Порівняйте $\frac{43}{7}$ і 6,142857143.

Розв'язання: представимо $\frac{43}{7}$ у вигляді десяткового дробу, поділивши 43 на 7 «куточком»:



Отже, $\frac{43}{7} = 6,(142857)$. Тому $\frac{43}{7} < 6{,}142857143$.

У ч и т е л ь: Цікаво, що якщо б ми *скористалися мікрокалькулятором* і поділили б 43 на 7 (спробуйте, діти, це зробити), то одержали б округлене значення: $6{,}142857143$. Тоді ми б дали невірну відповідь: $\frac{43}{7} = 6{,}142857143$. Тому так важливо вміти інтерпретувати результати обчислень на мікрокалькуляторі та володіти технікою ділення «куточком»!

Завдання 2 [29, с. 233].
10 клас (з поглибленим вивченням математики).
У ч и т е л ь: *Задайте на мікрокалькуляторі будь-яке число*. Знайдіть його синус, знайдіть синус того, що отримали, і так далі. На якому кроці і на якому значенні перестали змінюватися результати? Чому?
(Додому можна задати проробити те саме з косинусом).

3.4. Домашнє завдання

Скласти розгорнутий план-конспект уроку із застосуванням комп'ютерних технологій (комп'ютерно-орієнтований урок) із самостійно обраної теми, попередньо проаналізувавши навчально-методичний посібник [149] (подати в електронному вигляді та надіслати на електронну пошту викладачеві).

3.5. Література

Основна: [12], [15], [24], [29], [97], [104], [140], [153], [157].
Додаткова: [36], [65], [68], [77], [105], [116], [128], [133], [155], [160], [171].

3.6. Аналіз практичного заняття №3 з точки зору формування у студентів нормативної, варіативної та проектувально-моделювальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Нормативна складова

Складаючи конспекти фрагментів уроків на данному практичному занятті, студенти звертаються до програм з математики для 8, 10 класів, набуваючи знань і вмінь користуватися нормативними документами. До того ж, виконуючи домашнє завдання і проектуючи урок, майбутні вчителі математики мають проаналізувати не тільки програми (різних освітніх рівнів), а й інструктивно-методичний лист про вивчення математики у поточному навчальному році. Складаючи розгорнутий конспект уроку, вони набувають досвід користування нормативними документами, вчаться релізовувати цілі і завдання навчання математики в основній або старшій школах.

Варіативна складова

На практичному занятті, що розглядається, майбутні фахівці набувають знань щодо особливостей реалізації змісту програм до певного року навчання в чинних підручниках, умінь аналізувати календарно-тематичний план до певного року навчання, виконувати логіко-дидактичний і логіко математичний аналіз підручників разом із викладачем і самостійно, набувають досіду аналізування чинних підручників (складаючи конспекти фрагментів уроків, виконуючи самостійно домашнє завдання по складанню розгорнутого конспекту комп'ютерно-орієнтованого уроку). До того ж, на даному занятті студенти мають можливість проаналізувати деякі завдання для поглибленого вивчення математики, ознайомитися із змістом програми для поглибленого навчання математики (8 і 10 класи), одержати певні знання щодо організації навчання математики на поглибленому рівні.

Проектувально-моделювальна складова

У процесі практичного заняття №2 набувають знань щодо організації самостійної навчальної діяльності учнів на уроках математики, специфіки засобів навчання математики учнів основної і старшої шкіл; вчаться добирати необхідні засоби, методи і форми навчання математики, конструювати урок певного типу; набувають умінь і досвіду складання розгорнутого конспекту уроку із певними характеристиками (в даному випадку – із дотриманням вимог проектування комп'ютерно-орієнтованого уроку).

Практичне заняття №4

Тема: *Методи навчання математики.*

Мета: виявлення особливостей і доцільності використання деяких методів навчання математики на різних етапах навчального процесу; складання фрагментів уроків з метою формування знань, умінь і навичок організації проблемного навчання, евристичного навчання на прикладі конкретних тем ШКМ.

4.1. Основні теоретичні питання,
що мають опанувати студенти до даного заняття

4.1.1. Визначення методу навчання.

Успіх навчання залежить як від вірного визначення його цілей і змісту, так і від способу досягнення цілей, тобто від вибору методів навчання. Не дивлячись на те, що методи навчання застосовуються протягом багатьох сторіч, із самого початку виникнення школи розробка теорії методів навчання приносить ученим-педагогам немалого клопіту. У процесі навчання існує велика різноманітність видів зовнішньої діяльності вчителя й учнів на уроці. Ці види діяльності і стали називати методами навчання (метод розповіді, метод роботи з книгою, метод демонстрації тощо). Кількість таких методів у різних авторів дуже велика, назви їх різні. Виникла необхідність якось упорядкувати цей перелік методів. Задля цього треба з'ясувати сутність методів, дати їм означення.

При визначенні сутності методів навчання думки педагогів також розрізняються. Деякі автори визначали метод навчання як сукупність прийомів навчальної діяльності, інші – як шлях, за яким учитель веде дітей від незнання до знання тощо. Майже всі визначення вірні, проте вони лише дають характеристику предмету обговорення, але не характеризують сутність того, що визначається.

Під методом навчання ми будемо розуміти систему цілеспрямованих дій учителя, що організують пізнавальну і практичну діяльність учнів, яка забезпечує засвоєння змісту освіти і тим самим досягнення цілей навчання.

Слово "метод" – грецького походження, в перекладі означає шлях дослідження, спосіб пізнання.

Крім поняття "метод навчання" в дидактиці є поняття "прийом навчання", під яким найчастіше розуміють складову частину або окремій бік методу.

Залежно від вибору основи класифікації, методи навчання класифікують:

- за джерелом здобування знань: словесні, наочні, практичні;

- за способом організації навчальної діяльності учнів: методи здобування нових знань, методи формування умінь та навичок і застосування знань на практиці, методи перевірки й оцінювання ЗУН;
- за способом уведення нових понять: абстрактно-дедуктивний і конкретно-індуктивний методи;
- за характером навчально-пізнавальної діяльності учнів: пояснювально-ілюстративний (розповідь, лекція, бесіда, пояснення, робота з підручником, демонстрація та ін); репродуктивний (відтворення знань і способів дій, діяльність за алгоритмом, програмою); проблемні методи: проблемний виклад, частково-пошуковий метод, евристична бесіда, дослідницький метод та ін.

Зазначимо, що сама назва методу не завжди дає уяву про характер навчально-пізнавальної діяльності учнів. Так, наприклад, бесіда може бути проведена таким чином, що вчитель пропонує запитання по раніше вивченому матеріалу, а учні відтворюють вже засвоєні знання. Але бесіда може бути організована і так, що для відповіді на запитання вчителя учню треба не просто пригадати вже знайоме, а знайти нові зв'язки між засвоєними знаннями, зробити нові висновки і здобути нові знання. Це дві форми бесіди – репродуктивна та евристична.

Щоб краще з'ясувати різницю між методами, пригадаймо, як протікає засвоєння учнями змісту навчального предмету.

Знання людина засвоює шляхом різних видів сприйняття, усвідомлення отриманої інформації та її запам'ятовування. Але оскільки можна знати і не уміти, то, щоб навчитись якомусь способу діяльності, треба цей спосіб здійснити реально і неодноразово. Для забезпечення цього виду засвоєння вчитель організує репродуктивну дільність учнів (вправи, тренінги, переказ, виклад тощо).

Однак ні засвоєння поданої у готовому вигляді інформації, ні формування навичок і умінь, засвоєних за зразком, не можуть забезпечити досвіду творчої діяльності. Скільки б учитель не пояснював зміст кожної риси творчої діяльності: бачення нової проблеми, нової функції об'єкту тощо, учень не зможе придбати якості, що передбачаються цими рисами, якщо він не з'явиться у новій ситуації, де ці властивості треба проявити. На відміну від процесу формування навичок і умінь, який передбачає відтворення одного і того самого зразка діяльності, процес формування творчих рис потребує діяльності кожного разу в нових умовах.

Наприклад, учитель пояснив, що таке гіпотеза, навів приклади її побудови в історії науки. Учень сприймає цю інформацію, засвоює як будь-яке готове знання, але якщо у попередньому досвіді у нього не було випадків самостійного висування гіпотез, то при пред'явленні йому проблеми, для розв'язання якої необхідна побудова нової гіпотези, він виявиться безсилим.

Єдиним засобом засвоєння рис творчої діяльності та досвіду їх прояви є самостійне розв'язання нових для учня проблем. Для організації цього способу засвоєння учитель повинен конструювати проблеми, включати їх у контекст матеріалу, що вивчається, слідкувати за ходом розв’язання і спрямовувати його.

Таким чином, засвоєння знань і способів діяльності відбувається на трьох рівнях:

1) свідомого сприйняття і запам’ятовування;
2) застосування знань за готовим зразком або в схожій ситуації;
3) творчого застосування знань.

Кожному рівню відповідають різні методи навчання: *пояснювально-ілюстративний, репродуктивний і проблемні методи*.

Отже, зупинимося більш докладно на характеристиці методів навчання математики, що розрізняються за характером навчально-пізнавальної діяльності учнів, оскільки саме активна пізнавальна діяльність учнів є головною умовою якісного засвоєння змісту навчання.

4.1.2. Пояснювально-ілюстративний метод.

Основне призначення ***пояснювально-ілюстративного методу*** складається в організації засвоєння інформації учнями**.** Він полягає у тому, що вчитель повідомляє готову інформацію різними способами, а учні сприймають, усвідомлюють і фіксують її у пам’яті. Повідомлення інформації учитель здійснює за допомогою усного слова (розповідь, лекція, пояснення), друкованого слова (підручник, посібник), наочних засобів, практичного показу способів діяльності. Учні виконують ту діяльність, яка необхідна для першого рівня засвоєння знань і способів діяльності.

Пояснювально-ілюстративний метод – один з найбільш економних способів передачі узагальненого і системного досвіду людства. Ефективність цього методу перевірена багаторічною практикою, він завоював собі прочне місце в школах усіх країн. Цим методом користуються при введенні математичних понять, вивченні аксіом, теорем, різних способів розв’язування задач. Пояснювально-ілюстративний метод вбирає в себе в якості способів і форм проведення такі традиційні методи, як усний виклад, роботу з книгою, лабораторну роботу, спостереження та ін. Але характер пізнавальної діяльності при всіх способах один – свідоме сприйняття *готової* інформації.

4.1.3. Репродуктивний метод.

Знання, отримані у ході пояснювально-ілюстративного методу, не формують навичок і умінь користуватися цими знаннями. Для здобуття учнями навичок і умінь, а разом із цим для досягнення другого рівня засвоєння знань і способів діяльності, учитель системою завдань організує діяльність школярів по неодноразовому сприйманню повідомлених їм знань і продемонстрованих способів діяльності. Вчитель дає завдання, а учні їх виконують – вирішують подібні задачі, доводять теореми за зразком, даним учителем тощо.

Отже, відтворення і повторення способу діяльності по завданням учителя є головною ознакою методу, який має назву ***репродуктивного***

методу. Вчитель при цьому користується усним, друкованим словом, наочністю різного роду; учні користуються тими ж засобами для виконання завдань, маючи взірець, повідомлений і показаний учителем.

Для підвищення ефективності цього методу розробляються системи вправ, програмовані матеріали, що забезпечують обернений зв'язок і самоконтроль. По мірі збільшення обсягу знань учнів зростає частота застосування пояснювально-ілюстративного методу у сполученні з репродуктивним методом.

Певну роль при реалізації цього методу може грати *алгоритмізація*. Учню пред'являються алгоритми (правила), у результаті виконання яких учень учиться розпізнавати об'єкт, з'ясовує його наявність і одночасно здійснює певний порядок дій. Застосування алгоритмізації не є самостійним методом навчання; воно представляє собою лише один із засобів представлення інформації, що підлягає засвоєнню за допомогою неодноразового повторення. Сутність пізнавальної діяльності при застосуванні алгоритму не виходить за межі діяльності, що організується пояснювально-ілюстративним і репродуктивним методами.

Репродуктивний метод може реалізовуватися у різних формах і різними способами. Це вправи над натуральними предметами, вправи із підручника, розумові вправи. Вправи можуть бути індуктивні і дедуктивні, під контролем учителя та у вигляді самостійної роботи. У всіх випадках мова йде про вправи, тобто про неодноразове повторення схожих дій.

Обидва методи (пояснювально-ілюстративний і репродуктивний) характеризуються тим, що вони збагачують учнів ЗУН, формують у них основні розумові операції, але не гарантують розвитку творчих здібностей, продуктивного мислення, пізнавальної активності та самостійності учнів.

4.1.4. Методи проблемного навчання та їх використання на уроках математики.

Під проблемним навчанням розуміється така організація навчальних занять, яка передбачає створення під керуванням вчителя проблемних ситуацій і активну (самостійну) діяльність учнів з їх розв'язання, в результаті чого відбувається творче оволодіння ЗУН і розвиток розумових здібностей [127].

Проблемне навчання зорієнтовано на формування і розвиток здібностей до творчої діяльності. Вивчення нового матеріалу у традиційному викладенні звичайно зводиться до того, що учитель сам пояснює сутність матеріалу, що вивчається, і вирішує учням ті задачі, які закріплюють щойно отримані знання. Проблемне навчання включає у себе не тільки постановку задачі, створення проблеми, але і самостійну творчу роботу учнів над цією проблемною ситуацією, відкриття ними нових властивостей, обґрунтування усіх своїх міркувань.

Методичні прийоми створення вчителем **проблемних ситуацій**:

- підведення учнів до суперечності й пропонування їм самим знайти спосіб його розв'язання;

- зіштовхнення суперечностей практичної діяльності;
- викладення різних точок зору на одне і те саме питання;
- залучення елементу гри;
- пропонування учням розглянути явище з різних позицій (наприклад, педагога, юриста, фінансиста);
- спонукання учнів робити висновки із ситуації, зіставляти факти, узагальнювати, порівнювати;
- постановка конкретних запитань (на обґрунтування, узагальнення, конкретизацію, логіку міркувань);
- визначення проблемних теоретичних і практичних завдань (наприклад, дослідницьких);
- вирішення проблемних задач (наприклад: з недостатніми чи надлишковими даними, з невизначеністю у постановці запитання, з суперечливими даними, зі свідомо припущеними помилками, з обмеженим часом вирішення, на подолання "психологічної інерції" тощо).

Проблемні задачі ставлять учня в ситуацію, коли у нього повинні з'явитися здивованість і відчуття труднощів, або тільки одне відчуття труднощів, яке, однак, учень має намір перебороти. Якщо ці умови відсутні, то задача або вже перестала бути для нього проблемною, або ще не може стати такою у зв'язку з тим, що учень ще не оволодів ЗУН, що надають можливість перебороти труднощі.

Як же ж побудувати урок математики, реалізуючи проблемне навчання? Наведемо приблизну *схему* такого уроку:

1) створення навчальної проблемної ситуації з метою збудити в учнів інтерес до даної навчальної проблеми і мотивація необхідності її вивчення;
2) постановка пізнавальної задачі, що виникає з даної проблемної ситуації, чітке її формулювання;
3) вивчення різних умов, які характеризують поставлену задачу;
4) процес вирішення поставленої задачі;
5) дослідження отриманого розв'язання задачі; обговорення результатів, виявлення нового знання;
6) застосування нового знання за допомогою розв'язання спеціально підібраних навчальних задач для його засвоєння;
7) обговорення можливих розширень і узагальнень результатів розв'язання задачі у межах вихідної проблемної ситуації;
8) підведення підсумків проведеної роботи.

Наприклад, розглянемо, як можна організувати вивчення теми "Вписані чотирикутники".

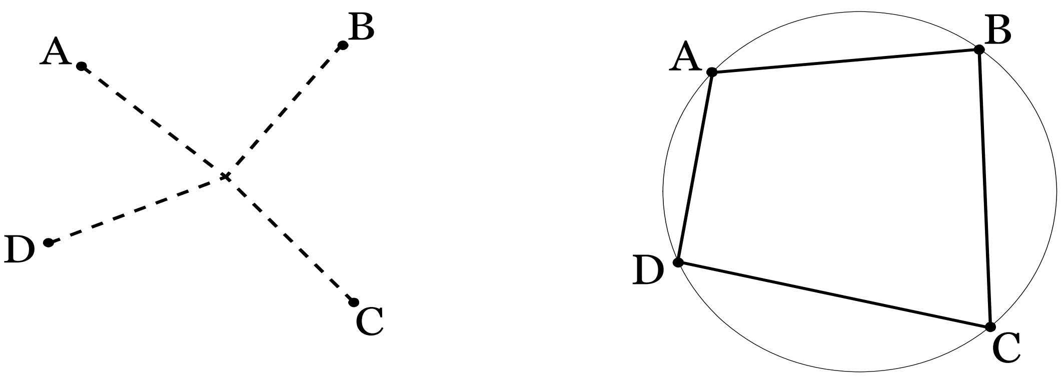


Рис. 4.1

1) Створення проблемної ситуації: учням пропонується задача: “Де розташувати офіс-центр фірми по виробництву шкіряного одягу так, щоб він був розташований на рівних відстанях від чотирьох виробничих цехів?”

2) У процесі обговорення цієї проблемної ситуації встановлюється, що множина точок площини, рівновіддалених від даної точки, є коло, тому офіс-центр треба розташувати у центрі кола, що проходить через дані точки, якими позначені виробничі цехи (рис. 4.1).

3) З даної проблемної ситуації виникає пізнавальна задача про можливість проведення кола через чотири дані точки. Сполучімо точки A, B, C, D, одержимо чотирикутник, який треба вписати в коло.

4) Розв’язання задачі зводиться до відшукання умов, яким повинні задовольняти чотири точки, щоб можна було через них провести коло.

5) Починаючи розв’язання задачі, учні встановлюють відомі їм раніше факти:

а) через одну дану точку A завжди можна провести будь-яке число кіл із центрами в будь-яких точках площини;

б) через дві точки A і B можна провести нескінчену кількість кіл;

в) через три точки - єдине коло.

Розглянемо більш докладно деякі методи проблемного навчання та їх використання на уроках математики.

Проблемний виклад.

Сутність ***проблемного викладу*** в тому, що учитель ставить проблему, сам або за допомогою учнів її вирішує і при цьому показує шлях розв’язання у його істинних, але доступних для учнів суперечностях, вскриває хід думки під час розв’язування. Призначення цього методу – демонстрація вчителем зразків научного пізнання і спостереження учнями переконливості цього руху; учні подумки слідкують за логікою викладення, засвоюючи етапи розв’язання цілісних проблем.

Наведений вище приклад вивчення теми „Вписані чотирикутники” можна віднести до проблемного викладу.

Евристичний метод (частково-пошуковий метод або евристична бесіда).

Цей метод також відносять до методів проблемного навчання. З метою поступового наближення учнів до самостійного розв'язання проблем їх необхідно заздалегідь учити виконанню окремих кроків розв'язання, окремих етапів дослідження. В одному випадку їх учать баченню проблем, пропонуючи ставити запитання до викладеного змісту; в іншому – від них вимагають побудувати самостійно знайдене доведення; у третьому – зробити висновок з пред'явлених фактів тощо. Усе це – ***евристичний метод*** навчання, який іноді ще називають ***частково-пошуковим методом***, який іноді реалізується як ***евристична бесіда,*** коли вчитель заздалегідь готує систему запитань, відповідаючи на які учні самостійно формулюють означення поняття, «відкривають» доведення теореми, формулюють нові правила (пригадайте аналіз уроку з теми «Додавання двох чисел з різними знаками», 6 клас), знаходять спосіб розв'язування задачі.

Відомий радянський методист-математик Брадіс І.М. визначив евристичний метод так: "*Евристичним називається такий метод навчання, коли керівник не повідомляє учням готових відомостей, які підлягають засвоєнню, а підводить учнів до самостійного відкриття відповідних речень і правил*".

Отже, сутність означення евристичного методу – самостійний, який планується лише у загальних рисах пошук розв'язання поставленої проблеми.

Дослідницький метод.

Цей метод також відноситься до групи методів проблемного навчання. Для ефективного засвоєння досвіду творчої діяльності й одночасно формуванню навичок і вмінь необхідний дослідницький метод, який виконує вельми важливі функції:

1) забезпечує творче застосування знань;
2) забезпечує оволодіння методами наукового пізнання у процесі пошуку і застосування цих методів;
3) формує риси творчої діяльності;
4) є умовою формування інтересу, потреби у такого роду діяльності.

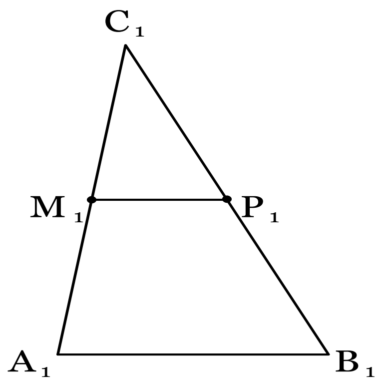
Враховуючи вказані функції, *цей метод можна визначити як спосіб організації пошукової, творчої діяльності учнів по розв'язанню нових для них проблем.*

Учитель пред'являє ту чи іншу інформацію для самостійного дослідження, знає її результат, хід розв'язання і ті риси творчої діяльності, які потрібно проявити у ході вирішення. Тим самим побудова системи таких проблем дозволяє передбачати діяльність учнів, яка поступово призводить до формування необхідних рис творчої діяльності.

<u>Наприклад</u>, вивчення властивостей середньої лінії трапеції можна організувати так.

Учням уже відомі властивості середньої лінії трикутника.

Розглядається рис. 4.2, пригадуються ці властивості.



$$M_1P_1 \parallel A_1B_1 \text{ і } M_1P_1 = \frac{A_1B_1}{2}$$

Рис. 4.2

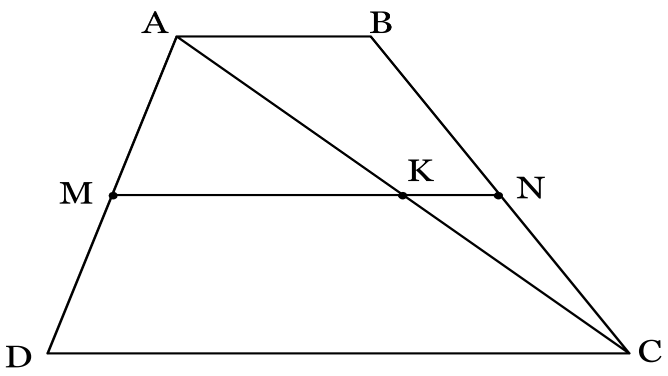


Рис. 4.3

Розглянемо трапецію $ABCD$ (рис. 4.3). Відомо, що $AM = MD$; $NB = NC$. Діти роблять висновок, що за означенням MN – середня лінія трапеції. Відбувається постановка проблеми: якими ж властивостями володіє середня лінія трапеції? Після перших, більш-менш вдалих спроб за аналогією з середньою лінією трикутника сформулювати властивості середньої лінії трапеції, учитель робить додаткову побудову – проводить діагональ AC і знову пропонує учням висунути гіпотезу щодо властивостей середньої лінії трапеції. Коли вірна гіпотеза прозвучить, можна довести твердження – теорему про властивості середньої лінії трапеції.

При застосуванні дослідницького методу також застосовуються усне і друковане слово, засоби наочності тощо. Проте всі ці засоби використовуються інакше, ніж при пояснювально-ілюстративному і репродуктивному методах. Учні в даному випадку здійснюють творчу діяльність, яка не співпадає з діяльністю при засвоєнні готових знань і відтворенні готових способів діяльності.

Метод доцільних задач.

Як вже згадувалося, цей метод запропонував наприкінці XIX ст. С.І.Шорох-Троцький, і відноситься він до методів проблемного навчання.

Навчання математики при застосуванні цього методу здійснюється за допомогою задач. Причому із задач починається вивчення будь-якої теми, що, звичайно, забезпечує відповідну мотивацію, і продовжується вирішенням задач на засвоєння теоретичного матеріалу. Але не можна перебільшувати значення цього методу, оскільки вивчення не кожної теми доцільно починати із задачі, та окрім вміння розв'язувати задачі, учні мають володіти теоретичними фактами.

Метод доцільних задач можна використовувати, наприклад, під час вивчення тем „Множення десяткових дробів", „Письмове додавання і віднімання", „Спосіб групування", „Відсоткові розрахунки" та ін.

Підсумовуючи, зауважимо, що не можна у навчально-виховному процесі застосовувати тільки методи проблемного навчання, оскільки вони також не позбавлені недоліків, одним з яких є те, що ці методи не можуть забезпечити самостійних дій кожного учня, не дозволяють включати в активну розумову діяльність всіх учнів класу. Проблемні ситуації, які створюються вчителем, питання, що стимулюють пошук, не однаково і не одночасно сприймаються всіма учнями, так як у кожного свій рівень підготовленості, навченості.

4.1.5. Сполучення методів у процесі навчання математики.

Зазначимо, що *жоден із розглянутих методів навчання не є універсальним і самодостатнім*, тобто в реальному навчально-виховному процесі методи використовуються у взаємозв'язку і взаємодоповненні. До того ж, не можна чітко регламентувати вибір того чи іншого методу; основою застосування і поєднання різних методів навчання виступають як об'єктивні фактори (цілі та зміст навчання, зокрема математики), так і суб'єктивні (особистість вчителя, учнів).

Наприклад, урок математики може бути побудований так:

І варіант.

1) Фронтальне опитування (репродуктивний метод).

2) Викладення нового матеріалу (пояснювально-ілюстративний метод у сполученні з проблемним викладом).

3) Первинне закріплення (репродуктивний метод).

4) Розв'язування творчої задачі (дослідницький метод).

ІІ варіант.

1) Самостійна робота: тести різного рівня складності (репродуктивний метод, дослідницький метод).

2) Введення нового матеріалу (метод доцільних задач).

3) Первинне закріплення: перегляд презентації із застосуванням комп'ютера (пояснювально-ілюстративний метод, репродуктивний метод).

4) Закріплення: виконання індивідуальних завдань (дослідницький метод).

4.2. Зміст практичного заняття №4

1. Метод доцільних задач. Складання фрагменту уроку із застосуванням цього методу (сумісна робота) (15 хв.).
2. Проблемний виклад. Складання фрагменту уроку із застосуванням цього методу (сумісна робота) (25 хв.).
3. Евристичний метод (частково-пошуковий метод або евристична бесіда). Ознайомлення студентів з фрагментом уроку із застосуванням цього методу, розробленим викладачем (подальше обговорення) (20 хв.).
4. Дослідницький метод. Наведення прикладів застосування цього методу (сумісна робота) (20 хв.).

Примітка: обговорення домашнього завдання до цього заняття відбувається індивідуально з кожним студентом.

4.3. Дидактико- методичні матеріали до практичного заняття №4

4.3.1. Питання до актуалізації опорних теоретичних знань студентів у процесі заняття

1. Дайте сучасну трактовку поняттю «метод навчання».
2. Яка різниця між поняттями «метод навчання» від «прийом навчання»?
3. За якими основами класифікують методи навчання?
4. Зазначте рівні, на яких відбувається засвоєння знань і способів діяльності.
5. Охарактеризуйте пояснювально – ілюстративний метод навчання.
6. Яка головна ознака репродуктивного методу?
7. Дайте характеристику проблемному навчанню.
8. Які можливі прийоми створення вчителем проблемних ситуацій?
9. У чому полягає сутність проблемного викладу?
10. Зазначте характерні риси евристичного (частково-пошукового) методу навчання.
11. Як вчитель готується до евристичної бесіди?
12. Які функції виконує дослідницький метод?
13. Як можна визначити дослідницький метод навчання?
14. У чому полягає сутність методу доцільних задач?
15. Які можна зазначити недоліки методів проблемного навчання?
16. Що лежить в основі застосування і поєднання різних методів навчання?
17. Запропонуйте свій можливий варіант структури уроку з математики із застосуванням різних методів навчання.

4.3.2. Конспект фрагменту уроку із застосуванням методу доцільних задач

5 клас.
Тема: Множення десяткових дробів.
Тип уроку: комбінований.

Учитель: Розглянемо задачу (практичного змісту): Мастеру необхідно дерев'яний стіл прямокутної форми шириною 0,8 м і довжиною 1,6 м покрити лаком. Щоб не витрачати зайвих коштів, треба визначитися, банку лаку якого мінімального об'єму доцільно купити.

Допоможемо мастеру. Щоб визначитися, банку лаку якого об'єму необхідно купити, що треба знати?

Учні: площу столу.

Учитель: Як знаходимо площу фігури прямокутної форми?

Учні: $S_{\text{прямокутн.}} = a \cdot b$, тобто треба $0{,}8 \text{ м } \cdot 1{,}6 \text{ м}$.

Учитель: Вірно, та чи вмієте ви множити такі числа?

Учні: Ні, ми вміємо множити тільки натуральні числа.

Учитель: тоді зведемо задачу до множення натуральних чисел. Для цього ми виразимо довжину і ширину в таких одиницях, щоб одержати натуральні числа. Запишемо їх у дм.

Учні: 1,6 м = 16 дм; 0, 8 м = 8 дм. $16 \cdot 8 = 128 \text{ дм}^2$.

Учитель: Так як $100 \text{ дм}^2 = 1 \text{ м}^2$, то $1 \text{ дм}^2 = \frac{1}{100} \text{ м}^2$. А як виразити у м^2 128 дм^2?

Учні: $128 \text{ дм}^2 = \frac{128}{100} \text{ м}^2 = 1{,}28 \text{ м}^2$.

Учитель: Отже, знаючи площу столу, майстер, дивлячись на інструкцію, визначить, яку банку лаку йому слід купити.

Зауважимо, $0{,}8 \cdot 1{,}6 = 1{,}28$. Скажіть, скільки десяткових знаків містить кожний із множників?

Учні: По одному.

Учитель: А скільки десяткових знаків у добутку?

Учні: Два.

Учитель: Це не випадковість, це закономірність: виявляється, що у результаті множення двох десяткових дробів після коми буде стояти стільки десяткових знаків, скільки їх у двох множниках разом. В цій закономірності можна впевнитися, розглядаючи інші приклади. Запишемо у зошитах алгоритм (правило) множення десяткових дробів. Щоб перемножити два десяткових дроби, потрібно: 1) не зважаючи на коми, виконати множення цих чисел як натуральних; 2) у добутку виокремити праворуч комою стільки десяткових знаків, скільки їх мають обидва множники разом.

4.3.3. Конспект фрагменту уроку
із застосуванням проблемного викладу

Зауваження. Основне призначення методу – вскрити (продемонструвати) хід думки під час розв’язання.

8 клас.

Тема: Метричні співвідношення у колі.

Тип уроку: комбінований.

У ч и т е л ь: Розглянемо теорему (опорну задачу) про пропорційність відрізків хорд.

Теорема. Добуток відрізків хорд, що перетинаються, рівні.

Зробимо рисунок (рис. 4.4)

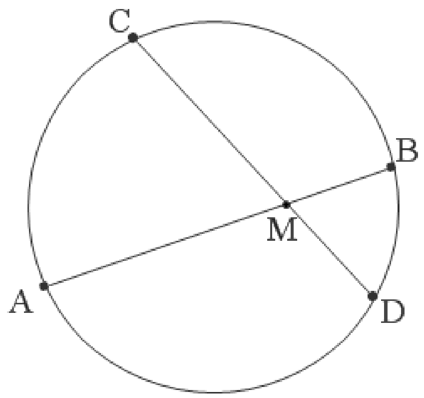


Рис. 4.4

Що ж треба довести?

У ч н і: Що $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

У ч и т е л ь: Проведемо доведення (і задиктовує доведення із підручника [32, с. 138]).

Доведення: Нехай хорди AB і CD перетинаються в т. M. Проведемо хорди AC і BD. Трикутники ACM і DBM подібні за двома кутами: ∠C дорівнює ∠B (як вписані кути, що спираються на одну і ту саму дугу), а кути при вершині M рівні як вертикальні. Із подібності тикутників слідує, що $\frac{AM}{DM} = \frac{CM}{BM}$, тому $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. Теорему доведено.

Запитання до студентів:

- Чи буде доведення, подане у такій формі, розуміле учням?

Відповідь: Ні, не всім учням.

- Чому? Тому що:

1) Не обґрунтовано додаткову побудову: чому саме треба сполучити точки A і C, B і D?

2) Чому, одержавши трикутники, ми намагаємося довести їх подібність?

Отже, доведення проведено синтетичним методом, який не скриває хід думки того, хто доводить; тому для багатьох учнів воно буде незрозумілим, деякі діти не зможуть його відтворити самостійно.

Щоб подолати формалізм знань у цьому випадку корисно провести таку роботу:

1) працюючи над умовою теореми, можна запропонувати учням переформулювати теорему із категоричної форми в умовную, що спростить запис умови, виокремлення вимоги теореми;

2) провести *висхідний аналіз* (доведення «з кінця»), тобто, відштовхуючись від того, що треба довести, прийти до того, що дано в умові теореми (задачі).

У ч и т е л ь: Що необхідно довести?

У ч н і: Що $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

У ч и т е л ь: Як же це довести? Помітимо, що теорема має назву «про пропорційність відрізків хорд»; отже, якщо матимемо пропорцію, то, використовуючи основну її властивість (якщо пропорція вірна, то добуток крайніх членів дорівнює добуткові середніх членів), одержимо рівність добутків $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. Тобто AM і BM – можуть бути крайніми членами, а CM і DM – середніми членами. Яку ж пропорцію треба одержати?

У ч н і: $\frac{AM}{DM} = \frac{CM}{BM}$.

У ч и т е л ь: З якого теоретичного факту можна одержати таку пропорцію (пам'ятаємо, що вивчається тема «Подібність трикутників»)?

У ч н і: Із подібності трикутників.

У ч и т е л ь: Чи маємо ми на рисунку трикутникі?

У ч н і: Ні.

У ч и т е л ь: Як їх отримати?

У ч н і: Сполучити точки, наприклад, A і C, B і D; або C і B, A і D.

У ч и т е л ь: Так, ми оберемо варіант A і C, B і D, тоді відрізки AM і MD, CM і BM будуть сторонами різних трикутників. Проводимо хорди AC і BD (виконали додаткову побудову). Що тепер?

У ч н і: Розглянемо ΔACM і ΔDBM. Вони подібні.

У ч и т е л ь: Доведіть це.

У ч н і: ∠CMA=∠BMD як вертикальні. ∠C=∠B (або ∠A=∠D) як вписані кути, що спираються на одну і ту саму дугу. Ці трикутники подібні за ознакою (за двома кутами).

У ч и т е л ь: Який висновок можна зробити?

У ч н і: Про пропорційність відповідних сторін трикутників: $\frac{AM}{DM} = \frac{CM}{BM}$.

У ч и т е л ь: Так як пропорці вірна, то вірно і що $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. Теорему доведено. Відкрийте підручники [32] на с. 138, читаючи доведення, оформіть його в зошит, але покроково. На наступному уроці дехто з вас відтворить це доведення біля дошки, але з іншими позначеннями на рисунку.

4.3.4. Конспект фрагменту уроку із застосуванням евристичного методу (частково-пошукового методу або методу евристичної бесіди).

8 клас .

Тема: Подібність трикутників. Ознаки подібності трикутників.

Тип уроку: Урок – лекція (викладається значна частина теоретичного матеріалу досліджуваної теми).

Учитель: Пригадаємо спочатку, що ми знаємо при рівні трикутники. Яке означення рівним фігурам ми давали у 7 класі?

Учень: Дві геометричні фігури називаються рівними, якщо вони суміщаються накладанням.

Учитель: Отже, і трикутники, що суміщаються накладанням називаються рівними. Однак ми обговорювали, що таке означення не є робочим, тобто їм важко скористатися на практиці. Наприклад, таким чином неможливо порівняти дві земельні ділянки. Тому виникає потреба звести питання про рівність трикутників до рівності їх сторін і кутів. Пригадане означення рівних трикутників вважаємо першим означенням. З нього випливає, що якщо $\Delta\, ABC = \Delta A_1B_1C_1$, то при накладанні відповідно суміщаються кути і сторони цих трикутників, тобто $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$.

Обернене твердження також вірно. Як його сформулювати?

Учень: Якщо $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ $BC = B_1C_1$, то $\Delta\, ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Тобто якщо відповідні сторони і кути рівні, то такі трикутники сумістяться при накладанні, тому вони рівні за першим означенням рівних трикутників.

Учитель: Вірно. Отже, маємо друге означення рівних трикутників:

$\Delta\, ABC = \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow \angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$.

А далі ми ставили проблемне запитання: чи потрібно для встановлення рівності трикутників порівнювати всі шість елементів?

Учень: Ні, можна встановити, наприклад, рівність двох відповідних сторін і кута між ними двох трикутників – перша ознака рівності трикутників.

Учитель: Пригадайте інші ознаки рівності трикутників.

Учень: (формулює другу і треті ознаки).

Учитель: як пов’язані поняття рівності і подібності в геометрії? Рівні фігури у нашій уяві постають як фігури, що мають однакову форму і однакові розміри. Однак у повсякденному житті ми часто зустрічаємо речі, в яких однакова форма, а розміри різні. Наприклад, тарілки різних розмірів, пари взуття однакової моделі, але різних розмірів тощо.

Такі предмети, що мають однакову форму, але різні за розміром, в геометрії прийнято називати подібними.

Чи будуть подібні фігури при накладанні суміщатися?

Учні: Ні.

Учитель: Чітке загальне означення подібним фігурам ми дамо у 9 класі, а поки що спробуємо визначити подібні трикутники, за аналогією з тим, як ми дали означення рівним трикутникам за сторонами і кутами (друге означення). Але спочатку подумайте, якщо у трикутників форма однакова, то які відповідні елементи будуть рівними, і якщо розміри різні, то які відповідні елементи будуть пропорційними?

Учень (пробує самостійно сформулювати означення подібних трикутників): Два трикутники називаються подібними, якщо у них відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні.

Учитель: Так, вірно. Запам'ятайте, $\sim$ - так позначають подібність фігур. Отже, можна записати означення у символьному вигляді:

$\Delta\, ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow \angle A = \angle A_1,\quad \angle B = \angle B_1,\quad \angle C = \angle C_1,\quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$, де k – коефіцієнт пропорційності, що називають коефіцієнтом подібності.

Далі, так як і у випадку рівності трикутників, постає питання: щоб стверджувати, що трикутники подібні, необхідно перевіряти всі співвідношення сторін і кутів, чи достатньо перевірити лише деякі з них?

Спробуйте висунути гіпотезу, використовуючи аналогію з ознаками рівності трикутників (але пам'ятайте, що кути рівні, а сторони пропорційні).

(напевно, першою прозвучить аналогія з першою ознакою рівності трикутників).

Учень: Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого трикутника, і кути, утворені цими сторонами рівні, то такі трикутники подібні.

Учитель: Що таке твердження стало не гіпотезою, а теоремою, що далі необхідно?

Учні: довести його.

Далі вчитель проводить доведення цього факту (не важливо, що в підручнику спочатку розглядається і доводиться інша ознака подібності трикутників: на цьому уроці передбачено ознайомити учнів з усіма трьома теоремами, а на подальших уроках перевірити знання теорем – ознак подібності трикутників, вміння їх доводити і застосовувати при розв'язуванні задач).

Урок продовжується розглядом двох інших ознак подібності трикутників.

Запитання до студентів:

- Чи можна назвати такий виклад евристичною бесідою? Чому?

4.3.5. Приклади застосування дослідницького методу

Зауваження 1. Застосування дослідницького методу не завжди пов'язане із розв'язанням задач підвищеного рівня складності.

Зауваження 2. Дослідницький метод забезпечує творче застосування знань. Нагадаємо, що до *творчих завдань з математики* можна віднести:

1) розв'язання задачі або доведення теореми нестандартним способом, або новим для учня способо;
2) розв'язання задачі декількома способами;
3) складання задач, прикладів самими учнями;
4) математичні твори;
5) доповіді учнів та ін.

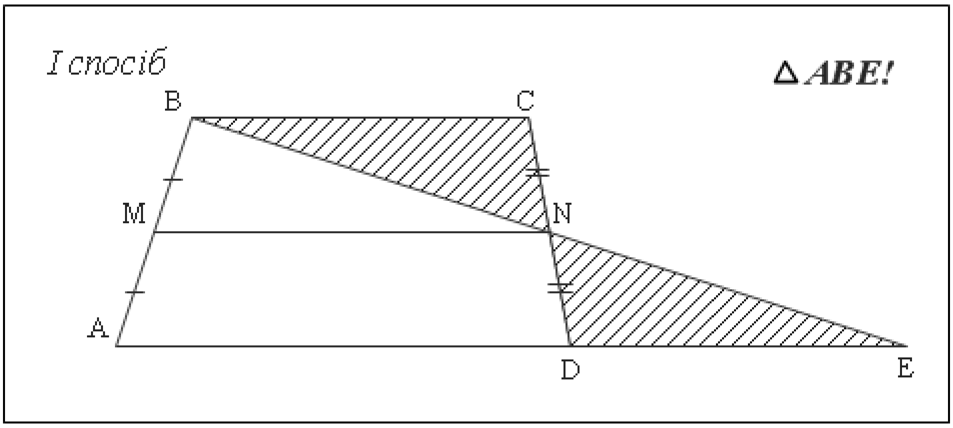
Приклад 1. Вирішіть найзручнишим способом: $\left(\frac{7}{8}+0{,}5\right):1\frac{1}{4}$.

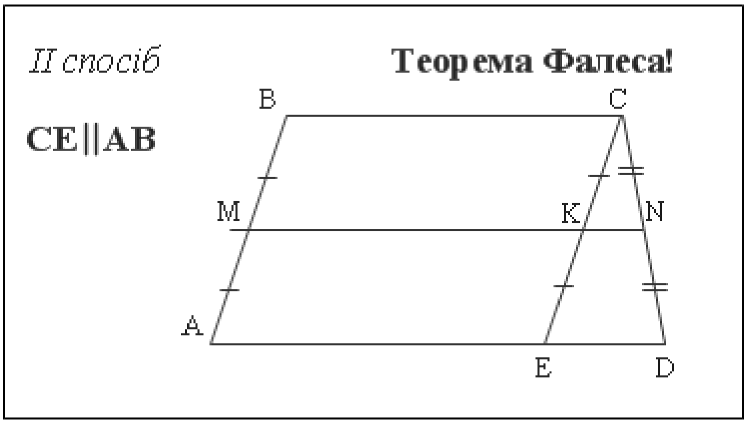
Розв'язання: $\left(\frac{7}{8}+0{,}5\right):1\frac{1}{4}=\frac{\frac{7}{8}+0{,}5}{1\frac{1}{4}}=\frac{(\frac{7}{8}+0{,}5)\cdot 8}{1\frac{1}{4}\cdot 8}=\frac{7+4}{10}=\frac{11}{10}=1{,}1.$

(Демонструє нестандартний спосіб вирішення).

Приклад 2. Складіть задачу, яка б вирішувалась так: (-8)+(-3)=-11.
(Демонструє складання задач самими учнями).

Приклад 3. Користуючи готовими рисунками і підказками (рис. 4.5), доведіть теорему про середню лінію трапеції різними способами.
(Демонструє доведення теорем різними способами).





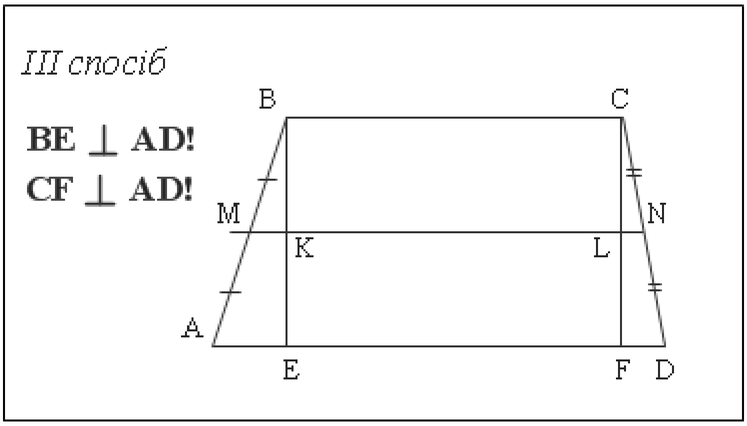


Рис. 4.5

4.4. Домашнє завдання

1. Скласти фрагмент уроку із самостійно обраної теми із застосуванням:

1 варіант: пояснювально-ілюстративного методу;

2 варіант: репродуктивного методу.

Оформити на окремому аркуші. Зазначити тему, мету, завдання, тип уроку, підручник, яким користувалися.

2. Виконавши логіко-дидактичний і логіко-математичний аналіз підручників [99] та [45], провести порівняльний аналіз і зазначити відмінності у викладі теми «*Найпростіші геометричні фігури*» за цими підручниками (попередньо вивчивши *зразок порівняльного аналізу викладу теми «Трикутники»* за цими підручниками) (оформити на окремому аркуші).

Зразок

Деякі відмінності викладу теми „Трикутники”
у підручниках [99] *та* [45]

1. Поняття „трикутник” визначається по-різному: в підручнику [99] воно вводиться описово і визначається як частина площини разом з відрізками, що обмежують цю частину; у підручнику [45] „трикутник” визначається строго, конструктивно, як фігура, що складається з трьох точок і трьох відрізків, що попарно їх з'єднають.
2. Рівні фігури визначаються однаково.
3. Всі ознаки рівності трикутників в даних підручниках доводяться однаково.
4. У підручнику [99] перша і друга ознаки даються в одному параграфі, а в підручнику [45] – розділені параграфом „перпендикуляр до прямої”.
5. У підручнику [99] поняття медіани, висоти і бісектриси трикутника розглядаються відразу після введення поняття „трикутник”, а у підручнику [45] – тільки після вивчення рівнобедреного трикутника.
6. Поняття медіани, бісектриси і висоти трикутника визначаються однаково.
7. По різному вивчаються властивості і ознаки рівнобедреного трикутника: в підручнику [99] в одній теоремі формулюються властивості і в наступному пункті даються чотири ознаки рівнобедреного трикутника. В підручнику [45] спочатку формулюються пряма і обернена теореми щодо кутів рівнобедреного трикутника, а потім в темі „Медіана, бісектриса і висота трикутника” розглядаються властивості рівнобедреного трикутника, пов'язані з цими поняттями. Щодо іншої ознаки рівнобедреного трикутника, то в підручнику [45] дається опорна задача (причому автори визначають цей матеріал як не обов'язковий для вивчення): Якщо в трикутнику, медіана і бісектриса, поведені з однієї вершини, співпадають, то такий трикутник рівнобедрений.
8. У підручнику [45] більше уваги приділяється розвиткові логічного мислення учнів: окрім понять прямої і оберненої теореми, теореми – властивості та теореми - ознаки пояснюється, що таке контрприклад, як розв'язувати геометричну задачу „від кінця до початку”, одна з теорем доводиться двома способами та ін.

4.5. Література

Основна: [15], [32], [45], [88], [99], [104], [157].
Додаткова: [9], [22], [62], [63], [71], [79], [91], [92], [94], [102], [105], [163], [169], [171].

4.6. Аналіз практичного заняття №4 з точки зору формування у студентів нормативної, варіативної та проектувально-моделювальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Нормативна складова

Практичне заняття №4 передбачає формування знань, умінь, деякого досіду користування програмою з математики, зокрема для 5 і 8 класів, у процесі розробки конспектів фрагментів уроків; одержують знання щодо цілей і завдань навчання учнів математики на певному навчальному етапі, змісту шкільного курсу математики, набувають умінь щодо засобів їх реалізації. Для якісної розробки конспекту фрагменту уроку із самостійно обраної теми майбутні фахівці мають звернутися до Інструктивно-методичного листа про вивчення математики у поточному навчальному році.

Варіативна складова

На даному практичному занятті формуються уміння студентів виконувати логіко-дидактичний і логіко-математичний аналіз чинних підручників, проводити порівняльний аналіз викладу конкретної теми шкільного курсу геометрії, спираючись на аналіз методичних систем, реалізованих у цих підручниках; відтак, студенти набувають умінь визначати відмінності в методичних системах, досвіду аналізування чинних підручників. Готуючи конспекти фрагментів уроків, майбутні учителі математики звертаються до календарно-тематичних планів (що пропонуються у підручниках); вони одержують знання щодо реалізації змісту програми до певного року навчання в чинних підручниках.

Проектувально-моделювальна складова

У процесі практичного заняття №4 студенти одержують знання про прийоми організації діяльності учнів і керування цією діяльністю у процесі навчання математики, специфіку методів навчання математики; у них формуються вміння добирати необхідні методи, засоби, форми навчання математики у процесі розробки конспектів фрагментів уроків. Отже, майбутні вчителі математики набувають певного досвіду проектування фрагментів уроків із певними вимогами, з конкретних тем шкільного курсу математики.

Практичне заняття №5

Тема: *Проведення модульної контрольної роботи №1 з теми:* ***«Елементи методичної системи».***

Мета: узагальнення і систематизація знань з теми «Елементи методичної системи»; формування вмінь реалізовувати цілі, завдання та зміст навчання математики в основній та старшій школах, добираючи адекватні методи, засоби, форми навчання математики; заохочення щодо самостійного опрацювання деяких питань навчального курсу «Загальна методика навчання математики»; набуття досвіду проектування фрагментів уроків із певними вимогами, з конкретних тем шкільного курсу математики; перевірка та оцінка результатів навчання.

Примітка 1. Домашнє завдання до практичного заняття №4 перевіряється викладачем індивідуально у кожного студента. Домашнє завдання до практичного заняття №5 не задається.

Примітка 2. Студентам заздалегідь пропонуються питання до самостійного вивчення та рекомендована література. Тільки за умови їх успішного опрацювання студенти можуть отримати максимальний бал за модульну контрольну роботу №1.

5.1. Питання до самостійного вивчення до модульної контрольної роботи №1

1. Застосування нових інформаційних і інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні математики.
2. Сутність евристичного навчання математики. Характеристика елементів методичної системи при евристичному навчанні математики.
3. Охарактеризуйте внутрішньопредметні та міжпредметні зв'язки шкільної математики.
4. Перевірка і оцінка результатів навчання. Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів.
5. Рух за реформу шкільної математичної освіти. Сучасне її реформування.

Рекомендована література:

[15; §21], [20], [21], [41], [42], [43], [57], [72], [88], [104], [105], [106], [112], [114], [115], [116], [120], [141], [142], [143], [144], [147], [152], [153], [157; розділ 1, §3, §5; розділ 7, §4].

5.2. Орієнтовні зміст і оцінювання модульної контрольної роботи №1

Варіант 1

1. Математика як навчальний предмет. Цілі навчання математики в школі. Значення ШКМ у загальній освіті. Зміст ШКМ. **12 балів**
2. Складіть інструктивну карточку для роботи учнів з підручником і опишіть методику організації самостійної роботи учнів з підручником з обраної Вами теми. **6 балів**
3. Складіть конспект фрагменту уроку з використанням методу доцільних задач при вивченні теми «Розкладання многочленів на множники методом групування». **10 балів**

Заробіть додаткові бали!

Застосування нових інформаційних і інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні математики. **5 балів**

Варіант 2

1. Урок – основна форма організації навчання математики. Шляхи підвищення ефективності уроків математики. **12 балів**
2. Продумайте, які засоби навчання математики, на Вашу думку, найбільш ефективні при вивченні теми "Розв'язання квадратних нерівностей" на етапі:
   - перевірки раніше засвоєного матеріалу;
   - засвоєння нового матеріалу;
   - закріплення вивченого.

   Вашу думку обгрунтуйте. **6 балів**
3. Складіть конспект фрагменту уроку, застосувавши один із методів проблемного навчання при введенні поняття «функція». **10 балів**

Заробіть додаткові бали!

Сутність евристичного навчання математики. Характеристика елементів методичної системи при евристичному навчанні математики. **5 балів**

Варіант 3

1. Засоби навчання як компонент цілісної методичної системи навчання. Роль та функції засобів навчання в навчальному процесі. **12 балів**

2. Опишіть обов’язкові результати навчання з теми “Чотирикутники”. Наведіть приклади задач з діючого підручника, які можна та які не можна віднести до обов’язкових результатів навчання з цієї теми. **6 балів**

3. Складіть конспект фрагменту уроку з вивчення теореми про пропорційність відрізків січної і дотичної (в темі «Застосування подібності трикутників. Метричні співвідношення у колі»), застосувавши проблемний виклад. **10 балів**

Заробіть додаткові бали!

Охарактеризуйте внутрішньопредметні та міжпредметні зв’язки шкільної математики. **5 балів**

Варіант 4

1. Методи проблемного навчання математики. **12 балів**
2. Сформулюйте цілі та завдання уроку по одній із тем шкільного курсу алгебри. **6 балів**
3. Складіть конспект фрагменту уроку, продемонструвавши реалізацію принципу наочності при вивченні теми «Симетрія відносно точки і прямої». **10 балів**

Заробіть додаткові бали!

Перевірка і оцінка результатів навчання. Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів. **5 балів**

Варіант 5

1. МНМ як наука і як навчальна дисципліна: її предмет, цілі і завдання. **12 балів**

2. Наведіть приклади застосування дослідницького методу при навчанні математики. **6 балів**

3. Складіть конспект фрагменту уроку з використанням мікрокалькулятора з теми «Розв’язування трикутників». Обгрунтуйте доцільність (необхідність) використання даного засобу навчання математики. **10 балів**

Заробіть додаткові бали!

Рух за реформу шкільної математичної освіти. Сучасне її реформування. **5 балів**

5.3. Аналіз практичного заняття №5 з точки зору формування у студентів нормативної, варіативної та проектувально-моделювальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Нормативна складова

Якісна підготовка до модульної контрольної роботи №1 передбачає обізнаність майбутніх учителів математики із головними нормативними документами: Державним стандартом базової і повної середньої освіти, програмами з математики, критеріями оцінювання навчальних досягнень учнів, Інструктивно – методичним листом про вивчення математики у поточному навчальному році; студенти мають продемонструвати вміння користуватися цими документами. Майбутні фахівці продовжують накопичувати знання щодо цілей, завдань та змісту навчання математики в основній і старшій школах, а також вміння їх реалізовувати.

Варіативна складова

У процесі проведення модульної контрольної роботи №1 і підготовки до неї майбутні вчителі математики накопичують знання щодо реалізації змісту програм до певного року навчання за чинними підручниками, вміння і досвід їх аналізувати, зокрема проводити логіко-дидактичний і логіко-математичний аналіз підручників з математики. Студенти набувають досвіду користування календарним (календарно-тематичним) планом з математики для певного року навчання за певним підручником.

Проектувально-моделювальна складова

Проектуючи фрагменти уроків, майбутні вчителі математики реалізують знання щодо прийомів організації діяльності учнів, зокрема самостійної, та керування цією діяльністю у процесі навчання математики. Використовуючи знання специфіки методів, форм, засобів навчання математики, студенти вчаться добирати їх адекватно вимогам. Майбутні фахівці набувають певного досіду проектування фрагментів уроків різних типів, за різними підручниками, користуючись відповідними дидактико – методичними матеріалами.

