

Узагальнення способів розв'язання задач на одночасний рух та задач на спільну роботу

Формування в учнів умінь розв'язувати задачі на рух, особливо задач на рух в одному напрямку викликає у вчителів певні труднощі. Між тим, в методичній літературі існують пропозиції А.Н.Боголюбова, В.Московченко, Л.Дудко, Р.Н.Шикової, П.М.Єрднієва та С.О.Скворцової, Г.І.Мартінової, Т.О.Шевченко щодо підготовчої роботи до введення задач на рух в одному напрямі, ознайомлення із задачами даного виду. Треба зазначити, що Р.Н.Шиковою запропонована обґрунтована методика ознайомлення учнів с задачами на рух в одному напрямку. Основною її ідеєю є складання креслення у масштабі та виконання практичних дій з ним. Також, автор для навчання розв'язування усіх типів задач на рух в одному напрямку застосовує взаємно обернені задачі. На підставі співставлення задач на рух в одному та в різних напрямках побудована методика П.М.Єрднієва. Автор наголошує на тому, що обидва види задач на рух навздогін та в протилежних напрямках доцільно розв'язувати одночасно. П.М.Єрднієв також радить порівнювати задачі на рух навздогін та на рух з відставанням, пропонуючи учням пари задач. У методиці С.О.Скворцової, Г.І.Мартінової та Т.О.Шевченко враховані майже усі пропозиції попередніх авторів [3] .

Можливість підвищення ефективності навчання школярів розв'язування задач на рух в одному напрямку ми бачимо у співставленні задач на рух та на спільну роботу. В даній статті ми порівняємо математичні структури та способи розв'язання задач на одночасний рух в одному напрямку (навздогін та з відставанням) із задачами на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці двох виконавців знаходять дією віднімання. А також на основі перетворення задачі на рух в одному напрямку у задачу на рух в різних напрямках, і задачі на спільну роботу, у якій продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання у задачу на спільну роботу, у якій продуктивність

спільної праці знаходять дією віднімання, узагальнимо їх математичні структури та способи розв'язання.

Треба зазначити, що в методичній науці відсутні розробки цієї проблеми, хоча окремі методисти (Р.Н.Шикова [4]) й зазначають, що задачі на рух та задачі, що містять інші групи пропорційних величин, можуть мати одну й ту саму математичну структуру, моделі і способи розв'язання, як арифметичні так і алгебраїчні.

Якщо подати математичні структури задач на одночасний рух та на спільну роботу (в яких дано продуктивність праці кожного виконавця) у вигляді таблиці і порівняти їх, то можна одержати узагальнену таблицю, де одне з чисел є шуканим (див. мал. 1).

	$\frac{\text{заг.виробіток}}{\text{відстань}}$	$\frac{\text{продукт.пр.}}{\text{швидкість}}$	час
I		N_1 / V_1	
II		N_2 / V_2	
I і II	A / S		t

Мал. 1. Узагальнена опорна схема задач на спільну роботу та на рух

N_1 – продуктивність праці першого виконавця; N_2 – продуктивність праці першого виконавця; A – загальний виробіток при спільній праці; V_1 - швидкість першого тіла

V_2 - швидкість другого тіла; t – час спільного руху або час спільної праці; S – відстань між тілами на момент початку або на момент закінчення руху

Задачі на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці являє собою суму або різницю продуктивностей кожного виконавця, та задачі на рух в одному або у різних напрямках мають два способи розв'язання. Способи розв'язання задач на спільну роботу, в яких спільну продуктивність знаходять дією віднімання, та задач на одночасний рух в одному напрямку подані у таблиці 1.

Таким чином, задачі на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання, та задачі на одночасний рух в одному напрямку мають однакові математичні структури та аналогічні способи розв'язання, що дає можливість об'єднати їх в одну групу і розробляти

методику навчання розв'язування цих задач у їх порівнянні, з метою узагальнення їх математичних структур та способів розв'язання.

Таблиця 1.

