Список бібліографічних посилань

1. Задачі LIX Всеукраїнської олімпіади юних математиків [Електронний ресурс] URL: *https://matholymp.com.ua/wp-content/uploads/2019/03/2019-%D0%A3%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B8-%D1%82%D0%B0-%D1%80%D0%BE%D0%B7%D0%B2%D1%8F%D0%B7%D0%BA%D0%B8-1-%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D1%8C-1.docx*
2. Задачі LVI Всеукраїнської олімпіади юних математиків [Електронний ресурс] URL: *https://matholymp.org.ua/_files/cdee2e2adf/solutions-day1-2016.pdf*
3. Задачі LXX Київської міської олімпіади [Електронний ресурс] URL: *http://matholymp.org.ua/_files/b8fbfbf029/solutions2.docx*

Saprikin S. M., Marinova V. V. Mathematical game problems in Ukrainian mathematical olympiads for pre-college students. *Certain techniques of solving of mathematical game problems in Ukrainian Mathematical Olympiads for pre-college students are reviewed.*

***Key words**: mathematical games, mathematical olympiads.*

Саприкин С. М., Марінова В. В. Задачи-игры на Всеукраинских ученических олимпиадах по математике. *Рассмотрены основные методы решения задач-игр, которые предлагаются на Всеукраинских ученических олимпиадах по математике.*

***Ключевые слова:** задачи-игры, ученические олимпиады по математике.*

С. М. Сапрікін
канд. фіз-мат наук, доцент,
Університет Ушинського, м. Одеса
ORCID 0000-0003-3092-9809,
e-mail: sergey.saprikin@gmail.com,
М. Р. Тіщенко
магістрантка, Університет Ушинського, м. Одеса
e-mail: tishhenkmar1996@gmail.com

ЗАДАЧІ НА ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ НА ВСЕУКРАЇНСЬКИХ УЧНІВСЬКИХ ОЛІМПІАДАХ З МАТЕМАТИКИ

У багатьох розділах математики, особливо у математичному аналізі, в прикладній математиці, нерівності зустрічаються значно частіше, ніж рівняння. Скажемо, розв’язки якихось практично важливих рівнянь лише в дуже рідких випадках вдається знайти точно – у вигляді числа або формули, а для наближеного розв’язання в математиці завжди потрібно вказати оцінку похибки, тобто довести деяку нерівність.

Задачі на доведення нерівностей – часті гості на математичних олімпіадах школярів. Майже кожна олімпіада містить в собі принаймні в одному класі таку задачу. Розв'язання задач такого типу традиційно являє собою послідовність достатньо простих міркувань. А ось логіка та ідеї всього ланцюжка цих елементарних ланок-міркувань виходить за рамки методів та способів шкільного курсу. Тим більше, що процес отримання і вивчення нерівностей та їх застосувань неформальний і трудно алгоритмізується.

Протягом декількох десятиріч розвитку олімпіадного руху задачі математичних олімпіад школярів дещо змінювались. З розвитком, вдосконаленням та поступовим ускладненням олімпіад з математики задачі на доведення нерівностей на сучасних олімпіадах всеукраїнського рівня стали вимагати від учасників знання та вміння використовувати певні результати та методи, які, в основному, далеко виходять за межі шкільної програми з математики. Аналізуючи завдання Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики незалежної України, ми виділили основні нерівності, якими має володіти учень для успішного розв'язання задачі на доведення нерівностей. Зважаючи на тезисність викладу, формулювання і приклади використання ми наведемо тільки для двох найбільш поширених.

1. Нерівності між середніми (зокрема, нерівність Коші)

Якщо a_1, $a_2,\dots$, a_n – невід'ємні (додатні) числа, то $\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \le \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \le \dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \le \dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$.

Приклад (задача 5.1 за 11 клас в [1, с.13]). Нехай x, y, z – додатні дійсні числа такі, що $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ Доведіть, що $xy+yz+zx \ge 3$.

Для розв'язання після перетворення $xy+yz+zx=\dfrac{xyz\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)+2x+2y+2z}{x+y+z}$ застосуємо нерівність Коші для трійки чисел $\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2},\frac{1}{z^2}$ і отримаємо необхідну оцінку.

2. Нерівність Коші-Буняковського

При будь-яких двох наборів дійсних чисел a_1, $a_2,\dots$, a_n і b_1, $b_2,\dots$, b_n виконується нерівність

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$

Приклад (задача 9.3 в [2, с.5]). Для додатних чисел a, b, c, що задовольняють умову $a+b+c+2=abc$, доведіть нерівність: $\dfrac{a}{b+1}+\dfrac{b}{c+1}+\dfrac{c}{a+1} \ge 2$.

Для розвязання застосуємо нерівність Коші-Буняковського для трійок чисел $\sqrt{\frac{a}{b+1}}, \sqrt{\frac{b}{c+1}}, \sqrt{\frac{c}{a+1}}$ та $\sqrt{a(b+1)}, \sqrt{b(c+1)}, \sqrt{c(a+1)}$ і після перетворень одержимо, що достатньо довести нерівність $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a + 2b + 2c$.

Знову застосуємо нерівність Коші-Буняковського тепер для трійок чисел a, b, c та $2, 2, 2$ і після перетворень отримаємо потрібну нерівність.

3. Нерівність Шура.

4. Нерівність Чебишова.

5. Транс-нерівності або нерівність перестановки.

6. Нерівність Мюрхеда.

Список бібліографічних посилань

1. Задачі LXXIII Київської міської олімпіади юних математиків [Електронний ресурс] URL: https://drive.google.com/drive/folders/1a501O2Yqc_xtt7R_yfceSe-l90Dg7-qx

2. Задачі LV Всеукраїнської олімпіади з математики [Електронний ресурс] URL: https://matholymp.org.ua/_files/a6ce53e6d3/solutions-1.doc

Saprikin S.M., Tishchenko M.R. Proving of inequalities problems in Ukrainian Mathematical Olympiads for pre-college students. *Certain techniques of proving of inequalities in Ukrainian Mathematical Olympiads for pre-colledge students are reviewed.*

***Key words**: proving of inequalities, mathematical olympiads.*

Саприкин С.М., Тищенко М.Р. Задачи на доказательство неравенств на Всеукраинских ученических олимпиадах по математике. *Рассмотрены основные методы доказательства неравенств, которые предлагаются на Всеукраинских ученических олимпиадах по математике.*

***Ключевые слова**: доказательство неравенств, ученические олимпиады по математике.*