Практичне заняття №6

Тема: *Загальні методи і прийоми розумової діяльності та їх використання при навчанні математики.*

Мета: усвідомлення предмету обговорення одночасно як методів наукового пізнання, методів математичного дослідження і методів розумової діяльності; засвоєння основних характеристик загальних методів і прийомів розумової діяльності; формування вмінь виділяти і використовувати загальні методи і прийоми розумової діяльності при навчанні математики; демонстрація необхідності та корисності узагальнення і систематизації знань, узагальнюючого повторення при навчанні математики.

6.1. Основні теоретичні питання,
що мають опанувати студенти до даного заняття

6.1.1. Характеристика загальних методів і прийомів розумової діяльності.

Перетворення, що відбуваються в нашій країні останнім часом, вимагають від школи не тільки озброїти школярів знаннями, але і навчити застосовувати ці знання на практиці, проявляти пізнавальний інтерес і допитливість розуму. Учителю необхідно більше уваги приділяти розвитку мислення учнів, формуванню їхньої розумової діяльності.

У процесі пізнання законів природи вчений-математик користується особливими математичними засобами, науковими методами дослідження (методами наукового пізнання). У процессі навчання учні також почувають себе першовідкривателями математичних істин, і тому наукові методи математичного дослідження у той же час слугують і методами розумової діяльності учнів.

Завдання вчителя при організації кожного виду навчально-пізнавальної діяльності – прямо чи косвено формувати в учнів прийоми розумової діяльності. Тільки вони можуть стати для учнів реальним інструментом самостійного пізнання.

Розумові дії класифікуються по різним основам. Якщо розглядати розумові прийоми за ступенем використання їх у різних галузях людської діяльності, то можна виділити: а) загальні розумові дії і б) специфічні. Перші – застосовуються у всіх галузях знань, другі – для тієї чи іншої галузі знань.

Загальні або узагальнені методи і прийоми розумової діяльності поділяються на дві великі групи – *алгоритмічного та евристичного типів.*

Перші – це прийоми правильного мислення, що відповідають законам формальної логіки. Наприклад, алгоритми розв’язання типових задач, правило конструювання означення поняття через родо-видові відмінності, правило-орієнтир класифікації та ін.

Формування прийомів розумової діяльності алгоритмічного типу – необхідна, але не достатня умова розвитку мислення. Воно сприяє вдосконалюванню репродуктивного мислення, що є важливим компонентом творчої діяльності. Крім того, алгоритмічні прийоми – фонд знань, на основі яких учень може вирішувати нові для нього задачі, оволодівати більш складними прийомами розумової діяльності. Але алгоритмічна діяльність не вичерпує творчого мислення.

До евристичних прийомів відносять: порівняння, аналогію, узагальнення, конкретизацію, абстрагування та інші. Вони стимулюють пошук розв'язання нових проблем, спрямовують думки учня вглубь змісту.

6.1.2. Спостереження і дослідження (експеримент).

Спостереження – це метод вивчення, фіксування властивостей і відношень окремих об'єктів і явищ, які розглядаються у природних умовах.

Необхідно відрізняти спостереження від сприйняття: спостереження включає сприйняття, але не вичерпується ним; сприйняття народжується у момент впливу на органи почуттів якогось предмету або явища, а спостереження – це ще й фіксація у пам'яті, слові (або запису).

Дослідження (експеримент) - метод вивчення об'єктів і явищ, за допомогою якого ми втручаємося в їх природній стан, розвиток і створюємо штучний стан, штучні умови. Дослідження пов'язано із спостереженням. Експериментатор спостерігає за ходом дослідження. Спостереження і дослідження не є головними методами у математичному пізнанні, вони тільки ілюструють деяку математичну властивість об'єкту. Тому вчитель і учень повинні пам'ятати, що результати спостережень і досліджень не можуть сприйматися за строге обґрунтування того чи іншого математичного факту, але нерідко допомогають вскрити його.

Наприклад: перед вивченням теми "Симетрія відносно прямої" учитель пропонує увазі учнів фігури, у тому числі предмети з навколишнього середовища, серед яких одні володіють, а інші не володіють властивістю „бути симетричними відносно прямої". Спостереження дозволяє помітити, що кожна з "симетричних" фігур поділяється деякою прямою на дві частини так, що при згинанні фігури по цій прямій одна її частина накладається на іншу і повністю співпадає з нею. Для кожної з "несиметричних" фігур такої прямої знайти не можна.

Після спостереження фігур, які володіють властивістю симетрії відносно прямої переходимо до подальшого вивчення цього виду симетрії за допомогою спеціального експерименту (дослідження).

Кожному учню пропонуємо зігнути лист паперу так, щоб одна її частина співпадала з іншою, і утворилася лінія згібу.

Проколом голки у точці A, коли лист зігнутий, отримаємо точку A_1. Учитель повідомлює, що точки A і A_1 - симетричні, а лінія згибу – вісь симетрії l. Далі беремо різні точки (в тому числі і на l) і знаходимо їм симетричні. Визначаємо, чим характеризується розташування відносно l пари симетричних точок, як це описати за допомогою відомих геометричних термінів.

Ще приклад. Під час вивчення теми "Сума кутів трикутника" можна запропонувати учням поміряти кути зображених у зошитах довільних трикутників транспортиром. Завдяки такому досвіду учні з учителем висувають гіпотезу – сума кутів трикутника дорівнює 180 градусів, яка підтверджується доведенням відповідної теореми.

6.1.3. Порівняння і аналогія.

Порівняння – встановлення подумки подібностей і розбіжностей об'єктів вивчення.

У логіці порівняння – один з основних прийомів пізнання зовнішнього світу і духовних цінностей. Порівняння – важливий перехід від споглядання до абстрактного мислення.

Порівняння призводить до правильного висновку, якщо:

1) поняття, що порівнюються, однорідні;

2) порівняння проводиться за такими ознаками, які мають істотне значення.

Пізнання будь-якого предмету починається з того, що ми відрізняємо його від інших предметів і встановлюємо схожість із спорідненими предметами. У цьому проявляються дві основні форми порівняння – співставлення і протиставлення.

Співставлення – розумова дія, спрямована на виділення істотних ознак, спільних для низки предметів.

Протиставлення – розумова дія, що переслідує обернену мету, тобто спрямована на з'ясування відмінностей у предметах і явищах при виділенні істотних ознак і властивостей.

Наприклад. Порівняємо трикутник і чотирикутник:

1) співставлення розкриває їх спільні властивості: наявність сторін, вершин, кутів, стільки ж кутів, скільки і сторін;

2) протиставлення розкриває їх відмінності: у трикутника три вершини (кути, сторони), у чотирикутника – чотири.

Порівняння буває *повним або частковим*.

Часткове порівняння ефективно на етапі сприйняття й усвідомлення знань, дозволяє глибше зрозуміти особливе у матеріалі, що вивчається, зрозуміти зв'язки з іншими знаннями.

Повне порівняння ефективно на етапах узагальнення і систематизації знань.

Так, наприклад, учням можна пропонувати такі запитання:

1) Чим відрізняються бісектриса трикутника від його медіани?

2) Чим відрізняється ромб від квадрату? Ромб від паралелограму? Які властивості у них спільні?

З метою узагальнення матеріалу застосовують *співставлення* об'єктів.

Наприклад:

1) Які спільні властивості мають симетрія, паралельне перенесення, поворот?

2) Що спільного у доведенні ознаки паралельності прямої і площини і паралельності двох площин?

3) Що спільного у властивостях гомотетії і подібності? Чим вони відрізняються? У чому причина спільності властивостей?

4) Порівняйте ознаки рівності трикутників із ознаками подібності трикутників. Які висновки можна зробити на основі порівняння?

Порівняння готують ґрунт для застосування ***аналогії.*** Проте не будь-яке порівняння є аналогією (поет порівнює дівчину із квіткою, але аналогії тут провести не можна). За допомогою аналогії схожість предметів, з'ясована у результаті порівняння, поширюється на нові властивості. Загальна *схема міркування за аналогією* така:

А володіє властивостями a, b, c, d;

В володіє властивостями a, b, c;

Можливо В володіє властивістю d.

Висновок за аналогією є лише ймовірнісним, але не вірогідним. Однак, застосування аналогії сприяє виникненню гіпотез, науковому пошуку.

<u>Наприклад</u>. Паралелепіпед – просторовий аналог паралелограму (у паралелепіпеда протилежні грані паралельні, у паралелограма протилежні сторони паралельні). Міркування за аналогією призводить до гіпотези: можливо, як у паралелограма, діагоналі паралелепіпеда у точці перетину поділяються навпіл.

<u>Ще приклад</u>. Сфера – просторовий аналог кола. Обидві фігури визначаються як ГМТ простору і площини відповідно, що характеризуються однією й тією ж самою властивістю. Це наводить на здогадку, що сфера володіє деякими властивостями, притаманими колу. Наприклад, властивості взаємного розташування прямої і кола переводяться у властивості розташування площини і сфери:

1) якщо відстань d від центра сфери до площини більше радіусу сфери r, то площина і сфера не мають спільних точок;

2) якщо r=d, то площина і сфера мають одну спільну точку (помічаємо аналогію цих двох властивостей);

3) якщо d<r, то площина і сфера перетинаються по колу.

6.1.4. Аналіз і синтез.

Аналіз – розумова дія, що складається у розчленуванні предмету або явища на складові елементи (ознаки, властивості), що досліджуються окремо, як частини розчленованого цілого.

Синтез – обернена дія, що складається у поєднанні окремих елементів у ціле.

У процесі навчання математиці така розумова дія, як аналіз, використовується дуже часто: аналіз задачі (виділити умову і вимоги задачі), аналіз формулювання теореми, аналіз означення (виділити істотні ознаки, родове поняття, логічну структуру).

В математиці під аналізом розуміємо міркування у "оберненому порядку", тобто від невідомого (вимоги, шуканого) до відомого (умови). У такому розумінні (найбільш важливому для навчання) аналіз є засобом пошуку розв’язання або доведення (хоча сам по собі часто не є розв’язанням або доведенням). Синтез, спираючись на дані, отримані в ході аналізу, дає розв’язання задачі або доведення теореми.

Приклад. Якщо через точку поза колом провести дотичну і січну, то добуток січної на її зовнішню частину дорівнюватиме квадрату дотичної.

Довести: $AD \cdot AC = AB^2$ (рис. 6.1)

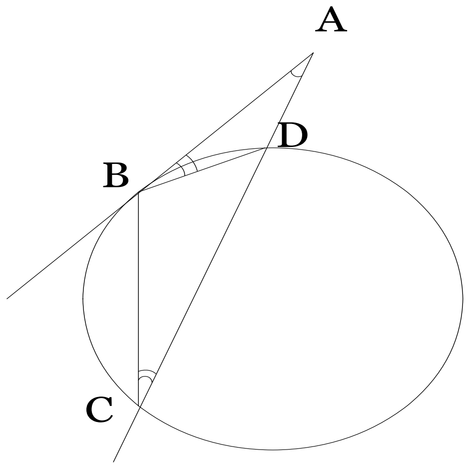


Рис. 6.1

Аналіз:

1) необхідно довести, що $AD \cdot AC = AB^2$. Переформулюємо вимогу: доведемо, що $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$;

2) $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ - з яких теоретичних фактів можемо отримати пропорційність відрізків? Наприклад, із подібності трикутників.

3) Яких трикутників? Тих, які мають сторони а) AD і AB (ΔADB)

б) AB і AC (ΔACB).

4) Тоді необхідно довести подібність ΔADB і ΔACB.

Синтез:

1) Розглянемо ΔADB і ΔACB. $\angle A$ - спільний. $\angle BCD = \angle ABC \Rightarrow$ $\Delta ADB \sim \Delta ACB$ за двома кутами.

2) $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow$

3) $AD \cdot AC = AB^2$. Що і необхідно було довести.

Дуже часто, розчленував деякий об’єкт на елементи, ми починаємо пов’язувати деякі з них між собою і досліджувати їх разом. Тобто ми проводимо аналіз об’єкта і синтез його окремих елементів. При цьому елементи пов’язуються один із другим або один із третім і розглядаються, так би мовити, “з різних сторін”, у результаті чого вони *переосмислюються*. Це можна часто спостерігати у математиці.

Розглянемо, <u>наприклад</u>, задачу: довести, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин вписаного у нього квадрата постійна (рис. 6.2).

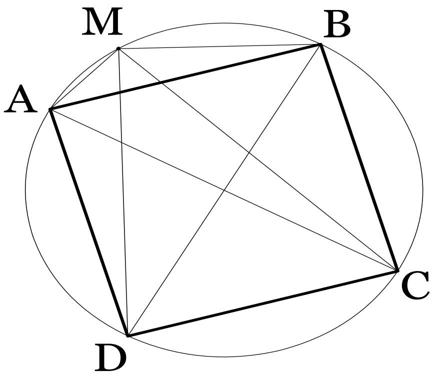


Рис. 6.2

Аналіз: Маємо:

1. Коло.
2. Вписаний квадрат $ABCD$.
3. $MA = x$, $MB = y$, $MC = z$, $MD = t$.

Переосмислення:

1) BD - діагональ квадрата, діаметр кола і гіпотенуза ΔMBD.
2) AC - діагональ квадрата, діаметр кола і гіпотенуза ΔMAC.
3) Тоді, з ΔMBD: $y^2 + t^2 = d^2$; з ΔMAC: $x^2 + z^2 = d^2$.

   Маємо: $y^2 + x^2 + z^2 + t^2 = 2d^2$. Що і необхідно було довести.

6.1.5. Узагальнення та обмеження.

У навчанні математики часто виникає необхідність переходити від чогось окремого, одиничного, часткового до загального, від менш загального до більш загального. Такі переходи називаються узагальненням (<u>наприклад</u>, розширення поняття числа).

Узагальнення – це мислене виділення, фіксування якихось загальних існуючих властивостей, що належать тільки даному класу предметів і відношень; це перехід на більш високий ступінь абстракції.

Прийом узагальнення – складний прийом розумової діяльності, який передбачає вміння аналізувати, виділяти головне, порівнювати, абстрагувати, синтезувати. У практиці навчання спочатку відпрацьовують ці складові компоненти прийому узагальнення; в реальному ж розумовому процесі всі операції взаємопов’язані, одна переходить в іншу.

<u>Наприклад,</u> під час виведення формули n-го члена арифметичної прогресії відбувається узагальнення:

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$

……………………………………

$a_n = a_1 + (n-1)d$.

Операцію, протилежну до узагальнення, називають ***обмеженням або спеціалізацією***. Наприклад, коли, вивчивши загальне означення чотирикутника, переходять послідовно до вивчення паралелограмів, прямокутників, ромбів, квадратів кожного разу здійснюється обмеження поняття.

6.1.6. Абстрагування і конкретизація.

Абстрагування **–** це мислене відволікання, відділення істотних, суттєвих властивостей, які належать тільки даному класу предметів, відношень і явищ від несуттєвих їх властивостей. Результатом цього відволікання є абстракції - створені людським розумом нематеріальні образи.

Конктеризація – операція, обернена до абстрагування; перехід від загального до менш загального, від загального до одиничного.

Конкретними називаються об'єкти, які не є абстракцією. Також конкретними ми вважаємо об'єкти, які є менш загальними, наприклад, кулю вважають конкретним прикладом тіл обертання, чотирикутник – конкретним прикладом многокутника, хоча і куля, і чотирикутник – поняття абстрактні.

При доведенні теореми ми конкретизуємо. Наприклад, доводячи властивості рівнобедреного трикутника, ми креслимо якийсь конкретний рівнобедрений трикутник ΔABC і проводимо доведення.

Узагальнення і абстрагування неодмінно застосовують у процесі формування понять, при переході від представлень до понять.

Наприклад. 1) м'яч, повітряна кулька та ін – куля;

2) куля, конус, циліндр та ін. – тіла обертання.

У 1) відбувається перехід від матеріальних об'єктів до нематеріального поняття. Це абстрагування.

У 2) - перехід від абстракцій до абстракції – це узагальнення.

Основою конкретизації є правило виведення $\dfrac{\forall x P(x)}{P(a)}$, яке називають *правилом конкретизації*: із того, що властивістю P володіють всі елементи деякої множини, випливає, що цією властивістю володіє кожний елемент a цієї множини. Отже, за допомогою конкретизації ми здійснюємо перехід від загального до одиничного.

Найбільш поширені в математиці види абстракцій – *узагальнююча абстракція (або абстракція ототожнення), ідеалізація* – використовуються і в шкільному навчанні математики.

Поняття, що формуються за допомогою *абстракції ототожнення*, являють собою абстракцію від абстракції: від предмету ми переходимо до класу еквівалентних в якомусь відношенні предметів, а від цього класу – до властивості, спільної для всіх об'єктів, які йому належать, тобто ці об'єкти ототожнюються за однією властивістю, яка абстрагується від усіх інших. Наприклад, поняття напряму співнапрямлених променів.

Під *абстракцією ідеалізації* мають на увазі утворення понять, які наділені не тільки властивостями, абстрагованими від реальних прообразів, але й деякими уявлюваними властивостями, яких не мають вихідні об’єкти. Це робиться для того, щоб за допомогою вивчення ідеалізованих образів полегшити вивчення і реальних прообразів. Дійсно, ніде в природі не зустрічається “геометрична точка”, але спроба побудови геометрії без використання цієї абстракції неможлива.

6.1.7. Індукція і дедукція.

Восходження від частинного до загального, від фактів, установлених за допомогою спостереження і дослідження, до узагальнень є закономірністю пізнання. Невід’ємною логічною формою такого восходження є ***індукція*** **–** метод розмірковування від частинного до загального, виведення загального висновку із частинних посилок (від лат. inductio - наведення).

Термін має *три значення*:

1) це один із видів умовиводу, при якому із двох чи декількох одиничних або частинних суджень отримують нове загальне судження.

Приклад:

коло може перетинатися з прямою не більш, ніж у двох точках;

еліпс може перетинатися з прямою не більш, ніж у двох точках;

парабола може перетинатися з прямою не більш, ніж у двох точках;

гіпербола може перетинатися з прямою не більш, ніж у двох точках;

Усе це *одиничні судження*.

Еліпс, парабола, гіпербола представляють собою види конічних перерезів, утворюючи множину кривих другого порядку.

Це *частинне судження*.

Загальне судження: криві другого порядку можуть перетинатися з прямою не більш, ніж у двох точках (істинне судження).

2) Це метод дослідження, при якому, намагаючись дослідити множину об’єктів, ми вивчаємо окремі властивості, встановлюючи ті властивості, що притаманні всієї множині об’єктів, які розглядаються.

Приклад: довести $(10^k - 10) \,\vdots\, k$, де k - непарне число.

$$(10^3 - 10) \,\vdots\, 3 \qquad (10^7 - 10) \,\vdots\, 7 \qquad (10^{11} - 10) \,\vdots\, 11$$

$$(10^5 - 10) \,\vdots\, 5 \qquad (10^9 - 10) \,\vdots\, 9 \qquad (10^{13} - 10) \,\vdots\, 13 \text{ і т.д.}$$

Кожне з тверджень – вірне. За допомогою індукції ми виводимо більш загальне твердження, що $(10^k - 10) \,\vdots\, k$, де k - непарне число. Проте це твердження хибне, оскільки невірно, що $(10^{21} - 10) \,\vdots\, 21$.

3) Це форма викладення матеріалу, коли від менш загальних положень приходять до загальних.

Приклад: знайомлячи учнів з поняттям висоти трикутника, ми креслимо різні трикутники. З аналізу цих рисунків ми робимо висновок: якщо кути, прилеглі до сторони, до якої проведена висота, гострі, то висота перетинається зі стороною; якщо один з двох кутів тупий, то висота перетинається з продовженням сторони.

Індуктивні міркування будуються за схемою:

$$\frac{C(a_1), C(a_2), \ldots, C(a_k)}{\forall x C(x)}.$$

Розрізняють індукцію повну і неповну.

Неповна індукція – індукція, при якій посилки не вичерпують всі можливі частинні випадки, що стосуються даної ситуації.

<u>Приклад</u>: переставний закон додавання: 5+7= 7+5, a+b=b+a.

Висновок за неповною індукцією не є достовірно істинним, а тільки ймовірно істинним (правдоподібним) при істинності посилок. Тобто висновок, заснований на неповній індукції, може бути помилковим. Тому в якості методу дослідження неповна індукція застосовується вельми обережно. Значення неповної індукції – наводити на думку про існування тієї чи іншої закономірності (висування гіпотези). Нехтувати неповною індукцією також не слід, оскільки у цьому методі реалізується принцип навчання “від простого до складного”.

Повною індукцією називається умовивід, заснований на розгляданні всіх одиничних випадків і частинних суджень (всіх посилок), які стосуються цієї ситуації.

Висновок, отриманий на основі повної індукції, є цілком достовірним, тому повна індукція застосовується і як метод строго наукового доведення.

<u>Приклад</u>: в курсі планіметрії теорема про вписаний кут доводиться методом повної індукції (розглядаються три можливі випадки); теорема косинусів вивчається для гострого, тупого і прямого кутів (теорема Піфагора).

В історії математики були випадки, коли відомі математики помилялися у своїх індуктивних висновках. Так, Ферма вирішив, що усі числа виду $2^{2^n}+1$ - прості, але Ейлер знайшов, що вже при $n=5$ число $2^{32}+1$ не є простим.

Дедукція – (лат. deductio - виведення) є форма умовиводу, при якій від відомого загального твердження переходять до менш загальних або одиничних.

Тобто нове твердження виводиться суто логічним способом, за певними правилами логічного виведення (слідування) з деяких відомих тверджень. В дедуктивному міркуванні висновок істинний, коли істинні всі посилки.

Математика є дедуктивною наукою. При строгому викладенні будь-якої математичної дисципліни встановлюється система основних понять і відношень, потім конструюється система аксіом, яка пов’язує ці поняття і відношення. На їх основі утворюються нові поняття, судження.

Дедуктивне доведення теорем характеризується не тільки логічною послідовністю кроків, які проводяться, але й обов’язковістю обґрунтування кожного з низ посилками на відомі математичні положення, що передували тому, що розглядається. Дедукція може виступати і як умовивід, і як метод дослідження, і як форма викладення матеріалу, і як метод навчання математики (абстрактно-дедуктивний метод введення понять).

6.2. Зміст практичного заняття №6

1. Деякі приклади застосування загальних методів і прийомів розумової діяльності при навчанні математики (пояснення викладача) (25 хв.).
2. Розв'язання методичних завдань з теми (пропонує викладач) (45 хв.).
3. Обговорення конспекту уроку *узагальнення і систематизації знань* з теми: „Арифметична і геометрична прогресії" (роздрукований текст, розданий студентам на попередньому занятті) (10 хв.).

6.3. Дидактико- методичні матеріали до практичного заняття №6

6.3.1. Питання до актуалізації опорних теоретичних знань студентів у процесі заняття

1. Як можна класифікувати розумові дії?
2. На які групи поділяються загальні методи і прийоми розумової діяльності?
3. У чому сутність спостереження?
4. У чому різниця спостереження від сприйняття?
5. Охарактеризуйте дослідження (експеримент) як метод розумової діяльності.
6. Дайте означення порівнянню. У чому різниця співставлення і протиставлення?
7. Коли ефективно повне порівняння, а коли часткове?
8. Наведіть схему міркування за аналогією.
9. Визначте аналіз як метод розумової діяльності.
10. Дайте означення синтезу як розумової дії, оберненої до аналізу.
11. Яка роль аналізу в процесі розв'язання математичної задачі?
12. Дайте означення узагальненню як прийому розумової діяльності.
13. Чим відрізняється обмеження (спеціалізація) від узагальнення?
14. Дайте визначення абстрагуванню.
15. Яка операція обернена до абстрагування?
16. У чому різниця між узагальненням та абстрагуванням?
17. Сформулюйте правило конкретизації.
18. Яки види абстракцій найбільш поширені в математиці?
19. В яких значеннях можна використовувати термін «індукція»?
20. У чому різниця між повною і неповною індукцією?
21. Що таке «дедукція»? В яких значеннях можна трактувати термін «дедукція»?

6.3.2. Деякі приклади застосування загальних методів і прийомів розумової діяльності при навчанні математики

(пояснення викладача)

1. *Спостереження і дослідження (експеримент).*

Найкращий спосіб вивчати що-небудь – це відкривати особисто, спираючись на досвід.

Д. Пойа

Наведемо декілька прикладів, що ілюструють застосування елементів дослідження (експерименту), заснованих на спостереженні за математичними об’єктами, на уроках математики.

Перед вивченням теми “Симетрія відносно прямої (осьова симетрії)” можна запропонувати учням такий експеримент: беремо аркуш, згинаємо його навпіл, беремо голку (або шило, або циркуль) і протикаємо цей зігнутий аркуш у будь-якій точці. Далі розгортаємо аркуш і спостерігаємо дві «точки» по різні боки від лінії згинання – «прямої». Робимо висновок: ці дві «точки» володіють такою властивістю, яку називають «бути симетричними відносно даної прямої».

Застосовуючи елементи експерименту, включаючи учнів у процес спостереження, можна проводити підготовчу роботу до вивчення деяких теорем шкільної геометрії, яка сприяє зацікавленості учнів, мотивує до подальшого вивчення цього теоретичного факту, робить учнів «першовідкривателями» наукових істин.

Так, перед вивченням теореми про суму кутів трикутника можна запропонувати учням зобразити в зошитах будь-які трикутники і за допомогою транспортира виміряти градусну міру кутів і знайти їх суму. Зробивши відповідні узагальнення, *висуваємо гіпотезу*: сума кутів будь-якого трикутника дорівнює 180°, яка потребує подальшого строгого доведення.

Перед формулюванням теореми Піфагора можна запропонувати учням зобразити прямокутний трикутник (з цілочисленими сторонами), і порівняти суму квадратів катетів і квадрат гіпотенузи цього трикутника. Далі *робиться припущення*, формулюється твердження, і доводиться дедуктивно.

Розглядаючи питання про кола, вписані в чотирикутники, вчитель може поставити запитання: «А чи завжди можливо у чотирикутник вписати коло?». Знайдуться учні, які за аналогією з трикутниками зроблять поспішний висновок: «Так, завжди». *Досвідним (практичним) шляхом*, шляхом експерименту встановивши, що в деякі чотирикутники неможливо вписати коло, вчитель далі ставить проблемне запитання: «В які ж чотирикутники можна вписати коло?» і переходить до формулювання і доведення теореми-ознаки описаного чотирикутника.

2. Порівняння та узагальнення [145].

Розглянемо послідовно з учнями розв’язання рівнянь: $|x^2 + x| + |3x - 5| = 0$ (методом розбиття на числові проміжки) і $(x^2 + x)^2 + (3x - 5)^2 = 0$ (пригадуючи властивість: $a^2 \geq 0$). Після цього порівняння робимо висновок, що рівняння виду $|P(x)| + |Q(x)| = 0$ і $(P(x))^2 + (Q(x))^2 = 0$ рівносильно системі: $\begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) = 0 \end{cases}$. Можна дати можливість учням самостійно зробити такий висновок – узагальнення. Після цього варто продовжити порівняння (співставлення і протиставлення), запитавши в учнів: а чи відрізняється від розглянутих розв’язання рівняння $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} = 0$?

3. Порівняння та аналогія.

Нагадаємо, що порівняння надає підставу для застосування аналогії, при якій відбувається перенесення інформації про ознаки і відношення з одного об’єкта на інший на основі певного відношення між ними.

При вивченні многогранників і тіл обертання варто продемонструвати ці фігури на рисунках і моделях, запропонувати учням порівняти їх, встановити аналогії між квадратом і кубом, призмою і циліндром, пірамідою і конусом, зрізаною пірамідою і зрізаним конусом, кругом і кулею, дотичною до кола і дотичною площиною до сфери, згадати наведені нижче означення 1-7 і за аналогією спробувати *самостійно сформулювати означення* $1^* - 7^*$ (табл. 6. 1) [159].

За допомогою порівняння і аналогії можна не тільки підводити учнів до формулювання означень математичних понять, а і до *формулювання теорем*. Порівнюючи і встановлюючи аналогію між прямокутником і прямокутним паралелепіпедом, прямою призмою і циліндром (прямим круговим), зрізаною пірамідою і зрізаним конусом учні, пригадуючи твердження 8-14, намагатимуться самостійно сформулювати твердження $8^* - 14^*$ (*висувається гіпотеза, що потребує подальшого доведення*) (табл. 6.1). Формуючи аналогічні твердження до вже відомих, діти беруть активну участь у навчальному процесі, вчаться міркувати, мислити.

Таблиця 6.1

1. Квадратом називається прямокутник, у якого всі сторони рівні.	1^*. Кубом називається прямокутний паралелепіпед, у якого всі ребра рівні.
2. Призмою називається многогранник, який складається з двох плоских многокутників, які лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, та всіх	2^*. Циліндром називається тіло, яке складається з двох кругів, які лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, та всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів.

відрізків, що сполучають відповідні точки цих многокутників.	
3. Пірамідою називається многогранник, який складається з плоского многокутника – основи піраміди, точки, яка не лежить у площині основи - вершини піраміди і всіх відрізків, що сполучають вершину піраміди з точками основи.	3*. Конусом називається тіло, яке складається з круга – основи конуса, точки, яка не лежить у площині основи - вершини конуса і всіх відрізків, що сполучають вершину конуса з точками основи.
4. Площина, яка паралельна площині основи піраміди і перетинає її бічні ребра, відтинає від неї подібну піраміду. Друга частина піраміди – це многогранник, який називається зрізаною пірамідою.	4*Площина, яка паралельна площині основи конуса і перетинає конус, відтинає від нього менший конус. Частина, що залишилась, це тіло, що називається зрізаним конусом.
5. Кругом називається фігура, яка складається з усіх точок площини, відстань від яких до даної точки не більша за дану.	5*. Кулею називається тіло, яке складається з усіх точок простору, що знаходяться від даної точки на відстані, не більшій за дану.
6. Відрізок, який сполучає дві точки кола і проходить через центр, нахивається діаметром.	6*. Відрізок, який сполучає дві точки сфери і проходить через центр, нахивається діаметром.
7. Пряма, що проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, називається дотичною.	7*. Площина, що проходить через точку сфери і перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, називається дотичною площиною.
8. У прямокутнику квадрат діагоналі дорівнює сумі квадратів двох його суміжних сторін.	8*. У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.
9. Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми: $S_б = \mathrm{P} \cdot \mathrm{H}$.	9*. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює добутку довжини кола основи на висоту: $S_б = 2\pi R \cdot \mathrm{H}$.

10. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему: $S_б = \frac{1}{2}\mathrm{P} \cdot l$.	10^*. Площа бічної поверхні конуса дорівнює добутку довжини півкола основи на довжину твірної: $S_б = \pi R \cdot l$.
11. Площа прямокутника зі сторонами a і b обчислюється за формулою: S= $a \cdot b$.	11^*. Об'єм прямокутного паралелепіпеда з лінійними вимірами a, b, c обчислюється за формулою $V = a \cdot b \cdot c$.
12. Об'єм призми дорівнює добутку площі її основи на висоту: $V = S \cdot H$.	12^*. Об'єм циліндра дорівнює добутку площі основи на висоту: $V = S \cdot H = \pi R^2 \cdot H$.
13. Об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту: $V = \frac{1}{3}S \cdot H$.	13^*. Об'єм конуса дорівнює третині добутку площі основи на висоту: $V = \frac{1}{3}S \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot H$.
14. Об'єм зрізаної піраміди обчислюється за формулою: $V = \frac{1}{3}h \cdot \left(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2\right)$.	14^*. Об'єм зрізаного конуса обчислюється за формулою: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R_1^2 + R_1 \cdot R_2 + R_2^2)$.

Порівняння і аналогію також доцільно використовувати і до *доведення теорем*. Наприклад, використовуючи виведення формули об'єму зрізаної піраміди, учні зможуть самостійно вивести формулу об'єму зрізаного конуса.

При вивченні стереометрії є широкі можливості використання порівняння і аналогії при *розв'язуванні задач*. Наприклад:

<u>Задача 1.</u> Конус перетинається площиною, що паралельна основі, на відстані 4 см від неї. Висота конуса 6 см, а радіус основи 9 см. Знайдіть довжину кола перерізу.

<u>Аналогічна планіметрична задача</u>. Пряма, паралельна основі рівнобедреного трикутника, перетинає бічні сторони на відстані 4 см від неї. Висота трикутника, опущена на основу, дорівнює 6 см, а основа - 18 см. Знайдіть довжину відрізка прямої між бічними сторонами.

<u>Задача 2.</u> В кулю вписано правильну чотирикутну піраміду, висота якої дорівнює 6 см, а площа основи – 36 см^2. Знайдіть бічне ребро піраміди.

Якщо через вершину піраміди і діагональ її основи проведемо площину, то перерізом кулі і піраміди площиною буде рівнобедрений трикутник, вписаний у коло. Тому <u>аналогічною планіметричною задачею</u> буде така: в коло вписано рівнобедрений трикутник, висота якого, проведена до основи, дорівнює 6 см, а основа - $6\sqrt{2}$см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

Оскільки *висновок за аналогією не завжди правильний, треба пропонувати учням і такі завдання, що демонструють хибність висновків за аналогією.* Наприклад:

Задача 1. Скільки прямих у просторі, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через дану точку прямої?

Використовуючи аналгію між перпендикулярними прямими у просторі й на площині і знаючи, що на площині чрез точку прямої можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної, учні вважають, що в просторі можна провести через точку прямої лише одну пряму, перпендикулярну до даної. Тут учителю слід звернутися до моделі – класної кімнати, і показати, що їхній висновок по аналогії невірний: пряма перетину двох стін кімнати перпендикулярна до прямих перетину цих стін з підлогою. Проводячи подальші міркування, робимо висновок – таких прямих можна провести безліч.

Задача 2. Чи завжди дві площини, перпендикулярні до третьої, паралельні між собою?

Використовуючи аналогію між перпендикулярністю площин і перпендикулярністю прямих на площині і знаючи, що на площині дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, завжди паралельні, учні стверджують, що дві площини, перпендикулярні до третьої, тж завжди паралельні. Розглянувши, наприклад, модель прямої трикутної призми, учні переконуються у хибності своєї відповіді.

Розв'язуючи такі усні вправи, учні усвідомлюють, що сформулювавши твердження за аналогією ми лише висуваємо гіпотезу, яку потіб потрібно або довести, або спростувати.

4. *Аналогія та узагальнення* [183].

Відомо, що площа будь-якого трикутника може бути знайдена за формулою Герона: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де a, b і c - сторони цього трикутника, а p – півпериметр.

В класах, де математика вивчається на поглибленому рівні, можна поставити проблемне запитання: «А чи буде справедлива така формула для знаходження площі чотирикутника?».

Дослідження цього питання показує, що для чотирикутників, вписаних у коло (і тільки для них!), справедлива така формула для обчислення площі (*формула Брахмагупти або узагальнена формула Герона*): $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

З'ясувалося, що *повна аналогія місця не має*.

Відштовхуючись далі від аналогії в формулах, можна вияснити причину цієї аналогії: існує зв'язок між трикутником (многокутником, який завжди можна вписати у коло) і чотирикутником (не будь-яким, а тільки таким, який можна вписати у коло). Отже, суттєвою ознакою, що поєднує трикутник і чотирикутник (в смислі схожісті формул для обчислення площ), є можливість вписати їх у коло.

Порівняння двох понять – трикутника і чотирикутника – завершилось у даному випадку *неповним узагальненням*: лише для частини об'єктів, що входять до обсягу другого поняття, вірна узагальнена формула Герона.

У даному прикладі, хоча аналогія в цілому і не підтвердилася, вона слугує джерелом нових ідей: трикутник можна розглядати як вироджений вписаний чотирикутник. Дійсно, нехай вершина D вписаного чотирикутника ABCD наближається як завгодно близько до вершини A (рис. 6.3)

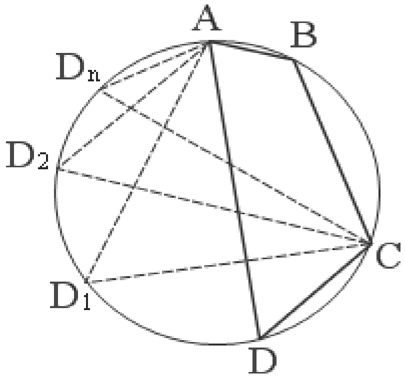


Рис. 6.3

Тоді сторона AD=d стає як завгодно близькою до нуля і узагальнена формула перетворюється у звичайну формулу Герона:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-0)} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p}.$$

Отже, *аналогія допомагає співставляти і протиставляти поняття математики, а нові відомості, поняття краще засвоюються тоді, коли вони вводяться не поза всякого зв'язку з попередніми поняттями, а у порівнянні з ними, у встановленні схожих або різних ознак.*

6.3.3. Методичні завдання до практичного заняття №6

1. Ознаки подільності в шкільному курсі математики вводяться індуктивно чи дедуктивно?
2. Вкажіть прийоми роботи з учнями по вихованню в них критичного відношення до висновків по аналогії.
3. Наведіть приклад теореми, перед доведенням якої доцільно запропонувати учням перевірити справедливість припущення методом неповної індукції.
4. Виконайте висхідний аналіз такої задачі: «Доведіть, що якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його кутів, то він є ромбом».
5. Проведіть порівняння властивостей круга і кулі (кола і сфери), склавши таблицю. За допомогою якого методу розумової діяльності доцільно вивчати властивості кулі (сфери)?
6. Вивчення теми «Чотирикутники» відбувається за допомогою узагальнення або обмеження понять? Проведіть узагальнення поняття «квадрат».

7. Продумайте і поясніть, яким чином можна використати метод порівняння при находженні точок перетину висот в осторокутному, прямокутному і тупокутному трикутниках?
8. Чи можна вважати, що введення поняття «подібні фігури» в курсі геометрії здійснюється по аналогії з введенням поняття «рівні фігури»? Якщо так, у чому сутність цієї аналогії?
9. Сформулюйте площинний аналог наступної просторової теореми: «У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої його діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його лінійних вимірів».
10. Підберіть задачу з практичним змістом і побудуйте математичну модель до неї. Який метод розумової діяльності був використаний при цьому?
11. Наведіть приклад теореми шкільного курсу геометрії, доведення якої можна було розпочати зі спостереження і дослідження (експерименту).
12. Вкажіть, де абстрагування, а де узагальнення:
    1) дах, юбка, поверхня стільця та ін. – трапеція;
    2) прямокутник, квадрат, ромб, паралелограм, трапеція та ін. - чотирикутники.

6.3.4. Розгорнутий конспект уроку з теми: “Числові послідовності. Арифметична і геометрична прогресії”.

(за основу взятий конспект уроку із журнала «Математика в школі»)

Теоретична передмова

Узагальнення та систематизація знань з тієї чи іншої теми ШКМ може відбуватися на трьох рівнях.

Перший рівень: розглянутий у процесі вивчення теми матеріал повин ен бути чітко упорядкований в рамках самої теми. Для цього із сукупності вивченого матеріалу треба виділити основні факти (поняття, їх властивості) і зафіксувати найбільш значні зв’язки та відношення між ними.

Другий рівень систематизації передбачає визначення місця вивченої теми в структурі курсу шкільної математики.

Третій рівень – учні повинні мати уяву про можливість (якщо вона є) практичного застосування вивченої теми за границею математики (практичне застосування, міжпредметні зв’язки тощо).

Урок, план-конспект якого представляється, розрахований на спарений урок (90 хв.)

Мета: узагальнити та систематизувати знання учнів, здобуті в процесі вивчення теми. Провести корекцію знань і умінь. Підготувати учнів до тематичного контролю. Встановити зв’язки даної теми з іншими розділами курса алгебри. Показати застосування прогресій в інших галузях.

Тип уроку: узагальнення і систематизація знань.

Обладнання: комп’ютер, мультимедійний проектор, екран, кольорова крейда, таблиці, мікрокалькулятор, креслярські інструменти.

Хід уроку:

І. Актуалізація опорних знань учнів.

У ч и т е л ь: Сьогодні заключний урок з теми “Числові послідовності та прогресії”. Підсумовуючи, ми повторимо основні факти, які ви засвоїли, з’ясуємо, як пов’язані послідовності з іншими об’єктами алгебри, а також розглянемо інші застосування теорії послідовностей за межами алгебри – в інших науках і в житті. Результати засвоєння вами всієї теми будуть з’ясовані в процесі тематичного контролю, що відбудеться на наступному уроці.

Щоб уникнути помилок, проаналізуємо розв’язання самостійної роботи, яку ви писали на попередньому уроці. Одночасно перевіримо домашнє завдання, яке виконувалося по аналогічному варіанту.

З завданнями самостійної роботи ви впоралися непогано, деякі учні припустилися помилок при обчисленнях. Не всі змогли в останньому завданні розкласти на множники многочлен третього степеня.

Зараз, дивлячись на екран, ви зможете перевірити декілька розв’язань, взятих безпосередньо з ваших робіт. Знайдіть помилки в цих розв’язаннях.

Слайд 1.

Задача 1.
Дано: 3, 7, 11, 15,… - арифметична прогресія.
Знайти: a_n, a_{50}, S_{50}.
Розв’язання: $d = 7 - 3 = 4,\ a_1 = 3$.
$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$;
$a_n = 3 + (n-1)\cdot 4 = 4n - 1;\ a_{50} = 4\cdot 50 - 1 = 199.$
$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n;\ S_{50} = \dfrac{3+199}{2}\cdot 50 = 5050$.

Слайд 2.

Задача 2.
Дано: 2, -6, 18, -54,… - геометрична прогресія.
Знайти: $b_n;\ S_7$.
Розв’язання: $q = \dfrac{-6}{2} = -3,\ b_1 = 2$;
$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$;
$b_n = 2\cdot(-3)^{n-1} = (-6)^{n-1}$;
$S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1};\ S_7 = \dfrac{2((-3)^7 - 1)}{-3-1} = \dfrac{2(2187-1)}{-4} = \dfrac{2186}{-2} = -1093.$

Слайд 3.

Задача 3.
Дано: $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ - зростаюча геометрична прогресія.
b_2, b_3, b_5 - арифметична прогресія.
Знайти: q.
Розв’язання: $b_3 - b_2 = b_5 - b_3$; $b_2 = b_1 \cdot q$; $b_3 = b_1 \cdot q^2$; $b_5 = b_1 \cdot q^4$;
$b_1 \cdot q^2 - b_1 \cdot q = b_1 \cdot q^4 - b_1 \cdot q^2$; $q - 1 = q^3 - q$; $(q-1)\cdot(q^2 - 1 + q) = 0$;
$q_1 = 1$; $q_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $q_3 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$;
Відповідь: $\{1; \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\}$.

Після того, як учні знайшли помилки на слайді 2, пропонуємо такі вправи:

1) Обчислити: $2^2 \cdot 3^2$; $2^3 \cdot 3^2$; $3^5 \cdot 3^2$; $2 \ \ \cdot 3^2$.
2) Які властивості степенів використовуються для виконання дій над степенями?
3) Обчислити: 2^3; -2^3; $(-2)^3$.
4) Як залежить знак степеня від знака основи і показника степеня?

Аналізуючи розв’язання на слайді 3, основну увагу слід приділити відповідності коренів рівняння умові задачі. З цією метою пропонуємо усні завдання:

1) Яка послідовність називається зростаючою (спадною)?
2) Чи зростати, чи спадати буде геометрична прогресія, в якій

   а) $b_1 = 2, q = 3$; б) $b_1 = 2, q = \dfrac{1}{2}$; в) $b_1 = 2, q = -3$; г) $b_1 = -2, q = 3$;

   д) $b_1 = 2, q = 1$?
3) При яких умовах геометрична прогресія буде зростаючою (спадною)?

Для актуалізації теоретичних знань пропонуємо учням відповісти на запитання:

1) Наведіть приклади послідовностей.
2) Чим відрізняється послідовність чисел від множини чисел?
3) Як можна задати послідовність?
4) Чи задають послідовність декілька перших її членів?
5) Які види послідовностей ви знаєте?
6) Зазначте схожі і відмінні характеристики арифметичної і геометричної прогресій.

Далі пропонуємо усні вправи, заздалегідь написані на дошці:

1) Які з формул а) $a_n = 2n+1$; б) $c_n = 2n+1+(n-1)\cdot(n-2)$; в) $b_n = (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)+2n+1$ задають послідовність, першими членами якої є числа 3, 5, 7?
2) Знайдіть третій член арифметичної прогресії $a,\ b, \ldots$;
3) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ - скінчена арифметична прогресія, d - різниця прогресії. Чи буде арифметичною прогресією послідовність: а) a_1, a_4, a_6; б) $a_1-2, a_2-2, a_3-2, a_4-2, a_5-2, a_6-2$? Якщо так, то знайдіть d.
4) Знайдіть третій член геометричної прогресії $a,\ b, \ldots$;
5) $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ - скінчена геометрична прогресія, q - знаменник прогресії. Чи буде геометричною прогресією послідовність: а) b_1, b_3, b_5; б) $3b_1, 3b_2, 3b_3, 3b_4, 3b_5, 3b_6$? Якщо так, то знайдіть q.
6) Нехай дана скінчена послідовність а) 3, 3, 3, 3, 3; б) 3, -3, 3, -3, 3; в) 3, $\frac{1}{3}$, 3, $\frac{1}{3}$, 3; Чи буде ця послідовність арифметичною або геометричною прогресією?
7) Знайдіть п'ять членів нескінченої послідовності (c_n) , якщо $c_1 = 1000$; $c_{n+1} = 0{,}1 \cdot c_n$; Знайдіть значення виразів: а) $\frac{c_2}{c_1}$; б) $\frac{c_5}{c_4}$; в) $\frac{c_{k+1}}{c_k}$;
8) Складіть скінчену послідоність, n-й член якої задається формулою: а) $a_n = 2n-1$; б) $b_n = (-1)^n$.

ІІ. Систематизація та узагальнення теоретичного матеріалу.

Після виконання останнього завдання, необхідно звернути увагу учнів на той факт, що кожному натуральному числу n відповідає єдиний член послідовності a_n.

У ч и т е л ь: таким чином, числові послідовності – це особливий клас функцій. Їх областю визначення є множина натуральних чисел для нескінчених послідовностей і множина перших n натуральних чисел – для скінчених. Якщо послідовності – це функції, то їх можна зобразити графічно. З'ясуємо на конкретних прикладах, які графіки можуть мати числові послідовності.

Пропонуємо учням по варіантах виконати завдання: зобразити в системі координат $(n; a_n)$ графіки послідовностей, які задаються формулами: а) $a_n = -3+2(n-1)$; б) $a_n = 4-2(n-1)$; в) $b_n = 0{,}5 \cdot 2^{n-1}$; г) $b_n = 8 \cdot 0{,}5^{n-1}$.

Декілька сильних учнів виконують ці завдання на дошці (рис. 6.4), які потім демонструються і обговорюються.

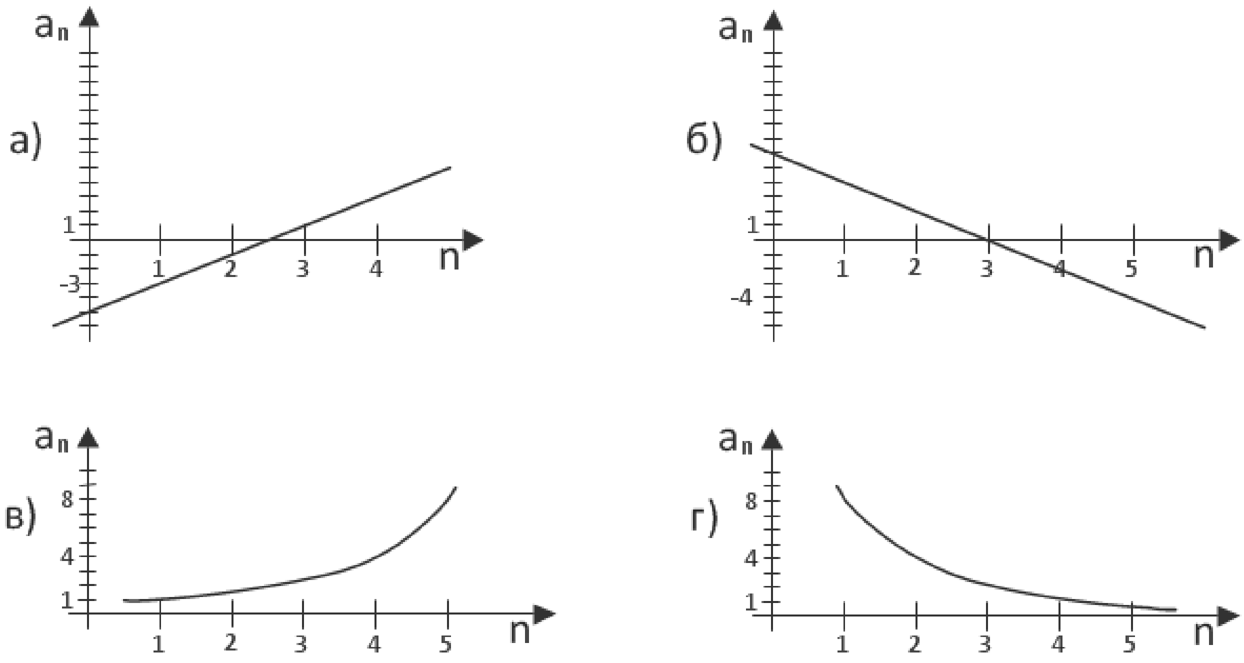


Рис. 6.4

Учні самі або за допомогою вчителя повинні помітити, що точки графіка арифметичної прогресії лежать на прямій, що відповідає лінійній функції. У випадку геометричної прогресії з додатковим знаменником точки належать графіку показникової функції – таким чином відбувається пропедевтика цієї теми (елементи випереджального навчання). Учитель зазначає, що таку функцію діти будуть вивчати в 10 класі.

Далі ілюструємо за допомогою кругів Ейлера-Венна взаємозв’язок між поняттями “функція”, “послідовність”, “прогресія” (рис. 6.5).

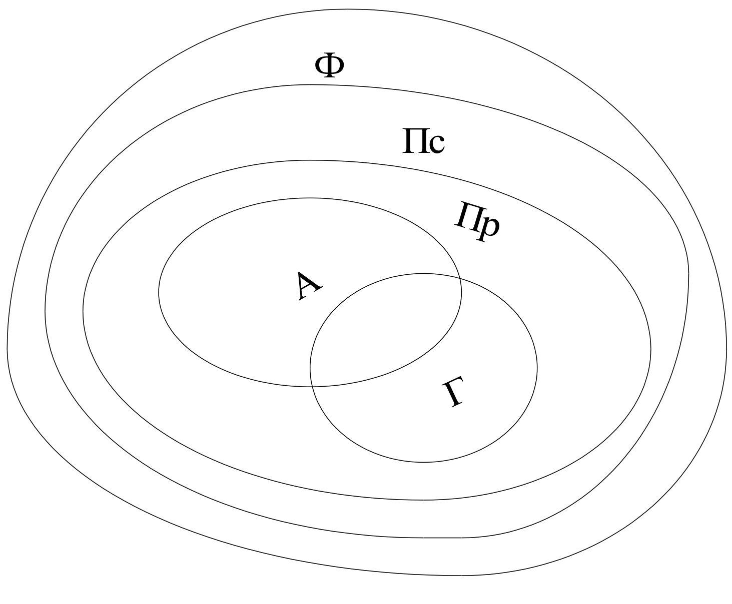


Рис. 6.5

Ф – множина функцій; Пс – множина послідовностей; Пр – множина прогресій; А – множина арифметичних прогресій; Г – множина геометричних прогресій.

У ч и т е л ь: Отже, послідовності є частинним випадком функції. Наведіть приклади функцій. Наведіть приклади послідовностей.

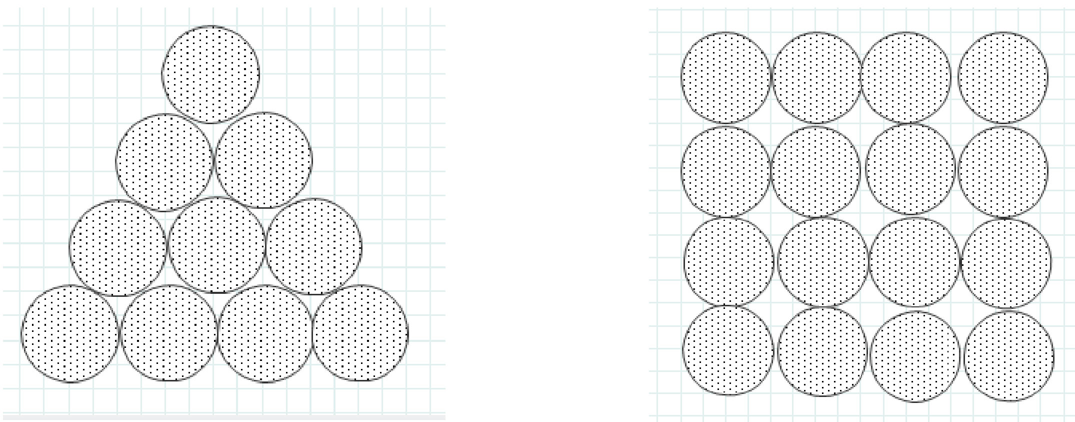
Звернемо увагу, що арифметична і геометрична прогресії перетинаються, тобто існують прогресії, які є одночасно і арифметичними і геометричними. Наведіть приклад такої прогресії (кожну сталу послідовність можна вважати арифметичною прогресією з різницею 0 і геометричною прогресією із знаменником 1).

Чи обмежуються прогресії тільки арифметичними і геометричними? Ні, є інші, наприклад, гармонічна прогресія, члені якої обернені до членів арифметичної прогресії.

Взагалі, послідовності – явище унікальне.

Вони прийшли к нам з глибини віків. Вже у клинописних дощечках вавілонян, у єгипетських папірусах, датованих II тисячоліттям до н.е. зустрічаються задачі на арифметичну і геометричні прогресії. Впродовж століть людей приваблювала внутрішня гармонія і строга краса числових рядів.

Піфагор та його учні виділяв з натурального ряду послідовності так званих трикутних, квадратних, п'ятикутних чисел та встановили багато цікавих залежностей, наприклад (рис. 6.6):



$1, 3, 6, 10, 15, \ldots, \dfrac{n(n+1)}{2};$ $\qquad$ $1, 4, 9, 16, 25, \ldots\ n^2$

Рис. 6.6

Цікавими властивостями володіє послідовність простих чисел. До цього часу для її членів не знайдена ані рекурентна формула, ані формула для n-го члена. Ці числа можна знайти лише відомим із стародавніх часів способом – так званого решета Ератосфена.

Італійський математик Фібоначчі у зв'язку із задачею розмноження кролів увів послідовність, де кожний наступний член дорівнює сумі двох попередніх: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … . Для цієї послідовності є і рекурентна формула $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, і формула n-го члена: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}\right]$.

