Література

1. Про Рекомендації парламентських слухань на тему: "Реформи галузі інформаційно- комунікаційних технологій та розвиток інформаційного простору України"/ Постанова Верховної Ради України. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/1073-19
2. Скільки IT-спеціалістів в Україні: +29 000 за рік згідно з Мін'юстом [Електронний ресурс]. — Режим доступу https://dou.ua/lenta/articles/how-many-devs-in-ukraine-2018/
3. Сучасна IT освіта в Україні [Електронний ресурс]. — Режим доступу https://mon.gov.ua/ua/osvita/visha-osvita/suchasna-it-osvita-v-ukrayini
4. Економічний ефект IT-галузі Львова сягнув рекордної суми [Електронний ресурс]. — Режим доступу https://itukraine.org.ua/ekonom%D1%96chnij-efekt-%D1%96t-galuz%D1%96-lvova-syagnuv-rekordno%D1%97-sumi-majzhe-m%D1%96lyard-dolar%D1%96v.html

УДК 517.929.2

СПЕКТРАЛЬНА КВАНТОВО-МЕХАНІЧНА ЗАДАЧА НА H-ГРАФІ

Пивоварчик В. М., Чернишенко А. А.

Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

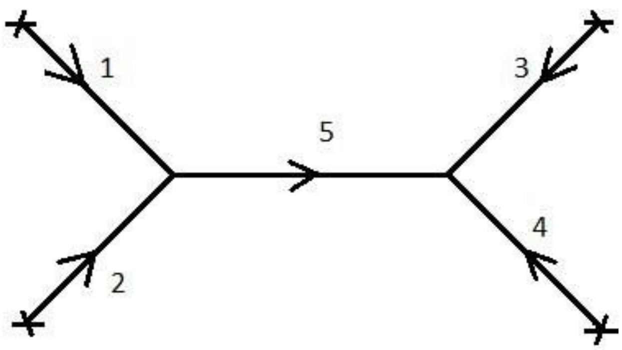
Ключові слова: власне значення, власна функція, вузол, осциляційна теорема Штурма, кратність.

Теорія квантових графів є відносно молодою галуззю математики. Наскільки нам відомо, перші публікації, в котрих розглядалися крайові задачі, породжені рівнянням Штурма-Ліувілля на графах, з'явились у 50-х роках XX століття (див. [1]). Термін «квантові графи», котрі є сленговим позначенням крайових задач, породжених рівняннями квантової механіки, на графах, широко використовується в літературі (див., наприклад, [4]). Він означає наступне. На ребрах графу задані диференціальні рівняння (в більшості випадків рівняння Шредінгера, Дірака або

Штурма-Ліувілля, тому «квантові»), у внутрішніх вершинах графу накладаються умови неперервності та Кірхгофа, на висячих вершинах графу здебільшого накладають умови Діріхле, Неймана. Таким чином отримують спектральну задачу, фізичний зміст спектрального параметру полягає в тому, що його квадрат пропорційний енергії квантової частинки, котра рухається у квазіодновимірному хвильоводі, що має форму нашого графу з тонкими ребрами. Умова Діріхле у висячій вершині графу означає повне відбиття, тобто, що квантова частинка не може залишити межі графу (хвильоводу) (див., наприклад, [2]).

У нашій роботі ми розглядаємо так званий Н-граф (див. рис.1), котрий є одним з простих представників класу дерев, але є менш вивченим, ніж так звані зіркові графи (див, наприклад [6]). Для деякого спрощення ситуації ми вважаємо, що потенціал рівняння Штурма-Ліувілля на всіх ребрах графу дорівнює нулю.

Н-графом будемо називати граф, зображений на рис. 1. Ребра занумеровані так, як на рисунку. Ми розглядаємо спектральну задачу (тут λ- спектральний параметр):



$$y_j'' + \lambda^2 y_j = 0,\ (j = 1,2, \dots ,5), \tag{1}$$

$$y_j(0) = 0,\ (j = 1,2,3,4), \tag{2}$$

$$y_1(l) - y_2(l) = 0, \tag{3}$$

$$y_2(l) - y_5(0) = 0, \tag{4}$$

$$y_1'(l) + y_2'(l) - y_5'(0) = 0, \tag{5}$$

$$y_3(l) - y_4(l) = 0, \tag{6}$$

$$y_4(l) - y_5(l) = 0, \tag{7}$$

$$y_3'(l) + y_4'(l) + y_5'(0) = 0. \tag{8}$$

Будемо шукати розв’язок задачі *(1)-(8)* у наступному вигляді.

$$y_j(\lambda, x) = B_j \frac{sin\lambda x}{\lambda},\ j = 1,2,3,4, \tag{9}$$

$$y_5(\lambda, x) = A_5\, cos\lambda x + B_5 \frac{sin\lambda x}{\lambda}. \tag{10}$$

Завдяки такій формі шуканих розв'язків рівняння *(1)* та *(2)* задовольняються автоматично. Отже, підставляємо *(9)* та *(10)* у рівняння *(3) –(8)*. Отримаємо систему шести рівнянь з шістьма невідомими B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, A_5 . Для існування нетривіального розв'язку визначник нашої системи має дорівнювати нулю, тобто

$$\frac{sin^3\lambda l}{\lambda^3}(8cos^2\lambda l - sin^2\lambda l) = 0.$$

Це рівняння розкладається на такі рівняння:

$$\frac{sin^3\lambda l}{\lambda^3} = 0 \text{ і } 8cos^2\lambda l - sin^2\lambda l = 0.$$