Способи розв'язання задач на спільну роботу, в яких спільну продуктивність роботи двох виконавців знаходять дією віднімання, та на рух в одному напрямку

I спосіб	II спосіб
$A = N_1 * t - N_2 * t$	$A = (N_1 - N_2) * t$
$S = V_1 * t - V_2 * t$	$S = (V_1 - V_2) * t$
	$t = A : (N_1 - N_2)$
	$t = S : (V_1 - V_2)$
$N_1 = (A + N_2 * t) : t$	$N_1 = A : t + N_2$
$N_2 = (N_1 * t - A) : t$	$N_2 = N_1 - A : t$
$V_1 = (S + V_2 * t) : t$	$V_1 = S : t + V_2$
$V_2 = (V_1 * t - S) : t$	$V_2 = V_1 - S : t$

Теоретичною основою розробки даної методики є:

1. Організація процесу узагальнення на підставі паралельного порівняння за А.К. Артьомовим [1].
2. Методична схема двофазних узагальнень В.Н. Осинської [2].

Методика узагальнення математичних структур задач на спільну роботу та на рух в одному напрямку та відповідна їй система завдань містять наступні обов'язкові компоненти:

1. *Співставлення задач на спільну роботу на знаходження загального виробітку при спільній праці, в яких продуктивність спільної праці являє собою різницю продуктивностей виконавців, з задачами на одночасний рух навздогін на знаходження відстані між тілами на момент початку руху.*

Учням пропонуються для розв'язання пара задач з однаковими числовими даними, але перша задача – задача на рух наздогін, а друга задача – на спільну роботу.

<p>1) З двох станцій виїхали одночасно пасажирський і товарний поїзд в одному напрямку. Пасажирський поїзд йшов за товарним. Пасажирський поїзд рухався зі швидкістю $70 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а товарний – $50 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яка відстань між станціями, якщо пасажирський наздогнав товарний через 7 годин?</p>	<p>2) Через кран у бак вливається 70 відер води щогодини, а через зливний отвір виливається 50 відер води щогодини. Скільки відер води наллється у бак, якщо і кран і зливний отвір будуть відкриті?</p>
---	--

Школярі записують кожну задачу коротко в формі таблиці і порівнюючи короткі записи, помічають схожість математичних структур цих задач. Після розв’язання задач двома способами, якщо це можливо, знов здійснюється порівняння і робиться висновок про те, що ці задачі мають однакові математичні моделі та аналогічні плани розв’язання.

Узагальнюємо математичні структури та способи розв’язання таких задач на знаходження відстані між тілами на момент початку руху та задач на знаходження продуктивності праці при спільній роботі (мал. 3).

2. *Узагальнення математичних структур і способів розв’язання задач на знаходження відстані між тілами на момент початку руху при одночасному русі навздогін або назустріч та на знаходження загального виробітку, якщо продуктивність спільної праці знаходять відніманням або додаванням.*

Перетворюємо задачу на рух на уздогін (1) у задачу на одночасний рух назустріч. З’ясовуємо як ця зміна вплине на розв’язання задачі: в першому способі зміниться третя дія – віднімання треба замінити додаванням; а у другому способі – зміниться перша дія, тому що числове значення зміни відстані при русі назустріч ми знаходимо додаванням. План розв’язання задач від виконаних змін не змінюється.

Перетворюємо задачу (2) у задачу на спільну роботу так, щоб продуктивність спільної праці знаходили дією додавання. Ця зміна не впливає на план розв’язання, він лишається тим самим.

	<i>заг.виробіток</i> <i>відстань</i>	<i>продукт.пр.</i> <i>швидкість</i>	час
I		N_1 / V_1	
II		N_2 / V_2	
I і II	?	?	t

1 спосіб	2 спосіб
$A = N_1 * t - N_2 * t$	$A = (N_1 - N_2) * t$
$S = V_1 * t - V_2 * t$	$S = (V_1 - V_2) * t$

1 спосіб	2 спосіб
1) знаходимо $\frac{\text{заг.виробіток}}{\text{відстань}}$ першого об'єкта для даного значення часу;	1) знаходимо $\frac{\text{продуктивність..спільної..праці}}{\text{на..скільки..змінюється..відстань..між..тілами..за..одиницю..часу}};$
2) знаходимо $\frac{\text{заг.виробіток}}{\text{відстань}}$ другого об'єкта для даного значення часу;	2) знаходимо $\frac{\text{загальний..виробіток..при..спільній..праці}}{\text{на..скільки..змінилася..відстань..між..тілами..за..час..їх..спільного..руху}}.$
3) знаходимо $\frac{\text{заг.виробіток}}{\text{відстань}}$ першого та другого об'єктів при їх спільній $\frac{\text{їй}}{\text{ому}}$ праці русі.	