Повернемося до арифметичних і геометричних прогресій і пригадаємо основні факти, які ми вивчили, занесемо їх до таблиці, причому зробимо це по варіантах естафетою (на дошці таблиця) (табл. 6.2):

Таблиця 6.2

Арифметична прогресія		Геометрична прогресія
	Означеня	
	Рекурентна формула	
	Формула n-го члена	
	Характеристична властивість	
	Формула суми n-перших членів	
	Формула суми всіх членів (для $\lvert q \rvert < 1$)	

Ш. Систематизація та узагальнення практичного матеріалу.

У ч и т е л ь: На попередніх уроках ми з вами розв'язували різноманітні задачі та вправи, щоб краще засвоїти пов'язані з послідовностями поняття та властивості. Ми вчились підбирати формулу n-го члена послідоності, перші члени якої задані; знаходили ті чи інші елементи прогресій (зокрема, ви знаєте, що якщо з п'яти елементів a_1, d, n, a_n, S_n або b_1, q, n, b_n, S_n відомі будь-які три, то завжди можна знайти решту); познайомилися з деякими застосуваннями прогресій в математиці (наприклад, для спрощення виразів, доведення тотожностей, нерівностей, для представлення нескінченого періодичного десяткового дробу у вигляді звичайного).

Задачі, створені на основі геометричної та арифметичної прогресій, були і залишаються доброю нагодою випробувати гнучкість та кмітливість розуму.

Розглянемо ще декілька задач.

Задача. Одного разу розумний бідняк попросив у скупого багатія притулку на два тижні на таких умовах: "За це я тобі першого дня заплачу 1 карбованець, другого – 2, третього – 3 і т.д., збільшуючи щоденну плату на 1 карбованець. Ти ж будеш подавати милостиню: першого дня 1 копійку, другого - 2, третього – 4 і т.д., збільшуючи щодня милостиню вдвічі". Багатій з радістю на це погодився, вважаючи умови вигідними. Скільки грошей одержав багатій?

Розв'язання: сума, яку має сплатити бідняк багатію, складає суму 14-ти членів арифметичної прогресії, перший член якої та різниця дорівнює 1 (105 карбованців). А багатій бідняку сплачує суму, яка складає суму 14-ти членів геометричної прогресії з першим членом, рівним 1, та знаменником, рівним 2 (16383 копійки або 163 карбованці 83 копійки). Отже багатій не лише не отримав вигоди з цієї угоди, а й змушений був доплатити бідняку 58 карбованців 83 копійки.

У ч и т е л ь: тривале життя прогресій зумовлене не тільки їх цікавими математичними властивостями, а й широкими можливостями їх застосування в інших наукових галузях. Деякі учні, виконуючи домашнє завдання, підготували короткі повідомлення щодо використання прогресій за межами математики.

Прогресії у фізиці. Прогресії виражають закони деяких фізичних явищ. Наприклад, за законом геометричної прогресії здійснюється поділ нейтронів при ядерній ланцюговій реакції.

У фізиці є таке поняття, як "рівноприскорений рух". Якщо кажуть, що тіло рухається рівноприскорено, то це означає, що відстань, яку воно проходить за кожну наступну одиницю часу збільшується на одну і ту саму величину. Таким чином, відрізки шляху, які проходить тіло за 1-шу, 2-гу, 3-тю … одиниці часу, утворюють арифметичну прогресію.

Прогресії в біології. В біології є також явища, які можна охарактеризувати за допомогою прогресій. Одним з таких явищ є розмноження живих організмів. Знаючи такі характеристики організму як періодичність відтворення та кількість потомства, можна за допомогою прогресій спрогнозувати кількість популяції за певний проміжок часу. Аналогічно в *соціологічних науках* теорія прогресій дає змогу обчислювати приріст населення.

IV. Підведення підсумків.

У ч и т е л ь: на наступному уроці ви будете писати контрольну роботу з теми: "числові послідовності і прогресії", на якій вам будуть запропоновані стандартні задачі, що містяться в підручнику. Деякі з них ви розв'язували на самостійній роботі, і ми їх розглядали на початку уроку.

Сьогодні ми познайомилися з цікавим матеріалом, розширили і поглибили свої знання про послідовності.

Учням пропонується розповісти, що цікавого вони дізналися про:

- послідовності та їх види;
- арифметичні прогресію;
- геометричні прогресію;
- застосування послідовностей до розв'язування математичних задач;
- застосування послідовностей за межами математики.

Далі відбувається підведення підсумків, оцінювання учнів.

6.4. Домашнє завдання

1. Проведіть розв'язання будь-якої задачі на побудову. Які методи розумової діяльності використовуються при цьому?
2. Опишіть, як відбувається узагальнення поняття степеня в ШКА.
3. Наведіть приклад неправильного висновку по аналогії в ШКМ.
4. Зробіть висхідний аналіз задачі: «Якщо з точки P поза колом провести дві січні, що перетинають коло у точках A, B і C, D відповідно, то $AP \cdot BP = CP \cdot DP$».

6.5. Література

Основна: [15], [23], [30], [104], [130], [139], [145], [150], [157], [159], [183].

Додаткова: [2], [30], [39], [105], [106], [174], [180].

6.6. Аналіз практичного заняття №6 з точки зору формування у студентів нормативної, варіативної та проектувально-моделювальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Нормативна складова

Аналізуючи представлений розгорнутий план-конспект уроку, виконуючи домашнє завдання студенти на даному практичному занятті звертаються до програми з математики, конкретизують знання щодо цілей, завдань, змісту навчання математики та засобів їх ефективної реалізації.

Варіативна складова

Виконуючи методичні завдання на практичному занятті №6 майбутні фахівці мають потребу звернутися до підручників з математики різних класів, різних авторських колективів, аналізуючи зміст, зазначаючи відмінності у методичних системах, які реалізуються в цих підручниках. Обговорюючи представлений розгорнутий план-конспект уроку, студенти визначають місце такого уроку в системі уроків з даної теми, звертаючись до календарно-тематичного планування. Відтак, набуваються певні знання, вміння і досвід, необхідні вчителю математики у професійній діяльності.

Проектувально-моделювальна складова

Зміст практичного заняття №6 передбачає озброїти студентів знаннями щодо прийомів організації діяльності учнів, зокрема розумової діяльності; формувати в них уміння застосовувати прийоми і керувати розумовою діяльністю школярів на уроках математики, включаючи самостійну навчальну діяльність. У процесі аналізу і обговорення розгорнутого план-конспекту уроку майбутні учителі математики встановлюють відповідність застосованих методів, форм, засобів навчання математики, відібраного змісту, включаючи задачний матеріал, меті, завданням і типу уроку. Отже, студенти набувають вмінь проектувати уроки з математики і складати їх розгорнуті конспекти.

Практичне заняття №7

Тема: *Специфічні прийоми розумової діяльності та їх використання при навчанні математики.*

Мета: засвоєння основних характеристик специфічних прийомів розумової діяльності; формування вмінь виділяти і використовувати загальні і специфічні методи і прийоми розумової діяльності при навчанні математики; формування вмінь виконувати дії підведення під поняття і виведення наслідку.

7.1. Основні теоретичні питання,

що мають опанувати студенти до даного заняття

7.1.1. Характеристика деяких специфічних прийомів розумової діяльності. Підведення під поняття.

При навчанні математики (формуванні понять, їх застосуванні, розв'язанні задач, доведенні теорем та ін.) важливо формувати дві взаємообернені розумові дії: підведення під поняття і виведення наслідків.

Дія підведення під поняття (або дія розпізнавання) складається у встановленні факту належності об'єкту до поняття. Для його виконання необхідно перевірити наявність у об'єкта сукупності істотних ознак. Якщо об'єкт не володіє хоча б одним з них, то роблять висновок – об'єкт до даного поняття не належить.

Алгоритм дії "підведення під поняття", коли істотні ознаки пов'язані сполучниками "і", "або".

Для того, щоб встановити приналежність x до y, треба:

1) з'ясувати ознаки y;
2) перевірити, яким логічним сполучником вони пов'язані;
3) якщо

а) сполучником "і", то перевірити, чи володіє x всіма ознаками y;

якщо так, то $x \in y$; якщо ні, то $x \notin y$;

б) сполучником "або", то перевірити, чи володіє x хоча б однією ознакою y;

якщо так, то $x \in y$; якщо ні, то $x \notin y$.

Приклад.

Щоб встановити, що прямі паралельні, застосуємо алгоритм:

1) істотні властивості: належити одній площині та не перетинатися;
2) сполучник "і" (кон'юнктивна структура означення);
3) якщо обидві істотні властивості виконуються, то прямі паралельні, якщо хоча б одна не виконується, то прямі не паралельні.

Приклад.

Чи буде число 15 – цілим?:

1) істотні властивості: бути натуральним, або йому протилежним, або 0;

2) сполучник “або”(диз’юнктивна структура означення);

3) $15 \in N \Rightarrow 15$ – ціле число.

7.1.2. Виведення наслідків.

Дія ***виведення наслідків*** складається у встановленні системи властивостей, якими володіє даний об’єкт, виходячи з факту його належності даному поняттю.

Алгоритм для дії “виведення наслідків”:

1) назвати всі істотні ознаки поняття, що розкриті в означенні;
2) назвати всі інші суттєві властивості даного поняття, які вивчалися.

Приклад: виведення наслідків з поняття рівнобедреного трикутника.

Якщо трикутник рівнобедрений, то:

1) дві його сторони рівні;
2) кути при основі рівні;
3) бисектриса кута при вершині трикутника є висотою і медіаною;
4) пряма, що містить бісектрису кута при вершині, є віссю симетрії.

7.2. Зміст практичного заняття №7

1. Самостійна робота (контролюючого характеру) (10 хв.).
2. Перевірка домашнього завдання (30 хв.).
3. Підведення під поняття і виведення наслідків: сумісне розв'язування задач (пропонує викладач) (40 хв.).

7.3. Дидактико- методичні матеріали до практичного заняття №7

7.3.1. Питання до актуалізації опорних теоретичних знань студентів у процесі заняття

1. У чому сутність дії підведення під поняття як специфічного прийому розумової діяльності?
2. Який алгоритм дії підведення під поняття?
3. Охарактеризуйте дію виведення наслідків як специфічного прийому розумової діяльності.
4. Сформулюйте алгоритм дії виведення наслідків.

7.3.2. Орієнтовний зміст самостійної роботи

(контролюючого характеру) з теми: «Загальні методи і прийоми розумової діяльності та їх використання у навчанні математики»

Варіант 1

1. У чому відмінність спостереження від сприйняття?
2. Наведіть загальну схему міркування за аналогією.
3. Вкажіть, де абстрагування, а де узагальнення:
   а) дошка, аркуш паперу, віконна рама, поверхня столу та ін. – прямокутник;
   б) прямокутник, квадрат, ромб – паралелограм.

Варіант 2

1. За яких умов порівняння призводить до правильного висновку?
2. Наведіть приклади, коли аналіз, як розумова дія, використовується у процесі навчання математики.
3. Наведіть приклад міркування за неповною індукцією.

7.3.3. До перевірки домашнього завдання

Узагальнення поняття степеня в ШКМ

1) Степінь натурального числа з натуральним показником (5 кл.).

2) Степінь з натуральним показником. Властивості степеня з натуральним показником (7 кл.). Піднесення одночленів до степеня. Степінь многочлена. (7 кл.).

3) Степінь із цілим показником та його властивості (8 кл.)

4) Степінь з раціональним показником та його властивості (10 кл., рівень стандарту, в темі «Функції, їхні властивості та графіки»).

5) Степінь із довільним дійсним показником (10 кл., рівень стандарту, в темі «Показникова і логарифмічна функції», спочатку вводиться поняття степеня з ірраціональним показником).

7.4.4. Методичні завдання до практичного заняття №7

I. Дія підведення під поняття (дія розпізнавання):

1) Чи буде число -14 цілим? (звернути увагу на диз’юнктивну структуру означення поняття «ціле число»).

2) Чи є представлені фігури паралелограмами? (рис. 7.1) (звернути увагу на кон’юнктивну структуру означення поняття паралелограма).

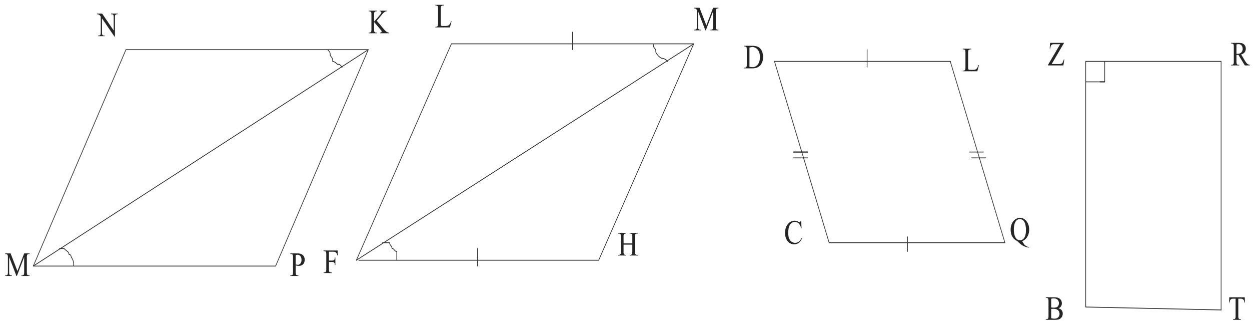


Рис. 7.1

3) Чи являються зображені кути вписаними кутами? (рис. 7.2) (звернути увагу на кон'юнктивну структуру означення поняття «вписаний кут»).

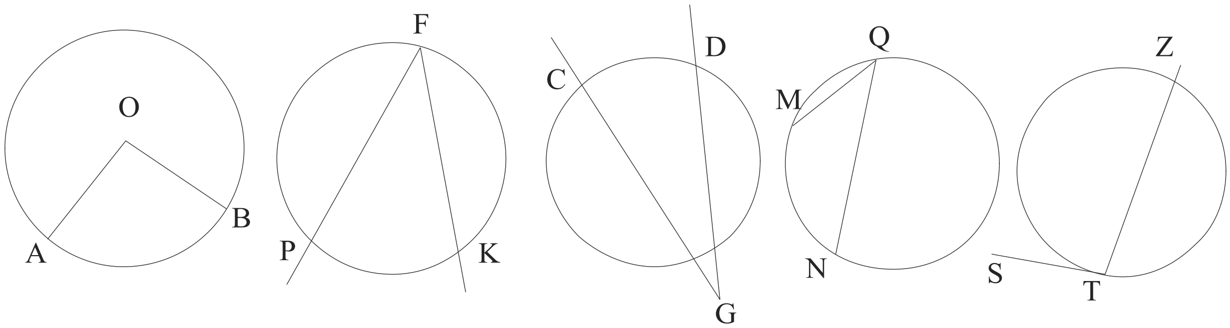


Рис. 7.2

II. Виконайте дію виведення наслідків:
1) з поняття «ромб»;
2) з поняття правильної піраміди;
3) з поняття «геометрична прогресія»;
4) з поняття «квадратне рівняння».

Завдання для самостійної роботи
(навчального характеру)

I. Дія підведення під поняття (дія розпізнавання):
1) Чи є дані дроби неправильними: $\frac{17}{6}$; $\frac{8}{8}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{6}{11}$; $\frac{14}{17}$?
2) Чи є дані числа раціональними:

   0,75; $\frac{3}{13}$; π; 9,(2317); $4\frac{7}{9}$; 0,3627859…; $\sqrt{5}$; $\sqrt{25}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3,05(23); e?
3) Чи є MN середньою лінією трапеції (рис. 7.3)?

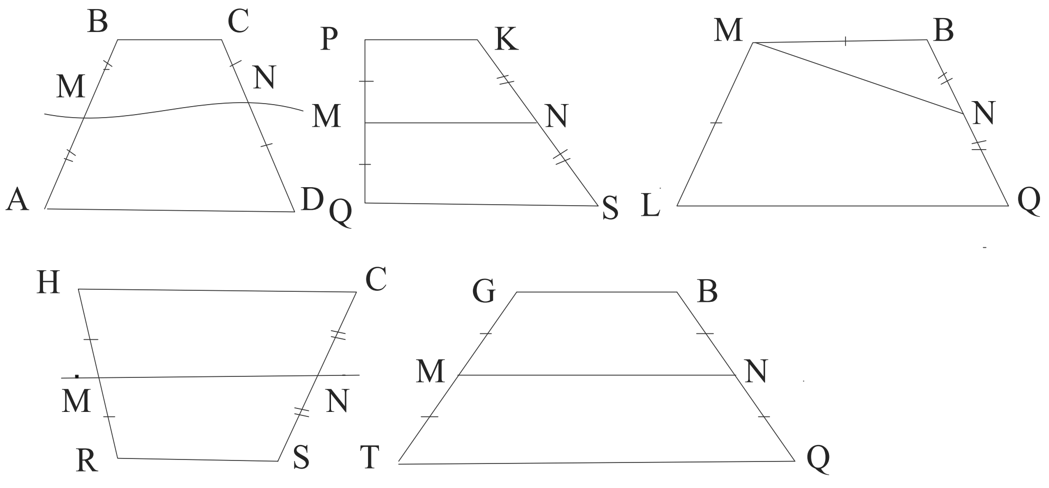


Рис. 7.3

II. Виконайте дію виведення наслідків:
1) з поняття «сфера»;
2) з поняття арифметичної прогресії;
3) з поняття «прямий круговий циліндр»;
4) з поняття «рівнобедрена трапеція».

7.4. Домашнє завдання

1. При побудові графіків лінійних функцій $y=2x+1$, $y=-x$, $y=x+2$ за трьома-чотирма точками шляхом прикладання до цих точок лінійки учні помічають, що усі побудовані точки у прямокутній системі координат лежать на одній прямій. Отже, роблять висновок учні, графіком усякої функції виду $y=kx+b$ є пряма лінія. Чи є такий висновок достовірним? Який метод розумової діяльності при цьому використовувався?
2. Виконайте дію виведення наслідку з поняття прямокутного трикутника.
3. Виконайте дію розпізнавання поняття квадратне рівняння.

7.5. Література

Основна: [32], [45], [88], [97], [98], [99], [100], [114], [137], [144], [164].
Додаткова: [30], [95], [115], [116], [130], [143], [156], [174].

7.6. Аналіз практичного заняття №7 з точки зору формування у студентів нормативної, варіативної та проектувально-моделювальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Нормативна складова

На практичному занятті №7 продовжується формування вмінь майбутніх учителів математики користуватися нормативними документами: студенти мають необхідність звертатися до програм з математики, з'ясовуючи, в якому класі вивчається те чи інше поняття. Відтак, студентами відпрацьовується зміст шкільного курсу математики, актуалізуються цілі і завдання навчання математики в основній і старшій школах.

Варіативна складова

Під час даного практичного заняття студенти мають необхідність звертатися до підручників з математики різних рівнів, різних авторських колективів з метою аналізу понять та їх властивостей, що формулюються в означенні або в теоремах. Крім того, майбутні фахівці мають можливість порівняти, звертаючись до програм з математики, які властивості тих чи інших понять вивчають школярі, перебуваючи на різних освітніх рівнях навчання математики. Отже, майбутні вчителя математики набувають умінь, досвіду аналізування чинних програм, підручників з математики.

Проектувально-моделювальна складова

Практичне заняття №7 передбачає набуття майбутніми вчителями математики знань про прийоми організації діяльності учнів, зокрема розумової діяльності, вмінь їх реалізовувати на уроках математики. Студенти вчаться реалізувати цілі і завдання кожної конкретної навчальної ситуації, що підпорядковуються загальним цілям і завданням навчання математики в основній і старшій школі. Це заняття спрямоване на формування спеціальних методичних знань, умінь, навичок, якостей, необхідних учителю математики.

Практичне заняття №8

Тема: *Загальна теорія поняття. Відношення між поняттями. Класифікація понять. Означення математичних понять.*

Мета: усвідомлення ролі і значення понять у науці, зокрема математиці; з'ясування процесу утворення і розвитку понять; засвоєння основних логічних характеристик понять; вивчення можливих відношень між поняттями; формування вмінь класифікувати поняття; засвоєння основних видів математичних означень, з'ясування вимог до означення понять, формування вмінь виявляти помилки при формулюванні означень.

8.1. Основні теоретичні питання,

що мають опанувати студенти до даного заняття

8.1.1. Понятійне мислення, визначення поняття.

Складний процес пізнання навколишньої дійсності відбувається у двох формах: чуттєвій і абстрактній. На рівні першої форми пізнання виникають відчуття, сприйняття й уявлення, в яких відображуються певні властивості або сукупність властивостей явищ, предметів навколишнього світу, що діють на наші органи почуття (наприклад: дощ, гроза). Однак, безпосередньо чуттєвим сприйняттям не відчуваються загальні закономірні зв'язки предметів і явищ. Тут на допомогу приходить друга форма пізнання – абстрактна, в якій вже бере участь мислення.

Мислення – це активний процес відображення у свідомості людини об'єктивного світу, що характеризується трьома основними формами: поняття, судження, умовивід. На рівні другої форми пізнання відбувається перехід від природнього споглядання, від знання одиничного до знання загального, суттєвого і закономірного.

Серед різних властивостей об'єктів, які вивчаються, можна виділити нехарактерні (несуттєві, неістотні) властивості та характерні (суттєві, істотні, відрізняльні) властивості. Наприклад, люди – хребетні істоти; люди – істоти, що володіють мовленням. У процесі відображення у мозку людини цих відрізняльних властивостей об'єктів і виникає особлива форма мислення, що називається ***понятійним мисленням***.

Отже, **поняття – це форма людського мислення, що розкриває сутність речей, визначає властивості предметів, їх внутрішню природу.**

Істотними називаються ті властивості класу об'єктів, за якими даний клас об'єктів відрізняється від усіх інших об'єктів. Істотні властивості є спільними для всіх об'єктів даного класу; без них об'єкт як такий існувати не може, оскільки ці властивості відображують сутність самого предмета, його внутрішню природу. Істотні властивості предметів і явищ навколишньої дійсності отримали назву ***ознак***.

Важко переоцінити роль понять у науці, адже вони є її основою. Не винятком є і математика як наука, основу якої складають поняття (причому деякі математичні поняття строго визначаються, а деякі лише пояснюються на конкретних прикладах) і відношення між ними, які встановлюються за допомогою відповідних аксіом і означень. Подальша побудова математичної теорії відбувається послідовною системою теорем і нових означень, які встановлюють істотні властивості математичних об'єктів, які вивчаються.

Математичні поняття можна умовно розбити на два класи:

1) об'єкти математики (точка, трикутник, рівняння тощо);
2) відношення між елементами деяких множин або між двома множинами (суміжні кути, рівні фігури, бісектриса кута та ін.).

Математичні поняття володіють багатьма ознаками. Навіть для такої, здавалося б, простої фігури, як пряма, можна вказати цілу низку істотних властивостей: пряма незамкнута, нескінчена, є лінією постійної кривизни, поділяє площину, якій вона належить, на дві півплощини, визначається будь-якими двома своїми точками та ін.

8.1.2. Утворення понять та їх розвиток.

Поняття утворюються за допомогою таких розумових операцій, як аналіз і синтез, абстракція й узагальнення. Процес ***утворення поняття*** коротко можна описати так: *сприйняття* різних предметів або явищ із загальними властивостями; *абстрагування* від їх конкретних індивідуальних властивостей і відокремлення істотних, суттєвих ознак.

Наприклад, проаналізуємо форму футбольного м'яча, мильного пузиря, яблука тощо. Кожен з цих предметів має індивідуальні властивості (наприклад, м'яч має колір, пружкість тощо), а всі разом мають дещо спільне – форму. Якщо нам необхідно дослідити цю властивість, то ми відволікаємось (абстрагуємося) від усіх інших. Тепер кожне тіло, що має таку форму, будемо називати кулею.

Ще приклад. Розглянемо множини {!!!}, {***}, {♣♦♥}. Абстрагуємося від самих об'єктів, і звернемо увагу на наявність в кожній множині трьох елементів {a,b,c}. Так ми отримаємо уявлення про число 3 як кількісну характеристику множини, що містить три елементи.

Кожне поняття можна розглядати з різних сторін, і, отже, знаходити у ньому все нові і нові властивості. ***Розвиток поняття*** відбувається на основі з'ясування суперечностей між новими відкритими фактами і поняттями, що існують у науці, але яких виявляється недостатньо для пояснення нових фактів.

У процесі руху пізнання від поверхового, менш глибокого до більш глибокого, від знання зовнішніх сторін явища до знання їх внутрішніх закономірностей поняття поглиблюється, розвивається і підіймається на більш високий ступінь абстракції.

Другий напрямок розвитку понять – це відкидання попередніх понять як ненаукових; замість них виникають нові поняття. Заключним етапом формування поняття є його визначення у формі спеціального математичного речення, в якому розкривається зміст поняття (означення поняття).

8.1.3. Основні характеристики понять.

Кожне поняття *характеризується змістом, обсягом і відношеннями з іншими поняттями.*

Зміст поняття – це сукупність усіх суттєвих властивостей даного поняття.

Обсяг поняття – це множина тих і тільки тих об’єктів, до яких можна застосувати це поняття.

Наприклад, розглянемо поняття „квадрат”. Його зміст: всі кути прямі, всі сторони рівні, протилежні сторони попарно паралельні, діагоналі рівні, перетинаються під прямим кутом, в точці перетину поділяються навпіл, є бісектрисами кутів, має чотири вісі симетрії та ін. Обсяг: усі можливі квадрати.

Зміст поняття розкривається за допомогою означення, а обсяг – за допомогою класифікації.

Завдяки означенням і класифікації окремі поняття організуються в систему взаємопов’язаних понять (наприклад: чотирикутник, паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат).

Зміст і обсяг, будучи основними логічними характеристиками поняття, відображують природу поняття. Якщо зміст поняття відповідає дійсності і не містить суперечливих ознак, то він буде правильним і обсяг такого поняття не дорівнює нулю. Навпаки, якщо множина об’єктів, які складають обсяг поняття, не порожня, то зміст поняття вірно відображує дійсність. У противному випадку поняття буде хибним, суперечливим.

Співвідношення між змістом і обсягом поняття.

Оскільки зміст поняття цілком визначає його обсяг, і, навпаки, обсяг визначає зміст, то, природно, що зміни в змісті поняття спричинюють зміни в обсягу, і навпаки. Отже, має місце *закон оберненого співвідношення змісту й обсягу поняття:* ***чим ширше зміст, тим вужче обсяг поняття.***

Перевіримо справедливість цього твердження на прикладі: порівняємо обсяги таких понять: прямокутник і квадрат. Для цього розкриємо їх зміст: прямокутник – паралелограм з прямим кутом; квадрат – це паралелограм з прямим кутом і рівними сторонами. Зміст першого поняття вужче (2 істотні ознаки), ніж зміст другого поняття (3 істотні ознаки). А обсяг першого ширше, ніж обсяг другого, оскільки множина всіх прямокутників повністю включає у себе множину всіх квадратів, але складається не тільки з них (тобто їх обсяги не співпадають і обсяг поняття прямокутника ширше).

Ще приклад: зміст поняття паралелограм – чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні. Збільшимо зміст – додамо ще одну ознаку: діагоналі взаємно перпендикулярні, тоді отримаємо ромб. Обсяг цього поняття менше, ніж обсяг поняття паралелограма.

Однак, даний *закон має обмежений характер*, оскільки справедливий тільки для понять, які знаходяться у родо-видових відношеннях.

8.1.4. Види понять.

Якщо в обсяг поняття входить тільки один предмет, воно називається *одиничним*. Наприклад, тривимірний евклідовий простір, множина коренів рівняння 3x=2; парне просте число.

Якщо обсяг поняття містить більш, ніж один предмет, ознаки поняття є загальними для всіх цих предметів, то і само поняття називається *загальним*. Наприклад: коло, теорема, піраміда.

Слід розрізняти *конкретні* й *абстрактні* поняття (при цьому не плутати з одиничними й загальними). Конкретні поняття відображують конкретні речі, а абстрактні – властивості, взяті як самостійний предмет думки. Наприклад, якщо взяти скляну кулю (як модель сфери), то це поняття загальне і конкретне, а сфера як геометричне поняття - загальне й абстрактне. Зрозуміло, що для математики більш характерні абстрактні поняття.

8.1.5. Відношення між поняттями.

З'ясуємо всі можливі *відношення між поняттями*: незважаючи на велике різноманіття понять у смислі їх змісту, кількість можливих відношень між обсягами понять невелика і сторого обмежена.

Два поняття називаються *порівнянними*, якщо в їх змісті є загальні ознаки. Порівнянні поняття прийнято поділяти на дві категорії: *сумісні* та *несумісні* поняття. *Сумісними* називаються поняття, обсяги яких частково або цілком збігаються. Якщо обсяги понять ні в якій своїй частині не збігаються, то такі поняття називають *несумісними*. Між сумісними поняттями можуть існувати такі види відношень: 1) відношення тотожності; 2) відношення часткового збігу; 3) відношення підпорядкування.

У *відношенні тотожності* знаходяться поняття, обсяги яких цілком збігаються (рис. 8.1). Приклади *тотожних понять*: рівносторонній трикутник – рівнокутний трикутник; рівносторонній прямокутник – прямокутний ромб; найбільша хорда – хорда, що проходить через центр; алгебраїчний дріб – раціональний дріб; додатні цілі числа – натуральні числа.

Рис. 8.1

Приклади ототожнення нерівнозначущих понять: коло - круг; число – цифра; додавання нуля – приписування нуля.

Поняття, обсяги яких частково збігаються, називаються *перехресними* поняттями, а відношення між ними називається *відношенням часткового збігу* (рис. 8.2). Приклади перехресних понять: прямокутник – ромб (їх загальна частина - квадрати); алгебраїчні числа – ірраціональні числа (їх загальна частина – ірраціональні числа, що є алгебраїчними); парні натуральні числа – прості числа (їхня загальна частина – число 2).

Приклади понять, що не є перехресними: числа, що поділяються на 6 – числа, що поділяються на 15; многочлени – одночлени; прямокутник – квадрат.

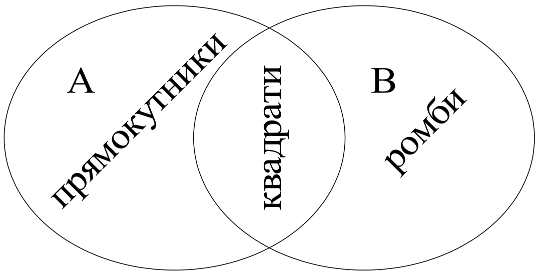


Рис. 8.2

Поняття називається *підпорядкованим* іншому, якщо обсяг першого поняття входить в обсяг другого поняття. У цьому випадку перше поняття називають також *видовим*, а друге – *родовим*. Відношення між такими поняттями називається *відношенням підпорядкування* (рис. 8.3). Приклади підпорядкованих понять: ромб – паралелограм; просте число – натуральне число; пряма призма – призма; еліпс – крива другого порядку; дійсні числа – комплексні числа; рівні фігури – подібні фігури.

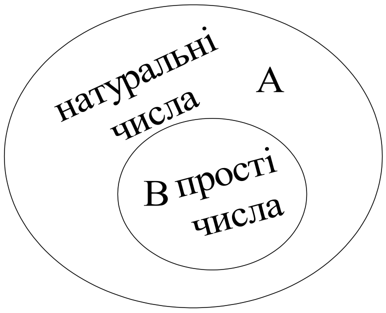


Рис. 8.3

Приклади понять, що не знаходяться у відношенні підпорядкування: дуга – коло; зрізана піраміда – піраміда; промінь – пряма; відрізок – пряма.

Між несумісними поняттями можуть існувати такі види відношень: 1) відношення супідрядності; 2) відношення суперечності; 3) відношення протилежності.

У випадку, коли одному родовому поняттю підлеглі кілька найближчих видових понять, що не є перехресними, говорять, що останні знаходяться у *відношенні супідрядності*, а самі вони називаються *супідрядними* (рис. 8.4). Приклади супідрядних понять: паралельні прямі – пересічні прямі (обидва ці поняття є видами одного родового поняття: «прямі, що лежать в одній площині»); натуральні числа – їм протилежні (обидва ці поняття мають загальне родове поняття: «цілі числа»).

Приклади понять, що не є супідрядними: прямокутник – ромб; невід’ємні цілі числа – недодатні цілі числа.

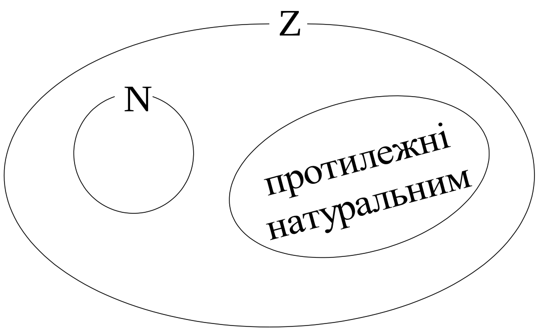


Рис. 8.4

У *відношенні суперечності* знаходяться поняття, що заперечують один одного. *Суперечні* поняття не тільки виключають один одного (в смислі обсягу і змісту); обсяги таких понять вичерпують усю безліч об’єктів, про які йде мова (рис. 8.5).

Приклади суперечних понять: сумірні відрізки – несумірні відрізки; парні числа – непарні числа; раціональні числа – ірраціональні числа; алгебраїчні числа – трансцендентні числа.

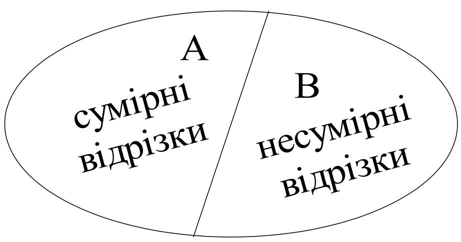


Рис. 8.5

Приклади понять, що не знаходяться у відношенні суперечності: паралельні прямі – перпендикулярні прямі; прості числа – складені числа.

Відношенням протилежності називаються таке відношення між поняттями, при якому заперечення властивостей одного поняття є лише частиною змісту іншого поняття; при цьому друге поняття має і свої власні ознаки (рис. 8.6). Між *протилежними* поняттями завжди існують проміжні поняття (принаймні одне). <u>Приклади</u> протилежних понять: гострий кут – тупий кут (проміжне поняття – прямий кут); більше – менше (проміжне поняття - дорівнює); від'ємні числа – додатні числа (проміжне поняття - нуль).

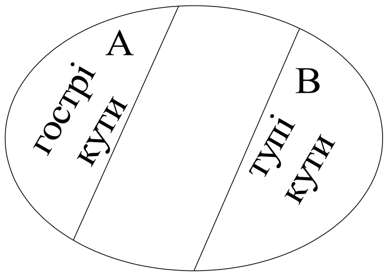


Рис. 8.6

<u>Приклади</u> понять, що не є протилежними: подібні трикутники – неподібні трикутники; парне число – непарне число; паралельні прямі – перпендикулярні прямі; менше – не менше.

Особливе положення займає відношення, що називається *відношенням непорівнянності*. У відношенні непорівнянності знаходяться поняття, для яких немає загального найближчого родового поняття, тобто, які містять ознаки, далекі друг від друга. Самі поняття в цьому випадку називаються *непорівнянними*. <u>Приклади</u> непорівнянних понять: трикутник – література; вертикальні кути – синтетичні матеріали і т.п.

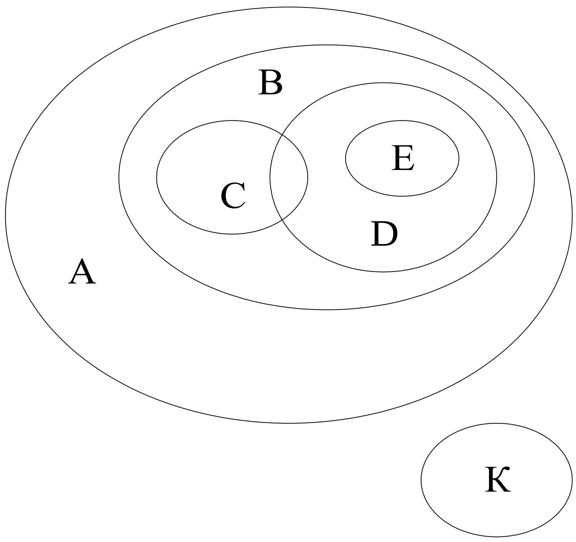


Рис. 8.7

Можна ставити питяння про відношення декількох понять, як це показано на рис. 8.7: A – многокутники; B – трикутники; C – прямокутні трикутники; D – рівнобедрені трикутники; E – рівносторонні трикутники; K – космічна ракета.

Загалом, відношення між поняттями наочно можна зобразити такою схемою (схема 8.1):

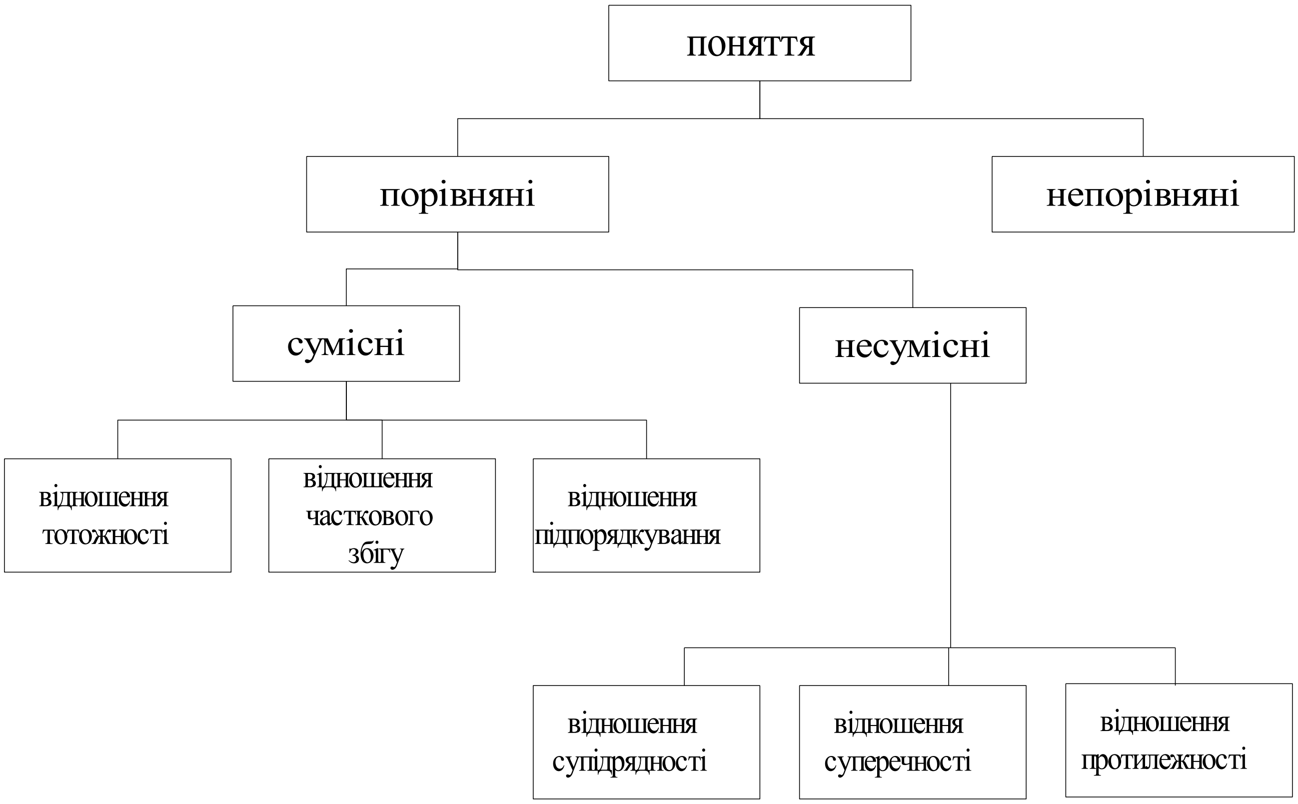


Схема 8.1

8.1.6. Класифікація понять.

Засвоєнню відношень між поняттями сприяє класифікація понять, яка розкриває їх обсяг.

Класифікацією поняття називають ділення (розбиття, розподіл) множини – обсягу цього поняття – на підмножини (класи), що задовольняє наступним вимогам:

1) ділення проводиться за однією і тією ж самою істотною ознакою – основою класифікації;
2) всі підмножини такі, що не перетинаються;
3) об’єднання всіх підмножин утворює дану множину;
4) для підмножин множина повинна бути найближчим родовим поняттям.

В класифікації понять розрізняють *три компоненти*:

1) поняття, що класифікується, тобто обсяг якого треба розкрити;

2) основа класифікації, тобто ознака;

3) члени класифікації, тобто утворені підмножини (класи).

Наприклад:

Якщо за основу класифікації трикутників взяти величини його внутрішніх кутів, то вони поділяться на гострокутні, прямокутні, тупокутні. Якщо ж за основу взяти співвідношення між довжинами сторін, то трикутники поділяться на різносторонні та рівнобедрені, які в свою чергу можуть бути рівносторонніми і нерівносторонніми.

Зауважимо, що *не можна ототожнювати систематизацію з класифікацією*. Це різні процеси. *Класифікація – це розбиття цілого на частини, а систематизація – об'єднання розрізнених частин у систему.* Але, безперечно, класифікація понять допомагає їх систематизувати.

Із найпростішими випадками класифікації учнів можна і треба знайомити вже в 5-6 класах. Особливо корисні класифікації при узагальнюючих повтореннях: при цьому вноситься творчий компонент, системність, підвищується інтерес учнів до матеріалу, що повторюється.

8.1.7. Мовленевий вираз понять.

Велика роль у процесі формування понять належить їх мовленевому і символічному виразу. Носієм поняття є слово.

Слово, що позначає строго визначене поняття певної галузі науки, називається ***науковим терміном***. Наприклад, “паралелепіпед” – науковий термін.

Термін - назва конкретного поняття - вказується в означенні. Однак термін не можна ототожнювати з поняттям, яке йому відповідає. Зміст поняття не визначається його назвою.

Важливо, щоб кожному поняттю відповідав один термін (тобто виконувався принцип однозначності). Але, на жаль, це не завжди так. Іноді, одне і те ж саме слово позначає різні поняття: корінь, куб, кільце. Лінгвісти називають ці слова *омонімами*. Буває і навпаки, коли одне і те саме поняття позначають різними термінами: двочлен – біном, квадрат – правильний чотирикутник, модуль – абсолютна величина. Це слова-*синоніми*.

Терміни не є незмінними; з часом одні з них замінюються іншими, деякі зовсім виходять із вживання. Наприклад, колись “раціональні числа” називали “алгебраїчними числами”.

Деякі терміни, що найчастіше використовуються, записують не тільки словами, але й за допомогою ***символів.***

Наприклад:

Трикутник - Δ. Кут - $\angle$. Відсотки - $\%$. Границя – lim.

У математиці символи грають особливу роль, оскільки математичне мовлення – мовлення символічне. Завдяки використанню символів вдається скоротити математичні записи, зробити їх зручними для сприйняття. Вчити учнів користуватися математичним мовленням – одне з найважливіших завдань учителя математики.

8.1.8. Означення понять, види означень, вимоги до означень.

Означенням називається речення, в якому в стислій формі за допомогою вже відомих понять та їх властивостей розкривається зміст нового поняття. Наприклад, якщо вже визначені поняття “пряма призма”, “основа призми”, “правильний многокутник”, то зміст поняття “правильна призма” можна розкрити за допомогою такого речення: “Правильною призмою називається пряма призма, в основі якої лежить правильний многокутник”. Це і є означення правильної призми.

В означенні поняття (об’єкта) відображуються необхідні та достатні умови для того, щоб даний об’єкт належав деякій множині. Тому при формулюванні означень часто використовуються зв’язки „необхідно і достатньо”, „тоді і тільки тоді” і т.п. Наприклад, можна сказати: „Для того, щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно і достатньо, щоб його протилежні сторони були попарно паралельні”.

Властивість „бути чотирикутником” і властивість попарної паралельності сторін такі, що кожна з них необхідна для характеристики паралелограма, а перелічена множина цих властивостей достатня, щоб повністю визначити (охарактеризувати) саме це поняття.

Разом з тим, із всієї множини властивостей, притаманних даному поняттю, відбір властивостей, які здатні повністю охарактеризувати це поняття може бути здійснений декількома способами. Тобто не треба думати, що для визначення поняття існує тільки одна єдина група істотних ознак: *вибір істотних ознак для утворення означення із всієї сукупності ознак не є однозначним. Якщо один набір таких ознак поняття покладений в основу його визначення, то інші подібні набори характеристичних властивостей зазвичай виступають в ролі теорем.*

Так, наприклад, ми могли би в якості означення ромба обрати таке речення: «Ромбом називається паралелограм, у якого діагоналі взаємно перпендикулярні»; тоді відоме речення, що традиційно приймається за означення ромба: «Ромб – це паралелограм, у якого всі сторони рівні» стане теоремою (тобто твердженням, яке можна довести, використовуючи обране означення): «Для того, щоб паралелограм був ромбом, необхідно і достатньо, щоб всі його сторони були рівні».

Отже, *кожне означення – це деяка угода*, і ми могли би, взагалі кажучи, вільно створювати класи предметів і визначати їх. Відносно означення поняття не можна говорити істино воно чи хибне; можна говорити правильне воно чи неправильне.

Розглянемо деякі способи означення понять, які зустрічаються в шкільних підручниках з математики.

1) Найбільш часто зустрічаються означення **“через найближчий рід і відові відмінності”.**

Наприклад, прямокутник - це паралелограм з прямим кутом. Дане означення складається із двох частин: “прямокутник” – поняття, що визначається; “паралелограм із прямим кутом” – визначальне поняття. Причому, визначальне поняття “паралелограм” є найближчим родовим поняттям до поняття, що визначається – “прямокутник”, а властивість “наявність прямого кута” – видова відмінність.

Відшукувати найближчий рід слід тому, що у такому випадку ми підходимо ближче до поняття, що визначається, його обсягу, і завдяки цьому зменшується сукупність видових ознак в означенні. Якщо б ми визначили прямокутник як чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні та є прямий кут, то отримали б більш громіздке означення саме тому, що поняття “чотирикутник” не є найближчим родовим поняттям для прямокутника.

2) **Генетичне або конструктивне** означення. У такому означенні зміст поняття, що визначається, розкривається за допомогою опису того, як виникає, створюється даний об’єкт або явище. Наприклад, фігура, що утворюється обертанням прямокутного трикутника навколо вісі, що містить катет, називається конусом.

В генетичному означенні вказується рід поняття, що визначається, а далі, замість видових ознак пояснюється, як утворюється предмет або явище. У генетичному означенні об’єкт, що визначається, утворюється за допомогою руху або побудови, причому не обов’язково геометричної. Прикладом можуть слугувати означення, в яких указується спосіб утворення будь-якого члена (наприклад, для арифметичної і геометричної прогресій), окрім першого, із попереднього (такі означення ще називають *рекурсивними*).

3) Означення **через перелік об’єктів**, яке створює уявлення про обсяг і зміст поняття. Наприклад, “раціональні та ірраціональні числа називаються дійсними числами”; “цілі числа – натуральні, їм протилежні та нуль”.

4) Означення, що виражаються **символічною мовою** (у вигляді формул, рівностей):

$$(-a)(-b) = +ab; \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}(a \neq 0); \qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x};$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Різновид – умовні погодження: $a^0 = 1$; $0! = 1$.

Від означень треба відрізняти *опис понять*, які близькі до означень та іноді замінюють або доповнюють їх. Роль описів – додаткова інформація, що конкретизує поняття, поширює зв’язки з іншими поняттями, повніше розкриває їх зміст, допомагає учням глибше зрозуміти і міцніше засвоїти нове поняття; при цьому реалізується принцип доступності.

Наприклад, в курсі планіметрії за підручником О.В.Погорєлова [137] *описово вводиться поняття довжини кола*: «Наочне уявлення про довжину кола отримаємо таким чином: уявимо собі нитку у формі кола; розріжемо її і розтягнемо за кінці. Довжина одержаного відрізка і є довжиною кола». Таке пояснення не можна вважати строгим означенням.

Не всі математичні поняття можуть бути визначеними за допомогою перелічених способів. Процес формально-логічного означення є процес зведення одного поняття до іншого, з більш широким обсягом, другого до третього, з ще ширшим обсягом і т. д. Таким чином ми доходимо до вихідних понять, таких, наприклад, як точка, множина, площина.

Тобто, процес зведення не може бути нескінченим. Існують деякі *вихідні, початкові, первинні поняття,* що не можна визначити через інші поняття даної теорії, оскільки їм не передують ніякі інші поняття цієї теорії. Тому самі перші поняття вводяться без означення. Їх зміст розкривається за допомогою системи аксіом (тому іноді говорять, що первинним поняттям дають скісне (опосередковане) означення через систему аксіом).

Зазначимо **вимоги, що висуваються перед конструюванням означень** задля того, щоб вважати їх логічно вірними:

1) Означення повинно бути відповідним поняттю, що визначається, тобто обсяг поняття, що розкривається цим означенням, повинен співпадати з обсягом поняття, що визначається. Пояснимо це на <u>прикладі</u>: „Призмою називається многогранник, у якого дві грані – рівні многокутники з відповідно паралельними сторонами, а всі інші грані – паралелограми", - таке означення невірне, оскільки йому задовольняють такі многогранники, що не є призмами.
2) Означення не повинно вміщувати ще не визначених понять (зрозуміло, якщо вони не є первинними). <u>Наприклад</u>: „Натуральним числом називається будь-яке ціле число, що більше нуля" – невірне означення.
3) Означення не повинні суперечити одне одному. Розглянемо, наприклад, два означення: „Переріз, який проходить через три вершини многогранника, що не належать однієї грані, називається діагональним перерізом"; „Переріз, який проходить через два бічних ребра многогранника, що не лежать в одній грані, називається діагональним перерізом". Наведені означення суперечливі; перше з них невірне.
4) Означення не повинні бути надлишковими. Так, <u>наприклад</u>, означення „Мимобіжні прямі – це прямі, що не лежать в одній площині та не перетинаються" – надлишкове, так як з того, що прямі не належать одній площині вже випливає, що вони не перетинаються.

8.2. Зміст практичного заняття №8

1. Перевірка виконання домашніх завдань (30 хв.).
2. Аналіз помилок учнів, пов'язаних із невірним формулюванням означень і прийоми їх запобігання (сумісна робота) (15 хв.).
3. Розв'язання методичних завдань (пропонує викладач) (35 хв.).

8.3. Дидактико- методичні матеріали до практичного заняття №8

8.3.1. Питання до актуалізації опорних теоретичних знань студентів у процесі заняття

1. В яких формах відбувається процес пізнання навколишньої дійсності?
2. Що ми розуміємо під мисленням?
3. Охарактеризуйте понятійне мислення.
4. Що таке поняття?
5. Які властивості об'єктів називаються істотними (суттєвими)?
6. На які класи можна розбити математичні поняття?
7. Опишіть процес утворення понять. Наведіть власний приклад утворення якогось поняття.
8. На якій основі відбувається розвиток понять?
9. Чим характеризується будь-яке поняття?
10. Що таке „зміст поняття”, „обсяг поняття”? Вкажіть зміст і обсяг поняття „середня лінія трикутника”.
11. У чому сутність закону оберненого співвідношення змісту і обсягу поняття? На які поняття він поширюється?
12. У чому різниця між одиничним і загальним поняттями?
13. Охарактеризуйте різницю між конкретним і абстрактним поняттями.
14. Зобразіть відношення між поняттями узагальнюючою схемою (схема 3). Проілюструйте кожний вид відношень прикладом.
15. Що таке класифікація понять? Яким вимогам повинна задовольняти правильна класифікація?
16. Наведіть приклад, коли один і той самий термін позначає різні поняття.
17. Наведіть приклад, коли одне і те саме поняття позначається різними термінами.
18. Яке математичне речення називається означенням?
19. Чи є однозначним вибір істотних ознак із всієї сукупності ознак для утворення означення?
20. Наведіть приклад означення через найближчий рід і видові відмінності.
21. Наведіть приклад конструктивного означення.
22. Наведіть приклад генетичного означення.
23. Надайте приклад означення через перелік об’єктів.
24. Наведіть приклад поняття ШКМ, яке б вводилось описово.
25. Що ми розуміємо під первинними поняттями?
26. Перелічте вимоги, що висуваються перед конструюванням означень.

8.3.2. Аналіз помилок учнів, пов'язаних із невірним формулюванням означень і прийоми їх запобігання

У школі під час викладання математики вчитель часто буває змушений виправляти помилки учнів, пов'язані з невірним формулюванням означень. При цьому **найчастіше школяри припускаються таких помилок**:

I. Помилки, пов'язані з родовим поняттям:

1) пропуск родового поняття, наприклад: „У трапеції тільки дві сторони паралельні";

2) невірно вказане родове поняття, наприклад: „Промінь – це пряма, обмежена з одного боку" або „Квадрат – це паралелограм, у якого всі сторони рівні".

II. Помилки, пов'язані з видовими ознаками:

1) пропуск видової ознаки, наприклад: „Призма, в основі якої лежить правильний многокутник, називається правильною" – необхідно додати ознаку „пряма призма";

2) згадування зайвої видової ознаки, що є наслідком інших ознак, уже вказаних в означенні, наприклад: „Прямокутником називається паралелограм, у якого всі кути прямі і діагоналі рівні";

3) згадування невірної видової ознаки, як-от: „Паралелограмом називається чотирикутник, у якого всі сторони паралельні" – такого чотирикутника не існує.

III. Помилки, пов'язані з „порочним колом" в означеннях, коли одне поняття визначається через друге, а друге через перше. Наприклад: "Прямий кут – це кут із взаємноперпендикулярними сторонами, а взаємноперпендикулярні прямі – це прямі, що перетинаються під прямим кутом".

IV. Тавтологія в означеннях, коли об'єкт визначається сам через себе, хоча і в інших виразах. Наприклад, "Діленням називають дію, коли одне число ділять на інше"; "Многогранники називають подібними, якщо вони подібні між собою"; "Розв'язання рівняння – це число, що є його розв'язанням".

V. Означення поняття через невизначені поняття (крім *первинних, не означуваних понять*). Наприклад, "Одночленом називається многочлен, який містить тільки один доданок".

VI. Пропуск слів, наприклад: „Простим називається число, що має два дільники – одиницю і само себе" – пропущено слово «тільки».

Існують *різні методичні засоби і прийоми виправлення невірних формулювань означень*, один із яких - *прийом контрприкладу*.

Наприклад: контрприклади для таких „означень":

"Бісектрисою кута називається пряма, що поділяє кут навпіл" (рис. 8.8):

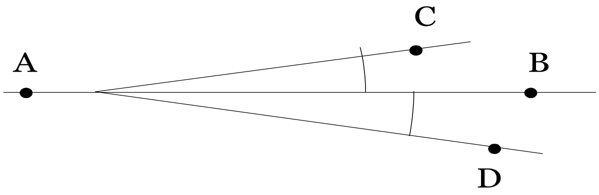


Рис. 8.8

“Середньою лінією трикутника називається лінія, що сполучає середини його сторін” (рис. 8.9):

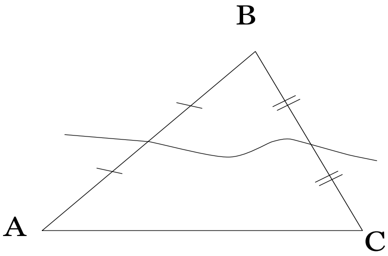


Рис. 8.9

Вимагаючи від учнів змістовної точності означень, учитель добивається глибини і міцності у засвоєнні математичних понять і розвиває логічне мислення дітей. Помилки слід розбирати, залучаючи всіх учнів до їх виявлення й усунення, застосовуючи для цього контрприклади.

