Скворцова С.О.

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЮЖЕТНИХ ЗАДАЧ У ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ

Навчально-методичний посібник
для студентів за спеціальністю 6.010100 «Початкове навчання»

Частина II

Методика формування в молодших школярів умінь розв'язувати задачі певних видів

Одеса
«Фенікс»
2011

ББК 74.262
С 427
УДК 373.3:51

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів
спеціальності „Початкове навчання”
(лист №1.4/18 – Г - 1821 від 23 жовтня 2007 року)*

Рецензенти: доктор психологічних наук, професор, чл.- кор. АПН України,
завідувач лабораторії методології і теорії психології Інституту
психології імені Г.С. Костюка АПН України
Балл Г.О.
доктор педагогічних наук, завідувач кафедри початкової освіти,
директор інституту Психолого-педагогічної освіти та мистецтв
Бердянського державного педагогічного університету
Коваль Л.В.
кандидат педагогічних наук, завідувач кафедри методики
викладання природничо-математичних дисциплін ООІУВ
Папач О.В.

Скворцова С.О.

Методика навчання розв’язування сюжетних задач у початковій школі: Навчально-методичний посібник для студентів за спеціальністю 6.010100 «Початкове навчання». – Частина ІІ – Методика формування в молодших школярів умінь розв’язувати задачі певних видів. – Одеса : Фенікс, 2011. – 156 с.
ISBN 966-96048-5-0

У посібнику викладено теоретико-методичні основи навчання учнів розв’язування сюжетних задач. В другій частині подано методику формування в молодших школярів умінь розв’язувати задачі певних видів: задачі на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення, на знаходження невідомих за двома різницями, на подвійне зведення до одиниці, на спільну роботу, на одночасний рух назустріч або у протилежних напрямках, на одночасний рух в одному напрямку (наздогін та з відставанням), задачі на знаходження середнього арифметичного. Усі типові задачі класифіковані на групи за способом розв’язання: задачі, що містять однакову величину для двох випадків, задачі на процеси та задачі на знаходження середнього арифметичного. В межах кожної групи здійснюється дослідження задач через зміну ситуації задачі або зміну числових даних, або зміну шуканого, або інших характеристик, й учні поступово узагальнюють математичну структуру та спосіб розв’язання задач.

Для студентів, вчителів і методистів.

ВСТУП

Методика формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі певних видів будується на поданому нами означенні окремого уміння через комплекс умінь нижчого порядку, серед яких основними є: уміння співвідносити дану задачу з раніш вивченими і впізнавати задачу вивченої математичної структури; уміння актуалізувати узагальнений спосіб розв'язування задач даного виду, а потім його реалізувати.

Називання та заучування назв видів задач традиційною методикою не схвалюється. Водночас, самостійне називання виду задачі (навіть своїми словами) спонукає учня розглянути зв'язки між відомими та шуканими величинами, визначити дії, за допомогою яких можна її розв'язати. Цей підхід підтверджується результатами дослідження З. І. Калмикової та В. Л. Ярощука. З. І. Калмикова встановила, якщо вид задачі не запам'ятовується, то для відтворення (пригадування) способу розв'язування задач даного виду потрібно більше часу, і часто у схожих ситуаціях відбувається підміна одного способу іншим, який має схожі риси. В. Л. Ярощук дійшов висновку про те, що спочатку з назвою виду пов'язується певна сукупність дій, направлена на розв'язання задачі, потім утворюється асоціація між особливостями умови задачі й назвою виду, а також між особливостями виду і узагальненими прийомами розв'язання.

Щоб співвіднести дану задачу з раніш вивченими і впізнати задачу вивченої математичної структури, а також актуалізувати узагальнений спосіб розв'язування задач цього виду, учень повинен мати знання різноманітних математичних структур „типових" задач та узагальнених способів їх розв'язування. При наявності зазначених знань успішність розв'язання „типових" задач залежить, насамперед, від якості орієнтувальної діяльності школяра. Як було показано вище, якість самої орієнтувальної діяльності визначається якістю подання, схеми тієї дії, яка за цієї схемою потім виконується. Головна характеристика III типу орієнтування полягає в тому, що учням пропонується всебічне вивчення предмета, шляхом його „розчленування„ на складові „одиниці" і визначаються закони їх сполучення, що становить основи складу предмету, а різні види сполучень одиниць – його варіанти. Пошук ООД III типу йде за методом системно-структурного аналізу запропонованим З. О. Решетовою. Метою системно-структурного аналізу є багаторівневе дослідження задач заради визначення істотних ознак задачі та їх узагальнення. Цей підхід повністю узгоджується з теорією змістовних узагальнень В. В. Давидова, який розглядає теоретичний шлях узагальнення при розв'язуванні задач як узагальнення через аналіз умови і вимоги, що дозволяє абстрагувати представлені в задачах істотні залежності. Завдяки цьому розв'язання задачі відразу набуває узагальненого значення і переноситься на цілий клас задач. Зазначимо, що методику навчання учнів розв'язування задач певних видів за теорією змістовних узагальнень було розроблено В. Н. Осинською, ми адаптували цю методику з метою її застосування у початковій школі.

Таким чином, **теоретичною основою методики формування у молодших школярів умінь розв'язувати „типові" задачі є теорія змістовних узагальнень В. В. Давидова, її реалізація при навчанні учнів розв'язання „типових" задач, що здійснюється на основі III типу орієнтування за П. Я. Гальперіним, методом системно-структурного аналізу З. О. Решетової.**

1. Методика формування окремих умінь розв'язувати задачі, що містять однакову (сталу) величину

1.1. Задачі на знаходження четвертого пропорційного

Методика формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного передбачає ***дослідження задачі за наступними рівнями***:

- за зміною групи пропорційних величин;
- за зміною числових даних;
- за зміною однакової величини;
- за зміною шуканої величини при певній однаковій величині

при чому кожного разу ми визначаємо вплив зміни, що сталася, на план розв'язування задачі.

А також ми дослідили ці задачі:

- за зміною числових даних задачі з метою застосування іншого способу розв'язування;

Дослідження впливу зазначених змін на математичну структуру та план розв'язування надало можливість узагальнити істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного і узагальнити способи, якими розв'язуються ці задачі: спосіб знаходження однакової величини і спосіб відношень; також ми встановили можливості застосування кожного з них.

Таким чином, *істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного:*

1) *ці задачі містять два випадки;*
2) *ці задачі містять три пропорційні величини;*
3) *одна з величин є однаковою для двох випадків;*
4) *стосовно однієї величини дані два числові значення;*
5) *стосовно іншої величини дано лише одне числове значення, а інше є шуканим.*

Спосіб знаходження однакової величини

1) Першою дією знаходимо значення однакової величини за відомими значеннями двох інших величин стосовно одного з випадків.
2) Другою дією відповідаємо на запитання задачі.

Спосіб відношень

1) Першою дією дізнаємося про числове значення відношення між двома відомими числовими даними однієї з величин. Робимо висновок про числове значення і характер відношення між числовим даним і шуканим, стосовно другої величини.

2) Другою дією відповідаємо на запитання задачі.

Методика формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного реалізується засобом систем навчальних задач з:

- навчання розв'язування задач способом знаходження однакової (сталої) величини;
- навчання розв'язування задач способом відношень [95; 96].

Треба зазначити, що під системою навчальних задач ми розуміємо добірку (ланцюжок) допоміжних задач, дібраних таким чином, щоб їх послідовне розв'язування природно призвело учня до визначення і узагальнення способу розв'язування задачі певного виду.

На етапі **підготовчої роботи** слід актуалізувати знання груп пропорційних величин та взаємозв'язки між пропорційними величинами, уміння визначати в тексті задачі величини, навіть тоді, коли вони задані неявно, виходячи з найменування числових даних. Актуалізація зазначених знань і умінь здійснюється під час розв'язування простих задач з пропорційними величинами.

1.1.1.Ознайомлення з способом знаходження однакової величини

Задачі на знаходження четвертого пропорційного можна ввести на основі розв'язання двох послідовних простих задач з пропорційними величинами і поєднання їх в одну складену задачу. Наприклад:

а)Маса 6 однакових гусей складає 30 кг. Яка маса 1 гуски?

б) Маса гуся 5 кг. Яка маса 4 таких самих гусей?

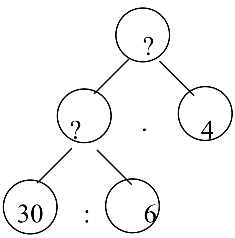
в) Маса 6 однакових гусей складає 30 кг. Яка маса 4 таких самих гусей?

Учні порівнюють складену задачу (*в*) з двома попередніми простими і визначають, що вона включає розглянуті дві прості задачі. Якщо після цього, відразу, учні можуть сформулювати план розв'язування задачі, то записуємо розв'язання. Інакше виконується повний розбір задачі за пам'яткою №3. Наприклад:

- Про що розповідається в цій задачі?
- Які величини містить ця задача? Розгляньте короткий запис цієї задачі.

	Маса 1 гуся (кг)	Кількість гусей (шт..)	Загальна маса Гусей (кг)
I.		6 шт.	30 кг
	?, однакова		
II.		4 шт.	? кг

- За таблицею поясніть числа задачі. Що означає однакова величина. Яке запитання задачі? У відповіді ми отримаємо більше чи менше число за 30, чому?
- Порівняйте цю задачу з попередніми, що ви помітили цікавого?
- Дана задача складається з двох попередніх задач – вона складена.
- Повторіть запитання задачі.
- Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Треба знати два числові значення: 1 – масу 1 гуся, невідомо, та II – кількість гусей, відомо 4.) Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією множення: щоб знайти загальну масу треба масу 1 гуски помножити на кількість гусок).
- Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Не можна, ми не знаємо масу 1 гуся).
- Що сказано в задачі про масу 1 гуся в першому та другому випадках? (Маса 1 гуся і в першому і в другому випадках однакова.) Що це означає? (Можна знайти масу 1 гуся у першому випадку.)
- Що треба знати, щоб знайти масу 1 гуся – однакову величину? (Треба знати два числові значення стосовно першого випадку: 1 – загальну масу гусей, відомо 30 кг, та II – кількість гусей, відомо 6 шт.) Якою арифметичною дією відповімо на запитання ? (Дією ділення: щоб знайти масу 1 гуся, треба загальну масу поділити на кількість).
- Чи можна на це запитання відповісти відразу?



- Розбийте цю задачу на прості, сформулюйте кожну просту задачу.
- Складіть план розв’язування задачі.
- Запишіть розв’язання.
  1) 30 : 6 = 5 (кг) – маса 1 гуся, однакова величина
  2) 5 · 4 = 20 (кг) – загальна маса 4 гусей
- Запишіть відповідь.

- Повернемося до нашого припущення, чи правильно ми припустили, що у відповіді буде число менше за 30?

З метою узагальнення способу розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного та визначення істотних ознак задач цього виду можна запропонувати учням роботу з дослідження таких задач. Наприклад:

Задача № 1. Купили банани і апельсини по однаковій ціні. За 6 кг бананів заплатили 60 грн. Скільки коштує 4 кг апельсинів ?"

Робота над задачею йде за загальним планом. Далі йде робота над задачею після її розв'язання, а саме її дослідження. Учням пропонується в задачі № 1 змінити величини, наприклад це буде загальна маса, маса 1 предмету, кількість предметів. Учні складають задачу, яка має таку саму математичну структуру, що й попередня. З'ясовується, як ця зміна вплине на розв'язання: розв'язання задачі не змінюється, треба лише змінити пояснення до арифметичних дій; запис виразу не змінюється.

Пропонується *змінити числові значення в задачі*. Учні пропонують власні варіанти, а вчитель вибирає з них придатні. Діти впевнюються, що отримали задачу такої самої математичної структури, що й попередні. Досліджується вплив зміни, що сталася, на план розв'язування задачі. Учні доходять висновку, що від зміни величин та зміни числових даних, план розв'язування задачі не змінюється.

На підставі порівняння текстів задач та їх розв'язків, учні встановлюють: в кожній задачі є три величини, при чому одна з них однакова. Невідомим є загальне значення величини. А також, в кожній задачі є два випадки. Ці задачі належать до одного виду – такі задачі називаються – задачі на знаходження четвертого пропорційного. Вони містять чотири числові значення величин, які перебувають у пропорційній залежності, три з них дані, а четверте є шуканим. Першою дією в таких задачах ми дізнаємося про однакову величину (величину однієї одиниці виміру) дією ділення, бо не дізнавшись про неї, ми не зможемо відповісти на запитання задачі. Другою дією в таких задачах ми відповідаємо на запитання задачі, дізнаємося про загальне значення величини дією множення.

Щоб перевірити правильність розв'язання задачі № 1, складаємо і розв'язуємо обернену задачу на знаходження кількості або часу:

Перша обернена задача 6 кг бананів коштують 60 грн. Скільки можна купити кілограмів апельсинів на 40 грн., якщо ціна бананів і апельсинів однакова?

Учні вносять зміни у розв'язання прямої задачі, і отримують розв'язання оберненої задачі. Порівнявши короткі записи прямої та оберненої задач, діти визначають спільні ознаки: в обох задачах є два випадки, обидві задачі містять три пропорційні величини, одна з яких однакова для обох випадків; стосовно першого випадку дані значення двох величин, а стосовно другого випадку – лише однієї, а значення другої величини є шуканим. Таким чином, обидві задачі містять чотири пропорційні числа, одне з яких є шуканим – ці задачі називаються задачами на знаходження четвертого пропорційного. Відрізняються вони тим, що в першій задачі, шуканим було значення величини, яка є загальною – вона знаходиться дією множення; а в другій задачі шуканим є значення величини, яка знаходиться дією ділення. Вчитель повідомляє, що цю відмінність і покладено в основу класифікації таких задач: задачі, в яких треба знайти значення загальної величини дією множення – це задачі I-го підвиду; а задачі, в яких шукана величина знаходиться дією ділення, – це задачі II-го підвиду. Отже, ми не лише перевірили правильність розв'язання першої задачі, а й отримали задачу другого підвиду.

Далі порівнюються розв'язання прямої і оберненої задач, визначається спільне: першою дією знаходимо значення однакової величини, другою дією відповідаємо на запитання задачі.

Складаємо і розв'язуємо ще дві обернені задачі.

Друга обернена задача: Скільки коштує 6 кг бананів, якщо за 4 кг апельсинів заплатили 40 грн.? (Банани і апельсини продаються по однаковій ціні).

Дослідження йде засобом *порівняння другої оберненої задачі з прямою*: в обох задачах шуканим є значення загальної величини, але шуканими є різні значення загальної величини – в прямій задачі ми шукали загальне значення в другому випадку, а в другій оберненій задачі – загальне значення в першому випадку. Але ці задачі розв'язуються за одним й тим самим планом та одними й тими самими арифметичними діями, але в прямій задачі однакову величину знаходять за даними першого випадку, а в другій оберненій – за двома числовими значеннями величин стосовно другого випадку.

Третя обернена задача: Скільки кілограмів бананів можна купити на 60 грн., якщо на 40 грн. можна купити 4 кг апельсинів? (Ціна бананів і апельсинів однакова).

Порівнюємо першу та третю обернені задачі. В цих задачах шуканою є кількість, але стосовно різних випадків. Щодо розв'язання, то в них однаковий план розв'язування та арифметичні дії, але однакову величину в першій оберненій задачі знаходили за даними двома величинами першого випадку, а в третій – другого.

Порівнюємо третю та другу обернені задачі. В кожній задачі є три пропорційні величини, два випадки, стосовно одного випадку дані два числові значення, стосовно другого – лише одне, інше є шуканим. Порівнюємо розв'язання: в них однакові перші дії; однакова величина в обох задачах знаходиться за двома даними, які стосуються другого випадку; вони відрізняються другими діями – в третій оберненій задачі остання дія множення, тому що знаходять загальну величину, а в четвертій – дія ділення, тому що знаходять кількість.

Узагальнюємо математичні структури цих задач та спосіб їх розв'язування (мал. 56).

Істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є величина однієї одиниці:

1) ці задачі містять два випадки;
2) ці задачі містять три пропорційні величини;
3) величина однієї одиниці виміру або лічби є однаковою для двох випадків;
4) стосовно однієї величини дані два числові значення;
5) стосовно іншої величини дано лише одне числове значення, а інше є шуканим.

Подальше дослідження задачі може здійснюватися *засобом зміни однакової величини*. В задачі № 1 змінюємо однакову величину однієї одиниці виміру або лічби, однаковою стає значення загальної величини для обох випадків:

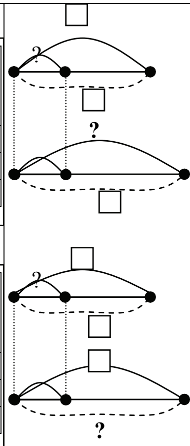
Задача 2. Вартість 6 кг бананів і 4 кг апельсинів однакова. Ціна кілограму бананів 10 грн. Яка ціна кілограму апельсинів?

I підвид

	Загальна	 1	$\frac{\textit{кількість}}{\textit{час}}$
I	□		□
		Однак.	
II	?		□

II підвид

	Загальна	 1	$\frac{\textit{кількість}}{\textit{час}}$
I	□		□
		Однак.	
II	□		?



План розв’язування

1) значення однакової величини – величини однієї одиниці, за двома відомими величинами одного з випадків, дією ділення;

2) шукане значення $\frac{\textit{загальної..величини}}{\textit{кількості}}$, відповімо на запитання задачі, дією $\frac{\textit{множення}}{\textit{ділення}}$.

Мал. 56. Опорні схеми та план розв’язування задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є величина однієї одиниці

Учні виконують зміни у короткому записі задачі №1, формулюють задачу на знаходження величини однієї одиниці в другому випадку і роблять прикидку числового значення шуканої величини (ціна апельсинів буде більшою за 2 грн., тому що апельсинів купили менше, ніж бананів і сплатили грошей стільки ж, скільки й за банани. Ціна і кількість змінюються в обернених напрямках при сталій вартості!). Проаналізувавши математичну структуру одержаної задачі, учні доходять висновку, що вона має усі істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, тому це задача на знаходження четвертого пропорційного. Але, на відміну від попередніх задач, в цій задачі однаковою є загальна величина. Школярі згадують узагальнений спосіб розв’язування таких задач:

1) Першою дією дізнаємося про значення однакової величини, дією ділення.

2) Другою дією відповімо на запитання задачі, дією $\frac{\textit{множення}}{\textit{ділення}}$.

Далі досліджуємо, як ця зміна вплине на розв’язання задачі. В попередніх задачах однакова величина була величиною однієї одиниці, тому її знаходили дією ділення. В цій задачі однакова величина – загальна величина, а її знаходять дією множення. Тому в цій задачі першою дією дізнаємося про значення однакової величини дією множення, а другою дією відповімо на запитання задачі, дією ділення.

Дослідження задачі №2 здійснюється *засобом зміни групи пропорційних величин*, що містяться в задачі або/ та числових даних. Діти доходять висновку, що від зміни величин та зміни числових даних план розв'язування задачі не змінюється: першою дією знаходимо значення однакової величини – загальної величини дією множення, другою дією відповідаємо на запитання задачі, дією ділення.

Складаємо і розв'язуємо обернені задачі:

Перша обернена задача: Скільки можна купити кілограмів апельсинів на ту саму суму, яку треба заплатити за 6 кг бананів по 10 гривень за кіло, якщо ціна апельсинів 15 гривень?

Робимо прикидку числового значення шуканої величини: кількість апельсинів менша на 6 кг, тому що ціна апельсинів більша при одній й тій самій вартості. Ціна і кількість при сталій вартості змінюються в обернених напрямках. Учні застосовують узагальнений план розв'язування задачі, записують розв'язання і з'ясовують, чи правильною була прикидка результату, що очікувався.

Далі дослідження йде засобом *порівняння прямої та оберненої задач*. Це обидві задачі на знаходження четвертого пропорційного: в обох є три пропорційні величини, два випадки, загальна величина є однаковою для обох випадків; для першого випадку дано два числові значення, а для другого – одне, інше є шуканим. Але в прямій задачі шуканим є значення величини однієї одиниці, а в оберненій – кількості або часу.

Порівнюючи розв'язання, діти впевнюються, що в них однакова перша дія, тому що однакову величину знаходить за даними відносно першого випадку; відрізняються вони другими діями – в двох задачах останні дії ділення, але в прямій задачі ми шукали величину однієї одиниці, а в оберненій – кількість або час.

