МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА

О. В. Савастру, О. М. Яковлєва, С. В. Драганюк, О. М. Болдарєва

МАТРИЦІ ТА СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ОДЕСА
ОНУ
2019

УДК 512.64

Рекомендовано до друку вченою радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 2 від 29 жовтня 2019 р.

Рецензенти:

А. В. Плотніков – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри Інформаційних технологій та прикладної математики Одеської державної академії будівництва та архітектури;

В. Г. Попов – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Національного університету «Одеська морська академія».

Савастру О. В.

Матриці та системи лінійних рівнянь : навч. посіб. / О. В. Савастру, О. М. Яковлєва, С. В. Драганюк, О. М. Болдарєва, під ред. О. В. Савастру. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2019. – 120 с.

ISBN 978-617-689-350-9

У навчальному посібнику детально викладено теорію матриць та пов’язану з нею елементарну теорію систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Він містить відповідний теоретичний матеріал, контрольні запитання, детальні рекомендації щодо розв’язання практичних завдань, завдання для самостійної роботи студентів, тестові завдання для самоперевірки.

Навчальний посібник призначений для студентів фізико-математичних факультетів класичних та педагогічних університетів, а також може бути використаний студентами закладів вищої освіти.

УДК 512.64

ISBN 978-617-689-350-9

Зміст

ВСТУП

Алгебра як наука починається з уміння додавати, множити, підносити до ступеня цілі числа. Формальна, але одразу не очевидна, заміна чисел буквами, дозволяє діяти за аналогічними правилами в рамках узагальнених алгебраїчних систем. Таким чином, алгебра як наука на сучасному етапі присвячена в основному описанню конкретних та абстрактних алгебраїчних структур: груп, кілець, полів, модулів, векторних просторів і таке інше. Під абстрактною оболонкою більшості аксіоматичних теорій алгебри ховаються цілком конкретні задачі теоретичного характеру, розв'язання яких приводить до важливих узагальнень. У свою чергу, розвинута теорія дає імпульс та засоби до розв'язання нових задач. Складна взаємодія теоретичних і прикладних аспектів теорії притаманна всій математиці. Алгебра є важливим розділом математики. Методи цього розділу застосовуються як у шкільному курсі, так і в дослідженнях багатьох питань сучасної математики.

Теорія матриць – одна з основних складових частин лінійної алгебри. Вона має багато застосувань не тільки в алгебрі, а й в геометрії, математичному аналізі, теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей та, по суті, у будь-якій математичній теорії. Крім того, ця теорія широко використовується і в інших науках, зокрема, економіці та інженерній справі. Отже, без теорії матриць не обходиться викладання математики не тільки в педагогічних, але й в технічних, військових та інших ЗВО.

Уперше матриця під назвою «Магічний квадрат» згадується ще у Стародавньому Китаї. Подібні квадрати пізніше були відомі арабським математикам.

У якості окремої теорії теорія матриць розпочала активний розвиток в середині XIX сторіччя в наукових трудах ірландського математика і фізика Вільяма Гамільтона (1805-1865 рр.) та англійського математика Артура Келі (1821-1895 рр.). Фундаментальні результати теорії матриць належать німецьким математикам Карлу Вейерштрасу (1815-1897 рр.), Фердинанду Георгу

Фробеніусу (1849-1917 рр.) та французькому математику Марі Едмону Каміль Жордану (1838-1922 рр.). Сучасний термін «матриця» вперше застосував англійський математик Джеймс Сільвестр (1814-1897рр.) у 1850 році.

До розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь зводяться численні практичні завдання. Наприклад, системи лінійних алгебраїчних рівнянь є важливим інструментом при розрахунку складних електричних ланцюгів. Можна з повною підставою стверджувати, що рішення систем лінійних рівнянь є однією з найпоширеніших і важливих завдань обчислювальної математики.

Уперше метод розв'язку систем лінійних рівнянь (метод фан-чен – «вибудовування чисел по клітинам») описаний в давньокитайському трактаті «Дев'ять книг про математичне мистецтво» (II століття до н. е.). Система двох (трьох) лінійних рівнянь з двома (трьома) невідомими в цьому трактаті записується у вигляді матриці, стовпці якої складені з коефіцієнтів при невідомих і вільних членів, і розв'язується методом виключення. Цей метод залишався невідомим в Європі аж до кінця XIX століття. У 1849 році видатний німецький математик Карл Гаус (1777-1855 рр.) обґрунтував метод послідовного виключення невідомих системи лінійних рівнянь, що згодом одержав ім'я як метод Гауса. Фактично, ідея методу фан-чен і методу Гауса збігаються. Метод Гауса є одним з найбільш поширених прямих методів розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Він є універсальним і застосовується для розв'язування лінійних систем з будь-яким числом рівнянь.

У навчальному посібнику викладено теорію матриць та пов'язану з нею елементарну теорію систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Посібник складається з вступу, двох частин, списку використаної літератури, предметного покажчика. Перша частина «Алгебра матриць» висвітлює наступні питання: види матриць, операції над матрицями та їх властивості, елементарні перетворення рядків та стовбців матриць, обернена матриця тощо. У другій частині «Елементарна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь» розглянуто основні відомості про системи лінійних алгебраїчних рівнянь, класифікацію систем лінійних рівнянь, методи розв'язання систем лінійних рівнянь, зокрема, метод Гауса, модифікацію метода Гауса – метод Жордана-Гауса, метод Штифеля. Приділено увагу розв'язанню матричних рівнянь на основі методу Гауса і методу Штифеля.

Кожна частина навчального посібника складається з трьох розділів. Кожен розділ розбито на параграфи. Перший розділ містить необхідний теоретичний матеріал, ілюстрований прикладами для кращого засвоєння, та контрольні запитання для самоперевірки. Другий розділ кожної частини містить практичний матеріал: приклади розв'язаних вправ і задач з поясненнями і завдання для самостійної роботи. Треті розділи частин пропонують завдання в тестовій формі для самоперевірки з відповідями.

Таким чином, ми пропонуємо починати вивчення лінійної алгебри саме з теорії матриць, оскільки це не вимагає від студентів багатьох додаткових знань. Крім того, у викладеній теорії практично не використовуються абстрактні поняття, для яких потрібна додаткова навчальна підготовка та певні навички абстрактного мислення. З іншого боку, після вивчення теорії матриць та елементарної теорії систем лінійних рівнянь студенти знатимуть більше конкретних прикладів груп, кілець, векторних просторів тощо, що полегшить вивчення відповідних теорій.

Частина 1. АЛГЕБРА МАТРИЦЬ

Розділ 1. Матриці та операції над ними (теоретичні відомості)

§ 1.1.1. Побудова матриці та її структурні елементи

Означення 1.*Матрицею розмірністю m на n (записується $m \times n$) називається прямокутна таблиця, що складається з mn дійсних чисел, розташованих в m рядках і n стовпцях.*

Будь-яка матриця записується в великих круглих дужках і позначається великими латинськими буквами. Наприклад, матриця $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ розмірності 2x4. Перший вимір *m=2* вказує кількість рядків матриці A, другий вимір *n=4* вказує кількість її стовпців.

Для того, щоб було зручніше працювати з матрицями, в них відокремлюють рядки і стовпці. Рядки матриці розмірності $m \times n$ нумерують згори донизу натуральними числами від 1 до *m*. Стовпці матриці нумерують зліва направо числами від 1 до *n*. Числа, з яких складається матриця, називаються її елементами. Елементи матриці позначають малою латинською буквою, яка співпадає з ім'ям матриці, причому ця буква повинна мати два індекси. Перший індекс вказує номер рядка, а другий – номер стовпця, на перетині яких знаходиться елемент. Наприклад:

$$F=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1/2 & 4 & 6 \\ 1/3 & -3 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & -2 & 8 \\ 10 & 11 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Це матриця розмірності $5 \text{x} 4$. Елемент f_{34} знаходиться на перетині третього рядка і четвертого стовпця, тому $f_{34}=0$, $f_{42}=-7$, $f_{22}=\frac{1}{2}$ тощо. Індекси елемента не можна міняти місцями. Довільний елемент матриці F позначають f_{ij}, вказуючи границі зміни індексів $i=1,\ 2,...,m$, $j=1,\ 2,...,n$.

Тепер ми можемо дати інше означення матриці, використовуючи її загальний вид.

Означення 2.*Матрицею розмірністю* m *на* n *називається прямокутна таблиця виду:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

елементами якої є числа.

Серед прямокутних матриць виділяють *підмножину квадратних матриць*.

Означення 3.*Матриця, яка має однакову кількість* n *рядків і* n *стовпців називається квадратною матрицею порядку* n.

Наприклад, матриця $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 8 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & -4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ квадратна матриця розмірності 4x4, або матриця 4-го порядку.

Крім елементів рядків та стовпців, в *квадратних матрицях* виділяють ще і діагоналі.

Означення 4.*Головною або першою діагоналлю квадратної матриці називається діагональ, яка йде з лівого верхнього в правий нижній кут матриці. Побічною або другою діагоналлю квадратної матриці називається діагональ, яка йде з лівого нижнього в правий верхній кут матриці.*

Наприклад, головною діагоналлю вищенаведеної матриці D є $(3,\ 7,\ 5,\ 1)$,а її побічна діагональ $(3,\ 6,\ 8,\ 0)$.

Розглянемо матриці спеціального виду. Їх використання лежить в основі методів розв’язання таких типових задач в алгебрі, як розв’язання систем лінійних рівнянь, обчислення визначників, рангу матриці та ін.

Означення 5. *Діагональною матрицею називається квадратна матриця, всі елементи якої, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють 0.*

Наприклад: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

Означення 6.*Верхньотрикутною (нижньотрикутною) матрицею називається квадратна матриця, всі елементи якої під (над) головною діагоналлю дорівнюють 0.*

Верхньотрикутна матриця має наступний загальний вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Зауваження.*Множина діагональних матриць є підмножиною, як множини верхньотрикутних матриць, так і множини нижньотрикутних матриць, тобто множина діагональних матриць є перетином множин верхньотрикутних і нижньотрикутних матриць, а всі розглянуті множини матриць є підмножинами множини квадратних матриць.*

Більш широким класом є множина трапецієвидних матриць – підмножина довільних прямокутних матриць.

Означення 7. *Матриця* A *розмірності* n *на* m *називається трапецієвидною, якщо вона має такий загальний вид:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Всі ненульові елементи трапецієвидної матриці знаходяться у її верхній частині, причому границі ділянки з її ненульовими елементами, утворюють трапецію, меншою основою донизу. Це не означає, що всередині трапецієвидної ділянки немає нульових елементів, але за її межами всі елементи трапецієвидної матриці дорівнюють нулю.

Наприклад:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. *Зрозуміло, що будь-яка трикутна, а тому і діагональна матриця, є трапецієвидною.*

Означення 8. *Матриці A і B називаються рівними між собою, якщо вони мають однакові розмірності, і їх елементи, що стоять на відповідних місцях, співпадають. При цьому, пишуть $A = B$.*

§ 1.1.2. Додавання матриць

Означення 9. *Сумою матриць A і B однакових розмірностей називається матриця C тієї ж розмірності, кожен елемент якої є сумою відповідних елементів матриць A і B. Пишуть $A + B = C$.*

Зауваження. *Матриця $C = A + B$ тоді і тільки тоді, коли ці матриці мають однакові розмірності $m \times n$, і для довільного $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ виконується $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.*

Наприклад:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Відмітимо ще раз, що додавати можна не будь-які матриці, а тільки матриці з однаковими розмірностями.

Властивості операції додавання матриць

Для довільних матриць A, B, C однакових розмірностей виконуються умови:

1) Комутативність операції додавання: $A+B=B+A$*;*

2) Асоціативність операції додавання: $(A+B)+C=A+(B+C)$*;*

3) Існування нульової матриці:

Існує нульова матриця 0, така, що для будь-якої матриці A*, виконується рівність* $A+0=0+A=A$.

Означення 10. *Матриця розмірності mxn називається нульовою матрицею і позначається символом O, якщо всі її елементи дорівнюють 0.*

Зрозуміло, що матриці A і *O* повинні мати однакові розмірності. Звідси видно, що на відміну від числових множин, в яких число 0 єдине, множина всіх матриць володіє безліччю нульових матриць. Всі вони відрізняються своїми розмірностями, але володіють алгебраїчними властивостями, схожими з властивостями числа 0, тому і позначаються аналогічно.

4) Існування протилежної матриці:

Для довільної матриці A *існує протилежна матриця, яка позначається* $-A$*, така, що виконується рівність* $A+(-A)=-A+A=0$.

В цій рівності *O* – це нульова матриця, а мінус – не знак операції, а позначення для протилежної матриці.

Означення 11. *Протилежною до матриці* A *називається матриця* $-A$*, яка отримується з матриці* A *заміною кожного її елемента протилежним числом.*

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, то $-A=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Всі ці властивості легко довести самостійно. Зрозуміло, що комутативний та асоціативний закони можна поширити на будь-яку кількість матриць.

§ 1.1.3. Віднімання матриць

Операція додавання матриць є основною. А операція віднімання матриць є похідною від неї.

Означення 12. *Різницею матриць A і B однакових розмірностей називається матриця C, така, що C+B=A. Пишуть C=A–B.*

З означення віднімання матриць не видно, чи існує різниця двох матриць, чи єдина вона, і яка будова цієї матриці. Отже, для коректності цього означення потрібно довести теорему.

Теорема 1. *Для довільних матриць A і B однакових розмірностей існує і єдина їх різниця – матриця C, яка обчислюється за формулою* $C = A + (-B)$.

Тобто, для того, щоб від матриці A відняти матрицю B, треба до матриці A додати матрицю, протилежну до матриці B. Доведення цієї теореми ділиться на дві частини, оскільки потрібно встановити два факти:

1) матриця , що є різницею двох матриць, існує;

2) ця матриця єдина.

► Існування. Для доведення існування достатньо перевірити, що матриця C задовольняє означення різниці матриць, тобто, що в сумі з матрицею B вона дає матрицю A. Використовуючи властивості операції додавання матриць, маємо: $B + C = C + B = (A + (-B)) + B = A + ((-B) + B) = A + 0 = A$.

Існування доведено.

Єдиність. Доводиться методом від супротивного. Припустимо, що крім матриці C існує матриця D, яка також є різницею матриць A і B. За означенням різниці $B + D = A$. Розглянемо дві рівності:

$(D + B) + (-B) = A + (-B) = C$ і $D + (B + (-B)) = D + 0 = D$.

Враховуючи асоціативність операцій додавання матриць, заключаємо, що ліві частини цих рівностей співпадають, а тому співпадають їх праві частини, тобто $C = D$.◄

Зауваження. *Матриця $C = A - B$ тоді і тільки тоді, коли $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ для довільного значення $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.*

Наприклад, $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 7 & -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & 14 & -1 \end{pmatrix}$.

Властивості операції віднімання матриць

Для довільної матриці A вірно:

1) $A - A = 0$;

2) $A - 0 = A$;

3) $0 - A = -A$.

Ці властивості очевидні.

§ 1.1.4. Множення матриці на число

Ця операція відрізняється від попередніх, оскільки об'єкти, на які вона діє взяті з різних множин, тобто мають різну природу, а саме, ми будемо використовувати множину прямокутних матриць і множину чисел. При цьому числовий множник завжди грамотніше записувати першим.

Означення 13. *Добутком матриці A на число α називається матриця B, яка отримується з матриці A множенням кожного її елемента на число α. Пишуть:* $B = \alpha \cdot A$.

Зауваження. *Матриця $B = \alpha \cdot A$ тоді і тільки тоді, коли для довільного $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ виконується $b_{ij} = \alpha a_{ij}$. При цьому матриці A і B завжди мають однакові розмірності.*

Наприклад, $5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -10 & 0 \\ 10 & 5 & -15 \end{pmatrix}$.

Властивості операції множення матриці на число

Для довільних дійсних чисел α і β та будь-яких матриць A і B однакових розмірностей виконуються умови:

1) $1 \cdot A = A$;

2) $(-1) \cdot A = -A$;

3) $0 \cdot A = 0$;

В лівій частині рівності 0 – це число, а в правій – нульова матриця *O*.

4) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ *– асоціативність;*

5) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ *– дистрибутивність відносно додавання чисел;*

6) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ *– дистрибутивність відносно додавання матриць.*

Властивості 4) і 5) поширюються на будь-яку кількість чисел, а властивість 6) – на будь-яку кількість матриць. Всі ці властивості легко довести самостійно. Для прикладу наведемо доведення властивості 5).

► Спочатку треба довести, що розмірності матриць в лівій і правій частинах рівності співпадають. Потім треба встановити, що рівні між собою і їх відповідні елементи. Отже, введемо матриці $F=(\alpha+\beta)A$, $G=\alpha A$, $H=\beta A$. Треба довести, що матриця $F=G+H$.

Нехай матриця A розмірності $m\times n$. Оскільки множення матриці на число не міняє розмірності результату, то матриці $(\alpha+\beta)A$, αA, βA мають ті ж розмірності $m\times n$. За означенням додавання матриць, матриця $\alpha A+\beta A$ існує і має ту ж розмірність $m\times n$. Отже, матриці в лівій і правій частинах нашої рівності мають однакові розмірності.

Встановимо тепер рівність відповідних елементів цих матриць.

Для довільного $i=1,\ 2,...,m$, $j=1,\ 2,...,n$ буде $f_{ij}=(\alpha+\beta)\cdot a_{ij}$, $g_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$, $h_{ij}=\beta\cdot a_{ij}$. Звідси видно, що $f_{ij}=(\alpha+\beta)\cdot a_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}+\beta\cdot a_{ij}$ для довільного $i=1,\ 2,...,m$, $j=1,\ 2,...,n$.◄

§ 1.1.5. Множення матриць

Перемножувати можна не будь-які матриці, а тільки матриці з певними обмеженнями на їх розмірності.

Означення 14. *Добутком матриці A розмірності $m\times n$ на матрицю B розмірності nxp називається матриця C розмірності mxp, кожен елемент c_{ij} якої є сумою всіх елементів i-го рядка матриці A, помножених на відповідні елементи j-го стовпця матриці B. Тобто, $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$ для довільних $i=1,\ 2,...,m$, $j=1,\ 2,...,p$. При цьому пишуть: C= $A\cdot B$.*

Матриці A і B можна множити тільки в тому випадку, коли при написанні підряд розмірностей матриць A і B середні числа співпадають. Тоді крайні числа дають розмірність добутку цих матриць. Отже, добуток матриць $A \cdot B$ існує тільки у випадку, коли кількість стовпців матриці Aспівпадає з кількістю рядків матриці B.

Зауваження. *Добуток будь-яких двох квадратних матриць одного і того ж порядку завжди існує і є матрицею того ж порядку. Іншими словами, операція множення матриць замкнута на множині всіх матриць порядку* n.

Приклад 1. Нехай матриця A має розмірність $4 \text{x} 3$, а матриця B – розмірність 5 $\text{x} 4$. Тоді добуток матриці A на матрицю Bне існує (4x3 і 5x4, 3≠5), а добуток $B \cdot A$ існує (5x4 і 4x3, 4=4) і є матрицею розмірності 5x3.

Приклад 2. Нехай матриця A має розмірність 2x3, а матриця B – розмірність 3x2. Тоді добутки цих матриць існують, причому матриця $A \cdot B$ має розмірність 2x2, а$B \cdot A$ – 3x3.

Приклад 3. Нехай матриця $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ та матриця $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

Матриця A має розмірність 2x3, а матриця B – розмірність 3x3.

Матриці $B \cdot A$ не існує (чому?), а матриця $C = A \cdot B$ існує і має розмірність 2x3.

Обчислимо окремо кожний елемент матриці $B \cdot A$.

Згідно з означенням, елемент c_{11} є сумою всіх елементів першого рядка матриці A, помножених на відповідні елементи першого стовпця матриці B. Тобто,

$c_{11} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 = 4$.

Елемент c_{12} є сумою всіх елементів першого рядка матриці A, помножених на відповідні елементи другого стовпця матриці B. Тобто,

$c_{12} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-1) = 7$.

Аналогічно

$c_{13} = 2 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 8 = -14$.

Елемент c_{21} є сумою всіх елементів другого рядка матриці A, помножених на відповідні елементи першого стовпця матриці B.Тобто,

$c_{21} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 6$.

Елемент c_{22} є сумою всіх елементів другого рядка матриці A, помножених на відповідні елементи другого стовпця матриці B.Тобто,

$c_{22} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-1) = -13$.

$c_{23} = 1 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 8 = 9$.

Таким чином, матриця $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -14 \\ 6 & -13 & 9 \end{pmatrix}$.

Приклад 4. Нехай матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

Матриці A і B – квадратні матриці 2-го порядку, тому існують добутки AB і BA.

Нехай $C = A \cdot B$, тоді

$c_{11} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-4) = -9$,

$c_{12} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 = 22$,

$c_{21} = (-1) \cdot (-1) + 3(-4) = -11$,

$c_{22} = (-1) \cdot 8 + 3 \cdot 7 = 13$.

Таким чином, матриця $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -9 & 22 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}$.

Перевірить самостійно, що для матриць A і B виконується рівність: $A \cdot B = B \cdot A$.

