НАВЧАННЯ УЧНІВ ДОВОДИТИ МАТЕМАТИЧНІ ТВЕРДЖЕННЯ ЯК СКЛАДОВА МЕТОДИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Нєдялкова Катерина Василівна
к.п.н., доцент
Південноукраїнський національний
педагогічний університет
імені К.Д. Ушинського
Одеса, Україна
ndlvitaliy@ukr.net

Вступ. Професійна підготовка студентів – майбутніх учителів математики передбачає формування як інтегральної і загальних компетентностей, так і суто фахових компетентностей. Водночас, формування і реалізація фахових компетентностей спрямовані на формування і реалізацію методичної компетентності учителя математики, під якою розуміється системне особистісне утворення, що виявляється у здатності до здійснення та організації процесу навчання математики на рівні сучасних вимог, спроможності успішного розв’язування методичних задач, що ґрунтується на теоретичній і практичній готовності до викладання предмета.

Однією зі складових методичної компетентності вчителя математики є ефективне навчання учнів доводити математичні твердження. Наразі постає проблема підвищення інтересу здобувачів середньої освіти до доказових міркувань – з одного боку; а з іншого – вдосконалення фахової підготовки майбутніх учителів математики з огляду на визначену проблему.

Мета роботи. Дослідити шляхи вдосконалення фахової підготовки і формування відповідної складової методичної компетентності майбутніх учителів математики щодо навчання учнів доводити математичні твердження.

Матеріали та методи. У якості емпіричного матеріалу використано власні методичні розробки з досліджуваної теми, зокрема тестові завдання, а також матеріал сучасних підручників з математики для закладів середньої освіти. У якості методів, які дозволили дійти висновків щодо ефективності проводимої роботи використано педагогічне спостереження, анкетування студентів, бесіди, аналіз модульних контрольних робіт з фахової дисципліни «Шкільний курс математики і методика його навчання».

Результати і обговорення. Проблема формування складової методичної компетентності майбутніх учителів математики щодо навчання учнів доводити математичні твердження багатоаспектна. Перш за все, необхідно озброїти студентів знаннями щодо логічних основ ШКМ, методів доведення теорем (аналітичний, синтетичний, метод від супротивного, координатний, векторний та ін.).

Майбутні фахівці мають усвідомити, що не можна недооцінювати етап пропедевтики навчання учнів доводити математичні твердження. Якщо вчитель постійно ставить перед 5-6 класниками запитання "Чому?", «Чи справедливе твердження?» або вимагає: "Поясни, чому це так", "Обґрунтуй свої думки", "Доведи, що це вірно", то 7-класникам буде легше засвоїти доведення перших теорем із курсу геометрії, а також доводити твердження в курсі алгебри.

Студенти мають засвоїти, що проблему навчання учнів доводити математичні твердження розчленувають на декілька методичних завдань, які розв'язуються послідовно:

1) вивчення школярами готових доведень, уміння відтворювати їх;
2) самостійна побудова ними доведень за аналогією зі зразком;
3) пошук і виклад доведень способом, указаним учителем;
4) самостійний пошук і проведення учнями доведень математичних тверджень.

Важливо, щоб майбутні вчителі математики навчилися реалізовувати основні етапи роботи над теоремою та її доведенням. Продемонструємо це на прикладі теореми про рівносильність (10 клас, профільний рівень навчання).

1*) Підготовчий етап.*

1. Актуалізація опорних знань. Розв'яжемо рівняння: $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-2}=1$.

Застосовуючи метод піднесення обох частин рівняння в один і той самий степінь і виконуючи наступні перетворення, одержуємо: $x_1=3$; $x_2=2$.

Підстановкою у вихідне рівняння впевнюємося, що обидва значення перетворюють його у вірну рівність. Отже, відповідь: 3; 2.

2. Мотивація вивчення теореми (*створення проблемної ситуації*).

Розв'яжемо рівняння: $\sqrt{x+2} = 1 - x$.

Розв'язання: піднесемо обидві частини рівняння до квадрату: $x + 2 = 1 - 2x + x^2$; далі: $x^2 - 3x - 1 = 0$, звідки $x_{1=}\frac{3+\sqrt{13}}{2}$; $x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

Виникає проблема технічної реалізації наступного етапу розв'язування рівняння – перевірки підстановкою: це призводить до «неприємних» обчислень.