Друга обернена задача: Скільки можна купити кілограмів бананів на ту саму суму, яку треба заплатити за 4 кг апельсинів по 15 гривень за кіло, якщо ціна бананів 10 гривень?

Порівнюємо першу та другу обернені задачі: в них спільною є, зокрема, шукана кількість, але в першій – для другого випадку, а в другій – для першого випадку. Відповідно відрізняються розв'язання: в першій оберненій задачі значення однакової величини знаходять дією множення за даними першого випадку, а в другій оберненій задачі – за даними другого випадку.

Третя обернена задача: Вартість 6 кг бананів і 4 кг апельсинів однакова. Ціна кілограму апельсинів 15 грн. Яка ціна кілограму бананів?

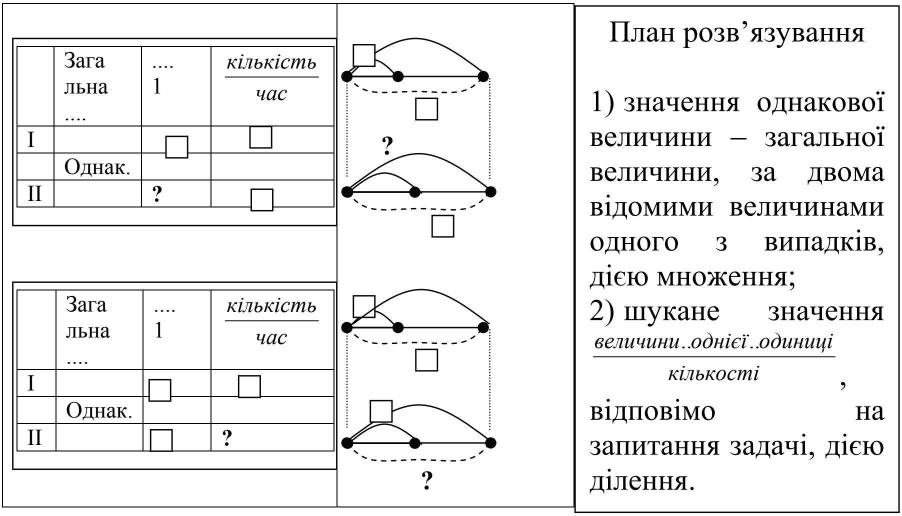
Порівнюємо третю обернену задачу з прямою: це задачі на знаходження четвертого пропорційного, в обох однаковою є загальна величина, в обох шуканою є величина однієї одиниці, але в прямій задачі стосовно другого випадку, а в третій оберненій задачі – стосовно першого випадку. Розв'язання відрізняються: хоча перша дія множення, але в прямій задачі однакову величину знаходять за двома числовими даними першого випадку, а в цій – за двома числовими даними, що відносяться до другого випадку. В обох задачах останні дії ділення, тому що знаходять величину однієї одиниці.

Порівнюємо розв'язання другої та третьої обернених задач. В них однакові перші дії, тому що однакова величина знаходиться за двома числовими даними, які стосуються першого випадку. Відрізняються вони останніми діями, хоча останні дії в обох задачах ділення: в другій оберненій задачі ми знаходимо кількість або час, а в третій – величину однієї одиниці.

Узагальнюємо істотні ознаки математичних структур та план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є загальна величина (мал. 57).

Істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є значення загальної величини:

1) ці задачі містять два випадки;
2) ці задачі містять три пропорційні величини;
3) загальна величина є однаковою для двох випадків;
4) стосовно однієї величини дані два числові значення;
5) стосовно іншої величини дано лише одне числове значення, а друге є шуканим.



Мал. 57. Опорні схеми та план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є загальна величина

Однаковою величиною може бути значення величини кількості або часу для обох випадків. Тому, **в** задачі № 1 *змінюється однакова величина* – однаковою величиною стає кількість.

Задача 3. Купили однакову кількість кілограмів бананів і апельсинів. За банани заплатили 40 грн. Скільки коштують апельсини, якщо ціна бананів 10 грн., а ціна апельсинів 15 грн.?

Діти порівнюють задачу №3 з попередніми, і встановлюють, що вона має ті самі істотні ознаки, що й задачі на знаходження четвертого пропорційного, але в ній однакова величина – кількість. Робимо прикидку очікуваного результату і застосовуємо узагальнений спосіб розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного.

З'ясовуємо, як ця зміна вплинула на розв'язання задачі. В задачі № 1 однакова величина була величиною однієї одиниці, тому її знаходили дією ділення на рівні частини. В цій задачі однакова величина – кількість або час, її теж знаходять дією ділення, але це інший вид ділення – ділення на вміщення. Тому в цій задачі першою дією дізнаємося про значення однакової величини (кількості або часу) дією ділення, а другою дією відповімо на запитання задачі, дізнаємося про значення загальної величини в другому випадку, дією множення.

Наступне дослідження задачі №3 здійснюється засобом *зміни групи пропорційних величин та числових даних задачі*: від зміни величин та зміни числових даних, план розв'язування задачі не змінюється.

Дослідження задачі №3 може бути продовжено засобом зміни шуканого задачі, тому складаємо і розв'язуємо обернені задачі:

Перша обернена задача: Купили однакову кількість кілограмів бананів і апельсинів. За банани заплатили 40 грн., а за апельсини 60 грн. Яка ціна апельсинів, якщо ціна бананів 10 грн.?

Робимо прикидку очікуваного результату та застосовуємо узагальнений план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного. Порівнюємо розв'язання прямої та оберненої задач: в них однакова перша дія, тому що однакову величину знаходять по даним відносно першого випадку і в прямій, і в оберненій задачі. Відрізняються розв'язання другими діями: в прямій задачі це дія множення, тому що знаходять значення загальної величини, а в цій задачі – дія ділення, тому що знаходять величину однієї одиниці.

Друга обернена задача: Купили однакову кількість бананів і апельсинів. За банани заплатили 40 грн., а за апельсини 60 грн. Яка ціна бананів, якщо ціна апельсинів 15 грн.?

Після розв'язання порівнюємо першу та другу обернені задачі. Спільним є те, що в обох задачах при наявності усіх істотних ознак задач на знаходження четвертого пропорційного, шуканою є величина однієї одиниці, але в першій – шуканою є величина однієї одиниці в другому випадку, а в цій оберненій задачі – у першому випадку. Розв'язання містить одні й ті самі арифметичні дії, але в першій оберненій задач про однакову величину дізнаються за даними, які стосуються першого випадку, а в другій оберненій задачі – за даними другого випадку.

Третя обернена задача: Купили однакову кількість бананів і апельсинів по ціні 10 грн. та 15 грн. відповідно. Вартість апельсинів складає 60 грн. Знайти вартість бананів.

Порівнюємо третю обернену задачу з прямою задачею. Крім спільних істотних ознак задач на знаходження четвертого пропорційного, в цих задачах шуканим є значення загальної величини, але в прямій – у другому випадку, а в третій оберненій – у першому випадку. Розв’язання відрізняються: хоча перша дія множення, але в прямій задачі однакову величину знаходять за двома числовими даними, які стосуються першого випадку, а в цій – за двома числовими даними, що стосуються другого випадку. В розв’язанні обох задач останніми є дії множення.

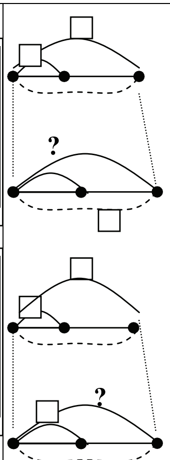
Порівнявши третю та другу обернені задачі узагальнюємо математичні структури таких задач та плани розв’язування (мал. 58).

Таким чином, можна сформулювати *істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є величина кількості або часу*:

1) ці задачі містять два випадки;
1) ці задачі містять три пропорційні величини;
2) величина кількості або часу є однаковою для двох випадків;
3) стосовно однієї величини дані два числові значення;
4) стосовно іншої величини дано лише одне числове значення, а інше є шуканим.

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	□	
			Однак.
II	□	?	

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	□	
			Однак.
II	?	□	



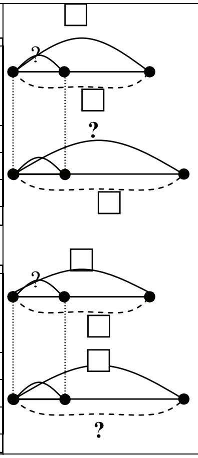
План розв’язування
1) значення однакової величини – кількості або часу, за двома відомими величинами одного з випадків, дією ділення;
2) шукане значення $\frac{\textit{величини..однієї..одиниці}}{\textit{загальної..величини}}$, відповімо на запитання задачі, дією $\frac{\textit{ділення}}{\textit{множення}}$.

Мал. 58. Опорна схема та план розв’язування задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є величина кількості або часу

Можна узагальнити математичні структури усіх розглянутих задач на знаходження четвертого пропорційного та спосіб їх розв’язування (мал. 59, 60).

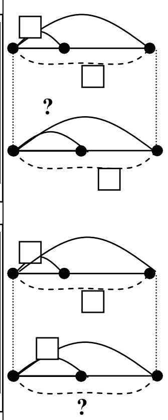
	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□		□
		Однак.	
II	?		□

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□		□
		Однак.	
II	□		?



	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I		□	□
	Однак.		
II		?	□

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I		□	□
	Однак.		
II		□	?

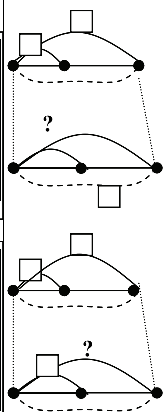


План розв’язування

1) значення однакової величини, за двома відомими величинами одного з випадків;
2) відповімо на запитання задачі.

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	□	
			Однак.
II	□	?	

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	□	
			Однак.
II	?	□	



Мал. 59. Опорна схема та план розв’язування задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є величина кількості або часу

Істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного:

1) ці задачі містять два випадки;
2) ці задачі містять три пропорційні величини;
3) одна з величин є однаковою для двох випадків;
4) стосовно однієї величини дані два числові значення;

стосовно іншої величини дано лише одне числове значення, а інше є шуканим.

1.1.2. Ознайомлення зі способом відношень

Учням пропонується задача на знаходження четвертого пропорційного на знаходження значення загальної величини, в якій однаковою є величина однієї одиниці, але яку не можна розв'язати способом знаходження однакової (сталої) величини, тому що не можна виконати ділення націло даних числових значень. Наприклад:

Задача. З 10 м тканини кравчиня пошила 3 скатертини. Скільки метрів тканини потрібно на 6 таких скатертин ?

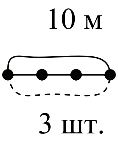
Задачі на знаходження четвертого пропорційного

I	*а*		*с*
		однакова	
II	*в*		р

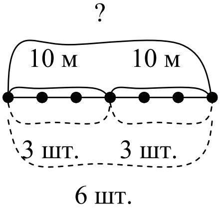
Мал. 60. Опорна схема задач на знаходження четвертого пропорційного або *а* або *в* або *с* або *к* або *р* – шукане число.

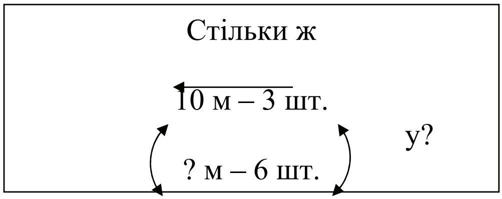
Учні „впізнають" задачу на знаходження четвертого пропорційного та згадують узагальнений план розв'язування, після чого пробують його застосувати... Виникає проблемна ситуація, яку допомагає розв'язати вчитель, пропонуючи зробити прикидку очікуваного результату, але не просто вказати шукане більше чи менше число за дане, а встановити у скільки разів воно більше чи менше за дане. Якщо учні не можуть зробити цей висновок, то вчитель радить виконати схематичний рисунок до задачі.

Позначивши кожну скатертину за одиничний відрізок, відраховуємо відрізки і підписуємо зверху, що на них потрібно 10 м. Нижче креслимо відрізок, який містить 6 одиничних відрізків, на ньому відраховуємо 3 відрізки і підписуємо, що на них потрібно 10 м, ще відраховуємо 3 відрізки і підписуємо 10 м.

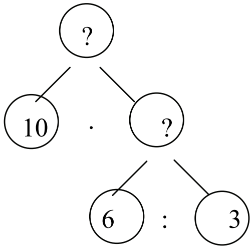


Шукане число буде у стільки разів більше, ніж 10, у скільки разів більше 6 шт., ніж 3 шт.





- Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Треба знати два числові значення: I – скільки метрів тканини використали у першому випадку, відомо 10, та II – у скільки разів більше використали у другому випадку, ніж у першому, невідомо).
- Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією множення). Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Ні. Ми не знаємо у скільки разів більше використали тканини у другому випадку). Що ми про це можемо сказати? (Тканини використали у стільки разів більше, у скільки разів більше пошили скатертин у другому випадку).
- Що треба знати, щоб дізнатися у скільки разів більше пошили скатертин у другому випадку, ніж у першому? (Треба знати два числові значення: 1 скільки пошили скатертин у другому випадку, відомо 6, та скільки пошили скатертин у першому випадку, відомо 3).
- Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією ділення).
- Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Так, нам відомі обидва числові значення. Ми від запитання задачі перейшли до числових даних. Аналіз закінчено).



Склади план розв’язання задачі. (Першою дією дізнаємось у скільки разів більше пошили скатертин у другому випадку, ніж у першому, дією ділення. Робимо висновок: у стільки ж разів більше витратили тканин и у другому випадку, ніж у першому.

Другою дією дізнаємося скільки метрів тканини витратили у другому випадку, дією множення).

- Запиши розв'язання задачі по діях з поясненням:

1) 6 : 3 = 2 у стільки разів більше пошили скатертин, тому у стільки ж разів більше витратили тканини

2) 10 · 2 = 20 (м) тканини витратили на 6 скатертин

Або 10 · (6 : 3) = 20 (м)

Відповідь: 20 м тканини витратили на 6 скатертин.

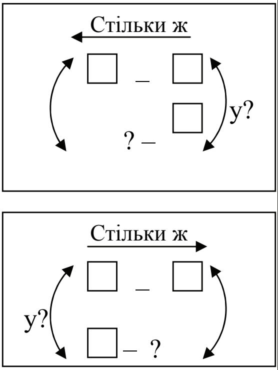
Таким чином, в основі розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного цим способом є наступні міркування: *шукане число буде у стільки разів* $\frac{\textit{більше}}{\textit{менше}}$ *за дане числове значення цієї ж величини, у скільки разів відповідне йому числове значення іншої величини* $\frac{\textit{більше}}{\textit{менше}}$ *за друге значення цієї ж величини.*

Вчитель повідомляє, що цей спосіб розв'язування називається способом *відношень*. В математиці частку двох чисел інакше називають відношенням. Для відповіді на запитання задачі ми знаходили відношення двох даних значень певної величини і робили висновок, що у такому ж відношенні знаходиться шукане число з даним значенням цієї ж величини. Спосіб відношень застосовується в тому випадку, коли не можна знайти значення однакової величини, або коли можна дізнатися, як відносяться одне до одного два числові дані однієї величини.

З метою подальшого усвідомлення умов при яких застосовується спосіб відношень, учні змінюють числове значення у задачі №1, яка розв'язується способом знаходження однакової величини, з тим щоб можна було б застосувати спосіб відношень.

З метою узагальнення способу розв'язування *змінюємо величини задачі та числові дані задачі* і досліджуємо вплив цих змін на розв'язання задачі. Ці зміни не впливають на математичну структуру задачі: усі задачі – на знаходження четвертого пропорційного; ці зміни не впливають на план розв'язування задачі: першою дією дізнаємося про відношення двох відомих чисел, які є значеннями однієї величини, і робимо висновок, що в такому самому відношенні знаходиться й інша пара числових значень другої величини; другою дією відповідаємо на запитання задачі.

Після складання обернених задач радимо учням з'ясувати, як *зміна шуканого задачі вплине на її розв'язання*, і лише потім виконати розв'язання. Порівнюємо відповідну обернену задачу з прямою та відповідні дві обернені задачі між собою: в задачах, у яких шуканими є числові значення однієї й тієї самої величини, але у різних випадках, звертаємо увагу на різний характер відношень – „у стільки разів більше", „у стільки разів менше". Порівнявши усі ці задачі, узагальнюємо план розв'язування (мал. 61).



План розв'язування

Спосіб відношень

1) Дізнатися у скільки разів одне з даних чисел $\frac{\textit{більше}}{\textit{менше}}$ другого числа, відносно однієї величини. Зробити висновок, що у стільки ж разів шукане число $\frac{\textit{більше}}{\textit{менше}}$ за дане значення іншої величини.
2) Відповісти на запитання задачі.

Мал. 61. Опорна схема та план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного. Спосіб відношень

Далі учням пропонується *порівняти два способи* розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного. Учні згадують, як вони розв'язували задачу № 1 та обернені до неї задачі першим способом, і встановлюють, що „ключем" до розв'язання було знаходження однакової величини, а у другому способі – „ключем" є числове значення і характер відношення двох відомих числових даних однієї з величин і висновок про таке саме відношення шуканого числа та відомого числового значення. Для знаходження однакової величини ми користувалися двома числовими даними різних величин стосовно одного з випадків, а для знаходження числового значення відношення ми користувалися двома числовими даними однієї й тієї самої величини.

Дослідження можливості застосування способу відношень для розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, у яких однаковим є значення загальної величини або значення величини кількості або часу, відбувається засобом зміни числових даних відповідно у задачах №2 та №3. Робота йде аналогічно. Діти доходять висновку, що зміна однакової величини не впливає на план розв'язування задачі на знаходження четвертого пропорційного способом відношень.

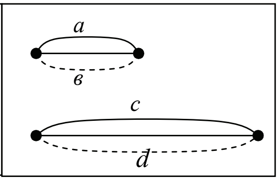
Далі можна узагальнити можливі способи розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного. Результати узагальнення подані на малюнку 62.

Учні *розв'язують задачі двома способами* і *досліджують умови можливості застосовування* кожного з них. Спосіб знаходження однакової величини не можна застосувати у тих випадках, коли неможливо здійснити ділення націло числових даних двох величин стосовно одного з випадків. Спосіб відношень не можна застосувати у тих випадках, коли неможливо здійснити ділення націло двох числових даних однієї величини.

На ***етапі закріплення*** уміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного учні аналізують математичну структуру задачі, впізнають її, згадують узагальнений план їх розв'язування і застосовують його. Значну увагу на цьому етапі слід приділити розв'язанню задач двома способами: способом знаходження однакової величини та способом відношень; складанню і розв'язуванню обернених задач – перетворенню задачі одного підвиду у задачу другого підвиду. На даному етапі пропонуємо учням задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою величиною є загальна величина або кількість чи час.

Задачі на знаходження четвертого пропорційного

а – в
c - d



де шуканим є або *а,* або *в,* або *с,* або *d*.

План розв'язування **Спосіб знаходження однакової величини**	План розв'язування **Спосіб відношень**
1) Першою дією знаходимо значення однакової величини за відомими значеннями двох величин стосовно одного з випадків. 2) Другою дією відповідаємо на запитання задачі.	1) Першою дією дізнаємося про числове значення відношення між двома відомими числовими даними одної з величин. Робимо висновок про числове значення і характер відношення між шуканим і числовим даним, стосовно другої величини. 2) Другою дією відповідаємо на запитання задачі

Мал. 62. Опорна схема та способи розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного

1.2. Задачі на пропорційне ділення

У методиці формування окремих вмінь розв'язувати задачі на пропорційне ділення реалізовано наступні ***аспекти***:

1. Для усвідомлення учнями зв'язку задач на пропорційне ділення і задач на знаходження четвертого пропорційного ми перетворюємо задачу на знаходження четвертого пропорційного (однакова величина – величина однієї одиниці) у задачу на пропорційне ділення, при чому спочатку отримуємо задачу першого підвиду, а потім другого.
2. Ми порівнюємо задач на знаходження четвертого пропорційного і на пропорційне ділення, визначаючи спільні та відмітні істотні ознаки.
3. Дослідження задачі йде шляхом зміни однакової величини і її впливу на план розв'язування задач на пропорційне ділення.
4. Дослідження задачі на пропорційне ділення здійснювалося через зміну шуканого, перетворенням задачі одного підвиду у задачу другого підвиду.
5. Працюючи над кожною задачею на пропорційне ділення досліджується вплив зміни величин задачі на її розв'язання.
6. Досліджується вплив зміни числових значень задачі на план її розв'язування.