Означення 15. *Дві матриці A і B називаються переставними, якщо для них виконується рівність $A \cdot B = B \cdot A$. Якщо ж ця рівність не виконується, то матриці називаються непереставними.*

Теорема 2. *Для того, щоб матриці A і B були переставними, необхідно, щоб вони були квадратними матрицями одного і того ж порядку n.*

► За умовою, матриці A і B переставні. Отже, існує їх добуток $A \cdot B$, а тому за означенням множення матриць, матриця A повинна мати розмірність *m*на*n,* а матриця B – розмірність *n*на*p.* Але ж існує і матриця $B \cdot A$. А тому, кількість стовпців матриці B повинно співпадати з кількістю рядків матриці A. Ми довели, що $p=m$. Тоді за тим же означенням множення матриць, матриця $A\cdot B$ має розмірність m на m, тобто порядок m, а матриця $B\cdot A$ має порядок n. Оскільки $A\cdot B=B\cdot A$, то матриці $A\cdot B$ і $B\cdot A$ повинні мати однакові розмірності. Звідси випливає, що $m=n$, а тому матриці A і B мають один і той же порядок n. ◄

Зауваження. *Співпадання порядків квадратних матриць A і B не є достатньою умовою для того, щоб ці матриці були переставними.*

Властивості операції множення матриць

Нехай α – дійсне число, A, B, C, D такі матриці, що існують матриці хоча б в одній з частин наведених рівностей. Тоді виконуються:

1) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ *– асоціативність множення;*

2) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$*;* $D\cdot(A+B)=D\cdot A+D\cdot C$ *– лівий і правий дистрибутивні закони множення відносно додавання матриць;*

3) $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$ *– асоціативність;*

При доведеннях умов будемо вважати, що існують матриці в лівих частинах наведених рівностей. Самостійно доведіть ці твердження, вважаючи, що існують матриці в їх правих частинах. Тепер перейдемо безпосередньо до доведення кожної з цих властивостей.

►1) Нехай матриця $(A\cdot B)\cdot C$ існує і має розмірність m на q. Це означає, що існують матриці $A\cdot B$ і C, причому за означенням множення матриць матриця $A\cdot B$ повинна мати розмірність m на p, а матриця C – розмірність p на q. За тим же означенням матриця A повинна мати розмірність m на n, а матриця B – розмірність n на p. Тоді матриця $B\cdot C$ існує і має розмірність n на q. Звідси випливає, що матриця $A\cdot(B\cdot C)$ існує і теж має розмірність m на q.

Введемо позначення: $G=AB$, $H=GC$, $U=BC$, $V=AU$. Ми довели, що коли матриця U існує, то існує і матриця V, причому ці матриці мають однакові розмірності. Залишилось довести, що для довільних $i=1,2,...,m$, $l=1,2,...,q$ виконується $h_{il}=v_{il}$.

За означенням множення матриць маємо:

$$g_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk}\ , \qquad h_{il}=\sum_{k=1}^{p}g_{ik}\cdot c_{kl}=\sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk})\cdot c_{kl}\ .$$

З іншого боку

$$u_{jl}=\sum_{k=1}^{p}b_{jk}\cdot c_{kl}\ ,\ v_{il}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot u_{jl}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot\left(\sum_{k=1}^{p}b_{jk}\cdot c_{kl}\right).$$

Множник, що не залежить від індексу підсумовування, можна вносити під знак суми. У виразі елемента h_{il} множник c_{kl} не залежить від індексу підсумовування *j*внутрішньої суми. Аналогічно, у виразі елемента v_{il} множник a_{ij} не залежить від індексу підсумовування *k*внутрішньої суми. А тому, $h_{il}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk}\cdot c_{kl}$, $v_{il}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}a_{ij}\cdot b_{jk}\cdot c_{kl}$, $h_{il}=v_{il}$ для довільних $i=1,2,..m$, $l=1,2,...,q$.

Отже, $U=V$.

2) Доведемо другу з наведених у властивостірівностей, вважаючи, що матриця $D\cdot(A+B)$ існує. Першу рівність доведіть самостійно.

За означеннями множення та додавання матриць, матриця D повинна мати розмірність *m*на *n,* а матриці A та B– однакові розмірності *n*на *p.* Тоді матриці $D\cdot A$ і $D\cdot B$ мають однакові розмірності *m* на*p,* а тому існує їх сума $D\cdot A+D\cdot B$, причому вона має ту ж розмірність *m* на*p.*

Введемо позначення:$G=A+B$, $H=D\cdot G$, $U=D\cdot A$, $V=D\cdot B$, $W=U+V$. Ми довели, що матриці H і W мають однакову побудову. Доведемо, що співпадають всі їх відповідні елементи: $h_{ik}=w_{ik}$, для довільних $i=1,2,...,m$, $k=1,2,...,p$. Маємо:

$$g_{jk}=a_{jk}+b_{jk}\,.\,h_{ik}=\sum_{j=1}^{n}d_{ij}\cdot g_{jk}=\sum_{j=1}^{n}d_{ij}\cdot(a_{jk}+b_{jk})=\sum_{j=1}^{n}(d_{ij}\cdot a_{jk}+d_{ij\cdot b_{jk}})=\sum_{j=1}^{n}d_{ij}\cdot a_{jk}+\sum_{j=1}^{n}d_{ij}\cdot b_{jk}\ .$$

З іншого боку, $u_{ik}=\sum_{j=1}^{n}d_{ij}\cdot a_{jk}$, $v_{ik}=\sum_{j=1}^{n}d_{ij}\cdot b_{jk}$, $w_{ik}=u_{ik}+v_{ik}=h_{ik}$ для довільних $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,p$.

3) Будемо вважати, що матриця $\alpha\cdot(AB)$ існує, а тому існує і матриця AB. Отже, нехай матриця A має розмірність *m*на *n* , а матриця B– розмірність *n*на *p.* За

означенням операції множення матриці на число, матриця $\alpha \cdot (A \cdot B)$ має розмірність *m*на *p*. Легко перевірити, що існують і мають ту ж побудову матриці $(\alpha A)B$ і $A(\alpha B)$. Доведемо, що і відповідні елементи цих трьох матриць співпадають.

Введемо позначення: $U = \alpha(AB)$, $V = (\alpha A)B$, $W = A(\alpha B)$. Тоді $u_{ik} = \alpha \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha \cdot a_{ij} \cdot b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha \cdot a_{ij} \right) \cdot b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \left(\alpha \cdot b_{jk} \right)$. Звідси видно, що $u_{ik} = v_{ik} = w_{ik}$, для довільних $i = 1,2,...,m$, $k = 1,2,...,p$.

Зауваження. *Операція множення матриць не комутативна.*

§ 1.1.6. Транспонування матриці

Операція транспонування матриці також відрізняється від попередніх операцій тим, що вона діє не на два, а на один об’єкт, тобто є не бінарною, а унарною алгебраїчною операцією.

Означення 16.*Матриця* B *називається транспонованою до матриці* A, *якщо їх елементи пов’язані рівністю* $b_{ji} = a_{ij}$ *для довільного* $i = 1,\ 2,...,m$, $j = 1,\ 2,...,n$.

Матриця, транспонована до матриці A, позначається A^T.

Оскільки перший індекс елемента вказує номер його рядка, а другий – номер стовпця, то при транспонуванні кожний рядок матриці A стає стовпцем з тим же номером транспонованої матриці A^T. Відповідно кожний стовпець матриці A стає рядком матриці A^T з тим же номером. При цьому міняються місцями і виміри матриць. Тобто, якщо матриця A розмірності *m*х*n*, то матриця A^T розмірності *n*х*m*.

Наприклад, якщо матриця $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 9 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, тоді $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Властивості операції транспонування матриці

Для довільного дійсного числа α і будь-яких матриць A і B відповідних розмірностей для існування суми та добутку виконується:

1) $(A^T)^T = A$*;*

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$*;*

3) $(A-B)^T = A^T - B^T$*;*

4) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$*;*

5) $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Доведемо властивість 5). Властивості 1)-4) доведіть самостійно.

►5) Нехай матриця $(AB)^T$ існує і має розмірність *p*x*m.* Тоді матриця $A\cdot B$ також існує і за означенням транспонованої матриці має розмірність *m*x*p.* За означенням множення матриць, матриця A має розмірність *m*x*n*, а матриця B – розмірність *n*x*p.* Тепер видно, що матриця B^T має розмірність *p*x*n*, матриця A^T – розмірність *n*x*m,* а матриці $B^T\cdot A^T$ і $(AB)^T$ – розмірність *p*x*m.*

Доведемо, що їх відповідні елементи співпадають.

Введемо позначення: $G = AB$, $H = (AB)^T$, $U = B^T$, $V = A^T$, $W = B^T\cdot A^T = U\cdot V$. Тоді $g_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\cdot b_{ji}$, $h_{ij} = g_{ji} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\cdot a_{kj}$. Тут використано означення транспонованої матриці та комутативність множення чисел. З іншого боку $w_{ik} = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\cdot v_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\cdot a_{kj} = h_{ik}$ для довільних $i = 1,2,\ldots,p$, $k = 1,2,\ldots,m$.◄

§ 1.1.7. Степінь матриці

Оскільки при множенні матриць одного і того ж порядку ми отримуємо матриці того ж порядку, то можна ввести n-ий степінь квадратної матриці для будь-якого натурального числа n.

Означення 16.*Нехай A – квадратна матриця. Будемо вважати:*

$A^1 = A$, $A^2 = A\cdot A, \ldots,$ $A^n = A^{n-1}\cdot A$, *де* $n \in N$.

Властивості степеня матриці

Для будь-якої квадратної матриці A *і довільних натуральних чисел* k,l *виконується:*

1) $A^k \cdot A^l = A^l \cdot A^k = A^{k+l}$*;*

2) $(A^k)^l = \left(A^l\right)^k = A^{kl}$*;*

3)Якщо матриці A *і* B *переставні, то* $(AB)^k = A^k \cdot B^k$.

Ці властивості легко отримати, використовуючи властивість асоціативності множення матриць. Зверніть увагу на те, що коли матриці A і B непереставні, то властивість 3) не виконується.

Зауваження. *Будь-які два степеня однієї і тієї ж матриці є переставними матрицями.*

Зауваження випливає з властивості 1) множення матриць.

Вводять не тільки натуральні степені довільної квадратної матриці A. Її нульовий степінь вводиться за допомогою однієї з матриць спеціального виду, а саме, одиничної матриці Е, яку ми розглянемо нижче. Від'ємні степені квадратної матриці вводять за допомогою оберненої матриці, яка буде розглядається нижче.

§ 1.1.8. Одинична матриця

У множині матриць виділяють підмножини матриць, які володіють деякими специфічними властивостями, або таких матриць, що полегшують розв'язання тих чи інших класів типових задач. Так, одинична матриця володіє алгебраїчними властивостями, схожими з властивостями числа 1, через що і отримала відповідну назву.

Означення 17. *Одиничною матрицею* E *називається квадратна матриця порядку n, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють 1, а всі інші елементи дорівнюють 0.*

Одинична матриця має такий загальний вид: $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$

Зауваження. *Для елементів одиничної матриці виконується* $e_{ii}=1,\ \ e_{ij}=0$ *,при* $i\neq j$ *;* $i,\ \ j=1,\ 2,...,n$.

На відміну від числа 1 одиничних матриць існує безліч, всі вони мають різні порядки. Вкажемо на *основну властивість* одиничних матриць.

Теорема 3. *Існує одинична матриця* E*, така, що для будь-якої матриці* A *порядку n виконується рівність*

$A\cdot E=E\cdot A=A.$

► Для існування добутку матриці $E\cdot A$, потрібно взяти матрицю E того ж порядку n, що і матриця A. Спочатку доведемо рівність $E\cdot A=A$. Для зручності позначимо матрицю $E\cdot A$ через B. Для знаходження елемента b_{ij} візьмемо *i*-ий рядок матриці E і *j*-ий стовпець матриці A, маємо: $b_{ij}=e_{i1}\cdot a_{1j}+e_{i2}\cdot a_{2j}+...+e_{ii}\cdot a_{ij}+...+e_{in}\cdot a_{nj}=e_{ii}\cdot a_{ij}=a_{ij}$, для довільних *i,j=1,2,...,n*. Матриця $B=A$. Аналогічно можна довести, що $A\cdot E=A$.◄

Теорема 4. *Одинична матриця порядку n єдина.*

► Єдиність існування матриці E будемо доводити методом від супротивного. Нехай існують дві одиничні матриці порядку n, позначимо їх E_1 і E_2, $E_1\neq E_2$. За властивістю одиничної матриці маємо: $E_1=E_1\cdot E_2=E_2$. Отримали суперечність, тому наше припущення не вірне, теорему доведено.◄

Таким чином, відносно множення, у множині матриць одинична матриця E відіграє ту ж роль, що і число 1 у числовій множині. По аналогії зі степенями довільних чисел для будь-якої квадратної матриці A за означенням вважають $A^0=E$, де E – одинична матриця того ж порядку, що і матриця A.

Зауваження. *Для матриць, що не є квадратними, одиничної матриці не існує (маємо на увазі, що не існує матриці, яка володіє основною властивістю матриці E).*

Дійсно, нехай A – матриця розміру $m\times n$ і існує матриця E така, що виконуються умови: $A\cdot E = E\cdot A = A$.

Якщо $AE=A$ і матриця A розмірності $m\times n$, то розмірність матриці E складає nхn. Якщо $EA=A$, то розмірність матриці Е – mхm. Матриця E існує тільки при умові $n=m$, тобто, матриця E тільки квадратна.

§ 1.1.9. Скалярні матриці

Розглянемо ще один клас матриць спеціального виду.

Означення 18. *Скалярною матрицею називається квадратна матриця порядку* n*, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одному і тому ж дійсному числу* α*, а всі інші елементи дорівнюють нулю.*

Скалярна матриця має такий загальний вид: $\alpha\cdot E = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$.

Легко бачити, що одинична та квадратна нульова матриці є скалярними. Скалярну матрицю з числом α на головній діагоналі можна отримати, помноживши одиничну матрицю відповідного порядку на число α. Тому скалярну матрицю з числом α на головній діагоналі позначають $\alpha\cdot E$.

Властивості скалярних матриць

Для довільних, дійсних чисел α і β, і натурального числа n *виконується:*

1) $\alpha\cdot A = (\alpha E)A = A(\alpha E)$, *де A–довільна квадратна матриця;*

2) $(\alpha E)^T = \alpha E$*;*

3) $\alpha E + \beta E = (\alpha+\beta)E$*;*

4) $\alpha E - \beta E = (\alpha-\beta)E$*;*

5) $(\alpha E)(\beta E) = (\alpha\beta)E$*;*

6) $(\alpha E)^n = \alpha^n E$.

Властивості 1) і 5) випливають з властивості 3) множення матриць і теореми 2. Властивість 6) випливає з властивості 5). Інші властивості скалярних матриць випливають з означень відповідних операцій.

Властивість 1) говорить про те, що множення матриці A на число α рівносильне множенню цієї матриці зліва або справа на скалярну матрицю з числом α на головній діагоналі.

Щодо питання про переставні матриці, то скалярні матриці і тут відіграють важливу роль. Це видно з наступної теореми.

Теорема 5. *Для того, щоб матриця B була переставною з будь-якою матрицею A порядку n необхідно і достатньо, щоб вона була скалярною матрицею того ж порядку n.*

►Необхідність. Нехай матриця B переставна з будь-якою матрицею A порядку n. Отже, для матриць A та B виконується рівність $A \cdot B = B \cdot A$. За зауваженням 1.5 матриця B повинна бути квадратною, порядку n. Для довільних фіксованих чисел $i,\ j = 1,\ 2,...,n$ введемо матрицю E_{ij} порядку n, для якої елемент $e_{ij} = 1$, а всі інші елементи дорівнюють нулю. Матриці виду E_{ij} називають елементарними. Нехай матриця $C = B \cdot E_{ij}$, $D = E_{ij} \cdot B$. Встановимо, який вид мають ці матриці. Довільний елемент c_{kl} матриці C є сумою всіх елементів k-го рядка матриці B, помножених на відповідні елементи l-го стовпця матриці E_{ij}. Але ж всі стовпці матриці E_{ij}, крім j-го стовпця, нульові. Таким чином, для елементів матриці C буде:

$$c_{kj} \neq 0,\ c_{kl} = 0,\ k = 1,2,...,n,\ l = 1,2,...,m\ l \neq j.$$

Нагадаємо, що тут індекс j фіксований. А тому елементи виду c_{kj} утворюють j-ий стовбець матриці C. Обчислимо ці елементи. Маємо,

$$c_{kj} = b_{k1} \cdot e_{1j} + b_{k2} \cdot e_{2j} + ... + b_{ki} \cdot e_{ij} + ... + b_{kn} \cdot e_{nj} = b_{ki} \cdot e_{ij} = b_{ki}.$$

Таким чином, $c_{kj} = b_{ki}$ для довільних $k = 1,2,...,n$, індекси i і j є фіксованими. Отже, j-ий стовпець матриці C співпадає з i-им стовпцем матриці B, решта стовпців матриці C – нульові. Аналогічно, можна довести, що i-ий рядок матриці D співпадає з j-им рядком матриці B, а всі інші її рядки – нульові. Отже, $d_{il}=b_{jl}$ для довільних $l=1,2,...,n$, індекси i і j– фіксовані. Індекс k є будь-яким натуральним числом від 1 до n, тому при $k=i$ отримаємо: $c_{ij}=b_{ii}$. Аналогічно, поклавши $l=j$, отримаємо $d_{ij}=b_{jj}$. За умовою, матриці C і D співпадають, $C=D$, оскільки матриця B переставна з будь-якою матрицею порядку n, в тому числі і з матрицею E_{ij}. З означення рівності матриць маємо: $c_{ij}=d_{ij}$, тобто $b_{ii}=b_{jj}$.

Тепер покладемо $k=j$ отримаємо $c_{jj}=b_{ji}$. З іншого боку в матриці D всі рядки, крім i-го, нульові, а тому при $i\neq j$ $d_{jj}=0$. Оскільки знову $c_{jj}=d_{jj}$, то звідси заключаємо, що при $i\neq j$ буде $b_{ji}=0$.

Аналогічні міркування справедливі для будь-якої матриці E_{ij} n-го порядку. Таким чином, всі елементи головної діагоналі матриці B співпадають, всі інші елементи матриці B дорівнюють нулю . Ми довели, що матриця B скалярна.

Достатність. Доведемо, що будь-яка скалярна матриця $\alpha\cdot E$ порядку n переставна з довільною матрицею A того ж порядку. З теореми 2 і властивості 3) операції множення матриць буде $(\alpha E)\cdot A=\alpha\cdot(EA)=\alpha\cdot(AE)=A\cdot(\alpha E)$.◄

§ 1.1.10. Елементарні перетворення матриці

Нехай A – довільна матриця розмірності $m\times n$. Будь-який її рядок, взятий окремо, можна розглядати як матрицю розмірності 1xn, а стовпчик – як матрицю розмірності mx1. Тому рядки (стовпці) матриці можна додавати, віднімати, а також множити на числа згідно означень відповідних операцій над матрицями.

Означення 19. *Лінійною комбінацією рядків матриці A називається рядок, який дорівнює сумі деяких рядків матриці A, помножених на довільні дійсні числа. Ці числові множники називаються коефіцієнтами лінійної комбінації.*

Частіше за все лінійну комбінацію рядків матриці A записують замість деякого рядка тієї ж матриці A, отримуючи нову (кажуть перетворену) матрицю B. Вказане перетворення символічно записують так: $A \to B$ (або A~B). Над стрілочкою символічно вказують лінійну комбінацію рядків матриці A і те місце, яке вона займає в матриці B. Враховуючи позначення рядків матриці це перетворення матриці символічно записується так:

$$\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \ldots + \alpha_m k_m \to k_i \, .$$

В останньому записі зліва до стрілочки виписана лінійна комбінація рядків матриці A з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Вона записується замість i-го рядка матриці A, таким чином отримаємо матрицю B. Відмітимо, що не всі коефіцієнти лінійної комбінації повинні бути відмінні від нуля. Аналогічно вводяться лінійні комбінації стовпців матриці і перетворення матриці за їх допомогою.

Наприклад :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{k_1 - 4k_2 + 2k_3 \to k_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -22 & -27 & 14 & -13 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 - 2c_3 \to c_3}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ -22 & 27 & -50 & -13 \\ -1 & 0 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Зазвичай, при переході від однієї матриці до іншої одразу виконують не одне, а декілька перетворень. Їх здійснюють для отримання якомога більшої кількості нулів на потрібному місці у матриці.

Всі перетворення матриць зводять до трьох найпростіших, які і називають елементарними перетвореннями матриці.

Означення 20. *Елементарним перетворенням матриці 1-го роду називається множення деякого рядка матриці на дійсне число* $\alpha \neq 0$.

Елементарним перетворенням матриці 2-го роду називається додавання до одного рядка матриці іншого її рядка, помноженого на деяке дійсне число.

Елементарним перетворенням матриці 3-го роду називається переміна місцямидвох рядків матриці.

Елементарне перетворення 1-го роду над рядками матриці символічно позначають так: $\alpha \cdot k_i \to k_i$. При цьому i-ий рядок матриці помножиться на число α, а інші рядки не зміняться.

Елементарне перетворення 2-го роду над рядками матриці символічно позначають так: $k_i + \alpha k_j \to k_i$. При цьому до i-го рядка матриці додається її j-ий рядок, помножений на число α. Інші рядки матриці, включно з j-им, не зміняться.

Елементарне перетворення 3-го роду над рядками матриці символічно позначають так: $k_i \to k_j, k_j \to k_i$. При цьому зрозуміло, що i-ий та j-ий рядки міняються місцями, а інші рядки залишаються на своїх місцях. При переході від однієї матриці до іншої частіше за все виконуються декілька перетворень з метою надати потрібний вигляд одному зі стовпців матриці.

Наприклад:
$$\begin{pmatrix} -2 & 9 & 11 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[k_1 \to k_3]{k_3 \to k_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -2 & 9 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[k_3+2k_1 \to k_3]{k_2-3k_1 \to k_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 13 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{k_3+13k_2 \to k_3}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow[1/28k_3 \to k_3]{(-1)k_2 \to k_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно вводять елементарні перетворення і над стовпцями матриці.

