teaching the Ukrainian language for professional purposes; build an updated courses and programs. In addition, we revealed the role of forming terminology competence of future specialists in the structure of professional communicative competence, formation of which is the goal of modern higher education. The proposed system of principles requires close relationship and is the theoretical basis of methods of teaching Ukrainian language (in professional direction) at high school.

***Keywords:*** general didactic principles, terminological competence, principle of science, principles of continuity and availability, the principle of bonds between theory and practice, the principle of activity and awareness, the principle of interdisciplinary connections, anthropological principle, the principle of creativity, the principle of modularity.

*Подано до редакції 21.05.14*

---

УДК: 371. 51

***І.В. Житарюк***

# МІЖПРЕДМЕТНІ ЗВ'ЯЗКИ АЛГЕБРИ І ТРИГОНОМЕТРІЇ

*Статтю присвячено застосуванню тригонометрії до розв'язування задач з алгебри у старшій школі. На конкретних прикладах показано методичні особливості застосування тригонометрії до розв'язування рівняння, встановлення кількості коренів рівняння на певному відрізку, розв'язування системи рівнянь і доведення нерівності.*

***Ключові слова:*** *корінь рівняння, нерівність, рівняння, старша школа, тригонометрія.*

***Постановка проблеми***. Навчання математики у старшій школі має бути розвивальним і мати прикладну спрямованість: розвиток інтелекту, математичної інтуїції, вміння застосовувати отримані знання для розв'язування практичних і прикладних задач – як внутрішньо-, так і міжпредметних. Особливо це стосується математики старшої школи профільного рівня.

Застосування основних понять тригонометрії, тригонометричних функцій та їх властивостей дає можливість знайти витончені підходи розв'язування як окремих алгебраїчних, так і геометричних задач, що й обумовлює вибір зазначеної теми.

***Аналіз останніх досліджень і публікацій.*** Формуванню світогляду учнів, розвитку їх логічного і творчого мислення сприяють спеціально підібрані задачі у підручниках і методичних посібниках з математики для старшої школи, збірниках олімпіадних задач і задач вступних іспитів з математики, зокрема, Ш. А. Алімовим, Г. П. Бевзом, В. Н. Березіним, А. М. Колмогоровим, А. Г. Мордковичем, Є. П. Неліним, Ю. В. Нестеренком, О. О. Панчішкіним, М. І. Шкілем та ін. В окремих з них учні, які проявляють підвищену зацікавленість до математики, мають можливість поглиблено вивчити тригонометрію шляхом розгляду задач, що потребують нестандартного підходу при їх розв'язанні. Зазначену проблематику розглядав й П. І. Горнштейн у [3], де окремі типи задач з алгебри (задачі на вступних іспитах з математики чи олімпіадні) розв'язано за допомогою тригонометрії.

***Мета статті*** – показати на прикладах застосування тригонометрії розв'язування алгебраїчних задач у старшій школі.

***Виклад основного матеріалу дослідження.*** Зазначимо, що певний матеріал з курсу математики засвоюється суб'єктами навчання не тоді, коли він є метою навчання, а тоді, коли стає засобом задля розв'язування інших завдань. При цьому переслідуються цілі: провести міжпредметні зв'язки між тригонометрією і алгеброю, сприяти формуванню в суб'єктів навчання умінь розв'язувати певні задачі алгебри за допомогою тригонометрії.

Після того, як учні достатньо добре навчилися виконувати тригонометричні перетворення, оперувати властивостями тригонометричних функцій та розв'язувати тригонометричні рівняння, доцільно показати застосування вивченого матеріалу до розв'язування алгебраїчних рівнянь, нерівностей та їх доведення за допомогою тригонометричних підстановок. При цьому, якщо в алгебраїчному рівнянні (нерівності) від однієї змінної допустимі значення останньої належать відрізку [-1; 1], то вибирають заміну $x=\sin\alpha$, $\alpha\in[-\pi/2;\pi/2]$ або $x=\cos\alpha$, $\alpha\in[0;\pi]$; якщо ж змінна набуває довільні дійсні значення, тоді – $x=\mathrm{tg}\alpha$, $\alpha\in(-\pi/2;\pi/2])$ або $x=\mathrm{ctg}\alpha$, $\alpha\in(0;\pi)$.