Мал. 3. Опорні схеми та план розв'язання задач на спільну роботу та на одночасний рух в одному напрямку, в яких шуканою є загальний виробіток при спільній праці або відстань

N_1 – продуктивність праці першого виконавця; N_2 – продуктивність праці першого виконавця; A – загальний виробіток при спільній праці; V_1 – швидкість першого тіла

V_2 – швидкість другого тіла; t – час спільного руху або час спільної праці; S – відстань між тілами на момент початку або на момент закінчення руху

Отже, задачі на знаходження відстані на момент початку руху при одночасному русі навздогін або назустріч та задачі на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання або додавання, мають однакові плани розв'язання (мал. 4.).

1 спосіб	2 спосіб
<p>1) знаходимо $\frac{\text{заг.виробіток}}{\text{відстань}}$ першого об'єкта для даного значення часу;</p> <p>2) знаходимо $\frac{\text{заг.виробіток}}{\text{відстань}}$ другого об'єкта для даного значення часу;</p> <p>3) знаходимо $\frac{\text{заг.виробіток}}{\text{відстань}}$ першого та другого об'єктів при їх спільній $\frac{\text{їй}}{\text{ому}}$ $\frac{\text{праці}}{\text{русі}}$.</p>	<p>1) знаходимо $\frac{\text{продуктивність..спільної..праці}}{\text{на..скільки..змінюється..відстань..між..тілами..за..одницю..часу}}$;</p> <p>2) знаходимо $\frac{\text{загальний..виробіток..при..спільній..праці}}{\text{на..скільки..змінилася..відстань..між..тілами..за..час..їх..спільного..руху}}$.</p>

Мал. 4. Опорні схеми та план розв'язання задач на спільну роботу та на одночасний рух назустріч або наздогін, в яких шуканою є загальний виробіток при спільній праці або відстань

3. Зіставлення задач на спільну роботу на знаходження часу спільної праці, в яких продуктивність спільної праці являє собою різницю продуктивностей виконавців, з задачами на одночасний рух навздогін на знаходження часу, через який одне тіло опиниться поруч з іншим.

Аналогічно пункту 1.

<p>1) З двох пристаней, відстань між якими 15 км, одночасно в одному напрямку поплили два човни. Перший плів зі швидкістю $7 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а другий – $10 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, при чому другий плів за першим. Через який час другий наздожене першого?</p>	<p>2) Бак вміщує 15 відер води. Через скільки годин може наповнитися цей бак, якщо кран і зливний отвір відриті. Через кран щогодини вливається 10 відер води, а через зливний отвір щогодини виливається – 7 відер води.</p>
--	---

Узагальнюємо математичні структури та способи розв'язання задач на знаходження часу при одночасному русі навздогін та задач на знаходження часу спільної праці (мал.. 5).

	$\frac{\text{заг.виробіток}}{\text{відстань}}$	$\frac{\text{продукт.пр.}}{\text{швидкість}}$	час	1 спосіб	2 спосіб
1		N_1 / V_1			$t = A : (N_1 - N_2)$
II		N_2 / V_2			$t = S : (V_1 - V_2)$
1 і II	A / S	?	?		

1 спосіб	2 спосіб
	1) знаходимо $\frac{\text{продуктивність..спільної..праці}}{\text{на..скільки..змінюється..відстань..між..тілами..за..одницю..часу}};$
	2) знаходимо час спільн $\frac{\text{ої}}{\text{ого}} \frac{\text{руху}}{\text{праці}}.$

Мал. 5. Опорна схема та план розв'язання задач на спільну роботу та на одночасний рух наздогін, в яких шуканою є час спільної праці або час руху до зустрічі

4. Узагальнення математичних структур і способів розв'язання задач на знаходження часу зустрічі при одночасному русі навздогін або назустріч та на знаходження часу спільної праці, якщо продуктивність спільної праці знаходять відніманням або додаванням.

Перетворюємо задачу на рух на уздогін (1) у задачу на одночасний рух назустріч. З'ясуємо як ця зміна вплине на розв'язання задачі: зміниться перша дія, тому що числове значення зміни відстані при русі назустріч ми знаходимо додаванням. План розв'язання задач від виконаних змін не змінюється.

Перетворюємо дану задачу на спільну роботу (2) так, щоб продуктивність спільної праці знаходили дією додавання. Ця зміна не впливає на план розв'язання, він лишається тим самим.

Отже, задачі на знаходження часу зустрічі при одночасному русі навздогін або на зустріч та задачі на знаходження часу спільної роботи, в

яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання або додавання, мають однакові плани розв'язання (мал. 6).