Загалом, запобіганню помилок учнів у процесі формулювання означень сприяє *усунення формалізму знань учнів, їхня свідома активна діяльність на уроці та вдома, залучення їх до самостійного формулювання означень, правильне використання методів закреплення означень* (див. практичне заняття №9) та ін.

8.3.3. Методичні завдання до практичного заняття №8

1. Надайте приклади декількох означень понять ШКМ різних видів, а саме: а) через найближчий рід і видову відмінність; б) генетичних; в) конструктивних; г) рекурсивних; д) через перелік; е) у символічному вигляді.
2. Проведіть класифікацію взаємного розташування прямої та площини у просторі. За якою основою ви проводите класифікацію? Проілюструйте всі випадки рисунками.
3. Дана множина натуральних чисел від 1 до 30. Проведіть класифікацію даної множини за основою «остача від ділення на 5». Наведіть приклад елементів кожного класу. Узагальніть, якщо мова йде про всю множину натуральних чисел.

4. Проведіть дихотомію поняття «елементарні функції».
5. Як пояснити учням, що означення «паралелограм – це чотирикутник, в якому протилежні сторони попарно паралельні» і «паралелограм - це чотирикутник, в якому протилежні сторони рівні» логічно еквівалентні? Чому перше з них звичайно приймається за означення паралелограма? Наведіть інші приклади еквівалентних означень.
6. Проілюструйте кругами Ейлера-Венна відношення між такими поняттями: «рівняння», «лінійне рівняння», «рівняння першого степеня», «квадратне рівняння», «неповне квадратне рівняння», «зведене квадратне рівняння», «нерівність», «вітаміни», «предикат».

   Яке відношення між поняттями «лінійне рівняння» і «рівняння першого степеня»; «неповні квадратні рівняння» і «зведені квадратні рівняння»; «рівняння», «лінійні рівняння» і «квадратні рівняння»; «рівняння» і «нерівність»; «рівняння» і «вітаміни»? Яку назву мають самі поняття?
7. Чи правильні наступні означення понять:
   1) ірраціональними називаються числа, що не є раціональними;
   2) тотожність – це рівність, справедлива для всіх значень букв, що входять до неї;
   3) абсолютною величиною числа називається це число без знака;
   4) відрізком називається пряма, що обмежена з двох сторін?

   Якщо серед цих означень є невірні, вкажіть вид помилок.
   Запропонуйте прийоми попередження таких помилок.

8.4. Домашнє завдання

1. Пригадати означення основних понять шкільного курсу алгебри, геометрії та алгебри і початків аналізу (за діючими підручниками).

2. У яких відношеннях знаходяться такі поняття: а) півпряма і пряма; б) кут і двугранний кут; в) квадратне рівняння і неповне квадратне рівняння; г) куля та сфера; д) піраміда та зрізана піраміда; е) цілий раціональний вираз і многочлен?

3. Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера-Венна обсяги таких понять:

1) натуральні числа, цілі числа, парні числа, числа, кратні 4; 2) прямокутники, ромби, квадрати, паралелограми, трапеції, чотирикутники, опуклі чотирикутники; 3) трикутники з кутом 45°; рівнобедрені трикутники; рівносторонні трикутники.

4. Які з названих нижче понять мають більший обсяг? Які з них мають більший зміст?: а) квадрат і ромб; б) алгебраїчні функції та ірраціональні функції; в) паралелепіпед і призма; г) модуль і абсолютна величина; д) степінь з цілим показником і степінь з раціональним показником.

5. Визначте, чи виконані вимоги класифікації. У випадку їх невиконання вкажіть помилку:

1) Лінійні рівняння можуть а) мати єдиний корінь; б) не мати коренів; в) мати безліч коренів.

2) Дійсні числа поділяють на раціональні, ірраціональні, цілі та натуральні.

3) Функції поділяються на парні та непарні, періодичні та неперіодичні, зростаючі та спадні та інші.

8.5. Література

Основна: [15], [104], [106], [107], [157].
Додаткова: [30], [31], [105], [173].

8.6. Аналіз практичного заняття №8 з точки зору формування у студентів нормативної, варіативної та проектувально-моделювальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Нормативна складова

У процесі реалізації змісту практичного заняття №8 студенти мають необхідність звертатися до програм з математики, уточнюючи, в якому класі вивчаються ті чи інші поняття шкільного курсу математики, аналізуючи його зміст; таким чином формуються вміння і накопичується досвід користування нормативними документами.

Варіативна складова

Вивчаючи загальну теорію поняття, працюючи з окремими поняттями шкільного курсу математики, майбутні фахівці під час даного практичного заняття виконують логіко-дидактичний і логіко-математичний аналіз підручників з математики для різних класів і різних рівнів вивчення математики, різних авторських колективів, набуваючи необхідних професійно-значущих знань, умінь, навичок, накопичуючи певний досвід виконання такої роботи.

Проектувально-моделювальна складова

На практичному заняття №8 робиться акцент на формуванні спеціальних дидактичних і методичних умінь майбутніх учителів математики, які знадобляться у проектуванні конспектів уроків та їх реалізації у реальному навчально-виховному процесі навчання математики учнів основної і старшої шкіл.

Практичне заняття №9

Тема: *Методика формування математичних понять в учнів.*

Мета: опрацювати методику трьох етапів формування математичних понять: вивчити два способи введення математичних понять, розглянути методи забезпечення засвоєння означень, дослідити прийоми закріплення означень; закріпити знання, сформувати уміння і навички формування в учнів математичних понять.

9.1. Основні теоретичні питання,
що мають опанувати студенти до данного заняття

9.1.1. Реалізація процесу формування математичних понять.

Зауважимо, що процес формування математичних понять реалізується через:

- конкретно-чуттєве сприйняття;
- аналіз властивостей і відношень досліджуваних предметів, який призводить до виділення ознак поняття;
- синтезування ознак (формування знань основного змісту поняття);
- виділення класу досліджуваних предметів (формування знань про обсяг поняття);
- встановлення кількісних і якісних зв'язків досліджуваного поняття з іншими поняттями (формування повного змісту поняття);
- уточнення ознак поняття, вивчення взаємозв'язку родових і видових понять;
- уточнення відповідності між змістом та обсягом поняття, що призводить до класифікації видових понять;
- конкретизацію застосування поняття;
- систематизацію понять на основі теоретичного узагальнення.

У цій моделі процесу формування поняття прямо вказуються розумові операції, які використовуються при цьому: аналіз, синтез, порівняння, класифікація, систематизація, узагальнення, конкретизація.

Отже, формування поняття – це результат сходження від аналізу і синтезу властивостей різноманітних об'єктів до виділення та закріплення їх загальних властивостей через абстрагування й узагальнення.

Тобто для утворення поняття необхідно володіти загальними і специфічними методами і прийомами розумової діяльності. Без аналізу дійсності – предметів та явищ – неможливо глибоко вивчити їх, без синтезу – поєднати роз'єднані частини в єдине ціле, без узагальнення – зробити висновок, а потім сформулювати поняття. У процесі вивчення реальної дійсності формування понять – мета розумової діяльності людини, а володіння методами і прийомами розумової діяльності – засіб, за допомогою якого досягається ця мета.

9.1.2. Введення математичних понять.

Методисти виділяють *три етапи формування* математичних понять в учнів:

1. Введення поняття.
2. Забезпечення засвоєння відповідного означення.
3. Закріплення означення.

1**.** *На першому етапі - введення поняття* - створюється така ситуація, коли учні або самі відкривають "нові" поняття, або готуються до їх розуміння. Залежно від характеру досліджуваного матеріалу, наявності навчального часу, рівня розвитку учнів обирається один із способів уведення поняття: конкретно-індуктивний чи абстрактно-дедуктивний.

У багатьох випадках задля кращого розуміння пояснення нового поняття вчитель починає з розгляду конкретних прикладів, за допомогою яких підводить до поняття, що розглядається, а вже потім учні самостійно або за допомогою вчителя формулюють його означення (*конкретно-індуктивний спосіб*). В інших випадках доцільно відразу сформулювати означення, а потім ілюструвати його конкретними *прикладами (абстрактно-дедуктивний спосіб*).

Перший спосіб уведення понять сприяє свідомому засвоєнню, фактично створює проблемну ситуацію, однак забирає більше часу порівняно з другим способом, який економить час і найчастіше використовується в старших класах.

Приклад уведення поняття паралельних прямих конкретно-індуктивним способом (табл. 9.1):

Таблиця 9.1

Розумова дія	Реалізація на практиці
1. Чуттєво-конкретне сприйняття (спостереження за об'єктами, робота з їх знаковими зображеннями)	Відшукання ярких практичних прикладів, що показують необхідність вивчення цього поняття (будування залазничних доріг на прямих ділянках шляху; контури прорізу дверей).
2. Аналіз (виявлення істотних і неістотних ознак даного поняття)	• горизонтальне розташування прямих (неістотна ознака); • знаходяться на рівній відстані друг від друга (істотна ознака); • прямі не мають спільних точок (істотна ознака); • прямі нескінчено продовжуються в обидві сторони (неістотна ознака).
3. Абстрагування (відділення істотних ознак від неістотних).	Відбираємо (перелічуємо) істотні ознаки.

4. Фомулювання означення поняття; його символічне позначення.	Дві прямі a і b що належать одній площині, називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок. Паралельний від грецького слова parallelos. Символ: $\parallel$.

Приклад абстрактно-дедуктивного введення поняття “квадратне рівняння”.

1. Спочатку даємо означення нового поняття (рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, a, b, c - деякі числа, називається квадратним рівнянням).
2. Далі мотивуємо термін, що позначає це рівняння: найбільший показник степеня невідомого дорівнює 2, рівняння містить квадрат невідомого.
3. Зазначаємо суттєві ознаки: всі ознаки рівняння, в правій частині нуль, a, b, c - деякі числа, причому $a \neq 0$ (обговорюємо чому).
4. Розглядаємо частинні випадки цього поняття, коли відповідно $b = 0, c = 0$, $b = 0$ і $c = 0$: $ax^2 + c = 0$; $ax^2 + bx = 0$; $ax^2 = 0$.

9.1.3. Забезпечення засвоєння відповідного означення.

Другий етап формування понять – забезпечення засвоєння відповідного означення - зводиться до того, щоб учні 1) розуміли кожне слово у формулюванні, 2) швидко і безпомилково відтворювали його та 3) навчилися застосовувати означення.

Зрозуміло, що неодноразове повторення формулювання означення без всебічного з’ясування його смислу не сприяє точному запам’ятовуванню і призводить тільки до загублення навчального часу. Формалізм в знаннях проявляється в тому, що учні спотворюють формулювання означень і не помічають своїх помилок (пропускають слова, вказують не найближчий рід, не всі або зайві відові відмінності тощо).

Запропонуємо методи забезпечення засвоєння означень математичних понять.

Метод, при якому процеси запам'ятовування означень (теорем, аксіом) і формування навичок їх застосування відбуваються окремо, неодночасно, називається ***роздільним***. Якщо формулювання означення зрозуміле, легко запам'ятовується після незначної кількості повторень, то у таких випадках доцільно застосовувати роздільний метод: спочатку запам'ятовувати формулювання означення, що потім використовується під час вирішення задач. Цей метод корисний, наприклад, для засвоєння означень понять натурального числа, цілого числа, рівнобедреного трикутника, хорди тощо.

Недолік цього методу в тому, що засвоєння формулювання означення у цілому і всіма учнями можна досягти при розв’язуванні задач, а щоб свідомо вирішувати задачі, треба розуміти і пам’ятати означення.

Компактний метод забезпечення засвоєння означень доцільно використовувати у тих випадках, коли означення важко запам'ятовувати і застосовувати. Сутність методу полягає в читанні по частинах математичного речення й одночасному виконанні вправ у процесі читання. Читаючи формулювання кілька разів, відбувається його запам’ятовування, тому немає потреби спеціально виділяти час на заучування. При роботі компактним методом активна розумова діяльність учнів спрямована на поглиблене розуміння кожного слова у формулюванні. Цей метод доцільно використовувати під час засвоєння означень таких понять, як “бісектриса кута”, “геометрична прогресія”, “паралелограм”, “квадратне рівняння” та ін. Компактний метод характеризується тим, що процеси запам’ятовування означень і формування навичок його застосування відбуваються одночасно.

Приклад: забезпечення засвоєння означення висоти трикутника.

1 крок: учитель виписує означення і відокремлює в ньому суттєві ознаки (учні роблять те саме). Текст приймає такий вид: “Висотою трикутника, що опущена із даної вершини, // називається перпендикуляр, // проведений із цієї вершини // до прямої, що містить протилежну сторону трикутника”.

2 крок: дається вправа: вказати висоти в трикутниках (рис. 9.1).

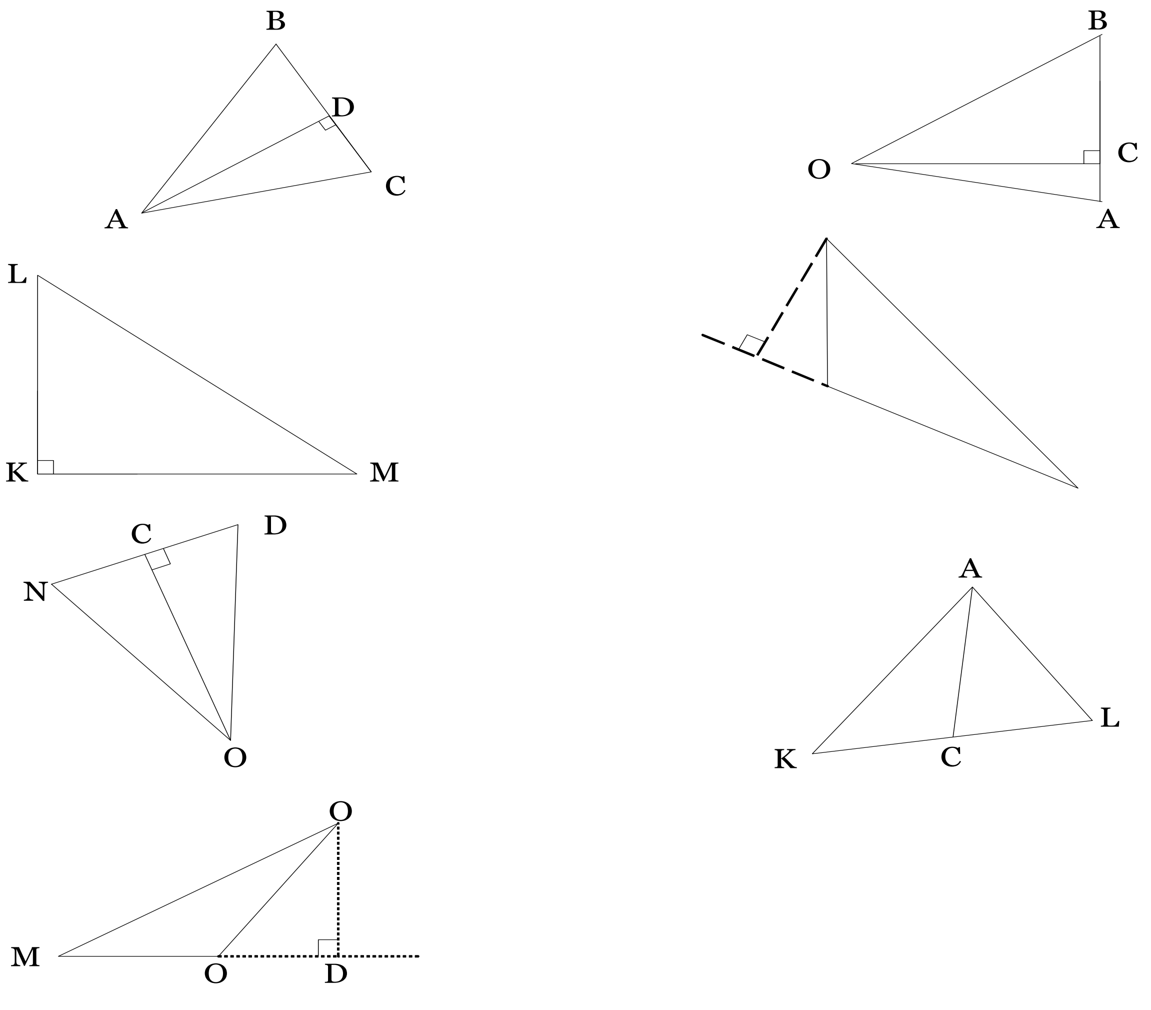


Рис. 9.1

Вчитель демонструє, як виконувати таке завдання, читаючи вголос означення і зупиняючись після кожної риски, перевіряючи виконання прочитаної ознаки.

3 крок: вправу продовжують виконувати учні під керівництвом вчителя, який робить зауваження.

Далі спостерігається перехід до згортання міркувань.

Зауважимо, що під час роботи таким методом фактично застосовується спеціальна розумова дія підведення під поняття.

В дидактико-методичній літературі таких вправ мало, проте неважко навчитися будувати їх самостійно.

Алгоритмічний метод в основному використовується для формування навичок застосування математичних речень, зокрема означень. Сутність його полягає у тому, що означення замінюється алгоритмом, читаючи вказівки якого, учні вирішують задачу. В такий спосіб, у них формуються навички застосування означення при заучуванні або незаучуванні його формулювання. Цей метод зручно використовувати під час засвоєння означень понять границі послідовності, границі функції, ознак зростання і спадання функції тощо.

9.1.4. Закріплення означення.

Третій етап формування поняття – закріплення означення - здійснюється на подальших заняттях і зводиться до повторення їх формулювань і відпрацьовування навичок застосування до розв'язання задач.

На цьому етапі формування поняття можна користуватися двома основними *прийомами закріплення означень*:

1) учитель пропонує сформулювати ті чи інші означення в ході розв'язання задач;
2) учитель пропонує сформулювати низку означень в ході фронтального опитування.

Перший прийом вельми ефективний, а ось другий може привести до витрати часу і механічного запам'ятовування означень. Другий приойм буде результативним, якщо під час фронтального опитування застосовуються спеціальні вправи, які вимагають від учнів вміння застосовувати означення в різних ситуаціях, вміння швидко орієнтуватися в умові задачі.

<u>Наприклад:</u> Які види чотирикутників зображені на малюнку (рис. 9.2)?

Характерною особливістю таких завдань є чергування прикладів і контрприкладів.

Такі завдання корисні також і тим, що за їх виконання можна ставити оцінку, в той час як за просте відтворення означення - не можна.

Закріплення поняття відбувається під час дії "виведення наслідка", коли зводяться разом істотні ознаки поняття, сформульовані в означенні та теоремах. Це є передумовою для формування вмінь застосовувати поняття до розв'язування задач і доведення теорем.

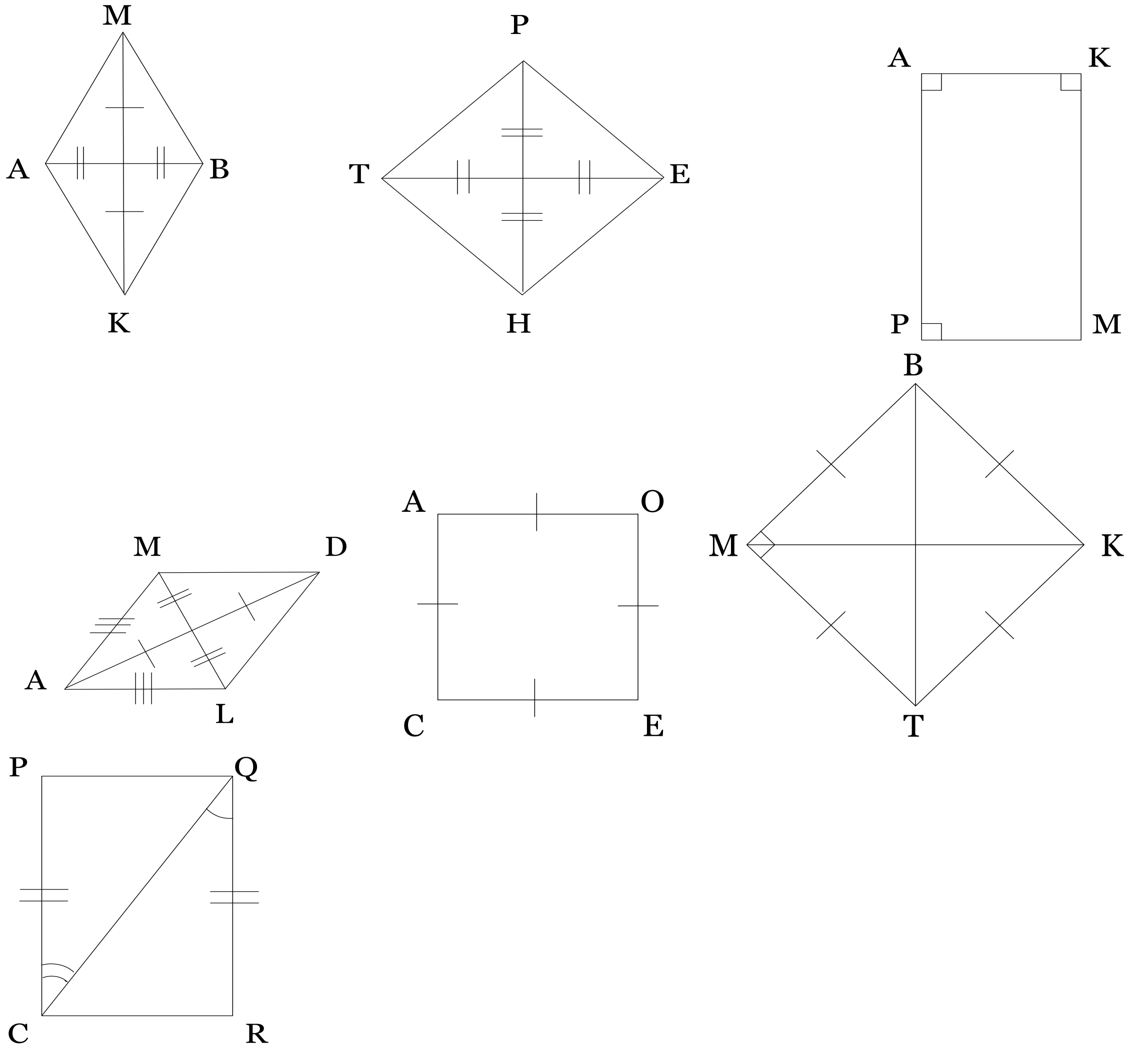


Рис. 9.2

Закріплення означення відбувається також у процесі класифікації поняття (якщо вона можлива), систематизації понять під час узагальнюючого повторення, розв’язання задач творчого характеру.

9.2. Зміст практичного заняття №9

1. Перевірка виконання домашніх завдань (25 хв.).
2. Виконання методичних завдань (15 хв.).
3. Методика формування математичних понять: приклади (пояснення викладача) (20 хв.).
4. Самостійна робота (навчального характеру) (пропонує викладач) (20 хв.).

9.3. *Дидактико- методичні матеріали до практичного заняття №9*

9.3.1. Питання до актуалізації опорних теоретичних знань студентів у процесі заняття

1. Які методи і прийоми розумової діяльності використовуються при формуванні математичних понять?
2. Зазначте три етапи формування математичних понять в учнів.
3. Охарактеризуйте конкретно-індуктивний спосіб введення поняття.
4. Охарактеризуйте абстрактно-дедуктивний спосіб введення поняття.
5. В чому сутність роздільного методу забезпечення засвоєння означення поняття?
6. Як реалізується компактний метод забезпечення засвоєння означення поняття?
7. Коли використовується алгоритмічний метод забезпечення засвоєння означення поняття?
8. Як може здійснюватися закріплення означення поняття?

9.3.2. Методичні завдання до практичного заняття №9

1. Заповніть таблицю (табл. 9.1) рисунками окремих видів трикутників.

Таблиця 9.1

Трикутники	Гострокутні	Прямокутні	Тупокутні
Різносторонні			
Рівнобедрені			
Рівносторонні			

Чи всі комірки виявилися заповненими? Чому?
В якому класі можна запропонувати учням таке завдання?

2. Проведіть дихотомію поняття «комплексні числа».
3. Чи правильні такі означення понять? (Якщо ні, то вкажіть припущені помилки):

1) Цілим раціональним виразом називається вираз, який не є дробово-раціональним.
2) Чотирикутник, у якого всі сторони рівні, називається ромбом.
3) Середньою лінією трапеції називається відрізок, що сполучає середини двох його сторін.
4) Множення – це скорочене додавання.
5) Трикутники називаються подібними, якщо три сторони одного трикутника відповідно пропорційні трьом сторонам іншого трикутника.

9.3.3. Методика формування математичних понять: приклади

(пояснення викладача)

I. Приклади введення деяких понять.

1) *Арифметична прогресія.*

У ч и т е л ь: Запишіть декілька членів такої послідовності: $x_1 = 2$; $x_{n+1} = x_n + 3$.

У ч н і: 2; 5; 8; 11; 14; …

У ч и т е л ь: Як можна охарактеризувати члени цієї послідовності?

У ч н і: В ній кожний член на 3 більше попереднього.

У ч и т е л ь: Вірно. Таку послідовність називають арифметичною прогресією. Послідовність: 3; 1,5; 0; -1,5; -3; -4,5; … - також арифметична прогресія. Що помічаєте характерного для її членів?

У ч н і: В ній кожний член на 1,5 менше попереднього.

У ч и т е л ь: Спробуйте дати означення арифметичній прогресії.

(Учні намагаються сформулювати означення).

Вчитель коректує, обґрунтовує термін. Далі можна переходити до закріплення відповідного означення.

Запитання до студентів:

- Який метод введення поняття було проілюстровано?

2) *Коло*.

У ч и т е л ь: Запишемо означення: Колом називається множина усіх точок площини, рівновіддалених від заданої точки. Зобразіть коло в зошитах. Яким креслярським інструментом при цьому користуємось?

У ч н і: Циркулем.

У ч и т е л ь: Які суттєві ознаки можна виділити в означенні?

У ч н і: по-перше, це множина усіх точок площини, а по-друге, ці точки рівновіддалені від заданої точки.

У ч и т е л ь: Цю точку називають центром кола. Так як множина усіх точок площини, що володіє якоюсь властивість, називається геометричним місцем точок, то можна дати ще одне правильне (еквівалентне) означення: Колом називається геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки. Як ви думаєте, чому це поняття отримало таку назву (мотивується термін)?

(Діти висувають припущення).

Запитання до студентів:

- Який метод введення поняття було проілюстровано?

II. Приклади забезпечення засвоєння означень деяких понять.

1) Розглянемо, наприклад, забезпечення засвоєння означення *поняття «діаметр».*

У ч и т е л ь: Діаметр – це хорда, що проходить через центр. Хто зрозумів і може повторити означення діаметра?

(Два-три учня по черзі повторюють).

У ч и т е л ь: А хто може по-іншому сказати, що таке діаметр (дати еквівалентне означення)?

(Діти дають варіанти відповіді. Діаметр – найбільша хорда).

Запитання до студентів:

- Який метод забезпечення засвоєння означення поняття було проілюстровано?

2) Поняття «паралелограм».

1 крок: учитель виписує означення паралелограма так, щоб відокремити в ньому суттєві ознаки (учні роблять те саме в зошитах). Текст приймає такий вигляд: "Паралелограмом називається чотирикутник, // у якого одна пара протилежних сторін паралельна // та інша пара протилежних сторін теж паралельна".

2 крок: дається вправа: знайти паралелограми (рис. 9.3).

Вчитель демонструє, як виконувати таке завдання, читаючи вголос означення і зупиняючись після кожної риски, перевіряючи виконання прочитаної ознаки.

3 крок: вправу продовжують виконувати учні під керівництвом вчителя, який робить зауваження.

Далі спостерігається перехід до згортання міркувань.

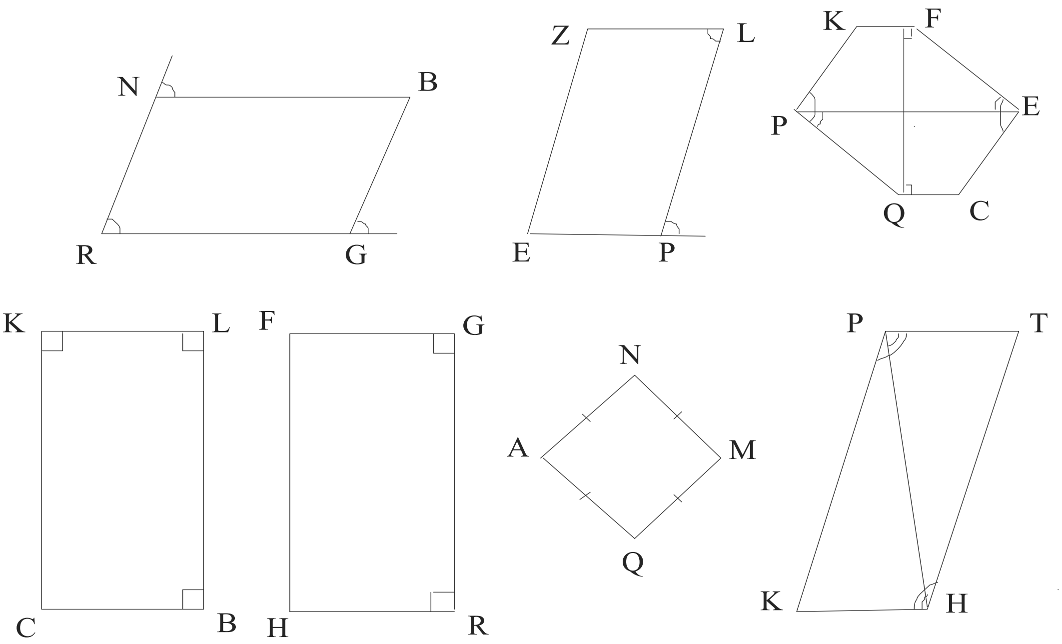


Рис. 9.3

Запитання до студентів:

- Який метод забезпечення засвоєння означення поняття було проілюстровано?

3) *Поняття похідної.*

Після того, як було сформулювано означення похідної функції в точці, учням пропонується виконати завдання: знайти похідну функції $f(x) = x^3$ в точці x_0 (за означенням). Для цього означення представляється у вигляді алгоритма:

1. Знайти приріст функції Δf;
2. Знайти відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;
3. Знайти число, до якого прямує таке відношення, за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

<u>Розв'язання.</u>

1. $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + +(\Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$;
2. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2, \Delta x \neq 0$;
3. $3x_0^2$ – стала величина; при $\Delta x \to 0$ очевидно, що $3x_0\Delta x \to 0$ і $(\Delta x)^2 \to 0$, отже і сума $3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \to 0$. Отже, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to 3x_0^2$ при $\Delta x \to 0$.

Тобто, $f'(x_0) = 3x_0^2$.

Запитання до студентів:

- Який метод забезпечення засвоєння означення поняття було проілюстровано?

III. Закріплення означення.

1) Закріплення означення *поняття «суміжні кути»* може відбуватися за допомогою такого завдання:

Назвіть суміжні кути (рис. 9.4):

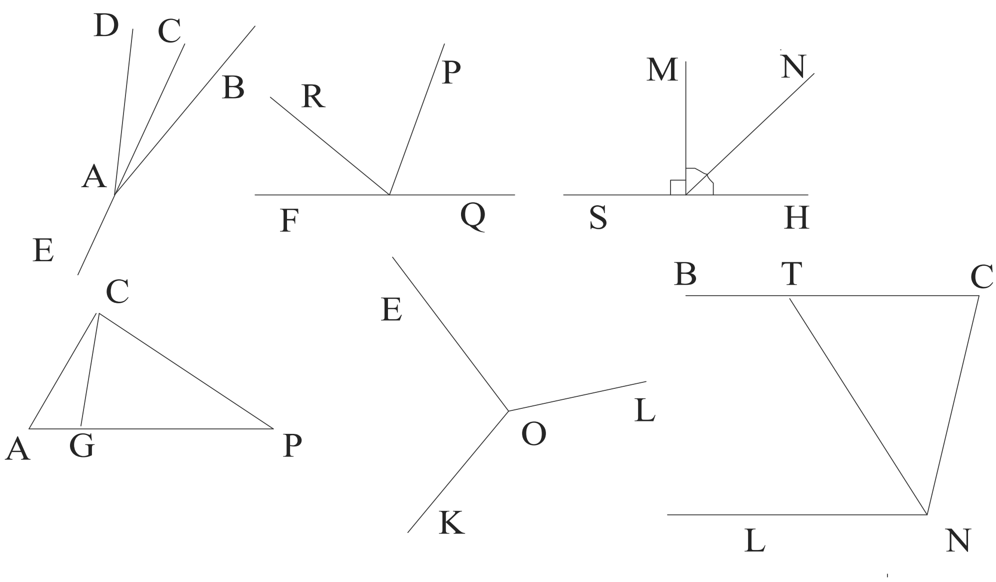


Рис. 9.4

2) Закріплення *поняття «діагоналі чотирикутника»* може відбуватися за допомогою такого завдання:

Якими властивостями володіють відрізки MN і KP (рис. 9.5)?

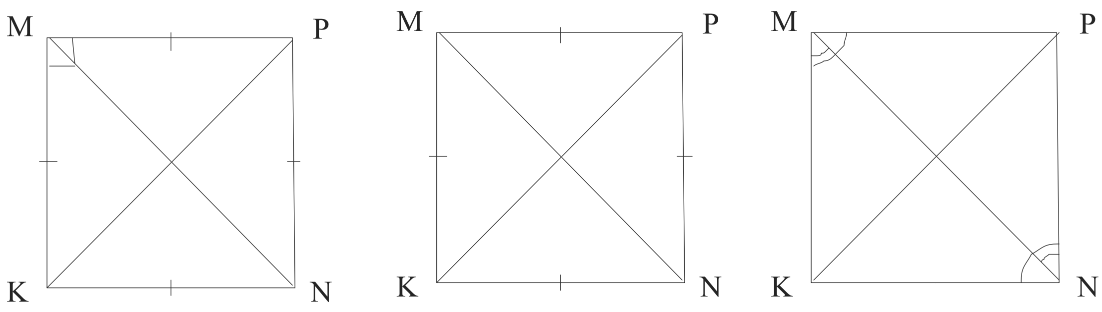


Рис. 9.5

9.3.4. Орієнтовний зміст самостійної роботи

(навчального характеру) з теми:
«Методика формування математичних понять»

Опишіть методику роботи з поняттям медіани трикутника за трьома етапами:

1) введення поняття;
2) забезпечення засвоєння відповідного означення;
3) закріплення поняття.

9.4. Домашнє завдання

1. Опишіть методику введення поняття «функція» спочатку конкретно-індуктивним, потім абстрактно-дедуктивним способами. Проведіть порівняльний аналіз.
2. Розробіть методику забезпечення засвоєння означення самостійно обраного поняття компактним методом.
3. Опишіть методику роботи з поняттям „висота трикутника” (введення поняття, забезпечення засвоєння відповідного означення, закріплення поняття).
4. Наведіть приклади понять, які вивчаються учнями тільки на поглибленому рівні навчання математики.

Примітка: всі завдання виконуються письмово, на окремому аркуші.

9.5. Література

Основна: [15], [32], [45], [96], [99], [100], [101], [104], [106], [107], [122], [137], [157].
Додаткова: [30], [31], [105], [126], [173].

9.6. Аналіз практичного заняття №9 з точки зору формування у студентів нормативної, варіативної та проектувально-моделювальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Нормативна складова

Практичне заняття №9 передбачає активну роботу студентів із програмами з математики, включаючи програму для поглибленого вивчення математики, оскільки є необхідність уточнювати та фіксувати у пам'яті, в якому класі вивчаються ті чи інші математичні поняття. Водночас майбутні вчителі математики вчаться реалізовувати цілі та завдання навчання математики в основній та старшій школах за допомогою правильного формування математичних понять в учнів з методичної точки зору.

Варіативна складова

Робота з поняттями шкільного курсу математики потребує ґрунтовного аналізу чинних підручників (для певного року навчання і різних авторів), включаючи їх порівняльний аналіз з точки зору введення понять, формулювання відповідних означень, подальшого їх закріплення; оцінки ефективності реалізації методики формування математичних понять в учнів в цих підручниках. Крім того, студенти, аналізуючи програми для поглибленого навчання математики, визначаються з тим, які поняття вивчаються учнями тільки на такому рівні.

Отже, на даному практичному занятті у студентів продовжують формуватися вміння і досвід аналізування чинних підручників, одержуються знання щодо особливостей реалізації змісту програм до певного року навчання математики в основній і старшій школах.

Проектувально-моделювальна складова

В процесі практичного заняття №9 майбутні вчителі математики одержують знання щодо прийомів організації навчальної діяльності учнів, зокрема вивчають методи і прийоми ефективного формування математичних понять, а також керування такою діяльністю. Студенти набувають досвіду проектування і складання фрагментів уроків, які ілюструють роботу з учнями по формуванню конкретних понять шкільного курсу математики, при цьому вони вчаться добирати адекватні методи, форми, засоби навчання математики.

Практичне заняття 10

Тема: *Проведення модульної контрольної роботи №2 з теми:* ***«Методи і прийоми розумової діяльності. Математичні поняття і методика їх формування».***

Мета: узагальнення і систематизація знань з теми «Методи і прийоми розумової діяльності. Математичні поняття і методика їх формування»; формування вмінь використовувати методи і прийоми розумової діяльності на уроках математики, реалізовувати методику формування математичних понять в учнів (за трьома етапами); заохочення щодо самостійного опрацювання деяких питань навчального курсу «Загальна методика навчання математики»; набуття досвіду проектування фрагментів уроків із певними вимогами, з конкретних тем шкільного курсу математики; перевірка та оцінка результатів навчання.

Примітка 1. Домашнє завдання до практичного заняття №9 перевіряється викладачем індивідуально у кожного студента. Домашнє завдання до практичного заняття №10 не задається.

Примітка 2. Студентам заздалегідь пропонуються питання до самостійного вивчення та рекомендована література. Тільки за умови їх успішного опрацювання студенти можуть отримати максимальний бал за модульну контрольну роботу №2.

10.1. Питання до самостійного вивчення до модульної контрольної роботи №2

1. Позакласна робота з математики.
2. Методика підготовки учнів до олімпіад різного рівня.
3. Диференційоване навчання з математики.
4. Методика організації і проведення факультативів з математики.

Рекомендована література:

[15; розділ VIII], [38], [44], [49], [50], [87], [104], [105], [106], [107], [126], [157; розділ 9].

10.2. Орієнтовні зміст і оцінювання модульної контрольної роботи №2

Варіант 1

1. а) Аналіз і синтез як загальні методи розумової діяльності. Приклади їх використання при навчанні математики. Яку роль відіграють аналіз і синтез у науковму пізнанні? **6 б.**

1. б) Основні характеристики понять. Співвідношення між змістом і обсягом поняття. Приклади. **6 б.**

2. а) Визначте, чи виконуються вимоги до класифікації в наступних прикладах:

1) паралелограми поділяються на прямокутники, ромби і квадрати;
2) цілі числа поділяються на додатні і від'ємні;
3) функції можут бути періодичні і неперіодичні;
4) трикутники поділяються на гострокутні, прямокутні, тупокутні, рівнобедрені і нерівнобедрені.

Якщо вимоги до класифікацій не виконуються, то зазначте вид помилки. **4 б.**

2. б) Проведіть дихотомію поняття «елементарні функції». **3 б.**

3. Складіть конспект фрагменту уроку з введення поняття арифметичного кореня n-го степеня конкретно-індуктивним способом. **10 б.**

Заробіть додаткові бали!

Форми позакласної роботи з математики.

Наведіть приклади позакласних заходів з математики, які можна було б організувати для учнів основної школи. Яка мета таких заходів? **4 б.**

Варіант 2

1. а) Порівняння і аналогія як загальні методи розумової діяльності. Приклади їх використання при навчанні математики. Яку роль відіграють порівняння і аналогія в математичних дослідженнях? **6 б.**

1. б) Класифікація понять, основні її компоненти, вимоги до класифікації. Приклади класифікацій математичних понять. Обгрунтувати необхідність проводити класифікації при навчанні учнів математики. **6 б.**

2. Проілюструйте кругами Ейлера-Венна відношення між такими поняттями: «послідовність», «функція», «квадратична функція», «прогресія», «автомобіль», «арифметична прогресія», «геометрична прогресія», «рівняння».

Яке відношення між поняттями «арифметична прогресія» і «геометрична прогресія»; «функція», «послідовність» і «квадратична функція»; «функція» і «рівняння»; «функція» і «автомобіль»? Яку назву мають самі поняття?

Наведіть приклади понять, які знаходяться у відношенні суперечності. **7 б.**

3. Розробіть конспект фрагмент уроку забезпечення засвоєння означення поняття «трапеція». Який метод доцільно обрати? **10 б.**

Заробіть додаткові бали!

Охарактеризуйте роботу математичного гуртка.

Якою може бути тематика занять для математичного гуртка учнів 5-7 класів? **4 б.**

Варіант 3

1. а) Абстрагування і конкретизація як загальні методи розумової діяльності. Приклади їх використання при навчанні математики. **6 б.**

1. б) Означення математичних понять, види означень, вимоги до означень. Приклади. **6 б.**

2. Проведіть класифікацію всіх можливих випадків взаємного розташування двох прямих а) у просторі; б) на площині.

Яку назву має такий вид класифікації?

Всі випадки проілюструйте рисунками. **7 б.**

3. Опишіть методику закріплення означення поняття «раціональний дріб», склавши конспект фрагменту уроку. **10 б.**

Заробіть додаткові бали!

Методика підготовки учнів до олімпіад різного рівня. **4 б.**

Варіант 4

1. а) Характеристика деяких специфічних прийомів розумової діяльності. Алгоритми дій підведення під поняття та виведення наслідку. **6 б.**
1. б) Понятійне мислення, визначення поняття. Роль понять у науці. Утворення і розвиток понять, зокрема математичних. **6 б.**

2. Як пояснити учням, що означення «прямокутник – це паралелограм з прямим кутом» і «прямокутник – це паралелограм з рівними діагоналями» логічно еквівалентні? Чому перше з них звичайно приймається за означення прямокутника?
   Наведіть інші приклади еквівалентних означень. **7 б.**

3. Опишіть методику закріплення означення поняття арифметичного квадратного кореня, склавши відповідний конспект фрагменту уроку. **10 б.**

Заробіть додаткові бали!

Факультативи з математики як одна із форм диференційованого навчання математики.

У чому відмінність факультативів від математичних гуртків? **4 б.**

Варіант 5

1. а) Індукція і дедукція як загальні методи розумової діяльності. Приклади їх використання при навчанні математики. Яку роль відіграють індукція і дедукція в математичних дослідженнях? **6 б.**

1. б) Мовленевий вираз понять. Види понять. Приклади. **6 б.**

2. Чи правильні наступні означення понять:

1) паралельними називаються прямі, що не мають спільних точок;
2) ромбом називається квадрат з непрямими кутами;
3) піраміда називається правильною, якщо в її основі лежить правильний многокутник;
4) вписаним кутом називається кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають коло;
5) цілими називаються числа, які не є дробовими;
6) модулем числа називається це число без знака;
7) відрізком називається називається пряма, що обмежена з двох сторін;
8) квадратом називається паралелограм, у якого всі сторони рівні і всі кути рівні.

Якщо серед цих означень є невірні, вкажіть вид помилок. Запропонуйте прийоми попередження таких помилок. **7 б.**

3. Проілюструйте забезпечення засвоєння означення поняття «правильна піраміда» компактним методом, розробивши конспект фрагменту уроку. **10 б.**

Заробіть додаткові бали!

Методичні особливості організації і проведення факультативів з математики.

Запропонуйте декілька тем до факультативних занять з математики у старшій школі. **4 б.**

Варіант 6

1. а) Узагальнення та обмеження як загальні методи розумової діяльності. Приклади їх використання при навчанні математики. Яку роль відіграють узагальнення та обмеження у научному пізнанні? **6 б.**

1. б) Відношення між поняттями (з ілюстрацією кругами Ейлера-Венна). **6 б.**

2. Проведіть порівняння властивостей паралелограма та паралелепіпеда, склавши таблицю. З використанням якого методу розумової діяльності доцільно вивчати властивості паралелепіпеда? Обгрунтуйте свою думку. **7 б.**

3. Охарактеризуйте методику введення поняття «многочлен» абстрактно-дедуктивним способом, склавши відповідний фрагмент уроку. **10 б.**

Заробіть додаткові бали!

У чому сутність диференційованого навчання з математики?

Як можна реалізувати диференційований підхід до навчання на уроках математики? **4 б.**

10.3. Аналіз практичного заняття №10 з точки зору формування у студентів нормативної, варіативної та проектувально-моделювальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Нормативна складова

Позитивний результат виконання модульної контрольної роботи №2 передбачає наявність вмінь майбутніх учителів математики користуватися нормативними документами, включаючи програми з математики різних рівнів; знання цілей і завдань навчання математики на різних рівнях в основній і старшій школах і уміння їх реалізовувати.

Варіативна складова

Зміст і мета проведення модульної контрольної роботи №2 зобов'язує студентів якісно проводити логіко-дидактичний і логіко-математичний аналіз чинних підручників різних авторських колективів, включаючи підручники для поглибленого і профільного навчання математики, звертаючись до відповідних програм з математики для допрофільного, профільного і поглибленого навчання. У процесі підготовки до модульної контрольної роботи №2 майбутні фахівці одержують знання щодо особливостей реалізації варіативної складової навчальних планів, проведення факультативів з математики, позакласних заходів з математики, індивідуальних занять з учнями, зокрема з метою підготовки їх до олімпіад.

Проектувально-моделювальна складова

Проектуючи фрагменти уроків, майбутні вчителі математики реалізують знання щодо прийомів організації навчальної діяльності учнів, зокрема розумової, та керування цією діяльністю у процесі навчання математики. Використовуючи знання специфіки методів, форм, засобів навчання математики, студенти вчаться добирати їх адекватно вимогам до уроку, працюючи за різними підручниками. У процесі даного заняття відбувається активне формування спеціальних дидактичних і методичних умінь, необхідних учителю математики, зокрема відпрацьовується ефективне застосування методів і прийомів формування математичних понять в учнів.

Практичне заняття №11

Тема: *Методи доведення теорем.*

Мета: усвідомлення поняття "доведення", що застосовується в ШКМ; з'ясування сутності основних методів доведення теорем; виявлення можливостей доведення теорем різними способами; розв'язування методичних завдань.

11.1. Основні теоретичні питання,

що мають опанувати студенти до даного заняття

11.1.1. Поняття доведення.

Терміни „доведення", „міркування", „обґрунтування" застосовуються у побутовій мові досить широко. В шкільній математиці ми користуємося терміном „доведення" в розумінні „доведення математичних речень".

Під *доведенням* будемо розуміти скінчену послідовність тверджень, кожне з яких є аксіомою чи правильним реченням на основі означення, раніше проведеного доведення чи заданої умови або випливає з попередніх членів цієї послідовності за допомогою логічних правил виведення (дедуктивних схем) [149]**.**

Оскільки шкільний курс математики складається з окремих початкових фрагментів деяких змістовних математичних теорій (алгебри, геометрії, тригонометрії, математичного аналізу), то доведення тут будуються як змістовні доведення, тобто в них використовуються звичайні міркування, а правила логічного виведення не фіксуються. Найчастіше під час прямого доведення теорем шкільної математики неявно використовується правило висновку.

У кожному доведенні розрізняють тезис, аргумент, демонстрацію.

Тезис – це твердження, істинність якого необхідно довести.

Аргумент – твердження, істинність якого доведена і яке може бути застосовано в обґрунтуванні істинності або хибності тезису.

Демонстрація – логічне міркування, у процесі якого з аргументів виводиться істинність або хибність тезису.

Не будь-яке твердження можна довести. Твердження, правильність якого можна встановити доведенням, називається ***теоремою***.

Теореми можуть бути сформульованими в умовній або категоричній формі, за допомогою понять „необхідно", „достатньо" або „необхідно і достатньо". Наприклад:

„Вертикальні кути рівні" – категорична форма теореми;

„Якщо кути вертикальні, то вони рівні" – умовна форма;

„Для того, щоб кути були вертикальними, необхідно, (але не достатньо) щоб вони були рівні";

„Для того, щоб кути були рівні, достатньо, (але не необхідно) щоб вони були вертикальними".

До кожної теореми можна скласти три твердження, зв'язок між якими зобумовлюється законами контрапозиції, наприклад:

„Якщо кути вертикальні, то вони рівні" – пряма теорема;

„Якщо кути рівні, то вони вертикальні" – обернене твердження, яке не є істинним;

„Якщо кути не вертикальні, то вони не рівні" – протилежне твердження до даної теореми, яке також не є істинним;

„Якщо кути не рівні, то вони не вертикальні" – твердження, протилежне до оберненого, яке є теоремою, тобто істинним твердженням.

Нагадаємо, що за законами контрапозиції істинність (або хибність) прямого та протилежного до оберненого тверджень, оберненого та протилежного до даного тверджень співпадають.

11.1.2. Методи доведення теорем.

Одну і ту саму теорему можна довести по-різному. Різні доведення можуть відрізнятися як *аргументами*, так і *логікою* (тобто правилами висновку). Аргументи і логіка характеризують метод доведення.

Класифікують математичні доведення за різними основами:

1) *за послідовністю міркувань*: синтетичне й аналітичне доведення;
2) *за загальнологічною основою*: пряме і косвене доведення, цільне і по частинах;
3) *за формою умовиводу* (в якій здійснюються доведення): індуктивне і дедуктивне доведення;
4) в *залежності від використання математичних теорій*: координатний метод доведення, векторний метод доведення, доведення на основі геометричних перетворень, доведення за допомогою рівності трикутників та ін.

Синтетичний і аналітичний методи.

Логічною основою *синтетичного методу* доведення є аксіома: "З істинного твердження завжди випливає наслідок".

Сутність методу: синтетичне доведення починається з виведення деякого наслідку B_1 з умови A (або його частини) з використанням певних, пов'язаних з умовою, речень теорії T, істинність яких вже була встановлена. Потім, аналогічно, з B_1 отримують речення-наслідок B_2 і так до тих пір, поки в якості наслідку не отримують висновок - речення B, що доводиться.

Логічна схема:

Теорема $A \Rightarrow B$. Доведення: $A \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_n \Rightarrow B$.

Наприклад. Розглянемо доведення такого твердження:

$$\forall a \geq 0, \forall b \geq 0, \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Доведення: Якщо $\overbrace{a \geq 0, b \geq 0}^{A}$, то $\overbrace{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0}^{B_1}$ або $\overbrace{a-2\sqrt{ab}+b \geq 0}^{B_2}$, звідки $\overbrace{a+b \geq 2\sqrt{ab}}^{B_3}$, поділив обидві частини на 2, отримаємо: $\overbrace{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}^{B}$.

Що і необхідно було довести.

При доведенні синтетичним методом існує велика міра невизначеності і багатозначності при виборі шляху доведення (як здогадатися, що починати треба з нерівності $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$?).

Отже, для школярів мотиви кроків, які здійснюються, при синтетичному доведенні залишаються скритими практично до завершення доведення. Ця обставина утруднює навчання школярів самостійно доводити теореми.

Однак, у цього методу є і переваги: переконливість, лаконізм, простота з логічної точки зору.

Аналітичне доведення - це доведення, при якому відправляються не від умови, а від висновку; реалізується методами низхідного і висхідного аналізів.

Висхідний аналіз.

Логічна схема: $B \Leftarrow B_1 \Leftarrow B_2 \Leftarrow ... \Leftarrow B_n \Leftarrow A$.

Або:

$$\begin{aligned} &B_1 \Rightarrow B \\ &B_2 \Rightarrow B_1 \\ &B_3 \Rightarrow B_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A \Rightarrow B_n \end{aligned}$$

1) Логічна основа висхідного аналізу така сама, як і у синтетичного методу: з правильного твердження випливає правильний наслідок.
2) Сутність методу: шукають таке твердження або достатню умову, з якого (якої) випливає те, що необхідно довести, потім відшукують таке твердження або достатню умову, з якого (якої) випливає раніше знайдене і т.д., поки не приходять до вже відомого твердження (або умови).

<u>Наприклад</u>: Дано: $a \geq 0, b \geq 0$; Довести $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Доведення: щоб показати, що для $a \geq 0, b \geq 0, \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, достатньо показати, що $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (оскільки з цього випливає те, що необхідно довести). А це, у свою чергу, випливає з нерівності $a-2\sqrt{ab}+b \geq 0$ або $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$.

А ця нерівність вірна для будь-яких $a \geq 0, b \geq 0$, оскільки квадрат числа не може бути від'ємним.

Отже, висхідний аналіз полегшує *пошук* доведення теореми. Це доведення можна потім представити синтетичним методом.

Низхідний аналіз (аналіз Евкліда).

Логічна схема: $B \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_n \Rightarrow A$.

Цей метод відрізняється від синтетичного методу спрямованістю міркувань. Його сутність: шукане (тезис) приймають за істинне твердження і на основі виведених з нього наслідків отримують відому істину.

Наприклад:

Дано: $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$. Довести: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Доведення: Нехай $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ істинно, для $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0$, тоді помноживши обидві частини на 2, отримаємо: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, тобто $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ - істинно. Отже, вірно і вихідне твердження.

Аналіз Евкліда не є строгим доведенням. Тут показано, що з припущення істинності твердження випливає правильний наслідок. Але правильний наслідок можна отримати і з невірного твердження: -2=2 – невірно, але 4=4 вірно. Тобто аналіз Евкліда може полегшувати пошук доведення, спрямовує хід думки.

Пряме і косвене доведення.

Пряме доведення – доводиться істинність судження, що безпосередньо міститься у висновку теореми.

Косвене доведення – доводиться хибність судження, що суперечить висновку теореми, тим самим не прямо, а косвено доводиться істинність висновку теореми.

Косвене доведення проводиться ***методом від супротивного*** (інші назви цього методу – доведення суперечністю, зведення до абсурду). Логічною основою цього методу є закон виключеного третього: з двох тверджень, які суперечать одне одному, одне істинне, інше хибне, а третього бути не може.