Такий всебічний аналіз призвів до узагальнення *істотних ознак задач на пропорційне ділення* в яких однаковою є величина однієї одиниці або кількості чи часу:

1) ці задачі містять два випадки;
2) ці задачі містять три пропорційні величини;
3) одна з величин є однаковою для двох випадків;
4) стосовно однієї величини дані два числові значення;
5) стосовно іншої величини дано значення суми, а значення цієї величини для кожного випадку є шуканими.

Дослідження задачі на пропорційне ділення надало нам можливість узагальнити план розв'язування задач цього виду арифметичним способом – способом знаходження однакової величини:

Спосіб знаходження однакової величини

1) Першою дією знаходимо значення другої суми (для величини стосовно якої дані числові значення для обох випадків).

2) Другою дією знаходимо значення однакової величини за двома сумами.

3) Третьою дією відповідаємо на перше запитання задачі.

4) Четвертою дією відповідаємо на друге запитання задачі.

1.2.1. *Підготовча робота*

Мета підготовчої роботи полягає в актуалізації знань, умінь та навичок, які необхідні при розв'язанні задач на пропорційне ділення, а саме:

- знання взаємозв'язку між основними групами величин, які знаходяться у пропорційній залежності;
- уміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного способом знаходження однакової величини: аналізуючи умову задачі виділяти однакову величину; складати короткий запис задачі в формі таблиці; при проведенні пошуку розв'язування задачі усвідомити наступне – для відповіді на запитання задачі треба знайти значення однакової величини, про яке можна дізнатися за даними числовими значеннями двох величин стосовно іншого випадку.

Всі перелічені знання та уміння актуалізуються під час розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного способом знаходження однакової величини [101; 102].

Розв'язування задач нового виду – на пропорційне ділення, базується на чіткому умінні розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного, тому що обидва види задач розв'язуються способом знаходження однакової величини. Але в задачах на знаходження четвертого пропорційного однакову величину знаходимо за двома відомими величинами одного із випадків, про які йде мова в задачі. У задачах на пропорційне ділення нам не дані числові значення обох величин, відповідно якогось випадку, за якими можна дізнатися про однакову величину. У цих задачах однакову величину ми знаходимо за значеннями сум двох інших величин (за двома сумами), при чому значення першої суми вже дано за умовою задачі, а другу суму слід знайти за даними значеннями кожного з випадків, про які йде мова в задачі. Тому на етапі підготовки учням пропонують спеціальні завдання на знаходження однакової величини за двома сумарними значеннями двох інших величин. Наприклад:

1. За два дні продали 15 платтів, за них всього отримали 45 гривень. Знайти ціну плаття.
2. В одному класі 12 учнів, а в другому 15 учнів. Всього в учнів обох класів 135 підручників. Скільки підручників у одного учня, якщо кожен учень цих класів має однакову кількість підручників?

1.2.2. *Ознайомлення з задачами на пропорційне ділення*

Учні розв'язують задачу на знаходження четвертого пропорційного на знаходження загальної величини, в якій однаковою є величина однієї одиниці, способом знаходження однакової (сталої) величини.

Задача № 1. Першого дня на базу привезли 2 вагони вугілля, маса якого 38 т. Другого дня привезли 3 таких самих вагони вугілля. Скільки вугілля привезли другого дня?

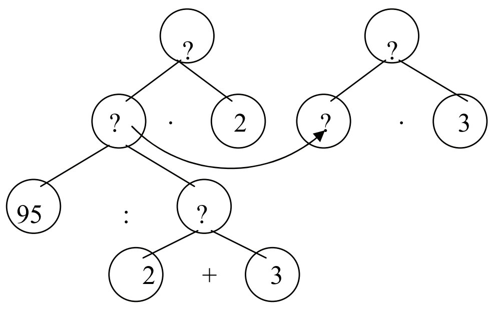
Після розв'язання цієї задач вчитель пропонує знайти сумарне значення загальної величини і включити його в задачу, при цьому змінити вимогу - знайти значення загальної величини для кожного з двох випадків. Короткий запис задачі на знаходження четвертого пропорційного перетворюється у короткий запис нової задачі. За коротким записом складається задача на пропорційне ділення № 2. Однаковою є величина однієї одиниці.

Задача № 2. За два дні на базу привезли 95т вугілля. В перший день привезли 2 вагони, а в другий день – 3 вагони. Скільки тон вугілля привезли кожного дня, якщо маса 1 вагона була однаковою?

Вчитель повідомляє, що задача, яку складено – це задача нового виду, на пропорційне ділення. Він зауважує, що в цих задачах запитання містить слово “кожен”, і тому воно розпадається на два запитання. А якщо в задачі два запитання, тому одержимо і дві відповіді. Подальша робота над задачею йде за загальним планом.

- За коротким записом поясни числа задачі. Що позначає однакова величина? (Число 2 позначає кількість вагонів з вугіллям, які було привезено першого дня. Число 3 позначає кількість вагонів з вугіллям, які було привезено другого дня. Число 95 позначає загальну масу вугілля, яке привезли за обидва дні. Однакова величина позначає, що маса 1 вагона вугілля однакова і в перший і в другий день, тобто кожен вагон вміщує однакову кількість тон вугілля.)
- Яке запитання задачі? (Скільки тонн вугілля привезли кожного дня?)

- На які два запитання воно розпадається? (1.Скільки тон вугілля привезли першого дня? 2.Скільки тон вугілля привезли другого дня?)
- Чи можливо відразу відповісти на два запитання? (Ні, неможливо).
- Тому відповімо спочатку на 1 запитання, а потім відповімо на 2 запитання.
- Зробимо припущення щодо числових значень шуканої величини. При однаковій масі 1 вагону, в перший день привезли меншу кількість, ніж у другий день, тому й загальна маса вугілля першого дня буде більшою загальної маси вугілля, що привезли у другий день. При однаковій масі одного вагону загальна маса і кількість змінюються в одному напрямку.
- Подумай, що достатньо знати, щоб відповісти на перше запитання задачі: ”Скільки тон вугілля привезли на базу першого дня?” (Треба знати два числових значення: 1 – масу 1 вагона (невідомо) та ІІ –скільки вагонів привезли першого дня (2)).
- Якою арифметичною дією відповімо на 1-ше запитання задачі? (Дією множення, тому що, щоб знайти загальну масу треба масу 1 вагона помножити на кількість вагонів).
- Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Ні, не можна. Тому що ми не знаємо однакову величину - масу 1 вагона).
- Що потрібно знати ,щоб знайти однакову величину – масу одного вагона? (Треба знати два числових значення: 1 – загальну масу вугілля, яку привезли за обидва дня (95т) та ІІ – загальне значення кількості вагонів (невідомо)).
- Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Відповімо дією ділення, тому що, щоб знайти масу одного вагона треба загальну масу розділити на загальну кількість вагонів).
- Чи можна відповісти на це запитання відразу? (Ні, не можна, тому що ми не знаємо загальне значення кількості вагонів).



- Що потрібно знати, щоб знайти загальне значення кількості вагонів? (Треба знати два числових значення: 1 – кількість вагонів, що привезли першого дня (2) та ІІ – кількість вагонів, що привезли другого дня (3)).

- Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Відповімо дією додавання).

- Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Можна, тому що нам відомі обидва числові значення).

- Чи на всі запитання задачі ми відповіли? Що достатньо знати, щоб відповісти на друге запитання задачі? (Достатньо знати два числових значення: 1 – масу одного вагона (ми її знайдемо, коли будемо відповідати на перше запитання задачі) та II – кількість вагонів, які привезли другого дня (3)).

- Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією множення).

- Складіть план розв’язування задачі. (Першою дією ми дізнаємося про загальну кількість вагонів з вугіллям, що було привезено за два дні. Другою дією ми дізнаємося про значення однакової величини, тобто про масу вугілля в 1-му вагоні. Третьою дією ми дізнаємося про масу вугілля, яку було привезено першого дня. Четвертою дією ми дізнаємося про масу вугілля, що було привезено другого дня).

1) 2 + 3= 5 (ваг.) всього привезли за два дні.
2) 95 : 5= 19 (т) маса 1 вагона.
3) 19 · 2= 38 (т) привезли в 1 день.
4) 19 · 3= 57 (т) привезли у 2 день.

Після розв’язання задачі перевіряємо правильність зробленого припущення. Учні підтверджують, що в перший день привезли 38 т вугілля, що менше, ніж 57 т вугілля, яке привезли у другий день. Відповідь: 38 т вугілля привезли першого дня, 57 т вугілля привезли другого дня”.

Перевірка розв’язання здійснюється засобом додавання знайдених числових значень і порівняння отриманого числа з даним числовим значенням суми.

Далі *порівнюємо задачі на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення* з метою дослідження впливу зміни умови задачі на її розв’язання. Задачу на пропорційне ділення ми отримали засобом перетворення задачі на знаходження четвертого пропорційного. В задачі на знаходження четвертого пропорційного ми виконали наступні зміни: шуканими стали два числові значення однієї величини (загальної величини), але ми задали їх суму.

Таким чином, припускаємо, що *істотні ознаки* задач на пропорційне ділення наступні:

1) три пропорційні величини.

2) два випадки.

3) одна з величин є однаковою (у даному випадку величина однієї одиниці) для обох випадків.

4) стосовно однієї величини (у даній задачі – кількості або часу) дано два числові значення для обох випадків.

5) стосовно іншої величини (у даній задачі – загальної величини) два числові значення є шуканими, але дано їх суму.

З'ясовуємо як *зміна умови вплинула на розв'язання задачі*? При розв'язанні задач на пропорційне ділення ми не можемо однакову величину знаходити за двома відомими величинами одного з випадків, однакову величину ми знаходимо за двома сумарними значеннями двох величин. Таким чином, зміна умови задачі вплинула на спосіб знаходження однакової величини.

Результати узагальнення математичних структур та планів розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення подано на малюнку 63.

Визначаємо спільне у розв'язанні задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення: для розв'язання обох задач треба знайти значення однакової величини.

Способи знаходження однакової величини:

1) за двома числовими значеннями двох величин одного з випадків;

2) за двома сумарними значеннями двох величин.

Наступне дослідження задачі на пропорційне ділення здійснюється за допомогою *зміни величин або числових даних* у задачі № 2 і дослідження впливу цих змін на розв'язання задачі. Робота йде аналогічно, як при навчанні розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного. Учні дістають висновку, що зміна величин у задачі або зміна числових даних не вплинула на математичну структуру задачі – вона лишилася тією самою, щодо розв'язання задачі, то залишилися ті самі арифметичні дії та їх порядок, тобто не змінився план розв'язування задачі.

Таким чином, проведена робота по дослідженню задачі підтвердила наявність визначених істотних ознак задачі на пропорційне ділення, які були припущені при співставленні задачі на пропорційне ділення та задачі на знаходження четвертого пропорційного. Крім, того зміна величин або числових даних задачі не вплинула на план розв'язування, він лишився тим самим.

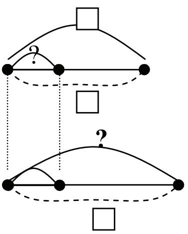
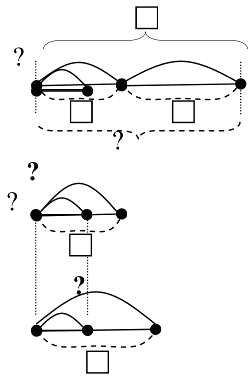
Подальше дослідження задачі здійснюється за допомогою *зміни шуканих задачі*. В задачі № 1 на знаходження четвертого пропорційного відбуваються наступні зміни: значення кількості або часу для обох випадків становляться шуканими, але дано їх суму; значення загальної величини відомі для обох випадків. Ці зміни виконуються у короткому записі задачі і учні складають задачу за коротким записом.

Задачі на знаходження четвертого пропорційного

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□		□
		Однак.	
II	?		□

Задачі на пропорційне ділення

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?		□
	□	Однак.	
II	?		□

	
План розв'язування Спосіб знаходження однакової величини 1) Значення однакової величини – величини однієї одиниці за двома числовими значеннями одного з випадків. 2) Шукане значення загальної величини, відповідаємо на запитання задачі.	План розв'язування Спосіб знаходження однакової величини 1) Суму даних числових значень однієї з величин – кількості або часу. 2) Значення однакової величини – величини однієї одиниці за сумарними значеннями двох величин. 3) Шукане значення загальної вели-чини, відповідаємо на перше запитання задачі. 4) Шукане значення загальної величи-ни, відповідаємо на друге запитання задачі.

Мал. 63. Опорні схеми та плани розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення

Задача № 3. За два дні на базу привезли 5 вагонів вугілля. В перший день привезли 38 т вугілля, а в другий день – 57 т вугілля. Скільки вагонів вугілля привезли кожного дня, якщо маса одного вагону була однаковою?

Далі аналізується математична структура задачі: ця задача, також має два випадки; три пропорційні величини, одна з яких є однаковою для обох випадків; стосовно однієї величини дані два числові значення, а для іншої – сумарне значення, а числові значення окремо для першого і для другого випадку є шуканими. Задача також має два запитання. Це задача того ж самого виду – на пропорційне ділення.

Згадуємо за яким планом розв'язуються задачі на пропорційне ділення і дещо його поправляємо. Після розв'язання задачі порівнюємо розв'язання обох задач: спільні дві перші дії – перша дія додавання, а друга дія ділення; відрізняються двома останніми діями – в задачі № 2 останні дві дії множення, а в задачі № 3 дві останні дії ділення. Для того, щоб відрізняти ці задачі, домовилися вважати задачі, в яких дві останні дії множення задачами першого підвиду, а задачі, в яких дві останні дії ділення – другого підвиду.

Порівнявши задачі № 2 та № 3, учні дістають висновку про те, щоб перетворити задачу одного підвиду у задачу іншого підвиду треба:

- замінити шукані їх числовими значеннями і тому виключити їх сумарне значення;
- обидва числові дані іншої величини вважати шуканими, але задати їх сумарне значення.

Зміна величин або числових даних у задачі № 3 і дослідження впливу цих змін на розв'язання задачі. Виконавши зміну величин задачі учні впевнюються, що ця зміна не вплинула на розв'язання задачі: розв'язання лишилося тим самим, але слід змінити пояснення. Зміна числових даних задачі також не вплинула на план розв'язування: арифметичні дії та їх порядок лишився тим самим.

Після проведеної роботи існує можливість узагальнення математичної структури задач на пропорційне ділення та плану їх розв'язування (мал. 64).

Істотні ознаки задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є величина однієї одиниці вимірювання або лічби:

1) три пропорційні величини;

2) два випадки:

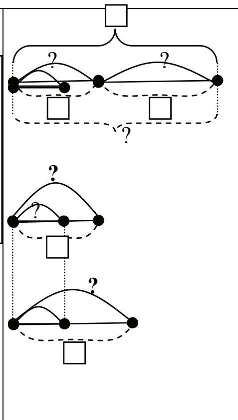
3) значення величини однієї одиниці є однаковим для обох випадків;

4) для однієї величини дано два числові значення для кожного випадку;

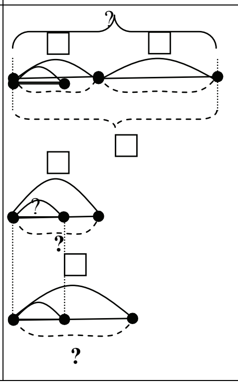
5) числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано їх сумарне значення.

I підвид

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□		?
		Однак.	
II	□		?



II підвид



План розв’язування

1) суму даних числових значень однієї з величин;

2) значення однакової величини – величини однієї одиниці за сумарними значеннями двох величин;

3) шукане значення у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі;

4) шукане значення у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі.

Мал. 64. Опорні схеми та план розв’язування задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є величина однієї одиниці

Таким чином, якщо в задачі шуканими є значення загальної величини, то вони віднесені до задач першого підвиду, а якщо – кількості або часу, то маємо задачу другого підвиду. Задачі на знаходження четвертого пропорційного також поділяються на задачі

І-го та ІІ-го підвиду за цією ознакою. Тому існує можливість порівняти усі види задач на знаходження четвертого пропорційного та задачі на пропорційне ділення. В цих задачах спільним є два випадки, три пропорційні величини і одна величина є однаковою для обох випадків; стосовно однієї з величин надано два числові значення. В задачах на знаходження четвертого пропорційного, щодо другої величини дано одне числове значення, а інше є шуканим; а в задачах на пропорційне ділення – для другої величини дано лише сумарне значення, а обидва значення цієї величини для кожного з випадків є шуканими. В задачах на знаходження четвертого пропорційного одне шукане, а в задачах на пропорційне ділення – два.

Порівнюємо розв'язання відповідних задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення. Вони відрізняються кількістю дій: задачі на знаходження четвертого пропорційного розв'язуються двома діями, а задачі на пропорційне ділення – чотирма діями. Вони відрізняються способом знаходження однакової величини: в задачах на знаходження четвертого пропорційного однакову величину знаходять за двома відомими числовими даними двох величин стосовно одного з випадків, в задачах на пропорційне ділення – за двома сумарними значеннями двох величин. Значення однакової величини в задачах на знаходження четвертого пропорційного знаходять в першій дії, а в задачах на пропорційне ділення – у другій, тому що першою дією слід відшукати значення другої суми.

Можна здійснити подальше дослідження задач на пропорційне ділення за допомогою *зміни однакової величини*. В задачі № 2 змінюється однакова величина – однаковою величиною стає кількість. Діти складають задачу на знаходження загальної величини в обох випадках, порівнюють її з попередніми, і встановлюють, що вона має ті самі істотні ознаки, що й задачі на пропорційне ділення, але в ній однакова величина – кількість. Робимо прикидку очікуваних результатів і застосовуємо узагальнений спосіб розв'язування задач на пропорційне ділення.

Задача № 4. На базу привезли 95т вугілля у великих і маленьких вагонах. Маса маленького вагону 2 т, а великого 3 т. Скільки тон вугілля привезли в маленьких вагонах і скільки тон вугілля привезли у великих вагонах, якщо кількість маленьких і великих вагонів однакова?

З'ясовуємо, як ця зміна вплинула на розв'язання задачі. В задачі № 2 однакова величина була величиною однієї одиниці, тому її знаходили дією ділення (на рівні частини) сумарних значень двох інших величин. В цій задачі однакова величина – кількість або час, її теж знаходять дією ділення сумарних значень двох інших величин, але це інший вид ділення – ділення на вміщення. Тому в цій задачі першою дією також знайдемо суму двох числових даних однієї величини, другою дією дізнаємося про значення однакової величини (кількості або часу) – дією ділення за двома сумарними значеннями двох інших величин, а третьою та четвертою дією відповімо на перше та друге запитання задачі, дізнаємося про значення загальної величини в кожному випадку, дією множення.

Якщо *змінити групу пропорційних величин або числові значення величин*, то ці зміни не впливають на математичну структуру задачі та план її розв'язування.

Змінюємо шукані задачі, перетворюючи задачу №4 у задачу другого підвиду – задача №5. Досліджуємо вплив цієї зміни на розв'язання задачі.

Знайдені при розв'язанні задачі № 4 числові значення загальної величини вважаються за дані, а дані числові значення величини однієї одиниці стають шуканими, але задається їх сума. Виконавши зміни у короткому записі задачі № 4, учні складають задачу другого підвиду.

Задача № 5. На базу привезли однакову кількість великих і маленьких вагонів з вугіллям. В маленьких вагонах привезли 38 т вугілля, а у великих 57т вугілля. Скільки тон вугілля в одному маленькому та в одному великому вагонах, якщо разом в них 5 т вугілля?

Порівнюємо цю задачу з попередніми і дістаємо висновку, що це задача на пропорційне ділення. Робимо прикидку очікуваних результатів і застосовуємо узагальнений план розв'язування, дещо уточнивши його.

Отже, ми отримали задачу на пропорційне ділення другого підвиду, в якій однаковою є величина кількості або часу. Ця зміна не викликала зміну математичної структури задачі (вона має ті самі істотні ознаки, що й попередня), а тому не змінився загальний план розв'язування.