Учитель повідомляє, що для подібних ситуацій можливий інший шлях розв'язування – метод рівносильних перетворень.

2) *Аналіз формулювання теореми.*

Теорема. Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = g(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Аналізуємо з учнями умову теореми, оформлюємо короткий запис:

Дано: рівняння виду $\sqrt{f(x)} = g(x)$;

Довести: (1) $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ (2)

У ч и т е л ь: Що означає довести рівносильність рівняння і мішаної системи? Для цього необхідно пригадати означення рівносильності.

У ч н і: це означає, необхідно показати, що корені рівняння співпадають з розв'язками системи.

Зауваження. Аналізуючи формулювання теореми, варто обговорити зі школярами ту обставину, що в умовах системи (2) фактично враховано область визначення рівняння (1): $f(x) \geq 0$. Дійсно, якщо $f(x) = (g(x))^2$, то $f(x) \geq 0$ (квадрат будь-якого виразу є вираз, який приймає тільки невід'ємних значень).

3) *Доведення теореми.*

Доведемо, що корені рівняння (1) є розв'язками системи (2) і, навпаки, кожний розв'язок системи (2) є коренем рівняння (1). Це означатиме, що рівняння (1) і система (2) рівносильні.

Нехай число α - корінь рівняння (1). Тоді маємо правильну числову рівність $\sqrt{f(\alpha)} = g(\alpha)$; це означає, що $g(\alpha) \geq 0$ і $f(\alpha) = (g(\alpha))^2$ - також правильна числова рівність, тобто α - розв'язок системи (2).

Нехай β - розв'язок системи (2). Тоді $g(\beta) \geq 0$ і $f(\beta) = (g(\beta))^2$. При умові, що $g(x) \geq 0$ функція $y = (g(x))^2$ є оборотною і, тому, $\sqrt{f(\beta)} = g(\beta)$. Отже, β - корінь рівняння (1). Теорему доведено.

4) *Закріплення доведення.*

Для закріплення доведення цієї теореми можна запропонувати старшокласникам відповісти на низку запитань (це може відбутися і на наступному уроці):

1. Що означає довести рівносильність рівняння і системи рівнянь? (Це означає довести, що корені рівняння (1) є розв'язками системи (2) і, навпаки, кожний розв'язок системи (2) є коренем рівняння (1))

2. Якщо α - корінь рівняння (1), чи перетворюється це рівняння у вірну числову рівність при підстановці цього значення? (Так)

3. Якщо $\sqrt{f(\alpha)} = g(\alpha)$ - вірна числова рівність, чи випливає з цього, що $g(\alpha) \geq 0$? (Так)

4. Якщо $\sqrt{f(\alpha)} = g(\alpha)$ - вірна числова рівність, чи випливає з цього, що $f(\alpha) = (g(\alpha))^2$ - також правильна числова рівність? (Так)

5. Чи означатиме це, що α - розв'язок системи (2)? (Так)

6. Якщо β - розв'язок системи (2), що з цього випливає? (Що $g(\beta) \geq 0$ і $f(\beta) = (g(\beta))^2$)

7. За якої умова функція $y = (g(x))^2$ є оборотною? (При умові, що $g(x) \geq 0$)

8. Укщо виконується така умова, чи буде справедливо, що $\sqrt{f(\beta)} = g(\beta)$? (Так)

9. Який з цього можна зробити висновок? (Що β - корінь рівняння (1))

10. Якщо корені рівняння (1) є розв'язками системи (2) і, навпаки, кожний розв'язок системи (2) є коренем рівняння (1), можна стверджувати, що рівняння (1) і система (2) рівносильні? (Так, за означенням рівносильності).

5) *Застосування теореми*.

1. На цьому етапі перш за все варто повернутися до рівняння $\sqrt{x+2}=1-x$, за допомогою якого було створено проблемну ситуацію і вирішити його, застосовуючи теорему. Використовуючи умову $1-x\geq 0$, неважко помітити, що із двох значень $x_{1=}\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ і $x_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ цієї нерівності задовольняє $x_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$, а $x_{1=}\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ - сторонній корінь. Відповідь: $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$.