Наприклад: Дано: $a \geq 0, b \geq 0$. Довести: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Доведення: припустимо, що $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$, для $a \geq 0, b \geq 0$. Тоді $a+b < 2\sqrt{ab}$, тобто $a - 2\sqrt{ab} + b < 0$ або $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < 0$. Але ця нерівність не може бути істинною ні при яких $a \geq 0, b \geq 0$. Отже, істинно супротивне: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Поняття про метод від супротивного вводиться у курсі геометрії 7 класу. Учням варто знати *алгоритм* застосування цього методу: щоб довести твердження методом від супротивного, треба:

1) припустити супротивне тому, що треба довести;
2) користуючись припущенням, відомими аксіомами і доведеними раніше твердженнями, шляхом міркувань дійти висновку, який суперечить або умові твердження, що доводиться, або відомій аксіомі, або доведеному раніше твердженню, або припущенню;
3) зробити висновок, що припущення невірне; отже вірне те, що треба було довести.

Цільне доведення і доведення по частинах.

Слід відрізняти цільне доведення від доведення по частинах (роздільне доведення).

Цільне доведення – це доведення твердження для загального випадку.

Доведення по частинах – це доведення всіх можливих частинних випадків. Воно проводиться ***методом повної індукції***, який заснований на аксіомі логіки: якщо деякою властивістю володіють всі елементи множини А і всі елементи множини В, то цією ж властивістю володіють і всі елементи множини $A \cup B$.

При доведенні методом повної індукції теорему розчленовують на скінчену кількість тверджень, які відображують всі можливі частинні випадки. Коли теорема доведена окремо для кожного з частинних випадків, роблять висновок про істинність загального твердження.

Наприклад: довести, що для кожного натурального a число $(a^3 - a) \vdots 3$.

Доведення: $a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a-1)(a+1)$. Достатньо показати, що $a \vdots 3$, або $(a-1) \vdots 3$, або $(a+1) \vdots 3$ при $a \in N$. При діленні на 3 натуральне число a може давати остачу 0, 1 або 2, тобто $a = 3k$, $a = 3k+1$, $a = 3k+2$, де $k \in N$.

Якщо $a = 3k$, то $a \vdots 3$ і твердження вірне.

Якщо $a = 3k+1$, то $a - 1 = 3k + 1 - 1 = 3k \vdots 3$ і твердження вірне.

Якщо $a = 3k+2$, то $a + 1 = 3k + 3 = 3(k+1) \vdots 3$ і твердження вірне.

Отже, твердження вірне для будя-якого натурального a.

Варто дати учням *правило-орієнтир застосування методу повної індукції:*

а) якщо в алгебрі необхідно довести деяке твердження для всіх натуральних чисел, то можна розглянути це твердження для всіх парних чисел, для всіх непарних чисел, для 1.

б) в геометрії метод повної індукції застосовується тоді, коли, вивчаючи властивості фігур, необхідно розглянути всі можливі випадки їх розташування або можливі їх види. Коли теорема доведена для кожного окремого випадку, роблять загальний висновок.

Якщо розглядати не всі частинні випадки, а деякі, то отримаємо *метод неповної індукції*, який не є строгим доведенням.

Наприклад: складаючи формулу для отримання простих чисел, Ейлер з'ясував, що при $n \in N$ формула $f(n) = 2n^2 + 29$ дає 28 простих чисел при $n \le 28$, а при $n = 29$ дає вже складне число 2959.

Аналогічно, формула $f(n) = n^2 + n + 41$ дає прості числа при $n \le 39$, але при $n = 40$ - отримаємо складне число.

Подібні приклади допомагають переконати учнів у тому, що неповній індукції не можна довіряти, і отримані за її допомогою висновки потребують доведення. Адже у будь-якому з двох наведених прикладів після отримання простих чисел, наприклад, для перших 10 або 20 натуральних значень n по неповній індукції можна заключити, що ці формули дають прості числа при всіх натуральних значеннях n.

Метод неповної індукції доволі часто застосовується у молодших класах, у 5-6 класах. Наприклад, вивчаючи у 6 класі елементи теорії подільності, наводять факти:

$$\begin{array}{l} 28 \,\vdots\, 7 \\ \underline{21 \,\vdots\, 7} \\ (28+21) \,\vdots\, 7 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} 36 \,\vdots\, 6 \\ \underline{54 \,\vdots\, 6} \\ (36+54) \,\vdots\, 6 \end{array}$$

Навівши ще декілька подібних частинних випадків, роблять загальний висновок: якщо кожний доданок суми ділиться на деяке число, то і вся сума ділиться на це число – висновок за неповною індукцією.

Індуктивне і дедуктивне доведення.

За формою умовиводів, у якій відбуваються доведення, розрізняють дедуктивне й індуктивне доведення.

Дедуктивне доведення – доведення загального положення на основі застосування дедуктивних схем (правил виведення).

Індуктивне доведення - поєднання всіх частинних випадків, які стосуються даної ситуації – метод повної індукції.

З терміном „індукція" пов'язаний *метод математичної індукції*, проте міркування, що проводяться за цим методом – дедуктивні міркування. Справді, на першому кроці в методі математичної індукції виконується індуктивне міркування, але завдяки посиланню на загальне, раніше відоме твердження – аксіому індукції (яка є логічною основою цього методу) – в третьому кроці, виявляється, що в цілому міркування дедуктивні.

Наприклад: розглянемо теорему шкільного курсу планіметрії і охарактеризуємо її доведення.

Теорема: Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину поділяються навпіл, то цей чотирикутник – паралелограм (рис. 11.1).

Доведення:

1) $\Delta AOD = \Delta COB \Rightarrow \angle CBO = \angle ODA \Rightarrow BC \parallel AD$;

2) $\Delta AOB = \Delta COD \Rightarrow \angle BAO = \angle OCD \Rightarrow AB \parallel CD$;

3) з 1) і 2) $\Rightarrow ABCD$ - паралелограм за означенням.

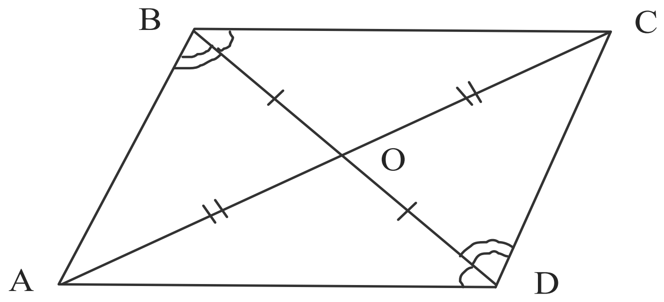


Рис. 11.1

Проведемо аналіз доведення:

1) за послідовністю міркувань: синтетичне;
2) за загальнологічною основою: пряме, цільне;
3) за формою умовиводу: дедуктивне доведення;
4) в залежності від використання математичних теорій: за допомогою рівності трикутників.

11.2. Зміст практичного заняття №11

1. Синтетичний і аналітичний методи доведення теорем (пояснення на прикладах) (15 хв.).
2. Пряме і косвене доведення (пояснення на прикладах) (15 хв.).
3. Цільне доведення і доведення по частинах (пояснення на прикладах) (15 хв.).
4. Векторний і координатний методи доведення теорем (пояснення на прикладах) (20 хв.).
5. Робота з теоремою про кут, вписаний у коло. Дати повну характеристику доведення цієї теореми: за послідовністю міркувань, за загальнологічною основою, за формою умовиводу, в залежності від використання математичних теорій (самостійна робота навчального характеру з наступною перевіркою) (15 хв.).

11.3. Дидактико-методичні матеріали до практичного заняття №11

11.3.1. Питання до актуалізація опорних теоретичних знань студентів у процесі заняття

1. Дайте означення поняттю «доведення».
2. Що таке «тезис», «аргумент», «демонстрація»?
3. Сформулюйте закон контрапозиції. Наведіть приклад із ШКМ.
4. За якими основами класифікують математичні доведення?
5. Розкрийте сутність синтетичного методу доведення теорем. Які недоліки і переваги цього методу?

6. У чому сутність аналітичного методу доведення теорем (низхідний і висхідний аналіз)?
7. У чому різниця між прямим і косвеним доведеннями?
8. Що таке «цільне доведення»?
9. Яким методом реалізується доведення по частинах?
10. Дайте тлумачення термінам «дедуктивне доведення», «індуктивне доведення».
11. Яка роль вивчення теорем та їх доведень у шкільному курсі математики?

11.3.2. Синтетичний і аналітичний методи доведення
(пояснення на прикладах)

Розглянемо доведення такого твердження: $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2, \forall a \neq 0.$

<u>Доведення 1:</u> $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2, \forall a \neq 0$ – істинне твердження;

$\Uparrow$

$a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 \geq 0$ - істинне твердження;

$\Uparrow$

$\frac{a^4+1-2a^2}{a^2} \geq 0$ – істинне твердження;

$\Uparrow$

$\frac{(a^2-1)^2}{a^2} \geq 0$ - істинне твердження. Рівність досягається за умови, що $a = \pm 1$.

Запитання до студентів:

- Який метод доведення демонструє цей приклад?

<u>Доведення 2:</u> $a \neq 0 \Rightarrow \frac{(a^2-1)^2}{a^2} \geq 0$ - істинне твердження, причому рівність досягається за умови, що $a = \pm 1$;

$\Downarrow$

$\frac{a^4+1-2a^2}{a^2} \geq 0$ – істинне тверджeня;

$\Downarrow$

$a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 \geq 0$ - істинне твердження;

$\Downarrow$

$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$, що і необхідно було довести.

Запитання до студентів:

- Який метод доведення демонструє цей приклад?

11.3.3. Пряме і косвене доведення
(пояснення на прикладах)

Поняття про метод від супротивного вводиться у курсі геометрії 7 класу. Вперше за підручником [99] цей метод застосовується для доведення теореми про дві прямі, паралельні третій.

Теорема. Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.

Доведення: Нехай $b||a$ і $c||a$. Доведемо, що $b||c$ (рис. 11.2).

Припустимо, що прямі b і c не паралельні, а, отже, перетинаються в деякій точці *М*. Тоді виходить, що через точку *М* проходять дві прямі, паралельні прямій a, що суперечить аксіомі паралельних прямих. Значить, припущення невірне, а вірно, що $b||c$.

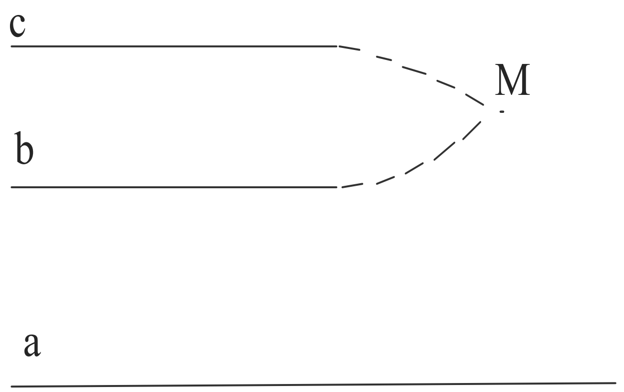


Рис. 11.2

Необхідно дати учням алгоритм застосування методу від супротивного. Також корисно познайомити школярів з *правилом-орієнтиром* для використання цього методу: *метод від супротивного, як правило, використовується при доведенні теорем про єдиність (прямих, відрізков, інших фігур, геометричних перетворень), існування (прямих, площин), паралельність (прямих, площин).*

Завдання для самостійного виконання студентами:

Навести приклад теорем шкільного курсу геометрії, що мають пряме доведення.

11.3.4. Цільне доведення і доведення по частинах
(пояснення на прикладах)

Доведемо, що якщо $a \in N$ *, то* $(2a^3 + 3a^2 + a) \vdots 6$.

<u>Доведення:</u>

$2a^3 + 3a^2 + a = a(a + 1)(2a + 1)$.

Із двох послідовних натуральних чисел одне обов'язково парне, тому добуток $a(a+1) \vdots 2$ і, отже, $a(a+1)(2a+1) \vdots 2$. Тепер необхідно довести, що $a(a+1)(2a+1) \vdots 3$.

Якщо $a \vdots 3$, тобто має вигляд $a = 3k$, де $k \in N$, то $a(a+1)(2a+1) \vdots 3$.

Якщо $a = 3k + 1$, то $2a + 1 = 2(3k+1) + 1 = 6k + 3 = 3(2k+1) \vdots 3$.

Якщо $a = 3k + 2$, то $a + 1 = 3k + 3 = 3(k+1) \vdots 3$.

Отже, якщо $a(a+1)(2a+1) \vdots 2$ і $a(a+1)(2a+1) \vdots 3$, то, за теоремою, $a(a+1)(2a+1) \vdots 6$, і вихідне твердження вірне для будь-якого натурального a.

Запитання до студентів:

- Який метод доведення демонструє цей приклад?

Завдання для самостійного виконання студентами:

Навести приклад твердження ШКМ, яке доводиться методом повної індукції.

11.3.5. Векторний і координатний методи доведення теорем
(пояснення на прикладах)

Доведемо різними способами, що в рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, рівні.

I спосіб *(ілюструє застосування дедуктивного методу доведення теорем)*

Дано: ΔABC – рівнобедрений, AC - основа, AE і CK – медіани (рис. 11.3).

Довести: AE=CK.

Доведення: Оскільки ΔABC рівнобедрений з основою AC, то AB=BC (за означенням рівнобедреного трикуника) і $\angle A = \angle C$ (за властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника). Так як CK – медіана, то AB=2AK (за означенням медіани). Аналогічно BC=2CE. Із того, що AB=BC, AB=2AK, BC=2CE, слідує, що AK=CE. У трикутниках AKC і CEA маємо: AK=CE, AC – спільна сторона цих трикутників, $\angle A = \angle C$, тому ці трикутники рівні (за двома соронами і кутом між ними). Звідки AE=CK (за означенням рівних трикутників).

Теорему доведено.

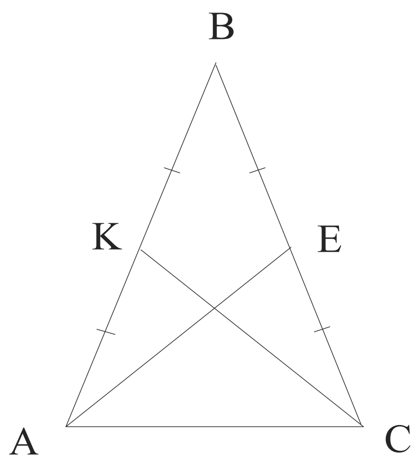


Рис. 11.3

II спосіб *(ілюструє застосування векторного методу доведення теорем)*

Введемо вектори: $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (рис. 11. 4). Тоді $\overrightarrow{EA} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{KC} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

$\overrightarrow{EA}^2 = \left|\overrightarrow{EA}\right|^2 = \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{b}^2$;

$\overrightarrow{KC}^2 = \left|\overrightarrow{KC}\right|^2 = \left(\vec{b} - \frac{1}{2}a\right)^2 = \vec{b}^2 - \vec{b}\cdot\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{a}^2$.

Оскільки ΔABC рівнобедрений з основою AC, то AB=BC, тобто $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Отже, $\overrightarrow{EA}^2 = \overrightarrow{KC}^2$, тоді $EA^2 = KC^2$; це означає, що AE=CK.

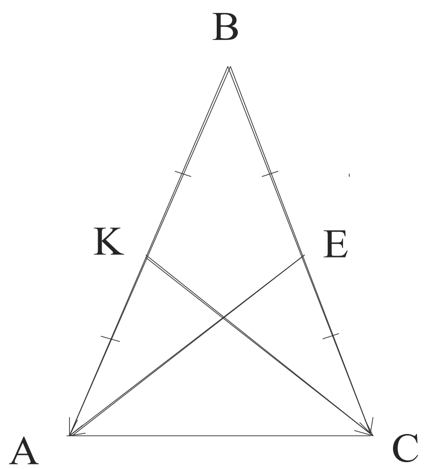


Рис. 11.4

__III спосіб__ (ілюструє застосування координатного методу доведення теорем)

Введемо систему координат. Вісь x містить сторону AC, вісь y – висоту, проведену до основи (рис. 11.5). Тоді вершини трикутника матимуть такі координати:

A (-x; 0), B (0; y), C (x; 0).

Так як відрізки AE і CK – медіани, то точки K і E - середини відрізків AB і CB, тому точки E і K матимуть такі координати:

E (0,5x; 0,5y), K (-0,5x; 0,5y).

Знайдемо довжини відрізків AE і CK:

$AE = \sqrt{(0{,}5x + x)^2 + (0{,}5y - 0)^2} = \sqrt{2{,}25x^2 + 0{,}25y^2}$;

$CK = \sqrt{(-0{,}5x - x)^2 + (0{,}5y - 0)^2} = \sqrt{2{,}25x^2 + 0{,}25y^2}$.

Довжини відрізків AE і CK рівні, отже, рівні і самі відрізки.

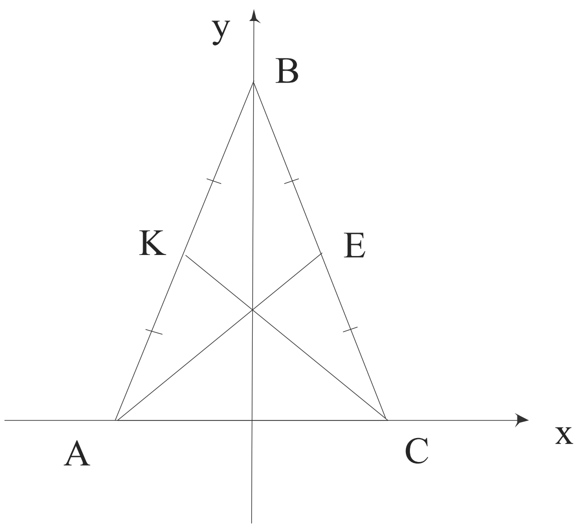


Рис. 11.5

11.4. Домашнє завдання

1. Розберіть доведення теореми про середню лінію трапеції векторним методом [156; ст. 115].
2. Доведіть теорему - ознаку вписаного чотирикутника. Охарактеризуйте проведене доведення за різними ознаками.
3. Запропонуйте теорему шкільного куру геометрії, яку б можна було довести координатним методом.
4. Доведіть, що $\frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2}$. Яким методом доведення користувалися?
5. Проаналізуйте підручник [45] і випишіть теореми, що доводяться методом від супротивного.

11.5. Література

Основна: [13], [15], [45], [99], [107], [149], [156], [157].
Додаткова: [9], [53], [61], [76], [80], [94], [105], [117], [170].

11.6. Аналіз практичного заняття №11 з точки зору формування у студентів нормативної, варіативної та проектувально-моделювальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Нормативна складова

У процесі практичного заняття №11 майбутні вчителі математики мають необхідність звертатися до програм з математики задля з'ясування, в якому класі вивчається та чи інша теорема шкільної математики, набуваючи досвіду користування нормативними документами, аналізуючи зміст шкільного курсу математики.

Варіативна складова

На практичному занятті, що розглядається, студенти одержують знання щодо реалізації змісту програм з математики до певного року навчання в чинних підручниках, зокрема до 8 класу, виконуючи при цьому логіко-дидактичний і логіко-математичний аналіз навчального матеріалу (насамперед, що стосується формулювання тверджень, вивчення теорем).

Проектувально-моделювальна складова

Розглядаючи різні методи доведення теорем на практичному занятті №11мабутні вчителі математики одержують знання щодо прийомів організації розумової діяльності учнів і керування цією діяльністю. На даному занятті у студентів формуються професійно-необхідні спеціальні дидактичні та методичні уміння, зокрема при навчанні учнів доведень теорем шкільної математики. Майбутні фахівці вчаться аналізувати фрагменти уроків, що ілюструють методику роботи з теоремами шкільного курсу математики.

Практичне заняття №12

Тема: *Методика навчання школярів доведень теорем.*

Мета: засвоєння основних методів доведення теорем, доведення теорем різними способами; вивчення методики навчання учнів доведень теорем: обговорення пропедевтичної роботи вчителя в цьому напряму, виявлення методів і прийомів, які сприяють засвоєнню школярами готових доведень (виділення ідеї, складання плану, таблиць та ін.); навчання самостійному пошуку доведень.

12.1. Основні теоретичні питання,

що мають опанувати студенти до даного заняття

12.1.1. Пропедевтика навчання учнів доведень.

Під навчанням доведень ми будемо розуміти навчання учнів готових доведень, які пропонуються вчителем або авторами підручників, а також навчання самостійному пошуку доведень [157, с. 75].

Проблему навчання доведень доцільно розчленувати на декілька методичних завдань, які розв'язуються послідовно:

1) вивчення готових доведень, уміння відтворювати їх;
2) самостійна побудова доведень за аналогією з вивченим;
3) пошук і виклад доведень способом, указаним учителем;
4) самостійний пошук і проведення учнями доведень математичних речень.

Для успішного навчання учнів доведень необхідно, щоб вони оволоділи достатньо повною системою теоретичних знань і умінь (поняття та їх означення, аксіоми, теореми, уміння виконувати основні побудови та ін.). Бажано, щоб учні володіли елементами математичної логіки (правила висновку, необхідні та достатні умови та ін). Необхідно також оволодіння загальними методами і прийомами розумової діяльності, від яких залежить успішність доведення: *аналізом (аналіз формулювання (умови) теореми, рисунка), синтез (співставлення вимог з умовою), переосмислення елементів задачі та включення їх у нові зв'язки (аналіз через синтез), в процесі виконання яких використовуються порівняння, абстрагування (відволікання від несуттєвих умов), узагальнення (застосування доведеної теореми до всіх можливих випадків).* Додамо, що успішність навчання доведенню учнями теорем залежить від сформованості специфічних, суто математичних методів і прийомів розумової діяльності: підведення під поняття, виведення наслідків, а також від уміння вибирати достатні ознаки.

Підготовка до навчання учнів доведень теорем починається вже в початковій школі, в 5-6 класах, коли, не використовуючи термінів "теорема", "доведення", учні знайомляться з першими твердженнями і роблять перші кроки у виконанні дедуктивних умовиводів.

Курс математики 1-6 класів містить достатньо матеріалу для формування логічної культури учнів, їх уявлення про доведення на досить простих прикладах, але вчителі не завжди ним користуються.

Наприклад:

a	8	9	10	11	12
$2a+5$	21	23	25		

Учні просто рахують і заповняють таблицю. Але можна зроботи і по-іншому: помітити, що якщо a збільшити на 1, то результат збільшиться на 2 і не рахуючи все, заповнити таблицю.

Підготовча робота починається з виховання звички все пояснювати, обґрунтовувати, доводити.

Наприклад: У ч и т е л ь: Чому ти вважаєш, що число 2001 ділиться на 3?

У ч е н ь: Оскільки сума цифр цього числа дорівнює 3. А якщо сума цифр числа ділиться на 3, то і саме число ділиться на 3.

У ч и т е л ь: Чому дріб 4/7 – правильний?

У ч е н ь: Тому що чисельник цього дробу менше знаменника, тому за означенням дріб правильний.

Ці обґрунтування, хоча і найпростіші, але корисні. Крім питань “Чому?” у подібних випадках учитель може сказати: “Поясни, чому це так”, “Обґрунтуй свої твердження”, “Доведи, що це вірно”. Якщо вчитель постійно ставить перед учнями 5-6 класів подібні запитання, то 7-класникам буде легше засвоїти перші доведення геометричних теорем.

12.1.2. Навчання школярів готових доведень.

Цілеспрямоване навчання доведень теорем починається в 7 класі, коли на перших уроках геометрії уводяться поняття “теорема”, “доведення теореми”. Доведення перших теорем учитель проводить сам. Основна мета цих уроків – показати учням конкретні приклади теорем і їх доведень, засвоїти сутність понять “теорема”, “доведення”. Пізніше необхідно звертати увагу учнів на те, що рисунки до теорем можна дати й інші: по-іншому розміщені, з іншими буквеними позначеннями. Вже на цьому етапі навчання можна запропоновувати учням неважкі задачі на доведення, але не треба дивуватись, якщо деякі учні не впораються з ними.

Зазначимо, що *сутність поняття “знати доведення теореми”* складається з двох взаємопов’язаних компонентів – *знати* головну ідею доведення і *уміти* на її основі, думаючи, розмірковуючи, а не пригадуючи, відтворювати конкретне доведення [157].

Розуміння учнями доведень, що пропонуються на уроці вчителем і представлені у підручнику, вміння відтворювати готові доведення теореми або формули – тільки перший, але важливий рівень навчання доведень. Головними моментами у цій роботі є такі:

1. Усвідомлення вихідних положень (даних) і вимог теореми (задачі). Увагу 7-класників треба звертати на те, що в кожній теоремі щось дано, і щось треба довести; при цьому зручно виділяти умову і висновок теореми, якщо вона сформульована в умовній формі. Коротку умову записують у формі "дано - довести".

2. Розуміння основної ідеї і системи розгортання доведення. Ідея виступає в доведенні при його запам'ятовуванні, відтворюванні як деякий стрижень, "ключик", як дуже згорнуте доведення. Запам'ятати його легше, але треба при необхідності вміти його розгорнути, щоб отримати докладне доведення теореми. Для усвідомлення основної ідеї можна ставити класу запитання: "Як краще запам'ятати доведення?", "Що в ньому головне?", "Як його знайти?", "У чому сутність доведення?" та ін. Таким чином складається проблемна ситуація в діяльності учнів.

3. Розуміння методу, яким здійснюється доведення. Ця робота відбувається впродовж багатьох наступних уроків.

4. Виділення основних етапів доведення, чітке усвідомлення всіх аргументів доведення.

Щоб учні краще усвідомлювали структуру доведення теорем або розв'язання задачі на доведення і вчилися обгрунтовувати кожний крок, корисно складати доведення у вигляді таблиці, де в першій колонці міститься ланцюжок тверджень, а в другій – обґрунтування кожного з них.

Деякі доведення вчитель може пояснювати два і три рази, особливо доведення тих теорем, які повинні засвоїти всі учні. Перший раз – дати доведення у загальних рисах, другий – з повною аргументацією кожного кроку, третій – ще раз повторити хід доведення з акцентом на окремих місцях.

Отже, головним, суттєвим при заучуванні теорем є її формулювання, ідея доведення, у більш складних теоремах – план або схема доведення. Можна віднести до головного і метод доведення, якщо він чимось примітний і може слугувати опорним сигналом для розгортання доведення (наприклад, метод від супротивного).

12.1.3. Навчання учнів самостійного пошуку доведень.

Другий, найважливий рівень навчання доведенням – це навчання учнів доводити твердження самостійно. Можна виділити наступні компоненти, що входять в *уміння самостійно доводити теореми і задачі на доведення:*

1) підведення об'єктів під поняття;
2) знання необхідних і достатніх ознак понять, про які йде мова у висновку теореми;
3) вибір ознак понять, що відповідають даним теореми (умові);
4) дія розгортання умови.

2) і 3) компоненти є необхідними для виконання дії підведення під поняття. Крім того, учні повинні навчитися розгортати умову теореми (або задачі на доведення), тобто виводити із умови всі можливі наслідки, отримувати ознаки шуканого поняття.

Щоб навчити учнів дії розгортання умови, варто пропонувати їм такі усні вправи:

1. Дано два суміжні кути *COB* і *BOD*. Що нам тим самим ще дано?
2. З точки *M* виходять два промені *MA* і *MB*. Пряма *CD* перетинає промені в точках *E* і *F*. Кути *AEC* і *BFD*, які при цьому утворилися рівні. Який з цього можна зробити висновок?
3. Відрізки A_1B_1 і A_2B_2 мають спільну середину *O*. Що нам відомо про пари відрізків A_1A_2 і B_1B_2, A_2B_1 і A_1B_2?

Розгортаючи умови, часто доходять висновку, що треба переформулювати висновок теореми або задачі (наприклад, довести, що відрізок є бісектрисою кута трикутника, означає довести, що утворені за допомогою цього відрізка кути рівні). Прийом переформулювання висновку теореми або задачі сприяє формуванню вміння доводити твердження.

Для того, щоб здійснювати вибір ознак понять, що відповідають даним теореми (умові), треба вміти складати набори достатніх умов поняття.

Наприклад, перелічимо достатні умови для доведення рівності відрізків:

1) підведення під означення – показати, що довжини відрізків рівні. Це можна довести координатним методом, або за допомогою скалярного добутку обчислити довжини відповідних векторів;
2) пошук трикутників, куди входять відрізки, що порівнюються, і доведення їх рівності.
3) знаходження руху, який переводить один відрізок у другий;
4) використання властивостей рівності відрізків в деяких фігурах: протилежні сторони паралелограма рівні; діагоналі прямокутника рівні; бічні ребра призми рівні та ін.

Такі набори достатніх умов для підведення під найважливіші поняття накопичуються і систематизуються по мірі вивчення геометрії. Треба записувати їх в зошити і постійно використовувати ці орієнтири під час доведення конкретних теорем. Враховуючи, що достатні умови для визначення деяких понять вивчаються в різних розділах і навіть в різних класах, корисно до однієї і тієї ж самої задачі повертатися декілька разів по мірі вивчення достатніх ознак відповідного поняття. Наприклад, властивість медіани, проведеної з вершини рівнобедреного трикутника до основи, бути висотою, в 7 класі доводиться шляхом підведення під означення перпендикуляра. Після вивчення скалярного добутку векторів до цієї задачі можна повернутися, але підвести вже під умову перпендикулярності векторів. Такий підхід дозволяє співставити різні способи розв’язання, повторити і систематизувати матеріал.

Необхідною умовою правильного вибору потрібної ознаки поняття, під яке підводиться об’єкт, є усвідомлення всіх суттєвих властивостей і ознак. Тому так важливо під час вивчення основних понять та їх відношень з іншими поняттями привести в систему ці властивості та показати можливість їх застосування.

Часто учні не знають, з чого почати розв'язання задачі на підведення під поняття, підбирають не всі достатні умови поняття. Розв'язав задачу одним способом, вони не можуть запропонувати інший, тобто підібрати інші достатні умови поняття, під яке підводиться об'єкт. Учні не можуть розпізнавати задачі такого типу (тобто на підведення під поняття або задачі на розпізнавання) і самостійно знаходити їх розв'язання, оскільки не знають принципа розв'язання таких задач. Наприклад, якщо учнів запитати, чи є щось спільне в способах розв'язання таких задач:

"Доведіть, що функція $y = x^3 + 3$ є зростаючою";

"Доведіть, що бісектриса, проведена із вершини на основу рівнобедреного трикутника, є медіана і висота",

навряд чи хтось із школярів відповість, що так, є, хоча це задачі одного типу і розв'язуються принципово однаково.

Отже, учням треба дати розпізнавальні ознаки таких задач:

1) в умові задачі дається об'єкт (поняття);
2) даний об'єкт володіє деякими властивостями (це наслідки з умови, які можна використовувати, тобто це дія розгортання умови);
3) вимагається віднести цей об'єкт (поняття) до іншого поняття;
4) в переважній більшості це задачі на доведення.

Далі необхідно, щоб учні усвідомили основні етапи розв'язання задач на підведення під поняття. Для цього на перших порах учитель повинен фіксувати увагу учнів на кожному етапі розв'язання:

1) проаналізували умову і зробили рисунок;
2) із вимоги виділили те поняття, до якого необхідно віднести даний об'єкт;
3) пригадали всі істотні властивості того поняття, під яке підводиться об'єкт (дія виведення наслідків) або скористувалися готовим систематизованим набором достатніх умов поняття;
4) склали набір достатніх умов поняття, відібрали ознаку, яка відповідає умові теореми;
5) довели наявність в об'єкті, що підводиться під поняття, достатньої умови;
6) зробили висновок.

Для полегшення застосування схеми до розв'язання однакових за структурою задач на розпізнавання слід узагальнити несуттєве в таких задачах: який об'єкт (поняття) дано в умові задачі, якими конкретними властивостями він володіє. Але суттєво те, що цих властивостей достатньо, щоб виділити основні достатні ознаки поняття.

Усі теореми-ознаки і теореми-властивості – це, по суті, задачі на підведення під поняття. Тому при їх доведенні треба виділяти дві головні ідеї: які достатні умови відповідного поняття і як перевірити виконання достатніх умов.

Приклад: нехай треба довести, що діагоналі ромба є бісектрисами його кутів. Проаналізували умови, зробили рисунок.

У ч и т е л ь: Яке головне поняття міститься у висновку теореми?

У ч е н ь: Бісектриса кута.

У ч и т е л ь: Чи відомі достатні умови поняття “бісектриса кута”?

У ч е н ь: Ні.

У ч и т е л ь: Яка істотна властивість бісектриси кута?

У ч е н ь: Поділяє кут навпіл.

У ч и т е л ь: Тобто утворює два рівних кута. Чи ми знаємо достатні умови рівності кутів?

У ч е н ь: Так (Перелічує).

У ч и т е л ь: Які умову тут зручно обрати?

У ч е н ь: Заключимо кути в трикутники і доведемо рівність трикутників.

У ч и т е л ь: Скільки пар трикутників можна виділити?

І т.д.

В теоремах існування та єдиності доцільно виділяти не ідею, а етапи доведення: на першому етапі доводиться існування фігури шляхом її побудови, на другому доводиться єдиність побудови методом від супротивного.

Також недоцільно виділяти одну ідею при доведення деяких інших теорем, наприклад, теореми Фалеса, коли головним є схема, план міркувань.

Окрім головного в доведеннях теорем, можна виділити головні теореми в кожному розділі, параграфі. Між тим, деякі учні вважають, що всі теореми головні. Проте, головними теоремами в розділах, присвячених вивченню поняття, треба вважати ознаки поняття, що доводяться. Їх доведення зводиться до підведення під означення відповідного поняття. При доведенні інших теорем розділу використовуються означення поняття і ознака поняття, яка булла доведена.

Наприклад, в §17 підручника [137] “Перпендикулярність прямих і площин” основними теоремами є теорема-ознака перпендикулярності прямої і площини і теорема-ознака перпендикулярності площин. Широко застосовується теорема про три перпендикуляри.

На уроках узагальнення і систематизації знань необхідно перевіряти знання учнями узагальнених орієнтирів, ідей, схем, планів доведення, а також уміння розгорнути на їх основі конкретне доведення даної теореми; виділяються головні теореми розділу.

Володіння методами доведення і вміння вибирати потрібний метод – важлива умова для забезпечення самостійного виконання доведення. Щодо навчання учнів самостійному пошуку доведень, то найважливішим є аналітичний метод, навчання якому доцільно проводити у вигляді евристичної бесіди. Бажано надати учням правило-орієнтир застосування аналітичного методу.

По мірі формування в учнів основних компонентів уміння доводити і набуття досвіду виконання доведень можна запропонувати евристичну схему пошуку доведення:

1. Виділити те, що дано в умові і що вимагається довести.

2. Увести всі потрібні позначення. У геометричних теоремах (задачах) насамперед виконати рисунок.
3. Записати умову і висновок теореми (задачі) у символічній формі.
4. Назвати ознаки, потрібні для доведення.
5. Розгорнути умову, тобто, з того, що дано, вивести можливі наслідки.
6. Зіставити з умовами і їхніми наслідками кожну з ознак, за якими можна довести те, що вимагається. Вибрати ознаку, зручну для доведення.
7. Якщо безпосередньо вибрати відповідну ознаку не вдається, подумати, які ще ознаки, потрібні для доведення, можуть бути задані в умові.
8. Постійно пам’ятати, що коли пошук доведення утруднений, треба звертатися до даних і до того, що випливає з даних.

Загалом, при навчанні школярів доведень необхідно звертати увагу на такі організаційні форми роботи:

- Актуалізація, повторення опорних знань (перед доведенням або у процесі доведення). Мотивація, яку можна реалізувати через проблемну ситуацію.
- Аналіз формулювання з метою виділення умови і висновку теореми і запису “дано - довести”.
- Поступове ознайомлення із сутністю дедуктивної системи: аргументи повинні бути істинними, тобто взятими: а) з умови теореми; б) з означення; в) з аксіоми; г) з раніше доведеної теореми (наслідка).
- Усвідомлення ролі рисунка для пошуку доведення: рисунок нічого не доводить, тільки полегшує розуміння і проведення доведення (зорова опора).
- Навчання виділяти головне в доведеннях теорем.
- Закріплення теорем.
- Навчання доведенню через навчання методам доведення; з цією метою введення правил-орієнтирів застосування методів.
- Навчання вмінню складати набори достатніх умов поняття.
- Навчання доведенню у процесі розв’язання задач на доведення.

Наприкінці зазначимо, що вивчення теорем та їх доведень в ШКМ важко переоцінити: вони розвивають логіку мислення учнів, просторові уявлення та уяву, вчать методам доведень, дають змогу засвоїти евристичні прийоми розумової діяльності, формують позитивні якості особистості та ін.

Проте не можна із урока в урок вивчати тільки теореми та їх доведення, оскільки не менш важливими є формування понять, геометричні побудови, розвиток просторового уявлення. Тому не всі теореми, особливо у старших класах, треба пропонувати з доведенням, деякі – розглянути тільки з частиною учнів. Так, <u>наприклад,</u> не треба вимагати від усіх учнів доведення таких теорем, як похідна добутку і частки, теорему про бічну поверхню конуса та ін.

12.2. Зміст практичного заняття №12

1. Перевірка виконання домашнього завдання (25 хв.).
2. Актуалізація опорних теоретичних знань (10 хв.).
3. Різні способи доведення теореми про властивість бісектриси трикутника. Методика роботи над цією теоремою (пояснення викладача) (25 хв.).
4. Методика роботи над першою ознакою рівності трикутників: порівняльний аналіз доведень, запропонованих у підручниках [99] і [137] (сумісна робота) (20 хв.)

12.3. Дидактико-методичні матеріали до практичного заняття №12

12.3.1. Питання до актуалізації опорних теоретичних знань студентів у процесі заняття

1. Що розуміють під навчанням учнів доведень?
2. На які методичні завдання доцільно розчленувати проблему навчання учнів доведень?
3. Охарактеризуйте пропедевтичний етап навчання учнів доведень теорем. Коли його можна розпочинати?
4. З яких двох взаємопов’язаних компонентів складається сутність поняття «знати доведення теореми»?
5. Зазначте головні моменти у роботі вчителя щодо навчання учнів готових доведень.
6. Охарактеризуйте головні компоненти, що входять в уміння учнями самостійно доводити теореми і задачі на доведення.
7. Навіщо учням знати набори достатніх умов поняття? Охарактеризуйте методику роботи вчителя по складанню з учнями достатніх умов понять.
8. Що лежить в основі різних способів доведення теорем?
9. Які основні етапи розв’язання задач на підведення під поняття?
10. Надайте евристичну схему пошуку доведень, яку можна було б запропонувати учням.
11. На які організаційні форми роботи варто звернути увагу при навчанні школярів доведень?

12.3.2. Методика роботи з теоремою про властивість бісектриси трикутника

Теорема: *Бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.*

Розглянемо декілька способів доведення цієї теореми.

І спосіб доведення

Нехай дано $\Delta\, ABC$ і BD – бісектриса кута B (рис. 12.1.).

Доведемо, що $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$.

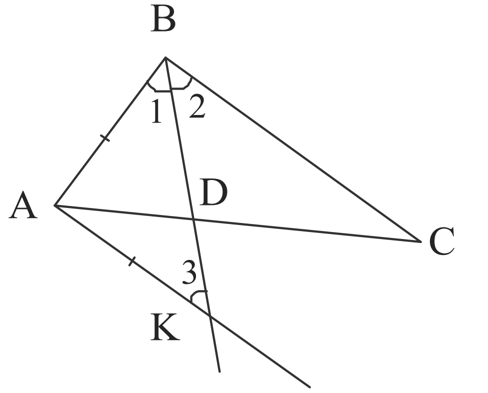


Рис. 12.1

Проведемо пряму, паралельну BC, що проходить через точку A. Продовжимо бісектрису BD до перетину з цією прямою в точці K. Оскільки ∠1=∠2=∠3, то $\Delta\, KAB$ - рівнобедрений, і тому AB=AK.

$\Delta ADK \sim \Delta CDB$ (за двома кутами), тому $\frac{AK}{BC} = \frac{AD}{DC}$ або $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$. Що і необхідно було довести.

Запитання до студентів:

- Яким методом проведено доведення? Чи можливо застосувати вихідний аналіз при роботі з учнями над доведенням цієї теореми?

ІІ спосіб доведення

Нехай дано $\Delta\, ABC$ і AL – бісектриса кута A (рис. 12.2.).

Доведемо, що $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$.

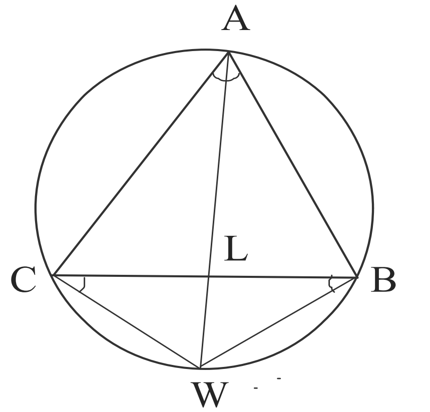


Рис. 12.2

Застосуємо допоміжне коло. Опишемо його навколо $\Delta\, ABC$.

Продовжимо бісектрису AL до перетину з колом в точці W. Розглянемо дві пари подібних трикутників: $\Delta ALB \sim \Delta CLW$; $\Delta ALC \sim \Delta BLW$ (за двома кутами). Тоді: $\frac{AB}{CW} = \frac{BL}{WL}$ (1); $\frac{AC}{WB} = \frac{CL}{LW}$ (2).

Поділимо (1) на (2); враховуючи, що CW=WB (оскільки $\Delta\, CWB$ рівнобедрений за ознакою), маємо: $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$. Що і необхідно було довести.

Запитання до студентів:

- Яку додаткову побудову використано для доведення цієї теореми? Яке правило-орієнтир застосування цієї додаткової побудови можна дати учням?

Примітка. Ще два способи доведення цієї теореми розглянуто на практичному занятті №13.

Як можна організувати вивчення теореми-властивості бісектриси трикутника з учнями?

На етапі підготовчої роботи до вивчення цієї теореми можна запропонувати таку задачу:

Задача. Дано трикутник FKP, в якому проведено бісектрису трикутника FN, причому FK=6 см, FP=8 см, NP=4см. Знайти довжину сторони KP.

Для вирішення цієї задачі учням не вистачає теоретичних фактів, таким чином створюється проблемная ситуація, і вчитель повідомляє учням, що на цьому уроці ми вивчимо властивість бісектриси трикутника, завдяки якій така задача просто вирішується (відтак, формується відповідна мотивація).

На етапі роботи з формулюванням теореми учні за допомогою вчителя намагаються переформулювати теорему в умовній формі (*Якщо в трикутнику проведено бісектрису, то вона поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам*), виокремлюючи, що дано і що треба довести. Хтось із учнів на дошці виконує рисунок і записує коротку умову.

На етапі роботи з доведенням теореми вчитель, застосовуючи висхідний аналіз і звертаючись із навідними запитаннями до класу, проводить доведення і робить необхідні записи на дошці, учні їх фіксують в зошитах (пропонується довести теорему *І способом*, проводячи через вершину трикутника пряму, паралельну протилежній стороні трикутника).

На етапі закріплення доведення теореми дехто з учнів намагається його відтворити на дошці за зміненим рисунком, з іншими буквеними позначеннями.

На етапі закріплення теореми вчитель повертається до задачі, з якої починали вивчення теореми. Далі, в якості теоретичної частини домашнього завдання можна запропонувати більшості учнів опрацювати доведення, представлене у підручнику [32, с. 136], а деяким учням класу, хто цікавиться математикою, запропонувати довести цю теорему *II способом*, застосовуючи допоміжне коло (таким чином відбувається реалізація диференційованого та індивідуального підходів до навчання математики). На наступному уроці ці два нових способи доведення даної теореми будуть розглянуті (таким чином реалізується мета теми – вирішується якомога більше задач на застосування подібності трикутників; підвищується інтерес до доказових міркувань; теорема, що розглядається, добре фіксується в пам'яті).

На подальших уроках буде напрацьовуватися практика застосування цієї теореми до розв'язування задач різного рівня складності.

12.3.3. До методики роботи над першою ознакою рівності трикутників

Указівки до проведення порівняльного аналізу доведень, представлених у підручниках [137] і [99]:

1) Проаналізувати доведення першої ознаки рівності трикутників за підручником [137, с. 32]. Зробити висновки щодо доступності такого доведення для учнів.
2) Ознайомитися з *прийомом складання таблиць у процесі роботи над доведенням,* вивчивши таблицю 5.2. за підручником [157, с.77] для доведення першої ознаки рівності трикутників. Відповісти на запитання: яка мета складання такої таблиці з учнями, особливо на *перших уроках геометрії?*
3) Проаналізувати доведення першої ознаки рівності трикутників за підручником [99, с. 62].
4) Виконавши логіко-дидактичний і логіко-математичний аналіз попереднього матеріалу за підручниками [137] і [99], відповісти на запитання: у чому причина застосування авторами підручників різних підходів до доведення цієї теореми?

12.4. Домашнє завдання

1. Доведіть координатним методом, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки кола до всіх вершин описаного квадрата є величина стала.
2. Складіть набір достатніх умов таких понять:
    5) «паралельні прямі»;
    6) «рівність кутів»;
    7) «ромб».
3. Методика роботи над теоремою Фалеса (за п’ятьма основними етапами: 1) підготовча робота (мотивація, експеримент, дослідження тощо); 2) робота з формулюванням теореми; 3) робота з доведенням; 4) закріплення доведення; 5) закріплення теореми). Оформіть як конспект фрагменту уроку з вказівкою на те, скільки часу відводиться на таку роботу. Запропонуйте різні способи доведення цієї теореми.

12.5. Література

Основна: [13], [15], [32], [45], [99], [107], [149], [156], [157], [169], [173].
Додаткова: [9], [61], [76], [80], [88], [94], [105], [111], [117], [170].

12.6. Аналіз практичного заняття №12 з точки зору формування у студентів нормативної, варіативної та проектувально-моделювальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Нормативна складова

У процесі практичного заняття №12 майбутні вчителі математики набувають досвіду користування номативними документами, звертаючись до програм з математики, зокрема геометрії 7 і 8 класів; знань і умінь реалізовувати цілі і завдання навчання математики в основній школі.

Варіативна складова

На практичному занятті, що розглядається, студенти одержують знання щодо методичних систем, які реалізуються в різних підручниках з геометрії, проводять порівняльний аналіз викладу матеріалу за цими підручниками, виконуючи їх логіко-дидактичний і логіко-математичний аналіз, набувають досвіду аналізування чинних підручників.

Проектувально-моделювальна складова

У процесі даного заняття у майбутніх фахівців формуються знання і вміння застосовувати прийоми організації діяльності учнів, у тому числі при роботі з теоремами, включаючи самостійну роботу учнів, керувати цією діяльністю; студенти вчаться добирати необхідні засоби, форми і методи навчання учнів математики, що відповідають поставленій меті і завданням уроку з планімерії.

Практичне заняття №13

Тема: *Методика навчання школярів доведень теорем. Різні способи доведення теорем: методичний аспект.*

Мета: засвоєння основних методів доведення теорем, доведення теорем різними способами; вивчення методики навчання учнів доведенню теорем: організаційні форми роботи, що застосовуються вчителем, навчання учнів готовим доведенням, навчання самостійному пошуку доведень.

13.1. Теоретична передмова

*Обґрунтуємо з методичної точки зору, з чим може бути пов'язане подання вчителем **різних способів доведення теорем** на уроках математики.*

1. З підвищенням інтересу до доказових міркувань. Тоді доведення різними способами може відбуватися на одному уроці або інший спосіб може бути поданий для розбору додому, у тому числі як самостійний пошук доведення (за готовим рисунком або без підказки).
2. У зв'язку з вивченням нової теми задля її закріплення можна подати інший спосіб доведення теореми, що вже була розглянута на попередніх уроках, або навіть у попередніх класах.
3. Для закріплення даної теореми, оскільки доведення цієї ж теореми іншим способом є одним із способів такого закріплення.
4. Для реалізації диференціації навчання як спосіб врахування індивідуальних можливостей учнів.
5. І, насамперед, як дієвий засіб логічного розвитку учнів, оскільки зазвичай різні способи доведення теорем засновані на використанні різних достатніх умов того чи іншого поняття.

13.2. Зміст практичного заняття №13

1. Перевірка виконання домашнього завдання (20 хв.).
2. Різні способи доведення теорем (включаючи самостійне їх доведення учнями): методичне обґрунтування, обговорення конспектів фрагментів уроків (представлено роздрукований текст) (сумісна робота) (30 хв.).
3. Методика роботи над теоремою Вієта (самостійна робота студентів на занятті навчального характеру з наступним обговоренням) (30 хв.).

13.3. Дидактико-методичні матеріали до практичного заняття №13

13.3.1. До перевірки домашнього завдання

Систематизуємо, наприклад, способи, якими можна довести, що прямі паралельні (набір достатніх умов поняття «паралельні прямі»):

1) застосовуючи метод від супротивного;
2) за допомогою ознак паралельності прямих (пов'язаних із відповідними, односторонніми і різносторонніми кутами);
3) використовуючи умову колінеарості векторів: $\vec{a}||\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$;
4) застосовуючи властивості деяких фігур мати паралельні відрізки: протилежні сторони паралелограма, середня лінія трикутника і його сторона, середня лінія трапеції і основи трапеції, бічні ребра призми та ін.;
5) використовуючи алгебраїчні умови паралельності прямих: $l_1 \,||\, l_2$, якщо:

   а) система їх рівнянь немає розв'язків, або

   б) система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ така, що $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, або

   в) рівняння цих прямих $y_1 = k_1x + b_1$, $y_2 = k_2x + b_2$, причому $k_1 = k_2$, а $b_1 \neq b_2$.

Запитання до студентів:

- В яких класах вперше вводиться кожний із зазначених способів доведення паралельності прямих?

13.3.2. Конспект фрагменту уроку з вивчення теореми про площу чотирикутника

<u>Проілюструємо на прикладах кожний із зазначених напрямів подання вчителем *різних способів доведення теорем* на уроках планіметрії.</u>

Розглянемо різні способи доведення ***теореми***: *Площа чотирикутника дорівнює півдобутку діагоналей на синус кута між ними.*

Дану теорему доцільно доводити двома способами: учні таким чином акцентують увагу на цій теоремі, краще її запам’ятовують і вразі необхідності відтворюють і застосовують під час розв’язання задач.

І спосіб доведення.

Учитель: Скористаємося тим, що ми маємо в формулюванні теореми.

Учні: Згідно умови, маємо довільний чотирикутник, в якому знаємо довжини його діагоналей та кут між ними (рис. 13.1):

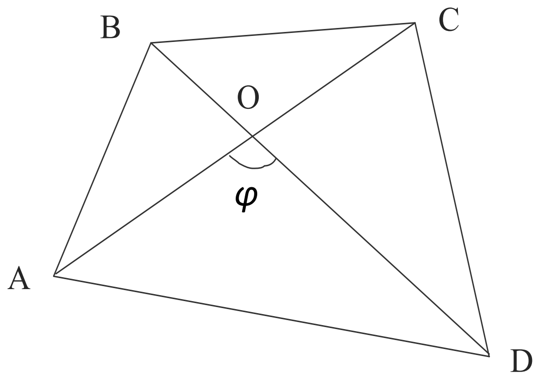


Рис.13.1

Учитель: Що ж нам треба довести?

Учні: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.

Учитель: Площі яких фігур ми вже знаємо, як знаходити?

Учні: Ми знаємо як знаходяться площі трикутників.

Учитель: Які маємо трикутники завдяки проведеним діагоналям?

Учні: $\varDelta ABO,\ \varDelta BCO,\ \varDelta CDO,\ \varDelta DAO$.

Учитель: Як доцільно знайти площі цих трикутників (можна перелічити всі відомі способи)?

Учні: За двома сторонами і кутом між ними.

Учитель: І вже сума площ цих трикутників дасть площу чотирикутника. Так як $\angle AOD = \varphi,$ то чому дорівнює $\angle AOB$?

Учні: $\angle AOB = 180^0 - \varphi$.

Учитель: Позначимо $S_{1,}\ S_{2,}\ S_3, S_4$ відповідно площі трикутників $\varDelta ABO$, $\varDelta BCO,\ \varDelta CDO,\ \varDelta DAO$. S - площа чотирикутника $ABCD$.

Учні: Отже $S = S_1 +\ S_2 +\ S_3 + S_4$.

Учитель: Так як $\sin(180^0 - \varphi) = \sin\varphi$, то як можна виразити площі трикутників?

Учні: $S_1 = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin(180^0 - \varphi) = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin\varphi$;

$S_2 = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin\varphi$;

$S_3 = \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin(180^0 - \varphi) = \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin\varphi$;

$S_4 = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin\varphi$.

Учитель: Що тепер необхідно зробити?

Учні: Знаходимо суму площ: $S = \frac{1}{2}\sin\varphi\,(AO \cdot OB + +BO \cdot OC + CO \cdot$ *OD+AO·OD=12*sin*φ(AOOB+OD+OC(BO+OD))=12((OB+OD)·(AO+OC))*sin *φ=12BD·AC*sin*φ.*

Теорему доведено.

Для підвищення інтересу до доказових міркувань учням можна запропонувати довести цю ж теорему вдома іншим способом. Вчитель, щоб наштовхнути на ідею доведення, може надати готовий рисунок (рис. 13.2).

II спосіб доведення.

Проведемо висоти BE і DK у трикутниках ABC і ADC (рис. 13.2).

Тоді: $S = \frac{1}{2}AC \cdot BE + \frac{1}{2}AC \cdot DK = \frac{1}{2}AC \cdot BO \sin\varphi + \frac{1}{2}AC \cdot DO \sin\varphi =$
$= \frac{1}{2}AC \sin\varphi\,(BO + OD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\varphi.$

На наступному уроці можна разом з учнями обговорити ці два способи доведення теореми та зробити порівняльний аналіз (повторюючи різні способи знаходження площі трикутників).

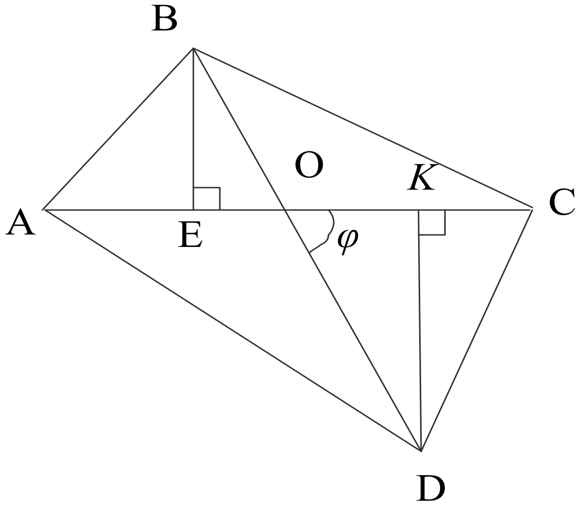


Рис. 13.2

13.3.3. Конспект фрагменту уроку з вивчення теореми косинусів

Теорема: *Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними.*

І спосіб доведення

Учитель: З'ясуємо умову теореми та визначимо, що дано.

Учні: Довільний $\triangle ABC$, дві сторони та кут між ними.

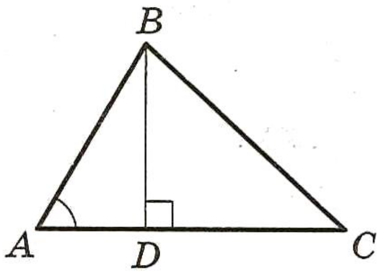


Рис. 13.3

Учитель: Розглянемо $\triangle ABC$. Доведемо, наприклад, що $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A$ (рис. 13.3).