Подальша робота з дослідження задачі проводиться аналогічно через *зміни групи пропорційних величин або числових даних*. Діти дістають висновку, що від зміни величин та зміни числових даних, план розв'язування задачі не змінюється: першою дією знаходимо суму значень іншої величини – загальної величини, другою дією знаходимо значення однакової величини кількості або часу за двома сумарними значеннями інших двох величин, третьою та четвертою дією відповідаємо на перше та друге запитання задачі.

Порівнявши задачі першого та другого підвиду, узагальнюємо математичну структуру задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є кількість або час. Після проведеної роботи існує можливість узагальнити математичні структури задач на пропорційне ділення, в яких однаковою величиною є величина однієї одиниці чи кількість або час (мал. 65).

Якщо однаковою величиною у задачі на пропорційне ділення буде значення загальної величини, то її не можна розв'язувати арифметичним способом – вона розв'язується за допомогою дрібно-раціонального рівняння. Тому такі задачі у курсі початкової математики пропонуватися не можуть.

Порівнявши математичну структуру задач на пропорційне ділення з структурою задач на знаходження четвертого пропорційного, і сформулюємо істотні ознаки таких задач та способи розв'язування (мал. 66).

Істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення:

1) Три пропорційні величини.

2) Два випадки.

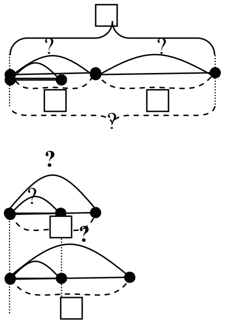
3) Одна з величин є однаковою для обох випадків.

4) Для однієї з величин дано два числові значення для обох випадків.

5) Для другої величини $\frac{\textit{дано лише одне числове значення, а інше є шуканим}}{\textit{обидва числові значення є шуканими, але дано їх суму}}$.

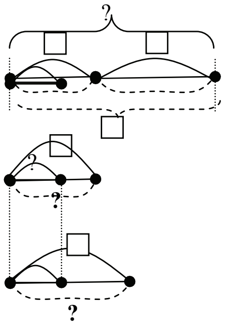
I підвид

	Загальна ….	…. 1	*кількість / час*
I	?		□
	□	Однак.	
II	?		□



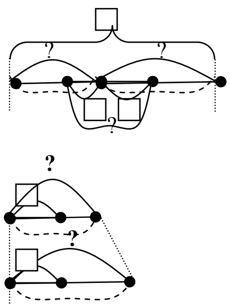
II підвид

	Загальна ….	…. 1	*кількість / час*
I	□		?
		Однак.	□
II	□		?



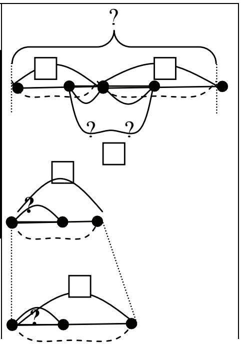
I підвид

	Загальна ….	…. 1	*кількість / час*
I	?	□	
	□		Однак.
II	?	□	



II підвид

	Загальна ….	…. 1	*кількість / час*
I	□	?	
		□	Однак.
II	□	?	



План розв'язування

Знаходимо:

1) суму даних числових значень однієї з величин;

2) значення однакової величини за сумарними значеннями двох величин;

3) шукане значення у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі;

4) шукане значення у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі.

Мал. 65. Опорні схеми та план розв'язування задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є величина однієї одиниці чи кількості або часу

<table>
<tr>
<td>Задачі на знаходження четвертого пропорційного

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>I</td><td>а</td><td></td><td>в</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Однак.</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td>с</td><td></td><td>?</td></tr>
</table>
</td>
<td>Задачі на пропорційне ділення

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>I</td><td>а</td><td></td><td>?</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Однак.</td><td></td><td>к</td></tr>
<tr><td>II</td><td>с</td><td></td><td>?</td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>План розв’язування
Спосіб знаходження однакової величини
1) Значення однакової величини за двома числовими значеннями одного з випадків.
2) Шукане значення, відповідаємо на запитання задачі.</td>
<td>План розв’язування
Спосіб знаходження однакової величини
1) Суму даних числових значень однієї з величин.
2) Значення однакової величини за сумарними значеннями двох величин.
3) Шукане значення, відповідаємо на перше запитання задачі.
4) Шукане значення, відповідаємо на друге запитання задачі.</td>
</tr>
</table>

Мал. 66. Узагальнені опорні схеми та плани розв’язування задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення
а, або *в,* або *с,* або *к,* або *р* – шукане число.

Спосіб знаходження однакової величини для розв’язування задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення:

- знайти однакову величину

$$\frac{\textit{за..двома..числовими..значеннями..стосовно..одного..звипадків}}{\textit{за..двома..сумарними..значеннями}};$$

- відповісти на запитання задачі.

Закріплення уміння розв’язувати задачі на пропорційне ділення. Учні аналізують математичну структуру задачі, „впізнають” її, згадують узагальнений план розв’язування і застосовують його. Значну увагу на цьому етапі слід приділити перетворенню задачі одного підвиду у задачу другого підвиду, перетворенню задачі на пропорційне ділення у задачу на знаходження четвертого пропорційного. На даному етапі пропонуємо учням задачі на пропорційне ділення, в яких однаковою величиною є кількість або час.

1.3. Задачі на знаходження невідомих за двома різницями

У методиці навчання молодших школярів розв'язування задач на знаходження невідомих за двома різницями реалізовано наступні ***елементи***:

1.Для усвідомлення учнями зв'язку задач на знаходження невідомих за двома різницями і задачі на пропорційне ділення, їх порівняння, ми пропонуємо перетворити задачу на пропорційне ділення (однакова величина – величина однієї одиниці) у задачу на знаходження невідомих за двома різницями, при чому спочатку отримати задачу першого підвиду, а потім другого.

2.Дослідження задачі на знаходження невідомих за двома різницями йде шляхом зміни однакової величини і вивчення впливу цієї зміни на план розв'язування задач.

3.Дослідження задачі на знаходження невідомих за двома різницями здійснюється на підставі перетворення задачі одного підвиду у задачу другого.

4.Працюючи над кожною задачею ми досліджуємо вплив зміни величин задачі та числових даних на план її розв'язування.

Методика формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі на знаходження невідомих за двома різницями реалізується за допомогою системи завдань із дослідження математичної структури задач на знаходження невідомих за двома різницями і узагальнення способів їх розв'язування, на підставі зміни величин задачі, числових даних, значення першої різниці і однакової величини. Ця система завдань допомагає учням визначити, що від зміни значення різниці, яку дано в умові задачі та від зміни однакової величини, спосіб міркування не змінюється; узагальнити математичну структуру задач на знаходження невідомих за двома різницями і спосіб знаходження однакової величини [99; 100].

Істотні ознаки задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина однієї одиниці або кількості чи часу:

1) *ці задачі містять три пропорційні величини;*
2) *ці задачі містять два випадки:*
3) *одна з величин є однаковою для обох випадків;*
4) *для однієї величини дано два числові значення для кожного випадку;*
5) *числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано значення їх різниці.*

Спосіб знаходження однакової величини

1) Першою дією знаходимо різницю даних числових значень однієї з величин;
2) Другою дією знаходимо значення однакової величини за значеннями двох різниць;
3) Третьою дією знаходимо шукане значення у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі;
4) Четвертою дією знаходимо шукане значення у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі.

1.3.1. Підготовча робота

Пропонуємо учням задачу на знаходження четвертого пропорційного, і після розв’язання перетворюємо цю задачу в задачу на пропорційне ділення, розв’язуємо отриману задачу та порівнюємо умови і розв’язки цих двох задач; робимо узагальнення:

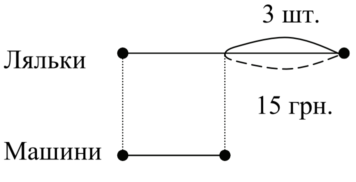
Якщо в задачі є однакова для обох випадків величина, то для відповіді на запитання задачі треба знати значення однакової величини. Однакову величину знаходять по-різному:

а) за відомими значеннями двох величин, стосовно іншого випадку;

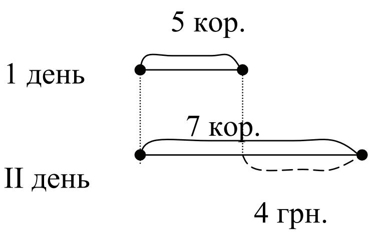
б) за значеннями сум двох інших величин, для обох випадків разом.

Зазначимо, що цей висновок буде нами застосований і при ознайомленні з задачами на знаходження невідомого за двома різницями, але в цьому випадку значення однакової величини ми будемо шукати іншим шляхом – за двома різницями.

Мета підготовчої роботи полягає в розв’язуванні спеціальних вправ за допомогою яких усвідомлюється значення другої різниці. Наприклад:



1. Для дитячого садка купили по однаковій ціні іграшки: ляльки та машини. Ляльок купили на 3 більше, ніж машинок і заплатили за них на 15 грн. більше. Яка ціна ляльки та машини?



2. В перший день купил 5 коробок кольорових олівців. А другого дня 7 таких самих коробок кольорових олівців і заплатили на 4 гривні більше. Скільки коштує одна коробка кольорових олівців?

З метою формування у дітей уміння знаходити значення однакової величини за двома різницями значень величин, стосовно двох випадків, слід пропонувати учням певну кількість задач розглянутого виду. Розв'язуючи такі задачі треба поступово відлучатися від наочної ілюстрації різниць і добиватися того, щоб учні автоматично знаходили співвідношення різниць двох величин і визначали, що за ними можна знайти значення однакової величини. Розв'язки цих задач можна узагальнити, зробивши висновок: *"Однакову величину можна знайти за значеннями різниць інших величин, стосовно двох випадків"*. Наприклад:

Задача. У перший магазин завезли 5 однакових сувоїв тканини, а в другий 3 таких сувої. У перший магазин завезли на 180 м тканини більше, ніж у другий. Скільки метрів тканини в одному сувої?

При розв'язанні цієї задачі, на відміну від попередньої, учні повинні визначити другу різницю для того, щоб знайти однакову величину. Розглянемо докладно методику роботи над цією задачею.

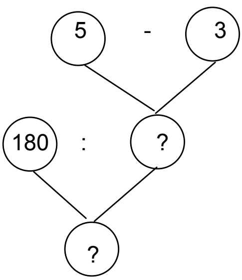
- Про що говориться в задачі? (В задачі говориться про сувої тканини, що завезли в два магазини).
- Які сувої тканини завезли в магазини? (Однакові). Що це означає? (Однакові сувої означає ,що це однакова тканина, і в одному сувої однакова кількість метрів цієї тканини). Таким чином, під однаковими сувоями ми розуміємо сувої, у яких міститься однакова кількість метрів тканини.
- Про які величини йде мова в задачі? (Кількість сувоїв, кількість метрів тканини у одному сувої, загальна кількість метрів тканини). Які ще ключові слова можна виділити? (1 магазин, ІІ магазин). Запишемо задачу коротко в формі таблиці.

	Кількість сувоїв	Довжина тканини в 1 сувої	Загальна довжина тканини
1	5 шт.		?, на 180 м б.
		однакова- ?	
ІІ	3 шт.		?

Учні за коротким записом пояснюють числові значення задачі, пояснюють що означає однакова величина, називають запитання задачі, та з'ясовують як пов'язана однакова величина – кількість метрів тканини у одному сувої з іншими величинами. Далі робота йде таким чином:

- Як пов'язані між собою величини загальна довжина тканини і кількість сувоїв при однаковій довжині тканини в одному сувої? (При однаковій довжині тканини у кожному сувої, загальна довжина тканини буде більша, якщо більша кількість сувоїв тканини).

- В який магазин привезли більше метрів тканини? (В перший магазин). Чому? (Тому, що в перший магазин привезли більше сувоїв тканини, ніж в другий).
- На скільки більше метрів тканини привезли в перший магазин, ніж в другий? (На 180 м більше). Що це означає? (Це означає, що в перший магазин привезли тканини стільки, скільки і в другий та ще 180 м).
- Скільки сувоїв в першому магазині вміщують стільки метрів тканини, скільки метрів тканини привезли в другий магазин? (3 сувої).
- Але ж в перший магазин привезли більше, ніж 3 сувої тканини? Скільки метрів тканини вміщує решта сувоїв в першому магазині? (180 м). Це перша різниця.
- Чи можливо дізнатися скільки сувоїв тканини вміщують 180 м? Це і є друга різниця.
- Знаючи, що в перший магазин привезли 5 сувоїв тканини і знаючи, що в другий магазин привезли 3 таких сувої, про що можна дізнатися за цими числовими даними? (Можна дізнатися на скільки більше сувоїв тканини привезли в перший магазин, ніж в другий; або можна дізнатися про різницю кількості сувоїв тканини в першому та другому магазинах).
- Якою арифметичною дією дізнаємося про це? (Дією віднімання).



Знаючи на скільки більше метрів тканини привезли в перший магазин, ніж в другий (на 180 м) і знаючи на скільки більше сувоїв тканини привезли в перший магазин, ніж в другий, про що ми можемо дізнатися? Або можна сказати так: знаючи різницю загальної довжини тканини і знаючи різницю кількості сувоїв тканини, про що можна дізнатися за цими числовими даними? (Можна дізнатися про довжину тканини в одному сувої, про однакову величину).

Якою арифметичною дією дізнаємося про це? (Дією ділення).

Далі діти складають план розв’язування задачі, записують розв’язок і відповідь.

Під час розв’язування аналогічних задач у дітей повинно скластися таке уявлення: якщо в задачі не дано обидві різниці – одну з них слід визначити, і лише потім знайти значення однакової величини. Уміння визначати другу різницю, а потім за двома різницями знаходити однакову величину є складовою частиною уміння розв’язувати задачі на знаходження невідомого за двома різницями. Тому воно повинно бути засвоєним, як самостійна дія, засобом певної кількості вправ і узагальнення способу розв’язування.

Таким чином, *однакову величину знаходять по-різному: а) за відомими значеннями двох величин, стосовно іншого випадку; б) за значеннями двох сум інших величин, для обох випадків разом (за двома сумами); в) за значеннями різниць двох інших величин, стосовно двох випадків (за двома різницями).*

1.3.2. Ознайомлення із задачами на знаходження невідомих за двома різницями

Задача № 1. У кіоску продали по однаковій ціні 12 синіх та 8 чорних ручок. За всі ручки одержали 16 грн. Скільки грошей одержали за кожний вид ручок?

Перед розв’язанням задачі № 1 школярі роблять прикидку очікуваних результатів, а після її розв’язання вчитель пропонує дізнатися на скільки більше чи менше одне значення шуканої – загальної величини за інше, тобто величину їх різницевого відношення. Знайдене число включається у наступну задачу. Отже, сума загальних величин замінюється їх різницею. Таким чином, отримуємо задачу на знаходження невідомих за двома різницями. Усі зміни спочатку виконуються на короткому записі, а потім складається задача.

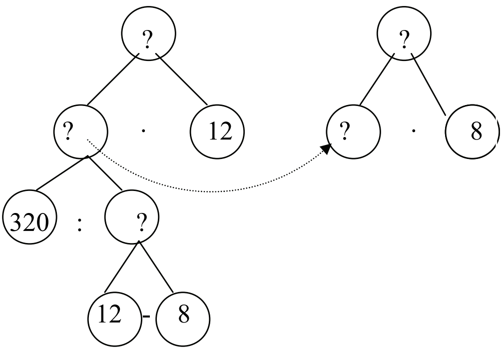
Задача № 2. У кіоску продали по однаковій ціні 12 синіх та 8 чорних стержнів. За сині заплатили на 3 грн. 20 к. більше, ніж за чорні. Скільки грошей одержали за кожний вид стержнів?

Перед розв’язанням задачі учні порівнюють задачу нового виду з задачею на пропорційне ділення: ці задачі схожі тим, що обидві містять три пропорційні величини; до однієї з них дано два числові значення, а обидва значення іншої величини є шуканими; величина однієї одиниці є однаковою для обох випадків; відрізняються ці задачі тим, що в задачі на пропорційне ділення було дано значення суми загальних величин, а в цій – значення різниці.

Отже, в обох задачах є однакова для двох випадків величина. Для розв’язання задач, які містять однакову величину „ключем” є знаходження її значення. Учні згадують відомі способи знаходження однакової величини: 1) за числовими значеннями двох величин стосовно одного з випадків; 2) за двома сумарними значеннями двох величин; 3) за двома різницями.

Діти встановлюють, чи можна в цій задачі застосувати один з цих способів. Застосовуємо третій спосіб знаходження однакової величини, тому що нам не дано значення двох величин стосовно одного з випадків або нам не дано сумарного значення однієї з величин, але нам дано різницю числових значень однієї величини у двох випадках. Отже, однакову величину знайдемо за двома різницями. Таким чином, здійснена зміна умови задачі викликала застосування іншого способу знаходження однакової величини – за двома різницями. Далі здійснюється повний аналіз, формулюється план розв’язування і записується розв’язання та відповідь задачі.

- Що потрібно знати, щоб відповісти на перше запитання задачі “Скільки отримали грошей за сині стержні?” (Потрібно знати два числові значення: 1 – ціну синіх стержнів, невідомо, та ІІ – кількість синіх стержнів, відомо 12). Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією множення.) Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Ні ми не знаємо ціну, а ціна – це однакова величина, її можна знайти за двома різницями.).



Що треба знати, щоб знайти ціну? (Треба знати два числові значення: І – різницю вартостей, або на скільки більше коштують сині стержні, ніж чорні, відомо, 320, та ІІ – різницю кількостей, або на скільки більше купили синіх стержнів, ніж чорних, невідомо.)

- Якою арифметичною дією дізнаємося про ціну? (Дією ділення: щоб знайти ціну, треба вартість поділити на кількість). Чи можна відразу відповісти на це запитання?

(Ні, ми не знаємо різницю кількостей, або на скільки більше купили синіх стержнів, ніж чорних).

- Що треба знати, щоб про це дізнатися? (Треба знати два числові значення: I – кількість синіх стержнів, відомо 12, та II – кількість чорних стержнів, відомо 8). Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією віднімання).Чи можна тепер відповісти на перше запитання задачі? (Так, ми від запитання перейшли до числових даних).
- Що треба знати, щоб відповісти на друге запитання? (Треба знати два числові значення: I - ціну, поки ще невідомо, але ми про це дізнаємося відповідаючи на перше запитання задачі, та II – кількість чорних стержнів, відомо, 8). Якою арифметичною дією відповімо на це запитання задачі? (Дією множення).
- Склади план розв'язування задачі. (Першою дією дізнаємося про різницю кількостей або на скільки більше купили синіх стержнів, ніж чорних. Другою дією ми дізнаємося про ціну стержня. Третьою дією ми відповімо на перше запитання задачі і дізнаємося про вартість синіх стержнів. Четвертою дією ми відповімо на друге запитання задачі і дізнаємося про вартість чорних стержнів).
- Запиши розв'язання задачі.

1) 12 – 8 = 4 (шт.) – на стільки більше купили синіх стержнів, ніж червоних; різниця між кількостями синіх та чорних стержнів.
2) 320 : 4 = 80 (к.) – ціна стержня.
3) 80 · 12 = 960 (к.) – вартість синіх стержнів.
4) 80 · 8 = 640 (к.) – вартість чорних стержнів.

- На друге запитання задачі можна відповісти інакше: знаючи вартість синіх стержнів (960 к.) та на скільки це більше, ніж вартість чорних стержнів (на 320 к.), можна дізнатися про вартість чорних стержнів дією віднімання.
- Запишіть відповідь до задачі.(Відповідь: 9 грн. 60 к. отримали за сині стержні та 6 грн. 40 к. отримали за чорні стержні.)

Перевіркою розв'язання задачі є знаходження різниці знайдених чисел і порівняння отриманого значення з даним в умові задачі.

Після розв'язання задачі на знаходження невідомих за двома різницями *порівнюємо* дану задачу з задачею на пропорційне ділення з метою дослідження впливу *зміни умови* задачі на її розв'язання.