	$\frac{\text{заг.виробіток}}{\text{відстань}}$	$\frac{\text{продукт.пр.}}{\text{швидкість}}$	час	1 спосіб	2 спосіб
I		N_1 / V_1			$t = A : (N_1 \mp N_2)$
II		N_2 / V_2			$t = S : (V_1 \mp V_2)$
I і II	A / S	?	?		

1 спосіб	2 спосіб
	1) знаходимо $\frac{\text{продуктивність спільної праці}}{\text{на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу}};$ 2) знаходимо час спільн $\frac{\text{ої}}{\text{ого}} \frac{\text{руху}}{\text{праці}}.$

Мал. 6. Опорні схеми та план розв'язання задач на спільну роботу та на одночасний рух назустріч або наздогін, в яких шуканим є час спільної праці або час руху до зустрічі

5. Зіставлення задач на спільну роботу на знаходження продуктивності одного з виконавців, в яких продуктивність спільної праці уявляє собою різницю продуктивностей виконавців, з задачами на одночасний рух наздогін на знаходження швидкості одного з тіл.

Аналогічно пункту 1, 3.

1) З двох селищ, відстань між якими 16 км, одночасно на уздогін вирушили два пішоходи і зустрілися через 4 години, перший йде за другим. Яка швидкість першого пішоходу, якщо швидкість другого $6 \frac{\text{км}}{\text{год}}.$	2) Фрекін Бокк повинна випекти 16 тортів, на цю роботу вона має 4 години. Скільки тортів повинна випекати щогодини Фрекін Бокк, якщо Карлсон щогодини „стягує” по 6 тортів?
---	---

Узагальнюємо математичні структури та способи розв'язання задач на знаходження швидкості при одночасному русі на уздогін та задач на знаходження продуктивності одного виконавця при спільній праці (мал.. 7).

б. Узагальнення математичних структур і способів розв'язання задач на знаходження швидкості одного з тіл при одночасному русі наздогін або

назустріч та на спільну роботу на знаходження продуктивності одного з виконавців, якщо продуктивність спільної праці знаходять відніманням або додаванням.

Аналогічно пунктам 2, 4.

	$\frac{\text{заг.виробіток}}{\text{відстань}}$	$\frac{\text{продукт.пр.}}{\text{швидкість}}$	час
I		?	
II		N_2 / V_2	
I і II	A / S	?	t

1 спосіб	2 спосіб
$N_1 = (A + N_2 * t) : t$	$N_1 = A : t + N_2$
$V_1 = (S + V_2 * t) : t$	$V_1 = S : t + V_2$

1 спосіб	2 спосіб
1) знаходимо $\frac{\text{заг.виробіток}}{\text{відстань}}$ другого об'єкта для даного значення часу;	1) знаходимо $\frac{\text{продуктивність спільної праці}}{\text{на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу}}$;
2) знаходимо $\frac{\text{заг.виробіток}}{\text{відстань}}$ першого об'єкта для даного значення часу;	2) знаходимо $\frac{\text{продуктивність першого виконавця}}{\text{яку відстань долає перше тіло за одиницю часу; його швидкість}}$
3) знаходимо $\frac{\text{продукт.пр.}}{\text{швидкість}}$ першого об'єкта.	

Мал. 7. Опорна схема та план розв'язання задач на спільну роботу та на одночасний рух наздогін, в яких шуканою є продуктивність або швидкість одного з виконавців

Задачі на знаходження швидкості одного з тіл при одночасному русі навздогін або назустріч та задачі на знаходження продуктивності одного з

виконавців при спільній роботі, в яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання або додавання, мають однакові плани розв'язання (мал. 8).

1 спосіб	2 спосіб
<p>1) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$</p> <p>другого об'єкта для даного значення часу;</p> <p>2) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$</p> <p>першого об'єкта для даного значення часу;</p> <p>1) знаходимо $\frac{\text{продукт. пр. швидкість}}{\text{першого об'єкту.}}$</p>	<p>1) знаходимо $\frac{\text{продуктивність спільної праці}}{\text{на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу}}$;</p> <p>2) знаходимо $\frac{\text{продуктивність першого виконавця}}{\text{яку відстань долає перше тіло за одиницю часу; його швидкість}}$</p>

Мал. 8. Опорні схема та план розв'язання задач на спільну роботу та на одночасний рух назустріч або наздогін, в яких шуканою є продуктивність одного з виконавців або швидкість одного з тіл

7. Узагальнення математичних структур та способів розв'язання задач на одночасний рух на уздогін або назустріч та на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці знаходять відніманням або додаванням.