Розв'язки цих рівнянь є власними значеннями нашої спектральної задачі.
Перше з них дає нам власні значення

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{\pi n}{l}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

кожне з яких є трикратним (у алгебраїчному та геометричному сенсі), а друге дає нам прості власні значення, котрі описуються формулами:

$$\lambda_n^{(2)} = \pm\frac{arcsin\sqrt{8/9}}{l} + \frac{\pi n}{l}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Впорядкуємо власні значення $\{\lambda_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ та $\{\lambda_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$ змінивши нумерацію так, щоб отримати неспадаючу послідовність:

$$\lambda_{1+5(k-1)} = \frac{arcsin\sqrt{8/9}}{l} + \frac{\pi(k-1)}{l}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

$$\lambda_{2+5(k-1)} = \frac{-arcsin\sqrt{\frac{8}{9}}}{l} + \frac{\pi k}{l}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

$$\lambda_{3+5(k-1)} = \lambda_{4+5(k-1)} = \lambda_{5+5(k-1)} = \frac{\pi k}{l}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Ми прийшли до наступних висновків.

1. При розгляді нашої задачі ми обрали напрямки ребер так, як зображено на рисунку 1. Але цілком зрозуміло, що якщо ми змінимо напрямки, то наші результати не зміняться. Це випливає з того, що всі рівняння, котрими описуються спектральні задачі, не залежать від орієнтації ребер. Це є характерним для всіх задач, породжених рівнянням Штурма-Ліувілля на графах.

2. Геометрична кратність власних значень дорівнює їх алгебраїчній кратності і це є завдяки тому, що наша задача самоспряжена (див [5]). Тут під геометричною кратністю власного значення ми називаємо кількість лінійно незалежних власних векторів, що відповідають цьому власному значенню. Алгебраїчною кратністю власного значення ми називаємо степінь, в якій множник (λ-λ_0) (λ_0-власне значення) входить у вираз для характеристичної функції. Зрозуміло, що як алгебраїчна так і геометрична кратності скінченні.

3. Будемо називати вузлами власної функції точки на нашому Н-графі (окрім висячих вершин), в яких значення власної функції дорівнює нулю. Власна

функція, що відповідає першому власному значенню, котре згідно з формулою (*11)*

$$\lambda_1 = \frac{arcsin\sqrt{8/9}}{l},$$

не має вузлів. Власна функція, котра відповідає другому власному значенню, яке, згідно з формулою *(12),* дорівнює

$$\lambda_2 = \frac{-arcsin\sqrt{8/9}}{l} + \frac{\pi}{l},$$

має один вузол. Таким чином, для цих двох власних значень кількість вузлів така сама, яка має місце у відповідній задачі на дереві у випадку, коли всі власні значення є простими, що доведено у [3] (теорема 5.1), і відповідає класичній осциляційній теореми Штурма для задачі на інтервалі.

Однак, власні функції, що відповідають згідно з *(13)* $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{\pi}{l}$, вже не відповідають закономірності, що описується осциляційною теоремою Штурма, тобто, не можемо сказати, що власному значенню λ_3 відповідає власна функція з двома вузлами, λ_4 – з трьома, λ_5 – з чотирма.

Наша гіпотеза полягає в тому, що власні функції, що відповідають простим власним значенням нашої задачі залишаються підпорядкованими осциляційній теоремі Штурма, тобто власна функція, що відповідає λ_6 має 5 вузлів, власна функція, що відповідає λ_7 має 6 вузлів, власна функція, що відповідає λ_{11} має 10 вузлів, а власна функція, що відповідає λ_{12} має 11 вузлів.

4. Відомо (див. [5]), що максимально можлива кратність власного значення для задачі Штурма-Ліувілля на дереві дорівнює $P_{pen} - 1$, де P_{pen} – це кількість висячих вершин дерева. У нашого дерева кількість висячих вершин дорівнює 4, отже, максимальна можлива кратність власних значень дорівнює 3. В нашому простому випадку ми досягли саме цієї максимальної кратності ($\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5$), завдяки тому, що обрали ребра графу однакової довжини та вважали, що потенціал рівняння Штурма-Ліувілля дорівнює 0, отже, є однаковим на всіх ребрах і є симетричним відносно середини ребра.

Література

1. Alexander S. Superconductivity of networks. A percolation approach to the effects of disorder/ S. Alexander// Phys. Rev. -1983. - **27**, 3. – P. 1541—1557.
2. Berkolaiko G. Introduction to quantum graphs. Mathematical Surveys and Monographs/ G.Berkolaiko, P. Kuchment . – Rhode Island : AMS, Providence RI, 2013, -186 p.
3. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / [Боровских А. В., Лазарев К. П., Пенкин О. М. и др.]. - Физматлит, 2005. - 268с.
4. Дуб М. Спектры графов. Теория и применение/ М. Дуб, Х. Захс, Д. Цветкович. - Киев: Наукова Думка, 1984. - 384 с.
5. Kac I. On multiplicity of a quantum graph spectrum/ I. Kac, V. Pivovarchik//. J. Phys. A. -2011.-44, 10. – P. 105-301.

6. Moller M. Spectral Theory of Operator Pencils, Hermite-Biehler Functions, and their Applications/ M.Moller, V. Pivovarchik. Cham: Birkhauser, 2015. - 412 p.