Проілюструємо сказане на розв'язуванні таких задач (див. [3, 5]).

**Приклад 1.** *Розв'язати рівняння*

$$\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x.$$

***Розв'язання.*** Областю допустимих значень змінної даного рівняння є відрізок $[-1;1]$, а тому введемо, наприклад, заміну $x=\cos\alpha$. Виберемо для зручності довільний відрізок, на якому функція косинус набуває значення від -1 до 1, наприклад, – $[0;\pi]$.

Підставимо $x=\cos\alpha$ у задане рівняння, отримаємо

$$\sqrt{1-\cos^2\alpha}=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

Звідси з урахуванням того, що

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \text{ і } 4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\cos3\alpha$$

матимемо

$$|\sin\alpha|=\cos 3\alpha.$$

Оскільки $\alpha\in[0;\pi]$, то $\sin\alpha\geq 0$ і з останньої рівності отримуємо

$$\sin\alpha=\cos 3\alpha,$$
$$\sin\alpha-\cos 3\alpha=0.$$

Врахувавши, що $\sin x=\cos(\pi/2-\alpha)$, маємо

$$\cos(\pi/2-\alpha)-\cos 3\alpha=0.$$

Скориставшись формулою

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

одержимо

$$2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+3\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}=0$$

або

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Звідки

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=0 \text{ або } \sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Розв'язками отриманих рівнянь є

$$\frac{\pi}{4}+\alpha=\pi n, n\in\mathbf{Z},\ 2\alpha-\frac{\pi}{4}=\pi m, m\in\mathbf{Z}.$$

Звідси

$$\alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z},\ \alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{2}, m\in\mathbf{Z}.$$

Умові $\alpha\in[0;\pi]$ з отриманих значень $\alpha$ задовольняють лише три

$$\alpha_1=\frac{\pi}{8}, \alpha_2=\frac{5\pi}{8}, \alpha_3=\frac{3\pi}{4}.$$

Врахувавши заміну $x=\cos\alpha$, отримуємо корені заданого рівняння

$$x_1=\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$x_2=\cos\frac{5\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

$$x_3=\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Зауваження. Зазначимо, що алгебраїчний метод розв'язання цієї задачі приводить до рівняння шостого степеня, корені якого знайти непросто або навіть неможливо.

***Приклад 2.*** *Скільки коренів на відрізку* [0;1] *має рівняння*

$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1?$$

***Розв'язання.*** Дану задачу найпростіше розв'язати за допомогою тригонометричної підстановки. Заміна $x=\cos\alpha$, де $\alpha\in[0;\pi/2]$ ставить у відповідність кожному значенню $x$ на [0; 1] рівно одне значення $\alpha$. Отже, число розв'язків заданого рівняння на [0; 1] дорівнює числу розв'язків відповідного йому рівняння на $[0;\pi/2]$, причому, оскільки $x=0$ і $x=1$ не є розв'язками заданого рівняння, то можна взяти $\alpha\in(0;\pi/2)$.

З урахуванням заміни рівняння набуває вигляду

$$8\cos\alpha(1-2\cos^2\alpha)(8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1)=1,$$
$$8\cos\alpha(-\cos 2\alpha)(8\cos^2\alpha\cdot(\cos^2\alpha-1)+1)=1,$$
$$-8\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot(-8\cos^2\alpha\sin^2\alpha+1)=1,$$
$$-8\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha=1.$$

Помноживши останнє рівняння на $\sin\alpha\neq 0$, отримаємо

$$-8\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha=\sin\alpha,$$
$$-4\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha=\sin\alpha,$$
$$-2\sin 4\alpha\cdot\cos 4\alpha=\sin\alpha,$$
$$-\sin 8\alpha=\sin\alpha,$$
$$\sin 8\alpha+\sin\alpha=0,$$
$$\sin\frac{\alpha+8\alpha}{2}\cos\frac{8\alpha-\alpha}{2}=0,$$
$$\sin\frac{9\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha}{2}=0.$$

Звідси

$$\sin\frac{9\alpha}{2}=0 \text{ або } \cos\frac{7\alpha}{2}=0.$$

Розв'язавши дані рівняння, отримуємо

$$\frac{9\alpha}{2}=\pi n, n\in\mathbf{Z} \text{ і } \frac{7\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in\mathbf{Z}.$$

Звідки

$$\alpha=\frac{2\pi n}{9}, n\in\mathbf{Z} \text{ і } \alpha=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi m}{7}, m\in\mathbf{Z}.$$

Умові $\alpha\in(0;\pi/2)$ задовольняють такі значення

$$\alpha_1=\frac{2\pi}{9}, \alpha_2=\frac{4\pi}{9}, \alpha_3=\frac{\pi}{7}, \alpha_4=\frac{3\pi}{7}.$$

Отже, задане рівняння на проміжку [0; 1] має рівно чотири корені.