Учитель: Чи обов'язково $\angle A$ гострий?

Учні: Ні. Можливі три випадки:

1. Кут A– гострий;
2. Кут A– тупий;
3. Кут A– прямий.

Учитель: Розглянемо перший випадок: якщо $\angle A < 90^0$, то який висновок ми можемо зробити про градусну міру кутів B і C?

Учні: Хоча б один з кутів B і C – гострий.

Учитель: Нехай, наприклад $\angle C < 90^0$. З яких трикутників ми вміємо за відомими елементами визначити невідомі?

Учні: З прямокутних трикутників.

Учитель: Тоді проведемо висоту BD. Як ми можемо визначити BD?

Учні: З ΔABD маємо: $BD = AB \cdot \sin \angle A$, $AD = AB \cdot \cos \angle A$.

Учитель: Як тепер можна знайти шукану сторону BC?

Учні: З ΔBDC отримуємо:

$BC^2 = BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC - AD)^2 =$

$= AB^2 \cdot sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$

$= AB^2 \cdot sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot cos^2 A =$

$= AB^2 \cdot (sin^2 A + cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$

$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

Учитель: А що буде, якщо $\angle C \geq 90^0$?

Учні: Тоді $\angle B < 90^0$, і ми проводимо висоту ΔABC з вершини C. Доведення буде аналогічним.

Для випадку, коли $\angle A$ - тупий можна запропонувати учням прочитати доведення за підручником (або довести теорему самостійно).

Проведемо висоту BD трикутника ABC (рис. 13.4).

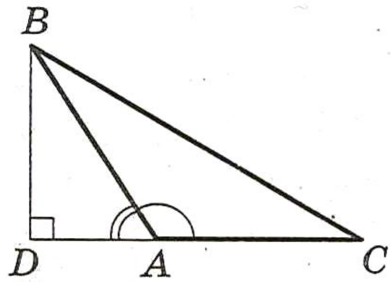


Рис. 13.4

З ΔABD маємо: $BD = AB \cdot \sin \angle BAD = AB \cdot \sin(180^0 - \angle BAC) = =$ AB·sin$\angle BAC$, AD=AB·$cos\angle BAD$=AB·cos $1800-\angle BAC$=

$= -AB \cdot \cos \angle BAC$.

З ΔBDC маємо: $BC^2 = BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC + AD)^2 =$

$= AB^2 sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 =$

$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$.

II спосіб доведення.

В курсі геометрії 9 – го класу під час вивчення теми «Вектори на площині» задля закріплення основних відомостей, що вивчаються в межах цієї теми можна подати доведення вже відомої учням теореми косинусів, але іншим методом – векторним.

Учитель: Спробуємо довести теорему косинусів векторним методом. Як ми можемо знайти вектор $\overrightarrow{AB}$?

Учні: За правилом трикутника $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Учитель: Отже чому дорівнює шуканий вектор $\overrightarrow{BC}$?

Учні: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Учитель: Так як нам треба знайти $\overrightarrow{BC}^2$, то розглянемо рівняння $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$.

Так як $\overrightarrow{AB}^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2, \overrightarrow{AC}^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2, \overrightarrow{BC}^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$,

$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$.

В результаті отримуємо: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos\angle A$.

Даний фрагмент уроку може бути використаний як для повторення теореми косинусів, так і для закріплення теми «Вектори». Векторний метод доведення цієї теореми є більш раціональним, що може слугувати додатковою мотивацією до вивчення теми «Вектори».

13.3.4. Конспект фрагменту уроку з вивчення теореми про суму кутів трикутника

Одна з найважливіших ***теорем*** курсу геометрії 7-го классу: *Сума кутів трикутника дорівнює 180°*. Доведення цієї теореми кількома способами забезпечує її закріплення.

Учитель: Зобразіть довільний трикутник ABC і виміряйте за допомогою транспортиру, чому дорівнює сума його кутів.

Учні: 180°.

Учитель: Спробуємо висунути гіпотезу: чому ж дорівнює сума кутів будь-якого трикутника?

Учні: Вона дорівнює 180°.

Учитель: Перевіримо нашу гіпотезу за допомогою паперової моделі трикутника.

Учням роздаються паперові трикутники (у всіх різні). На дошці вішається плакат (або рисунок демонструється на екрані) (рис. 13.5).

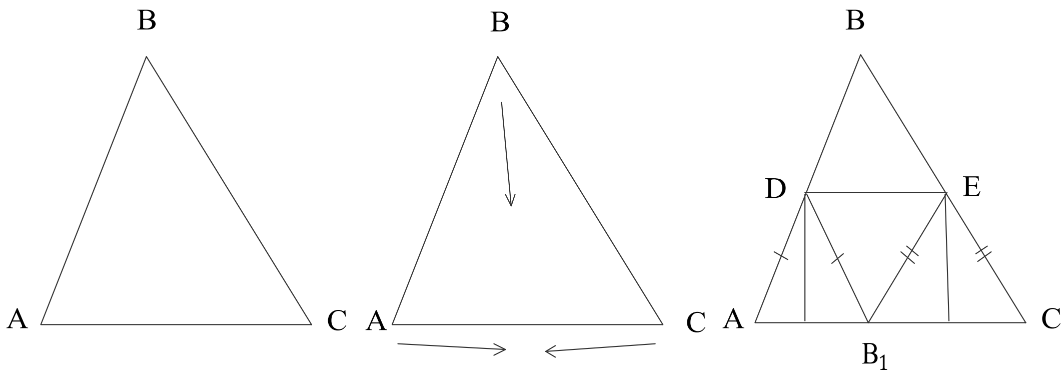


Рис. 13.5

I спосіб доведення

Учитель: Дивлячись на плакат, складаємо трикутник таким чином, щоб вершина B належала тепер стороні AC (точка B перемістилась в точку B_1), а лінія згинання була паралельна AC, тобто $DE \parallel AC$.

Трикутники $\triangle BDE$ і $\triangle B_1DE$ – рівні за трьома сторонами. Отже $\angle B = \angle B_1$, $\angle BDE = \angle B_1DE$, $BED = B_1ED$.

Так як $DE \parallel AC$, то $\angle EDB_1 = \angle AB_1D$ (як внутрішні різносторонні кути). З іншого боку $B_1AD = \angle EDB$ (як відповідні кути при паралельних прямих $AC\ i\ DE$ і січній AD. Тому $\angle DAB_1 = \angle AB_1D$ (тобто за ознакою $\triangle ADB_1$– рівнобедрений, і AD можна сумістити з DB_1).

Аналогічно доводиться, що $\angle ECB_1 = \angle EB_1C$.

Отже кути $\angle DB_1E + \angle AB_1D + \angle CB_1E = 180^0$ (оскільки $\angle AB_1C$ – розгорнутий).

Значить сума кутів і вихідного (довільного) трикутника дорівнює 180^0. Значить, наша гіпотеза підтвердилася.

Теорему доведено.

II спосіб доведення

Учитель: Запишемо, що дано в теоремі?

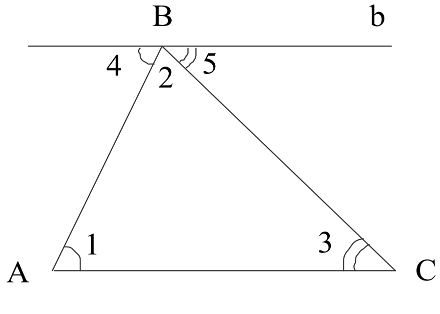


Рис. 13.6

Учні: Нам дано $\triangle ABC$, кути $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ – внутрішні кути трикутника (рис. 13.6).

Учитель: Що треба довести?

Учні: Нам треба довести, що ∠1+∠2+∠3=180°.

Учитель: Ми знаємо, що градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°. Спробуємо скористатися цим фактом. Проте розгорнутого кута ми не маємо, тому проведемо пряму через вершину B трикутника $\triangle ABC$, яка буде паралельною AC, тобто $b \parallel AC$.

Учитель: Знаючи, що $b \parallel AC$ і AB – січна, що можна сказати про кути 1 і 4?

Учні: Вони рівні (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих a і AC і січній AB. Аналогічно, кути 3 і 5 також рівні.

Учитель: Який кут утворюють (за аксіомою вимірювання кутів) кути 4, 2 і 5?

Учні: Розгорнутий.

Учитель: Отже, який висновок можна зробити?

Учні: Так як $\angle 4 = \angle 1,\ \angle 5 = \angle 3$, то сума кутів трикутника ABC дорівнює 180°, тобто ∠1+∠2+∠3=180.

Теорему доведено.

13.3.5. Конспект фрагменту уроку з вивчення теореми про середню лінію трапеції

Даний фрагмент уроку демонструє можливості диференційованого навчання при вивченні теореми про середню лінію трапеції у 8 класі.

Теорема: *Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.*

I спосіб доведення

Учитель: Чи зустрічалися ми з поняттям «середня лінія»?

Учні: Так, коли вивчали середню лінію трикутника.

Учитель: Якими властивостями володіє середня лінія трикутника?

Учні: Вона дорівнює половині основи та паралельна їй.

Учитель: Спробуємо довести дану теорему, використовуючи вже доведене твердження щодо середньої лінії трикутника.

Нехай MN – середня лінія трапеції ABCD (рис. 13.7). Що нам треба довести?

Учні: MN∥AD і $MN = \frac{BC+AD}{2}$.

Учитель: Чи маємо ми трикутник, в якому б відрізок MN був середньою лінією трикутника (щоб далі стверджувати, що $MN \parallel AD$)?

Учні: Ні, не маємо.

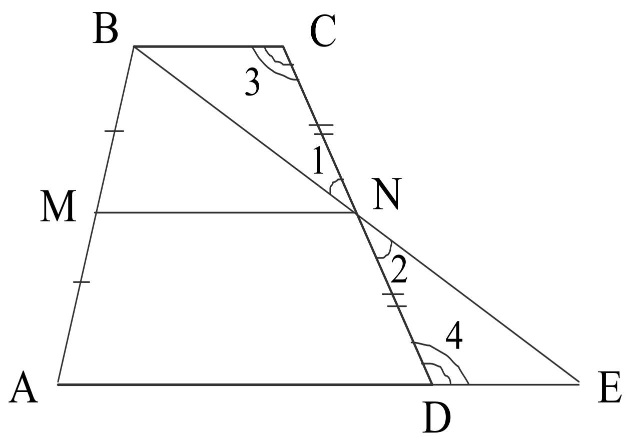


Рис. 13.7

Учитель: Тоді проведемо пряму BN і точку її перетину з прямою AD позначимо E. Спробуємо довести що MN – середня лінія трикутника $ABE,$ іншими словами, треба довести, що $BN = NE$ ($AM = MB$ за умовою). Яким способом ми найчастіше доводимо рівність відрізків?

Учні: Застосовуючи рівность трикутників.

Учитель: Які трикутники доцільно розглянути?

Учні: Розглянемо трикутники NCB і $NDE.$

Учитель: Так як N – середина відрізка CD, то CN = ND. Що ви можете сказати про кути 1 і 2, 3 і 4?

Учні: Кути 1 і 2 – рівні як вертикальні, а кути 3 і 4 – рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AE і січній CD.

Учитель: Тоді, що можна сказати про трикутники NCB і NDE?

Учні: Вони рівні за другою ознакою рівності трикутників.

Учитель: Що з цього випливає?

Учні: BC = DE, BN = NE. Значить відрізок MN – середня лінія трикутника ABE. З цього випливає, що MN∥AE, тобто MN∥ AD і $MN = \frac{1}{2}AE.$

Учитель: А як прийти до необхідної рівності?

Учні: $MN = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC).$

Враховуючи індивідуальні можливості учнів, можна запропонувати для розгляду вдома інший спосіб доведення цієї теореми, який є менш очевидним і потребує деякої здогадки.

ІІ спосіб доведення

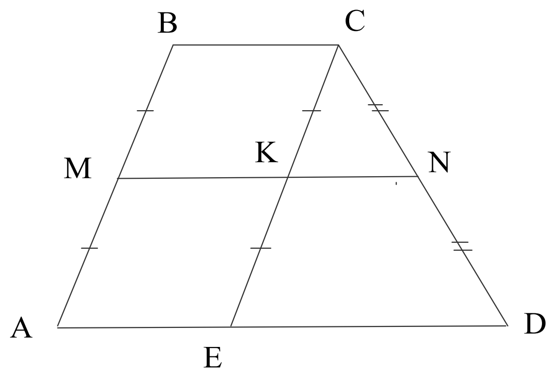


Рис. 13.8

Учитель: Проведемо CE || AB. Далі проведемо через точку N пряму $KN \parallel ED$ (рис. 13.8). Якими будуть відрізки CK і KE?

Учні: Рівними.

Учитель: На підставі чого це можна стверджувати?

Учні: За теоремою Фалеса.

Учитель: Отже, KN – середня лінія трикутника ECD за означенням. Значить, KN || ED.

Що ви можете сказати про чотирикутник $ABCE$?

Учні: Він є паралелограмом, так як $BC \parallel AE$ – за властивістю трапеції, $AB \parallel CE$ – за побудовою.

Учитель: А чотирикутник $MBCK$?

Учні: Він також є паралелограмом за ознакою (дві протилежні сторони паралельні і рівні).

Учитель: Отже, ми отримали , що $MK \parallel BC \parallel AD$ (дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою).

Виходить, що $KN \parallel AD$ $і$ $MK \parallel AD$ також. Ми отримали, що через одну точку проходять дві прямі паралельні даній. Чи це можливо?

Учні: Ні.

Учитель: З чого це слідує?

Учні: Це слідує з аксіоми паралельних прямих.

Учитель: Який висновок можна зробити?

Учні: Прямі KN і MK співпадають.

Учитель: Тобто точка $K \in MN$ і значить MN || AD. Доведемо другу частину теореми.

Оскільки KN є середньою лінією трикутника ECD, то $KN=\frac{1}{2}ED$.

Тоді: $MN = MK + KN = MK + \frac{1}{2}ED =$

$= BC + \frac{1}{2}ED = AE + \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}(2AE + ED) = \frac{1}{2}(AE + ED + BC) =$

$= \frac{1}{2}(AD + BC).$

Теорему доведено.

13.3.6. Конспект фрагменту уроку з вивчення теореми про властивість бісектриси трикутника

Під час доведення цієї теореми розвивається логічне мислення та здатність учнів до доказових міркувань, оскільки різні способи доведення теореми засновані на використанні різних достатніх умов поняття.

Теорема: *Бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.*

I спосіб доведення

Учитель: Що нам дано за умовою теореми?

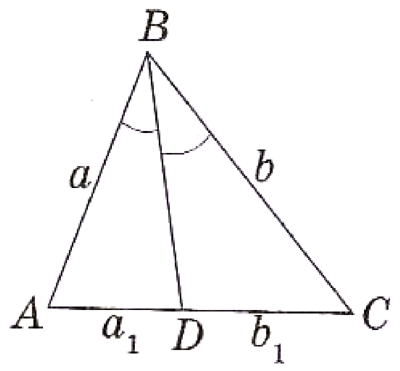


Рис. 13.9

Учні: BD - бісектриса ΔABC (рис. 13.9).

Учитель: А що нам треба довести?

Учні: Треба довести, що $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Учитель: Якщо б у нас ΔABC був рівнобедрений, чи могли б ми одразу стверджувати, що наше твердження очевидне?

Учні: Так.

Учитель: Чому ви так вважаєте?

Учні: Тому що в цьому випадку $AB = BC$, і бісектриса BD водночас була б і медіаною.

Учитель: Але у нас ΔABC довільний, тому розглянемо випадок, коли $AB \neq BC$.

Отже, треба довести, що вірна пропорція $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$. З яких фактів можна дістати пропорцію?

Учні: Наприклад, з подібності трикутників.

Учитель: Чи є на рисунку подібні трикутники?

Учні: Ні, немає.

Учитель: Проведемо перпендикуляри $AE\ i\ CF$ до прямої BD (рис. 13.10). Подібність яких трикутників можна довести?

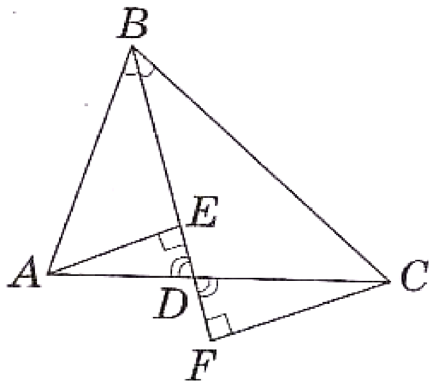


Рис. 13.10

Учні: $\triangle ADE$ *і* $\triangle CDF$. Вони подібні як прямокутні трикутники з рівними гострими кутами (кути при вершині D рівні як вертикальні).

Учитель: Яку пропорцію маємо з подібності цих трикутників?

Учні: $\frac{AE}{CF} = \frac{AD}{DC}$.

Учитель: Добре, але цього не достатньо. Чи є ще за рисунком подібні трикутники?

Учні: Так, $\triangle ABE \sim \triangle CBF$.

Учитель: На основі чого ви це стверджуєте?

Учні: Так як ці трикутники мають рівні гострі кути при вершині В.

Учитель: Яку ж пропорцію ми одержуємо?

Учні: $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{CF}}$.

Учитель: Який висновок робимо?

Учні: Із двох пропорцій одержуємо те, що треба довести: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Теорему доведено.

II спосіб доведення

Учитель: Що нам дано за умовою теореми?

Учні: Нам дано $\triangle ABC$ (рис. 13.11).

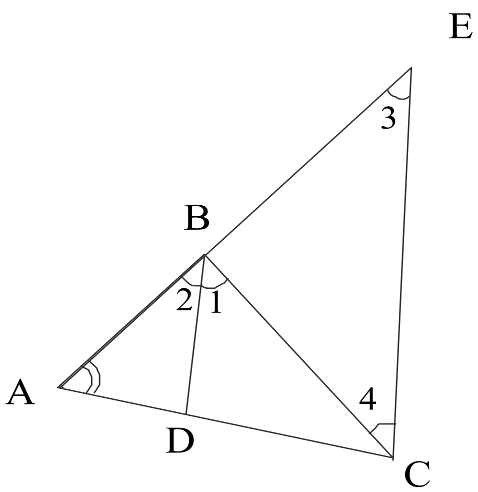


Рис. 13.11

Учитель: Що нам треба довести?

Учні: Треба довести, що $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Учитель: Тобто, що така пропорція вірна. З яких теоретичних фактів, окрім подібності трикутників, можна одержати пропорцію?

Учні (або сам вчитель): Теорема про пропорційні відрізки (узагальнена теорема Фалеса): паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на сторонах цього кута пропорційні відрізки.

Учитель: Через вершину С $\triangle ABC$ проведемо пряму, паралельну DB і точку перетину з продовженням сторони AB позначимо точкою Е (тобто кут А перетинають паралельні прямі BD і EC). Яку можна скласти пропорцію за теоремою про пропорційні відрізки?

Учні: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE}$.

Учитель: Відношення $\frac{AD}{DC}$ у нас є, але немає $\frac{AB}{BE}$. Якщо б BE дорівнювало BC, то ми би одразу могли стверджувати, що теорема вірна. Отже, задача зводиться до чого?

Учні: Довести рівність відрізків BC *і* BE.

Учитель: Ці відрізки є сторонами $\triangle CBE$. Висуваємо припущення: $\triangle CBE$ - рівнобедрений. Як довести? Яку доречно застосувати ознаку?

Учні: Якщо у трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.

Учитель: Які це можуть бути кути?

Учні: $\angle BCE$ і $\angle BEC$.

Учитель: Рівність яких кутів, дивлячись на рисунок, вже очевидна?

Учні: $\angle 2 = \angle 1$ - за умовою.

Учитель: А що ви можете сказати про кути $\angle 2$ *і* $\angle 3$?

Учні: Вони також рівні, як відповідні кути подібних трикутників $\triangle DAB$ *і* $\triangle CAE$.

Учитель: Тобто $\angle 1 = \angle 3$. А що ми можемо сказати про кути 1 і 4?

Учні: Вони також рівні, як внутрішні різносторонні при паралельних прямих BD і CE і січній BC.

Учитель: Отже з цього слідує, що $\angle 4 = \angle 3$. Ми отримали, що $\triangle CBE$ - рівнобедрений, тому $BC = BE$ за означенням. Звідси випливає, що $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

Теорему доведено.

13.4. Домашнє завдання

1. Узагальніть організаційні форми роботи з теоремою (на кожному п'яти етапів, наприклад: способи роботи з доведенням, прийоми закріплення теореми, прийоми етапу мотивації тощо).
2. Складіть розгорнутий конспект позакласного заходу з математики, мета якого – підвищити інтерес учнів до доказових міркувань і до різних способів доведення теорем шкільного курсу математики.

13.5. Література

Основна: [15], [32], [33], [38], [45], [76], [87], [99], [100], [101], [111], [149], [156], [157], [169], [170], [173].
Додаткова: [9], [61], , [80], [88], [94], [105].

13.6. Аналіз практичного заняття №13 з точки зору формування у студентів нормативної, варіативної та проектувально-моделювальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Нормативна складова

У процесі практичного заняття №13 відбувається відпрацювання змісту шкільного курсу математики за рахунок роботи з теоремами; відтак студенти мають необхідність звертатися до програм з математики, зокрема до програми з геометрії 7-9 класів для уточнення деяких фактів, набуваючи досвіду користування нормативними документами. Також на даному занятті майбутні вчителі математики вчаться реалізовувати цілі і завдання навчання математики в основній школі у процесі навчання учнів доведень теорем.

Варіативна складова

На практичному занятті, що розглядається, студенти одержують знання щодо реалізації змісту програм з математики до певного року навчання в чинних підручниках, зокрема до 7-9 класів за підручниками планіметрії різних авторських колективів, виконуючи порівняльний аналіз щодо послідовності викладу та методичних особливостей вивчення деяких теорем, набуваючи професійно-значущих умінь, навичок і досвіду.

Крім того, у процесі виконання домашнього завдання до даного практичного заняття майбутні фахівці вчаться складати розгорнутий конспект позакласного заходу з математики з певною метою, враховуючи знання особливостей організації позакласних заходів з математики.

Проектувально-моделювальна складова

Розглядаючи різні способи доведення теорем шкільної планіметрії на практичному занятті №13 мабутні вчителі математики одержують знання щодо прийомів організації розумової діяльності учнів і керування цією діяльністю. Студенти вчаться проектувати і аналізувати фрагменти уроків з метою доведення теорем шкільної планіметрії різними способами; при цьому в них формуються спеціальні дидактичні та методичні уміння.

Практичне заняття №14

Тема: *Задачі у навчанні математики.*

Мета: обговорення ролі та функцій задач з математики; вивчення видів математичних задач; формування вмінь і навичок оцінювання розв'язання задач, характеру помилок, застосованого методу розв'язання тощо; визначення методичних особливостей навчання учнів розв'язування математичних задач.

14.1. Основні теоретичні питання,
що мають опанувати студенти до даного заняття

14.1.1. Поняття «задача» і роль задач у навчанні математики.

У психолого – педагогічній літературі немає єдиного трактування поняття "задача". Автори по-різному трактують це поняття - залежно від підходу до зв'язку між суб'єктом і задачею.

У кібернетиці, дидактиці і методиці навчання математики ***задача трактується як ситуація зовнішньої діяльності, яка пропонується у відриві від суб'єкта діяльності.*** *Тому здебільшого задача тут трактується як будь-яка вимога обчислити, перетворити що-небудь, побудувати або щось довести.* У шкільній практиці до задач у широкому розумінні відносять не лише текстові, сюжетні задачі, а й різного характеру вправи, приклади.

У математиці задачі відіграють дуже важливу роль. Історія свідчить, що математика як наука виникла із задач і розвивається в основному для розв'язування задач. Найдавніші єгипетські математичні папіруси – це збірки задач. У них немає яких-небудь загальних правил, а є тільки розв'язання деяких задач на обчислення. Те саме можна сказати про російські математичні рукописи XVII-XVII ст.

Задачі стимулювали не лише виникнення, а й подальший розвиток математичної науки. Задачі, поставлені життям, примушували вчених розробляти нові алгоритми, виявляти нові закономірності, створювати нові методи дослідження. Прикладом можуть слугувати методи диференціального та інтегрального обчислення. І тепер математика розвивається в основному через розв'язування задач.

У навчанні математики задачі є і об'єктом вивчення, і засобом навчання. У навчальному процесі математичні задачі відіграють також важливу роль.

По-перше, розв'язуючи задачі, учні вчаться застосовувати набуті теоретичні знання для практичних потреб. Не можна відокремлювати вивчення теорії від розв'язування задач. Ці два види роботи переплітаються і обумовлюють один одного. На уроках математики навчальний процес іде здебільшого від задач до теорії і потім від теорії до задач:

$$\text{задачі} \rightarrow \text{теорія} \rightarrow \text{задачі}.$$

Перехід від задач до теорії характеризує проблемну ситуацію. Саме на задачах бажано підводити до доцільності вивчення теорії. Перехід від теорії до задач характеризує застосування теорії.

По-друге, розв'язування математичних задач сприяє розвитку мислення і просторової уяви учнів, адже при цьому доводиться аналізувати, зіставляти, будувати іноді довгі ланцюги силогізмів і т. ін. Важко знайти засіб, більш придатний для активізації учнів, розвитку їхнього мислення й уяви, ніж розв'язування задач.

По-третє, розв'язування задач, якщо його правильно організувати, сприяє вихованню учнів, особливо вольових рис характеру, наполегливості, а також виявленню і розвитку творчості.

14.1.2. Функції задач у навчанні математики.

Із вищезазначеного логічно випливають ***функції задач*** у навчанні математики:

1) *Навчальна функція* спрямована на формування в учнів системи математичних знань, умінь і навичок на різних етапах навчання. Через систему задач учні вчаться не лише застосовувати здобуті теоретичні знання, а й переконуються на етапі мотивації у потребі здобуття нових знань; в процесі розв'язування задач дістають додаткову теоретичну інформацію та відомості про методи розв'язування.
2) *Розвивальна функція* задач спрямована на розвиток мислення школярів, на формування у них розумових дій та прийомів розумової діяльності, просторових уявлень та уяви, алгоритмічного мислення, вміння моделювати ситуацію тощо.
3) *Виховуюча функція* задач реалізується під час формування в учнів наукового світогляду, екологічного, економічного, естетичного виховання, розвитку пізнавального інтересу, позитивних рис особистості (відповідальність, терплячість, наполегливість тощо).
4) *Контролююча функція* задач спрямована на встановлення навченості, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класом у цілому.

Жодна з названих функцій не може виступати ізольовано від інших, але в кожній конкретній задачі вчитель має виділяти провідну функцію і за належної цільової установки домагатися її реалізації у першу чергу. Кожна з основних функцій задач важлива у загальній системі навчання, але останнім часом педагоги, виходячи з гуманістичних позицій, рекомендують особливу увагу приділяти розвивальній функції математичних задач. Отже, перш за все, задачі мають формувати *дослідницький стиль розумової діяльності*.

14.1.3. Види задач з математики.

Відомо, що в кожній задачі є умова (умови) і вимога (вимоги).

Залежно від того, яку *вимогу* поставлено в задачі, розрізняють задачі на обчислення, доведення, побудову і дослідження.

У задачах *на обчислення* треба знайти число (або множину чисел) за даними числами і умовами, якими вони пов'язані між собою та з невідомими числами. До таких задач належать текстові задачі і різноманітні приклади (задачі на розв'язування рівнянь, нерівностей, їх систем тощо).

У задачах *на доведення* вимагається довести сформульоване в них твердження. Цим вони не відрізняються від теорем. Тому не дивно, що одне і те саме твердження виступає в різних підручниках або як теорема, або як задача. До теорем звичайно відносять найважливіші твердження, які широко використовуються під час розв'язування різноманітних задач і доведення інших теорем. Водночас, на окремі задачі доводиться посилатися як на теореми.

До задач *на побудову* належать як геометричні задачі, в яких вимагається побудувати яку-небудь фігуру, що задовольняє умові задачі, так і задачі на побудову графіків функцій, діаграм, перерізів многогранників та інших тіл.

У задачах *на дослідження* вимагається що-небудь дослідити.

Залежно від кількості розв'язків задачі на обчислення і побудову бувають визначені та невизначені. *Визначеними* називають ті задачі, які мають скінчену кількість розв'язків, а *невизначеними* – ті, які мають безліч розв'язків.

За характером даних розрізняють задачі *із зайвими і суперечливими даними*. Під "зайвими даними" розуміють дані в умові задачі числа, залежності, властивості тощо, які випливають з інших наявних в умові даних.

Розглянемо, <u>наприклад</u>, таку задачу: деяке двоцифрове число, помножене на суму його цифр, дає 814; відшукати це число, знаючи, що цифра його десятків перевищує на 3 цифру простих одиниць.

Ця задача має зайві дані. Її можна розв'язати, не використовуючи другу частину умови: "цифра його десятків перевищує на 3 цифру простих одиниць". Справді, розклавши число 814 на множники, дістанемо: 814=2*11*37. Сума цифр двоцифрового числа не може бути більшою за 18. У цьому випадку вона не може дорівнювати й 2. Залишається єдине можливе: сума цифр шуканого числа дорівнює 11. Тоді шукане число дорівнює 2*37=74.

Якщо б в цій задачі число 3 замінити будь-яким іншим, а решту даних залишити без змін, то ми б дістали задачу з суперечливими даними, яка б не мала жодного розв'зку.

Розглянемо ще <u>приклад</u>: доведіть, що коли a, b, c - додатні числа і якщо сума будь-яких двох чисел більше за третє, то $abc > (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.

Якщо у цій задачі опустити слова "і якщо сума будь-яких двох чисел більше за третє", ми дістанемо також правильну задачу на доведення. Цю частину тексту не слід вважати "зайвими даними", бо вона не випливає з інших даних задачі. Такі задачі називають задачами *з додатковими обмеженнями*.

Розглянемо ще <u>приклад</u>: Доведіть нерівність: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

Ця задача не містить не зайвих даних, ні додаткових обмежень. Проте вимога її послаблена, бо правильною є також і сильніша нерівність $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{12}$. Однак доведення її складніше, ніж доведення першої. Такі задачі називають задачами *з послабленими вимогами*.

14.1.4. Розв'язування задач.
Методи і способи розв'язування задач.

Розв'язати задачу – означає виконати те, що вимагається в задачі. Внаслідок розв'язування задач на обчислення, побудову або дослідження дістають *розв'язок*. Внаслідок розв'язування задач на доведення дістають не розв'язок, а *підтвердження* сформульованого в задачі твердження.

Перш за все, не слід ототожнювати поняття *"розв'язок" і "відповідь"*. Ми пишемо одну відповідь, хоча задача може мати кілька розв'язків; відповідь дають і тоді, коли задача не має розв'язків.

Крім того, не треба плутати поняття *"розв'язок", "розв'язання" і "розв'язування"*. Перше поняття означає кінцевий результат розв'язування, відповідь або частину відповіді; друге – логічну конструкцію, сукупність всіх міркувань, що призвели до потрібного висновку; третє – процес міркувань. Тому коли письмово оформлюється процес пошуку розв'язку, це робиться під рубрикою "Розв'язання".

<u>Розв'язок</u> задачі буває правильним і неправильним, точним і наближеним, загальним і частинним.

<u>Розв'язування</u> буває усним і письмовим, самостійним і колективним і т.ін.

<u>Розв'язання</u> кожної задачі повинно бути: 1) безпомилковим; 2) обгрунтованим; 3) повним; 4) раціональним.

Безпомилкове розв'язання.

Безпомилковим вважають таке розв'язання, яке не містить ніяких помилок. Помилки ж в розв'язаннях математичних задач бувають різного роду:

1) *Алгоритмічними* називають помилки, пов'язані з неправильним застосуванням алгоритмів при обчисленнях, перетвореннях виразів тощо. <u>Наприклад</u>: $3^2=6$, $\lg a\cdot\lg b=\lg ab$.
2) *Логічні* помилки виникають в результаті спотворення законів логіки. <u>Наприклад</u>: ототожнення рівносильних рівнянь і рівнянь-наслідків.

3) *Графічні* помилки припускаються в рисунках. Наприклад: зображення синусоїди як об'єднання кількох півдуг кола.
4) *Термінологічні* помилки, прикладом яких є: "довжина круга", "площа кола", "апофема бічної грані піраміди".
5) *Ситуаційними* називають помилки, що виникають у результаті неправильного розуміння ситуацій.

Залежно від ступеня важливості в школі прийнято розрізняти грубі та негрубі помилки, а також недоліки.

Грубими називають ті помилки, які свідчать, що учень не засвоїв основ теорії, не знає найважливіших правил, теорем, формул.

Негрубими слід вважати, наприклад, помилки в обчисленнях, допущені внаслідок неуважності, неправильне вживання символів, зображення суцільними невидимих ліній у стереометричних рисунках.

До недоліків звичайно відносять записи відповідей, що допускають спрощення; порушення вимог щодо рисунків до геометричних задач тощо.

Обґрунтованість розв'язання.

Якщо учень знайде розв'язок, але не обгрунтує його, то не можна вважати, що він впорався з задачею.

У молодших класах учні часто навіть не відчувають потреби в обґрунтуваннях. Трапляються випадки, коли вони ототожнюють розв'язування задачі з угадуванням. Якщо, наприклад, запитати шостикласників, просте чи складене число 1021, вони, пересвідчившись, що це число не ділиться ні на 2, ні на 3, ні на 5, відповідають, що це число просте. Така відповідь правильна, але не обґрунтована.

Учні старших класів розуміють, що при розв'язуванні задач треба кожний крок обґрунтовувати, але часто не роблять цього, бо вважають, що "це і так очевидно". Деякі моменти розв'язання задач, які справді очевидні, та ті, які учні обґрунтовували раніше, можна залишати без обґрунтування. Але залишати необґрунтованими зовсім неочевидні положення в розв'язанні з повним поясненням не можна.

Зазначимо, що у процесі пошуку розв'язання для того, щоб не гальмувати його процес, можна деякі моменти залишити необґрунтованими, але потім запропонувати довести те, що спочатку прийняли без доведення.

Повнота розв'язання.

Якщо задача має кілька розв'язків, а учень знайде тільки один з них, таке розв'язання не можна вважати закінченим; воно неповне.

Наприклад: спростити вираз $a+\sqrt{a^2-2a+1}$. Більшість учнів розв'язують цю задачу так: $a+\sqrt{a^2-2a+1}=a+\sqrt{(a-1)^2}=a+(a-1)=2a-1$. Таке розв'язання неповне; воно правильне тільки при $a\geq 1$. Щоб розв'язати задачу повністю, треба розглянути випадок, коли $a<1$. У цьому випадку маємо: $a+\sqrt{a^2-2a+1}=a+\sqrt{(a-1)^2}=a-(a-1)=1$. Отже загальна відповідь має бути такою: $a+\sqrt{a^2-2a+1}=\begin{cases}2a-1, a\geq 1;\\ 1, a<1.\end{cases}$

Раціональність розв'язання.

Одну задачу часто можна розв'язати кількома різними способами. Деякі з цих способів простіші, швидше ведуть до мети; інші навпаки, складні і громіздкі. Отже, спосіб розв'язання, який швидше веде до мети, називають раціональнішим.

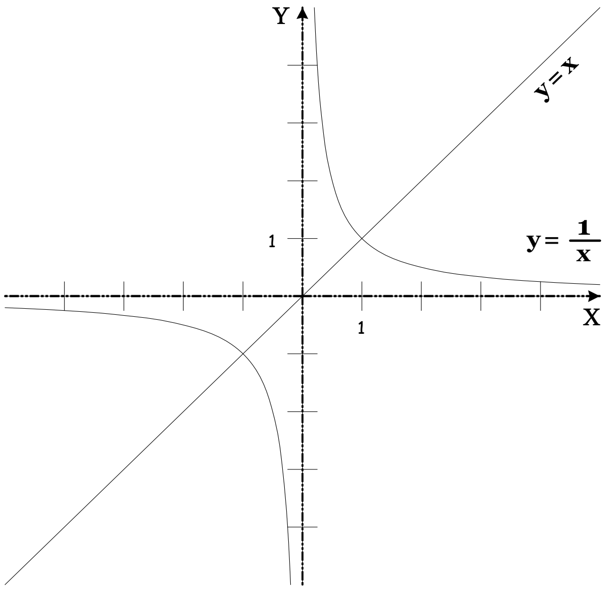


Рис. 14.1

<u>Наприклад</u>: розв'яжіть нерівність: $\frac{1}{x} < x$. Найраціональніше розв'язання цієї задачі – графічне. Побудувавши в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{1}{x}$ і $y = x$, відразу можемо записати відповідь: $(-1;0)$ і $(1;\infty)$ (рис. 14.1).

Ще <u>приклад</u>: знайдіть об'єм трикутної піраміди, бічні ребра якої дорівнюють 4 см, 3 см, 5 см, а всі плоскі кути при вершині прямі.

Якщо, розв'язуючи цю задачу, знаходити спочатку довжини сторін основи піраміди, а потім площу її основи і висоту, то такий спосіб розв'язування буде громіздкий і нелегкий. Якщо ж за основу піраміди взяти одну з бічних граней, то задачу можна розв'язати усно.

Чи треба знижувати учням оцінки за нераціональні розв'язання задач? Не завжди. Знижувати оцінки можна тільки за явно нераціональне розв'язання порівняно неважких задач, в яких учень виконує непотрібні обчислення, перетворення, побудови та ін., що свідчить про поверхове розуміння задачі.

Обговоривши вимоги щодо *розв'язання* задач, повернемося до процесу *розв'язування* задач. Згідно з поглядами психологів, дидактів, методистів, загалом процес розв'язування задачі має складатися з таких етапів (звичайно, не для всіх задач і не кожного разу треба виконувати всі етапи):

1) аналіз формулювання задачі, тобто виділення того, що в ній дано і що треба знайти або довести, дослідити, побудувати;
2) пошук плану розв'язання;
3) здійснення плану, перевірка і дослідження знайденого розв'язку, тобто доведення того, що знайдений розв'язок задовольняє вимогам задачі;
4) обговорення (аналіз) знайденого способу розв'язування з метою з'ясування його раціональності, можливості розв'язування задачі іншим методом чи способом.

Тут доцільно було б зауважити, що розуміється під методами і способами розв'язування задач.

У методиці математики під ***методом розв'язування задач*** (як і доведення теорем) треба розуміти *сукупність прийомів розумової діяльності або логічних математичних дій і операцій, за допомогою яких розв'язується великий клас задач*. Поняття ж **"*спосіб розв'язування задачі*"** – вужче поняття, під яким розуміється *сукупність прийомів розумової діяльності або логічних математичних дій і операцій, які використовуються у разі розв'язування окремої задачі або невеликої сукупності задач певного виду*.

Наприклад, в алгебрі найпоширенішим методом розв'язування текстових, сюжетних задач на обчислення є метод рівнянь; у геометрії задачі на побудову розв'язуються кількома методами: метод геометричних місць, метод геометричних перетворень (симетрії центральної і осьової, повороту, паралельного перенесення, подібності або гомотетії), алгебраїчний метод. У геометрії також поширений векторний метод, який використовується для розв'язування задач на обчислення і доведення. У курсі алгебри і початків аналізу провідним методом дослідження функцій і побудови їх графіків є метод, що спирається на використання похідної, а у разі обчислення площ плоских фігур і об'ємов геометричних тіл – метод інтегралів.

У процесі пошуку способу розв'язування багатьох задач на обчислення, доведення використовується синтетичний і аналітичний, а інколи аналітико-синтетичний методи міркувань, які прийнято називати відповідно синтетичним, аналітичним і аналітико-синтетичним методами розв'язування задач.

Синтетичний метод здебільшого використовується у початковій школі та в 5-6 класах основної школи у разі розв'язування найпростіших задач. Розв'язуючи задачі синтетичним методом, міркують від умови до шуканого, тобто виводять наслідки з того, що дано.

Наприклад: задача: відстань між містами А і В дорівнює 288 км. З міста А до міста В виїхав автомобіль зі швидкістю 72 км/год. Одночасно з автомобілем з міста В до міста А виїхав велосипедист, який зустрівся з автомобілем через 3 год після виїзду. За який час подолає відстань між містами автомобіль і за який час – велосипедист?

Розв'зання:

1) оскільки швидкість автомобіля і відстань між містами відомі, то можна визначити час руху автомобіля: 288:72=4 (год);

2) можна знайти шлях, пройдений автомобілем до зустрічі: 72*3=216 (км);
3) можна знайти шлях, який подолав велосипедист до зустрічі: 288-216=72 (км);
4) можна знайти швидкість велосипедиста, оскільки шлях завдовжки 72 км він пройшов за 3 год: 72:3=24 (км/год);
5) знайдемо час, за який пройшов всю відстань велосипедист: 288:24=12 (год).

Відповідь: 4 год; 12 год.

Розв'язуючи задачі *аналітичним методом*, міркують навпаки: від шуканого до умови. Розв'язанні цієї самої задачі аналітичним методом виглядатиме так:

У ч и т е л ь: Що треба знайти для відповіді на запитання задачі?

У ч е н ь: Треба знайти швидкості автомобіля і велосипедиста. Швидкість автомобіля відома і відомий весь шлях, пройдений автомобілем, тому весь час руху автомобіля дорівнює : 288:72=4 (год).

У ч и т е л ь: Що треба знати для визначення швидкості велосипедиста?

У ч е н ь: Треба знати шлях, який велосипедист пройшов за 3 год до зустрічі.

У ч и т е л ь: Як знайти цей шлях?

У ч е н ь: Для цього досить знайти щлях, пройдений до зустрічі автомобілем, тоді решту відстані між містами пройшов до зустрічі велосипедист.

У ч и т е л ь: Знайдіть цей шлях.

У ч е н ь: 72*3=216 (км); 288-216=72 (км).

У ч и т е л ь: Як знайти швидкість велосипедиста?

У ч е н ь: Треба шлях до зустрічі розділити на витрачений час: 72:3=24 (км/год).

У ч и т е л ь: Як знайти час, за який подолав всю відстань велосипедист?

У ч е н ь: Для цього треба відстань між містами розділити на швидкість велосипедист: 288:24=12 (год).

Як бачимо, аналітичний метод розв'язування сприяє *свідомому* пошуку розв'язання задачі, вчить учнів здійснювати такий пошук самостійно. Іноді розв'язування задач синтетичним методом виглядає як розв'язування "всліпу": обчислимо що можна, а там подивимось.

Зазначимо, що існують задачі, які взагалі не можна розв'язати синтетичним методом, а тільки аналітичним, тобто застосовуючи висхідний аналіз.

У старших класах аналітичний метод широко використовується під час розв'язування стереометричних задач на обчислення об'ємів, площ поверхонь геометричних тіл. При цьому розв'язання починається із записування відповідної формули, за якою обчислюється відповідна величина, а потім здійснюється пошук невідомих величин, які входять до формули.

14.2. Зміст практичного заняття №14

1. Перевірка виконання домашнього завдання (15 хв.).
2. Розв’язання методичних завдань (матеріали пропонуються студентам у роздрукованому вигляді) (40 хв.).
3. Проілюструвати схему *задачі* $\rightarrow$ *теорія* $\rightarrow$ *задачі* конкретними прикладами, використовуючи діючі підручники з математики (самостійна робота студентів на занятті з наступним обговоренням) (25 хв.).

14.3. Дидактико- методичні матеріали до практичного заняття №14

14.3.1. До перевірки домашнього завдання

Деякі приклади організаційних форм роботи з теоремою

1) *На етапі підготовчої роботи*
   - ✓ Запропонувати задачу, для вирішення якої недостатньо теоретичних фактів (проблемна ситуація). Підвести до необхідності вивчення нового теоретичного факту.
   - ✓ Провести математичний «експеримент»: побудувати, обчислити, виміряти та ін., мета якого – висунути гіпотезу.
   - ✓ Провести дослідження властивостей деякої геометричної фігури на практиці, потім висунути гіпотезу.
   - ✓ Зацікавити учнів швидким розв'язанням деякої задачі з наступною постановкою проблемного питання: «Як це було зроблено?»
2) *На етапі роботи з формулюванням теореми*
   - ✓ Один учінь біля дошки вичленовує, що дано в теоремі, що треба довести, виконує рисунок.
   - ✓ Учні з місця допомагають вчителеві оформити «дано-довести» на дошці, виконати рисунок.
   - ✓ На слайді відразу з'являється готові умова і рисунок до даної теореми.
   - ✓ Учні самостійно вичленовують і записують умову і висновок теореми, потім хтось із учнів записує це на дошці.
   - ✓ Якщо теорема сформульована в категоричній формі, хтось із учнів (або колективно) намагається переформулювати її в умовну форму, вичленовуючи «дано-довести».
3) *На етапі роботи з доведенням теореми*
   - ✓ Вчитель самостійно доводить теорему біля дошки.
   - ✓ Біля дошки теорему доводить учень, який заздалегідь підготувався до такої роботи вдома.
   - ✓ Учні самостійно вивчають доведення за підручником.
   - ✓ Готове доведення представлено на слайді, клас колективно його розбирає (за допомогою вчителя).

- ✓ На слайді (або на дошці) запропонований тільки рисунок (можливо, з деякими підказками), учні (або один учень) намагається довести теорему самостійно.
- ✓ Вчитель пропонує тільки план доведення, учні намагаються його реалізувати.

4) *На етапі закріплення доведення теореми*
   - ✓ Відразу після доведення дехто з учнів (або декілька учнів) намагається його відтворити (на дошці або в зошиті). Такий прийом дає набагато більше користі, якщо вивчене доведення повторюється за зміненим рисунком, з іншими буквеними позначеннями.
   - ✓ Така сама робота може проводитися, але вже на наступному уроці, в якості перевірки домашнього завдання (можливо навіть до початку уроку дехто з учнів біля дошки записує довгі перетворення або готує рисунок до доведення).
   - ✓ Повторюються лише етапи доведення або зазначаються вузлові моменти доведення: вчитель задає питання всьому класу.
   - ✓ Обговорюється лише метод доведення.
   - ✓ Вчитель пропонує скласти (в зошитах) план доведення.
   - ✓ Учні відтворюють доведення по ланцюжку біля дошки (більшість учнів класу стає активною).
   - ✓ Учні на наступному уроці (або на теоретичному заліку з теми) пишуть самостійну роботу контролюючого характеру, відтворюючи повністю доведення теореми.

5) *На етапі закріплення теореми*
   - ✓ Вчитель або учні розв'язують задачу на безпосереднє застосування теореми, що розглядається.
   - ✓ Закріплення теореми відбувається на подальших уроках (в наступних класах) у процесі розв'язування більш складних задач.
   - ✓ Під час фронтального опитування учні формулюють теорему, зазначають метод доведення, вставляють пропущені вчителем слова у формулюванні та ін.
   - ✓ Учні виконують завдання логічного характеру: «А чи вірне твердження…?», «Чи буде вірним обернене твердження до даної теореми?», намагаються переформулювати теорему за допомогою слів «необхідно», «достатньо» або «необхідно і достатньо» та ін.
   - ✓ Виконують учні вправи за готовими рисунками на застосування даної теореми, час від часу проговорюючи її формулювання.
   - ✓ Теорема, що вивчається, доводиться іншим способом, відмінним від того, що вже розглянуто в класі або подано авторами підручника.

14.3.2. Питання до актуалізації опорних теоретичних знань студентів у процесі заняття

1. Як трактується поняття «задача» в методиці навчання математики?
2. Яку роль відіграють математичні задачі у навчально-виховному процесі?
3. Охарактеризуйте схему: задачі $\rightarrow$ теорія $\rightarrow$ задачі.
4. Сформулюйте функції задач у навчанні математики.
5. Які Вам відомі види задач з математики? Чим відрізняються задачі різних видів?
6. Які задачі називають «визначеними» і «невизначеними»?
7. Як розрізняють задачі за характером даних?
8. Які задачі називають задачами з додатковими обмеженнями? З послабленими вимогами?
9. Що означає «розв’язати задачу»?
10. У чому різниця між поняттями *“розв’язок”, “розв’язання” і “розв’язування*"?
11. Охарактеризуйте, яким може бути *розв’язок*?
12. Охарактеризуйте, яким може бути *розв’язування*?
13. Охарактеризуйте, яким має бути *розв’язання*?
14. Що означає термін «безпомилковість розв’язання»? Якими можуть бути помилки в розв’язаннях математичних задачах?
15. Що означає термін «обґрунтованість розв’язання»?
16. Що означає термін «повнота розв’язання»?
17. Що означає термін «раціональність розв’язання»?
18. Сформулюйте етапи розв’язування математичної задачі (в загальному випадку).
19. Що в методиці навчання математики розуміють під методом розв’язування задачі? Під способом розв’язування задачі? Наведіть приклади методів розв’язування математичних задач.

14.3.3. Методичні завдання до практичного заняття №14

1. Користуючись діючими підручниками з математики, навести приклади задач:
   - на обчислення;
   - на доведення;
   - на побудову;
   - на дослідження.

2. В результаті розв’язання № 438 із підручника [81] $\begin{cases} 6x^2 + xy - 2y^2 = 0, \\ 3x^2 - xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$

   одержали відповідь: $\left(t;\ -\frac{3}{2}t\right), t \in R$;

а результатом розв'язання № 892 із підручника [5] $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1) \leq 0$ є множина $\{1;\ -1\}$.

Охарактеризуйте, до якого виду задач можна їх віднести.

3. Розглянемо текстову задачу № 555 за підручником [81].

Задача. В сосуд з водою налили 6 л 64%-го розчину спирту, а потім після повного перемішування вилили 6 л отриманого розчину. Таку операцію повторили 3 рази. Скільки води було спочатку в сосуді, якщо відомо, що об'єм виражається цілим числом літрів, що не перевищує 10 л, і що остаточна концентрація спирту в розчині стала дорівнювати 56%?

Розв'язання.

I. 1) Після того, як в сосуд з водою масою m налили 6 л 64%-го розчину спирту, то одержали розчин масою (m+6) л, в якому спирту було 3, 84 л.

2) Коли з цього розчину відлили 6 л, одержали розчин масою m, в якому концентрація (частка) спирту зберіглася, а маса спирту стала x л.

Знайдемо x: $\frac{x}{m} = \frac{3{,}84}{m+6}$, звідки $x = \frac{3{,}84m}{m+6}$ л.

II. Процедуру повторюють.

1) В розчин масою m, в якому тепер $\frac{3{,}84m}{m+6}$ л спирту, налили 6 л 64%-го розчину спирту (тобто додали 3,84 л спирту) і одержали розчин масою (m+6) л, в якому спирту стало $(\frac{3{,}84m}{m+6} + 3{,}84$) л.

2) Коли з цього розчину відлили 6 л, то одержали розчин масою m, в якому концентрація (частка) спирту зберіглася, а маса спирту стала y л.

Знайдемо y: $\frac{y}{m} = \frac{\frac{3{,}84m}{m+6}+3{,}84}{m+6} = \frac{7{,}68m+23{,}04}{(m+6)^2}$, звідки $y = \frac{7{,}68m^2+23{,}04m}{(m+6)^2}$ л.

III. Процедуру ще раз повторюють.

1) В розчин масою m, в якому тепер $\frac{7{,}68m^2+23{,}04m}{(m+6)^2}$ л спирту, налили 6 л 64%-го розчину спирту (тобто додали 3,84 л спирту) і одержали розчин масою (m+6) л, в якому спирту стало $(\frac{7{,}68m^2+23{,}04m}{(m+6)^2} + 3{,}84$) л.

2) Коли з цього розчину відлили 6 л, то одержали розчин масою m, в якому концентрація (частка) спирту зберіглася, і стала дорівнювати 56%.

Тобто $\frac{\frac{7{,}68m^2+23{,}04m}{(m+6)^2}+3.84}{m+6} = 0{,}56$ або $\frac{7{,}68m^2+23{,}04m+3{,}84(m+6)^2}{(m+6)^3} = 0{,}56.$

Розв'язуючи це рівняння, після перетворень, одержуємо:

$7m^3 - 18m^2 + 648m - 216 = 0;$

Корені цього рівняння можна знайти підбором (враховуючи зміст задачі, зрозуміло, що m виражається натуральним числом), тому підставляючи послідовно m=1, 2, 3, 4, 5, 6, знаходимо, що рівнянню задовольняє m=6. Далі, поділивши многочлен $7m^3 - 18m^2 + 648m - 216$ на двочлен $m-6$, в частці одержимо квадратний тричлен $m^2 + 24m + 36$, який не має дійсних коренів.

Отже, відповідь: 6 л.

Завдання: співставте, будь-ласка, умову задачі з ходом її розв'язання. Як можна охарактиризувати таку задачу?

4. Проілюструємо застосування *нестандартних методів* (прийомів) розв'язування математичних задач.

Приклад із підручника [129]. Розв'язати рівняння $x^3-5x^2+7x-3=0$.

Розкладемо ліву частину рівняння на множники за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Для цього будемо відшукувати многочлени $x-\alpha$ і $\beta_1x^2+\beta_2x+\beta_3$ такі, що справедлива тотожна рівність:

$x^3-5x^2+7x-3=(x-\alpha)(\beta_1x^2+\beta_2x+\beta_3)$ (1).

Праву частину цієї рівності можна представити у вигляді

$\beta_1x^3+(\beta_2-\alpha\beta_1)x^2+(\beta_3-\alpha\beta_2)x-\alpha\beta_3$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в лівій і правій частинах рівності (1), отримаємо систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів α, β_1, β_2, β_3:

$$\begin{cases}\beta_1=1,\\ \beta_2-\alpha\beta_1=-5,\\ \beta_3-\alpha\beta_2=7,\\ \alpha\beta_3=3\end{cases}$$

З даної системи знаходимо: $\beta_1=1$, $\beta_2=-2$, $\beta_3=1$, $\alpha=3$, а це означає, що

$x^3-5x^2+7x-3=(x-3)(x^2-2x+1)$.

Отже, маємо $(x-3)(x^2-2x+1)=0$ або $(x-3)(x-1)^2=0$, звідки отримаємо, що $x_1=3$, $x_2=1$.

Відповідь: 3; 1.

Завдання: Запропонуйте інший метод розв'язання цього рівняння. Чому корисно учням демонструвати різні способи розв'язання математичних задач?

5. Розглянемо *приклад* із підручника [129].

Розв'язати рівняння $6x^3-x^2-20x+12=0$ (1).

Розв'язання: помноживши обидві частини цього рівняння на многочлен $x+\frac{1}{2}$, отримаємо рівняння $6x^4+2x^3-\frac{41}{2}x^2+2x+6=0$ (2).

Рівняння (2) є симетричним рівнянням четвертого степеня. Так як воно не має кореня x=0, то, поділивши обидві частини рівняння (2) на $2x^2$ і перегрупувавши його члени, отримаємо рівняння

$3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-\frac{41}{4}=0$ (3), рівносильне рівнянню (2).

Позначивши $x+\frac{1}{x}=t$, отримаємо рівняння $3t^2+t-\frac{65}{4}=0$ (4).