Згадуючи істотні ознаки задач на пропорційне ділення, і встановлюючи зміни, які ми здійснили над такою математичною структурою задачі, формулюємо *істотні ознаки* задач на знаходження невідомих за двома різницями, наступні:

1) Три пропорційні величини.
2) Два випадки.
3) Одна з величин є однаковою для обох випадків.
4) Стосовно однієї величини дано два числові значення для обох випадків.
5) Стосовно іншої величини два числові значення є шуканими, але дано їх різницю.

Аналогічно, актуалізуючи узагальнений план розв'язування задач на пропорційне ділення, з'ясовуємо, як зміна умови вплинула на розв'язання задачі, і формулюємо *план розв'язування* задач на знаходження невідомих за двома різницями:

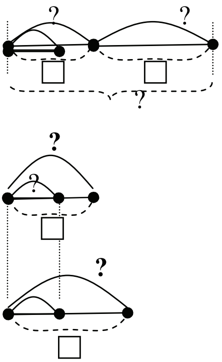
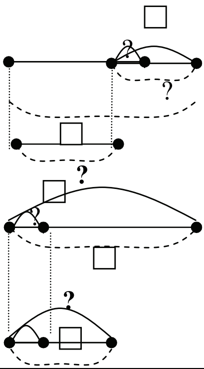
1) знаходимо різницю даних числових значень іншої величини – кількості або часу;
2) знаходимо однакову величину (величину однієї одиниці) за двома різницями;
3) відповідаємо на перше запитання задачі;
4) відповідаємо на друге запитання задачі.

Порівнюючи розв'язання задач, діти встановлюють, що в обох задачах однакові дві останні дії, тому що в обох задачах одні й ті ж запитання та одна та сама однакова величина, яка потрібна для відповіді на обидва запитання задачі. Розв'язки відрізняються першими двома діями, тому що однакову величину знаходили по-різному: в першій задачі – за двома сумами, а в другій задачі – за двома різницями. Тому остання задача називається задачею на знаходження невідомих за двома різницями.

Узагальнюємо математичні структури задач на знаходження невідомих за двома різницями та задач на пропорційне ділення (мал. 67).

<table>
<tr>
<td>Задачі на пропорційне ділення

<table>
<tr><td></td><td>Зага льна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість
час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Однак.</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td>?</td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>Задачі на знаходження невідомих за двома різницями

<table>
<tr><td></td><td>Зага льна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість
час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Однак.</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td>?, на б......</td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Спосіб знаходження однакової величини

1) Суму даних числових значень однієї з величин – кількості або часу.

2) Значення однакової величини – величини однієї одиниці за сумарними значеннями двох величин.

3) Шукане значення загальної величини, відповідаємо на перше запитання задачі.

4) Шукане значення загальної величини, відповідаємо на друге запитання задачі.</td>
<td>Спосіб знаходження однакової величини

1) Різницю даних числових значень однієї з величин – кількості або часу.

2) Значення однакової величини – величини однієї одиниці за двома різницями.

3) Шукане значення загальної величини, відповідаємо на перше запитання задачі.

4) Шукане значення загальної величини, відповідаємо на друге запитання задачі.</td>
</tr>
</table>

Мал. 67. Опорні схеми та плани розв’язування задач на пропорційне ділення та на знаходження невідомих за двома різницями, в яких шуканим є значення загальної величини (однаковою є величина однієї одиниці)

Змінивши величини задачі, ми отримуємо також задачу на знаходження невідомих за двома різницями, яка містить ті самі числові дані.

	Час	Швидкість	Відстань
1 турист	12 год.		?, на 320 км більше
		однакова	
2 турист	8 год.		?

Тому ця зміна впливає на розв'язання задачі лише у сенсі зміни пояснень до арифметичних дій.

Зміна числових даних задачі не впливає на математичну структуру задачі. Отримана задача має усі перелічені істотні ознаки – це задача на знаходження невідомих за двома різницями.

	Відстань (км)	Швидкість ($\frac{км}{год}$)	Час
Легкова машина	?, на140 км більше		5 год.
		однакова	
Вантажна машина	?		3 год.

Розв'язання дещо змінюється: в ньому приймають участь ін-ші числа, але арифме-тичні дії та їх поря-док, пояснення до них не змінюються. Отже, зміна числових даних задачі не впливає на план розв'язування задачі.

Порівнявши дану задачу з попередніми задачами на знаходження невідомих за двома різницями, учні встановлюють, що вони відрізняються групою величин та числовими даними, але кожна з них містить усі істотні ознаки, які було визначено при співставленні задачі на знаходження невідомих за двома різницями і задачі на пропорційне ділення.

Далі досліджуємо, як зміниться розв'язання задачі, якщо *характер трактування даної різниці „на ... більше" зміниться і стане „на...менше" або навпаки*. Наприклад:

- Що означає число 140? (Число 140 означає з одного боку на скільки більше проїхала легкова машина, ніж вантажна; якщо легкова проїхала на 140 км більше, ніж вантажна, то вантажна проїхала на

140 км менше, ніж легкова; таким чином, число 140 ще й означає на скільки менше проїхала вантажна машина, ніж легкова).

- Розкажи задачу, в якій число 140 буде позначати на скільки менше кілометрів проїхала вантажна машина, ніж легкова.

Учні роблять висновок, що від цієї зміни розв'язання не зміниться, треба дещо поправити пояснення до першої дії.

Проведена робота надає можливість *узагальнити математичну структуру, істотні ознаки задач на знаходження невідомих за двома різницями та спосіб їх розв'язування*. Отже висновки, що були зроблені при порівнянні задач на пропорційне ділення та на знаходження невідомих за двома різницями набули підтвердження. Визначені ознаки задачі на знаходження невідомих за двома різницями не змінилися ні від зміни величин задачі, ні від зміни числових даних задачі, а також ні від зміни характеру трактування даної різниці; не змінився й план розв'язування.

Діти навчилися перетворювати задачу одного підвиду у задачу другого підвиду на матеріалі задач на пропорційне ділення: треба *замінити шукані числа їх числовими значеннями, а відомі числа замінити знаками запитання, але слід дати про них додаткову відомість – їх суму*. В задачі на знаходження невідомих за двома різницями додаткова відомість не сума, а різниця. У задачі на знаходження обох значень загальної величини замінюємо шукані їх числовими значеннями, а значення кількості або часу стають, навпаки, шуканими, але включаємо у задачу їх різницю. Усі зміни виконуються у короткому записі задачі, після чого учні складають задачу другого підвиду.

Задача № 3. Легкова і вантажна машина рухалися з однаковою швидкістю. Легкова машина подолала 350 км, а вантажна 210 км. Скільки годин була в дорозі кожна машина, якщо легкова машина рухалася на 2 години більше?

Далі аналізується математична структура задачі: ця задача, також має два випадки; три пропорційні величини, одна з яких є однаковою для обох випадків; стосовно однієї величини дані два числові значення, а для іншої – значення різниці, а числові значення окремо для першого і для другого випадку є шуканими. Задача також має два запитання. Це задача того ж самого виду – на знаходження невідомих за двома різницями.

Згадуємо, за яким планом розв'язуються задачі на знаходження невідомих за двома різницями, і дещо його змінюємо. Після розв'язання задачі порівнюємо розв'язання обох задач: спільні дві перші дії – перша дія віднімання, а друга дія ділення; відрізняються двома останніми діями – в попередній задачі останні дві дії множення, а в цій задачі дві останні дії ділення:

1) 350 – 210 = 140 (км) – на стільки більше кілометрів подолала легкова машина, ніж вантажна; різниця відстаней.
2) 140 : 2 = 70 (км/год.) – швидкість, однакова величина
3) 350 : 70 = 5 стільки годин рухалася легкова машина
4) 210 : 70 = 3 стільки годин рухалася вантажна машина

Вчитель ще раз підкреслює, щоб відрізняти задачі на знаходження невідомих за двома різницями домовилися вважати задачі, в яких дві останні дії множення задачами І підвиду, а задачі , в яких дві останні дії ділення – задачами ІІ підвиду. Можна *порівняти усі види задач на знаходження четвертого пропорційного, задачі на пропорційне ділення та задачі на знаходження невідомих за двома різницями*. В цих задачах спільним є два випадки, три пропорційні величини і одна величина є однаковою для обох випадків; стосовно однієї з величин надано два числові значення. В задачах на знаходження четвертого пропорційного, щодо другої величини дано одне числове значення, а інше є шуканим; а в задачах на $\frac{\textit{пропорційне..ділення}}{\textit{знаходження..невідомих..за..двома..різницями}}$ – для другої величини дано лише значення $\frac{\textit{суми}}{\textit{різниці}}$, а обидва значення цієї величини для кожного з випадків є шуканими. В задачах на знаходження четвертого пропорційного одне шукане, а в задачах на $\frac{\textit{пропорційне..ділення}}{\textit{знаходження..невідомих..за..двома..різницями}}$ – два (мал. 68).

Задачі на знаходження четвертого пропорційного

I підвид

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□		□
		Однак.	
II	?		□

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?		□
		Однак.	
II	□		□

II підвид

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□		□
		Однак.	
II	□		?

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□		?
		Однак.	
II	□		□

Задачі на пропорційне ділення

I підвид

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?		□
	□	Однак.	
II	?		□

II підвид

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□		?
		Однак.	□
II	□		?

Задачі на знаходження невідомих за двома різницями

I підвид

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?		□
		Одн.	
II	?, на □ б.(м.)		□

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?, на □ б.(м.)		□
		Одн.	
II	?		□

II підвид

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□		?
		Одн.	
II	□		?, на □ б.(м.)

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□		?, на □ б.(м.)
		Одн.	
II	□		?

Мал. 68. Опорні схеми задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина однієї одиниці

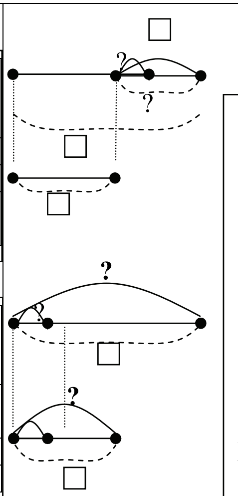
Зміна групи пропорційних величин та зміна числових даних не впливає на математичну структуру задачі та план її розв’язування.

Порівнявши математичні структури та розв’язання задач І-го та ІІ-го видів (в задачах першого підвиду дано значення різниці загальної величини, а самі ці значення є шуканими; в задачах другого підвиду дано різницю кількості або часу і вони є шуканими), узагальнюємо математичну структуру та план розв’язування задач на знаходження невідомих за двома різницями (мал. 69).

І підвид

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
І	?		□
		Однак.	
ІІ	?, на б.(м.) □		□

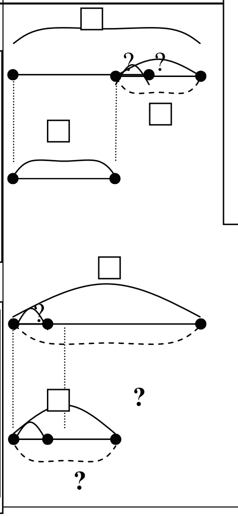
	Загальна	 1	*кількість* / *час*
І	?, на б.(м.) □		□
		Однак.	
ІІ	?		□



ІІ підвид

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
І	□		?
		Однак.	
ІІ	□		?, на б.(м.) □

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
І	□		?, на б.(м.) □
		Однак.	
ІІ	□		?



План розв’язування

Знаходимо:

1) різницю даних числових значень однієї з величин;

2) значення однакової величини – величини однієї одиниці за значеннями двох різниць;

3) шукане значення у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі;

4) шукане значення у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі.

Мал. 69. Опорні схеми та план розв’язування двох підвидів задач на знаходження невідомих за двома різницями (однаковою є величина однієї одиниці)

Істотні ознаки задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина однієї одиниці:
1) три пропорційні величини;
2) два випадки;
3) значення величини однієї одиниці є однаковою для обох випадків;
4) для однієї величини дано два числові значення для кожного випадку;
5) числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано значення їх різницевого відношення.

Зміна однакової величини. Однаковою величиною стає кількість. Діти розв'язують задачу на знаходження невідомих за двома різницями, в якій однаковою є величина однієї одиниці:

Для вікторини купили заохочувальні призи: набори фломастерів та олівців по однаковій ціні. За олівці заплатили 60 грн., а за фломастери 84 грн. Скільки купили наборів олівців та фломастерів олівців окремо, якщо наборів фломастерів купили на 2 більше?

В цій задачі на знаходження невідомих за двома різницями *змінюється однакова величина – однаковою величиною стає кількість*. Таким чином складається наступна задача:

Задача № 4. Купили однакову кількість наборів фломастерів та олівців. За олівці заплатили 60 грн., а за фломастери 84 грн. Яка ціна набору олівців і набору фломастерів окремо, якщо ціна фломастерів на 2 грн. більше?

Діти порівнюють її з попередніми, і встановлюють, що вона має ті самі істотні ознаки, що й задачі на знаходження невідомих за двома різницями, але в ній інша однакова величина – кількість. Тому застосовуємо узагальнений спосіб розв'язування задач на знаходження невідомих за двома різницями.

З'ясовуємо, як ця зміна вплинула на розв'язання задачі. В попередній задачі однаковою величиною була величина однієї одиниці, тому її знаходили дією ділення на рівні частини значень різницевого відношення двох інших величин. В цій задачі однакова величина – кількість, її теж знаходять дією ділення, але це інший вид ділення – ділення на вміщення. Тому в цій задачі першою дією також знайдемо різницю двох числових даних однієї величини; другою дією дізнаємося про значення однакової величини (кількості) – за двома значеннями різниць двох інших величин, арифметичною дією ділення; а третьою та четвертою діями відповімо на перше та друге запитання задачі, дізнаємося про значення величини однієї одиниці в кожному випадку, арифметичною дією ділення.

Подальше дослідження здійснюється за допомогою *зміни групи пропорційних величин задачі*; тут бажано вибрати групу пропорційних величин, яка містить „час”: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи; відстань, швидкість, час. Зміна числових даних задачі, так само, як і зміна групи пропорційних величин не впливає на математичну структуру задачі та на її розв’язування.

Порівнюємо ці задачі з іншими задачами на знаходження невідомих за двома різницями. Визначаємо їх істотні ознаки та формулюємо узагальнений план розв’язування.

Зміна шуканих задачі. Шуканими стають значення загальної величини. Учні розв’язують задачу на знаходження невідомих за двома різницями, в якій однаковою є величина кількості або часу та шуканими є обидва значення величини однієї одиниці:

Для шкільного свята купили кілька кілограмів бананів і стільки ж кілограмів яблук. Ціна бананів на 2 грн. більше, ніж ціна яблук. Яка ціна бананів та яблук окремо, якщо за яблука заплатили 14 грн., а за банани 28 грн.?

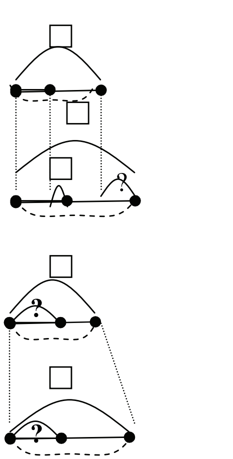
Знайдені при розв’язанні цієї задачі числові значення величини однієї одиниці вважаються за дані, а дані числові значення загальної величини стають шуканими, але задається їх різниця. Виконавши зміни у короткому записі попередньої задачі, учні складають задачу на знаходження обох значень загальної величини при сталій кількості або часі.

Задача № 5. Для шкільного свята купили кілька кілограмів бананів і стільки ж кілограмів яблук. Ціна бананів 4 грн., ціна яблук 2 грн.; за банани заплатили на 14 грн. більше, ніж за яблука. Скільки заплатили за яблука і скільки заплатили за банани?

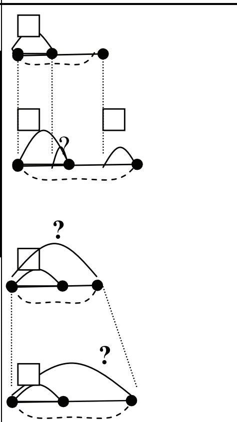
Порівнюємо цю задачу з попередніми і дістаємо висновку, що це задача на знаходження невідомих за двома різницями. Тому застосовуємо узагальнений план розв’язування, дещо уточнивши його. Досліджуємо як ця зміна вплинула на розв’язання задачі: змінилася перша дія, тому що ми шукали значення іншої різниці, не змінилася друга дія, якою ми знаходили значення однакової величини; змінилися дві останні дії, тому що шуканими є значення загальної величини. Але в цілому план розв’язування не змінився. У подальшому дослідженні ні зміна групи величин задачі, а ні зміна числових даних задачі не впливають на математичну структуру цієї задачі і на її план розв’язування.

Порівнюємо задачі № 4 та № 5 (в обох задачах однаковою величиною є кількість або час, але в задачі № 4 шуканими були значення величини однієї одиниці, а в задачі № 5 – значення загальної величини), визначаємо вплив відмінності на план розв’язування задачі, узагальнюємо його (мал. 70).

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	?	
			Однак.
II	□	?, на б.(м.) □	



	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	□	
			Однак.
II	?, на б.(м.) □	□	



План розв’язування

1) Різницю даних числових значень однієї з величин.

2) Значення однакової величини – кількості або часу за значеннями двох різниць.

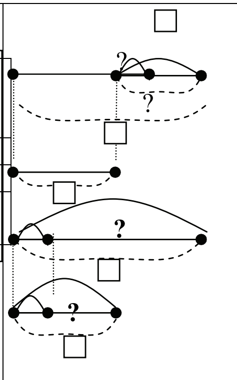
3) Шукане значення у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі.

4) Шукане значення у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі.

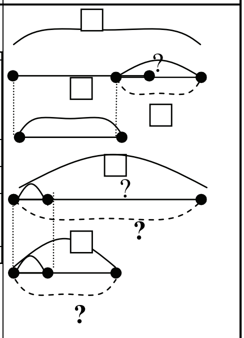
Мал. 70. Опорні схеми та план розв’язування задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина кількості або часу

Порівнюючи задачі, в яких однаковою величиною є кількість або час з задачами, в яких однаковою величиною є величина однієї одиниці, узагальнюємо їх істотні ознаки та план розв’язування (мал. 71).

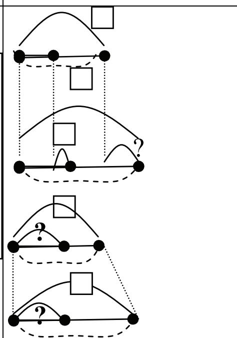
	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?		□
		Однак.	
II	?, на б.(м.) □		□



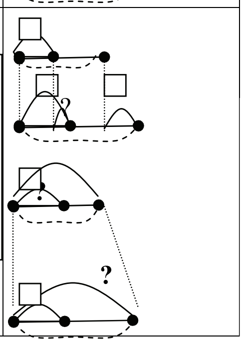
	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□		?
		Однак.	
II	□		?, на б.(м.) □



	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	?	
			Однак.
II	□	?, на б.(м.) □	



	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	□	
			Однак.
II	?, на б.(м.) □	□	



План розв’язування

Знаходимо:

1) різницю даних числових значень однієї з величин;

2) значення однакової величини значеннями двох різниць;

3) шукане значення у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі;

4) шукане значення у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі.

Мал. 71. Опорні схеми та план розв’язування задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина однієї одиниці чи кількості або часу

Істотні ознаки задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина однієї одиниці чи кількості або часу:

1) три пропорційні величини;
2) два випадки;
3) одна з величин є однаковою для обох випадків;
4) для однієї величини дано два числові значення для кожного випадку;
5) числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано значення їх різниці.

Якщо *однаковою величиною* у задачі на знаходження невідомих за двома різницями буде *значення загальної величини*, то її не можна розв'язувати арифметичним способом – вона розв'язується за допомогою дрібно-раціонального рівняння. Тому такі задачі в курсі початкової математики пропонуватися не можуть.

Далі можна запропонувати дітям зіставити узагальнені математичні структури задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями з метою узагальнення істотних ознак цих видів задач та способу їх розв'язання.

Істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення та на знаходження невідомих за двома різницями:

1) ці задачі містять три пропорційні величини;
2) ці задачі містять два випадки;
3) одна з величин є однаковою для обох випадків;для однієї з величин дано два числові значення для обох випадків;
4) для другої величини $\frac{\textit{дано..лише..одне..числове..значення, а..інше..єшуканим}}{\textit{обидва..числові..значення..є..шуканими, але..дано..їх..суму..або..різницю}}$.

