С. М. Сапрікін
канд. фіз-мат наук, доцент,
Університет Ушинського, м. Одеса
ORCID 0000-0003-3092-9809,
e-mail: sergey.saprikin@gmail.com,
В. В. Марінова
магістрантка,
Університет Ушинського, м. Одеса
e-mail: marinovaveron@gmail.com

ЗАДАЧІ-ІГРИ НА ВСЕУКРАЇНСЬКИХ УЧНІВСЬКИХ ОЛІМПІАДАХ З МАТЕМАТИКИ

Гра – це математична модель поведінки декількох людей, що мають конфліктну ситуацію. Задачі-ігри є досить популярним видом олімпіадних задач, особливо в молодших класах.

Найчастіше передбачається, що грають двоє, роблячи ходи по черзі (пропускати свій хід не можна), а в задачі запитують "хто виграє при правильній грі?" Стандартна помилка по суті – розуміти слова "при правильній грі" так, як ніби обидва супротивники грають оптимальним для себе чином (тим більше, що розв'язуючий задачу часто неправильно розуміє, що таке "оптимальним чином"). Тоді придумується виграшна стратегія, яка дає відповідь тільки на оптимальний хід супротивника (зазвичай ще "оптимальним" вважається такий хід, коли супротивник слід придуманої нами ж стратегії – хоча для іншого гравця така стратегія може бути, навпаки, зовсім нікчемною). Насправді, треба вміти придумувати відповідь на будь-який хід противника, яким би плохим він нам не здавався. Зазвичай правильна стратегія, на відміну від неправильної, не має випадків різної складності, а з однаковою легкістю знаходить гідну відповідь на будь-який хід.

В розв'язанні школяреві необхідно сформулювати виграшну стратегію за одного з гравців, тобто такий спосіб гри, який призводить до виграшу незалежно від дій супротивника, а також довести, що вона дійсно призведе до виграшу. Такі задачі дуже корисні для розвитку розмовної математичної культури і чіткого розуміння того, що означає розв'язати задачу.

Задачі-ігри зустрічаються майже в кожного року на Всеукраїнській олімпіаді юних математиків. Серед стратегій, що використовуються, можна виділити три групи, які ми наведемо далі.

1. Симетрична стратегія.

Симетрична стратегія полягає в тому, що один з гравців робить ходи, в певному сенсі симетричні ходам іншого гравця.

Приклад (задача 11-2 в [1, с. 8]). На початку гри ігрове поле – це прямокутник $2\times 2n$. Олеся та Андрій по черзі (розпочинає Олеся) роблять такі ходи – кожний з них від поточного ігрового поля відрізають квадрат розміру 1×1 або 2×2 за умови, що їх можна вирізати з ігрового поля на цей момент і після його відрізання ігрове поле залишиться зв'язним по стороні, тобто з будького поля на будь-яке інше можна дістатися ходами шахової тури. Виграє той, хто відріже останній квадратик ігрового поля. Хто переможе в цій грі, за умови що усі хочуть виграти?

В цій задачі в залежності від парності n один з гравців виграє, роблячи, за певним виключенням, ходи, що є симетричними до ходів іншого гравця відносно вертикальної осі симетрії дошки.

2**. Стратегія виграшних на програшних позицій**.

Стратегія виграшних та програшних полів відповідності полягає в тому, що всі можливі позиції в грі розбиваються на виграшні та програшні так, щоб виконувались умови задачі (тобто, гравець, що стоїть на виграшній позиції, за умовами задачі виграє, а на програшній – відповідно, програє) і наступні властивості:

- з виграшної позиції є хоча б один хід до програшної;
- всі ходи з програшної позиції ведуть до виграшних.

Приклад (задача 10.3 в [2, с. 6]).

На дошці записано число 2016. Олеся та Андрій грають у таку гру: вони по черзі (починає Олеся) зменшують число на дошці на натуральне число, що не перевищує номера ходу (першим ходом Олеся повинна обов'язково зменшити число на 1, Андрій своїм ходом на 1 чи на 2, далі Олеся на 1, 2 чи 3 і т.д.) Виграє той, хто першим зможе записати на дошці число 0. Хто перемагає в при правильній грі обох супротивників?