Порівнюємо усі узагальнені математичні структури задач на одночасний рух наздогін або на зустріч та на спільну роботу, формулюємо їх спільні істотні ознаки.

Усі задачі містять:

- 1) три пропорційні величини: $\frac{\text{загальний..виробіток}}{\text{відстань}}$, $\frac{\text{продуктивність..праці}}{\text{швидкість}}$, час $\frac{\text{роботи}}{\text{руху}}$;
- 2) три випадки: перші два стосуються $\frac{\text{роботи}}{\text{руху}}$ кожного з двох об'єктів, а третій – їх спільної $\frac{\text{роботи}}{\text{руху}}$;
- 3) чотири числові значення: $\frac{\text{продуктивність..праці}}{\text{швидкість..руху}}$ першого об'єкта, $\frac{\text{продуктивність..праці}}{\text{швидкість..руху}}$ другого об'єкта, $\frac{\text{загальний..виробіток}}{\text{загальна..відстань}}$ при їх спільній $\frac{\text{йй..праці}}{\text{ому..русі}}$ та час спільний $\frac{\text{ої..роботи}}{\text{ого..руху}}$; три з них дано, а одне є шуканим.)

Узагальнимо математичну структуру задач цих типів та способи розв'язання пар задач (див. мал. 9):

- на знаходження відстані на момент початку руху або загального виробітку;
- на знаходження часу зустрічі або часу спільної праці;
- на знаходження швидкості або продуктивності одного з об'єктів.

Розроблена методика зазнала експериментальної перевірки під час педагогічного експерименту, який проходить з 2000 року у ЗОШ 1- III ступеню „Ніка” міста Одеси. Результати тестування учнів свідчать про те, що більш, ніж 80% учнів безпомилково розв'язують задачі на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання, та на одночасний рух в навздогін. Експериментальні дані наведено у таблиці 2.

Таким чином, результати нашого дослідження дозволяють стверджувати про ефективність застосування розробленої методики щодо формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі на рух та на спільну роботу.

Подальша розробка цієї проблеми можлива у побудові методичної системи навчання школярів розв'язування задач на рух та на спільну роботу.

	$\frac{\text{заг.виробіток}}{\text{відстань}}$	$\frac{\text{продукт.пр.}}{\text{швидкість}}$	час
I		N_1 / V_1	
II		N_2 / V_2	
I і II	A / S		t

1-й спосіб	II – й спосіб
$A = N_1 * t \mp N_2 * t$ $S = V_1 * t \mp V_2 * t$	$A = (N_1 \mp N_2) * t$ $S = (V_1 \mp V_2) * t$
	$t = A : (N_1 \mp N_2)$ $t = S : (V_1 \mp V_2)$
$N_1 = (A \pm N_2 * t) : t$ $V_1 = (S \pm V_2 * t) : t$	$N_1 = A : t \pm N_2$ $V_1 = S : t \pm V_2$

Мал. 9. Опорна схеми та способи розв'язання задач на спільну роботу та на одночасний рух назустріч та наздогін

N_1 – продуктивність праці першого виконавця; N_2 – продуктивність праці першого виконавця; A – загальний виробіток при спільній праці; V_1 – швидкість першого тіла

V_2 – швидкість другого тіла; t – час спільного руху або час спільної праці; S – відстань між тілами на момент початку або на момент закінчення руху

Таблиця 2.

Результати експериментальної роботи з навчання учнів розв'язування задач на рух в одному напрямку

Навчальний рік	Загальна кількість учнів	Відсоток учнів, що правильно розв'язали задачі	
		На спільну роботу	На одночасний рух
2000 - 2001	27	85 %	81%
2001 - 2002	32	88 %	81%
2002 - 2003	25	84 %	80 %
2003-2004	24	88 %	83%

Література

1. Артемов А.К. Обобщения в обучении математике. //Ж. «Начальная школа», №11, 1985 – с. 66-67
2. Осинская В.Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике. – К., Радянська школа, 1989, -190 с.
3. Скворцова С.О., Мартинова Г.І., Шевченко Т.О. Математика в 4-му класі чотирирічної початкової школи. – Одеса, “Автограф”, 2002 – 214 с.
4. Шикова Р.Н. Методика обучения решению задач, связанных с движением тел. //Ж. Начальная школа, №5, 2000 – с. 30-37