§ 1.1.11. Зведення матриці до трапецієвидної форми

Теорема 6. *Будь-яку матрицю за допомогою переміни місцями її стовпців, а також елементарних перетворень над її рядками можна звести до трапецієвидної форми.*

► Нехай дана довільна ненульова матриця A розмірності mxn

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Міняючи місцями її рядки, а при потребі і стовпці, з неї можна отримати матрицю B, таку що елемент $b_{11}\neq 0$. Віднімемо від її другого рядка перший рядок, помножений на число b_{21}/b_{11}. Легко перевірити, що в отриманій матриці перший елемент другого рядка дорівнює нулю. Аналогічно поступимо і з іншими рядками. Тобто виконаємо в матриці B елементарні перетворення другого роду, які символічно позначаються так: $k_i - b_{i1}/b_{11}\cdot k_1 \to k_i$, де i=2,3,...,m, при цьому від i-го рядка матриці B ми віднімемо її перший рядок, помножений на число b_{i1}/b_{11}. При цьому зміняться всі рядки матриці B, які починались з ненульового елемента. Незмінним залишиться також і перший рядок матриці B. Отримаємо матрицю C, всі елементи першого стовпця якої, крім першого елемента, дорівнюють нулю, і $c_{11}=b_{11}$.

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Будемо вважати, що в матриці C ненульові елементи є не тільки в першому рядку, інакше вона вже трапецієвидна. Не рухаючи першого рядка і першого стовпця, поміняємо місцями інші рядки або стовпці матриці C так, щоб в отриманій матриці D елемент d_{22} не дорівнював нулю. Від всіх рядків матриці D, починаючи з третього віднімемо її другий рядок, помножений на число d_{i2}/d_{22}, i=3,4,...,m. В отриманій матриці всі рядки, починаючи з третього, будуть починатись двома нулями. Перші два рядки матриці D будуть такими ж, як і в матриці C. Продовжуючи далі процес, отримаємо з рештоют рапецієвиднуматрицю.◄

На практиці зведення матриці до трапецієвидної форми, по суті, повторює це доведення.

Наприклад:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 11 & 10 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[k_3-5k_1\to k_3]{k_2-2k_1\to k_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & 10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{k_3-2k_2\to k_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Частіше за все, нульові рядки в трапецієвидній матриці викреслюють, оскільки вони не допомагають при розв'язанні задач. З останнього прикладу видно, що коли в трапецієвидній матриці декілька рядків пропорційні, то всі їх, крім одного можна викреслити, тому що їх можна зробити нульовими. При цьому елементарні перетворення, завдяки яким рядки викреслюються, можна не вказувати.

Означення 21. *Два рядки (стовпці) матриці називаються пропорційними, якщо один з них можна отримати з іншого множенням на довільне дійсне ненульове число.*

Зведення матриці до трапецієвидної форми полегшує розв'язання багатьох задач, зокрема і розв'язання систем лінійних рівнянь.

§ 1.1.12. Обернена матриця

Як ми знаємо, властивостями, аналогічними властивостям числа 1 у будь-якій числовій множині, у множині всіх матриць порядку n, володіє одинична матриця E того ж порядку n. Нагадаємо, що всі елементи головної діагоналі одиничної матриці дорівнюють 1, а всі інші її елементи одиничної матриці дорівнюють 0.

Якщо число $a \neq 0$, то до нього існує обернене число, яке позначається як a^{-1}, причому $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$. Для введення оберненої матриці можна використати твердження, аналогічне тому, що добуток числа a та оберненого до нього числа, дорівнює 1.

Означення 22. *Оберненою матрицею до матриці n-го порядку A називається матриця, яка позначається A^{-1}, причому для цих матриць повинні* *виконуватись рівності:* $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, *де* E *– одинична матриця порядку* n.

Оскільки операція множення матриць не комутативна, то суттєвими є обидва порядки запису множників. З того факту, що матриці A і A^{-1} переставні за означенням, випливає, що вони обидві повинні бути одного і того ж порядку n. Отже, обернена матриця існує тільки для квадратної матриці A, причому вона повинна мати той же порядок, що і матриця A. Пізніше ми переконаємось, що не всі матриці володіють оберненими матрицями.

Означення 23. *Матриця* A*, яка має обернену матрицю, називається оборотною.*

Теорема 7. *Якщо матриця А оборотна, то існує єдина обернена матриця до матриці А.*

► Доводиться методом від супротивного. Нехай матриця *A* оборотна і має дві обернених матриці, які позначимо як A_1^{-1} та A_2^{-1}. Маємо:
$A_1^{-1} = A_1^{-1} \cdot E = A_1^{-1} \cdot (A \cdot A_2^{-1}) = (A_1^{-1} \cdot A) \cdot A_2^{-1} = E \cdot A_2^{-1} = A_2^{-1}$. Ми отримали, що матриці рівні, тобто обернена матриця, якщо вона існує, єдина.◄

Побудувати обернену матрицю до матриці A за цією схемою неможливо, оскільки операція ділення матриць не вводиться.

Основною метою цього пункту є знаходження способу побудови оберненої матриці до матриці A. Побудувати обернену матрицю до матриці A можна декількома способами, в цьому розділі ми розглянемо *спосіб елементарних перетворень* для побудови оберненої матриці.

Опишемо цей спосіб кратко, без теоретичних доведень.

Для знаходження оберненої матриці A^{-1} для даної квадратної матриці A необхідно:

1) записати матрицю виду $(A|E)$, де E – одинична матриця тій же розмірності, що і матриця A;

2) елементарними перетвореннями рядків зводимо матрицю A до одиничної матриці E, тоді за вертикальною лінією буде знаходитись шукана матриця A^{-1}.

Приклад 5. Знайти обернену матрицю для матриці $A=\begin{pmatrix}2&8\\1&3\end{pmatrix}$.

Запишемо матрицю виду $(A\,|\,E)$, де E – одинична матриця. Елементарними перетвореннями рядків зведемо матрицю A до одиничної матриці E, тоді за вертикальною лінією буде знаходитись матриця A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&8&1&0\\1&3&0&1\end{array}\right)_{\times 2}\sim\left[\text{другий рядок помножили на 2}\right]\sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&8&1&0\\2&6&0&2\end{array}\right)_{(2)-(1)}\sim\left[\begin{array}{l}\text{від другогорядка}\\\text{віднімаємо перший рядок,результат}\\\text{записуємо у другийрядок}\end{array}\right]\sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&8&1&0\\0&-2&-1&2\end{array}\right)_{\times 4}\sim\left[\text{другий рядок помножили на 4}\right]\sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&-3&8\\0&-8&-4&8\end{array}\right)\sim\left[\begin{array}{l}\text{до першого рядка додали другийрядок,результат}\\\text{записали у перший рядок}\end{array}\right]\sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&8&1&0\\0&-8&-4&8\end{array}\right)\begin{array}{l}:2\\:(-8)\end{array}\sim\left[\begin{array}{l}\text{перший рядокподілили на 2}\\\text{другийрядокподілили на }(-8)\end{array}\right]\sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-\frac{3}{2}&4\\0&1&\frac{1}{2}&-1\end{array}\right),\ \text{тоді}\ A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&4\\\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3&8\\1&-2\end{pmatrix}.$$

Перевірка :

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2&8\\1&3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3&8\\1&-2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\cdot(-3)+8\cdot 1&2\cdot 8+8\cdot(-2)\\1\cdot(-3)+3\cdot 1&1\cdot 8+3\cdot(-2)\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E\cdot$$

Контрольні запитання

1. Дайте означення матриці розмірності $m \times n$. Випишіть її загальний вид та наведіть декілька прикладів матриць різних розмірностей.

2. Скільки стовпців має матриця розмірності 3×5? Скільки елементів має кожен з її стовпців?

3. Скільки індексів має елемент довільної матриці? Який з індексів вказує на номер рядка, а який на номер стовпця матриці, на перетині яких знаходиться елемент?

4. Чим відрізняється квадратна матриця від прямокутної? Для яких матриць використовується поняття порядок матриці, що воно означає?

5. Скільки елементів містить матриця: а) розмірності 7х3; б) розмірності mхn; в)порядку 8?

6. Дайте означення головної та побічної діагоналей квадратної матриці. Наведіть приклад квадратної матриці та назвіть її діагоналі.

7. Що можна сказати про індекси елементів головної діагоналі будь-якої квадратної матриці?

8. Які матриці називаються рівними?Які твердження потрібно доводити для встановлення рівності матриць?

9. Дайте означення суми двох матриць, наведіть приклади. Сформулюйте та доведіть властивості додавання двох матриць.

10. Яка матриця називається нульовою? Скільки існує нульових матриць? Наведіть приклади різних нульових матриць.

11. Що таке протилежна матриця до матриці A? Як її отримати? Наведіть приклади.

12. Доведіть методом від супротивного, що матриця, протилежна до матриці A, єдина.

13. Запишіть комутативний та асоціативний закони операції додавання матриць. Чи поширюються вони на будь-яку кількість матриць?

14. Дайте означення різниці двох матриць. Які властивості цієї операції? Наведіть приклади.

15. Чи існує сума (різниця) двох довільних матриць?

16. Як помножити матрицю на число? Наведіть приклади та сформулюйте властивості цієї операції. Доведіть кожну з них. Згадайте назви цих властивостей.

17. Що розуміють під операцією транспонування матриці? Сформулюйте та доведіть властивості цієї операції.

18. Чи співпадають: а) розмірності транспонованих матриць; б) порядки транспонованих матриць?

19. Дайте означення добутку двох матриць. Чи можна перемножити дві довільні матриці? Випишіть формулу для обчислення довільного елемента добутку двох матриць.

20. Наведіть приклади матриць A та B, таких що

а) добутки $A \cdot B$ та $B \cdot A$ не існують;

б) добуток $B \cdot A$існує, $A \cdot B$ не існує:

в) добутки $A \cdot B$, $B \cdot A$ існують. Чи є наведені вами матриці переставними?

21. Чи комутативна операція множення матриць?

22. Яка необхідна умова повинна виконуватись для того, щоб дві матриці були переставними?Чи є ця умова достатньою?

23. Нехай матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Обчисліть$A^2$.

24. Наведіть властивості операції множення матриць та доведіть кожну з них самостійно, при умові, що існують матриці з правих частин наведених рівностей.

25. Наведіть означення натурального степеня квадратної матриці. Які його властивості? З якої властивості операції множення матриць вони випливають?

26. Чи переставні два степеня однієї і тієї ж матриці?

27. Який загальний вид мають матриці: а)нульова; б)одинична; в) скалярна; г)елементарна; д)діагональна; е)верхньотрикутна; ж)нижньотрикутна; з)трапецієвидна? Наведіть приклади кожного з цих типів матриць.

28. Які з перерахованих у попередньому питанні матриць належать до множини квадратних матриць?

29. Яка матриця є нульовим степенем довільної квадратної матриці?

30. Скільки існує одиничних матриць? Наведіть приклади.

31. Якою основною властивістю володіє одинична матриця. Доведіть цю властивість.

32. Чи є скалярною будь-яка нульова матриця?

33. Який тип матиме матриця, транспонована до верхньотрикутної?

34. Чи є трапецієвидною нижньотрикутна матриця?

35. Як вводяться лінійні комбінації рядків і стовпців матриці? Як в лінійній комбінації називаються числові множники. Наведіть приклади.

36. Дайте означення елементарних перетворень матриці. Наведіть приклади елементарних перетворень рядків та стовпців матриці.

35. Які рядки (стовпці) матриці називаються пропорційними?

36. Наведіть приклади матриць, у яких пропорційні: а) два рядки;б) два стовпці; в) три стовпці. Назвіть коефіцієнти пропорційності в наведених вами прикладах.

37. Чи є пропорційними однакові рядки матриці? Якщо так, то назвіть коефіцієнт пропорційності.

38. Наведіть приклад матриці другого порядку з пропорційними рядками. Чи є пропорційними її стовпці?

39. Яка матриця називається оберненою матрицею до матриці A? Яка матриця називається оборотною?

40. Що можна сказати про розмірність оберненої матриці для матриці A?

Розділ 2. Практична частина

Необхідні теоретичні знання: поняття матриці, види матриць, операції над матрицями та їх властивості, обернена матриця, елементарні перетворення матриць, знаходження оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень, операція транспонування матриці та її властивості.

§ 1.2.1. Приклади розв'язування вправ та задач

Приклад 1. Знайти $2A+5B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 7 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Спочатку знайдемо матриці:

$$2A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 12 & 6 & 14 \\ 18 & 10 & 2 \end{pmatrix},\quad 5B=\begin{pmatrix} 15 & 35 & 10 \\ 5 & 0 & 25 \\ 10 & 20 & 40 \end{pmatrix}.$$

Додаємо матриці:

$$2A+5B=\begin{pmatrix} 4+15 & 0+35 & 2+10 \\ 12+5 & 6+0 & 14+25 \\ 18+10 & 10+20 & 2+40 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & 35 & 12 \\ 17 & 6 & 39 \\ 28 & 30 & 42 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $2A+5B=\begin{pmatrix} 19 & 35 & 12 \\ 17 & 6 & 39 \\ 28 & 30 & 42 \end{pmatrix}$.

Приклад 2. Знайти добутки AB і BA, якщо вони існують.

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 4 \\ 5 & 8 & 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

Встановимо розмір матриць: $A-2\times4$, $B-4\times5$. Добуток AB існує, так як число стовбців (4) матриці A дорівнює числу рядків (4) матриці B. Матриця добутку AB має розмір 2×5.

$$\underbrace{\underset{2\times4}{A}\underset{4\times5}{B}}_{2\times5} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб отримати елемент c_{11} потрібно елементи першого рядка матриці A помножити на відповідні елементи першого стовпця матриці B та отримані добутки скласти:

$c_{11} = 2\cdot1 + 3\cdot5 + 1\cdot3 + 0\cdot5 = 20$.

Для того, щоб отримати елемент c_{12} потрібно елементи першого рядка матриці A помножити на відповідні елементи другого стовпця матриці та отримані добутки скласти:

$c_{12} = 2\cdot3 + 3\cdot7 + 1\cdot2 + 0\cdot8 = 29$.

Аналогічно:

$c_{13} = 2\cdot0 + 3\cdot4 + 1\cdot1 + 0\cdot1 = 13$

$c_{14} = 2\cdot2 + 3\cdot8 + 1\cdot6 + 0\cdot9 = 34$

$c_{15} = 2\cdot6 + 3\cdot1 + 1\cdot4 + 0\cdot3 = 19$

$c_{21} = 7\cdot1 + 4\cdot5 + 2\cdot3 + 6\cdot5 = 63$

$c_{22} = 7\cdot3 + 4\cdot7 + 2\cdot2 + 6\cdot8 = 101$

$c_{23} = 7\cdot0 + 4\cdot4 + 2\cdot1 + 6\cdot1 = 24$

$c_{24} = 7\cdot2 + 4\cdot8 + 2\cdot6 + 6\cdot9 = 112$

$c_{25} = 7\cdot6 + 4\cdot1 + 2\cdot4 + 6\cdot3 = 72$.

$$AB = \begin{pmatrix} 20 & 29 & 13 & 34 & 19 \\ 63 & 101 & 24 & 112 & 72 \end{pmatrix}.$$

Матриця добутку $\underset{4\times5}{B}\underset{2\times4}{A}$ не існує, так як число стовбців (5) матриці B не дорівнює числу рядків (2) матриці A.

Відповідь: $AB = \begin{pmatrix} 20 & 29 & 13 & 34 & 19 \\ 63 & 101 & 24 & 112 & 72 \end{pmatrix}$, матриця BA не існує.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Спочатку встановимо розмір матриць: $A-3\times1$, $B-1\times3$. Добуток AB існує, так як число стовбців (1) матриці A дорівнює числу рядків (1) матриці B. Матриця добутку AB має розмір 3×3.

$$\underbrace{\underset{3\times1}{A}\underset{1\times3}{B}}_{3\times3}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 8 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot4 & 1\cdot8 & 1\cdot0\\(-2)\cdot4 & (-2)\cdot8 & (-2)\cdot0\\3\cdot4 & 3\cdot8 & 3\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8 & 0\\-8 & -16 & 0\\12 & 24 & 0\end{pmatrix}.$$

Добуток BA існує, так як число стовбців (3) матриці B дорівнює числу рядків (3) матриці A. Матриця добутку BA має розмір 1×1.

$$\underbrace{\underset{1\times3}{B}\underset{3\times1}{A}}_{1\times1}=\begin{pmatrix}4 & 8 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\left(4\cdot1+8\cdot(-2)+0\cdot3\right)=(-12).$$

Відповідь: $AB=\begin{pmatrix}4 & 8 & 0\\-8 & -16 & 0\\12 & 24 & 0\end{pmatrix}, BA=(-12).$

Приклад 3. Знайти значення многочлена $f(x)=4x^2-2x+3$ від матриці A, якщо $A=\begin{pmatrix}6 & 2\\4 & 1\end{pmatrix}$.

$$f(A)=4\cdot A\cdot A-2\cdot A+3\cdot E=4\cdot\begin{pmatrix}6 & 2\\4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 2\\4 & 1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}6 & 2\\4 & 1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв’яжемо поетапно:

$$\begin{pmatrix}6 & 2\\4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & 2\\4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\cdot6+2\cdot4 & 6\cdot2+2\cdot1\\4\cdot6+1\cdot4 & 4\cdot2+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}42 & 14\\28 & 9\end{pmatrix},$$

$$4\cdot\begin{pmatrix}42 & 14\\28 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}168 & 56\\112 & 36\end{pmatrix},\quad 2\cdot\begin{pmatrix}6 & 2\\4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 4\\8 & 2\end{pmatrix},\quad 3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}.$$

Тоді: $f(A)=\begin{pmatrix}168 & 56\\112 & 36\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12 & 4\\8 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}159 & 52\\104 & 37\end{pmatrix}.$

Відповідь: $f(A)=\begin{pmatrix}159 & 52\\104 & 37\end{pmatrix}.$

Приклад 4. Довести, що матриця $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ задовольняє рівнянню

$x^2-(a+d)x+ad-bc=0$.

Доведемо, що

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-(a+d)\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+(ad-bc)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+db \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ab+bd-ab-bd+0 \\ ac+dc-ac-cd+0 & bc+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, що і потрібно було довести.

Приклад 5. Знайти обернену матрицю для даної матриці.

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Запишемо матрицю виду $(A\,|\,E)$, де E – одинична матриця. Елементарними перетвореннями рядків зведемо матрицю A до одиничної матриці E, тоді за вертикальною лінією буде знаходитись шукана матриця A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)_{\times 2} \sim [\text{другий рядок помножили на } 2] \sim$$

$$\underset{(2)-(1)}{\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \end{array}\right)} \sim \begin{bmatrix} \text{від другого рядка} \\ \text{віднімаємо перший рядок, результат} \\ \text{записуємо у другий рядок} \end{bmatrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)_{\times 4} \sim [\text{другий рядок помножили на } 4] \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & -8 & -4 & 8 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \text{до першого рядка додали другий рядок, результат} \\ \text{записали у перший рядок} \end{bmatrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & 8 \end{array}\right)\begin{array}{l} :2 \\ :(-8) \end{array} \sim \begin{bmatrix} \text{перший рядок поділили на } 2 \\ \text{другий рядок поділили на } (-8) \end{bmatrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\dfrac{3}{2} & 4 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2} & -1 \end{array}\right), \text{ тоді } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} & 4 \\ \dfrac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Перевірка :

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\cdot(-3)+8\cdot 1 & 2\cdot 8+8\cdot(-2) \\ 1\cdot(-3)+3\cdot 1 & 1\cdot 8+3\cdot(-2) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \cdot$$

Відповідь: $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{\times 2} \sim \underset{(2)-(1)}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 8 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & -1 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)^{\times 3} \sim \underset{(3)-(1)}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 9 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & -1 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 9 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)^{:3} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)^{\times 5}_{\times 3} \sim$$

$$\underset{(1)+(2)}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 15 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 24 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 24 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)^{\times 7}_{\times 5} \sim$$

$$\underset{(3)-(2)}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 24 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -35 & 56 & -7 & 14 & 0 \\ 0 & -35 & 10 & -15 & 0 & 10 \end{array}\right)} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 24 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -46 & -8 & -14 & 10 \end{array}\right)^{:2}_{:2} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}5&0&12&1&3&0\\0&-5&8&-1&2&0\\0&0&-23&-4&-7&5\end{array}\right)\begin{matrix}\times23\\ \\ \times12\end{matrix}\sim\underset{(1)+(3)}{\left(\begin{array}{ccc|ccc}115&0&276&23&69&0\\0&-5&8&-1&2&0\\0&-7&-276&-48&-84&60\end{array}\right)}\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}5&0&12&1&3&0\\0&-5&8&-1&2&0\\0&0&-23&-4&-7&5\end{array}\right)\begin{matrix}\times23\\ \\ \times12\end{matrix}\sim\underset{(1)+(3)}{\left(\begin{array}{ccc|ccc}115&0&276&23&69&0\\0&-5&8&-1&2&0\\0&-7&-276&-48&-84&60\end{array}\right)}\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}115&0&0&-25&-15&60\\0&-5&8&-1&2&0\\0&0&-23&-4&-7&5\end{array}\right)\begin{matrix}\times23\\ \\ \times8\end{matrix}\sim\underset{(3)+(2)}{\left(\begin{array}{ccc|ccc}115&0&0&-25&-15&60\\0&-115&184&-23&52&0\\0&0&-184&-32&-56&40\end{array}\right)}\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}115&0&0&-25&-15&60\\0&-115&0&-55&-10&40\\0&0&-23&-4&-7&5\end{array}\right)\begin{matrix}:115\\ :(-115)\\ :(-23)\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{25}{115}&-\frac{15}{115}&\frac{60}{115}\\0&1&0&\frac{55}{115}&\frac{10}{115}&-\frac{40}{115}\\0&0&1&\frac{4}{23}&\frac{7}{23}&-\frac{5}{23}\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}115&0&0&-25&-15&60\\0&-115&0&-55&-10&40\\0&0&-23&-4&-7&5\end{array}\right)\begin{matrix}:115\\ :(-115)\\ :(-23)\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{25}{115}&-\frac{15}{115}&\frac{60}{115}\\0&1&0&\frac{55}{115}&\frac{10}{115}&-\frac{40}{115}\\0&0&1&\frac{4}{23}&\frac{7}{23}&-\frac{5}{23}\end{array}\right).$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{25}{115}&-\frac{15}{115}&\frac{60}{115}\\\frac{55}{115}&\frac{10}{115}&-\frac{40}{115}\\\frac{4}{23}&\frac{7}{23}&-\frac{5}{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{23}&-\frac{3}{23}&\frac{12}{23}\\\frac{11}{23}&\frac{2}{23}&-\frac{8}{23}\\\frac{4}{23}&\frac{7}{23}&-\frac{5}{23}\end{pmatrix}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-5&-3&12\\11&2&-8\\4&7&-5\end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$A\cdot A^{-1}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}2&3&0\\1&-1&4\\3&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5&-3&12\\11&2&-8\\4&7&-5\end{pmatrix}.=$$

$$=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}2\cdot(-5)+3\cdot 11+0\cdot 4 & 2\cdot(-3)+3\cdot 2+0\cdot 7 & 2\cdot 12+3\cdot(-8)+0\cdot(-5)\\ 1\cdot(-5)+(-1)\cdot 11+4\cdot 4 & 1\cdot(-3)+(-1)\cdot 2+4\cdot 7 & 1\cdot 12+(-1)\cdot(-8)+4\cdot(-5)\\ 3\cdot(-5)+1\cdot 11+1\cdot 4 & 3\cdot(-3)+1\cdot 2+1\cdot 7 & 3\cdot 12+1\cdot(-8)+1\cdot(-5)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}23&0&0\\0&23&0\\0&0&23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^{-1}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-5&-3&12\\11&2&-8\\4&7&-5\end{pmatrix}.$

3) $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&4&0\\1&-5&3\end{pmatrix}.$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&3&1&0&0\\1&4&0&0&1&0\\1&-5&3&0&0&1\end{array}\right)\underset{\substack{(2)\cdot 2-(1)\\(3)\cdot 2-(1)}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&3&1&0&0\\0&9&-3&-1&2&0\\0&-9&3&-1&0&2\end{array}\right)\underset{(3)+(2)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&3&1&0&0\\0&9&-3&-1&2&0\\0&0&0&-2&2&2\end{array}\right)$$

Отримали нульовий рядок у матриці, яка стоїть зліва. Це свідчить про те, що для даної матриці A матриці A^{-1} не існує.