Зауваження. Зазначимо, що дану задачу можна розв'язати ще й за допомогою теореми Штурма про число дійсних коренів на заданому відрізку многочлена з дійсними коефіцієнтами.

***Приклад 3.*** *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 4xy(2y^2-1)=1. \end{cases}$$

***Розв'язання.*** Нехай $x=\sin\alpha$, $y=\cos\alpha$, $\alpha\in[0;2\pi]$. Тоді друге рівняння системи набуває вигляду

$$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)=1,$$
$$2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=1,$$
$$\sin 4\alpha=1.$$

Звідки

$$4\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in\mathbf{Z},\ \alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{2}, m\in\mathbf{Z}.$$

Умові $\alpha\in[0;2\pi]$ задовольняють чотири значення

$$\alpha_1=\frac{\pi}{8}, \alpha_2=\frac{5\pi}{8}, \alpha_3=\frac{9\pi}{8}, \alpha_4=\frac{13\pi}{8}.$$

З урахуванням заміни *x=sinα, y=cosα*, отримуємо розв’язки заданої системи

$$x_1 = \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

$$y_1 = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$x_2 = \sin\frac{5\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$y_2 = \cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

$$x_3 = \sin\frac{9\pi}{8} = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right) = -\sin\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

$$y_3 = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right) = -\cos\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$x_4 = \sin\frac{13\pi}{8} = \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = -\cos\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$y_4 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

***Приклад 4.*** *Числа a, b, c, d такі, що* $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, $ac+bd=0$. *Чому дорівнює ab+cd?*

***Розв’язання.*** Нехай *a=sinα, b=cosα,* $\alpha\in[0;\ 2\pi)$, *c=sinβ, d=cosβ,* $\beta\in[0;\ 2\pi)$. Тоді *ac+bd=0* набуває вигляду

sinα·sinβ+cosα·cosβ=0 *або* cos(α-β)=0.

Перетворимо вираз *ab+cd* з урахуванням заміни

$$ab+cd=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\sin2\alpha+\frac{1}{2}\sin2\beta=\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta).$$

Оскільки cos(α-β)=0, *то* sin(α+β)·cos(α-β)=0, отже *ab+cd*=0.

***Приклад 5.*** *Довести, що при довільних дійсних x і y*

$$-\frac{1}{2} \le \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \le \frac{1}{2}.$$

***Розв’язання.*** Нехай *x*=tg*α*, *y*=tg*β*, де *α*, $\beta\in(-\pi/2;\ \pi/2)$. Тоді

$$\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{(tg\alpha+tg\beta)(1-tg\alpha\cdot tg\beta)}{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)} =$$

$$= \frac{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\beta}} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$= \sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\sin2(\alpha+\beta).$$

Оскільки $-1\le\sin2(\alpha+\beta)\le1$, то

$$-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\sin2(\alpha+\beta) \le \frac{1}{2}.$$

Отже, всі значення виразу $\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$ знаходяться у вказаних межах. Що й потрібно було довести.

***Висновки.*** Підсумовуючи вищевикладене, зазначимо, що міжпредметність – сучасний принцип навчання, який впливає на відбір і структуру навчального матеріалу низки предметів, посилюючи системність знань суб’єктів навчання, активізує методи навчання, орієнтує на застосування комплексних форм організації навчання.

Застосування основних понять тригонометрії, тригонометричних функцій та їх властивостей значно полегшує розв’язування певних задач з алгебри, а вміння їх використовувати при розв’язуванні задач з різних розділів математики допоможе учням у підготовці до олімпіад з математики та самовдосконалення.