Також можна *узагальнити спосіб розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення та на знаходження невідомих за двома різницями способом знаходження однакової величини*:

- знайти однакову величину $\frac{\textit{за..двома..числовими..значеннями..стосовно..одного..звипадків}}{\textit{за..двома..сумами..або..різницями}}$;
- відповісти на запитання задачі.

1.4. Задачі на подвійне зведення до одиниці

Методика формування в молодших школярів умінь розв'язувати задачі на подвійне зведення до одиниці передбачає ознайомлення дітей з двома математичними структурами цих задач: спрощеною – в якій дана або є шуканою величина подвійної одиниці (3-й клас) та дещо ускладненою – величина подвійної одиниці невідома, але не є шуканою (4-й клас). З метою узагальнення математичних структур таких задач відбувається дослідження задачі: за зміною величин задачі; за зміною числових даних задачі; за зміною шуканого задачі, причому кожного разу визначається вплив змін на математичну структуру та план розв'язування задачі.

Така робота надає можливість учням визначити істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці та узагальнити план розв'язання.

Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці (3-й клас):

1) чотири величини: кількість, час та загальне значення для даної кількості та часу, а також величина, яка поєднує усі ці величини – „подвійна одиниця”;
2) дано три числові значення даних величин;
3) шуканим є одне з числових значень: або величини подвійної одиниці або загальної величини або кількості або часу.

План розв'язування (3-й клас)

1) першою дією знаходимо величину однієї одиниці для певної кількості або часу;
2) другою дією відповідаємо на запитання задачі.

Задача на подвійне зведення до одиниці математичної структури, що пропонується у 4-му класі, отримується з вивченої раніше (у 3-му класі) за допомогою зміни запитання. Наступне дослідження задачі нової математичної структури відбувається за поданим вище описом змін. Таким чином учні визначають істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці та узагальнюють спосіб їх розв'язання:

Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці (4-й клас):

1) чотири величини: кількість, час та загальне значення для даної кількості та часу, а також величина, яка поєднує усі ці величини – подвійна одиниця;
2) два випадки;

3) величина подвійної одиниці однакова для обох випадків;

4) задача містить п'ять числових значень, при чому чотири дані за умовою задачі, а п'яте є шуканим;

Спосіб розв'язання задач на подвійне зведення до одиниці (4-й клас)

„Ключем" до розв'язання є знаходження значення величини „подвійної одиниці".

1.4.1. Підготовча робота

Одним із способів розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного є спосіб зведення до одиниці – спосіб знаходження однакової величини. До ускладнених задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є величина однієї одиниці, відносяться задачі на подвійне зведення до одиниці. Спільним в цих задачах є наявність однакової величини, але в задачах на знаходження четвертого пропорційного – це величина однієї одиниці виміру або лічби, а в задачах на подвійне зведення до одиниці – „подвійна одиниця".

Тому на етапі підготовчої роботи розв'язуються задачі на знаходження четвертого пропорційного, які записують коротко у вигляді пропорції. Перевіркою правильності розв'язання є складання і розв'язання обернених задач.

Також на етапі підготовчої роботи учні розв'язують прості задачі з пропорційними величинами на знаходження величини однієї одиниці, які містять зайве значення величини, яке не входить до групи трьох пропорційних величин і є сталим, і тому не впливає на розв'язання задачі. При розв'язанні цих задачі звертаємо увагу учнів саме на цю особливість і записуємо такі задачі коротко у вигляді пропорції двома способами – без зазначення зайвого числа та із його записом. Учні з'ясовують, що ця зміна не впливає на розв'язання задачі. Такі задачі є підготовчими до введення задач на подвійне зведення до одиниці.

1.4.2. Навчання розв'язування задач в 3-му класі

Ознайомлення (1 підвид). Задачі нового виду вводяться на основі розв'язання двох послідовних простих задач на знаходження величини однієї одиниці, які містять зайве числове значення, що є сталим і для характеристики даних числових значень, і для характеристики шуканого числа. Наприклад, ці задачі містять величини: кількість овець, час, загальна маса сіна та величину, яка поєднує ці величини, – величину однієї одиниці – масу сіна на 1 день для усіх овець або масу сіна для однієї вівці на весь час. В першій задачі зайвим значенням (сталим) є кількість овець, а в другій – час. Наприклад:

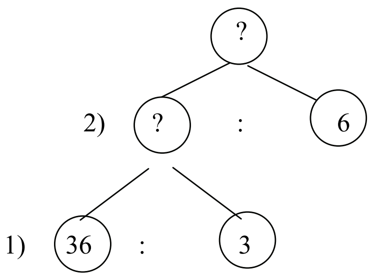
а) На 3 дня 6 вівцям дають 36 кг сіна. Скільки сіна дають на 1 день 6 вівцям?
б) Шести вівцям на 1 день дають 12 кг сіна. Скільки сіна дають 1 вівці на 1 день?

Ці дві задачі поєднуються у складену задачу, яка містить чотири величини: кількість овець, час, загальна маса сіна та величину, яка поєднує ці величини, – величину подвійної одиниці – масу сіна на 1 день для 1 вівці.

Задача 1. На 3 дні 6 вівцям дають 36 кг сіна. Скільки сіна дають 1 вівці на день?

Учні порівнюють цю задачу з першою, встановлюють, що спільною в цих задачах є умова, але вони мають різні запитання. Порівнюючи цю задачу з другою, учні дістають висновку, що спільними в них є запитання, але різні умови. Діти помічають, що ця задача складається з двох попередніх простих задач. Це спостереження полегшує наступний аналітичний пошук розв'язування задачі:

- Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі "Скільки сіна дають 1 вівці на день?" (Треба знати два числові значення: 1 – масу сіна на 1 день, що дають усім вівцям (не відомо), та II – кількість тварин (відомо, 6)).



- Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією ділення.)
- Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Не можна, ми не знаємо масу сіна на 1 день для шести тварин).

- Що треба знати, щоб про це дізнатися? (Треба знати два числові значення: 1 – загальну масу сіна , відомо 36 кг), та II – час, який годували усіх тварин).

- Якою арифметичною дією відповімо на запитання? (Дією ділення).
- Складіть план розв’язування задачі. (Першою дією ми дізнаємося про масу сіна на 1 день для 6 овець. Другою дією ми дізнаємося про масу сіна на 1 день для 1 вівці).

Після розв’язання ще раз пояснюємо, що ми знайшли першою дією, і показуємо це стрілочкою у короткому записі.

При розв’язанні задач цього виду система стрілочок та дужок грає роль опорних смислових пунктів для запам’ятовування способу розв’язування, наприклад:

:
3 дні, 6 вів. – 36 кг
1день , 1 вів. - ? кг

Ця стрілочка означає, що першою дією дізналися про масу сіна для 6 овець на 1 день; дужка означає, що про це ми дізнаємося, якщо 36 поділимо на 3.

При розв’язанні також застосовуємо стрілочку, яка „наштовхує” на другу дію:

:

1) 36 : 3 = 12 (кг) на 1 день 6 вівцям.

2) 12 : 6 = 2 (кг) на 1 день 1 вівці.

Ця стрілочка означає, що треба 12 поділити на 6, і тоді ми дізнаємося про величину „подвійної одиниці”.

Задачі на подвійне зведення до одиниці передбачають два способи розв’язування. Засобом системи стрілочок і дужок можна показати інший спосіб розв’язування:

:
3 дні, 6 вів. – 36 кг
1день , 1 вів. - ? кг

Порівнюємо два способи розв’язування. Відмінним є те, що першою дією в першому способі ми дізналися про масу сіна на 1 день для 6 овець, а в другому – про масу сіна на 3 дні для 1 вівці.

Спільним є те, що другою дією відповіли на запитання задачі – знайшли масу сіна для 1 вівці на 1 день.

Узагальнюємо перший та другий способи розв’язування:

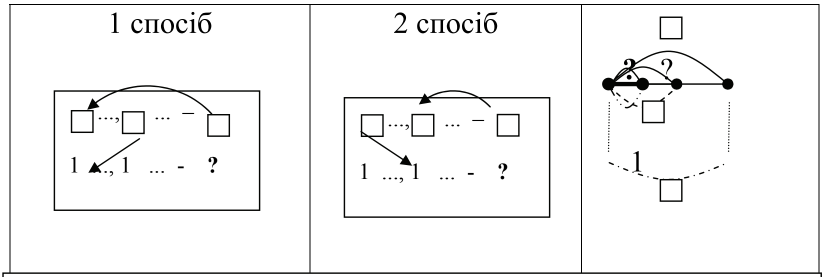
В першій дії ми знайшли величину однієї одиниці для певної кількості або часу (чи на <u>1 день</u> для 6 овець; чи на 3 дні для <u>1 вівці</u>).

В другій дії ми також знайшли величину однієї одиниці – на 1 день для 1 вівці – подвійної одиниці. Таким чином, в цій задачі ми двічі наводили до одиниці.

Учні *змінюють ситуацію задачі*. Припустимо, йдеться про витрату пального кількома тракторами. Учні складають задачу і дістають висновку, що у її розв'язанні немає необхідності, треба змінити лише пояснення. Отже, зміна величин задачі не впливає ні на перший, ні на другий способи розв'язування. В першій дії ми знайшли величину однієї одиниці (чи на 1 годину для 6 тракторів; чи на 3 години для 1 трактору). В другій дії ми також знайшли величину однієї одиниці – на 1 годину для 1 трактора. Таким чином, в цій задачі ми двічі наводили до одиниці.

Якщо зміна величин задачі не впливає на її розв'язання, то спробуємо дослідити, чи вплине на розв'язання задачі *зміна числових даних*. Отже, залишаємо тими самими величини, але змінюємо числові дані. Учні пропонують власні варіанти, але вчитель їх дещо поправляє, щоб можна було виконати послідовне ділення даного числа на два інші.

Після проведеної роботи учні узагальнюють математичну структуру задач на подвійне зведення до одиниці та способи їх розв'язування (мал. 72).



План розв'язування

1) Знаходимо величину однієї одиниці для певної кількості або часу;
2) знаходимо „подвійну одиницю” і відповідаємо на запитання задачі.

Мал. 72. Опорні схеми та плани розв'язування двома способами задачі на подвійне зведення до одиниці (І підвид)

Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці:

1) Чотири величини: кількість, час та загальне значення для даної кількості та часу, а також величина, яка поєднує усі ці величини, – „подвійна одиниця”.

2) Дано загальне значення величини для даної кількості та часу.

3) Шуканим є значення величини „подвійної одиниці”.

Ознайомлення з задачами на подвійне зведення до одиниці (ІІ підвид). Пропонуємо учням розв’язати задачу, аналогічну попереднім, двома способами:

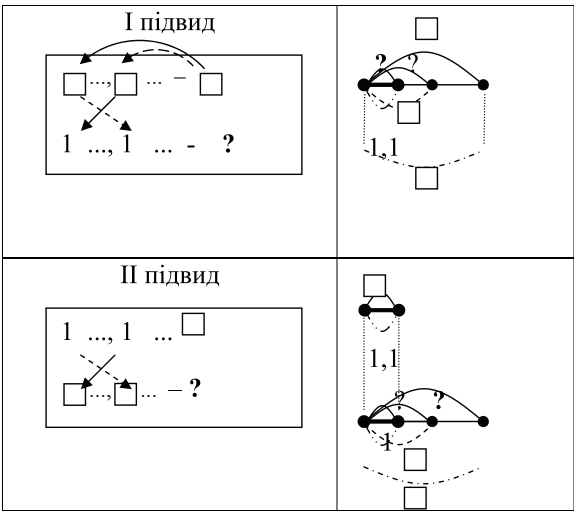
В зоопарку за 3 дні 5 моржам дали 30 кг риби. Скільки кілограмів риби треба 1 моржу на 1 день?

Діти складають обернену задачу, в якій запитується про числове значення величини, яке було дано в умові прямої задачі.

Задача 2 *(ІІ підвид).* На 1 день 1 моржу дають 2 кг риби. Скільки кілограмів риби дадуть 5 моржам за 3 дні?

Порівнюємо цю задачу з попередніми і впевнюємося, що вони мають дуже схожі математичні структури. Вона також містить чотири величини, але запитується не про величину подвійної одиниці, а про значення загальної величини. Учні пробують застосувати два способи розв’язування задач аналогічної математичної структури.

Далі учні порівнюють розв’язання прямої і оберненої задач і встановлюють, що перша задача розв’язується двома діями ділення, а друга задача – двома діями множення. Вчитель повідомляє, що цю ознаку покладено в основу класифікації задач на подвійне зведення до одиниці: перша задача – задача І підвиду, а друга – задача ІІ підвиду. Результати узагальнення подані на малюнку 73.



План розв’язування

1) Знаходимо величину однієї одиниці для певної кількості або часу.
2) Відповідаємо на запитання задачі.

Мал. 73. Опорні схеми та план розв’язування задач на подвійне зведення до одиниці

Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці (І і ІІ підвид):

1) Чотири величини: кількість, час та загальне значення для даної кількості та часу, а також величина, яка поєднує усі ці величини, – „подвійна одиниця”.

2) Дано $\frac{загальне..значення..для..кількості..та..часу}{значення..подвійної..одиниці}$.

3) Шуканим є $\frac{значення..подвійної..одиниці}{загальне..значення..для..кількості..та..часу}$.

Наступна *зміна величин* задачі №2 та числових даних задачі не змінила її математичної структури і не вплинула на узагальнений план розв’язування. Отже, визначені вище істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці і узагальнений план розв’язування набули підтвердження.

Подальше дослідження задач на подвійне зведення до одиниці можна здійснити через *складання і розв’язування інших обернених задач*. Наприклад:

Пряма задача. На 3 дні 8 коровам дають 48 кг сіна. Скільки кілограмів сіна дають одній корові на один день?

Школярі складають короткий запис задачі, „впізнають” в цій задачі задачу на подвійне зведення до одиниці, і роблять висновок, що дана задача розв’язується двома способами (ставлять стрілочки і дужки) і розповідають план розв’язування за кожним з них.

Далі складається *перша обернена задача* на знаходження загальної величини для певної кількості і часу (задача ІІ підвиду).

На 1 день 1 корові дають 2 кг сіна. Скільки кілограмів сіна дають 8 коровам на 3 дні?

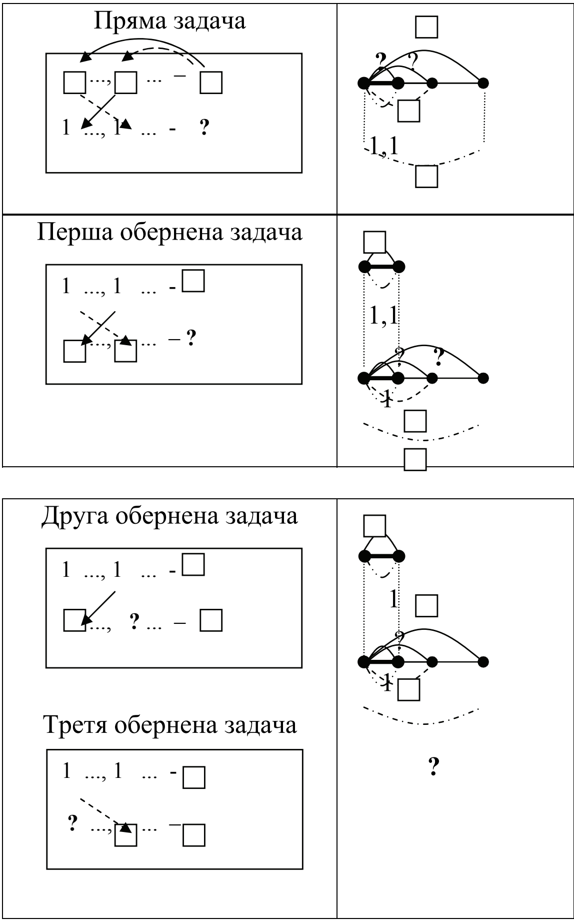
Робота над цією задачею йде аналогічно попередній. Після її розв’язання учні узагальнюють плани двох способів розв’язування прямої і першої оберненої задачі. Дослідження задачі йде далі, і діти складають *другу обернену задачу* на знаходження кількості.

На 1 день 1 корові дають 2 кг сіна. Скільком коровам вистачить 48 кг сіна на 3 дні?

Виконавши зміни у короткому записі попередньої задачі, діти дістають висновку, що ця задача також містить подвійну одиницю, тому вона відноситься до задач на подвійне зведення до одиниці. Згадуємо узагальнений спосіб розв’язування попередніх двох задач і складаємо план розв’язування цієї задачі (першою дією дізнаємося про масу силосу для 8 корів на 1 день. Другою дією відповімо на запитання задачі). Але учні стикаються з тим, що другу обернену задачу можна розв’язати лише одним способом.

Третя обернена задача. На 1 день 1 корові дають 2 кг сіна. На скільки днів вистачить 8 коровам 48 кг сіна?

Після розв’язання третьої оберненої задачі (одним способом) знов узагальнюємо план розв’язування усіх попередніх задач (мал. 74).



План розв’язування

1) Знаходимо величину однієї одиниці для певної кількості або часу;
2) Відповідаємо на запитання задачі.

Мал. 74. Опорні схеми прямих та обернених задач на подвійне зведення до одиниці та план їх розв’язування

Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці:

1) Чотири величини: кількість, час та загальне значення для даної кількості та часу, а також величина, яка поєднує усі ці величини, – „подвійна одиниця”.

2) Дано три числових значення даних величин.
3) Шуканим є одне з числових значень: або величини подвійної одиниці, або загальної величини, або кількості, або часу.

Треба зазначити, що цей елемент методики не є обов'язковим. Вчитель пропонує учням складати і розв'язувати обернені задачі залежно від рівня підготовленості класу; математичні структури таких задач відсутні у чинних підручниках математики для початкової школи.

1.4.3. Навчання розв'язування задач в 4-му класі

Учням пропонується задача на подвійне зведення до одиниці знайомої математичної структури (І підвид). Проаналізувавши її формулювання і записавши задачу коротко, діти визначають вид цієї задачі, згадують узагальнений план розв'язання та розв'язують задачу двома способами.

Задача 1. Два трактори за 4 год. роботи витратили 200 л бензину. Скільки палива витратить один трактор за одну годину?

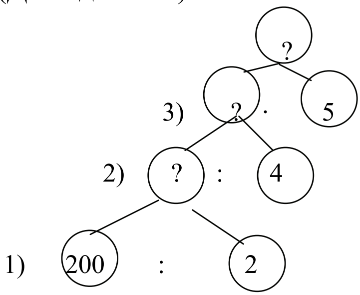
В задачі № 1 *змінюємо запитання*, шуканим стає величина однієї одиниці для іншого числового значення кількості або часу.

Задача 2. Два трактори за 4 години роботи витратили 200 л бензину. Скільки палива витратить один трактор за 5 годин?

Учні порівнюють цю задачу з попередньою і встановлюють, що вона є її продовженням. Отже ця задача має також два способи розв'язування: ставимо стрілочку і проводимо аналітичний пошук розв'язування, згідно першому способу.

- Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі "Скільки бензину треба 1-му трактору на 5 годин?". (Треба знати два числові значення: 1 – скільки літрів бензину треба 1-му трактору на 1-ну годину (не відомо), та ІІ – час роботи трактору (5 годин).)
- Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією множення.)
- Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Ні, ми не знаємо об'єм бензину для 1-го трактору на 1-ну годину). Об'єм бензину на 1-ну годину для 1-го трактора – це однакова величина.
- Що треба знати, щоб відповісти на запитання "Скільки літрів бензину треба 1-му трактору на 1-ну годину?" (Треба знати два числові значення: Об'єм бензину для 1-го трактору на весь час роботи (не відомо), та ІІ – час роботи (відомо, 4 години).

- Якою арифметичною дією відповімо на це запитання. (Дією ділення).
- Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Не можна, ми не знаємо об'єм бензину для 1 трактора на 4 години).
- Що треба знати, щоб знайти об'єм бензину для 1-го трактора на 4 години? (Треба знати два числові значення: 1 – загальний об'єм бензину (200 л), та II – кількість тракторів (відомо, 2).
- Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією ділення).



Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Так, нам відомі обидва числові дані). Отже ми від запитання перейшли до числових даних, аналіз закінчено.

- Складаємо план розв'язування задачі.