Приклад 6. Знайти розв'язок матричного рівняння.

1) $\begin{pmatrix}2&6\\4&3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4&7\\7&6\end{pmatrix}.$

Рівняння $A\cdot X=B$ має розв'язок $X=A^{-1}\cdot B$, якщо існує матриця A^{-1}. Для розв'язку задачі виписуємо матриці A і B через вертикальну лінію, а після елементарними перетвореннями ***рядків*** матрицю A приводимо до матриці E, тоді за вертикальною лінією буде стояти шукана матриця X.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&6&4&7\\4&3&7&6\end{array}\right)\underset{(2)-(1)\cdot 2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}2&6&4&7\\0&-9&-1&-8\end{array}\right)\underset{(1)\cdot 3+(2)\cdot 2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}18&0&30&15\\0&-9&-1&-8\end{array}\right)\begin{array}{l}:18\\:(-9)\end{array}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{5}{3}&\frac{5}{6}\\0&1&\frac{1}{9}&\frac{8}{9}\end{array}\right)$$

$$X=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & \frac{5}{6}\\ \frac{1}{9} & \frac{8}{9}\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}30 & 15\\ 2 & 16\end{pmatrix}.$$

Перевірка: $\begin{pmatrix}2 & 6\\ 4 & 3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{18}\begin{pmatrix}30 & 15\\ 2 & 16\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}2\cdot 30+6\cdot 2 & 2\cdot 15+6\cdot 16\\ 4\cdot 30+3\cdot 2 & 4\cdot 15+3\cdot 16\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}72 & 126\\ 126 & 108\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 7 & 6\end{pmatrix}.$

Відповідь: $X=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}30 & 15\\ 2 & 16\end{pmatrix}.$

2) $X\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\ -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 3 & -2\end{pmatrix}.$

Рівняння $X\cdot A=B$ має розв'язок $X=B\cdot A^{-1}$, якщо існує матриця A^{-1}. Для розв'язку задачі виписуємо матрицю B під матрицею A, а потім елементарними перетвореннями ***стовбців*** матрицю A приводимо до матриці E, тоді під горизонтальною лінією буде стояти шукана матриця X.

$$\begin{pmatrix}7 & 3\\ -3 & -1\\ \hline 4 & 8\\ 3 & -2\end{pmatrix}_{(2)\cdot 7-(1)\cdot 3}\sim\begin{pmatrix}7 & 0\\ -3 & 2\\ \hline 4 & 44\\ 3 & -23\end{pmatrix}_{(1)\cdot 2+(2)\cdot 3}\sim\begin{pmatrix}14 & 0\\ 0 & 2\\ \hline 140 & 44\\ -63 & -23\\ {:14} & {:2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \hline \frac{140}{14} & 22\\ -\frac{63}{14} & -\frac{23}{2}\end{pmatrix}.$$

$$X=\begin{pmatrix}10 & 22\\ -\frac{9}{2} & -\frac{23}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}20 & 44\\ -9 & -23\end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}20 & 44\\ -9 & -23\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 3\\ -3 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}20\cdot 7+(-3)\cdot 44 & 20\cdot 3+(-1)\cdot 44\\ -9\cdot 7+(-23)\cdot(-3) & -9\cdot 7+(-1)\cdot(-23)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8 & 16\\ 6 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 3 & -2\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}20 & 44\\ -9 & -23\end{pmatrix}.$

Приклад 7. Знайти значення функції $f(x)=\frac{3x+2}{5x-4}$ від матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$

Значення функції $f(A)=(3A+2E)\cdot(5A-4E)^{-1}$, де

1) $3A+2E=3\cdot\begin{pmatrix}2&3\\-1&1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&9\\-3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&9\\-3&5\end{pmatrix}$.

2) $5A-4E=5\cdot\begin{pmatrix}2&3\\-1&1\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&15\\-5&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&15\\-5&1\end{pmatrix}$.

3) Тепер шукаємо матрицю $(5A-4E)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}6&15&1&0\\-5&1&0&1\end{array}\right)^{\times5}_{\times6}\sim\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc}30&75&5&0\\-30&6&0&6\end{array}\right)}_{(2)+(1)}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}30&75&5&0\\0&81&5&6\end{array}\right)^{:5}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}6&15&1&0\\0&81&5&6\end{array}\right)^{\times81}_{\times15}\sim$$

$$\sim\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc}486&1215&81&-90\\0&1225&75&90\end{array}\right)}_{(1)-(2)}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}486&0&6&-90\\0&1215&75&90\end{array}\right)^{:486}_{:1215}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{6}{486}&-\frac{90}{486}\\0&1&\frac{75}{1215}&\frac{90}{1215}\end{array}\right),\text{ тоді}$$

$$(5A-4E)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{81}&-\frac{15}{81}\\\frac{5}{81}&\frac{6}{81}\end{pmatrix}=\frac{1}{81}\begin{pmatrix}1&-15\\5&6\end{pmatrix}.$$

4) $f(A)=\begin{pmatrix}8&9\\-3&5\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{81}\begin{pmatrix}1&-15\\5&6\end{pmatrix}=\frac{1}{81}\begin{pmatrix}53&-66\\22&-45\end{pmatrix}$.

Відповідь: $f(A)=\frac{1}{81}\begin{pmatrix}53&-66\\22&-45\end{pmatrix}$.

Приклад 8. Перевірити справедливість твердження $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$, якщо $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}$.

Матриця A має розмір 3×2, матриця $A^T-2\times3$, $B-2\times2$, $B^T-2\times2$.

$$\underbrace{\underset{3\times2}{A}\cdot\underset{2\times2}{B}}_{3\times2}=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&11\\8&19\\2&3\end{pmatrix}.$$

$$\underset{2\times3}{(A\cdot B)^T}=\begin{pmatrix}5&8&2\\11&19&3\end{pmatrix}.$$

$$\underbrace{\underset{2\times2}{B^T}\cdot\underset{2\times3}{A^T}}_{2\times3}=\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&8&2\\11&19&3\end{pmatrix}.$$

§ 1.2.2. Завдання для самостійної роботи

1. Знайти:

1.1 $3A+2B$, якщо $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\4&-2&1\\7&3&0\\2&5&-4\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}4&2&7\\0&-8&0\\1&5&3\\7&-4&1\end{pmatrix}$.

1.2 $2A-\frac{1}{3}B$, якщо $A=\begin{pmatrix}5&7&3&-4\\2&1&-1&0\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}0&1&-9&3\\1&-8&2&5\end{pmatrix}$.

1.3 $\frac{2}{5}B-A$, якщо $A=\begin{pmatrix}7&0&3\\-5&4&1\\1&2&-3\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}8&5&-4\\1&-3&6\\2&7&9\end{pmatrix}$.

1.4 $-\frac{1}{2}A+B$, якщо $A=\begin{pmatrix}6&9\\0&4\\3&5\\2&1\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}3&2\\1&6\\9&4\\0&2\end{pmatrix}$.

1.5 $5A+9B$, якщо $A=\begin{pmatrix}4&18&6&32\\0&12&1&2\\8&4&10&7\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}1&3&6&5\\4&2&0&1\\7&5&4&9\end{pmatrix}$.

1.6 $\frac{3}{2}B-4A$, якщо $A=\begin{pmatrix}2&9\\5&12\\7&6\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}7&4\\3&5\\11&9\end{pmatrix}$.

1.7 $\frac{4}{7}A+\frac{2}{3}B$, $A=\begin{pmatrix}18&9\\12&7\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}14&23\\5&9\end{pmatrix}$.

1.8 $9A+\frac{1}{5}B$, якщо $A=\begin{pmatrix}2&8&6\\5&4&7\end{pmatrix}$та $B=\begin{pmatrix}10&5&35\\75&20&45\end{pmatrix}$.

1.9 $11A-7B$, якщо $A=\begin{pmatrix}3&2&0&4\\7&5&1&2\\6&9&4&1\\0&3&8&7\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}1&5&3&2\\4&7&6&5\\9&3&0&1\\2&7&5&2\end{pmatrix}$.

1.10 $2A+\frac{8}{3}B$, якщо $A=\begin{pmatrix}6&3&7\\5&0&1\\2&8&1\\4&5&9\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}3&6&1\\0&3&5\\2&7&9\\1&0&6\end{pmatrix}$.

2. Знайти добуткиAB і BA, якщо вони існують:

2.1 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 4 & 2 & 1\\ 6 & 9 & 4\\ 7 & 9 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 6\end{pmatrix}.$

2.2 $A=\begin{pmatrix}7 & 4 & 0 & 1\\ 3 & 5 & 2 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 7 & 5 & 2\\ 0 & 8 & 2 & 3 & 7\\ 1 & 4 & 6 & 2 & 9\\ 0 & 7 & 1 & 3 & 6\end{pmatrix}.$

2.3 $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5 & 6 & 1\\ 3 & 0 & 1 & 9 & 7\\ 2 & 6 & 8 & 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7 & 0 & 2\\ 6 & 8 & 3\\ 4 & 9 & 0\\ 3 & 1 & 7\end{pmatrix}.$

2.4 $A=\begin{pmatrix}3 & 9 & 10 & 6 & 5\\ 2 & 8 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 7 & 2 & 4 & 2\\ 3 & 5 & 8 & 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 6 & 9 & 1\\ 0 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\\ 7 & 0 & 3\end{pmatrix}.$

2.5 $A=\begin{pmatrix}6 & 4 & 5\\ 9 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 7\\ 6 & 5 & 9\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 0 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 7 & 1\\ 8 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

2.6 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 6 & 5\\ 3 & 2\\ 4 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}19 & 7 & 8 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 5 & 7\\ 8 & 5 & 9 & 1 & 9\end{pmatrix}.$

2.7 $A=\begin{pmatrix}4 & 7 & 8\\ 9 & 11 & 4\\ 6 & 8 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 7 & 9\\ 3 & 2 & 0\\ 7 & 6 & 8\\ 1 & 9 & 2\end{pmatrix}.$

2.8 $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 8 & 1\\ 2 & 0\\ 4 & 6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 6 & 7\\ 9 & 12 & 1 & 4 & 5\end{pmatrix}.$

2.9 $A=\begin{pmatrix}6 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 7 & 4 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\\ 8 & 2\\ 9 & 7\end{pmatrix}$.

2.10 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 3\\ 5 & 7 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 4 & 7 & 9 & 8\\ 3 & 6 & 11 & 2 & 1\\ 5 & 7 & 1 & 0 & 9\end{pmatrix}$.

3. Знайти всі можливі добутки двох матриць:

3.1 $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & 1\\ 6 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1 & 2\\ 6 & 8 & 4 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 1 & 4\\ 5 & 2\\ 4 & 3\\ 6 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 6 & 5 & 7\\ 2 & 4 & 8 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

3.2 $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 9 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 6 & 9\\ 4 & 3\\ 2 & 8\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 2\\ 7 & 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 8 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix}$.

3.3 $A=\begin{pmatrix}3\\ 7\\ 0\\ 4\\ 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 5\\ 8 & 1 & 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 4 & 6 & 1\\ 7 & 0 & 3\\ 5 & 8 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}6 & 10 & 3 & 8\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}3 & 6 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 4 & 9\end{pmatrix}$.

3.4 $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 7 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 0 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2 & 0\\ 5 & 3 & 1 & 6\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$.

3.5 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 5 & 9 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 7 & 9\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & 0 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 8 & 1\\ 4 & 5 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3\\ 7\\ 1\\ 6\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 6 & 4 & 5\\ 2 & 9 & 1\\ 4 & 6 & 7\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

4. Знайти значення многочлена від матриці:

4.1 Дано многочлен $f(x)=2x^2+5x-1$. Знайти $f(A)$, якщо $A=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

4.2 Дано многочлен $f(x)=3x-7x^2+9$. Знайти $f(A)$, якщо $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 5 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

4.3 Дано многочлен $f(x)=-2x^3+3x-4$. Знайти $f(A)$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}$.

4.4 Дано многочлен $f(x)=-x^2-x+3$. Знайти $f(A)$, якщо $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 0\\ 4 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

4.5 Дано многочлен $f(x)=\frac{1}{2}x^3+5x-2$. Знайти $f(A)$, якщо $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

5. Для даних матриць знайти обернені матриці методом елементарних перетворень:

5.1 $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

5.2 $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 6\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

5.3 $A=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 6 & 2 & 4\\ 9 & -3 & 3\end{pmatrix}$.

5.4 $A=\begin{pmatrix}8 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 0\\ 7 & 2 & 4\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

5.5 $A=\begin{pmatrix}6 & 2 & 8\\ 4 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 3 & 9\end{pmatrix}$.

5.6 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & -4 & 2\\ 1 & 10 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 7 & 1\end{pmatrix}$.

5.7 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 5 & 1 & -4\\ 2 & 7 & 9\end{pmatrix}$.

5.8 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & 7 & -3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

5.9 $A=\begin{pmatrix}7 & 9\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 5\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

5.10 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 4 & 2 & -8\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 9 & -6\end{pmatrix}$.

6. Знайти розв'язок матричного рівняння за допомогою елементарних перетворень, зробити перевірку:

6.1 $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 7 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

6.2 $X\cdot\begin{pmatrix}6 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

6.3 $\begin{pmatrix}8 & -2\\ 9 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 7 & 4\end{pmatrix}$.

6.4 $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

6.5 $\begin{pmatrix}7 & 2\\ 5 & 9\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 8 & 1\end{pmatrix}$.

6.6 $X\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

6.7 $X\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 6\\ 7 & 1\end{pmatrix}$.

6.8 $\begin{pmatrix}9 & -2\\ 4 & 7\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & 10\\ 8 & 5\end{pmatrix}$.

6.9 $X\cdot\begin{pmatrix}5 & 8\\ 6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 12 & -4\end{pmatrix}$.

6.10 $\begin{pmatrix}4 & -2\\ 5 & -7\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}5 & 9\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

7. Знайти значення функції $f(x)$ від матриці A:

7.1 $f(x)=\dfrac{2x+6}{x-2}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 5 & -2\end{pmatrix}$.

7.2 $f(x)=\dfrac{5-x}{2x-7}$, $A=\begin{pmatrix}5 & -8\\ 2 & 6\end{pmatrix}$.

7.3 $f(x)=\frac{4x-1}{6x+9}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

7.4 $f(x)=\frac{9x-6}{x-4}$, $A=\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

7.5 $f(x)=\frac{2x-4}{3x-3}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

8.Перевірити справедливість твердження $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, якщо:

8.1 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & -9 & 4 \\ 7 & -9 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 7 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

8.2 $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 9 \\ 0 & 7 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

8.3 $A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -4 & -8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -4 \\ -8 & 2 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$.

8.4 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 7 & 9 & 8 \\ 3 & 6 & 11 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

8.5 $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

8.6 $A=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 10 & 6 & 5 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 9 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

8.7 $A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8.8 $A=\begin{pmatrix}13 & 0\\ 4 & 6\\ 8 & 4\\ 11 & 5\\ 7 & 2\\ 6 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 0 & 1 & -2 & 4\\ 7 & 2 & 4 & 9 & 0\end{pmatrix}$.

8.9 $A=\begin{pmatrix}4 & 7 & 8\\ 9 & 11 & 4\\ 6 & 8 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 9 & 4 & 2 & 7\\ -3 & 1 & 5 & 5 & 8\\ 1 & 5 & 6 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

8.10 $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 9 & 1\\ 2 & 0\\ 4 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 6 & 7\\ 9 & 12 & 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

9.Знайти матриці $B = A \cdot A^T$ **та** $C = A^T \cdot A$**, якщо:**

9.1 A=$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

9.2 A=$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

9.3 A=$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

9.4 A=$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

9.5 A=$\begin{pmatrix}2 & -2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

9.6 A=$\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

9.7 A=$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

9.8 A=$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

9.9 A=$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

9.10 A=$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 7 & 0\\ 2 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Розділ 3. Завдання для самоперевірки

У розділі наведені тестові завдання закритої форми, які призначені як для перевірки теоретичного матеріалу, так і для перевірки практичних знань і умінь студентів. У кінці кожного із завдань наведено чотири відповіді, одна з яких є правильною.

1. Нехай матриця A має розмірність 2×4, тоді матриця A^T матиме розмірність:

А	**Б**	**В**	**Г**
1×4	4×2	1×2	2×4

2. Нехай матриця A має розмірність 2×3, тоді матриця A^T матиме розмірність:

А	**Б**	**В**	**Г**
2×3	1×2	3×2	1×3

3. Якщо матриці A і B мають однакову розмірність 3×4, то над ними можна провести операцію:

А	**Б**	**В**	**Г**
поділити B на A	помножити A на B	додати A до B	помножити B на A

4. Якщо матриці A та B мають однакову розмірність 5×4, то над ними можна провести операцію:

А	**Б**	**В**	**Г**
поділити B на A	відняти від B матрицю A	помножити A на B	помножити B на A

5. Якщо матриці A та B мають розмірності 5×4 та 4×3 відповідно, то над ними можна провести операцію:

А	**Б**	**В**	**Г**
поділити B на A	відняти від матриці A матрицю B	помножити A на B	помножити B на A

6. Дві матриці A та B можна додавати, якщо вони:

А	Б	В	Г
прямокутні	вироджені	квадратні	однакового розміру

7. Щоб знайти (ij)-ий елемент добутку матриць $A \cdot B$, потрібно:

А	Б	В	Г
помножити елементи i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, отримані результати додати	помножити елементи i-го стовпця матриці A на відповідні елементи j-го рядка матриці B, отримані результати додати	помножити елементи i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, отримані результати відняти	помножити елементи j-го рядка матриці A на відповідні елементи i-го стовпця матриці B, отримані результати додати

8. При транспонуванні матриці міняються місцями:

А	Б	В	Г
перший і останній стовпці	перший і останній рядки	перший рядок з першим стовпцем	кожний рядок з відповідним стовпцем

9. Матрицю можна додати до транспонованої до неї, якщо вона є:

А	Б	В	Г
матрицею-стовпцем	квадратною	прямокутною	матрицею-рядком

10. Нехай матриця A має розмірність 4×3. До неї можна додати матрицю B^T, якщо B має розмірність

А	Б	В	Г
3×3	4×4	4×3	3×4

11. Для квадратної матриці A оберненою є матриця A^{-1} така, що:

А	Б	В	Г

$A-A^{-1}=E$	$A+A^{-1}=A^{-1}+A=E$	$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$	$A=-A^{-1}$

12.При множенні матриці на число на це число потрібно помножити:

А	Б	В	Г
всі елементи матриці	всі елементи одного рядка і одного стовпця	всі елементи одного стовпця	всі елементи одного рядка

13. Прямокутні матриці A і B однакової розмірності можна:

А	Б	В	Г
помножити A на B	помножити A на B^T	поділити A на B	додати A і B^T

14.Нульовою називається така матриця, у якої:

А	Б	В	Г
всі елементи першого рядка є нулями	всі елементи довільного рядка є нулями	всі елементи довільного стовпця є нулями	всі елементи є нулями

15.Одиничною матрицею називається:

А	Б	В	Г
квадратна матриця, всі елементи першого стовпчика якої є одиницями	матриця, всі елементи якої є одиницями	квадратна матриця, на головній діагоналі якої стоять одиниці, а всі інші елементи – нулі	матриця, всі елементи першого рядка якої є одиницями

16.Обчислити $C=(3A+B)B$, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г
$C=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 2 & -8\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1 & -18\\ 7 & 18\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1 & -10\\ 18 & -8\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 18 & 8\end{pmatrix}$

17.Обчислити $C=-2A(A+B)$, якщо $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г

$C=\begin{pmatrix}-26 & -34\\ 2 & -8\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}26 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}26 & -10\\ 0 & -8\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}26 & 13\\ 0 & 8\end{pmatrix}$

18.Обчислити $C=(A-2B)A$, якщо $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$:

А	**Б**	**В**	**Г**
$C=\begin{pmatrix}-6 & -4\\ 2 & -4\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 0 & -4\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}8 & 4\\ 8 & 3\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}6 & 13\\ -13 & 8\end{pmatrix}$

19.Обчислити $C=A(2A+3B)$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$:

А	**Б**	**В**	**Г**
$C=\begin{pmatrix}-14 & -7\\ -1 & -14\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}26 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}26 & -10\\ 0 & -8\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}14 & 14\\ 0 & -8\end{pmatrix}$

20.Знайти $f(A)$, якщо $f(A)=x^2+x+2, A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$:

А	**Б**	**В**	**Г**
$f(A)=\begin{pmatrix}-1 & -7\\ -1 & -14\end{pmatrix}$	$f(A)=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}$	$f(A)=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -3 & 2\end{pmatrix}$	$f(A)=\begin{pmatrix}14 & 14\\ 0 & -8\end{pmatrix}$

21.Знайти $f(A)$, якщо $f(A)=x^2+2x-3, A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$:

А	**Б**	**В**	**Г**
$f(A)=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -4 & -2\end{pmatrix}$	$f(A)=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ -4 & -2\end{pmatrix}$	$f(A)=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -3 & 2\end{pmatrix}$	$f(A)=\begin{pmatrix}4 & 14\\ 0 & -8\end{pmatrix}$

22.Знайти $f(A)$, якщо $f(A)=x^2+x+2, A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$:

А	**Б**	**В**	**Г**
$f(A)=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -4 & -2\end{pmatrix}$	$f(A)=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ -4 & -2\end{pmatrix}$	$f(A)=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -3 & 2\end{pmatrix}$	$f(A)=\begin{pmatrix}5 & 15\\ -5 & 5\end{pmatrix}$

23.Знайти $f(A)$, якщо $f(A)=x^2-3x+1, A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$:

А	**Б**	**В**	**Г**

$f(A)=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$	$f(A)=\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	$f(A)=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$f(A)=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

24.Обчислити $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3$.