**ЛІТЕРАТУРА**

1. Айзенштат Я.И. Решение задач по тригонометрии. Книга для учителя / Айзенштат Я.И., Бородуля И.Т. – М. : Просвещение, 1989. – 239 с.

2. Березин В.Н. Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике / В.Н. Березин, Л.Ю. Березина, Й.Л. Никольская. – М. : Просвещение, 1985. – 175 с.

3. Горнштейн П.И. Тригонометрия помогает алгебре [Текст] / Горнштейн П.И. // Квант. – 1989. – № 5. – С. 68-70.

4. Мордкович А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе [Текст] / Мордкович А.Г. // Математика в школе. – 2002. – № 6. – С. 32-38.

5. Нестеренко Ю.В. Задачи вступительных экзаменов по математике / Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К. – М. : Наука, 1980. – 627 с.

6. Панчишкин А.А. Тригонометрические функции в задачах [Текст] / Панчишкин А.А., Шавгулидзе Е.Т. – М. : Наука, 1986. – 160 с.

7. Рыбкин Н. Сборник задач по тригонометрии / Рыбкин Н., Белоцерковская Б.Г. – М. : Учпедгиз, 1960. – 256 с.

**REFERENCES**

1. Aizenshtat, Ya.I., & Borodulia, I.T. (1989). *Reshenie zadach po trigonometrii. Kniga dlya uchitelya [Decision of tasks on trigonometry, teacher's book].* M. : Prosvescheniie [in Russian].

2. Berezin, V.N., Berezina, L.Yu., & Nikolska, I.L. (1985). *Sbornik zadach dlya fakultativnyih i vneklassnyikh zanyatiy po matematike [Collection of tasks for extracurricular tasks on mathematics]*. M. : Prosvescheniie [in Russian].

3. Gornshtein, P.I. (1989). *Trigonometriya pomogaet algebra [Trigonometry helps Algebra]*. Kvant, *5,* 68-70 [in Russian].

4. Mordkovich A.G. (2002). Metodicheskie problemyi izucheniya trigonometrii v obscheobrazovatelnoy shkole [Methodical problems of studying Trigonometry at general academic school]. *Matamatika v shkole – Mathematics is at school, 6,* 32-38 [in Russian].

5. Nesterenko, Yu.V., Olekhnik, S.N., & Potapov, M.K. (1980). *Zadachi vstupitelnykh ekzamenov po matematike [Tasks of entrance examinations on Mathematics]*. M. : Nauka.

6. Panchishkin, A.A., & Shavgulidze, E.T. (1986). *Trigonometricheskie funktsii v zadachakh [Trigonometric functions in tasks.* M. : Nauka [in Russian].

7. Rybkin, N., & Belotserkovska B.G. (1960). *Sbornik zadach po trigonometrii [Collection of tasks on Trigonometry]*. M. : Ychpedgiz [in Russian].

***И. В. Житарюк***

**МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ АЛГЕБРЫ И ТРИГОНОМЕТРИИ**

Статья посвящена применению тригонометрии к решению задач по алгебре в старшей школе. На конкретных примерах показаны методические особенности применения тригонометрии к решению уравнения, установления количества корней уравнения на определенном отрезке, решения системы уравнений и доказательства неравенства.

***Ключевые слова***: корень уравнения, неравенство, уравнение, старшая школа, тригонометрия.

***I. V. Zhitaryuk***

**INTERSUBJECT BONDS OF ALGEBRA AND TRIGONOMETRY**

The article deals with application of trigonometry while doing sums in algebra at senior school. On certain examples the methodical features of application of trigonometry in solving an equation, establishing the amount of equation roots on a certain segment, solving a system of equations and establishing an inequation are shown. We analyzed collections of mathematic tasks for senior school and publications in magazines ”Quantum” and ”Mathematician at school”. As a conclusion it is important to notice that intersubject relations are a new modern teaching principle, which influences the choosing and structure of the training materials of a set of subjects, strengthening the systematization of pupils' knowledge, activates teaching methods etc. Application of basic concepts of trigonometry, trigonometric functions and their properties makes doing some sums in algebra easier. The skill to use them while doing tasks in different subdisciplines of Math will help pupils in the preparation for academic competitions in Math and self-development.

***Keywords***: root of equalization, inequality, equalization, senior school, trigonometry.

*Подано до редакції 16.05.14*