2. Далі можна розглянути таке рівняння: $\sqrt{x^2-1}=3-2x$. При його розв'язанні методом рівносильних перетворень ми приходимо до системи: $\begin{cases} x^2-1=(3-2x)^2; \\ 3-2x\geq 0 \end{cases}$, розв'язуючи яку дістаємо відповідь: $\frac{6-\sqrt{6}}{3}$ (зауважуємо, що перевірка коренів призвела б до складних обчислень).

3. Повторюючи теорему, можна її переформулювати:

Теорема: Для того, щоб розв'язати рівняння $\sqrt{f(x)}=g(x)$ *необхідно і достатньо* розв'язати систему $\begin{cases} f(x)=(g(x))^2, \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$

Досвід викладання фахових дисциплін для майбутніх учителів математики у педагогічному ЗВО дозволяє стверджувати, що залучення завдань в тестовій формі сприяє більш свідомому та міцному засвоєнню знань студентами. Нами були розроблені такі завдання з теми: «Методи доведень теорем. Методика навчання учнів доводити математичні твердження». Деякі з них:

1. Оберіть невірне твердження:

А	Для того, чтоб трапеція була рівнобедреною, необхідно і достатньо, щоб вона була вписана в коло
Б	Якщо паралелограм вписаний в коло, то він є прямокутником
В	В ромб можна вписати коло, тільки якщо він квадрат
Г	Якщо в паралелограм вписане коло, то він є ромбом

2. Розглянемо софізм: *Сума будь-яких двох однакових чисел дорівнює нулю.* «Доведення»: доведемо, що $a+a=0$.

1) Нехай $a=x$. 2) Помноживши обидві частини цієї рівності на $-4a$, дістанемо: $-4ax=-4a^2$, або $-4ax+4a^2=0$. 3) Додамо до обох частин рівності x^2, тоді: $x^2-4ax+4a^2=x^2$. 4) Або $(x-2a)^2=x^2$. 5) Звідки $x-2a=x$. 6) Але оскільки $x=a$, то $a-2a=a$, тобто $-a=a$. 7) Остаточно: $a+a=0$.

На якому кроці міркувань припущено помилку?

А	Б	В	Г
на 6)	на 2)	на 5)	на 4)

3. «Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°».

Представлене твердження є:

А	Теоремою – ознакою вписаного чотирикутника
Б	Теоремою – властивістю вписаного чотирикутника
В	Невірним математичним твердженням
Г	Критерієм вписаного чотирикутника

4. «Через будь – які три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна».

Чим може бути таке математичне речення?

А	Аксіомою або означенням
Б	Аксіомою або теоремою
В	Теоремою або означенням
Г	Це неправильне математичне твердження

5. Оберіть таке твердження, для якого обернене твердження є хибним.

А	Діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.
Б	Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.
В	У паралелограма протилежні сторони і кути рівні.
Г	Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом.

Ключ до тестів: 1- В; 2- В; 3 – Б; 4 – Б; 5 – Г.

Висновки. Проведене дослідження дозволило дійти висновку, що вдосконалення фахової підготовки і формування відповідної складової методичної компетентності майбутніх учителів математики щодо навчання учнів доводити математичні твердження реалізується при дотриманні наступних умов:

1) усвідомлення майбутніми вчителями математики ролі та значущості формування в учнів культури доказових міркувань;

2) розуміння ролі, сутності пропедевтики навчання учнів доводити математичні твердження та вміння її здійснювати;

3) набуття студентами глибоких і міцних знань (щодо логічних основ ШКМ, методів доведень теорем, принципів, методів, прийомів навчання школярів готових доведень та самостійного пошуку учнями доведень математичних тверджень) та вмінь їх реалізовувати;

4) дотримання майбутніми вчителями математики основних етапів роботи з теоремами та їх доведеннями, здійснення творчого підходу до можливих шляхів їх реалізації;

5) усвідомлення студентами значущості та доречності з методичної точки зору застосування різних способів доведень теорем на уроках математики і вміння їх реалізовувати;

6) набуття майбутніми учителями математики практичного досвіду правильної організації вивчення здобувачами середньої освіти математичних тверджень та їх доведень в курсах алгебри та геометрії (під час практичних занять, семінарів, лабораторних робіт, конференцій, педагогічної практики тощо).

7) урізноманітнення викладачем фахових дисциплін методів, засобів, форм організації навчальної діяльності студентів, зокрема залучення інформаційних, інтерактивних технологій, завдань в тестовій формі, дослідницьких та проблемних завдань та ін.