А	**Б**	**В**	**Г**
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

25.Обчислити$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3$.

А	**Б**	**В**	**Г**
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26. Вказати матрицю, обернену до матриці $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$:

А	**Б**	**В**	**Г**
$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

27. Вказати матрицю, обернену до матриці $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$:

А	**Б**	**В**	**Г**
$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

28. Вказати матрицю, обернену до матриці $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$:

А	**Б**	**В**	**Г**
$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

29. Вказати матрицю, обернену до матриці $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

30.Вказати матрицю, обернену до матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -9 \\ 11 & 22 & 6 \\ -9 & 2 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 11 & -2 & 6 \\ -9 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

31.Вказати матрицю, обернену до матриці $\begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 11 & -2 & 6 \\ -9 & 2 & -5 \end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 11 & -2 & 6 \\ -9 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

32. Вказати розв’язок матричного рівняння $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г
$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

33.Вказати розв'язок матричного рівняння $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г
$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

34. Вказати розв'язок матричного рівняння $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г
$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

35. Вказати розв'язок матричного рівняння $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г
$X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

36.Вказати розв'язок матричного рівняння $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г
$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

37.Вказати розв'язок матричного рівняння $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 20 \\ 6 \end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г
$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

38.Вказати розв'язок матричного рівняння $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г
$X = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

39.Вказати розв’язок матричного рівняння $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г
$X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

40.Вказати розв’язок матричного рівняння $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$:

А	Б	В	Г
$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$	$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

41. Для даних матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. серед поданих добутків вказати всі існуючі добутки двох матриць:

А	Б	В	Г
AB, BB, BA	AB, CA, BB	AB, AC	BB, BA, BC

42.Для даних матриць $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.серед поданих добутків вказати всі існуючі добутки двох матриць:

А	Б	В	Г
AB, BB, BA^T	BB, BA, BC^T	BA, BB, CA^T	BB, B^TA, A^TC

43.Матриця А має розмірність 4x3, матриця В – 5x3. Вказати добуток матриць, який існує:

А	Б	В	Г
AB	BA	A^TB	AB^T

44.Матриця А має розмірність 4x2, матриця В – 2x2. Вказати добуток матриць, який не існує:

А	Б	В	Г

BA	BA^T	A^TB	AB^T

45.Якою властивістю не володіє операція множення матриць:

А	**Б**	**В**	**Г**
комутативність	асоціативність	дистрибутивність відносно додавання матриць	дистрибутивність відносно віднімання матриць

46.Серед поданих тверджень вказати невірні:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(AB)^T=A^TB^T$
3. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

А	**Б**	**В**	**Г**
усі твердження вірні	3	2	2 і 3

47.Дано матрицю A=$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Вказати вид матриці А після наступного перетворення: другу строку матриці помножили на 2 та відняли від неї першу строку, помножену на 3.

А	**Б**	**В**	**Г**
$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -11 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}$

48. Дано матрицю A= $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Вказати вид матриці А після наступного перетворення: другу строку матриці помножили на 3 та додали її до першої строки, помноженої на –2.

А	**Б**	**В**	**Г**
$\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 & -18 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -13 & 18 \end{pmatrix}$

49.Дано матрицю A= $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Вказати вид матриці А після наступного перетворення: другий стовпець матриці помножили на -3 та додали до нього перший, помножений на 5.

А	Б	В	Г
$\begin{pmatrix}14 & 3\\17 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}14 & -3\\17 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-14 & 3\\17 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-14 & 3\\17 & 1\end{pmatrix}$

50.Дано матрицю А= $\begin{pmatrix}-2 & 3\\-3 & 4\end{pmatrix}$. Вказати вид матриці А після наступного перетворення: другий стовпець матриці помножили на -3 та відняли його від першого стовпця, що помножений на 2.

А	Б	В	Г
$\begin{pmatrix}-5 & 6\\-3 & 4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & 3\\-5 & 6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & 5\\-3 & 6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & -5\\-6 & -3\end{pmatrix}$

Відповіді на завдання:

№	відповідь	№	відповідь	№	відповідь	№	відповідь	№	відповідь
1	Б	11	В	21	Б	31	Б	41	Б
2	В	12	А	22	Г	32	В	42	В
3	В	13	Б	23	Г	33	Б	43	Г
4	Б	14	Г	24	Г	34	Г	44	А
5	В	15	В	25	Б	35	А	45	А
6	Г	16	Б	26	Б	36	В	46	В
7	А	17	А	27	В	37	Б	47	Г
8	Г	18	В	28	А	38	Б	48	А
9	Б	19	А	29	Б	39	В	49	Г
10	Г	20	В	30	Г	40	В	50	В

Частина 2. ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРІЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Розділ 1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

§ 2.1.1. Алгебраїчні рівняння та їх системи. Основні відомості

Історично алгебра розвивалась як наука, присвячена розв'язанню рівнянь та їх систем. Це в свою чергувикликало появу новихалгебраїчнихоб'єктів, зокрема матриць та визначників.

Означення 1. *Алгебраїчним рівнянням називається рівність, в якій відомі і невідомі числові величини пов'язані двома основними алгебраїчними операціями: множенням та додаванням.*

Доданки, з яких складається алгебраїчне рівняння, називаються членами цього рівняння. Алгебраїчне рівняння називається *лінійним* або рівнянням 1-го ступеня, якщо кожний його член містить в якості множника не більше однієї невідомої, причому першого ступеня, або не містить їх взагалі. Член, який не містить невідомих, називається вільним членом цього рівняння. Частіше за все його записують у правій частині рівняння, а всі інші члени записують у його лівій частині. Числовий множник, який є у кожному члені рівняння, крім вільного члена, називається коефіцієнтом цього рівняння.

Лінійне рівняння має таку назву через те, що рівняння першого ступеня від двох невідомих з геометричної точки зору задає пряму лінію на площині. Наприклад, рівняння $3x+y-z=7$, тобто рівняння $3x+1\cdot y+(-1)\cdot z=7$ має коефіцієнти: 3, 1 та -1 і вільний член 7.

Подібні словесні означення з точки зору математики незручні для використання. Тому, зазвичай, надають означення, використовуючи, так званий, загальний вид об'єкту. Так, лінійне рівняння від однієї невідомої має загальний вид:

$$ax+b=0,$$

де $a,\ b$ – відомі дійсні числа, це записують так: $a,\ b \in \mathrm{R}, x$ – невідома величина, що також є дійсним числом. Це рівняння узагальнюється шляхом збільшення степені невідомої або збільшенням кількості самих невідомих величин, або тим і іншим способом одночасно. Так, лінійне рівняння від двох невідомих має вид:

$$ax + by + c = 0,$$

де x, y – невідомі величини, $a, b, c \in R$.

При великій кількості невідомих їх зручніше позначати однією буквою, але з різними номерами. Ці номери називають індексами і пишуть їх внизу з правого боку від букви. Наприклад: $x_1,\ x_2, ..., x_n$. Крапки вказують на те, що ряд об'єктів від третього до передостаннього пропущено. Аналогічно індексуються і відомі числові величини. Буква може мати і декілька індексів. Так, лінійне рівняння від чотирьох невідомих має загальний вид:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b.$$

При теоретичних міркуваннях використовують рівняння від будь-якої скінченої кількості n невідомих. Таким чином, можна навести інше, еквівалентне, означення лінійного рівняння.

Означення 2. *Алгебраїчним лінійним рівнянням від* n *невідомих називається рівняння виду:*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b. \qquad (1)$$

Дійсні числа $a_1,\ a_2, ..., a_n$ *називаються коефіцієнтами цього рівняння. Дійсне число* b *називається його вільним членом. Дійсні числа* $x_1,\ x_2, ..., x_n$ *є невідомими величинами.*

Перейдемо до систем лінійних рівнянь.

Означення 3. *Системою* m *лінійних рівнянь від* n *невідомих називається сукупність (2), що складається з* m *лінійних рівнянь від одних і тих же* n *невідомих.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

Наприклад: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0 \\ -5x_1 + 3x_3 + 8x_4 = -1 \end{cases}$. Це система трьох рівнянь з чотирма невідомими.

Зрозуміло, що для розв'язання цієї системи можна використовувати тільки відомі величини, тобто коефіцієнти або вільні члени рівнянь. Ці числа розташовують у спеціальних таблицях. Так, стовпчик, що складається з правих частин рівнянь називається стовпцем вільних членів системи і записується в вигляді:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Коефіцієнти рівнянь зручно записувати у вигляді таблички, не порушуючи їх взаємного розташування:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 7 & -2 \\ -5 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ця таблиця називається матрицею коефіцієнтів або просто матрицею системи лінійних рівнянь. Якщо ж використовують всі числові величини системи, то записують таблицю:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 7 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ця таблиця називається розширеною матрицею системи. При розв'язанні системи зручніше перетворювати матриці системи, ніж саму систему.

Означення 4. *Матриця, що складається з коефіцієнтів системи лінійних рівнянь називається матрицею цієї системи. Стовпець, що складається з* *вільних членів всіх рівнянь, тобто з їх правих частин, називається стовпцем вільних членів. Матриця, яка отримана з матриці системи лінійних рівнянь приписуванням справа стовпця вільних членів називається розширеною матрицею цієї системи.*

Зауваження.*При потребі, невідомі системи лінійних рівнянь також записують стовпцем. Нехай дано систему лінійних рівнянь виду (2).Тоді стовпець невідомих буде мати вид:* $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$*,стовпець вільних членів виглядатиме так:* $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$*, матриця системи:* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$*, розширена матриця:* $A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$.

Означення 5. *Розв'язком системи* m *лінійних рівнянь з* n *невідомими називається впорядкований набір* n *дійсних чисел* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$*, які при підстановці замість відповідних невідомих перетворюють кожне рівняння системи на рівність (тотожність).*

Впорядкований набір відрізняється від будь-якої іншої множини чисел тим, що числа, з яких він складається, не можна міняти місцями.

Зауваження. *Впорядкований набір* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *є розв'язком системи (2) тоді і тільки тоді, коли виконується система рівностей:*

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}.$$

Відносно кількості розв'язків системи лінійних рівнянь діляться на чотири типи.

1) Система m лінійних рівнянь з n невідомими називається ***сумісною****, якщо вона має хоча б один розв'язок.*

2)Система називається ***несумісною****, якщо вона немає розв'язків.*

3) Сумісна система називається ***визначеною****, якщо вона має єдиний розв'язок.*

4) Сумісна система називається ***невизначеною****, якщо вона має більше одного розв'язку.*

Наприклад:

1. Система $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 = 9 \end{cases}$ немає розв'язків, тому що 7≠9, а тому дана система несумісна.

2. Легко пересвідчитись, що розв'язком системи: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases}$ є впорядкований набір (1, 2). Можна довести, що ця система немає інших розв'язків. Тому вона сумісна і визначена.

Відносно правих частин системи лінійних рівнянь діляться на два типи.

Означення 6. *Система m лінійних рівнянь з n невідомими називається однорідною, якщо вона має нульовий стовпець вільних членів, інакше система називається неоднорідною.*

Таким чином, всі рівняння однорідної системи мають нульові праві частини. Якщо ж хоча б одна з правих частин відмінна від 0, то система лінійних рівнянь називається неоднорідною.

Отже, однорідна система лінійних рівнянь має такий загальний вид:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Означення 7. *Нульовим розв'язком однорідної системи m лінійних рівнянь з n невідомими називається числовий набір, що складається з n нулів (0,0,…,0). Будь-який розв'язок однорідної системи, який містить хоча б одне число, що не дорівнює нулю, називається ненульовим розв'язком цієї системи.*

Зауваження. *Будь-яка однорідна система сумісна, тому що вона має хоча б один, а саме, нульовий розв'язок. Тому однорідні системи лінійних рівнянь або можуть мати один і тільки один розв'язок – нульовий (бути сумісними і визначеними), або мати безліч розв'язків (бути сумісними і невизначеними).*

Розв'язки невизначеної однорідної системи лінійних рівнянь мають певні властивості.

Властивість 1. *Сума (різниця) двох розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь є розв'язком цієї системи.*

Властивість 2. *Добуток розв'язку однорідної системи лінійних рівнянь на довільне дійсне число є розв'язком цієї системи.*

Властивість 3. *Лінійна комбінація з довільними коефіцієнтами розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь є розв'язком цієї системи.*

► Нехай дано два розв'язки однорідної системи (2) $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, $\lambda \in R$довільне дійсне число. Візьмемо довільне рівняння системи (2):

$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n = 0, i = \overline{1, \cdots, m}.$

Підставляючи розв'язки системи у дане рівняння отримаємо числові рівності:

$$a_{i1} \cdot a_1 + a_{i2} \cdot a_2 + \cdots + a_{in} \cdot a_n = 0,$$

$$a_{i1} \cdot b_1 + a_{i2} \cdot b_2 + \cdots + a_{in} \cdot b_n = 0.$$

Додавши ці рівності отримаємо:

$a_{i1} \cdot (a_1 + b_1) + a_{i2} \cdot (a_2 + b_2) + \cdots + a_{in} \cdot (a_n + b_n) = 0, \forall\, i = \overline{1, \cdots, m}.$

Це означає, що упорядкований набір $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$ є розв'язком системи (2), властивість 1 доведено.

Для доведення властивості 2 маємо:

$$a_{i1} \cdot (\lambda \cdot a_1) + \ a_{i2} \cdot (\lambda \cdot a_2) + \cdots + a_{in} \cdot (\lambda \cdot a_n) = 0$$

або $\lambda \cdot (\ a_{i1} \cdot a_1 + a_{i2} \cdot a_2 + \cdots + a_{in} \cdot a_n) = 0$.

Це означає, що $(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n)$ є розв'язком системи (2), властивість 2 доведено.

Властивість 3 є узагальненням властивостей 1 і 2, пропонуємо довести її самостійно.

Зауваження. *Розв'язкисумісної невизначеної неоднорідної системи лінійних рівнянь не мають таких властивостей.*

§ 2.1.2. Рівносильні системи лінійних рівнянь

Означення 8. *Дві системи лінійних рівнянь називаються рівносильними, якщо будь-який розв'язок першої системи є розв'язком другої системи, і навпаки: будь-який розв'язок другої системи є розв'язком першої, або обидві ці системи несумісні.*

Це означення можна сформулювати простіше.

Означення 9. *Дві системи лінійних рівнянь називаються рівносильними, якщо множини їх розв'язків співпадають.*

Рівносильні системи можуть мати різну кількість рівнянь, але обов'язково мають однакову кількість невідомих.

Ясно, що для розв'язання системи лінійних рівнянь необхідно її якимось чином перетворювати. Вияснимо, які ж з перетворень системи приводять до рівносильної системи рівнянь.

Теорема 1. *При зміні позначень невідомих отримаємо систему, рівносильну даній. При цьому, системи лінійних рівнянь мають одну і ту ж розширену матрицю.При зміні індексів невідомих системи лінійних рівнянь (2) отримаємо нерівносильну систему, але розв'язки цих систем відрізняються тільки розташуванням в них певних чисел. Матриці цих систем відрізняються відповідним розташуванням їх стовпців.*

► 1)Нехай перша система має вид (2), а друга система отримана з неї заміною невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ відповідно невідомими $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Зрозуміло, що будь-який числовий набір, який перетворить на рівності рівняння першої системи, перетворить на ті ж рівності і рівняння другої системи і навпаки. Згідно означення ці системи рівносильні. Зрозуміло, що вони мають однакові розширені матриці.

2)Нехай перша система має вид (2), а в другій системі індекси i, j міняються місцями. Для зручності будемо вважати, що $i=1, j=2$. Таким чином, на відміну від першої, в другій системі невідома x_1 позначена через x_2, а x_2–через x_1. Оскільки в другій системі доданки знову розташовують за зростанням індексів, то в кожному рівнянні другої системи перші два доданки міняються місцями. Отже, матриця другої системи відрізняється від матриці першої системи тим, що в ній міняються місцями перші два стовпці. Ясно, що будь-який розв'язок першої системи стане розв'язком другої системи, якщо в ньому поміняти місцями перші два числа і навпаки. Провести доведення для довільних індексів i, j неважко самостійно. ◄

Інші перетворення систем лінійних рівнянь, як і для матриць, зводять до більш простих, елементарних перетворень.

Означення 10. *Елементарними перетвореннями системи лінійних рівнянь називають:*

1) множення деякого рівняння системи на будь-яке ненульове дійсне число;

2) додавання до деякого рівняння системи іншого її рівняння, помноженого на довільне дійсне число;

3) переміна місцями двох рівнянь системи.

Теорема 2. *Елементарні перетворення системи приводять до рівносильної системи лінійних рівнянь.*

► Доведемо теорему тільки для елементарного перетворення 2). Інші елементарні перетворення мають простіший вид, тому для них легко довести теорему самостійно. Отже, нехай перша система має вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (3)$$

а друга система отримана з першої системи (3) шляхом додавання до її i-го рівняння j-го рівняння, помноженого на число α. Таким чином, друга система відрізняється від першої тільки видом i-го рівняння.

Щоб з'ясувати вид цього рівняння, запишемоi-е і j-е рівняння першої системи. З загального виду (3) легко здогадатись, що ці рівняння матимуть вид:

i-е рівняння: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$,

j-е рівняння: $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n = b_j$.

Тепер видно, що i-е рівняння другої системи повинно мати вид:

$$(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n) + \alpha \cdot (a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n) = b_i + \alpha \cdot b_j,$$

або ж:

$$(a_{i1} + \alpha \cdot a_{j1})x_1 + (a_{i2} + \alpha \cdot a_{j2})x_2 + ... + (a_{in} + \alpha \cdot a_{jn})x_n = b_i + \alpha \cdot b_j.$$

Всі інші рівняння обох систем, включно з j-им, співпадають.

Доведемо тепер, що будь-який розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ першої системи є розв'язком і другої системи. Дійсно, цей впорядкований набір припідстановці в кожне рівняння першої системи перетворює його на рівність. Тоді i-е і j-е рівняння першої системи перетворяться на рівності:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i,$$

$$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n = b_j.$$

Помноживши обидві частини другої рівності на α і додавши її до першої рівності отримаємо рівність:

$$(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n) + \alpha(a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n) = b_i + \alpha \cdot b_j.$$

А це і означає, що впорядкований набір $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ є розв'язкомi-го рівняння другої системи. Оскільки всі інші рівняння цих системи співпадають, то цей набір є розв'язком і другої системи.

Тепер нехай впорядкований набір $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ є розв'язком другої системи. Треба довести, що він є розв'язком першої системи. При підстановці чисел цього набору в *i*-е і *j*-е рівняння другої системи отримаємо рівності:

$$(a_{i1} + \alpha \cdot a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2} + \alpha \cdot a_{j2})\alpha_2 + ... + (a_{in} + \alpha \cdot a_{jn})\alpha_n = b_i + \alpha \cdot b_j ,$$

$$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n = b_j .$$

Помноживши обидві частини другої рівності на α і віднявши її від першої рівності отримаємо рівність:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i .$$

А це і означає,що впорядкований набір $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$є розв'язком*i*-го рівняння першої системи. Оскільки інші рівняння цих систем співпадають, то цей набір є розв'язком і першої системи. Таким чином, наші системи рівносильні. ◄

Зауваження. *Елементарні перетворення системи лінійних рівнянь приводять, відповідно, до елементарних перетворень першого, другого і третього роду розширеної матриці цієї системи, і навпаки.*

§ 2.1.3. Метод послідовного виключення невідомих розв'язання системи лінійних рівнянь

Опишемо універсальний метод розв'язання системи лінійних рівнянь. Він називається методом послідовного виключення невідомих або методом Гауса. Він зручний для практичного використання і легко реалізується на комп'ютері. Метод зводиться до заміни системи лінійних рівнянь простішою, але рівносильною їй системою.

Наведемо послідовність кроків, тобто алгоритм метода Гауса, який призводить до розв'язання будь-якої сумісної системи лінійних рівнянь.