- Першою дією дізнаємося про об'єм пального на 4 години для 1-го трактора. Другою дією дізнаємося про об'єм пального на 1-ну годину для 1-го трактора. Але ми ще не відповімо на запитання задачі – це лише "ключ" для її розв'язку. Третьою дією відповімо на запитання задачі, і дізнаємося про об'єм пального на 5 годин для 1-го трактора.

Розв'язання: :

1) 200 : 2 = 100 (л) бензину на 4 години для 1 трактора.
2) 100 : 4 = 25 (л) бензину на 1 годину для 1 трактора.
3) 25 · 5 = 125 (л) бензину на 5 годин для 1 трактора.

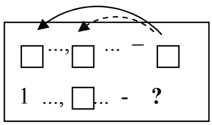
Звертаємо увагу дітей, на те що ключем до розв'язання задачі є величина „подвійної одиниці" – однакова величина. Далі ставимо дужку і пояснюємо другий спосіб розв'язування. Розв'язавши задачу іншим способом, порівнюємо обидва способи: в них спільні арифметичні дії та їх порядок, крім того, однакові останні дії і однакове пояснення до другої дії; відрізняються першими діями і поясненнями до них, а також другими діями. Учні показують стрілочками два способи розв'язування (мал. 88).

Узагальнюємо перший та другий способи розв'язування:

В першій дії ми знайшли величину однієї одиниці для даної кількості або часу.

В другій дії ми знайшли величину „подвійної одиниці” – „ключ” до розв’язання задачі.

В третій дії ми знайшли величину однієї одиниці для іншого значення кількості або часу.



Мал. 88. Опорна схема задачі на подвійне зведення до одиниці з системою стрілочок, що вказують на способи розв’язування

В попередній задачі *змінюємо ситуацію* задачі, *змінюємо величини*, а числові дані лишаємо тими самими. Учні складають задачу і з’ясовують, що розв’язувати її не треба – розв’язання двома способами вже є на дошці, слід змінити лише пояснення до арифметичних дій. Отже, зміна величин задачі не впливає ні на перший, ні на другий способи розв’язування.

Потім в попередній задачі лишаємо тими самими величини, але *змінюємо числові дані* і з’ясовуємо, як від цього зміниться розв’язання, власне план розв’язування. У розв’язанні попередньої задачі учні змінюють відповідні числа і пояснення до першої дії. Але арифметичні дії та їх порядок не змінюються. Узагальнений план розв’язування також не змінився.

Повертаємося до схематичного короткого запису даної задачі. Змінюємо смислове значення одного з чисел у другому випадку і досліджуємо, як ця зміна вплине на розв’язання задачі. Розв’язання майже не змінюється, учні поправляють лише пояснення до останньої дії, загальний план розв’язування не змінився.

Ознайомлення із задачами II підвиду. Учням пропонується задача першого підвиду на знаходження величини однієї одиниці для даного значення часу.

Чотирма сівалками за 9 годин засіяли 108 га ячменю. Скільки гектарів ячменю можна засіяти 1 сівалкою за 20 годин?

Діти „впізнають” задачу, встановлюючи, що вона має усі істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці, тому вона розв’язується двома способами. Актуалізується узагальнений план розв’язування задач цього виду і записується розв’язання двома способами.

1 спосіб:
1)108 : 9 = 12 (га) 4 сівалки за 1 годину
2)12 : 4 = 3 (га) 2 сівалка за 1 годину.
3)3 · 20 = 60 (га) 1 сівалка за 20 годин.
Або 108 : 9 : 4 · 20 = 60 (га)

ІІ спосіб:
1) 108 : 4 = 27 (га) 1 сівалка за 9 годин.
2) 27 : 9 = 3 (га) 1 сівалка за 1 годину.
3) 3 · 20 = 60 (га) 1 сівалка за 20 годин.
Або 108 : 4 : 9 · 20 = 60 (га)

Відповідь: 60 га ячменю можна засіяти 1 сівалкою за 20 годин.

Після розв'язання цієї задачі складаємо обернену задачу на знаходження числового значення часу у другому випадку.

Задача № 3.Чотирма сівалками за 9 годин засіяли 108 га ячменю. За скільки годин можна засіяти 60 га однією такою сівалкою?

Учні змінюють короткий запис попередньої задачі так, щоб одержати короткий запис даної задачі. Порівнюють ці задачі і дістають висновку, що вони мають схожу математичну структуру, тому вони мають схожі способи розв'язування. Учні ставлять стрілочки і розповідають спочатку розв'язання першим способом, а потім й другим.

Перший спосіб. Першою дією дізнаємося про площу ячменю, який засіяно 4 сівалками за 1 годину. Другою дією ми дізнаємося про площу ячменю , який засіяно 1 сівалками за 1 годину – це "ключ" до розв'язання задачі. Третьою дією ми відповімо на запитання задачі, дізнаємося за скільки годин можна засіяти 60 га однією такою сівалкою.

1) 108 : 9 = 12 (га) 4 сівалки за 1 годину
2) 12 : 4 = 3 (га) 2 сівалка за 1 годину.
3) 60 : 3 = 20 – за стільки годин засіють 60 га ячменю 1 сівалкою.

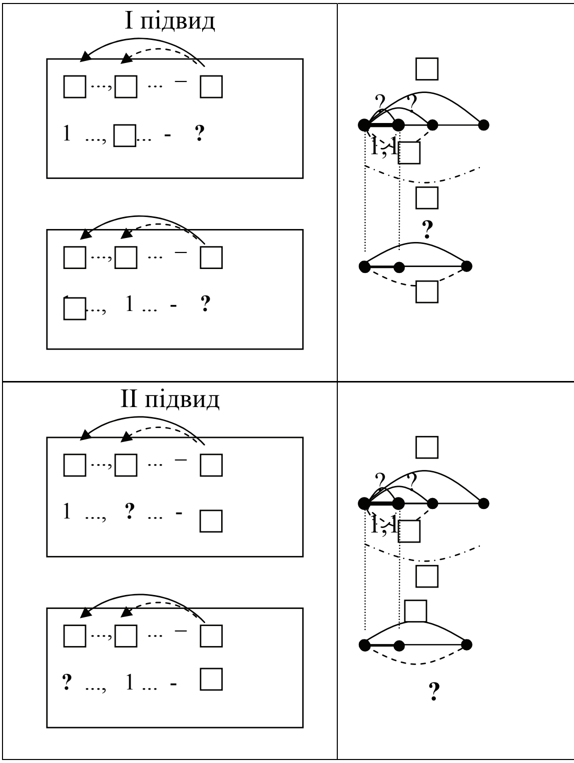
Другий спосіб. Першою дією дізнаємося про площу ячменю, який засіяно 1 сівалкою за 9 годин. Другою дією ми дізнаємося про площу ячменю , який засіяно 1 сівалками за 1 годину – це "ключ" до розв'язання задачі. Третьою дією ми відповімо на запитання задачі, дізнаємося за скільки годин можна засіяти 60 га однією такою сівалкою.

1) 108 : 4 = 27 (га) 1 сівалка за 9 годин.
2) 27 : 9 = 3 (га) 1 сівалка за 1 годину.
3) 60 : 3 = 20 – за стільки годин засіють 60 га ячменю 1 сівалкою.

Після запису розв’язання учні *порівнюють перший спосіб розв’язування прямої та оберненої задачі*: вони схожі двома першими діями, відрізняються останньою дією – у прямій задачі остання дія множення, а в оберненій остання дія ділення. Аналогічних висновків школярі дістають, порівнявши другі способи розв’язування прямої і оберненої задач.

Отже ці дві задачі мають схожу математичну структуру, тому вони відносяться до одного виду. Але розв’язання цих задач відрізняються останніми діями: в першій задачі остання дія множення, а в другій – ділення, тому перша задача є задачею І підвиду, а друга – ІІ підвиду.

Узагальнюємо математичні структури задач на подвійне зведення до одиниці і плани їх розв’язування (мал. 75).



План розв’язування
1) знаходимо величину однієї одиниці для даної кількості або часу;
2) знаходимо величину „подвійної одиниці”;
3) відповідаємо на запитання задачі.

Мал. 75. Опорні схеми та план розв’язування задач двох підвидів на подвійне зведення до одиниці (4-й клас)

Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці:

1) Чотири величини: кількість, час та загальне значення для даної кількості та часу, а також величина, яка поєднує усі ці величини, – подвійна одиниця.

2) Два випадки.

3) Величина подвійної одиниці однакова для обох випадків.

4) Для першого випадку дано числові значення і кількості, часу і загальної величини.

5) Для другого випадку дано лише величину однієї одиниці для певного значення $\frac{кількості}{часу}$ або значення $\frac{кількості}{часу}$, а значення $\frac{часу}{кількості}$ дорівнює 1.

6) Шуканою є величина $\frac{кількості}{часу}$ або величина однієї одиниці для даного значення $\frac{кількості}{часу}$ у другому випадку.

Змінюємо величини або числові значення у задачі № 3 і досліджуємо вплив цієї зміни на розв'язання задачі. Від зміни величин задачі та від зміни числових даних задачі математична структура задачі на подвійне зведення до одиниці не змінилася; причому від цих змін узагальнений план розв'язування також не змінився. Отже, якщо задача матиме розглянуту математичну структуру, незалежно від того, які величини вона містить та які числові дані, це буде задача на подвійне зведення до одиниці, яка розв'язується двома способами за узагальненим нами планом.

Наступне дослідження задачі на подвійне зведення до одиниці можна здійснити за допомогою *складання і розв'язування інших обернених задач*. Учням пропонується задача на знаходження величини одиниці для даного значення кількості або часу в другому випадку (І підвид):

Пряма задача. За 8 рейсів 3 машинами було перевезено 240 т вантажу. Скільки тонн вантажу можна перевезти однією машиною за 5 рейсів?

Школярі спочатку складають короткий запис задачі, потім „впізнають" в цій задачі задачу на подвійне зведення до одиниці; такі задачі розв'язуються двома способами (ставлять стрілочки) і розповідають план розв'язування за кожним з них.

1 спосіб

1) 240 : 8 = 30 (т) маса вантажу, яку перевозять 3 машини за 1 рейс.
2) 30 : 3 = 10 (т) маса вантажу, яку перевозить 1 машина за 1 рейс.
3) 10 · 5 = 50 (т) маса вантажу, яку перевозить 1 машини за 5 рейсів.
Або 240 : 8 : 3 · 5 = 50 (т)
2 спосіб
1) 240 : 3 = 80 (т) маса вантажу, яку перевозить 1 машина за 5 рейсів.
2) 80 : 8 = 10 (т) маса вантажу, яку перевозить 1 машина за 1 рейс.
3) 10 · 5 = 50 (т) маса вантажу, яку перевозить 1 машини за 5 рейсів.
Або 240 : 3 : 8 · 5 = 50 (т)

Далі складається перша обернена задача на знаходження кількості або часу у другому випадку (задача II підвиду).

Перша обернена задача. За 8 рейсів 3 машинами було перевезено 240 т вантажу. За скільки рейсів можна перевезти однією машиною 50 т вантажу?

Робота над цією задачею йде аналогічно попередній.
1 спосіб
1) 240 : 8 = 30 (т) маса вантажу, яку перевозять 3 машини за 1 рейс.
2) 30 : 3 = 10 (т) маса вантажу, яку перевозить 1 машина за 1 рейс.
3) 50 : 10 = 5 – за стільки рейсів перевезе одна машина 50 т вантажу.
Або 50 : (240 : 8 : 3) = 5 (р)
2 спосіб
1) 240 : 3 = 80 (т) маса вантажу, яку перевозить 1 машина за 8 рейсів.
2) 80 : 8 = 10 (т) маса вантажу, яку перевозить 1 машина за 1 рейс.
3) 50 : 10 = 5 – за стільки рейсів перевезе одна машина 50 т вантажу.
Або 50 : (240 : 3 : 8) = 5 (р)

Після її розв'язання учні узагальнюють плани двох способів розв'язування прямої і першої оберненої задачі.

Дослідження задачі йде далі, і діти складають другу обернену задачу на знаходження загальної величини для даних значень кількості машин та кількості рейсів.

Друга обернена задача. За 5 рейсів 1 машиною було перевезено 50 т вантажу. Скільки тонн вантажу можна перевезти за 8 рейсів трьома машинами?

Виконавши зміни у короткому записі попередньої задачі, діти дістають висновку, що ця задача також на подвійне зведення до одиниці, тому вона розв'язується за узагальненим планом двома способами.
1 спосіб

1) 50 : 5 = 10 (т) маса вантажу, яку перевозить 1 машина за 1 рейс.
2) 10 · 3 = 30 (т) маса вантажу, яку перевозять 3 машини за 1 рейс.
3) 30 · 8 = 240 (т) маса вантажу, яку перевозять 3 машини за 8 рейсів.
Або 50 : 5 · 3 · 8 = 240 (т)
2 спосіб
1) 50 : 5 = 10 (т) маса вантажу, яку перевозить 1 машина за 1 рейс.
2) 10 · 8 = 80 (т) маса вантажу, яку перевозить 1 машина за 8 рейсів.
3) 80 · 3 = 240 (т) маса вантажу, яку перевозять 3 машини за 8 рейсів.
Або 50 : 5 · 8 · 3 = 240 (т)

Після розв'язання другої оберненої задачі *порівнюємо* її розв'язання з попередніми – усі вони розв'язуються трьома діями і для розв'язання кожної треба знати „ключ" – величину „подвійної одиниці"; відрізняються вони тим, що в прямій та першій оберненій задачі для знаходження значення величини „подвійної одиниці" треба було виконати дві арифметичні дії – послідовно поділити загальне значення на дані значення кількості рейсів та кількості машин, а в другій оберненій задачі величину „подвійної одиниці" знаходимо першою дією, а для відповіді на її запитання треба виконати ще дві дії – послідовно помножити значення величини „подвійної одиниці" на значення кількості рейсів та кількості машин. Між тим, усі ці задачі розв'язуються трьома діями, і „ключем" до їх розв'язання є величина „подвійної одиниці".

Можна скласти ще дві обернені задачі, при їх розв'язанні діти стикаються з тим, що вони розв'язуються лише одним способом, але так само, як і інші задачі, трьома арифметичними діями, і „ключем" до їх розв'язання є значення „подвійної одиниці".

Третя обернена задача. За 5 рейсів 1 машиною було перевезено 50 т вантажу. За скільки рейсів можна перевезти трьома машинами 240 т вантажу?

1) 50 : 5 = 10 (т) маса вантажу, яку перевозить 1 машина за 1 рейс.
2) 10 · 3 = 30 (т) маса вантажу, яку перевозить 3 машини за 1 рейс.
3) 240 : 30 = 8 – за стільки рейсів перевезуть три машини 240 т вантажу.
Або 240 : (50 : 5 · 3) = 8 (р)

Четверта обернена задача. За 5 рейсів 1 машиною було перевезено 50 т вантажу. Скількома машинами за 8 рейсів можна перевезти 240 т вантажу?

1) 50 : 5 = 10 (т) маса вантажу, яку перевозить 1 машина за 1 рейс.
2) 10 · 8 = 80 (т) маса вантажу, яку перевозить 1 машина за 8 рейсів.

3) 240 : 80 = 3 – стількома машинами за 8 рейсів перевезуть 240 т вантажу.
Або 240 : (50 : 5 · 8) = 3 (р)

Після проведеної роботи існує можливість узагальнити усі розглянуті задачі на подвійне зведення до одиниці та узагальнити їх план розв’язання (мал. 76).

Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці:

1) Чотири величини: кількість, $\frac{час}{кількість}$ та загальне значення для даної кількості та $\frac{часу}{кількості}$, а також величина, яка поєднує усі ці величини, – подвійна одиниця.
2) Два випадки.
3) Величина „подвійної одиниці” однакова для обох випадків.
4) Задача містить п’ять числових значень, причому чотири дані за умовою задачі, а п’яте є шуканим.

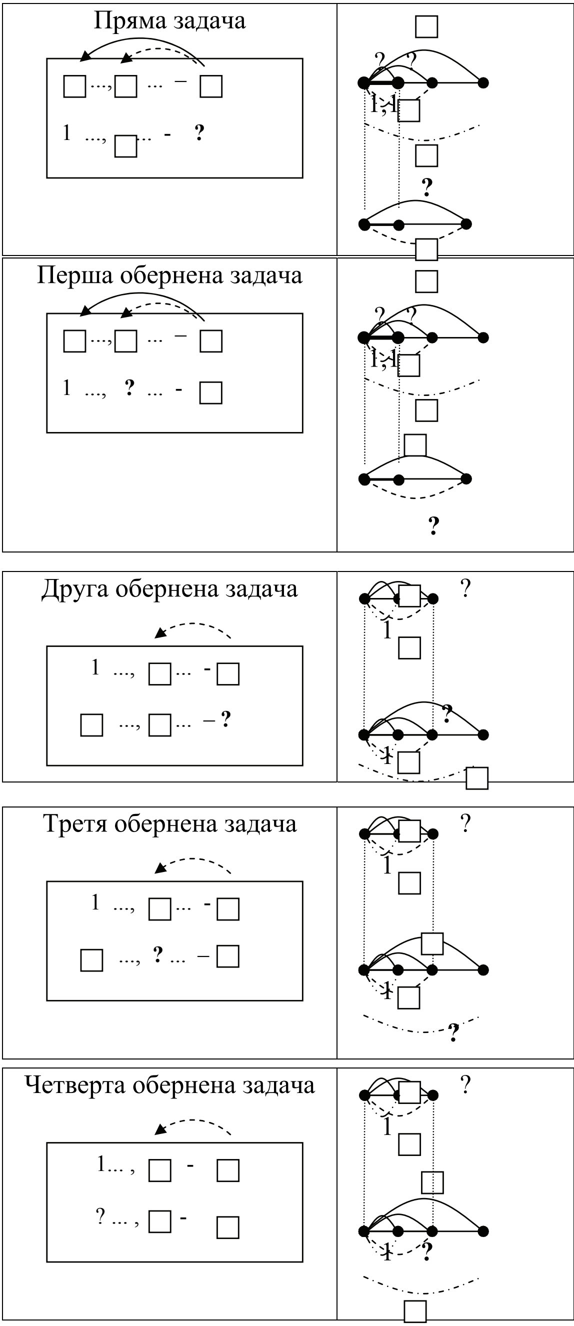
Дослідження взаємозв’язку задач на знаходження четвертого пропорційного та задач на подвійне зведення до одиниці. Як було зазначено вище, задачі на подвійне зведення до одиниці належать до ускладнених задач на знаходження четвертого пропорційного. Але, крім наявності в цих задачах величини однієї або „подвійної” одиниці, інших спільних ознак учні не встановили між задачами на знаходження четвертого пропорційного та на подвійне зведення до одиниці. Це пояснюється математичною структурою задач на подвійне зведення до одиниці, що пропонувалися в 3-му класі. В 4-му класі математична структура задач цього виду ускладнюється, і існує можливість перетворити задачу на знаходження четвертого пропорційного у задачу на подвійне зведення до одиниці, тим самим показавши взаємозв’язок між ними.

Тому учням пропонується для розв’язання задача на знаходження четвертого пропорційного, в якій однаковою є величина однієї одиниці, а шуканим є значення загальної величини.

За 3 рейси човняр перевіз через річку 18 чоловік. Скільки чоловік він зможе перевезти за 7 рейсів?

Діти „впізнають” задачу та застосовують узагальнений план розв’язування задач на знаходження четвертого пропорційного.

1) 18 : 3 = 6 (ч.) – кількість людей за 1 рейс;
2) 6 · 7 = 42 (ч.) – загальна кількість людей за 7 рейсів



Спосіб розв'язування

„Ключем" до розв'язання є знаходження значення величини „подвійної одиниці".

Мал. 76. Опорні схеми та план розв'язування прямих та обернених задач на подвійне зведення до одиниці (4-й клас) або $18 : 3 \cdot 7 = 42$ (ч.)

Робота над задачею після її розв'язання полягає *в ускладненні задачі на знаходження четвертого пропорційного, засобом введення значення ще однієї величини*. Записавши задачу на знаходження четвертого пропорційного у вигляді пропорції, діти зазначають, що „ключем" до розв'язання цієї задачі було знаходження однакової величини – величини однієї одиниці. Ускладнюємо цю задачу, увівши числове значення ще однієї величини: наприклад, в попередній задачі мова йшла про працю одного човняра, а в ускладненій – про роботу кількох човнярів. Зрозуміло, що у зв'язку з тим, що кількість човнярів збільшилася, збільшиться і значення загальної величини (кількості людей, що перевіз човняр) у стільки разів, у скільки разів збільшилася кількість човнярів. У попередній задачі замінюють числове значення загальної величини в першому випадку на знайдене число. Запитання задачі лишаємо тим самим, але підкреслюємо, що запитується про одного човняра.