Рівняння (4) має два корені: $t_1 = -\frac{5}{2}$ і $t_2 = \frac{13}{6}$. Тому рівняння (3) рівносильне такій сукупності рівнянь: $x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$; $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$. Вирішивши сукупність, отримаємо чотири корені рівняння (2), а, отже, і рівняння (1): $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = -2$, $x_4 = -\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$; $-\frac{1}{2}$; -2.

Завдання: Оцініть представлене розв'язання. Чи є воно безпомилковим?

Якщо ні, то якого роду помилку було припущено? Чи є така помилка грубою?

6. Розглянемо *приклад* із підручника [81].

Розв'язати рівняння: $\log_{\frac{x}{10}} x + \log_{\frac{x}{5}} x = 0$ (1). Область визначення даного рівняння: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 5, \\ x \neq 10 \end{cases}$.

Перейдемо в логарифмах до однієї основи, наприклад *x*. Так як $\log_{\frac{x}{10}} x = \dfrac{\log_x x}{\log_x \dfrac{x}{10}} = \dfrac{1}{1 - \log_x 10}$, $\log_{\frac{x}{5}} x = \dfrac{\log_x x}{\log_x \dfrac{x}{5}} = \dfrac{1}{1 - \log_x 5}$, то вихідне рівняння прийме вид $\dfrac{1}{1 - \log_x 10} + \dfrac{1}{1 - \log_x 5} = 0$ (2). Приведемо ліву частину до спільного знаменника і прирівняємо до нуля чисельник: $1 - \log_x 5 + 1 - \log_x 10 = 0$, звідки $\log_x 50 = 2$, тоді $x_1 = 5\sqrt{2}$, $x_2 = -5\sqrt{2}$. Від'ємне значення не задовольняє області визначення рівняння, тобто є стороннім коренем.

Відповідь: $5\sqrt{2}$.

Завдання: Оцініть представлене розв'язання. Чи є воно повним? обгрунтованим? раціональним? безпомилковим? Якщо ні, то якого роду помилку було припущено? Чи є така помилка грубою?

7. Розглянемо задачу (олімпіадний рівень) [69].

Задача. Три плавуни повинні проплити у басейні доріжку довжиною 50 м, а потім негайно повернути і приплити до місця старту. Спочатку стартує перший плавун, через 5 с – другий, а ще через 5 с – третій. У визначений момент часу, ще не досягнувши до кінця доріжки, плавуни опинилися на однієї відстані від старту. Третій плавун, допливши до кінця доріжки і повернувши назад, зустрінув другого у 4 м від кінця доріжки, а першого – в 7 м від кінця доріжки. Знайти швидкості плавунів.

I	S_1, v_1, t				
II	$S_2, v_2, t-5$				
III	$\boldsymbol{S_3, v_3, t-10}$				
	А	К	Д	С	В

Рис. 14.1

1) Нехай А – лінія старту, К – лінія, на якій усі плавуни опинилися одночасно; С – лінія, на якій зустрілися ІІІ і ІІ плавуни, Д – лінія, на якій зустрілися ІІІ і І плавуни (рис. 14.1); АС=46 м; ВС=4 м, АД=43 м, ВД=7м.
2) Введемо позначення: АК=S, v_1, v_2, v_3 – швидкості плавунів; t, $t-5$, $t-10$ - проміжки часу, за який плавуни досягли лінії К.
3) Маємо: $S = v_1 t = v_2(t-5) = v\ _3(t-10)$ (1)
4) Скористаємося тим, що відстані пропорційні швидкостям.

ІІІ плавун проплив відстань між пунктами К, В і С (КВС), ІІ плавун за цей же час - відрізок КС.

Тобто: АВ+ВС-АК=50+4-S=54-S, КС=46-S $\Rightarrow$ $\frac{v_3}{v_2} = \frac{54-S}{46-S}$ (2)

5) ІІІ плавун проплив відрізок КВС, а І плавун за цей же час – відрізок КД. При цьому КВД=57-S, КД=43-S, $\Rightarrow \frac{v_3}{v_1} = \frac{57-S}{43-S}$ (3)
6) Маємо 5 рівнянь з пятьма невідомими. Із рівнянь (1) $\Rightarrow$ що,

$$\frac{v_3}{v_2} = \frac{t-5}{t-10}; \qquad \frac{v_3}{v_1} = \frac{t}{t-10} .$$

Підставивши це в (2) і (3), приходимодо системи:

$$\begin{cases} \frac{54-S}{46-S} = \frac{t-5}{t-10}; \\ \frac{57-S}{43-S} = \frac{t}{t-10}; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 8t + 5S = 310, \\ 7t + 5S = 285; \end{cases}$$

звідки t=25; S=22.

Відповідь: $v_1 = \frac{22}{25}$ м/с, $v_2 = \frac{11}{10}$ м/с; $v_3 = \frac{22}{15}$ м/с.

Завдання: Охарактеризуйте, у чому «ключ» до успішного розв’язання цієї задачі?

14.4. Домашнє завдання

1. Наведіть приклад задачі з шкільного курсу планіметрії, яка б вирішувалась за допомогою методу площ.
2. Розв'яжіть задачу: «В прямокутному трикутнику АВС із вершини прямого кута С проведено висоту і медіану. Кут α між ними дорівнює $arccos\frac{40}{41}$. Знайти відношення катетів». Який метод було застосовано для розв'язання цієї задачі? Як можна сформулювати для учнів правило-орієнтир застосування методу введення допоміжного параметра?

3. Опишіть методику розв'язання з учнями такої задачі: «Доведіть, що якщо у паралелограма діагоналі рівні, то він є прямокутником». Який метод розв'язання доцільно застосувати для активізації розумової діяльності учнів?
4. В якому класі я на якому рівні вивчення математики можна давати таку задачу: «Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями: $y = \sqrt{x}$, $y=x$»? Розв'яжіть її.

14.5. Література

Основна: [15], [69], [81], [96], [102], [103], [104], [122], [157], [165], [166].
Додаткова: [105], [106], [88], [114], [115], [116], [143], [144].

14.6. Аналіз практичного заняття №14 з точки зору формування у студентів нормативної, варіативної та проектувально-моделювальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Нормативна складова

На практичному занятті №14 відбувається подальше формування вмінь майбутніх учителів математики користуватися нормативними документами, зокрема програмами з математики у процесі з'ясування до якого року навчання можна віднести задачний матеріал, який розглядається. Крім того, одержуються знання щодо змісту шкільного курсу математики, критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів, у першу чергу щодо оцінювання розв'язування учнями математичних задач різного рівня складності.

Варіативна складова

Аналізуючи задачний матеріал, виконуючи самостійну роботу навчального характеру студенти на даному практичному занятті звертаються до чинних підручників з математики різних рівнів, класів і авторів, набуваючи професійно-значущих умінь і досвіду. Також майбутні фахівці мають змогу аналізувати матеріал для поглибленого навчання математики, для проведення індивідуальних занять з учнями, в тому числі з метою підготовки їх до олімпіад.

Проектувально-моделювальна складова

У процесі практичного заняття №14 майбутні учителі математики продовжують одержувати знання про прийоми організації навчальної діяльності учнів, зокрема розв'язування ними математичних задач різних видів, а також керування цією діяльністю. Студенти вчаться добирати необхідні методи, засоби, форми навчання при розв'язуванні учнями математичних задач. У цілому, практичне заняття, що розглядається, спрямоване на формування у студентів спеціальних дидактичних і методичних умінь.

Практичне заняття №15

Тема: *Оцінювання розв'язування математичних задач.*

Мета: дослідження методичних особливостей процесу навчання учнів розв'язування математичних задач; формування вмінь та навичок керувати таким процесом, оцінювати навчальні досягення учнів щодо розв'язування математичних задач; аналіз найбільш типовіших помилок, що припускаються учнями при розв'язуванні рівнянь і нерівностей, методів і способів їх розв'язання.

15.1. Основні теоретичні питання,
що мають опанувати студенти до даного заняття

15.1.1. Загальні рекомендації щодо навчання учнів розв'язуванню математичних задач.

Ефективною методика навчання учнів розв'язуванню задач може бути лише за комплексного підходу до навчального процесу. Це означає, що має чітко визначатися мета навчання учнів розв'язуванню задач певного виду чи оволодіння певним методом, ретельно розроблятися система задач, які будуть розв'язуватись у класі і пропонуватися як домашнє завдання, мають доцільно обиратися методи й організаційні форми роботи на уроці, засоби навчання, здійснюватися контроль стану сприймання учнями методів і способів розв'язування, набутих ними навичок і умінь.

У процесі розв'язування задач здійснюється *як алгоритмічна, так і евристична діяльність*. Переважна більшість шкільних задач, зокрема алгебраїчних вправ, базових задач на побудову, вправ на дослідження функцій, обчислення похідних та інтегралів тощо, виконується за певними алгоритмами. Оволодіння учнями цими алгоритмами – важливе завдання навчання математики, оскільки розв'язування творчих, нестандартних задач зводиться врешті-решт до виконання відомих базових задач, які розв'язуються за певними алгоритмами.

Разом з тим навчати учнів розв'язуванню задач і вправ алгоритмічного характеру не можна лише шляхом пропонування їм готових алгоритмів. Доцільніше організувати на зразках розв'язання однієї-двох задач колективний пошук алгоритму. Сказане стосується і навчання учнів розв'язуванню задач і вправ певних типів за певним алгоритмом.

Так, <u>наприклад</u>, учні у 5 класі розв'язують задачі на рух двох типів: на зустрічний рух і рух в одному напрямку, при цьому учні колективно можуть дійти висновку, що в разі розв'язування задач на зустрічний рух, де вимагається визначити час, через який рухомі об'єкти зустрінуться, треба додати їх швидкості та розділити відстань між пунктами, від яких почався рух, на сумарну швидкість.

У задачах на рух, де об'єкти рухаються від одного пункту і в одному напрямку, а вимагається визначити відстань між об'єктами через певний час, раціональнішим є спосіб розв'язування, за яким знаходять різницю між швидкостями об'єктів і множать її на заданий час.

При розв'язуванні задач на спільну роботу орієнтиром для розв'язування є вказівка щодо прийняття всієї роботи за одиницю і вираження частини всієї роботи, що виконується окремими особами чи механізмами за одиницю часу або частини роботи, що виконується ними разом.

Аналогічні вказівки та алгоритми доцільно пропонувати учням для засвоєння в разі розв'язування задач на проценти, пропорційний поділ, геометричних задач на побудову, задач на доведення методом від супротивного, побудову перерізів многогранників, побудову графіків функцій шляхом геометричних перетворень, розв'язування задач векторним методом та ін.

Однак, треба зауважити, що розв'язування задач – творчий процес, і його не завжди можна алгоритмізувати. Як засвідчують спостереження, найважливішу роль у формуванні умінь розв'язувати задачі відіграють практика, навичкі. Тому щоб навчатися розв'язувати задачі, треба їх розв'язувати. Проте невірно було б думати, що все залежить тільки від кількості розв'язаних задач. Багато важить і система запропонованих учням задач, і ті зауваження, якими супроводжує їх учитель, і загальні поради щодо пошуків розв'язань, складання планів, оформлення розв'язань і т. ін.

Загальні рекомендації можна оформлювати у вигляді плакатів, які висітимуть у кабінеті математики, або пам'ятки, що мають такий зміст:

Як розв'язувати задачу:

1. Прочитай уважно задачу і запиши, що в ній дано і що вимагається.
2. Якщо йдеться про геометричні фігури, накресли їх, введи позначення.
3. Склади план розв'язування задачі.
4. Якщо такий план зразу не можна скласти, ще раз прочитай задачу, сформулюй її своїми словами, розчленуй на частини.
5. Заміни кожне поняття його означенням.
6. З'ясуй, як пов'язані дані в задачі величини.
7. Запиши висновки, які випливають з умови, розв'яжи частину задачі.
8. Спробуй розв'язати "з кінця".
9. Згадай, чи не розв'язували подібної задачі раніше, пошукай у підручниках.
10. Після розв'язування оглянь зроблене. Чи немає в міркуваннях чогось зайвого? Чи не можна їх спростити?

Не треба, однак, думати, що коли учень засвоїть ці або подібні рекомендації, то вже вмітиме розв'язувати задачі. Щоб *навчити* учнів розв'язувати задачі, треба *вчити* їх цьому, тобто давати зразки, направляти і підправляти. Бажано, щоб учитель хоча б іноді сам від початку до кінця розв'язав перед учнями задачу на дошці, щоб вони бачили зразок: як треба аналізувати задачу, шукати спосіб її розв'язування, оформляти розв'язання і т. ін.

Способи розв'язування задач кожного нового типу спочатку треба розглянути окремо, звернувши увагу учнів на особливостях цього типу задач, на загальному алгоритмі задач (якщо він існує), на способах перевірки тощо. Зрозуміло, що починати розв'язувати задачі кожного нового типу слід з найпростіших, повільно ускладнюючи їх.

15.1.2. Форми організації розв'язування задач.

Нагадаємо, що розв'язування математичних задач буває усним і письмовим, самостійним і колективним і т.ін. Це і є, по-суті, форми організації розв'язування задач.

Усне розв'язування.

Не обов'язково всі задачі слід вирішувати письмово або записувати на дошці. Приблизно половину задач у класі доцільно розв'язувати усно. В результаті можна набагато збільшити кількість розв'язаних задач і тим самим поліпшити якість знань і навичок учнів.

Розв'язуючи задачу, наприклад, на обчислення, учні мають справу з двома такими моментами: 1) із з'ясуванням залежностей між шуканими і даними в задачі значеннями величин і 2) з виконанням обчислень або перетворень. Звичайно другий момент становить менше труднощів, бо перед розв'язуванням текстових задач учні вирішують дуже багато прикладів на обчислення. Із з'ясуванням залежності між величинами справа значно гірша, бо учні дуже мало тренуються в цьому. Отже, доцільно спочатку давати задачі з найпростішими числовими даними, щоб обчислення забирало якнайменше часу та енергії, тобто такі задачі можна розв'язувати усно.

Якщо систематично практикувати усне розв'язування нескладних задач, то учні розв'язуватимуть краще й більш упевнено і значно важчі задачі.

Колективне розв'язування.

Хоча розв'язування задач і вправ біля дошки підвергається критиці, такий спосіб був і залишається одним з найкращих способів навчання розв'язуванню задач. Треба тільки добре організувати цю роботу.

Готуючись до *колективної фронтальної роботи*, яка проводиться інколи методом евристичної бесіди, треба подумати і записати в конспекти систему запитань, що стосуються пошуку розв'язання. Серед них варто на прості запитання пропонувати відповідати слабкішим учнім, щоб залучити їх до пошуку розв'язання задачі. Іноді спосіб розв'язання знаходять сильні учні, а реалізацію його на дошці доцільно запропонувати середньому чи слабкому учневі. Не можна допускати, щоб учні механічно переписували розв'язання задачі з дошки, не усвідомивши способу вирішення. Тому в процесі оформлення розв'язання можна пропонувати окремим учням пояснити, чому виконується та чи інша дія або яким має бути наступний крок розв'язання.

При *груповій формі організації* розв’язування задач на уроці вчитель повинен підготувати для кожної групи набір задач відповідно до здібностей учнів і під час уроку контролювати діяльність кожної групи і надавати допомогу тій, яка більше її потребує. Інколи варто спеціально провести консультацію (3-5 хв.), в якій активну участь братимуть сильніші учні, а не лише вчитель.

Якщо йдеться про задачі нового для учнів типу, то спочатку корисно, щоб учитель сам показав на дошці, як розв’язувати такі задачі. Потім можна викликати до дошки учня і запропонувати йому розв’язати аналогічнну задачу. Всі учні розв’язують її в своїх зошитах. Потім до дошки йде інший учень і т. д.

Як показують спостереження, при такій організації роботи частина учнів розв’язують задачі в своїх зошитах самостійно, звіряючи свої відповіді з тими, що на дошці, а інші списують з дошки все розв’язання. У цьому є цінність такої роботи, бо ті учні, які не зрозуміли пояснень учителя або забули попередній матеріал, списуючи з дошки, вчаться розв’язуванню. Але в цьому і недолік такої роботи, бо завжди є такі учні, які не вчаться, а тільки списують. Проте неправильно було б критикувати розв’язування задач і вправ біля дошки тому, що частина учнів намагається лише списувати, оскільки не секрет, що списують найчастіше ті учні, які не вміють розв’язувати, і тому самостійне розв’язування не завжди доцільне.

Звичайно, розв’язувати задачі лише колективним способом неправильно. Час від часу треба давати задачі для самостійного розв’язування.

Самостійне розв’язування.

Можливі різни форми організації самостійного розв’язування учнями задач на уроці. У деяких випадках на самостійне розв’язування корисно відводити цілі уроки, особливо в старших класах при розв’язуванні громіздких задач і перед контрольними роботами, щоб з’ясувати, чи можуть учні впоратися з наміченими для контрольної роботи завданнями. Їх можна оцінювати (всі або деякі). Проте для самостійних робіт зручніше відводити тільки частини уроків – 15-20 хв. Учитель на уроці може пояснити матеріал, дати завдання, розв’язати кілька прикладів колективно, а потім запропонувати деякі вправи (задачі) до кінця уроку виконати самостійно (можливо різного рівня складності). Такі роботи також можна оцінювати. Самостійні роботи можна проводити і на початку, і в середині, і наприкінці уроку.

Під час *контрольної самостійної роботи* підказки не припускаються.

Під час *навчальної самостійної роботи* необхідно бути серед учнів, допомогати деяким, робити зауваження для всіх. Коли учень не зможе самостійно справитися з завданнями, йому треба допомогти. Інколи доцільно навести аналогічну задачу, інколи підказати метод розв’язування, наприклад: “спробуй застосувати метод від супротивного”, “а може зручніше використати графік?” Але при цьому важливо правильно встановити, коли і що саме підказати, вдало вибрати момент підказки, її зміст і форму. У цьому значною мірою і проявляється майстерність учителя організовувати самостійну роботу учнів.

15.1.3. Організація перевірки розв'язання задач.

Розв'язання різних задач можна перевіряти різними способами. В одних випадках можна перевірити, чи задовольняє знайдений розв’язок умові задачі, в інших – доводиться складати і розв’язувати задачу, обернену даній, в якій шукане число беруть за дане, а одне з даних – за шукане. Іноді для перевірки доводиться шукати навіть інший спосіб розв’язання.

Перевірку треба робити за умовою задачі, а не підставляти, наприклад, знайдений розв’язок у рівняння, складене за її умовою, бо нерідко допускають помилки саме при складанні рівнянь. Цих помилок подібна перевірка не виявить.

Розрізняють *повну перевірку*, при якій показують, що знайдений розв’язок задовільняє всім частинам умови задачі, і *неповну перевірку* (контроль), коли перевіряють відповідність знайденого розв’язку тільки деяким (але не всім) частинам умови задачі. Зрозуміло, що неповна перевірка не дає такої впевненості в правильності розв’язання, як повна. Але іноді, коли неповну перевірку виконати важко, роблять неповну.

Навіть повна перевірка іноді не дає права категорично стверджувати, що задачу розв’язано правильно, бо може трапитися, що в розв’язанні допущено кілька помилок, які нейтралізують одна одну. Бувають і такі помилки, які не впливають на розв’язок, тобто розв’язок може бути правильним, а розв’язання – неправильним.

Наприклад: учні розв’язують нерівність: $0{,}5^{\log_{0,3} x} > 2$;

$$0{,}5^{\log_{0,3} x} > 0{,}5^{-1};\ \log_{0,3} x > -1;\ \log_{0,3} x > \log_{0,3} \frac{10}{3};\ x > \frac{10}{3}.$$

Знайдена тут відповідь правильна, але розв’язання – помилкове: з першої нерівності не випливає друга, а з передостанньої не випливає остання.

Досить ефективним слід вважати *контроль* знайдених загальних розв’язків за допомогою розгляду кількох (найкраще граничних) випадків.

15.2. Зміст практичного заняття №15

1. Перевірка виконання домашнього завдання (20 хв.).
2. Проведення дидактичної гри «Оціни розв'язання» (60 хв.)

15.3. Дидактико-методичні матеріали до практичного заняття №15

15.3.1. Питання до актуалізації опорних теоретичних знань студентів у процесі заняття

1. Сформулюйте загальні рекомендації щодо навчання учнів розв’язуванню задач.
2. Які Вам відомі форми організації розв’язування задач?
3. Охарактеризуйте усне розв'язування задач на уроках математики.
4. Як відбувається колективне розв'язування задач на уроках математики?
5. Охарактеризуйте самостійне розв'язування задач учнями.
6. Зазначте способи організації перевірки розв’язання задач.

15.3.2. Зміст дидактичної гри «Оціни розв'язання»

Мета: формування знань, умінь і навичок студентів – майбутніх учителів математики оцінювати розв'язання математичних задач «учнями».

Для проведення цієї гри необхідно підготувати презентацію в PowerPoint, де спочатку на слайді пропонується розв'язання конкретної математичної задачі «учнями», яке студенти повинні оцінити за усіма критеріями (безпомилковість, повнота, раціональність, обгрунтованість), і якщо таке розв'язання містить помилки, охарактеризувати їх. На наступному слайді пропонується коментар до такого розв'язання з вірною відповіддю, що обговорюється (або студенти займаються самооцінюванням).

Примітка. В даному варіанті гри акцент зроблено на розв'язуванні рівнянь і нерівностей шкільного курсу математики. На розсуд викладача коло задач, розв'язання яких розглядається, можна розширити.

I. Раціональні рівняння та нерівності

1. *Розв'язати рівняння* $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Розв'язання: За формулою маємо: $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Враховуючи, що $\sqrt{2} = 2{,}4...$, і округляючи значення кореня до першого знака після коми, запишемо: $x_1 \approx 2{,}4$, $x_2 \approx -0{,}6$.

Коментар: таке округлення неприпустимо, якщо в задачі немає вимоги знайти розв'язання з точністю до деякого знака після коми.

Вірна відповідь: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

2. *Розв'язати нерівність*: $\dfrac{x-4}{x-3} > 0$.

Розв'язання: Неравенство равносильно системе: $\begin{cases} x-4>0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases}$, решая которую получим $x > 4$. Проверим $x = 5$. *Ответ*: $(4;+\infty)$.

Коментар: ответ неверен, т.к. не исследуется знак знаменателя.
Вірна відповідь: $(-\infty;3)\cup(4;+\infty)$.

3. ***Розв'язати нерівність*:** $\dfrac{x-4}{2-x}>0$**.**

Розв'язання: Дана нерівність равносильна системі: $\begin{cases} x-4>0 \\ 2-x>0 \end{cases}$, вирішуючи яку одержимо: $x\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$. Це і є відповідь.
Коментар: одержана система не має розв'язків. Фактично була розв'язана сукупність нерівностей.
Вірна відповідь: $(2;4)$.

4. ***Розв'язати нерівність*:** $\dfrac{x-5}{3-x}>0$**.**

Розв'язання: Дана нерівність равносильна системі: $\begin{cases} x-5>0 \\ 3-x>0 \end{cases}$, вирішуючи яку одержимо: $\varnothing$. Це і є відповідь.
Коментар: Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем, одна з яких дійсно не має розв'язків.
Вірна відповідь: $(3;5)$.

5. ***Розв'язати нерівність*:** $(x-2)(3-x)(x-4)>0$**.**
Розв'язання: Скористаємося методом інтервалів. $f(x)=(x-2)(3-x)(x-4)$; $f(x)=0$ при $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=4$. Наносимо нулі функції на числову вісь. Визначаємо знак $f(x)$ в точці $x=0$, яка належить лівому проміжку. $f(0)=-2\cdot3\cdot(-4)=24>0$. Следовательно, на $(-\infty;2)$ $f(x)>0$. Функция $f(x)$ не має коренів парної кратності, тому при переході через точки 2, 3, 4 знак цієї функції всякий раз змінюється на протилежний. Відповідь: $(-\infty;2)\cup(3;4)$.
Коментар: розв'язання вірно, достатньо обгрунтовано.
Вірна відповідь: $(-\infty;2)\cup(3;4)$.

6. ***Розв'язати нерівність*:** $\dfrac{(x-1)^2}{(x-3)(x-4)}>0$**.**

Розв'язання: Скористаємося методом інтервалів. $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{(x-3)(x-4)}$.
Знайдемо нулі функції і значення x, при яких функція $f(x)$ не існує: $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=4$.

Знайдемо, наприклад, $f(5)=\dfrac{16}{2\cdot1}>0$. Отже, при $x>4$ $f(x)>0$. А далі змінюємо знаки на проміжках на вісі. Отримаємо відповідь: $(1;3)\cup(4;+\infty)$.

Коментар: знаки функції $f(x)$ на решті проміжках визначені невірно, так як $x=1$ є коренем парної кратності і при переході через цю точку функція знака не змінює.
Вірна відповідь: $(-\infty;1)\cup(1;3)\cup(4;+\infty)$.

7. *Розв'язати нерівність*: $\dfrac{(x-8)^2}{x-7}>0$.

Розв'язання: Чисельник цього дробу завжди додатній, тому, щоб дріб був додатній, достатньо, щоб $x-7>0$. Відповідь: $(7;+\infty)$.
Коментар: Вихідна нерівність строга, а чисельник завжди невід'ємний, тому точку $x=8$ треба виключити із відповіді.
Вірна відповідь: $(7;8)\cup(8;+\infty)$.

8. *Розв'язати нерівність*: $\dfrac{(x-8)^2}{x-10}\geq 0$.

Розв'язання: Чисельник цього дробу завжди невід'ємний, тому, щоб дріб був невід'ємний, достатньо, щоб $x-10>0$. Відповідь: $(10;+\infty)$.
Коментар: при $x=8$ нерівність виконується, так як нерівність нестрога.
Вірна відповідь: $\{8\}\cup(10;+\infty)$.

9. *Розв'язати нерівність*: $\dfrac{2}{x-2}<1$.

Розв'язання: помножуючи обидві частини нерівності на $x-2$, маємо: $2<x-2$, звідки $x>4$. Відповідь: $(4;+\infty)$.
Коментар: Нерівність не можна помножати на вираз, знак якого невідомий! Вирішуючи нерівність таким чином, треба було б записати, що вихідна нерівність равносильна такій сукупності двох систем: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x-2\\ x-2>0\end{cases}\\ \begin{cases}2>x-2\\ x-2<0\end{cases}\end{array}\right.$.

Вірна відповідь: $(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$.

10. *Розв'язати нерівність*: $\dfrac{x^2+11}{x+5}\leq 2$.

Розв'язання: Перенесемо 2 в леву частину нерівності і виконаємо перетворення, ожержимо $\dfrac{(x-1)^2}{x+5}\leq 0$. Далі вирішуємо методом інтервалів.
Ответ: $(-\infty;-5)\cup\{1\}$.
Коментар: нерівність розв'язано вірно.
Вірна відповідь: $(-\infty;-5)\cup\{1\}$.

11. ***Розв'язати нерівність*****:** $x^2 - 3x + 5 > 0$**.**
Розв'язання: $D = 9 - 4 \cdot 5 = -11 < 0$. Отже, розв'язків немає.
Відповідь: $\emptyset$.
Коментар: Відсутність коренів квадратного тричлена не означає відсутність розв'язків відповідної квадратної нерівності. Можно розв'язати, використовуючи графік або метод інтервалів. Нулі функції $f(x) = x^2 - 3x + 5$ відсутні (на числову пряму ніякі точки не наносимо). Обчислюємо $f(x)$ в зручній точці із R, наприклад, в точці $x = 0$.
Вірна відповідь: R.

II. Ірраціональні рівняння і нерівності

1. ***Розв'язати рівняння:*** $\sqrt{x+4} = x - 2$**.**
Розв'язання: Підносимо обидві частини рівняння до квадрату, одержимо: $x + 4 = x^2 - 4x + 4$, далі: $x^2 - 5x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$; x_1 і x_2 входять в ОДЗ.
Відповідь: 0; 5.
Коментар: Хоча $x = 0$ і входить в ОДЗ, однак, корнем не є: $\sqrt{4} \neq -2$. Сторонній корінь з'явився тому, що права частина рівняння в даній ОДЗ може приймати і від'ємні значення.
Вірна відповідь: 5.

2. ***Розв'язати рівняння*****:** $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = 0$**.**
Розв'язання: $\sqrt{x} = 0$ або $\sqrt{x-1} = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Відповідь: 0;1.
Коментар: добуток двох функцій дорівнює нулю, якщо одна з них дорівнює нулю, а інша при цьому має смисл! Тому дане рівніння рівносильно такій сукупності: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}\end{array}\right.$.
Вірна відповідь: 1.

3. ***Розв'язати рівняння*****:** $1 + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = x$**.**
Розв'язання: $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 1$; $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow 0 = 0$.
Отже, відповідь: $(-\infty; +\infty)$.
Коментар: Невірно. Не враховано ОДЗ. Фактично, вихідне рівняння рівносильно системі: $\begin{cases} 0 = 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$.
Вірна відповідь: $[1; +\infty)$.

4. ***Розв'язати нерівність*** **:** $\sqrt{x-3} < -\sqrt{5}+1$**.**

Розв'язання: піднесемо обидві частини нерівності до квадрату, одержимо $x-3 < 5-2\sqrt{5}+1;\ x < 9-2\sqrt{5}$. Відповідь: $\left(-\infty; 9-2\sqrt{5}\right)$.

Коментар: Піднесення до квадрату у даному випадку неприпустимо, так як $-\sqrt{5}+1<0$. Функція $y=\sqrt{x-3}$ приймає тільки невід'ємні значення, тому нерівність не може виконуватися ні при яких значеннях x.

Вірна відповідь: $\varnothing$.

5. ***Розв'язати рівняння*****:** $\sqrt{x-3} = \sqrt{5}+1$**.**

Розв'язання: піднесемо обидві частини рівняння до квадрату, одержимо: $x-3 < 5+2\sqrt{5}+1,\ x < 9+2\sqrt{5}$. Відповідь: $\left(-\infty; 9+2\sqrt{5}\right)$.

Коментар: не враховано умову існування $\sqrt{x-3}$, тобто $x-3 \ge 0$.

Вірна відповідь: $\left[3; 9+2\sqrt{5}\right)$.

6. ***Розв'язати нерівність*****:** $\sqrt{2x-5} > -1$**.**

Розв'язання: оскільки одна із частин нерівності від'ємна, підносити його до квадрату не можна. Ліва частина нерівності невід'ємна при всіх значеннях x, при яких вона визначена, тобто $2x-5 \ge 0$. Отже, $\sqrt{2x-5} \ge 0 > -1$. Розв'язанням є $x \ge \frac{5}{2}$. Ответ: $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Коментар: розв'язаня вірно. Попередження: перш, ніж підносити до квадрату, подумайте, чи можна це робити. Дехто, не підносячи до квадрату, вважає, що розв'язанням є будь-яке x.

Вірна відповідь: $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

7. ***Розв'язати нерівність*****:** $\sqrt{2-x^2} < x+1$**.**

Розв'язання: Підносимо до квадрату обидві частини нерівності, одержимо: $2-x^2 < x^2+2x+1 \Leftrightarrow 2x^2+2x+1>0$. Вирішуючи останню нерівність, маємо: $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$. Крім того, $2-x^2 \ge 0$. Так як $-\sqrt{2} < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, то розв'язанням вихідної нерівності буде: $\left[-\sqrt{2}; \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; \sqrt{2}\right]$. Це і є відповідь.

Коментар: розв'язання невірне, так як при піднесенні до квадрату слід також вимагати, щоб $x+1 \ge 0 \Rightarrow x \ge -1$, а $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < -1$.

Вірна відповідь: $\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; \sqrt{2}\right]$.

8. ***Розв'язати нерівність*****:** $\sqrt{x+1} > x-1$**.**

Розв'язання: піднесемо обидві частини нерівності до квадрату, після перетворень одержимо: $x^2-3x<0 \Rightarrow 0<x<3$. Звертаємо увагу, що при одержаних x $\sqrt{x+1}$ існує. Відповідь: $(0;3)$.

Коментар: Насправді, вірна відповідь є ширшою множиною. Піднесення до квадрату припустимо лише в тому випадку, коли $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Якщо ж $x-1<0 \Rightarrow x<1$, то деякі із таких x, що задовольняють умові $x+1 \geq 0$ (ОДЗ вихідної нерівності) також входять у шукану множину, а саме, $-1 \leq x < 1$, так як при них виконується умова $\sqrt{x+1} \geq 0 >$деякого від'ємного числа.

Вірна відповідь: $[-1;3)$.

9. ***Розв'язати нерівність*****:** $\sqrt{x+1} > x$**.**

Розв'язання: піднесемо обидві частини нерівності до квадрату, одержимо $x+1>x^2$; вирішуючи цю нерівність, маємо: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. З урахуванням, що $x \geq 0$(щоб можна було піднести до квадрату), маємо: $0 \leq x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ці значення входять в ОДЗ. Відповідь: $\left[0;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Коментар: Відповідь невірна. Задля розв'язання ірраціональної нерівності виду $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ слід використовувати такі міркування:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Вірна відповідь: $\left[-1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

III. Показникові та логарифмічні рівняння та нерівності

1. ***Розв'язати рівняння*****:** $3^{x-1} = 2-\sqrt{5}$**.**

Розв'язання: Прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою 3, одержимо: $\log_3 3^{x-1} = \log_3(2-\sqrt{5})$,

і далі $x-1=\log_3(2-\sqrt{5}) \Rightarrow x=1+\log_3(2-\sqrt{5})$. Відповідь: $x=1+\log_3(2-\sqrt{5})$.

Коментар: Логарифмування в даному випадку неправомірно, так як $2-\sqrt{5}<0$. Задане рівняння розв'язків не має.

Вірна відповідь: $\emptyset$.

2. ***Розв'язати нерівність***: $2^{x-3} < \frac{1}{16}$.

Розв'язання: Перепишемо нерівність у вигляді $2^{x-3} < 2^{-4}$. Так як функція $y = 2^x$ зростає на всій числовій прямій, то одержана нерівність рівносильна нерівності $x - 3 < -4 \Rightarrow x < -1$. Відповідь: $(-\infty;-1)$.

Коментар: Нерівність розв'язано вірно.

Вірна відповідь: $(-\infty;-1)$.

3. *Розв'язати нерівність*: $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$**.**

Розв'язання: Перепишемо нерівність у вигляді: $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$. Отже, $x < -2$.

Відповідь: $(-\infty;-2)$.

Коментай: Наведене розв'язання невірне. Так як функція $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ спадає на всій числовій прямій, то $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow x > -2$.

Вірна відповідь: $(-2;+\infty)$.

4. *Розв'язати рівняння*: $\log_3(x-1) + \log_3(x-3) = 1$**.**

Розв'язання: використовуючи властивості логарифмів, одержимо рівняння: $\log_3(x-1)(x-3) = 1$, звідки $(x-1)(x-3) = 3$, або $x^2 - 4x = 0$. Корені цього рівняння $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Відповідь: 0; 4.

Коментар: При розв'язуванні рівняння слід знайти ОДЗ або виконати перевірку. $\begin{cases} x-1>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$. Цьому проміжку належить лише один корінь $x_2 = 4$.

Вірна відповідь: 4.

5. *Розв'язати рівняння*: $\log_2(x+1) - \log_2(x-2) = 2$**.**

Розв'язання: використовуючи властивості логарифмів, одержимо рівняння $\log_2 \frac{x+1}{x-2} = 2 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} = 2$. Із останнього рівняння маємо $x = 5$. Відповідь: 5.

Коментар: У розв'язуванні припущено помилку. Перед тим, як потенціювати рівняння $\log_2 \frac{x+1}{x-2} = 2$, представити праву частину в вигляді: $2 = \log_2 4$. Тоді маємо рівняння $\frac{x+1}{x-2} = 4 \Rightarrow x = 3$. После чого виконуємо перевірку.

Вірна відповідь: 3.

6. ***Розв'язати нерівність*:** $\log_5(2x-2) < \log_5(x+3)$**.**

Розв'язання: використовуючи властивість монотонності функції $y = \log_5 x$, одержуємо $2x-2 < x+3 \Rightarrow x < 5$. Відповідь: $(-\infty;-5)$.

Коментар: розв’язання невірне, оскільки не було вказано ОДЗ. Фактично, задана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} 2x-2 < x+3 \\ 2x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$ (дві останні нерівності системи – це ОДЗ). Вирішуючи систему (третя нерівність системи виконується, якщо виконуються перші дві), одержуємо $1 < x < 5$.

Вірна відповідь: $(1;5)$.

7. ***Розв'язати нерівність*:** $\log_2 x - \log_2(x-2) < \log_2 3$**.**

Розв'язання: Скориставшись ластивостіми логарифмів, одержуємо $\log_2 \dfrac{x}{x-2} < \log_2 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} < 3 \Rightarrow \\ \dfrac{x}{x-2} > 0 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ x > 3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 2 \end{array}\right. \end{cases}$. Знаходимо переріз одержаних множин: $(-\infty;0) \cup (3;+\infty)$.

Коментар: при використанні властивості логарифмів $\log_a b - \log_a c = \log_a \dfrac{b}{c}$ відбулося розширення області визначення. Тому слід враховувати область визначення вихідної нерівності $\begin{cases} x > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$.

Вірна відповідь: $(3;+\infty)$.

8. ***Розв'язати нерівність*:** $\dfrac{\lg(x^2-6x+9)}{\lg\sqrt{x-3}} > 1$**.**

Розв'язання: Оскільки функція $y = \lg x$ зростає на всій своїй області визначення, то задана нерівність рівносильна такій подвійній нерівності: $x^2 - 6x + 9 > \sqrt{x-3} > 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 > (x-3)^{\frac{1}{2}} > 0$. Нерівність $(x-3)^{\frac{1}{2}} > 0$ має розв’язки $x > 3$. Розглянемо нерівність $(x-3)^2 > (x-3)^{\frac{1}{2}}$. Оскільки $(x-3)^{\frac{1}{2}} > 0$ при всіх $x > 3$, то одержимо $(x-3)^{\frac{3}{2}} > 1 \Leftrightarrow x-3 > 1 \Rightarrow x > 4$. Відповідь: $(4;+\infty)$.

Коментар: Помилка в представленому розв’язанні складається в тому, що не враховується той факт, що чисельник і знаменник дробу можуть бути і від’ємними.

$$\frac{\lg(x^2-6x+9)}{\lg\sqrt{x-3}}>1 \Leftrightarrow \frac{\lg(x^2-6x+9)-\lg\sqrt{x-3}}{\lg\sqrt{x-3}}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg(x^2-6x+9)-\lg\sqrt{x-3}>0 \\ \lg\sqrt{x-3}>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \lg(x^2-6x+9)-\lg\sqrt{x-3}<0 \\ \lg\sqrt{x-3}<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв’язання першої системи: $\begin{cases} (x-3)^2>\sqrt{x-3} \\ \sqrt{x-3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>4$; другої системи: $\begin{cases} (x-3)^2<\sqrt{x-3} \\ 0<\sqrt{x-3}<1 \end{cases} \Leftrightarrow 3<x<4$. Знаходимо об’єднання цих множин, одержуємо остаточну відповідь.

Вірна відповідь: $(3;4)\cup(4;+\infty)$.

IV. Тригонометричні рівняння

1. *Розв'язати рівняння*: $\sin x=\frac{1}{2}$**.**

Розв'язання: Застосовуючи загальну формулу для розв’язання тригонометричного рівняння виду …, маємо: $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+2\pi k, k\in Z$. І далі відповідь: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$.

Коментар: В запису відповіді є дві помилки, пов’язані з «приблизним» знанням формули для розв’язанням рівняння $\sin x=a$.

Вірна відповідь: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.

2. *Розв'язати рівняння*: $\cos 3x=\frac{1}{2}$**.**

Розв'язання: задане рівняння рівносильне рівнянню $3x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi k, k\in Z$

Звідки $3x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$, $x=\pm\frac{\pi}{9}+2\pi k, k\in Z$. Відповідь: $x=\pm\frac{\pi}{9}+2\pi k, k\in Z$.

Коментар: відповідь невірна, так як в останній дії не поділено на 3 другий доданок $2\pi k$.

Вірна відповідь: $x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi k, k\in Z$.

3. ***Розв'язати рівняння*****:** $\sin 4x = 2$**.**

Розв'язання: Задане рівняння рівносильне рівнянню $4\sin x = 2$, звідки $\sin x = \frac{1}{2}$ і $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$. Відповідь: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Коментар: $\sin 4x \neq 4\sin x$! Крім того, $\sin 4x = 2$ не має розв'язків, оскільки для всіх α, $-\infty < \alpha < +\infty$, виконується $|\sin\alpha| \leq 1$.

Вірна відповідь: розв'язків немає.

4. ***Розв'язати рівняння*****:** $\cos x^2 = 0$**.**

Розв'язання: Введемо нову змінну $t = x^2$, тода маємо $\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. Отже, задане рівняння рівносильне рівнянню $x^2 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, яке має розв'язки лише при $k \geq 0$. Це обмеження слід урахувати при запису відповіді. Відповідь: $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + \pi k}$, $k \in N_0$.

Коментар: наведене розв'язання вірне.

Вірна відповідь: $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + \pi k}$, $k \in N_0$.

5. ***Розв'язати рівняння*****:** $1 + tg^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = 0$**.**

Розв'язання: зведемо ліву частину рівняння до спільного знаменника: $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 1}{\cos^2 x} = 0$, або $\frac{0}{\cos^2 x} = 0$. Відповідь: x - будь-яке число.

Коментар: пригадаємо, що дріб дорівнює нулю в тому і тільки в тому випадку, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю. Тому із відповіді необхідно виключити ті значення x, при яких $\cos x = 0$.

Вірна відповідь: $\left\{(-\infty;+\infty)\middle| x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right\}$.

6. ***Розв'язати рівняння*****:** $2\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x + 1 = 0$**.**

Розв'язання: використовуючи основну тригонометричну тотожність, зведемо задане рівняння до квадратного відносно $\cos x$: $-2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x + 3 = 0$; $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x - 3 = 0$. Вводимо нову змінну $t = \cos x$, одержуємо: $2t^2 - \sqrt{3}t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t - \sqrt{3})(t + \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$, звідки, повертаючись до вихідної змінної, одержимо: $\cos x = \sqrt{3}$ або $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. В результаті маємо таку відповідь: $x = \pm\arccos\sqrt{3} + 2\pi k, k \in Z$; $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

Коментар: рівняння $\cos x = \sqrt{3}$ не має розв'язків. Крім того, якщо тригонометричне рівняння має декілька сімейств розв'язків, то необхідно слідкувати за тим, щоб параметри в розв'язках були різними.

Вірна відповідь: $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

7. *Розв'язати рівняння*: $3\cos x - \pi = 0$.

Розв'язання: $3\cos x - \pi = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\pi}{3}$, звідки $x = \pm\arccos\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Відповідь: $x = \pm\arccos\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Коментар: наведене розв'язання невірне, оскільки $\frac{\pi}{3} > 1$.

Вірна відповідь: $\varnothing$.

8. *Розв'язати рівняння*: $tg 2x = -tgx$.

Розв'язання: скориставшись формулою для тангенса подвійного кута, одержимо: $\frac{2tgx}{1 - tg^2 x} = -tgx$. Поділивши обидві частини рівняння на tgx, маємо: $2 = -1 + tg^2 x \Leftrightarrow tg^2 x = 3$. І далі: $tgx = \sqrt{3}$ или $tgx = -\sqrt{3}$. Вирішуючи кожне із цих рівнянь, одержуємо відповідь: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

Коментар: При діленні обох частин рівняння на tgx було необхідно оговорити, що $tgx \neq 0$. А потім перевірити, чи не є $tgx = 0$ розв'язанням вихідного рівняння. Перевірка показує, що у відповіді треба вказати ще і значення $x = \pi n, n \in Z$.

Вірна відповідь: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$; $x = \pi n, n \in Z$.

9. *Розв'язати рівняння*: $\sin 3x - \cos 3x = 0$.

Розв'язання: Нехай $\cos 3x \neq 0$. Поділимо обидві частини рівняння на $\cos 3x$. Одержимо рівняння: $tg 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k, k \in Z$. Перевіримо, чи не здобули ми в результаті ділення на $\cos 3x$ сторонніх розв'язків. Легко бачити, $\cos 3\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) \neq 0$. Перевіримо, чи не загубили ми в результаті ділення на $\cos 3x$ розв'язків. Розглянемо випадок $\cos 3x = 0$, але тоді одночасно і $\sin 3x = 0$ (из условия), что суперечить основній тригонометричній тотожності. Отже, інших розв'язків вихідне рівняння не має. Відповідь: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k, k \in Z$.

Коментар: наведне розв'язання вірне, достатньо обгрунтовано.

Вірна відповідь: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k, k \in Z$.

15.4. Домашнє завдання

1. Скласти конспект фрагменту уроку з математики (для старшої школи), який містить усне, колективне і самостійне розв'язування задач учнями. Оформіть на окремому аркуші.
2. Продовження дидактичної гри «Оціни розв'язання»: на занятті у 10 класі *з курсу за вибором «Розв'язування задач з параметрами»* (авторів Апостоловой Г.В., Прокопенко Н.С.) [50] учні виконують, наприклад, нижченаведені завдання (надається роздрукований текст), розв'язання яких треба оцінити і надати відповідний коментар із вірною відповіддю (оформити на окремому аркуші).

1. ***Знайти всі значення параметра*** b***, при кожному з яких рівняння*** $x^2 + 4bx + 4 = 0$ ***має два різних кореня.***

Розв'язання: $\frac{D}{4} = 4b^2 - 4$; $\frac{D}{4} > 0 \Rightarrow 4b^2 - 4 > 0$, $4b^2 > 4$, звідки $b > 1$.

Відповідь: $b > 1$.

2. ***Знайти всі значення параметра*** p***, при кожному з яких рівняння*** $px^2 - 2x + 1 = 0$ ***має два різних кореня.***

Розв'язання: вимагаємо щоб $D > 0$ ($\frac{D}{4} > 0$). $\frac{D}{4} = 1 - p > 0 \Rightarrow p < 1$. Відповідь: $p < 1$.

3. ***Знайти всі значення параметра*** p***, при кожному з яких квадратне рівняння*** $px^2 + x + 2 = 0$ ***має рівно один корінь.***

Розв'язання: Якщо $p = 0$, то $x + 2 = 0$, $x = -2$. Якщо $p \neq 0$, то висуваємо умову: $D = 0$; $D = 1 - 8p$; $1 - 8p = 0$; $p = \frac{1}{8}$. Відповідь: $p = 0$; $\frac{1}{8}$.

4. ***Знайти всі значення параметра*** p***, при кожному з яких квадратне рівняння*** $x^2 + px + 4 = 0$ ***має один корінь.***

Розв'язання: Вихідне рівняння має один корінь за умови $D \geq 0$, при цьому, якщо $D = 0$, рівняння має рівно один корінь, а при $D > 0$ - два корені (а якщо є два корені, то є і один). $D = p^2 - 16$; $p^2 - 16 \geq 0$. Маємо: $p \leq -4$ або $p \geq 4$. Відповідь: $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

5. *Знайти всі значення параметра p, при кожному з яких сума квадратів коренів рівняння $x^2 + px + 1 = 0$ приймає найменше значення.*

Розв'язання: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2$, так як $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = 1$ за теоремою Вієта. Вираз $p^2 - 2$ приймає найменше значення при $p = 0$. Відповідь: $p = 0$.

6. *Знайти всі значення параметра q, при кожному з яких сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (q-1)x + 1 = 0$ приймає найменше значення.*

Розв'язання: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = q^2 - 2q - 1$. Найменше значення суми квадратів є нуль, тому $q^2 - q - 1 = 0$, $q_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Відповідь: $q_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

15.5. Література

Основна: [27], [64], [81], [97], [104], [121].
Додаткова: [88], [114], [115], [116], [143], [144].

15.6. Аналіз практичного заняття №15 з точки зору формування у студентів нормативної, варіативної та проектувально-моделювальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Нормативна складова

У процесі практичного заняття №15 майбутні вчителі математики мають необхідність звертатися до програм з математики з метою з'ясування, в якому класі на якому рівні вивчаються ті чи інші рівняння або нерівності шкільного курсу математики. Аналізуючи задачний матеріал, студенти опрацьовують зміст шкільного курсу математики, роблять висновки про те, як реалізуються цілі і завдання навчання математики в основній і старшій школах. І, насамперед, на даному практичному заняття акцентується увага на формуванні знань щодо критеріїв і умінь студентів оцінювати навчальні досягнення учнів, у першу чергу при розв'язуванні ними рівнянь і нерівностей шкільного курсу математики.

Варіативна складова

Працюючи із задачним матеріалом на даному практичному занятті майбутні фахівці одержують знання щодо реалізації змісту програм до певного року навчання в чинних підручниках, вчаться їх аналізувати. Студенти набувають умінь і досвіду користування програмами для профільного і поглибленого навчання математики, курсів за вибором, одержують знання щодо організації проведення курсів за вибором.

Проектувально-моделювальна складова

На практичному занятті №15 відбувається подальше формування у майбутніх учителів математики знань і умінь застосовувати прийоми організації навчальної діяльності учнів, зокрема при розв'язувані математичних задач; добирати необхідні методи, форми і засоби навчання математики для реалізації поставленої мети; проектувати і складати конспекти фрагментів уроків із певними вимогами.

Практичне заняття №16

Тема: *Проведення модульної контрольної роботи №3 з теми:* ***«Методика навчання учнів доведень теорем. Задачі у навчанні математики».***

Мета: узагальнення і систематизація знань з теми «Методика навчання учнів доведень теорем. Задачі у навчанні математики»; формування вмінь реалізовувати методику навчання учнів доведень теорем, розв'язування математичних задач; заохочення щодо самостійного опрацювання деяких питань навчального курсу «Загальна методика навчання математики»; набуття досвіду проектування фрагментів уроків із певними вимогами, з конкретних тем шкільного курсу математики; перевірка та оцінка результатів навчання.

Примітка 1. Домашнє завдання до практичного заняття №15 перевіряється викладачем індивідуально у кожного студента.

До перевірки домашнього завдання

Коментар до завдання 1: Наведені спочатку міркування щодо дискримінанту вірні, але нерівність $4b^2 > 4$ розв'язано невірно.
Вірна відповідь: $b < -1$ або $b > 1$.

Коментар до завдання 2: в одержану відповідь входить і $p = 0$, при якому вихідне рівняння обертається в лінійне: $-2x + 1 = 0$ і $x = \frac{1}{2}$ - єдиний корінь. Тому $p = 0$ слід виключити із відповіді.
Вірна відповідь: $p < 0$ або $0 < p < 1$.

Коментар до завдання 3: при $p = 0$ рівняння не є квадратним (вимога умови завдання).
Вірна відповідь: $p = \frac{1}{8}$.

Коментар до завдання 4: Розв'язання вірне. Слід звернути увагу на поняття «один корінь» (у розумінні «хоча б один корінь») і «рівно один корінь» (у розумінні «точно один корінь»).
Вірна відповідь: $(-\infty;-4] \cup [4;+\infty)$.

Коментар до завдання 5: При $p = 0$ вираз $p^2 - 2 < 0$ і не може бути сумою квадратів коренів рівняння, при $p = 0$ корені не існують. $D = p^2 - 4 \ge 0 \Rightarrow$ $p \le -2$ або $p \ge 2$.

Вірна відповідь: -2; 2.

Коментар до завдання 6: Розв'язання невірне, оскільки при знайдених значеннях $D=-2<0$ і рівняння взагалі не має коренів. Будемо вимагати: $D=q^2-2q-3\geq 0$, що вірно при $q\leq -1$ або $q\geq 3$. На цих множинах треба знайти найменше значення функції $y=q^2-2q-1$.
Вірна відповідь: -1; 3.

Примітка 2. Студентам заздалегідь пропонуються питання до самостійного вивчення та рекомендована література. Тільки за умови їх успішного опрацювання студенти можуть отримати максимальний бал за модульну контрольну роботу №3.

16.1. Питання до самостійного вивчення до модульної контрольної роботи №3

1. Методика роботи з алгоритмами і правилами шкільного курсу математики.
2. Навчання математики на поглибленому рівні на сучасному етапі розвитку шкільної математичної освіти.
3. Навчання математики в класах математичного та фізико-математичного профілів на сучасному етапі розвитку шкільної математичної освіти.

Рекомендована література:

[3], [4], [5], [15; §22], [49], [50], [96], [98], [115], [121], [122], [131], [77; С. 59-68], [140; С. 125-128], [10], [28], [105; Ч.3: Методика роботи з правилами і алгоритмами шкільного курсу математики. Методика актуаліації базових знань учнів. – 2004. – 112 с.], [157; розділ 8, §4].
]

16.2. Орієнтовні зміст і оцінювання модульної контрольної роботи №3

Варіант 1

1. а) Методи доведення теорем. Цільне доведення і доведення по частинах. **6 б.**
1. б) Форми організації розв'язування задач. **6 б.**

2. Оцініть представлене розв'язання математичної задачі:
Вирішити нерівність: $\frac{1}{3x-2-x^2}\leq\frac{3}{7x-4-3x^2}$.

Розв'язання: $\frac{7x-4-3x^2-3(3x-2-x^2)}{(3x-2-x^2)(7x-4-3x^2)} \leq 0;$ $\frac{7x-4-3x^2-9x+6+3x^2}{(x-1)^2(x-2)(3x-4)} \leq 0;$ $\frac{-2x+2}{(x-1)^2(x-2)(3x-4)} \leq 0;$ $\frac{-2(x-1)}{(x-1)^2(x-2)(3x-4)} \leq 0;$ $\frac{2}{3(x-1)(x-2)(x-\frac{4}{3})} \geq 0.$

Відповідь: $\left(1;\ \frac{4}{3}\right) \cup (2;\infty)$.

Чи є воно безпомилковим, раціональним, повним, обґрунтованим?

Якщо припущені *помилки*, вкажіть, якого вони роду (алгоритмічні, логічні, графічні, термінологічні, ситуаційні), грубі чи негрубі.

Чи можна відзначити якісь *недоліки* такого розв'язання? **6 б.**

3. Охарактеризуйте методику роботи з *теоремою про площу паралелограма* (за п'ятьма основними етапами: 1) підготовча робота (мотивація, експеримент, дослідження тощо); 2) робота з формулюванням теореми; 3) робота з доведенням; 4) закріплення доведення; 5) закріплення теореми). Оформіть як конспект фрагменту уроку (з вказівкою на те, скільки часу відводиться на таку роботу). **10 б.**

Заробіть додаткові бали!

Охарактеризуйте перший етап навчання математики на поглибленому рівні (8-9 класи), сформулювавши мету такого навчання.

Проаналізуйте відмінності у змісті програм з математики для 8-9 класів різних освітніх рівнів. **5 б.**

Варіант 2

1. а) Методика навчання школярів доведенню теорем: пропедевтична робота. Перший рівень навчання доведенням. **6 б.**
1. б) Види задач з математики. **6 б.**

2. Оцініть представлене розв'язання математичної задачі:

Спростіть вираз: $\frac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}$.