Для розв'язання цієї задачі потрібно розглянути позиції вигляду (n,m), де n – число, яке записано на дошці, а m – номер ходу і довести, що виграшними позиціями є ті й тільки ті, які мають вигляд (k^2+lk, k^2+lk+k).

3. Стратегія полів відповідності.

Стратегія полів відповідності полягає в тому, що позиції гри розбиваються на пари таким, щоб з довільної позиції за правилами гри можна було зробити хід в іншу позицію пари. Стратегія полягає в тому, щоб у відповідь на хід супротивника робити свій хід у іншу позицію тієї ж пари.

Приклад (задача 2 восьмого класу в [3, с. 3]).

Андрій та Олеся грають у таку гру. Спочатку Андрій вибирає довільну шахову фігуру (короля, ферзя, туру, слона чи коня) та ставить її на шахівницю. Далі вони по черзі роблять хід за правилами обраної шахової фігури. При цьому на поле, з якого Андрій розпочинав, та на поле, на якому фігура вже побувала, знову ставити не можна. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє за таких умов, якщо кожен намагається виграти?

Для розв'язання цієї задачі потрібно усю шахівницю розбити на пари клітин, які пов'язані ходом відповідної фігури.

Також в олімпіадних задачах зустрічаються так звані ігри-жарти, в яких незалежно від поведінки гравців результат гри можна прорахувати заздалегідь. Тому в розв'язанні такої задачі не потрібно наводити виграшну стратегію, а необхідно лиш довести, що виграє той чи інший гравець.

Список бібліографічних посилань

1. Задачі LIX Всеукраїнської олімпіади юних математиків [Електронний ресурс] URL: *https://matholymp.com.ua/wp-content/uploads/2019/03/2019-%D0%A3%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B8-%D1%82%D0%B0-%D1%80%D0%BE%D0%B7%D0%B2%D1%8F%D0%B7%D0%BA%D0%B8-1-%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D1%8C-1.docx*

2. Задачі LVI Всеукраїнської олімпіади юних математиків [Електронний ресурс] URL: *https://matholymp.org.ua/_files/cdee2e2adf/solutions-day1-2016.pdf*

3. Задачі LXX Київської міської олімпіади [Електронний ресурс] URL: *http://matholymp.org.ua/_files/b8fbfbf029/solutions2.docx*

Saprikin S. M., Marinova V. V. Mathematical game problems in Ukrainian mathematical olympiads for pre-college students. *Certain techniques of solving of mathematical game problems in Ukrainian Mathematical Olympiads for pre-college students are reviewed.*

Key words*: mathematical games, mathematical olympiads.*

Саприкин С. М., Марінова В. В. Задачи-игры на Всеукраинских ученических олимпиадах по математике. *Рассмотрены основные методы решения задач-игр, которые предлагаются на Всеукраинских ученических олимпиадах по математике.*

Ключевые слова: *задачи-игры, ученические олимпиады по математике.*

С. М. Сапрікін
канд. фіз-мат наук, доцент,
Університет Ушинського, м. Одеса
ORCID 0000-0003-3092-9809,
e-mail: sergey.saprikin@gmail.com,
М. Р. Тіщенко
магістрантка, Університет Ушинського, м. Одеса
e-mail: tishhenkmar1996@gmail.com

ЗАДАЧІ НА ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ НА ВСЕУКРАЇНСЬКИХ УЧНІВСЬКИХ ОЛІМПІАДАХ З МАТЕМАТИКИ

У багатьох розділах математики, особливо у математичному аналізі, в прикладній математиці, нерівності зустрічаються значно частіше, ніж рівняння. Скажемо, розв’язки якихось практично важливих рівнянь лише в дуже рідких випадках вдається знайти точно – у вигляді числа або формули, а для наближеного розв’язання в математиці завжди потрібно вказати оцінку похибки, тобто довести деяку нерівність.

Задачі на доведення нерівностей – часті гості на математичних олімпіадах школярів. Майже кожна олімпіада містить в собі принаймні в одному класі таку