Алгоритм метода Гауса

1. Виписати розширену матрицю вихідної системи. Привести її до трапецієвидної форми, залишаючи на місці останній стовпець. Викреслити в отриманій матриці всі нульові рядки.

2. Якщо трапецієвидна матриця містить рядок, всі елементи якого, крім останнього дорівнюють нулю, то система несумісна, і процес завершується. Якщо ж такого рядка немає, то :

3. Виписати нову систему лінійних рівнянь так, щоб трапецієвидна матриця була її розширеною матрицею. Вихідна і нова системи рівносильні.

4. Нехай r *– кількість рівнянь нової системи (це число у подальшому будемо називати рангом системи), а* n *– кількість її невідомих. Якщо* $r = n$*, то нова система визначена. Розв'язуючи її знизу догори, знаходимо єдиний розв'язок вихідної системи.*

5. При $r < n$*, всі невідомі величини, крім однієї (за власним вибором), що присутні у останньому рівнянні, називаються вільними параметрами. У всіх рівняннях нової системи доданки, що містять вільні параметри,*

перенести у праві частини, міняючи при цьому знак.

6. Присвоїти вільним параметрам довільні числові значення. Розв'язуючи отриману систему знизу догори, отримати значення решти невідомих. Впорядкований набір отриманих значень та значень вільних параметрів і є розв'язком вихідної системи.

Стосовно цього алгоритму потрібно зробити два пояснення. Так, у першому пункті цього алгоритму йдеться про те, що нульові рядки у трапецієвидній матриці викреслюються. Це відбувається через те, що рядок $(0,0,...,0,0)$ у новій системі дав би рівняння $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + ... + 0\cdot x_n = 0$. Ясно, що будь-який впорядкований набір чисел є його розв'язком. Отже, таке рівняння не впливає на множину розв'язків системи, тому може бути викреслена з неї.В другому ж пункті алгоритму вказано, що рядок типу $(0,0,...,0,b)$, де $b \neq 0$, приводить до несумісності вихідної системи. Дійсно, з такого рядка можна отримати рівняння: $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + ... + 0\cdot x_n = b$, яке не має розв'язків.

Приклад 1.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ -7x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

Згідно з пунктом 1 алгоритму випишемо розширену матрицю цієї системи і приведемо її до трапецієвидної форми.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 2 & 3 \\ -7 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[k_4 - k_1 \to k_4]{\substack{k_2 - 3k_1 \to k_2 \\ k_3 + 7k_1 \to k_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 10 & -20 & -4 & -12 \\ 0 & -13 & 45 & 18 & 35 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}k_2 \to k_2 \\ -\frac{1}{3}k_4 \to k_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 10 & 2 & 6 \\ 0 & -13 & 45 & 18 & 35 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{k_2 \to k_4 \\ k_4 \to k_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 45 & 18 & 35 \\ 0 & -5 & 10 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{k_3 + 13k_2 \to k_3 \\ k_4 + 5k_2 \to k_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 58 & 31 & 35 \\ 0 & 0 & 15 & 7 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{k_3 \to k_4 \\ k_4 \to k_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 58 & 31 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{15k_4 - 58k_3 \to k_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 59 & 177 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{59}k_4 \to k_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Відмітимо, що відповідно до нашої теорії, замість передостанньої матриці слід було б отримати дві матриці. Спочатку у попередній матриці потрібно четвертий рядок помножити на 15, а потім в отриманій матрицівід нового четвертого рядка відняти третій рядок, помножений на 58. Тобто теоретично спочатку треба отримати матрицю, виконавши перетвореня: $15k_4 \to k_4$, а потім з неї отримати матрицю за допомогою перетворення: $k_4 - 58k_3 \to k_4$. На практиці ці два перетворення першого та другого роду об'єднують в одне: $15k_4 - 58k_3 \to k_4$

.

Перший пункт алгоритму виконано. Перейдемо до його другого пункту. Випишемо по трапецієвидній матриці нову систему, рівносильну даній:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 5, \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \quad 15x_3 + 7x_4 = 6, \\ \quad x_4 = 3 \end{cases}$$

Кількість рівнянь цієї системи співпадає з кількістю її невідомих, тому остання система – визначена. Розв'язуючи її знизу догори, маємо:

$x_4 = 3$.

Підставляючи це значення в передостаннє рівняння отримаємо:

$15x_3 = 6 - 7 \cdot 3 = -15$,

$x_3 = -1$.

Підставляючи значення x_3 і x_4 в друге рівняння маємо:

$x_2 = -2$.

Нарешті, підставляючи ці значення у перше рівняння, отримаємо:

$x_1 = 1$.

Отже, оскільки остання система рівносильна вихідній, то вихідна система має єдиний розв'язок $(1,\ -2,\ -1,\ 3)$.

Для перевірки треба підставити цей розв'язок в кожне з рівнянь вихідної системи:

$$\begin{cases} 1 - 2 \cdot (-2) + 6 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 5, \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 3, \\ -7 \cdot 1 + (-2) + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 0, \\ 1 - 5 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) - 3 = 5. \end{cases}$$

Через громіздкі обчислення, при розв'язанні систем лінійних рівнянь методом Гауса, часом трапляється немало помилок. Тому потрібно обов'язково робити перевірку.

Приклад 2.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 - x_5 = -10, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 11x_4 + 6x_5 = -4. \end{cases}.$$

Випишемо розширену матрицю вихідної системи і зведемо її до трапецієвидної форми.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & -3 & 4 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 7 & 3 & -1 & -10 \\ 1 & -1 & -4 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 11 & 6 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[k_3 \to k_1]{k_1 \to k_3} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -4 & 2 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 7 & 3 & -1 & -10 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 11 & 6 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{k_2+3k_1 \to k_2 \\ k_3-2k_1 \to k_3 \\ k_4-k_1 \to k_4}}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -4 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 9 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 9 & 4 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[k_4+2k_2 \to k_4]{k_3+3k_2 \to k_3} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -4 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 9 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 27 & 14 & -9 \\ 0 & 0 & -10 & 27 & 14 & -9 \end{array}\right).$$

Перетворення $k_4 - k_3 \to k_4$ дало б нульовий рядок, який треба викреслити. Тому трапецієвидна матриця має вигляд:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & -4 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 9 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 27 & 14 & -9 \end{array}\right).$$

Нова система виглядає так:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \\ \quad -x_2 - 5x_3 + 9x_4 + 5x_5 = -1 \\ \quad\quad -10x_3 + 27x_4 + 14x_5 = -9 \end{cases}.$$

Кількість рівнянь цієї системи менше числа її невідомих. В її останньому рівнянні присутні невідомі x_3, x_4, x_5. Згідно пункту 5 алгоритму об'явимо вільними параметрами, наприклад невідомі x_3 і x_5. У всіх рівняннях останньої системи перенесемо доданки з цими невідомими у праві частини:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 3 + 4x_3 - 2x_5, \\ \quad -x_2 + 9x_4 = -1 + 5x_3 - 5x_5, \\ \quad\quad 27x_4 = -9 + 10x_3 - 14x_5. \end{cases}$$

В пункті 6 алгоритму сказано, що в якості значень вільних параметрів можна обирати довільні числа. Тому для зручності візьмемо: $x_3 = x_5 = 0$. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 3, \\ \quad -x_2 + 9x_4 = -1\ , \\ \quad\quad 27x_4 = -9. \end{cases}$$

Розв'язуючи її знизу догори, знайдемо:

$x_4 = -\frac{1}{3}$,

$x_2 = 1 + 9x_4 = 1 + 9 \cdot (-\frac{1}{3}) = -2$.

Підставляючи ці значення у перше рівняння, отримаємо: $x_1 = \frac{5}{3}$.

Отже, одним з розв'язків вихідної системи є $\left(\frac{5}{3},\ -2,\ 0,\ -\frac{1}{3},\ 0\right)$.

Помінявши в системі значення вільних параметрів можна отримати будь-який інший розв'язок вихідної системи.

Всі розв'язки невизначеної системи обчислити неможливо. Тому в алгоритмі метода Гауса останній пункт не виконують. Замість нього розв'язують систему знизу догори, вважаючи вільні параметри довільними невизначеними числами.

Означення 11. *Формули, які виражають залежні невідомі через вільні параметри і перетворюють кожне рівняння системи лінійних рівнянь на рівність, називаються загальним розв'язком цієї системи.*

Знайдемо загальний розв'язок нашої системи. З останнього рівняння системи знаходимо:

$$x_4 = \frac{-9 + 10x_3 - 14x_5}{27}.$$

Підставляючи вираз для x_4 в передостаннє рівняння, отримаємо:

$x_2 = 1 - 5x_3 + 5x_5 + 9x_4 = 1 - 5x_3 + 5x_5 + 9\left(\frac{-9 + 10x_3 - 14x_5}{27}\right)$.

Зводячи до спільного знаменника, після скорочення, маємо:

$x_2 = \frac{-6 - 5x_3 + x_5}{3}$.

Аналогічно, підставляючи значення для x_2 і x_4 в перше рівняння системи, знайдемо:

$x_1 = \frac{45 + 43x_3 - 17x_5}{27}$.

Отже, загальним розв’язком системи з прикладу 2 є

$$x_1 = \frac{45 + 43x_3 - 17x_5}{27},$$

$$x_2 = \frac{-6 - 5x_3 + x_5}{3},$$

$$x_4 = \frac{-9 + 10x_3 - 14x_5}{27}.$$

Загальний розв’язок системи будемо записувати так:

( ), де$x_3, x_5 \epsilon \mathbb{R}$.

Підставляючи в загальний розв’язок довільні значення числових параметрів, можна отримати будь-який розв’язок цієї системи. Такий розв’язок системи називається *частинним*.

Ясно, що загальному розв’язку системи можна надати інший вид, вибравши інші вільні параметри, наприклад x_3 і x_4.

§ 2.1.4. Метод Жордана-Гауса

Метод Жордана-Гауса є однією з модифікацій методу Гауса. Метод полягає у тому, що матриця системи лінійних рівнянь за допомоги елементарних перетворень рядків зводиться до одиничної матриці. У цьому полягає основна відмінність між методом Гауса і методом Жордана-Гауса. У результаті застосування даного методу елементи стовбця вільних членів являтимуться шуканим розв'язком системи.

Розглянемо даний метод більш детально. Для цього запишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Обчислювальна схема методу Жордана-Гауса складається з n етапів, в кожному з яких послідовно з допомогою k-го рядка виключаються елементи при невідомій x_k в кожному рядку матриці коефіцієнтів, крім k -го.

У результаті виконання n етапів отримуємо систему з одиничною матрицею коефіцієнтів:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \\ \dots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Тепер стовбець невідомих легко знаходиться за наступною формулою; $x_i = b_i^{(n)}; i = 1, \dots, n.$

Приклад 3. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Жордана-Гауса.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

Спочатку зведемо матрицю системи до ступінчатого виду методом Гаусу.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Отриманий вид матриці системи свідчить про те, що система лінійних рівнянь сумісна і має єдиний розв'язок (вона зведена до трикутного виду).

Тепер за допомоги елементарних перетворень строк матриці отримуємо нулі замість елементів матриці, які стоять вище головної діагоналі:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & 9 \\ 0 & 1 & \mathbf{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Виконаємо перетворення:

1) До другої строки матриці додаємо третю строку;
2) До першої строки матриці додаємо третю строку.

Отримуємо матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \mathbf{2} & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

3) Від першої строки матриці віднімаємо другу, помножену на 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Тому:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 4 \end{cases}$$

Відповідь: (3; 5; 4).

§ 2.1.5. Метод Штифеля

В цьому розділі ми опишемо метод, який вперше був представлений у статті швейцарського математика Е. Штифеля у 1960 році. Сам автор дав йому назву «Жорданове виключення».

Цей метод має багато застосувань та переваг:

- Універсальність. За його допомогою можна знаходити ранг системи векторів, базис, лінійні залежності між векторами; доповнювати лінійно незалежну систему векторів до базису, обертати матрицю, досліджувати та розв'язувати лінійну систему, обчислювати характеристичний многочлен матриці та власні вектори.
- Він має дуже просту обчислювальну схему.
- Деякі задачі розв'язуються цим методом одночасно. Так для лінійної системи рівнянь це одночасне знаходження двох рангів (матриці коефіцієнтів та розширеної матриці) та кількості розв'язків, а коли система невизначена, то без додаткових обчислень отримується загальний розв'язок.

Коротко опишемо цей метод. Розглянемо систему лінійних форм (рівнянь):

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots. \\ y_r = a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rs}x_s + \ldots + a_{rn}x_n, \quad (1) \\ \ldots. \\ y_m = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{ms}x_s + \ldots + a_{mn}x_n, \end{cases}$$

де a_{ij} – коефіцієнти рівнянь $(i=1,2,...,m, \quad j=1,2,...,n)$, тобто

$$y_i = a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \qquad (i=1,...,m). \tag{2}$$

Домовимося ці рівності записувати у вигляді таблиці

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & x_1 & ... & x_s & ... & x_n \\
\hline
y_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots \\
y_r & a_{r1} & ... & a_{rs} & ... & a_{rn} \\
\vdots & \vdots & ... & \vdots & ... & \vdots \\
y_m & a_{m1} & ... & a_{ms} & ... & a_{mn}
\end{array}$$

яку будемо називати *схемою Штифеля.*

Символи $y_1, y_2, ..., y_m$ називаються *лівими виразами,* а $x_1, x_2, ..., x_n$ –*верхніми виразами* .

Основна властивість схеми Штифеля *полягає в тому, що кожен його лівий вираз дорівнює сумі добутків елементів його рядку на відповідні верхні вирази.*

Нехай $a_{rs} \neq 0$. Можна виконати перетворення (y_r, x_s) із провідним елементом a_{rs}. Виразимо із r-ої рівності схеми змінну x_s через $x_1,...,x_{s-1}, y_r, x_{s+1},...,x_n$: $x_s = (-a_{r1}x_1 - ... - a_{r,s-1}x_{s-1} - a_{r,s+1}x_{s+1} - a_{rn}x_n) : a_{rs}$.

Але тоді і $y_1,...,y_{r-1}, y_{r+1}...,y_m$ можуть бути виражені через $x_1,...,x_{s-1}, y_r, x_{s+1},...,x_n$:

$$\begin{cases}
y_1 = (b_{11}x_1 + ... + b_{1s}y_r + ... + b_{1n}x_n) : a_{rs}, \\
.... \\
x_s = (-a_{r1}x_1 - ... - a_{r,s-1}x_{s-1} - a_{r,s+1}x_{s+1} - a_{rn}x_n) : a_{rs}, \\
.... \\
y_m = (b_{m1}x_1 + ... + b_{ms}y_r + ... + b_{mn}x_n) : a_{rs}.
\end{cases}$$

Ми отримаємо вже нову таблицю

$$
\left.\begin{array}{c|ccccc}
 & x_1 & \dots & y_r & \dots & x_n \\
\hline
y_1 & b_{11} & \cdots & b_{1s} & \cdots & b_{1n} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
x_s & b_{r1} & \dots & b_{rs} & \dots & b_{rn} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
y_m & b_{m1} & \dots & b_{ms} & \dots & b_{mn}
\end{array}\right| : a_{rs}
$$

Запис «$: a_{rs}$» означає, що всі елементи b_{ij} треба розділити на a_{rs}.

Будемо говорити, що схема отримана з попередньої в результаті перетворення Штифеля з *провідним (головним, роздільним)* елементом $a_{rs} \neq 0$ яке перекидає лівий вираз y_r наверх (на місце x_s), а верхній вираз x_s – наліво (на місце y_r). При цьому r-ий рядок називається *провідним* (роздільним) рядком, а s-ий стовпець – *провідним* стовпцем. В якості провідного елемента можна взяти будь-який елемент таблиці, відмінний від нуля.

Елементи перетвореної схеми отримуються з елементів вихідної схеми за наступним алгоритмом:

1. Провідний елемент замінюється одиницею ($b_{rs} = 1$).
2. Інші елементи провідного рядка тільки змінюють знак ($b_{rj} = -a_{rj}$ при $j \neq s$).
3. Інші елементи провідного стовпця не змінюються ($b_{is} = a_{is}$ при $i \neq r$).
4. Елементи, що не лежать в провідних рядках, перетворюються так: $b_{ij} = a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}$ $(i \neq r,\ j \neq s)$, тобто, перетворений елемент a_{ij} «проектується» на провідний рядок та стовпець, знаходиться різниця двох добутків: перетворений на провідний мінус проекція на проекцію.

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{a_{ij}} & \rightarrow & a_{is} \\
\downarrow & + \quad - & | \\
a_{rj} & — & \boxed{\mathbf{a_{rs}}}
\end{array}
$$

5. Всі отримані елементи діляться на a_{rs}.

Наприклад, розглянемо наступну систему рівностей:

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_4, \\ y_2 = 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 3x_4, \\ y_3 = -4x_1 + x_2 + x_4. \end{cases}$$

Дану систему можна записати у вигляді наступної схеми:

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	-1	4	-3	-2
y_2	3	-7	$\boxed{5}$	3
y_3	-4	1	0	1

Виконаємо перетворення (y_2, x_3) із провідним елементом $\boxed{5}$, який знаходиться на перетині 2-ої строки та 3-го стовпця. При цьому змінна x_3 міняється місцями із змінною y_2, і ми отримуємо нову схему:

	x_1	x_2	y_2	x_4
y_1	4	-1	-3	-1
x_3	-3	7	1	-3
y_3	-20	5	0	5

:5,

тобто

	x_1	x_2	y_2	x_4
y_1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_3	$-\frac{3}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$
y_3	-4	*1*	*0*	*1*

Пояснимо, які перетворення ми зробили:

1. Провідний елемент замінили на одиницю $b_{23} = 1$.

2. Інші елементи провідної строки обчислюються за формулою:

$b_{2j} = -a_{2j}, \quad j = 1, 2, 4.$

$b_{21} = -a_{21} = -3, \quad b_{22} = -a_{22} = 7, \quad b_{24} = -a_{24} = -3.$

3. Інші елементи провідного стовпця обчислюються за формулою:

$b_{i3} = a_{i3}, \quad j = 1,3.$

$b_{13} = a_{13} = -3, \quad b_{33} = a_{33} = 0.$

4. Для перерахування елементів, що не лежать в другому рядку і третьому стовпчику, скористаємось формулою:

$b_{ij} = a_{ij}a_{23} - a_{i3}a_{2j} \quad (i \neq 2,\ j \neq 3),$

$b_{11} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} = (-1)\times 5 - (-3)\times 3 = 4, b_{12} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} = 4\times 5 - (-3)\times(-7) = -1,$

$b_{14} = a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24} = (-2)\times 5 - (-3)\times 3 = -1,$

$b_{31} = a_{31}a_{23} - a_{33}a_{21} = (-4)\times 5 - 3\times 0 = -20,$

$b_{32} = a_{32}a_{23} - a_{33}a_{22} = 1\times 5 - (-7)\times 0 = 5,$

$b_{34} = a_{34}a_{23} - a_{33}a_{24} = 1\times 5 - 3\times 0 = 5.$

5. Всі отримані елементи діляться на $a_{23} = 5$.

Таким чином, отримали наступну систему рівностей:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{4}{5}x_1 - \dfrac{1}{5}x_2 - \dfrac{3}{5}y_2 - \dfrac{1}{5}x_4, \\ x_3 = -\dfrac{3}{5}x_1 + \dfrac{7}{5}x_2 + y_2 - \dfrac{3}{5}x_4, \\ y_3 = -4x_1 + x_2 + x_4. \end{cases}$$

Зауваження. *Перетворення Штифеля не залежить від конкретного типу виразів* $x_1, x_2, ..., x_n,\ y_1, y_2, ..., y_m$ *. Це можуть бути вектори, змінні, функції. Важливо, щоб виконувались співвідношення (2).*

Зараз ми будемо застосовувати перетворення Штифеля для розв'язання систем лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1s}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2s}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{ms}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (3)$$

Перепишемо дану систему у наступному вигляді

$$\begin{cases} 0 = a_{11}x_1 + ... + a_{1s}x_1 + ... + a_{1n}x_n - b_1, \\ 0 = a_{21}x_1 + ... + a_{2s}x_1 + ... + a_{2n}x_n - b_2, \\ .... \\ 0 = a_{m1}x_1 + ... + a_{ms}x_1 + ... + a_{mn}x_n - b_m, \end{cases} \quad (4)$$

та випишемо для неї схему Штифеля. При цьому ми вводимо додатковий стовпчик, який відповідає вільним членам системи:

	x_1	...	x_n	1
0	a_{11}	...	a_{1n}	$-b_1$
...	...	...	...	...
0	a_{m1}	...	a_{mn}	$-b_m$

1 варіант методу

Будемо виконувати перетворення Штифеля доки можливо, отримуючи на кожному етапі систему лінійних рівнянь, рівносильну вихідній. З кожним кроком число стовпців буде зменшуватися на одиницю, тому що нуль, перекинутий наверх, анулює відповідний стовпець. Нагадаємо, що умовою можливості виконання перетворення (y_r, x_s) є те що провідний елемент a_{rs} не дорівнює нулю.

У нас може виникнути один з трьох випадків:

1.

	x_{k+1}	...	x_n	1
x_1	$c_{1,k+1}$	...	c_{1n}	d_1
...	...	...	...	...
x_k	$c_{k,k+1}$	...	$c_{k,n}$	d_k
0	0	...	0	d_{k+1}
...	...	...	...	...
0	0	...	0	d_m

Нехай числа $d_{k+1},...,\ d_m$ не всі нулі. Тоді отримана система включає суперечливе рівняння $0 = 0 \cdot x_{k+1} + ... + 0 \cdot x_n - d_i$ при $d_i \neq 0$, тобто є несумісною, а тому і вихідна система несумісна.

2.

	1
x_1	β_1
...	...
x_n	β_n

Усі невідомі перекинуті наліво, тому система лінійних рівнянь є визначеною, $x_1 = \beta_1, ..., x = \beta_n$ є розв'язком вихідної системи.