Розв'язання: $\frac{\sqrt{(3x+2)^2-24x}}{3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{9x^2+12x+4-24x}\cdot\sqrt{x}}{3x-2} = \frac{\sqrt{(3x-2)^2}}{3x-2} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x}.$

Відповідь: $\sqrt{x}$.

Чи є воно безпомилковим, раціональним, повним, обґрунтованим?

Якщо припущені *помилки,* вкажіть, якого вони роду (алгоритмічні, логічні, графічні, термінологічні, ситуаційні), грубі чи негрубі.

Чи можна відзначити якісь *недоліки* такого розв'язання? **6 б.**

3. Охарактеризуйте методику роботи з *теоремою, оберненою до теореми Піфагора* (за п'ятьма основними етапами: 1) підготовча робота (мотивація, експеримент, дослідження тощо); 2) робота з формулюванням теореми; 3) робота з доведенням; 4) закріплення доведення; 5) закріплення теореми). Оформіть як конспект фрагменту уроку (з вказівкою на те, скільки часу відводиться на таку роботу). **10 б.**

Заробіть додаткові бали!

«Правило» і «алгоритм» - це тотожні поняття? Охарактеризуйте їх.

Підберіть вправи для роботи з учнями на кожному з трьох етапів формування алгоритму множення десяткових дробів. **5 б.**

Варіант 3

1. а) Методи доведення теорем: синтетичний і аналітичний. **6 б.**
1. б) Функції задач у навчанні математики. **6 б.**

2. Оцініть представлене розв'язання математичної задачі:

Розв'яжіть рівняння: $\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2.$

Розв'язання: Область визначення заданого рівняння визначається системою: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 9, \\ x \neq \frac{1}{3}. \end{cases}$ Перейдемо до логарифма з основою *x*, тоді матимемо: $\frac{5\log_x x}{\log_x \frac{x}{9}} + \frac{\log_x x^3}{\log_x \frac{9}{x}} + \frac{8\log_x x^2}{\log_x 9x^2} = 2.$ Після перетворень одержимо: $\frac{5}{1-\log_x 9} + \frac{3}{\log_x 9-1} + \frac{16}{\log_x 9+2} = 2.$ Зробимо заміну: нехай $\log_x 9 = t$, тоді рівняння прийме вигляд: $\frac{5}{1-t} + \frac{3}{t-1} + \frac{16}{t+2} = 2.$ Розв'яжемо таке дробово-раціональне рівняння: $\frac{16}{t+2} - \frac{2}{t-1} - 2 = 0;$ $\frac{16t-16-2t-4-2t^2-2t+4}{(t+2)(t-1)} = 0;$ $\begin{cases} t^2 - 6t + 8 = 0, \\ t \neq -2; t \neq 1 \end{cases}$ звідки t=2 або t=4. Повернувшись до змінної *x*, одержимо сукупність: $\left[\begin{array}{l} \log_x 9=2; \\ \log_x 9=4 \end{array}\right.$ і далі: $\left[\begin{array}{l} x^2=9; \\ x^4=9 \end{array}\right.$ Маємо чотири корені: $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = \sqrt{3}, x_4 = -\sqrt{3}.$ Враховуючи область визначення рівняння, одержуємо відповідь.

Відповідь: 3; $\sqrt{3}$.

Чи є воно безпомилковим, раціональним, повним, обґрунтованим?

Якщо припущені *помилки*, вкажіть, якого вони роду (алгоритмічні, логічні, графічні, термінологічні, ситуаційні), грубі чи негрубі.

Чи можна відзначити якісь *недоліки* такого розв'язання? **6 б.**

3. Охарактеризуйте методику роботи з *теоремою Піфагора* (за п'ятьма основними етапами: 1) підготовча робота (мотивація, експеримент, дослідження тощо); 2) робота з формулюванням теореми; 3) робота з доведенням; 4) закріплення доведення; 5) закріплення теореми). Оформіть як конспект фрагменту уроку (з вказівкою на те, скільки часу відводиться на таку роботу). **10 б.**

Заробіть додаткові бали!

Охарактеризуйте методичні особливості навчання математики в класах математичного та фізико-математичного профілів на сучасному етапі розвитку шкільної математичної освіти.

Як Ви розумієте термін «допрофільна підготовка»? 5 **б.**

Варіант 4

1. а) Методи доведення теорем. Пряме і косвене доведення. **6 б.**
1. б) Методи і способи розв'язування задач. **6 б.**

2. Оцініть представлене розв'язання математичної задачі:
Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$.
Розв'язання: Область визначення заданого рівняння визначається системою: $\begin{cases}15-x\geq 0,\\ 3-x\geq 0\end{cases}$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату: $15-x+3-x+2\sqrt{(15-x)(3-x)}=36$; відокремлимо радикал: $2\sqrt{45-18x+x^2}=18+2x$; поділимо обидві частини рівняння на 2: $\sqrt{45-18x+x^2}=9+x$; піднесемо знов обидві частини рівняння до квадрату: $45-18x+x^2=81+18x+x^2$, звідки одержуємо корінь $x=-1$, що задовольняє області визначення рівняння.
Відповідь: -1.

Чи є воно безпомилковим, раціональним, повним, обґрунтованим? Якщо припущені *помилки*, вкажіть, якого вони роду (алгоритмічні, логічні, графічні, термінологічні, ситуаційні), грубі чи негрубі.

Чи можна відзначити якісь *недоліки* такого розв'язання? **6 б.**

3. Охарактеризуйте методику роботи з *теоремою – ознакою паралельності прямих: «Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні перехресні кути рівні, то прямі паралельні»* (за п'ятьма основними етапами: 1) підготовча робота (мотивація, експеримент, дослідження тощо); 2) робота з формулюванням теореми; 3) робота з доведенням; 4) закріплення доведення; 5) закріплення теореми).
Оформіть як конспект фрагменту уроку (з вказівкою на те, скільки часу відводиться на таку роботу). **10 б.**

Заробіть додаткові бали!

Поняття «алгоритм».

Яке методичне призначення алгоритмів; правил?

Проведіть логіко-математичний аналіз правила віднімання десяткових дробів. **5 б.**

Варіант 5

1. а) Навчання учнів самостійно доводити теореми. **6 б.**

1. б) Поняття «задача» і роль математичних задач. **6 б.**

2. Оцініть представлене розв'язання математичної задачі:

Розв'яжіть нерівність: $\sqrt{2-x^2} < x+1$.

Розв'язання: піднесемо обидві частини нерівності до квадрату, одержимо: $2-x^2 < x^2+2x+1 \Leftrightarrow 2x^2+2x+1>0$. Вирішуючи останню нерівність, маємо: $\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$. Крім того: $2-x^2 \geq 0$. Т.к. $-\sqrt{2} < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, то розв'язання вихідної нерівності є $\left[-\sqrt{2};\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2};\sqrt{2}\right]$. Це і є *відповідь*.

Чи є воно безпомилковим, раціональним, повним, обґрунтованим?

Якщо припущені *помилки,* вкажіть, якого вони роду (алгоритмічні, логічні, графічні, термінологічні, ситуаційні), грубі чи негрубі.

Чи можна відзначити якісь *недоліки* такого розв'язання? **6 б.**

3. Охарактеризуйте методику роботи з *теоремою – ознакою рівнобедреного трикутника: «Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений»* (за п'ятьма основними етапами: 1) підготовча робота (мотивація, експеримент, дослідження тощо); 2) робота з формулюванням теореми; 3) робота з доведенням; 4) закріплення доведення; 5) закріплення теореми).Оформіть як конспект фрагменту уроку (з вказівкою на те, скільки часу відводиться на таку роботу). **10 б.**

Заробіть додаткові бали!

Сформулюйте властивості алгоритмів.

Що передбачає логіко-математичний аналіз алгоритмів (правил)?

Виконайте логіко-математичний аналіз правила множення одночлена на многочлен. **5 б.**

Варіант 6

1. а) Поняття доведення. Приклади. **6 б.**
1.б) Загальні рекомендації щодо навчання учнів розв'язуванню задач. **6 б.**

2. Оцініть представлене розв'язання математичної задачі:
Розв'яжіть нерівність: $\log_{\sqrt{2}-1}(x-2)>\log_{3-2\sqrt{2}}25$.

Розв'язання: Помітимо, що $3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$. Тоді $\log_{\sqrt{2}-1}(x-2)>\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}-1}25$, або $\log_{\sqrt{2}-1}(x-2)>\log_{\sqrt{2}-1}5$. Так як $0<\sqrt{2}-1<1$, то логарифмічна функція з такою основою спадає. Отже, $\begin{cases}x-2<5,\\ x-2>0\end{cases}$, або $0<x-2<5,\ 2<x<7$.

Відповідь: (2;7).

Чи є воно безпомилковим, раціональним, повним, обґрунтованим?

Якщо припущені *помилки,* вкажіть, якого вони роду (алгоритмічні, логічні, графічні, термінологічні, ситуаційні), грубі чи негрубі.

Чи можна відзначити якісь *недоліки* такого розв'язання? **6 б.**

3. Охарактеризуйте методику роботи з *теоремою – властивістю рівнобедреного трикутника, пов'язану з кутами* (за п'ятьма основними етапами: 1) підготовча робота (мотивація, експеримент, дослідження тощо); 2) робота з формулюванням теореми; 3) робота з доведенням; 4) закріплення доведення; 5) закріплення теореми). Оформіть як конспект фрагменту уроку (з вказівкою на те, скільки часу відводиться на таку роботу). **10 б.**

Заробіть додаткові бали!

Охарактеризуйте другий етап навчання математики на поглибленому рівні (10-11класи), сформулювавши мету такого навчання.

Наведіть приклади питань шкільного курсу математики 10-11 класів, які розглядаються тільки на поглибленому рівні вивчення математики. **5 б.**

16.6. Аналіз практичного заняття №16 з точки зору формування у студентів нормативної, варіативної та проектувально-моделювальної складових когнітивного та діяльнісного компонентів методичної компетентності вчителя математики

Нормативна складова

У процесі виконання модульної контрольної роботи №3 майбутні вчителі математики мають продемонструвати наявність вмінь користуватися нормативними документами, включаючи програми з математики різних рівнів; знання цілей і завдань навчання математики на різних рівнях в основній і старшій школах і уміння їх реалізовувати; знання критеріїв і уміння оцінювати навчальні досягнення учнів; володіння змістом шкільного курсу математики.

Варіативна складова

Позитивний результат виконання модульної контрольної роботи №3 передбачає наявність умінь студентів проводити логіко-дидактичний і логіко-математичний аналіз чинних підручників різних авторських колективів, включаючи підручники для поглибленого і профільного навчання математики, звертаючись до відповідних програм з математики для допрофільної підготовки, профільного і поглибленого навчання. У процесі підготовки до модульної контрольної роботи №3 майбутні фахівці одержують знання щодо особливостей реалізації профільного і поглибленого навчання математики.

Проектувально-моделювальна складова

Складаючи конспекти фрагментів уроків з певними вимогами, майбутні вчителі математики на даному практичному занятті реалізують знання щодо прийомів організації навчальної діяльності учнів, зокрема при вивченні теорем і розв'язуванні математичних задач, а також керування цією діяльністю. Використовуючи знання специфіки методів, форм, засобів навчання математики, студенти вчаться добирати їх адекватно меті та завданням уроку, користуючись різними підручниками і відповідними дидактико-методичними матеріалами.

Питання до самоконтролю
(завдання для підготовки до модульної контрольної роботи №1 з теми: «Елементи методичної системи»)

1. Опишіть обов’язкові результати навчання з теми “Тригонометричні функції”. Наведіть приклади завдань з діючого підручника, які можна (не можна) віднести до обов’язкових результатів навчання з цієї теми.
2. Сформулюйте цілі та завдання уроку по одній із тем шкільного курсу геометрії.
3. Сформулюйте цілі та завдання уроку по одній із тем шкільного курсу алгебри.
4. Сформулюйте цілі та завдання уроку по одній із тем шкільного курсу математики 5-6 класів.
5. Продумайте, які методи навчання математики, на Вашу думку, найбільш ефективні при вивченні теми “Розв’язання системи лінійних рівнянь з двома змінними графічним способом” на етапі:
   - перевірки раніше засвоєного матеріалу;
   - засвоєння нового матеріалу;
   - закріплення вивченого.

   Вашу думку обгрунтуйте.
6. При вивченні яких тем ШКМ доцільно проектувати комп'ютерно-орієнтовані уроки? Обгрунтуйте доцільність (або необхідність) застосування комп'ютеру як засобу навчання математики при вивченні зазначених тем.
7. Проведіть логіко-дидактичний аналіз теми «Похідна та її застосування», складіть тематичний план вивчення цієї теми.
8. Складіть інструктивну карточку для роботи учнів з підручником і опишіть методику організації самостійної роботи учнів з підручником з обраної Вами теми.
9. Наведіть приклади завдань, що демонструють застосування дослідницького методу при вивченні математики.
10. Проілюструйте реалізацію принципа наочності при вивченні теми «Декартові координати» (складіть конспект фрагменту уроку). Які засоби навчання можна при цьому застосувати?
11. Складіть фрагмент уроку з використанням мікрокалькулятора з теми «Дії над десятковими дробами». Обгрунтуйте доцільність (необхідність) використання даного засобу навчання математики.
12. Складіть фрагмент уроку з визначеної Вами теми з застосуванням пояснювально-ілюстративного методу навчання.
13. Складіть фрагмент уроку з теми «Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки» із застосуванням репродуктивного методу навчання.
14. Складіть фрагмент уроку з теми «Рівняння» (7 клас) із застосуванням проблемного викладу як методу навчання математики.

15. Побудуйте евристичну бесіду, присвячену введенню поняття «функція». Оформіть як конспект фрагменту уроку.
16. Складіть фрагмент уроку з використанням методу доцільних задач при вивченні теми «Відсоткові розрахунки» (6 клас).

Питання до самоконтролю
(завдання для підготовки до модульної контрольної роботи №2 з теми: «Методи і прийоми розумової діяльності. Математичні поняття і методика їх формування»)

1. Наведіть приклад теореми, перед доведенням якої доцільно запропонувати учням перевірити її справедливість неповною індукцією. Доведіть теорему.
2. Вкажіть схему міркування за аналогією.

   Які неправильні аналогії привели учнів до наступних помилок:

   $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta;\ \sqrt{a^2+b^2}=a+b;\ \log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y.$$
3. Наведіть приклади інших можливих помилок учнів в результаті застосування невірних аналогій.
4. Метод математичної індукції є прикладом індуктивних чи дедуктивних міркувань?
5. Доведіть методом математичної індукції деякі властивості логарифмів.
6. Продемонструйте, як використовується повна індукція в ході доведення зростання показникової фунції.
7. Зробіть висхідний аналіз задачі: доведіть, що якщо у паралелограма всі кути рівні, то він є прямокутником.
8. Проведіть порівняння властивостей паралелограма та паралелепіпеда, склавши таблицю. З використанням якого методу розумової діяльності доцільно вивчати властивості паралелепіпеда? Обгрунтуйте свою думку.
9. Як в ШКМ відбувається узагальнення поняття натурального числа? В чому сутність такого узагальнення?

   Яку назву має обернений процес і в чому його суть? Які теми вивчаються таким чином?
10. Підберіть задачу з практичним змістом і побудуйте математичну модель до неї. Який метод розумової діяльності був використаний при цьому?
11. Сформулюйте твердження, яке було б площинним аналогом наступної теореми: «Чотири діагоналі паралелепіпеда мають спільну точку, яка є серединою кожної з них». Чи буде таке твердження теоремою?
12. Коли при навчанні математики доцільно використовувати співставлення, а коли протиставлення? Наведіть приклади.
13. Розв’яжіть задачу, використовуючи “аналіз через синтез”: доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин вписаного у нього квадрата постійна.
14. Застосуйте алгоритм дії підведення під поняття мимобіжних прямих.
15. Назвіть суттєві ознаки поняття:

8) «логарифм числа»;
9) «арифметичний квадратний корінь»;
10) «правильна піраміда»;
11) «вписаний кут».

16. Дайте класифікацію поняття «опуклі чотирикутники» двома способами: використовуючи круги Ейлера-Венна і за допомогою схеми.
17. Чим відрізняються поняття: а) більйон і мільярд; б) тетраедр і трикутна піраміда; в) двочлен і біном; г) рівняння першого степеня і лінійне рівняння; д) кут і плоский кут; е) вертикальні кути і два кути, що мають спільну вершину; є) опуклий многокутник і опуклий многогранник?
18. Чи правильні такі означення понять? Якщо ні, вкажіть помилки:
    1) Кут, вершина кого лежить на колі, називається вписаним у коло.
    2) Чотирикутник з прямим кутом називається прямокутником.
    3) Середньою лінією трикутника називається лінія, що сполучає середини двох його сторін.
    4) Призма називається правильною, якщо в основі її лежить правильний многокутник.
    5) Два кути називаються суміжними, якщо дві сторони цих кутів є доповняльними півпрямими.
    6) Дві прямі в просторі називаються паралельними, якщо вони не перетинаються.
19. Зобразіть за допомогою кругів Ейлера-Венна обсяги таких понять:
    1) натуральні числа, цілі числа, непарні числа;
    2) функції, непарні функції, парні функції;
    3) правильні піраміди, правильні многогранники;
    4) многокутники, трикутники, прямокутні трикутники, рівнобедрені трикутники, рівносторонні трикутники.
20. Які з названих нижче понять мають більший обсяг? Які з них мають більший зміст?:
    а) правильна піраміда й правильний тетраедр;
    б) рівняння з однією змінною та квадратні рівняння;
    в) числові послідовності й геометричні прогресії;
    г) чотирикутні призми й паралелепіпеди?
21. Вкажіть найближчий рід поняття і його видові відмінності у таких означеннях:
    а) лінійною функцією називаються функція, яку можна задати формулою: $y = kx + b$, де x - незалежна змінна, k і b - деякі числа;
    б) дріб, у якого чисельник більший від знаменника або дорівнює йому, називається неправильним дробом;
    в) поворотом навколо даної точки називається такий рух, при якому кожний промінь, який виходить із даної точки,

повертається на один і той самий кут у одному і тому самому напрямі;

г) числова послідовність, перший член якої відмінний від нуля, а кожен член, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне і те саме число, відмінне від нуля, називається геометричною прогресією.

Які зі сформульованих вище означень є генетичними, рекурсивними? Наведіть інші приклади означень цих видів.

22. Які з наведених нижче рівностей є означеннями?:

а) $a^{-n}=\frac{1}{a^n},\quad a\neq 0$; б) $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$; в) $0!=1$; г) $C_0^0=1$;

д) $a^0=1,\quad a\neq 0$; е) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

ж) $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$.

23. Надайте приклади декількох означень понять ШКМ різних видів, а саме: а) через найближчий рід і видову відмінність; б) генетичних; в) конструктивних; г) рекурсивних; д) через перелік; е) у символічному вигляді.

24. Охарактеризуйте методику введення поняття «лінійного рівняння з однією змінною» абстрактно-дедуктивним способом, склавши відповідний конспект фрагменту уроку.

25. Складіть конспект фрагменту уроку введення поняття «бісектриса кута» конкретно-індуктивним способом.

26. Проілюструйте забезпечення засвоєння означення поняття «правильна призма» компактним методом, розробивши відповідний конспект фрагменту уроку.

27. Розробіть конспект фрагменту уроку забезпечення засвоєння означення поняття «хорда» роздільним методом. Засвоєння означень яких, на Вашу думку, понять також можна було б забезпечити роздільним методом?

28. Розробіть конспект фрагменту уроку забезпечення засвоєння означення поняття «границя функції» алгоритмічним методом.

29. Опишіть методику закріплення означення поняття арифметичного квадратного кореня, склавши відповідний конспект фрагменту уроку.

Питання до самоконтролю
(завдання для підготовки до модульної контрольної роботи №3 з теми: «Методика навчання учнів доведень теорем. Задачі у навчанні математики»)

1. Доведіть, що якщо $a>0,b>0$, то $\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\le\sqrt[4]{ab}$. Який метод доведення було використано?
2. Доведіть теорему – властивість вписаного чотирикутника. Охарактеризуйте проведене доведення за різними ознаками.
3. Доведіть різними способами, у тому числі координатним методом, що в рівнобічній трапеції *ABCD* відрізок *KD* дорівнює середній лінії (*K* – проекція точки *B* на більшу основу трапеції). В якому класі можна розглядати цю задачу?
4. Знайдіть кут між мімобіжними діагоналями двох суміжних граней куба (розв’яжіть задачу векторним методом).
5. Наведіть приклади декількох задач ШКГ, в яких ознаки рівності трикутників виступають як ключ до розв’язання задачі.
6. Запропонуте карточку-орієнтир для самостійного доведення учнями теореми про середню лінію трикутника іншим способом, відмінним від запропонованого у чинному підручнику.
7. Оформіть доведення теореми про суму кутів трикутника у вигляді таблиці, ліва колонка якої – твердження, права – його обгрунтування.
8. Доведіть, що якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його кутів, то цей паралелограм – ромб. Охарактеризуйте методику роботи з учнями над цією задачею.
9. Складіть набор достатніх умов для поняття прямокутника. Навіщо учням володіти систематизованим набором достатніх умов поняття? Наведіть приклад задачі, у процесі розв’язання якої доцільно пригадати з учнями набір достатніх умов поняття прямокутника.
10. Сторони трикутника 20, 34 і 42 см. Знайти площу вписаного прямокутника, якщо його периметр дорівнює 45 см. Розв’яжіть задачу алгебраїчним методом, використовуючи метод площ. Як пояснити учням, у чому сутність цього методу?
11. На якому рівні навчання математики можна давати учням таку задачу: “В квадрат вписаний інший квадрат, вершини якого належать сторонам першого, а сторони утворюють зі сторонами першого квадрата кути по 60°. Яку частину площі даного квадрата складає площа вписаного”?.
12. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y=4x-x^2$, $y=4-x$. Яким методом користуються для розв’язання цієї задачі?
13. Розв'яжіть задачу: Чому дорівнює кут трикутника зі сторонами 5, 12 і 13, протилежний стороні 13? Опишіть методику роботи з учнями над цією задачею.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Ц

Я

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Абдуллина О.А. Общепедагогическая подготовка учителя в системе высшего педагогического образования / О.А. Абдуллина. – М.: Просвещение, 1990. – 141 с.
2. Акуленко І.А. Індукція і дедукція у міркуванні школярів / І.А. Акуленко // Математика в школі. – 2005. - №7. – С. 9-17.
3. Алгебра і початки аналізу: [підруч. для 10 кл. з поглибленим вивченням математики] / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2010. – 415 с.
4. Алгебра: [підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики : у 2 ч.] / А.Г. Мерзляк, Д.А.Номіровський, В.Б.Полонський, М.С.Якір. — Х. : Гімназія, 2011. — Ч. 1. — 256 с.
5. Алгебра: [підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики : у 2 ч.] / А.Г. Мерзляк, Д.А.Номіровський, В.Б.Полонський, М.С.Якір. — Х. : Гімназія, 2011. — Ч. 2. — 272 с.
6. Архангельский С.И. Учебный процесс в высшей школе: его закономерные основы и методы / С.И. Архангельский. – М.: Педагогика, 1980. – 384 с.
7. Атаханов Р.А. К диагностике развития математического мышления / Р.А. Атаханов // Вопросы психологии. - 1992. - №1-2. - С. 60-67.
8. Атаханов Р.А. Соотношение общих закономерностей мышления и математического мышления // Вопросы психологии. - 1995. - №5. - С. 41-51.
9. Бабенко С.П. Уроки геометрії. 7 клас / С.П. Бабенко – Х.: Вид. група «Основа», 2007. – 208 с.
10. Байдак В.А. Формирование алгоритмической культуры у учащихся / В.А. Байдак, В.И. Ефимов, М.П. Лапчик // Повышение эффективности обучения математике в школе / [Сост. Г.Д. Глейзер.] – М.: Просвещение, 1989. – С. 74-79.
11. Барбина Е.С. Теоретико-методологические основы профессиональной подготовки будущих учителей: [науч.-метод. пособ.] / Е.С. Барбина. – Херсон: Айлант, 2001. – 70 с.
12. Бевз В.Г. Засоби навчання математики та історія математики / В.Г. Бевз // Математика. – 2003. - №37. – С. 10-14. – газета.
13. Бевз Г.П. Доведення від супротивного (геометрія) / Г.П. Бевз // Математика в школах України. – 2006. - №1. – С. 6-9.
14. Бевз Г.П. Методика викладання алгебри / Г.П. Бевз. – К.: Радянська школа, 1971. –272 с.
15. Бевз Г.П. Методика викладання математики / Г.П. Бевз. – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.
16. Білий Б.М. Методика викладання математики: становлення і розвиток в УРСР / Б.М. Білий. – Київ, 1971. – 286 с.
17. Богданова І.М. Професійно-педагогічна підготовка майбутніх вчителів на основі застосування інноваційних технологій : автореф. дис. на

здобуття наук.ступеня д-ра пед. наук : 13.00.04 «Теорія та методика професійної освіти» / І.М. Богданова. – К., 2003. – 38 с.
18. Бондар В.І. Дидактика: [підруч. для студентів вищих педагогічних навчальних закладів] / В.І. Бондар. – К.: Либідь, 2005. – 264 с.
19. Бондар О. Значення наочності у розвитку пізнавальної активності учнів / О.Бондар // Математика в школі. – 2001. - №2. – С.43-44.
20. Бродський Я. Шляхи оновлення змісту математичної освіти / Я. Бродський, О. Павлов // Математика в школі. – 2008. - № 1. – С. 24-26.
21. Бродський Я.С. Шляхи реформування шкільної математичнної освіти / Я.С. Бродський // Математика в школах України. – 2003. - №26. – С. 2-6; №27. – С. 2-6, газета.
22. Брушлинский А.В. Психология мышления и проблемное обучение / А.В. Брушлинский. - М.: Знание, 1983. – 96 с.
23. Бурда М.І. Розв'язування задач на побудову в 6-8 класах / М.І. Бурда. - К.: Рад. шк., 1986. – 111 с.
24. Василевский А.Б. Применение микрокалькуляторов при решении задач / А.Б. Василевский, О.А. Леончик // Повышение эффективности обучения математике в школе / Сост. Г.Д. Глейзер. – М.: Просвещение, 1989. – С. 68-74.
25. Васильченко І. Сучасна математика та методика її викладання / І. Васильченко // Вища школа. – 2001. - №6. – С. 33-37.
26. Володько В.М. Основні проблеми підготовки майбутнього вчителя / В.М. Володько // Педагогіка і психологія. – 1999. - №2. – С. 89-99.
27. Воробьйова С. Роль дидактичних задач у підготовці вчителя / С. Воробьйова // Рідна школа. – 2002. - №1. – С. 25-27.
28. Вяльцева И.Г. Формирование алгоритмической культуры у учащихся на уроках алгебры и начал анализа / И.Г. Вяльцева, А.С. Алексеев // Повышение эффективности обучения математике в школе / [Сост. Г.Д. Глейзер]. – М.: Просвещение, 1989. – С. 79-92.
29. Галицкий М.Л. Сборник задач по алгебре: [учеб. пособие для 8-9 кл. с углубл. изучением математики] / М. Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. – 12-е издание. – М. : Просвещение, 2006. – 301 с.
30. Гальперин П.Я. Формирование умственных действий и понятий / П.Я. Гальперин. – М.: Просвещение, 1965. - 384 с.
31. Гельфман Э.Г. Психолого-педагогические основы классификации задач в обучении / Э.Г. Гельфман, М.А. Холодная // Психолого-педагогические вопросы организации учебно-воспитательного процесса. – Томск: ТГУ, 1978. – С. 97-112.
32. Геометрія. 8 клас: [Учебник для общеобразоват. учеб. заведений] / А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський, С.В. Єршов. – Харьков: Издательство «Ранок», 2008. – 256 с.
33. Геометрія. 9 клас: [Підруч. для загальноосвіт. навч. закл.] / А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський, С.В. Єршов. – Х.: Вид-во «Ранок», 2010. – 256 с.

34. Глузман А.В. Университетское педагогическое образование: опыт системного исследования: [монографія] / А.В. Глузман. – К.: Просвіта, 1996. – 312 с.
35. Гриньова В.М. Формування педагогічної культури майбутнього вчителя (теоретичний та методичний аспект): [монографія] / В.М. Гриньова. – Х., 1998. – 312 с.
36. Грохольська А. Виготовлення і використання кодопозитивів на уроках математики в загальноосвітній школі / А. Грохольська // Математика в школі. – 2004. –№1. – С.12-15.
37. Гусак П.М. Підготовка вчителя: технологічні аспекти: [монографія] / П.М. Гусак. – Волинь: Ред.-вид.відділ «Вежа» Волинського державного університету ім. Лесі Українки, 1999. – 278 с.
38. Гусєв В.А. Позакласна робота з математики у 6-8 класах / В.А. Гусєв, А.І. Орлов, А.Л. Розенталь. – М.: Просвещение, 1984. – 286 с.
39. Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении: Логико-психологические проблемы построения учебных предметов / В.В. Давыдов. - Психологический ин-т; Российская академия образования . — 2-е изд. — М.: Педагогическое общество России, 2000. — 479с.
40. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения / В.В. Давыдов. - Международная Ассоциация "Развивающее обучение". — М.: Интор, 1996. – 544 с.
41. Даниленко Л. Вихід з тунелю… Педагогічна освіта, що розвивається в Україні. Особливості ситуації / Даниленко Л., Довбищенко В. // Управління освітою. – 2002. - №5. – С. 11-12.
42. Державний стандарт базової і повної середньої освіти [Електроний ресурс]. – Режим доступу: URL: http://www.mon.gov.ua/ua/often-requested/state-standards/ . – Назва з екрана.
43. Дичківська І.М. Інноваційні педагогічні технології: [навчальний посібник] / І.М. Дичківська. – К.: Академвидав, 2004. – 352 с.
44. Дишинського Е.А. Ігротека математичного гуртка / Е.А. Дишинського. – М.: Просвещение, 1972. – 144 с.
45. Ершова А.П. Геометрія. 7 класс: [Учебник] / А.П. Ершова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський.– Х.: Веста: Издательство «Ранок», 2007. – 224 с.
46. Жовнір Я.М. П’ятсот задач з методики викладання математики / Я.М. Жовнір, В.І. Євдокимов. – Х.: Основа, 1997. – 392 с.
47. Загальна методика навчання математики: практикум. [Методичні рекомендації] / [Укл.: А.Л. Іщенко, А.С. Кушнірук]. – Одеса: Принт – студія «Абрикос» СПД Бровкин, 2007. – 52 с.
48. Загвязинский В.И. Педагогическое творчество учителя / В.И. Загвязинский. – М.: Педагогика, 1987. – 160 с.
49. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. І. Допрофільна підготовка / [Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна]. – Х.: Вид-во «Ранок», 2011. – 320 с.

50. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. II. Профільне навчання / [Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна]. – Х.: Вид-во «Ранок», 2011. – 384 с.
51. Зеер Э.Ф. Модернизация профессионального образования: компетентностный подход: [учеб. пособ.] / Э.Ф. Зеер, А.М. Павлова, Э.Э. Сыманюк. – М.: Моск.психол.-соц. ин-т, 2005. – 216 с.
52. Зубков А.Л. Развитие методической компетентности учителей в условиях модернизации общего образования: автореф. дис. на соискане ученой степени канд. пед.наук.: спец. 13.00.08 – «Теория и методика профессионального образования» / А.Л. Зубков. – Екатеринбург, 2007. – 23 с.
53. Игошин В.И. Дидактическое взаимодействие логики и математики / И.В. Игошин // Педагогика. – 2002. - №1. – С.51-56
54. Ильин Е.П. Мотивация и мотивы / Е.П. Ильин. – СПб.: Питер, 2000. – 512 с.
55. Ігнатенко М.Я. Методологічні та методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики: Дис. … д-ра пед. наук: 13.00.02 / Укр. держ. пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – К., 1997. – 335 с.
56. Ізюмченко Л. Організація навчальної діяльності школярів під час розв'язування логічних задач / Л. Ізюмченко, Л. Лутченко // Математика в школі. – 2003. - №6. - С. 29-32.
57. Інструктивно – методичний лист про вивчення математики у 2014-2015 навчальному році [Електроний ресурс]. – Режим доступу: URL: http://kirdey.com/instruktivno-metodichniy-list-pro-vivchennya-matematiki-u-2014-2015-nr. - Назва з екрана.
58. Кабанова-Меллер Е.Н. Учебная деятельность и развивающее обучение / Е.Н. Кабанова-Меллер. – М.: Знание, 1981. – 96 с.
59. Кабаченко Т.С. Методы психологического воздействия: [Учебное пособие] / Т.С. Кабаченко. – М.: Педагогическое общество России, 2000. – 544 с.
60. Калмыкова З.И. Продуктивное мышление как основа обучаемости / З.И. Калмыкова. – М.: Педагогика, 1981. - 200 с.
61. Калужнин Л.А.Что такое математическая логика / Л.А. Калужнин – М., 1964. – 205 с.
62. Карелина Т.М. Методы проблемного обучения / Т.М. Карелина // Математика в школе. – 2000. - №5. – С.31-32.
63. Коваленко В.Г. Проблемный подход к обучению математики: [методическое пособие] / В.Г. Коваленко, И.Ф. Тесленко. – К.: Рад.школа,1985. – 88 с.
64. Коваленко В.І. Дидактичні ігри на уроках математики: [посібник для вчителя] / В.І. Коваленко. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.

65. Колягин Ю.М. Школьний учебник математики: в прошлом и настоящем / Ю.М. Колягин // Математика в школе. – 2003. - №2. – С. 72-76.
66. Кондрашова Л.В. Процесс обучения в высшей школе: [учеб.пособие] / Л.В. Кондрашова. – Кривой Рог: КГПУ, 2007. – 318 с.
67. Корепанова И.В. Самообразование и самосовершенствование будущих учителей / [И.В. Корепанова и др.] // Наука и школа. – 2002. - №5. – С.9-12.
68. Кравченко Л.І. Персональний комп'ютер на уроці математики як засіб активізації пізнавальної діяльності учнів / Л.І. Кравченко // Математика в школах України. – 2004. - №2. – С. 8-12.
69. Крамор В.С. Задачи на составление уравнений и методы их решения / В.С. Крамор. – М.: Оникс, Мир и образование. – 2009. – 256 с.
70. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников / В.А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1968. – 431 с.
71. Кудрявцев Т.В. Проблемное обучение: истоки, сущность, перспективы / Т.В. Кудрявцев. – М.: Знание, 1991. – 80 с .
72. Кузнецов Э.И. Новые информационные технологии и обучение математике / Э.И. Кузнецов // Математика в школе. – 1990. - №5. – С. 5-8.
73. Кузовлев В.П. Преподавание в вузе: наука и искусство / В.П. Кузовлев // Педагогика. - 2000. – №1. – С.52-57.
74. Кузьминський А.І. Наукові засади методичної підготовки майбутнього вчителя математики / А.І. Кузьминський, Н.А. Тарасенкова, І.А. Акуленко. – Черкаси: Вид. Від.ЧНУ ім. Б.Хмельницького, 2009. – 320 с.
75. Курлянд З.Н. Педагогіка вищої школи: [навч.посібник] / З.Н. Курлянд, Р.І. Хмелюк, А.В. Семенова, І.О. Бартєнєва, І.М. Богданова // За ред. З.Н. Курлянд. – [3-є вид., перероб., доп.]. – К.: Знання, 2007. – 495 с.
76. Кушнір І.А. Геометрія. Школа Бойового мистецтва. [Навчальний посібник для учнів 7 – 9 класів] / І.А. Кушнір, Л.П. Фінкельштейн. – К.: Факт, 2001. – 232 с.
77. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики / Е.И Лященко, К.В. Зобкова Т.Ф Кириченко, З.И. Новосельцева, Н.Л. Спифанова // Под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 215 с.
78. Левина М.М. Технологии профессионального педагогического образования: [учеб. пособ. для студ. высш. пед. учеб. завед.] / М.М. Левина. – М.: Академия, 2001. – 272 с.
79. Лернер И.Я. Проблемное обучение / И.Я. Лернер. – М.: Знание, 1974. – 144 с.
80. Лисенко В.І. Розвиток логічного мислення на уроках математики / В.І. Лисенко // Математика в школах України. – 2004. - №3.- С. 5-9
81. Литвиненко В.Н. Практикум по елементарной математике: Алгебра. Тригонометрія: [учебн. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-

тов] / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – М.: Просвещение, 1991. – 352 с.
82. Ліненко А.Ф. Теория и практика формирования готовности студентов педагогических вузов к профессиональной деятельности: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня док. пед. наук: спец. 13.00.04. – «Теорія і методика професійної освіти» / А.Ф. Ліненко. – К., 1996. – 36 с.
83. Малова И.Е. Непрерывная методическая подготовка учителя математики: дис. ... доктора пед. наук: 13.00.08, 13.00.02 / Ирина Евгеньевна Малова. – Ярославль, 2007. – 348 с.
84. Малова И.Е. Сущность и уровни методической деятельности учителя математики. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: http://www.yspu.yar.ru/vestnik/uchenue_praktikam/33_5/. - Назва з екрану.
85. Мамонтова Т.С. Формирование профессионально-методической компетентности будущего учителя математики в педвузе средствами курса «Теория и методика обучения математике» : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Татьяна Сергеевна Мамонтова. – Ишим, 2009. – 233 с.
86. Маркова А.К. Формирование мотивации учения / А.К. Маркова, Т.А. Матис, А.Б. Орлов. – М.: Педагогика, 1990. – 192 с.
87. Математика в школах України. Позакласна робота. Практичний журнал для вчителя математики [Електроний ресурс]. – Режим доступу: URL: http://journal.osnova.com.ua/journal/41-математика_в_школах_України._Позакласна_робота. – Назва з екрана.
88. Математика. Навчальна програма для учнів 5 — 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: URL: http://osvita.ua/school/materials/program/8795/ . – Назва з екрана.
89. Математика: Комплексна підготовка до ЗНО (2014) / [Уклад.: А.М. Капіносов, Г.І. Білоусова, Г.В. Гап'юк, Л.І. Кондратьєва, О.М. Мартинюк, Л.І. Олійник, П.І. Ульшин, О.Й. Чиж]. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2013. – 528 с.
90. Математическое образование: тенденции и перспективы / Л.Д. Кудрявцев, А.И Кириллов, М.А Бурковская, О.В Зимина // Высшее образование сегодня. - 2002. - №4. – С. 20-29.
91. Матюшкин А.М. Проблемная ситуация в мышлении и обучении / А.М. Матюшкин. – М.: Педагогика, 1972. – 168 с.
92. Махмутов М.И. Проблемное обучение: Основные вопросы теории / М.И. Махмутов. – М.: Педагогика, 1975. – 368 с.
93. Махмутов М.И. Современный урок: вопросы теории / М.И. Махмутов. – М.: Педагогика, 1981. – 192 с.
94. Медяник А.Г. Учителеві про шкільний курс геометрії / А.Г. Медяник. – К.: Рад. шк.,1988. – 158 с.
95. Менчинская Н.А. Проблема учения и умственное развитие школьника / Н.А. Менчинская. – М.: Педагогика, 1989. - 218 с.
96. Мерзляк А.Г. Алгебра: [підруч. для 8 кл.] / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2008. –253 с.

97. Мерзляк А.Г. Алгебра: [підручник для 8 кл. з поглибл. вивч. математики] / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір.– Х.: Гімназія, 2008. - 368 с.
98. Мерзляк А.Г. Алгебра: [підручник для 9 кл. з поглибл. вивч. математики] / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір.. – Х.: Гімназія, 2009. – 384 с.
99. Мерзляк А.Г. Геометрія: [підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч.закладів] / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2007. – 208 с.
100. Мерзляк А.Г. Геометрія: [підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч.закладів] / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2008. – 220 с.
101. Мерзляк А.Г. Геометрія: [підруч. для 9 кл.] / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2009. – 272 с.
102. Мерзляк А.Г. Математика: [підруч. для 5 кл. загальноосв. навч. закладів] / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2013. – 352 с.
103. Мерзляк А.Г. Математика: [підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закладів] / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2014. – 400 с.
104. Методика викладання математики в середній школі / [упоряд.: Р.С.Черкасов, А.А.Столяр]. – Х.: "Основа", 1992. – 304 с.
105. Методика навчання математики. Загальна методика: Практикум для організації самостійної роботи студентів: У 4-х ч. / Н.А. Тарасенкова та ін. // [За ред. Н.А.Тарасенкової]. – Черкаси: ЧДУ ім. Б. Хмельницького, 2004.
106. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, В.Я. Саннинский. – М.: Просвещение, 1980. – 368 с.
107. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / [Сост.: В.С.Черкасов, А.А.Столяр]. - М.: Просвещение, 1985. – 336 с.
108. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика / А.Я.Блох, В.А.Гусев, Г.В.Дорофеев и др. // [Сост. В.И.Мишин]. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
109. Методика преподавания математики в средней школе: Частные методики / [Ю.М.Колягин, Г.Я.Луканкин, Е.Л.Макрушин и др.]. – М.: Просвещение, 1977. – 480 с.
110. Морзе Н.В. Система методичної підготовки майбутніх вчителів інформатики в педагогічних університетах: дис. … доктора пед. наук: 13.00.02 / Наталія Вікторівна Морзе. – К., 2003. – 600 с.
111. Мостовой А.И. Различные способы доказательств в курсе геометрии восьмилетней школы / А.И. Мостовой. – М.: Просвещение, 1965. – 104 с.

112. Моторіна В. Г. Інноваційні підходи до навчання математики: [навчальний посібник] / В.Г. Моторіна. – Х.: ХНПУ імені Г.С. Сковороди, Скорпіон, 2008. – 112 с.
113. Моторіна В.Г. Професійна компетентність учителя математики профільної школи: [навч. посібник] / В.Г. Моторіна. – Харків: ХНУ імені Г.С. Сковороди, 2012. – 268 с.
114. Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень [Електронний ресурс]. – Режим доступу: URL: http://www.mon.gov.ua/images/education/average/prog12/matem_ak.pdf . - Назва з екрана.
115. Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики) [Електроний ресурс]. – Режим доступу: URL: http://www.mon.gov.ua/images/education/average/prog12/matem_pogl.pdf. - Назва з екрана.
116. Навчальні програми для 8-9 класів для загальноосвітніх навчальних закладів (класів) з поглибленим вивченням окремих предметів (за новим Державним стандартом базової і повної загальної середньої освіти) [Електроний ресурс]. – Режим доступу: URL: http://www.mon.gov.ua/ua/activity/education/56/692/educational_programs/1384763942/. - Назва з екрана.
117. Насенко О. Доведення методом від супротивного у шкільному курсі алгебри / О. Насенко // Математика. – 2006. - №21. – С. 6-8.
118. Научно-педагогические основы методической подготовки учителя математики: [Межвуз. сб. науч. тр.]. – Л.: ЛГИ им. А.И.Герцена, 1980. - 112 с.
119. Національна рамка кваліфікацій [Електронний ресурс]. – Режим доступу: URL: http://document.ua/pro-zatverdzhennja-nacionalnoyi-ramki-kvalifikacii-doc81930.html. - Назва з екрану.
120. Національна стратегія розвитку освіти в Україні [Електронний ресурс]. Режим доступу: URL: http://archive.nbuv.gov.ua/portal/ soc_gum/Ues/2011_8/Articles/2_National%20strategy.pdf. - Назва з екрану.
121. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: [дворівневий підручник для 10 кл. загальноосв. навч. закл.] / Є.П. Нелін. – Х.: Світ дитинства, 2004. – 432 с.
122. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: [підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф. рівень] / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Х.: Гімназія , 2011. — 448 с.
123. Нєдялкова К.В. Загальна методика навчання математики: лекції. [Навчально-методичний посібник] / К.В. Нєдялкова. – Одеса: ООО „Реклам-сервис”, 2006. – 103 с.
124. Нєдялкова К.В. Педагогічні умови інтелектуального розвитку майбутніх учителів математики у процесі фахової підготовки: дис. ...

канд. пед. наук: 13.00.04 / Катерина Василівна Нєдялкова. – Одеса, 2003. – 186 с.
125. Нєдялкова К.В. Практичний курс інтелектуального розвитку студентів і старшокласників засобами математики: [методичні рекомендації] / К.В. Нєдялкова. – Одеса: ПДПУ імені К.Д.Ушинського, 2002. – 60 с.
126. Новик И.А. Практикум по методике преподавания математики / И.А. Новик. – Минск: Вышейшая школа, 1984. – 175 с.
127. Оконь В. Основы проблемного обучения / В. Оконь. – М.: Просвещение, 1968. – 207 с.
128. Оксман В. Микрокалькулятор на уроке математики / В. Оксман // Народное образование. – 1990. - №11. – С. 64-65.
129. Олехник С.Н. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств: [Справочник] / С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 144с.
130. Осинская В.Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математики / В.Н. Осинская. - Киев: Рад. шк., 1989. – 188 с.
131. Особливості вивчення математики в профільних класах у сучасних умовах [Електроний ресурс]. – Режим доступу: http://revolution.allbest.ru/pedagogics/00000938.html/ . – Назва з екрана.
132. Педагогіка: [навчальний посібник] / [Упоряд.: І.М.Богданова, І.В.Бужина, Н.І.Дідусь, Н.А.Кавалерова, З.Н.Курлянд, В.Г.Роищенко, Р.І.Хмелюк, О.С.Цокур, Н.А.Шевченко, О.М.Яцій]. - Одеса: ПДПУ імені К.Д.Ушинського, 2001. – 357 с.
133. Персональний комп'ютер на уроці математики як засіб активізації пізнавальної діяльності учнів [Електроний ресурс]. – Режим доступу: http://34.school.zp.ua/index.php/publisher/articleview/action/view/frmArticleID/103/ . – Назва з екрану.
134. Пєхота О.М. Особистісно орієнтоване навчання: підготовка вчителя: [монографія] / О.М. Пєхота, А.М. Старєва. – Миколаїв : Вид- во «Іліон», 2005. – 272 с.
135. Плотникова Е.Г. Педагогика математики: предмет, содержание, принципы / Е.Г. Плотникова // Педагогика. - №4. – 2003. – С.32-35.
136. Повышение еффективности обучения математики в школе / [Сост. Г.Д. Глейзер]. – М.: Просвещение, 1989. – 239 с.
137. Погорєлов А.В. Геометрия: [Учеб. для 7-11 кл. сред. шк.] / А.В. Погорєлов. – М.: Просвещение, 1990. – 384 с.
138. Пометун О.І. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: [наук.-метод. посібн.] / О.І. Пометун, Л.В. Пироженко. – К.: Видавництво А.С.К., 2004. – 192 с.
139. Поспелов Н.Н. Формирование мыслительных операций у старшеклассников / Н.Н. Поспелов, И.Н. Поспелов. . - М.: Педагогика, 1989. - 152 с.

140. Практикум по педагогике математики / Б.С. Каплан, Н.М.Рогановский, Н.К.Рузин, С.А.Столяр // [Под общ. ред. Столяра С.А.]. – Минск: Вышейшая школа, 1988. – 191 с.
141. Прач В. С. Евристичне навчання математики: Подорож у світ евристики / В. С. Прач. – Донецьк: Ноулідж, 2012. – 275 с.
142. Про вивчення математики у 2014-2015 навчальному році: методичні рекомендації [Електронний ресурс]. – Режим доступу: URL: http://volrmk.at.ua/offdocs/recom2014/matematika.pdf. - Назва з екрана.
143. Програма з математики для 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.mon.gov.ua/images/education/average/prog12/matem_pr.pdf . - Назва з екрану.
144. Програма з математики для 10 – 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.mon.gov.ua/images/education/average/prog12/matem_st.pdf. - Назва з екрану.
145. Пуриш Т.В. Евристичний метод порівняння на різних етапах уроків математики / Т.В. Пуриш // Математика в школах україни. – 2003. – №36. – С. 8-11.
146. Рабинович Ю.М. Геометрія 7-9: задачі і вправи на готових кресленнях / Ю.М. Рабинович. – К.: КІМО, 2001. – 64 с.
147. Селевко Г.К. Современные образовательные технологи: [Учебное пособие] / Г.К. Селевко. – М.: Народное образование, 1998. – 256 с.
148. Семиченко В.А. Проблеми професійної підготовки вчителя в контексті сучасності / В.А. Семиченко // Проблеми сучасної педагогічної освіти. – Серія: Педагогіка і психологія. – К.: Педагогічна преса, 2000. – № 1. – 199 с.
149. Середа В.Ю. Математична логіка в шкільному курсі математики / В.Ю. Середа. – К.: Радянська школа, 1984. – 189 с.
150. Сиваківський Б. Узагальнення як метод наукового пошуку / Б. Сиваківвький // Математика в школі. – 2000. – №1. – с. 23-28.
151. Сікорський П. Психолого-педагогічні проблеми навчання математики / П. Сікорський // Математика в школі. – 2004. - № 4. – С. 5-9.
152. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология: [монография] / Е.И. Скафа. – Донецк: ДонНУ, 2004. – 439 с.
153. Скафа О.І. Комп'ютерно-орієнтовані уроки в евристичному навчанні математики: [навчально-методичний посібник] / О. І. Скафа, О. В. Тутова. – Донецьк: вид-во «Вебер», 2009. – 320 с.
154. Скворцова С.О. Підготовка майбутніх учителів початкових класів до навчання молодших школярів розв'язувати сюжетні математичні задачі: [монографія] / С.О. Скворцова, Я.С. Гаєвець. – Харків: «Ранок-НТ», 2013. – 331 с.
155. Скобелев Г.Н. Компьютер и школьная лекция / Г.Н. Скобелев // Математика в школе. – 1990. - №5. – С.14-16.

156. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике / З.И. Слєпкань. – Киев: Рад. шк., 1983. – 192 с.
157. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: [Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів] / З.І. Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
158. Сморжевський Л.О. Стереометрія. Дидактичні матеріали і тематичні перевірочні роботи для рівневого навчання / Л.О. Сморжевський, Ю.Л. Сморжевський. - Кам'янць – Подільський: Абетка-НОВА, 2002.
159. Сморжевський Ю.Л. Використання порівняння і аналогії на уроках стереометрії / Ю.Л. Сморжевський // Математика в школі. – 2003. - № 3. – С. 36-39.
160. Совайленко В.К. О содержании математического образования и качестве учебников / В.К. Совайленко // Педагогика. – 2002. - №3. – С. 35-40.
161. Столяр А.А. Логические проблемы преподавания математики / А.А. Столяр. - Минск: Вышейшая школа, 1965. – 178 с.
162. Столяр А.А. Логическое введение в математику / А.А. Столяр. – М.: Вышейшая школа, 1971. – 221 с.
163. Столяр А.А. Методы обучения математике / А.А. Столяр. – М.: Вышейшая школа, 1971.
164. Тадеєв В.О. Основи геометрії. Многогранники: дворівневий підручник для 10 кл. загальноосвітніх навчальних закладів / В.О. Тадеєв // [За ред. В.І.Михайловського]. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. – 384 с.
165. Тарасенкова Н.А. Математика: [підруч. для 5 класу загальноосвіт. навч. закладів] / Н.А. Тарасенкова, І.М. Богатирьова, О.П. Бочко, О.М. Коломієць, З.О. Сердюк. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2013. – 352 с.
166. Тарасенкова Н.А. Математика: [підруч. для 6 класу загальноосвіт. навч. закладів] / Н.А. Тарасенкова, І.М. Богатирьова, О.П. Бочко, О.М. Коломієць, З.О. Сердюк. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2014. – 306 с.
167. Тарасенкова Н.А. Оцінювання навчальних досягнень студентів при вивченні дисципліни «Методика навчання математики» / Н.А. Тарасенкова, І.А. Акуленко // Математика в школі. – 2005. - №2. – С. 5-11.
168. Теорія і методика професійної освіти: [навч. посіб.] / З.Н. Курлянд, Т.Ю. Осипова, Р.С. Гурін [та ін.] // за ред. З.Н. Курлянд. – К.: Знання, 2012. – 390 с.
169. Тесленко И.Ф. Методика преподавания планиметрии / И.Ф. Тесленко, С.М. Чашечников, Л.И. Чашечникова. – К.: Рад. Шк., 1986. – 160 с.
170. Токар Н.Г. Урок однієї теореми. Конкурс ерудитів / Н.Г. Токар // Математика в школах України. – 2005. - №3.- С. 21-23.

171. Толстикова Т.А. О том, как учебник содействует воспитанию коммуникативных качеств у учащихся / Т.А. Толстикова // Математика в школе. - 2003. - №8. – С. 29-33.
172. Урок математики в сучасних технологіях: теорія і практика. Розвиток критичного мислення. Модульне навчання. – Х.: Вид. група „Основа”, 2007. – 128 с. - (Б-ка журн. „Математика в школах України”; Вип. 4(52)).
173. Финкельштейн В.М. О подготовке учеников к изучению нового понятия, новой теоремы / В.М. Финкельштейн // Математика школе. – 1996. - №6. – С.21-23.
174. Фридман А.М. Психолого-педагогические основы обучения математике / А.М. Фридман. – М.: Просвещение, 1983. – 160 с.
175. Фурман А.В. Проблемні ситуації в навчанні: [кн. для вчителя] / А.В. Фурман. – К.: Рад.школа, 1991. – 102 с.
176. Характеристика особистісно-орієнтованого навчання математики [Електроний ресурс]. – Режим доступу: URL: http://pidruchniki.ws/14810405/pedagogika/osobistisno_oriyentovane_navchannya. - Назва з екрана.
177. Хинчин А.Я. Повышение эффективности обучения математики в школе / А.Я. Хинчин. - М.: Просвещение, 1989.
178. Хуторской А.В. Современная дидактика: [уч. для вузов] / А.В. Хуторской. – СПб.: Питер, 2001. – 544 с.
179. Цимбалюк Я.С. Професійна компетентність: зміст понять: матеріали всеукр. науково-практ. конф. викладачів, молодших науковців та студентів [«Сучасний навчально-виховний процес: теорія і практика»] / Я.С. Цимбалюк, С.О. Скворцова / упор. І.О. Пальшкова. – Одеса: Видавець М.П. Черкасов, 2010. – С. 100 -104.
180. Чаплыгин В.Ф. Сравнение и классификация в упражнениях «с модулями» / В.Ф. Чаплыгин // Математика в школе. – 2003. - №9. – С. 48-51.
181. Черкасов Р.С. История отечественного школьного математического образования / Р.С. Черкасов // Математика в школе. – 1997. - № 2, 3, 4.
182. Шадриков В.Д. Подготовка учителя математики: инновационные подходы / В.Д. Шадриков. – М.: Гайдарики, 2000. – 383 с.
183. Эрдниев П.М. Сравнение и обобщение при обучении математике / П.М. Эрдниев. – М.: Учпедгиз, 1960. –
184. Ядренко М. Чи загрожує Україні повна деградація шкільної математичної освіти? / М. Ядренко // У світі математики. - 2004. – №2. - Т.10. - С. 1-6.

Наукове видання

НЄДЯЛКОВА Катерина Василівна

Загальна методика навчання математики: практичний курс

Навчальний посібник