ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ НА УЧНІВСЬКИХ ОЛІМПІАДАХ З МАТЕМАТИКИ

Сапрікін С. М., Сівак І. С.

Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Анотація. Розглянуто деякі методи розв'язування функціональних рівнянь, що зустрічаються на Всеукраїнських учнівських олімпіадах з математики.

Ключові слова: функціональні рівняння, учнівські олімпіади з математики.

Аннотация. Рассмотрены некоторые методы решения функциональных уравнений, которые предлагаются на Всеукраинских ученических олимпиадах по математике.

Ключевые слова: функциональные уравнения, ученические олимпиады по математике.

Summary. Certain techniques of solving of functional equations in Ukrainian Mathematical Olympiads for pre-college students are reviewed.

Key words: functional equations, mathematical Olympiads.

Функціональні рівняння відносяться до одного з найдавніших розділів математичного аналізу. Постановка задач, пов'язаних з функціональними рівняннями часто є досить простою, а їх розв'язування не вимагає якоїсь спеціальної підготовки і традиційно являє собою послідовність достатньо простих міркувань. Але при цьому, як правило, логіка та ідеї всього ланцюжка цих елементарних ланок-міркувань завжди потребує глибокого логічного мислення, знання основних методів розв'язування таких рівнянь та їх творчого осмислення. До того ж, процес їх знаходження неформальний і трудно алгоритмізується. У зв'язку з цим функціональні рівняння майже обов'язково зустрічаються на різноманітних олімпіадах і турнірах юних математиків.

Аналізуючи завдання учнівських олімпіад з математики незалежної України, ми виділили спеціальні методи чи прийоми, якими має володіти учень для успішного розв'язання функціональних рівнянь. Зважаючи на тезисність викладу, опис і приклади використання ми наведемо тільки для двох з них.

1. Метод симетрії

Метод симетрії може бути використаний у випадку, коли одна частина рівняння є симетричною в певному сенсі, а інша – ні. В цьому випадку можна отримати нове співвідношення, яке може суттєво допомогти при розв'язанні задачі.

Приклад ([1.1], задача 10.8)

Знайдіть усі такі функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, що для усіх дійсних $x,\ y$, справджується рівність $4f\left(x+f(y)\right)=f(x)+f(y)+f(xy)+1$.

Зауважимо, що права частина даної рівності є симетричною відносно змінних x і y, а ліва – ні, тому помінявши місцями x та y, і, порівнюючи з початковою рівністю, дістанемо висновку, що $f\left(x+f(y)\right)=f\left(y+f(x)\right)$, звідки підстановкою

$x=-f(y)$ отримаємо, що $f(0)=f(y+f(-f(y)))$. Далі розглядаються два випадки – коли існує чи не існує таке $a\neq 0$, що $f(a)=f(0)$. В першому з цих випадків виходить, що $f(x)\equiv \mathrm{const}$, а в іншому – $f(x)=\frac{1}{2}x+C$. Перевірка показує, що лише $f(x)\equiv 0$ є розв'язком.

2. Використання області значень функції.

Знайдіть усі функції $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, які для усіх невід'ємних x, y задовольняють рівності:

$$f\left(f(x)+f(y)\right)=xyf(x+y).$$

Спочатку декількома підстановками отримаємо, що $f\left(f(0)\right)=0$, потім $f(0)=0$ і $f\left(f(x)\right)=0$ для довільного x. Далі підстановкою $y=f(y)$ отримаємо

$$xf(y)f\left(x+f(y)\right)=0. \tag{1}$$

Очевидно, що функція $f(x)\equiv 0$ є розв'язком даного рівняння. Припустивши, що існує таке $y_0>0$, що $f(y_0)\neq 0$. Підставимо $y=y_0-x$ в початкове рівняння, тоді

$$f\left(f(x)+f(y_0-x)\right)=x(y_0-x)f(y_0) \text{ для } x\in[0;y_0].$$

Це, зокрема, означає, що функція $f(x)$ приймає всі значення, що приймає функція $x(y_0-x)f(y_0)$ при $x\in[0;y_0]$, тобто, всі значення на проміжку $[0;\frac{1}{4}y_0^2f(y_0)]$. Звідси існує таке x_0, що $f(x_0)=\min\{\frac{1}{2}y_0,\frac{1}{8}y_0^2f(y_0)\}$. З рівності (1) при $y=x_0$ і $x=y_0-f(x_0)>0$ маємо, що $f(x_0)f(y_0)=0$, що неможливо. Отримана суперечність доводить, що $f(x)=0$ для довільного $x\in[0,+\infty)$.

Література

1. Задачі LV Всеукраїнської олімпіади з математики [Електронний ресурс] URL: http://matholymp.org.ua/_files/4eeb8e93e8/solutions-2.doc
2. Задачі LVIII Всеукраїнської олімпіади з математики [Електронний ресурс] URL: http://matholymp.com.ua/wp-content/uploads/2018/03/2018-%D0%A3%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%B8-%D1%82%D0%B0-%D1%80%D0%BE%D0%B7%D0%B2%D1%8F%D0%B7%D0%BA%D0%B8-1-%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D1%8C-9.docx