3.

	x_{k+1}	...	x_n	1
x_1	$c_{1,k+1}$	...	c_{1n}	d_1
...	...	...	...	...
x_k	$c_{k,k+1}$	...	$c_{k,n}$	d_k
0	0	...	0	0
...	...	...	...	...

0	0	...	0	0

Не всі невідомі перекинуті наліво ($k < n$), але протиріччя немає. Вихідна система є сумісною та має безліч розв'язків. При цьому ми одразу отримали загальний розв’язок цієї системи

$$\begin{cases} x_1 = c_{1,k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{1n}x_n + \ldots + d_1, \\ \ldots. \\ x_k = c_{k,k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{kn}x_n + \ldots + d_n, \end{cases},$$

де $x_{k+1},\ldots,\ x_n$ є вільними параметрами.

2 варіант методу

Як і в першому варіанті, приводимо систему до виду (4). Виконуючи перетворення Штифеля, на кожному кроці провідне рівняння виключається зі схеми та виписується окремо. Далі перетворенню підлягають невиключені строки з нулями зліва. Таким чином, схема Штифеля кожен раз зменшується на одну строку і один стовпець. Кожне наступне провідне рівняння містить на одну невідому менше, ніж попереднє. При цьому ми отримуємо систему провідних рівнянь *трапецієвидної форми*.

У нас також може виникнути один з трьох випадків:

1. В одній із схем Штифеля з'явиться суперечливий рядок, тому система буде несумісною.
2. Остання схема включає більше однієї змінної, при цьому ніякого протиріччя не має. Система є невизначеною. Загальний розв'язок будемо знаходити за допомогою зворотного ходу методу Гауса, тобто будемо виконувати підстановки невідомих у попередні рівняння.
3. В процесі розв'язання не виникає протиріччя, а остання схема включає одну змінну, тоді вихідна система є визначеною.

§ 2.1.6. Матричні рівняння

Нехай A та B – матриці відповідно розмірностей $m \times n$ та $k \times l$. Необхідною умовою розв'язання матричного рівняння

$$AX = B \tag{5}$$

є умова $m = k$ и $n = l$. Тоді X має бути розміру $n \times l$. Але ці умови не є достатніми. Наприклад, якщо A та B – це квадратні матриці розміру n, при цьому матриця A має обернену, а B не має. В цьому випадку такі умови не є достатніми.

Проведемо дослідження рівняння (5). Перепишемо матрицю B розмірності $m \times l$ у наступному вигляді:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{ml} \end{pmatrix} = (B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(l)}).$$

Ми представили B як систему із l стовпців $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(l)}$, де

$$B^{(j)} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, l.$$

Зауваження. Будь-який рядок матриці B, взятий окремо, можна розглядати як матрицю розмірності 1xl, а стовпчик – як матрицю розмірності mx1. Тому рядки (стовпці) матриці B можна додавати, віднімати, а також множити на числа згідно з означеннями відповідних операцій над матрицями.

Зрозуміло, що у такий спосіб можна записати і матрицю X:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1l} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nl} \end{pmatrix} = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(l)}), \text{ де } X^{(j)} = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, l.$$

Використовуючи визначення добутку та рівності матриць, ми можемо записати наступні матричні рівняння:

$$\begin{aligned} AX^{(1)} &= B^{(1)}, \\ &\vdots \\ AX^{(l)} &= B^{(l)}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Коли ми знайдемо стовпці матриці X із (6), тоді ми і розв'яжемо рівняння (5). Але ми можемо помітити, що (6) – це lсистем лінійних рівнянь, які мають одну і ту ж матрицю коефіцієнтів. Для того щоб ми могли знайти матрицю X, яка задовольняє (5), необхідно і достатньо, щоб усі lсистем лінійних алгебраїчних рівнянь (6) були сумісними.

Розв'язки цих систем (стовпці матриці X) можемо знаходити одночасно, використовуючи метод Гауса чи метод Штифеля. Наприклад, якщо діяти за алгоритмом метода Гауса, спочатку необхідно скласти розширену матрицю $(A|B)$ та виконувати відповідні елементарні перетворення над рядками, зводячи матрицю $(A|B)$ до трапецієвидної форми.

Приклад 4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матриця $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ не має обернену (перевірити самостійно).Будемо шукати X у вигляді $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = (X^{(1)}, X^{(2)})$.

Для розв'язку задачі необхідно розв'язати два матричних рівняння $AX^{(1)} = B^{(1)}$ та $AX^{(2)} = B^{(2)}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Але будемо розв'язувати них одночасно, тому виписуємо розширену матрицю $(A|B)$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 10 & 4 \end{array}\right) \underset{(2)-(1)\cdot 2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ми отримали дві системи лінійних рівнянь, які потрібно розв'язати:

$$\left\{ 2x_{11} + 3x_{21} = 5, \right. \quad \Rightarrow \quad x_{11} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_{21}.$$

$$\left\{ 2x_{12} + 3x_{22} = 2, \right. \quad \Rightarrow \quad x_{12} = 1 - \frac{3}{2}x_{22}.$$

Розв'язком вихідного рівняння є матриця

$$X = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_{21} & 1 - \frac{3}{2}x_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},$$

де x_{21}, x_{22} – довільні числа.

Перевірка:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_{21} & 1 - \frac{3}{2}x_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_{21}\right) + 3\cdot x_{21} & 2\cdot\left(1 - \frac{3}{2}x_{22}\right) + 3\cdot x_{22} \\ 4\cdot\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_{21}\right) + 6\cdot x_{21} & 4\cdot\left(1 - \frac{3}{2}x_{22}\right) + 6\cdot x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_{21} & 1 - \frac{3}{2}x_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ де x_{21}, x_{22}–довільні числа.

§ 2.1.7. Матричний метод розв'язання системи лінійних рівнянь

Цей метод застосовується тільки для систем n лінійних рівнянь з n невідомими виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\quad\quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (7)$$

при умові, що основна матриця системи має обернену.

Дану систему лінійних рівнянь можна записати у виді матричного рівняння $A\cdot X = B$, де A–основна матриця системи, B – стовпець вільних членів, X – стовпець невідомих, причому система (7) і відповідне матричне рівняння мають одну і ту ж множину розв'язків.

Теорема 4. *Якщо матриця A порядку n має обернену матрицю, а B– довільна матриця розмірності n x p, то матричне рівняння*

$$A\cdot X = B (8)$$

має єдиний розв'язок виду:

$$X = A^{-1}\cdot B \quad . \qquad (9)$$

► Існування розв'язку.

Якщо матриця A оборотна, то існує єдина матриця A^{-1}. Перевіримо, що матриця $A^{-1}\cdot B$ є розв'язком матричного рівняння (8).

$A\cdot(A^{-1}\cdot B) = (A\cdot A^{-1})\cdot B = E\cdot B = B$– отримали тотожність.

Розв'язок матричного рівняння (8) існує.

.

Єдиність цього розв'язку доводиться методом від супротивного.

Нехай матриці C і D є розв'язками рівняння (8). Отже, маємо систему рівностей:

$A\cdot C = B$

$D\cdot C = B$.

Помножимо обидві частини цих рівностей зліва на матрицю A^{-1}. Враховуючи асоціативність операції множення матриць та рівність $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$,де E–одинична матриця порядку n, матимемо $C = A^{-1}\cdot B$ та $D = A^{-1}\cdot B$, тобто $C = D$. ◄

Використання цієї теореми до розв'язання системи (7) і називається *матричним методом розв'язання системи лінійних рівнянь*.

Приклад 5. Розв'яжемо систему $\begin{cases} 5\cdot x_1 - 4\cdot x_2 - 11\cdot x_3 = 3, \\ 4\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 2\cdot x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$ матричним методом.

Матриця $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & -11 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ оборотна.

$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{25}{2} \\ -1 & 8 & -27 \\ \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{31}{2} \end{pmatrix}$ (перевірте самостійно).

Тому за формулою (9) розв'язком цієї системи лінійних рівнянь є стовпець:

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -7 & 25 \\ -2 & 16 & -54 \\ 1 & -9 & 31 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -54 \\ 118 \\ -68 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -27 \\ 59 \\ -34 \end{pmatrix}.$$

За теоремою 4 цей розв'язок єдиний.

Відповідь: $(27,\ 59,\ -34)$.

Контрольні запитання

1. Що називається системою m лінійних рівнянь з n невідомими?
2. Що називається матрицею системи m лінійних рівнянь з n невідомими?Що називається стовпцем вільних членів системи лінійних рівнянь? Яка матриця називається розширеною матрицею системи лінійних рівнянь?
3. Випишіть:

а) загальний вид системи m лінійних рівнянь з n невідомими;

б) матрицю цієї системи;

в) її стовпець невідомих;

г) стовпець вільних членів;

д) розширену матрицю.

4. Випишіть у загальному виді систему трьох лінійних рівнянь з двома невідомими та всі матриці, пов'язані з нею.

5. Яка система m лінійних рівнянь з n невідомими називається однорідною? Випишіть її загальний вид.
6. Наведіть приклад однорідної системи трьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими та випишіть всі матриці, пов'язані з нею.
7. Дайте означення розв'язку системи m лінійних рівнянь з n невідомими.
8. Яка система m лінійних рівнянь з n невідомими називається :

а) сумісною;

б) несумісною;

в) визначеною;

г) невизначеною?

9. Чи існують несумісні однорідні системи лінійних рівнянь?
10. Чи може однорідна і неоднорідна система мати одну і ту ж матрицю?
11. Який розв'язок завжди має однорідна система лінійних рівнянь?
12. Що називається нульовим та ненульовим розв'язками системи однорідних рівнянь?
13. Чи існують:

    а) несумісні невизначені системи лінійних рівнянь;

    б) сумісні визначені системи лінійних рівнянь?
14. Які властивості мають розв'язки однорідної системи лінійних рівнянь?
15. Чи мають такі ж властивості розв'язки сумісної неоднорідної системи лінійних рівнянь? Поясніть, чому.
16. Які дві системи лінійних рівнянь називаються рівносильними?
17. Чи можуть рівносильні системи мати:

    а) різну кількість невідомих;

    б) різну кількість рівнянь?
18. Які елементарні перетворення системи лінійних рівнянь ви знаєте?
19. Чи приводять елементарні перетворення системи лінійних рівнянь до рівносильної системи? Якщо так, то доведіть це твердження для кожного з типів елементарних перетворень системи лінійних рівнянь.

20. Що відбувається з розширеною матрицею системи лінійних рівнянь при виконанні в цій системі елементарних перетворень?

21. Що відбувається з системою лінійних рівнянь при виконанні елементарних перетворень першого, другого та третього роду над рядками її розширеної матриці?

22. Назвіть всі пункти алгоритму розв'язання системи лінійних рівнянь методом Гауса та доведіть, що він приводить до розв'язання вихідної системи лінійних рівнянь.

23. Який рядок повинна мати відповідна трапецієвидна матриця, якщо система лінійних рівнянь несумісна?

24. Чому в трапецієвидній матриці, отриманій з розширеної матриці системи лінійних рівнянь, викреслюють нульові рядки?

25. Коли сумісна система лінійних рівнянь, матрицю якої приведено к трапецевидному виду, має:

а) єдиний;

б) безліч розв'язків?

26. Що таке вільні параметри? Як їх визначають при розв'язанні системи лінійних рівнянь?

27. Що таке загальний розв'язок системи лінійних рівнянь? Як з нього отримати конкретні числові розв'язки цієї системи?

28. Який розв'язок системи лінійних рівнянь називається частинним? Як отримати частинний розв'язок?

29. Запишіть довільну систему m лінійних рівнянь з n невідомими у виді матричного рівняння.

30. Доведіть, що система лінійних рівнянь та відповідне матричне рівняння мають одну і ту ж множину розв'язків.

31. У чому полягає відмінність методу Жордана-Гауса від методу Гауса?

32. При виконанні методу Жордана-Гауса застосовують елементарні перетворення строк або стовбців матриці системи?

33. Що ми називаємо схемою і перетворенням Штифеля?
34. Яка основна властивість схеми Штифеля?
35. За якими правилами отримуються елементи перетвореної схеми Штифеля?
36. Сформулюйте умову можливості виконання перетворення (y_r, x_s) у методі Штифеля.
37. Чи залежить перетворення Штифеля від типу виразів $x_1,\dots, x_n,\ y_1,\dots, y_n$?
38. Опишіть алгоритм розв'язання системи лінійних рівнянь методом Штифеля. Чим відрізняються 1 та 2 варіант цього методу?
39. Який вид буде мати остання схема Штифеля, яка отримана після скінченної кількості перетворень із схеми, що відповідає несумісній системі лінійних рівнянь?
40. Як знайти загальний розв'язок невизначеної системи лінійний рівнянь за допомогою схеми Штифеля?
41. Яка матриця називається оберненою матрицею до матриці А?
42. Яка матриця називається оборотною?
43. Що можна сказати про розмірність оборотної матриці?
44. Скільки розв'язків існує у рівняння $A\cdot X = B$, якщо матриця A оборотна?
45. Скільки розв'язків існує у рівняння $A\cdot X = B$, якщо матриця A необоротна?

Розділ 2.Практична частина

Необхідні теоретичні знання: *види систем лінійних рівнянь, елементарні перетворення матриць, обґрунтування методу послідовного виключення невідомих (метод Гауса), методу Жордана-Гауса, методу Штифеля, однорідні системи лінійних рівнянь та властивості їх розв'язків; методи розв'язування матричних рівнянь.*

§ 2.2.1. Приклади розв'язування вправ та задач

Приклад 1.Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса.

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 4x_4 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -1 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 1 & -10 & 4 \\ 0 & 12 & -2 & 20 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)}$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & -1 & 10 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

1) Другу строку помножили на 3 та від неї відняли першу строку, помножену на 2. Третю строку помножили на 3 та додали першу строку.

2) До третьої строки додали другу, помножену на 2.

Запишемо рівняння, що відповідає третій строчці останній матриці:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 10$$

або $$0 = 10.$$

Це протиріччя, тому система лінійних рівнянь несумісна.

Приклад 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Жордана-Гауса.

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 + x_3 - 9x_4 = 6 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 5x_4 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \end{cases}$$

Виконуємо першу частину алгоритму Жордана-Гауса.

1) Від другої строки відняли першу строку. До третьої строки додали першу строку, помножену на 3. Від четвертой строки відняли першу строку, помножену на 5.

2) Другу строку поділили на 2, третю строку на 11, четверту строку на 3.

3) Друга та третя строки пропорційні, тому третю строку можна виключити. До четвертої строки додали другу строку, помножену на –7.

4) Третю строку поділили на 2.

Система рівнянь має безліч розв'язків. Зведемо матрицю системи до виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & 1 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -24 & 0 & -28 & 14 \\ 0 & 6 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

5) Першу строку помножимо на 3 і віднімемо третю. Другу строку помножимо на 3 і додаємо третю.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -24 & 0 & -28 & 14 \\ 0 & 6 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

6) Другу строку помножимо на 4 та додаємо до першої строки.

7) Першу строку поділимо на 3, другу на 6, третю на 3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right)$$

Маємо:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 + \frac{7}{6}x_4 = -\frac{1}{3} \\ x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Виражаємо змінні через обрану вільну змінну (параметр) x_4:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{7}{6}x_4 - \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{1}{3}x_4 + \frac{4}{3} \end{cases}$$

Відповідь:

Зауваження.Для даного прикладу матрицю системи матрицю системи зводили методом Жордана-Гауса до виду $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{array}\right)$. *Однак, матрицю системи можна було зводити до виду* $\left(\begin{array}{ccccc|c} * & 1 & 0 & 0 & * & * \\ * & 0 & 1 & 0 & * & * \\ * & 0 & 0 & 1 & * & * \end{array}\right)$ *або* $\left(\begin{array}{ccccc|c} * & * & 1 & 0 & 0 & * \\ * & * & 0 & 1 & 0 & * \\ * & * & 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right)$ *або* $\left(\begin{array}{ccccc|c} * & 1 & * & 0 & 0 & * \\ * & 0 & * & 1 & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 & 1 & * \end{array}\right)$ *тощо.*

Приклад 3. Розв'язати систему лінійних рівнянь за 1 варіантом методу Штифеля.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1. \end{cases}$$

Перепишемо систему у вигляді (4) і складемо для неї схему Штифеля

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 1 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 2 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 1 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 \ - 8x_4 - 1 = 0. \end{cases}$$

1	x_1	x_2	x_3	x_4	1
0	2	$\boxed{1}$	-1	1	-1
0	3	-2	2	-3	-2
0	5	1	-1	2	1
0	2	1	-1	3	-4

В якості провідного елемента обираємо коефіцієнт при змінній x_2 в першому рівнянні і викреслюємо. Анулюється перший стовпець.

Елементи провідної строки обчислюються за формулою:

$b_{1j} = -a_{1j}, \quad j = 1,3,4,5,$

$b_{11} = -a_{11} = -2, \quad b_{13} = -a_{13} = 1, \quad b_{14} = -a_{14} = -1, \quad b_{15} = -a_{15} = 1.$

Для перерахування елементів, що не лежать в першому рядку і другому стовпчику, скористаємось формулою:

$b_{ij} = a_{ij}a_{12} - a_{i2}a_{1j} \quad (i \neq 1,\ j \neq 2),$

$b_{21} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = 3 \times 1 - (-2) \times 2 = 7$

і так далі. Всі отримані елементи розділимо на $a_{12} = 1$ та запишемо наступну таблицю:

2	x_1	x_3	x_4	1
x_2	-2	1	-1	1
0	7	0	-1	-4
0	3	0	$\boxed{1}$	2
0	0	0	2	-3

$\Rightarrow$

3	x_1	x_3	1
x_2	1	2	3
0	10	0	-2
x_4	-3	0	-2
0	$\boxed{-6}$	0	-7

$\Rightarrow$

4	x_3	1

x_2	12	-11	
0	0	82	: (-6)
x_4	0	-9	
x_1	0	-7	

Бачимо, що перетворена система містить суперечливе рівняння (третій рядок)

$0 \cdot x_3 - 82 = 0$,

тому вихідна система є несумісною.

Приклад 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь за 2 варіантом методу Штифеля.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Перепишемо систему у вигляді (4):

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 6 = 0, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 12 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ + 2x_4 - 6 = 0. \end{cases}$$

Складемо для неї схему Штифеля

1	x_1	x_2	x_3	x_4	1
0	$\boxed{2}$	2	-1	1	-4
0	4	3	-1	2	-6
0	8	5	-3	4	-12
0	3	3	-2	2	-6

При переході до нової схеми обираємо в якості провідного елемента коефіцієнт при змінній x_1 в першому рівнянні. При цьому анулюється перший стовпець, а перше (провідне) рівняння виписуємо окремо і також виключаємо з наступної схеми. Обчислимо нові елементи, скориставшись формулою

$b_{ij} = a_{ij}a_{23} - a_{i3}a_{2j} \quad (i \neq 1,\ j \neq 1).$

$b_{22} = a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} = -2$, $\quad b_{23} = a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13} = 2$, $\quad b_{24} = a_{24}a_{11} - a_{21}a_{14} = 0$,
$b_{25} = a_{25}a_{11} - a_{21}a_{15} = 4$,

$b_{32} = a_{32}a_{11} - a_{31}a_{12} = -6$, $\quad b_{33} = a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13} = 2$, $\quad b_{34} = a_{34}a_{11} - a_{31}a_{14} = 0$,
$b_{35} = a_{35}a_{11} - a_{31}a_{15} = 8$,

$b_{42} = a_{42}a_{11} - a_{41}a_{12} = 0$, $\quad b_{43} = a_{43}a_{11} - a_{41}a_{13} = -1$, $\quad b_{44} = a_{44}a_{11} - a_{41}a_{14} = 1$,
$b_{45} = a_{45}a_{11} - a_{41}a_{15} = 0$.

Всі отримані елементи розділимо на $a_{11} = 2$ та отримаємо наступну таблицю

2	x_2	x_3	x_4	1
0	$\boxed{-1}$	1	0	2
0	-3	1	0	4
0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

На наступному кроці в якості провідного елемента обираємо коефіцієнт при змінній x_2 в верхньому рівнянні, яке буде другим провідним рівнянням.

3	x_3	x_4	1
0	$\boxed{-2}$	0	-2
0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

4	x_4	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Отримали наступну систему із провідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ \quad - x_2 + x_3 \qquad = -2, \\ \qquad - 2x_3 \qquad = 2, \\ \qquad\qquad \frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Знаходимо із останніх двох рівнянь $x_3 = -1$, $x_4 = -1$.

Послідовно підставляючи знайдені змінні в перші два рівняння системи, знаходимо інші змінні:

$x_2 = 2 + x_3 = 2 + (-1) = 1,$

$x_1 = \frac{1}{2}(4 - 2x_2 + x_3 - x_4) = \frac{1}{2}(4 - 2 \times 1 + (-1) - (-1)) = 1.$

Вихідна система сумісна і має єдиний розв'язок: (1; 1; -1; -1).

Приклад 5. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Штифеля.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

Перепишемо систему у вигляді (4) і скористаємось першим варіантом методу:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 1 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + 4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 6 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 4 = 0. \end{cases}$$

Схема Штифеля, що відповідає цій системі, має наступний вид

1	x_1	x_2	x_3	x_4	1
0	$\boxed{1}$	1	2	3	-1
0	3	-1	-1	-2	4

$\Rightarrow$

0	2	3	-1	-1	6
0	1	2	3	-1	4

2	x_2	x_3	x_4	1
x_1	-1	-2	-3	1
0	-4	-7	-11	7
0	1	-5	-7	8
0	$\boxed{1}$	1	-4	5

$\Rightarrow$

	x_3	x_4	1
x_1	-1	-7	6
0	$\boxed{-3}$	-27	27
0	-6	-3	3
x_2	-1	4	-5

$\Rightarrow$

4	x_4	1	
x_1	-6	9	
x_3	27	-27	:(-3)
0	-153	153	
x_2	-39	42	

$\Rightarrow$

4	x_4	1
x_1	2	-3
x_3	-9	9
0	$\boxed{51}$	-51
x_2	13	-14

$\Rightarrow$

5	1	
x_1	-51	
x_3	0	:51
x_4	51	
x_2	-51	

$\Rightarrow$

5	1
x_1	-1
x_3	0
x_4	1
x_2	-1

Із останньої схеми одразу знаходимо розв'язок x_1=-1, x_2=-1, x_3=0, x_4=1.

Приклад 6. Розв'язати систему лінійних рівнянь 1 варіантом методу Штифеля.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Зведемо систему до виду (4)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0. \end{cases}$$

і побудуємо відповідну схему Штифеля

1	x_1	x_2	x_3	x_4	1
0	$\boxed{1}$	-2	1	1	-1
0	1	-2	1	-1	1
0	1	-2	1	5	-5

$\Rightarrow$

2	x_2	x_3	x_4	1
x_1	2	-1	-1	1
0	0	0	$\boxed{-2}$	2
0	0	0	4	-4

$\Rightarrow$

3	x_2	x_3	1
x_1	-4	2	0
x_4	0	0	-2
0	0	0	0

Із останньої таблиці видно, що вихідна система є сумісною невизначеною. Крім того, одразу отримуємо загальний і розв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - x_3, \\ x_4 = 1, \\ x_2, x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Приклад 7. Розв’язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для розв’язку задачі виписуємо розширену матрицю $(A|B)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right).$$

Помножимо перший рядок на $\frac{1}{2}$, отримаємо

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right).$$

1) До другого рядка додаємо перший, помножений на -1, а до третього – перший.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right).$$

2) Помножимо другий рядок на -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 3 \end{array}\right).$$

3) Далі додали до третього рядка другий, помножений на -2, отримали:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right).$$

4) Помножили третій рядок на $-\frac{1}{3}$, маємо

$$\underset{(2)-(3)\cdot 4}{\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)} \sim \underset{(1)-(3)\cdot 2}{\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Із останньої розширеної матриці ми отримали розв’язок матричного рівняння

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 + 0\cdot 7 + 4\cdot(-1) & 2\cdot(-2) + 0\cdot(-1) + 4\cdot 1 \\ 1\cdot 5 + (-1)\cdot 7 + (-2)\cdot(-1) & 1\cdot(-2) + (-1)\cdot(-1) + (-2)\cdot 1 \\ (-1)\cdot 5 + 2\cdot 7 + 3\cdot(-1) & (-1)\cdot(-2) + 2\cdot(-1) + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Приклад 8. Довести, що матричне рівняння не має розв'язків

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Будемо шукати X у вигляді $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{pmatrix}=(X^{(1)},\, X^{(2)})$.

Випишемо розширену матрицю $(A|B)$ та будемо виконувати елементарні перетворення над рядками, щоб звести її до трапецієвидної форми.

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{(1)\leftrightarrow(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{(2)-(1)\cdot 2 \\ (3)-(1)\cdot 3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right) \underset{(3)-(2)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Із останньої розширеної матриці ми отримали дві системи лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} x_{11}+2x_{31}+x_{41}=0, \\ x_{21}-4x_{31}-x_{41}=1. \end{cases} \quad \begin{cases} x_{12}+2x_{32}+x_{42}=2, \\ x_{22}-4x_{32}-x_{42}=-5, \\ 0=1. \end{cases}$$

Як бачимо, друга система несумісна, тому і матричне рівняння не має розв'язків.

Приклад 9. Розв’язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Перепишемо рівняння в наступному вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Випишемо розширену матрицю $(A|B)$ для даного рівняння та зведемо її до трапецієвидної форми

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 5 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{(2)-(1) \\ (3)-(1)\cdot 2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{(3)-(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Запишемо три системи лінійних рівнянь, які відповідають останній розширеної матриці :

$$1.\ \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} + 3x_{41} = 1, \\ -2x_{21} + x_{31} - x_{41} = 1. \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} x_{12} + 2x_{22} + 3x_{42} = 0, \\ -2x_{22} + x_{32} - x_{42} = 1. \end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases} x_{13} + 2x_{23} + 3x_{43} = 1, \\ -2x_{23} + x_{33} - x_{43} = 1. \end{cases}$$

Кожна з систем має нескінченну множину розв'язків. Знайдемо загальні розв'язки цих систем:

$$1.\ \begin{cases} x_{11} = 1 - 2x_{21} - 3x_{41}, \\ x_{31} = 1 + 2x_{21} + x_{41}, \\ x_{21}, x_{41} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} x_{12} = -2x_{22} - 3x_{42}, \\ x_{32} = 1 + 2x_{22} + x_{42}, \\ x_{22}, x_{42} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases} x_{13} = 1 - 2x_{23} - 3x_{43}, \\ x_{33} = 1 + 2x_{23} + x_{43}, \\ x_{23}, x_{43} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Шукана матриця X буде мати вид:

$$X=\begin{pmatrix}1-2x_{21}-3x_{41} & -2x_{22}-3x_{42} & 1-2x_{23}-3x_{43}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ 1+2x_{21}+x_{41} & 1+2x_{22}+x_{42} & 1+2x_{23}+x_{43}\\ x_{41} & x_{42} & x_{43}\end{pmatrix},$$

де $x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{41}, x_{42}, x_{43}$ - довільні числа.

§ 2.2.2. Завдання для самостійної роботи

1. Довести а) методом Гауса, б) методом Штифеля, що система лінійних рівнянь несумісна.

1.1 $\begin{cases}x-y+5z=2\\2x+3y-z=-1\\3x+2y+4z=5\end{cases}$ 1.2 $\begin{cases}2x-y-3z+t=1\\3x+4y-5z-2t=3\\3x+y+z-4t=-2\\4x+6y-6z-7t=2\end{cases}$ 1.3 $\begin{cases}x-y+2z+t=0\\2x+2y+z-3t=-1\\x+3y-z-4t=3\end{cases}$

1.4 $\begin{cases}x-y-z+2t=1\\2x-y+2z-2t=-1\\3x+y+z-4t=-2\\4x+6y-6z-7t=-2\\x+5y-7z-3t=3\end{cases}$ 1.5 $\begin{cases}x-y+z-3t+d=5\\x+2y+z-3t-2d=-2\\4x+3y-z-4t+3d=1\\2x+2y-3z+2t+4d=4\end{cases}$ 1.6 $\begin{cases}2x-y-z+5t=2\\x+4y-z-2t=-1\\3x+2y+z+t=-2\\x+3y+2z-4t=3\end{cases}$

1.7 $\begin{cases}2x-y+z+5t=3\\x+3y-4t=1\\3x+2y+z+t=-2\end{cases}$ 1.8 $\begin{cases}2x-y-z=-2\\x+y+3z=5\\5x+2y+8z=3\end{cases}$ 1.9 $\begin{cases}3y-2z=-3\\x+y-z=1\\x+2y+z=1\\x+3y+3z=0\end{cases}$

2. Довести а) методом Гауса, б) методом Жордана-Гауса, в) методом Штифеля, що система лінійних рівнянь сумісна і визначена. Виписати розв'язок системи.

2.1 $\begin{cases}x+3y+2z=3\\3x+y+z=5\\-3x+5y+2z=-2\end{cases}$ 2.2 $\begin{cases}3x-6y=1\\2x+y-2z=3\\4x-3y-z=4\end{cases}$ 2.3 $\begin{cases}x+y+2z=2\\2x-y+2z=3\\4x+y+4z=-1\\x+y+z=-2\end{cases}$

2.4 $\begin{cases} x+3y+2z=3 \\ 2x-y+2z=2 \\ x+y=-1 \\ x-2y+2z=3 \end{cases}$ 2.5 $\begin{cases} 2x-y-z+5t=12 \\ x+4y-z-2t=-8 \\ 3x+2y+z-t=0 \\ x+3y+2z-4t=-8 \end{cases}$ 2.6 $\begin{cases} x-y-4z+t=-2 \\ 2x-y+2z-2t=2 \\ 3x+y-4t=4 \\ 4x+6y-6z-7t=7 \\ x+5y-6z-3t=3 \end{cases}$

2.7 $\begin{cases} 6x-5y-2z+4t+4=0 \\ 9x-y+4z-t-13=0 \\ 3x+4y+2z-2t-1=0 \\ 3x-9y+2z-11=0 \end{cases}$ 2.8 $\begin{cases} 3y+2z=3 \\ 5x-y+2z=4 \\ 3x-5y=-2 \\ 7x-2y+2z=5 \end{cases}$ 2.9 $\begin{cases} 2x+5y+4z+t=20 \\ x+3y+2z+t=11 \\ 2x+10y+9z+7t=40 \\ 3x+8y+9z+2t=37 \end{cases}$

3. Довести а) методом Гауса, б) методом Жордана-Гауса, в) методом Штифеля, що система лінійних рівнянь сумісна і невизначена. Виписати загальний розв'язок системи та два частинних розв'язки.

3.1 $\begin{cases} 2x_1-2x_2+2x_3=9 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+x_4=8 \\ 3x_1+4x_2+x_3+x_4=-5 \end{cases}$

3.2 $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1 \\ 3x_1+5x_2-2x_3+x_4=-2 \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1+6x_2-3x_3+2x_4=-3 \end{cases}$

3.3 $\begin{cases} 2x+3y+5z=10 \\ x+4z=11 \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$

3.4 $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-3x_4+x_5=2 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4-2x_5=1 \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4-x_5=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+4x_4-2x_5=-3 \end{cases}$

3.5 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=5 \\ 3x_1-2x_2+x_3-x_4=15 \\ 2x_1-x_2=10 \\ x_2+x_3-x_4=3 \end{cases}$

3.6 $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4=2 \\ 3x_1+x_2+2x_3+x_4=4 \\ 3x_1+x_2-x_3+x_4=-5 \end{cases}$

3.7 $\begin{cases} 2x-3y+z=5 \\ 3x-4y+2z=8 \\ x-y+z=3 \\ x-2y=2 \end{cases}$

3.8 $\begin{cases} 4x_1+3x_2-x_3+2x_4-5x_5=3 \\ 3x_1+2x_2-3x_3-x_4+2x_5=-1 \\ 2x_1+x_2-5x_3-4x_4+9x_5=-5 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4-7x_5=4 \\ x_1-7x_3-7x_4+16x_5=-9 \end{cases}$

3.9 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

3.10 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$

4. Розв'язати однорідні системи лінійних рівнянь:

4.1 $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

4.2 $\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + y = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

4.3 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

4.4 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

4.5 $\begin{cases} 6x - 5y - 2z + 4t = 0 \\ 9x - y + 4z - t = 0 \\ 3x + 4y + 2z - 2t = 0 \\ 3x - 9y + 2z = 0 \end{cases}$

4.6 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$

4.7 $\begin{cases} -x - 3y + 5z = 0 \\ 2x + 4y - z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$

4.8 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases}$

4.9 $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

4.10 $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 4x + y + 4z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

5. Розв'язати матричні рівняння

5.1 $\begin{pmatrix}3 & 1\\5 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}5 & 3\\9 & 6\end{pmatrix}$ 5.2 $\begin{pmatrix}3 & 2\\6 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}$

5.3 $\begin{pmatrix}3 & 2\\6 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & 4\\4 & 8\end{pmatrix}$ 5.4 $\begin{pmatrix}5 & 2 & 3\\10 & 4 & 6\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$

5.5 $\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\2 & -2 & 4\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 5.6 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 3\\1 & 2 & 1 & 0\\2 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\\2 & 2\end{pmatrix}$

5.7 $\begin{pmatrix}0 & 2 & 1 & 0\\1 & 2 & 3 & 4\\1 & 4 & 4 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}$ 5.8 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 2\\2 & 0 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 3\\3 & 3\end{pmatrix}$

5.9 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 2\\0 & 1 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 3 & -1\\3 & 3 & 0\end{pmatrix}$ 5.10 $\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\2 & -1 & 2\\3 & 2 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\1 & 2 & 1\\0 & 3 & 1\end{pmatrix}$

Розділ 3. Завдання для самоперевірки

1. Якщо система m лінійних рівнянь з n невідомими не має розв'язку, вона називається

А	Б	В	Г
визначеною	сумісною	несумісною	невизначеною

2. Якщо система m лінійних рівнянь з n невідомими має хоч один розв'язок, вона називається

А	Б	В	Г
однорідною	сумісною	несумісною	неоднорідною

3. Якщо система m лінійних рівнянь з n невідомими має тільки один розв'язок, вона називається

А	Б	В	Г
визначеною	однорідною	несумісною	невизначеною

4. Якщо система m лінійних рівнянь з n невідомими має більше одного розв'язку, вона називається

А	Б	В	Г
визначеною	однорідною	несумісною	невизначеною

5. Система m лінійних рівнянь з n невідомими називається невизначеною, якщо:

А	Б	В	Г
вона має єдиний розв'язок	вона не має жодного розв'язку	вона має більше, ніж один розв'язок	всі вільні члени дорівнюють нулю

6. Система m лінійних рівнянь з n невідомими називається визначеною, якщо:

А	Б	В	Г
вона має єдиний розв'язок	вона не має жодного розв'язку	вона має більше, ніж один розв'язок	всі вільні члени дорівнюють нулю

7. Система m лінійних рівнянь з n невідомими називається несумісною, якщо вона:

А	Б	В	Г
вона має єдиний розв'язок	вона не має жодного розв'язку	має безліч розв'язок	має m розв'язків

8. Система m лінійних рівнянь з n невідомими називається однорідною, якщо:

А	Б	В	Г
вона має єдиний розв'язок	вона не має жодного розв'язку	вона має більше, ніж один розв'язок	всі вільні члени дорівнюють нулю

9. Якщо дві системи лінійних рівнянь мають однакові розв'язки, то вони називаються:

А	Б	В	Г
рівносильними	неоднорідними	однорідними	нерівносильними

10. Однорідна система лінійних рівнянь з n невідомими завжди:

А	Б	В	Г
має єдиний розв'язок	не має жодного розв'язку	має n розв'язків	має хоча б один розв'язок

11.Обрати твердження, яке не є властивістю розв’язків однорідної системи лінійних рівнянь:

А	**Б**	**В**	**Г**
різниця двох довільних розв’язків однорідної системи **не** є розв’язком цієї системи	сума двох довільних розв’язків однорідної системи є розв’язком цієї системи	якщо довільний розв’язок однорідної системи помножити на яке-небудь число k, то отримана система чисел також є розв’язком цієї системи	однорідна система лінійних рівнянь завжди має нульовий розв’язок

12. Вкажіть розв’язок системи рівнянь $\begin{cases} 3x-3y+2z=2, \\ 4x-5y+2z=1, \\ 5x-6y+4z=3. \end{cases}$

А	**Б**	**В**	**Г**
$(1,-1,-1)$	$(1,1,1)$	$(0,0,0)$	$(-1,1,-1)$

13.Класифікувати систему рівнянь $\begin{cases} 3x-3y+2z=2, \\ 4x-5y+2z=1, \\ 5x-6y+4z=3. \end{cases}$

А	**Б**	**В**	**Г**
неоднорідна, визначена	однорідна, несумісна	однорідна, визначена	неоднорідна, несумісна, визначена

14. Вкажіть розв’язок системи рівнянь $\begin{cases} x+2y+3z=7, \\ 2x+3y-z=6, \\ 3x+y-4z=3. \end{cases}$

А	**Б**	**В**	**Г**
$(1,-1,-1)$	$(1,1,1)$	$(2,1,1)$	$(2,1,-1)$

15.Класифікувати систему рівнянь $\begin{cases} x+2y+3z=7, \\ 2x+3y-z=6, \\ 3x+y-4z=3. \end{cases}$

А	**Б**	**В**	**Г**
однорідна, визначена	однорідна, несумісна	неоднорідна, визначена	неоднорідна, невизначена

16.Вкажіть розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x-2y+z=1, \\ 2x-y-z=2, \\ x-y+2z=3. \end{cases}$

А	**Б**	**В**	**Г**
$(1,-1,-1)$	$(1,1,1)$	$(2,1,1)$	$(2,1,-1)$

17. Розв'язати та класифікувати систему рівнянь $\begin{cases} x-2y+z=1, \\ 2x-y-z=2, \\ x-y+2z=3. \end{cases}$

А	**Б**	**В**	**Г**
однорідна,сумісна, визначена	однорідна, несумісна	неоднорідна, невизначена	неоднорідна, визначена

18. Розв'язати та класифікувати систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+x_4=1, \\ 3x_1+2x_2-x_3-2x_4=2. \end{cases}$

А	**Б**	**В**	**Г**
однорідна, визначена	однорідна, несумісна	неоднорідна, невизначена	неоднорідна, визначена

19.Розв'язати та класифікувати систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+x_4=1, \\ 6x_1+4x_2+2x_3+2x_4=3. \end{cases}$

А	**Б**	**В**	**Г**
неоднорідна, несумісна	однорідна, несумісна	неоднорідна, невизначена	неоднорідна, визначена

20.Розв’язати та класифікувати систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

А	Б	В	Г
неоднорідна, несумісна	однорідна, несумісна	неоднорідна, невизначена	неоднорідна, визначена

21. Розв’язати та класифікувати систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

А	Б	В	Г
неоднорідна, несумісна	однорідна, несумісна	однорідна, невизначена	неоднорідна, визначена

22. Розв’язати та класифікувати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

А	Б	В	Г
неоднорідна, несумісна	однорідна, несумісна	неоднорідна, невизначена	неоднорідна, визначена

23. Класифікувати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 2. \end{cases}$

А	Б	В	Г
неоднорідна, несумісна	однорідна, несумісна	неоднорідна, невизначена	неоднорідна, визначена

24.Вкажіть невірне твердження:

А	Б	В	Г
сума рішень невизначеної однорідної системи лінійних рівнянь є рішенням цієї системи	Різниця рішень невизначеної однорідної системи лінійних рівнянь є рішенням цієї	різниця рішень невизначеної неоднорідної системи лінійних рівнянь є рішенням цієї системи	однорідна система лінійних рівнянь завжди сумісна

	системи		

25.Вкажіть невірне твердження:

А	**Б**	**В**	**Г**
якщо однорідна система лінійних рівняння має ненульовий розв’язок, то вона визначена	якщо однорідна система лінійних рівняння має ненульовий розв’язок, то вона невизначена	якщо розв’язок однорідної системи лінійних рівнянь помножити на любе дійсне число, то отримуємо розв’язок цієї системи лінійних рівнянь	однорідна система лінійних рівнянь не може бути несумісною

26.Вкажіть невірне твердження:

А	**Б**	**В**	**Г**
якщо додати два рівняння системи лінійних рівнянь, то отримуємо рівносильну систему лінійних рівнянь	якщо з одного рівняння системи лінійних рівнянь відняти інше, то отримуємо рівносильну систему лінійних рівнянь, то отримуємо рівносильну систему лінійних	якщо обидві частини рівняння системи лінійних рівнянь помножити на одне і теж дійсне число, то отримуємо рівносильну систему лінійних рівнянь	якщо обидві частини рівняння системи лінійних рівнянь помножити на одне і теж дійсне число, відмінне від 0, то отримуємо

27.Вкажіть невірне твердження:

А	**Б**	**В**	**Г**
кожна однорідна система лінійних рівнянь сумісна	існують неоднорідні системи лінійних рівнянь, які мають тільки два розв’язки	існують несумісні неоднорідні системи лінійних рівнянь	якщо однорідна система лінійних рівняння має ненульовий розв’язок, то вона невизначена

Відповіді на завдання:

№	відповідь	№	відповідь	№	відповідь
1	В	10	Г	19	А
2	Б	11	А	20	Г
3	А	12	Б	21	В
4	Г	13	А	22	В
5	В	14	В	23	А
6	А	15	В	24	В
7	Б	16	В	25	А
8	Г	17	Г	26	В
9	А	18	В	27	Б

Список використаної літератури

1. Боревич З. И. Определители и матрицы. – М. : Наука, 1988.

2. Воеводин В. В. Линейная алгебра. – М. : Наука, 1980.

3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М. : Наука, 1967.

4. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре.– М. : Наука, 1971.

5. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения.– М. : Наука, 1979.

6. Дрозд Ю. А., Кириченко В. В. Вища алгебра. – ч. І. – Системи лінійних рівнянь. – Київ : Изд-во Киев. Ун-та, 1971.

7. Завало С. Т., Костарчук В. М., Хацет Б. І. Алгебра і теорія чисел. – ч. 1. – К.: Вища школа, 1977.

8. Завало С.Т., Левіщенко С.С. Алгебра і теорія чисел, практикум. – ч. 1. – К. : Вища школа, 1986.

9. Ильин В. А., Позняк Е. Г. Линейная алгебра. – М. : Наука,1981.

10. Ким Г.Д., Крицков Л. В. Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том I. –М. : Планета знаний, 2007.

11. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра. – М. : Физматлит, 2000.

12. Крякин В. Д. Линейная алгебра. – М. : Вузовская книга, 2004.

13. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. – М. : Высшая школа, 1979.

14. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М. : Наука, 1968.

15. Лельчук М. П., Полевченко И. И., Радьков А. М., Чеботаревский Б. Д. Практические занятия по алгебре и теории чисел. – Минск : Вышэйшая школа, 1986.

16. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. – М. :Наука,1970.

17. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. – М. : Наука, 1974.

18. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. – М. :Физматлит, 1984.

19. Фадеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука,1972.

Предметний покажчик

Навчальне видання

Савастру *Ольга Володимирівна*
Яковлева *Ольга Миколаївна*
Драганюк *Сергій Володимирович*
Болдарєва *Ольга Миколаївна*

МАТРИЦІ ТА СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

За редакцією авторів

Підп. до друку 11.11.2019. Формат 60×84/16.
Ум.-друк. арк. 6,98. Тираж пр.
Зам. № 2022.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел. (048) 723-28-39. E-mail: druk@onu.edu.ua