За 3 рейси 2 човняра перевезли 36 чоловік. Скільки чоловік перевезе 1 човняр за 7 рейсів?

Порівнявши отриману задачу з попередньою, діти встановлюють, що в них описується одна й та сама ситуація, є спільні величини, але в першій задачі мова йшла тільки про одного човняра, а у другій задачі – в першому випадку працюють два човнярі, а у другому лише один. Короткий запис задачі на знаходження четвертого пропорційного доповнюється відповідними числовими даними, і діти „впізнають" отриману задачу – задачу на подвійне зведення до одиниці. Згадується узагальнений план розв'язування задач цього виду, і школярі розв'язують одержану задачу двома способами. Звертаємо увагу на один з них:

1) $36 : 2 = 18$ (ч.) – перевезе 1 човняр за 3 рейси;
2) $18 : 3 = 6$ (ч.) – перевезе 1 човняр за 1 рейс;
3) $6 \cdot 7 = 42$ (ч.) – перевезе 1 човняр за 7 рейсів.

$36 : 2 : 3 \cdot 7 = 42$ (ч.)

Після розв'язання задачі учні порівнюють розв'язання задачі на подвійне зведення до одиниці та задачі на знаходження четвертого пропорційного, і дістають висновку: задача на подвійне зведення до одиниці розв'язується трьома діями, тому що введено значення ще однієї величини, а задача на знаходження четвертого пропорційного –

двома; причому обидва розв’язання містять дві однакові дії. Можна стверджувати, що виконавши першу дію у розв’язанні задачі на подвійне зведення до одиниці, ми привели цю задачу до задачі на знаходження четвертого пропорційного. Спільним в обох задачах є наявність однакової величини – величини однієї одиниці в задачі на знаходження четвертого пропорційного і величини „подвійної одиниці” у задачі на подвійне зведення до одиниці. Спосіб розв’язування цих задач полягає у знаходженні значення величини однієї одиниці (зведення до одиниці) або значення величини „подвійної одиниці” (подвійне зведення до одиниці).

2. Методика формування окремих умінь розв’язувати задачі на процеси

Задачі на спільну роботу та на рух мають багато спільного у математичній структурі: обидва види задач містять три пропорційні величини, два об’єкти; але вони описують різні процеси: перші описують процес спільної праці двох об’єктів, а інші спільний рух двох тіл. Математична структура цих видів задач містить характеристики $\frac{\textit{роботи}}{\textit{руху}}$ кожного з двох об’єктів, та характеристики їх спільної $\frac{\textit{роботи}}{\textit{руху}}$. А також задачі на спільну роботу та задачі на рух мають однакові способи розв’язування. Тому нами реалізовано ідею співставлення задач цих видів з метою узагальнення їх математичних структур та способів розв’язування.

Центральною ідеєю методики навчання учнів розв’язування цих видів задач **є всебічний аналіз і дослідження задачі, залежно від таких її трансформацій**:

- за зміною ситуації задачі і визначення впливу цієї зміни на розв’язання задачі;
- за зміною числових даних і визначення впливу цього на план розв’язування задачі;
- за зміною шуканої величини і визначення впливу цієї зміни на план розв’язування задачі;

Для реалізації загальної програми нами розроблено методику навчання молодших школярів розв’язування кожного з зазначених видів задач.

2.1. Задачі на спільну роботу

Методика формування в учнів уміння розв'язувати задачі на спільну роботу реалізується у 3-му та 4-му класах. Це пояснюється дещо відмінними математичними структурами задач цього виду: так в 3-му класі пропонуються задачі на спільну роботу, в яких дано продуктивності кожного виконавця, а у 4-му – не дано продуктивність кожного виконавця, вона є проміжним невідомим.

Дослідження задач на спільну роботу відбувається за наступними ***змінами***: *зміною ситуації задачі; зміною числових даних задачі; зміною шуканого задачі; за зміною „характеру дій" виконавців.*

Виконавши певні зміни учні досліджують їх вплив на математичну структуру та план розв'язування задачі. Таке дослідження задачі є могутнім засобом визначення істотних ознак математичної структури та узагальнення плану розв'язування задачі.

Істотні ознаки задач на спільну роботу (3-й клас):

1) ці задачі містять три пропорційні величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи;

2) ці задачі містять три випадки: перший – стосується роботи першого виконавця, другий – роботи другого виконавця, а третій – спільної роботи двох виконавців;

3) дано продуктивності кожного виконавця, а шуканим є $\dfrac{\textit{час..спільної..роботи}}{\textit{загальний..виробіток..при..спільній..роботі}}$ або дано загальний виробіток та час при спільній роботі, а шуканим є продуктивність праці одного з виконавців.

План розв'язання задач на спільну роботу (3-й клас):

1) першою дією знаходимо продуктивність спільної праці виконавців;

2) другою дією відповідаємо на запитання задачі.

Істотні ознаки задач на спільну роботу (4-й клас):

1) ці задачі містять три пропорційні величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи;

2) ці задачі містять три випадки: перший стосується роботи першого виконавця, другий – роботи другого виконавця, третій – спільної роботи двох виконавців.

3) для двох випадків дано значення загального виробітку і часу роботи;

4) для іншого випадку дано лише одне числове значення (або загального виробітку, або часу роботи), а інше – є шуканим.

***План розв'язання задач на спільну роботу* (4-й клас)**

1) першою дією знаходимо продуктивність $\frac{першого..виконавця}{спільну}$;

2) другою дією знаходимо продуктивність $\frac{другого}{першого..або..другого}$ виконавця;

3) третьою дією знаходимо продуктивність

$\frac{спільну}{другого..або..першого}$;

4) четвертою дією відповідаємо на запитання задачі.

2.1.1. Навчання розв'язування задач в 3-му класі

Підготовча робота. На цьому етапі слід актуалізувати знання групи пропорційних величин: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи, та взаємозв'язок між цими величинами. Це можна зробити під час розв'язання простих та складених задач, що містять дану групу величин.

Ключем до розв'язання задач на спільну роботу є знаходження *„продуктивності спільної праці” двох виконавців*. Тому на етапі підготовчої роботи учні розв'язують прості задачі на знаходження спільної продуктивності. При цьому корисно ставити запитання: „Більше чи менше, ніж ... (продуктивність одного виконавця), зроблять обидва виконавці, якщо працюватимуть разом?” або „Більше чи менше часу, ніж … (час роботи окремо одного з виконавців) витратять на працю обидва виконавця, якщо працюватимуть разом?”. Наприклад:

1. Батько може скопати рядок за 30 хвилин, а син – за 40 хвилин. Якщо вони працюватимуть разом, для того щоб скопати цей рядок, їм потрібно більше чи менше часу, ніж 30 хвилин? Ніж 40 хвилин?

2. Одна друкарка за годину друкує 5 сторінок, а інша – 4. Скільки сторінок надрукують за годину обидві друкарки?

Ознайомлення. Задача нової математичної структури являє собою продовження попередньої задачі на знаходження спільної продуктивності (2). В цій задачі треба знайти час роботи, за який обидва виконавці виконають певний обсяг роботи.

Задача № 1. Одна друкарка друкує за годину 5 сторінок, інша 4. Скільки годин вони повинні працювати разом, щоб надрукувати 72 сторінки?

Порівнявши цю задачу з попередньою, учні встановлюють, що вона є її продовженням і досліджують, як ця зміна впливає на розв’язання задачі – щоб відповісти на запитання цієї задачі слід виконати ще одну арифметичну дію. Отже, першою дією (дією додавання) знайшли продуктивність спільної праці, а другою дією знайшли час спільної праці і відповіли на запитання задачі. Вчитель звертає увагу на те, що в цій задачі запитується про час спільної праці двох виконавців – це задача на спільну роботу. Учні визначають слова в тексті задачі, які вказують на те, що в ній йдеться про спільну роботу – це слова „працюючи разом” або їх синоніми.

Зміна ситуації задачі № 1 і дослідження впливу цієї зміни на розв’язання задачі. Якщо в попередній задачі йшла мова про роботу двох друкарок (загальний виробіток – загальна кількість сторінок, продуктивність праці – кількість сторінок за 1 годину, час роботи), то пропонуємо учням змінити ситуацію задачі, припустимо працюватимуть два насоси (загальний виробіток – загальна маса води, продуктивність праці – маса води за 1 годину, час роботи.). Учні складають задачу і встановлюють, що це також задача на спільну роботу, в якій слід знайти час спільної роботи, причому ця зміна не впливає на розв’язання задачі, слід „підправити” пояснення до арифметичних дій.

Зміна числових даних не впливає ні на математичну структуру задачі, ні на план її розв’язування. У запису розв’язання попередньої задачі слід змінити відповідні числа, а пояснення залишаться тими самими.

Узагальнюємо математичну структуру та план розв’язування задач на знаходження часу спільної роботи (мал. 77).

Істотні ознаки задач на спільну роботу:

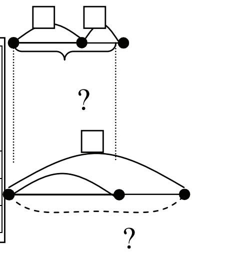
1) три величини: загальний виробіток, продуктивність праці і час роботи;

2) три випадки: перший випадок стосується роботи першого виконавця, другий випадок стосується роботи другого виконавця, а третій – спільної роботи обох виконавців.

3) до перших двох випадків дано продуктивність роботи кожного виконавця;

4) до третього випадку дано загальний виробіток спільної праці, а час спільної праці є шуканим.

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
І		□	
ІІ		□	
ІіІІ	□	?	**?**



План розв'язування

1. Знаходимо спільну продуктивність, дією додавання.
2. Знаходимо час спільної роботи дією ділення, відповідаємо на запитання задачі.

Мал. 77. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу

Зміна шуканого задачі № 1 і дослідження впливу цієї зміни на математичну структуру задачі та план її розв'язування. Діти складають обернену задачу на знаходження загального виробітку при спільній роботі (вносять зміни у короткий запис задачі № 1).

Перша обернена задача. Одна друкарка друкує за годину 5 сторінок, а інша 4 сторінки. Скільки сторінок вони надрукують за 8 годин, якщо працюватимуть разом?

З'ясовують, що математична структура задачі майже не змінилася: задача містить ті самі величини, три випадки, до перших двох випадків дано продуктивність кожного, до третього випадку дано час роботи, а загальний виробіток є шуканим. Це також задача на спільну роботу, тому що запитується про загальний виробіток при спільній роботі. Учні згадують узагальнений план розв'язування задач на спільну роботу і встановлюють, що ця зміна вплине на останню дію – останньою дією буде дія множення, тому що знаходять загальний виробіток.

Далі складаємо другу обернену задачу на знаходження продуктивності першого виконавця (вносимо зміни у короткий запис попередньої задачі).

Друга обернена задача. Дві друкарки, працюючи разом за 8 год. надрукували 72 сторінки. Скільки сторінок за 1 год. друкує перша друкарка, якщо інша за 1 год. друкує 4 сторінки?

Отримуємо також задачу на спільну роботу: вона має ті самі істотні ознаки, що й попередні, але шуканою є продуктивність першого виконавця. Ця зміна впливає на розв'язання задачі так:

першою дією так само знаходимо продуктивність спільної роботи двох виконавців, але не за даними продуктивностей кожного, а за загальним виробітком при спільній праці та за часом спільної праці, дією ділення; другою дією відповідаємо на запитання задачі і знаходимо продуктивність першого виконавця дією віднімання.

Школярам пропонується скласти третю обернену задачу на знаходження продуктивності роботи другого виконавця і дослідити вплив цієї зміни на математичну структуру задачі та план її розв'язування. Після чого узагальнюється математична структура задач на спільну роботу та план їх розв'язування (мал. 78).

Істотні ознаки задач на спільну роботу:

1) три пропорційні величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи;
2) три випадки: перший – стосується роботи першого виконавця, другий – роботи другого виконавця, а третій – спільної роботи двох виконавців;
3) дано продуктивності кожного виконавця, а шуканим є $\dfrac{\textit{час..спільної..роботи}}{\textit{загальний..виробіток..при..спільній..роботі}}$ або дано загальний виробіток та час при спільній роботі, а шуканим є продуктивність праці одного з виконавців.

2.1.2. Навчання розв'язування задач в 4-му класі

Підготовча робота. Актуалізуємо уміння розв'язувати задачі, які містять величини: загальний виробіток, продуктивність праці та час роботи, різних математичних структур, в тому числі і на знаходження четвертого пропорційного. Крім того, учні згадують істотні ознаки та способи розв'язування задач на спільну роботу, які пропонувалися в 3-му класі.

Так само, як і в 3-му класі на етапі підготовки пропонуємо учням задачі на знаходження спільної продуктивності, але не прості, а складені.

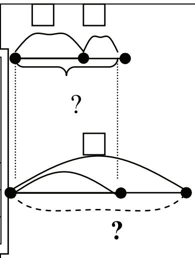
В цих задачах не дано продуктивності роботи кожного виконавця, але відомий загальний виробіток та час роботи кожного з виконавців. Наприклад:

640 відер води перший насос може викачати за 8 хвилин, а другий викачує 420 відер води за 6 хвилин. Скільки відер води викачають за 1 годину обидва насоси, якщо працюватимуть разом?

3-й клас

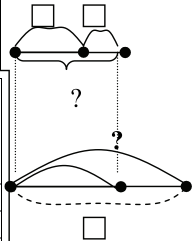
Пряма задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I		$\square$	
II		$\square$	
IiII	$\square$	?	?



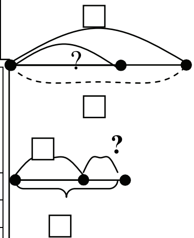
Перша обернена задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I		$\square$	
II		$\square$	
IiII	?	?	$\square$



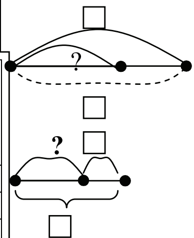
Друга обернена задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I		$\square$	
П		?	
IiП	$\square$	?	$\square$



Третя обернена задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I		?	
II		$\square$	
IiII	$\square$	?	$\square$



<u>План розв’язування</u>

1) знаходимо спільну продуктивність;

2) відповідаємо на запитання задачі.

Мал. 78. Опорні схеми та план розв’язання прямих та обернених задач на спільну роботу

Отже, на цьому етапі опрацьовуємо уміння знаходити спільну продуктивність за даними загального виробітку та часу роботи кожного виконавця – щоб знайти спільну продуктивність двох виконавців треба: 1) знайти продуктивність першого; 2)знайти продуктивність другого; 3) знайти спільну продуктивність.

Ознайомлення. Учням спочатку пропонується підготовча задача на знаходження спільної продуктивності за даними загального виробітку (він однаковий для обох виконавців) та часу роботи кожного виконавця.

24 тони води перший насос може викачати за 6 годин, а другий – за 3 години. Скільки тон води викачають за 1 годину обидва насоси, якщо працюватимуть разом?

Діти згадують, як знаходиться спільна продуктивність і формулюють план розв'язування цієї задачі. Далі в цій задачі змінюється запитання задачі і шуканим стає час спільної роботи при тому самому загальному виробітку.

Задача 1. 24 т води перший насос може викачати за 6 годин, а другий – за 3 години. За скільки годин викачають цю воду обидва насоси, якщо будуть працювати разом?

Школярі порівнюють задачу № 1 з попередньою і встановлюють, що ця задача є її продовженням. Далі проводиться аналітичний пошук розв'язування і складається план розв'язування задачі; з'ясовується, як зміна запитання задачі вплинула на її розв'язання – треба виконати ще одну арифметичну дію, щоб відповісти на запитання задачі.

Зміна ситуації задачі № 1 та зміна числових даних не впливає на математичну структуру задачі та план її розв'язування. Після проведеної роботи учні порівнюють усі ці задачі і узагальнюють їх математичну структуру та план розв'язування (мал. 79).

Істотні ознаки задач на спільну роботу, в яких шуканим є час спільної праці:

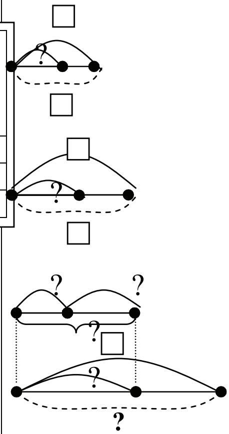
1) три пропорційні величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи;

2) три випадки: перший стосується роботи першого виконавця, другий – роботи другого виконавця, а третій – спільної роботи обох виконавців;

3) для двох випадків (першого і другого) дано значення загальної продуктивності і часу роботи;

4) для одного з випадків (третього) дано значення загальної величини, а значення часу є шуканим.

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I	□	?	□
II	□	?	□
IіII	□	?	**?**



План розв'язування

1) знаходимо продуктивність першого виконавця;
2) знаходимо продуктивність другого виконавця;
3) знаходимо спільну продуктивність;
4) знаходимо час спільної роботи, відповідаємо на запитання задачі.

Мал. 79. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу, в яких шуканим є час спільної праці (4-й клас)

Зміна шуканого задачі № 1 та дослідження впливу цієї зміни на математичну структуру і план розв'язання задачі. Учням пропонується скласти і розв'язати обернену задачу на знаходження загального виробітку при спільній роботі. Вони виконують зміни у короткому записі прямої задачі і формулюють обернену задачу.

Перша обернена задача. 24 т води перший насос може викачати за 6 годин, а другий – за 3 години. Скільки тон води викачають обидва насоси за 2 години, працюючи разом?

Далі з'ясовується, що одержана задача також відноситься до задач на спільну роботу і має аналогічний план розв'язування, але зміна шуканого впливає на четверту дію: остання дія в першій оберненій задачі – дія множення, тому що шуканим є загальний виробіток. Порівнявши плани розв'язування прямої та першої оберненої задачі діти формулюють узагальнений план розв'язування.

Дослідження задачі йде далі: складаються і розв'язуються ще чотири обернені задачі – на знаходження часу роботи першого (другого) виконавця та на знаходження загального виробітку першого (другого) виконавця.

Друга обернена задача. 24 т води другий насос може викачати за 3 години. За скільки годин викачає цю воду перший насос, якщо працюючи разом цю воду вони викачують за 2 години?

Третя обернена задача. 24 т води другий насос може викачати за 3 години. Скільки тон води викачає перший насос за 6 годин, якщо працюючи разом цю воду вони викачують за 2 години?

Четверта обернена задача. 24 т води перший насос може викачати за 6 годин. За скільки годин викачає цю воду другий насос, якщо працюючи разом цю воду вони викачують за 2 години?

П'ята обернена задача. 24 т води перший насос може викачати за 6 годин. Скільки тон види викачає другий насос за 3 години, якщо працюючи разом цю воду вони викачують за 2 години?

Отримавши короткі записи обернених задач шляхом виконання змін у короткому записі попередньої задачі, діти встановлюють, що це так само, задачі на спільну роботу. Ключем до розв'язання задач на спільну роботу є знаходження спільної продуктивності, але в 2-5 обернених задачах спільну продуктивність знаходять за даними загального виробітку при спільній роботі та за часом спільної роботи. Далі розв'язання йде традиційно – знаходимо продуктивність одного з виконавців за даними його загального виробітку та часу роботи. А продуктивність іншого виконавця знаходимо, як різницю знайдених числових значень, що надає нам можливість відповісти на запитання задачі.

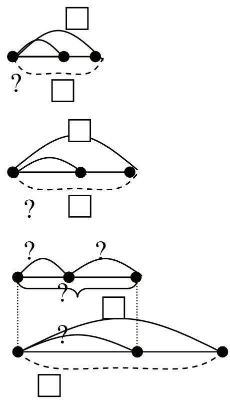
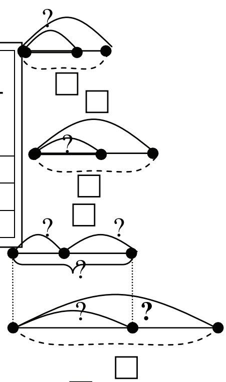
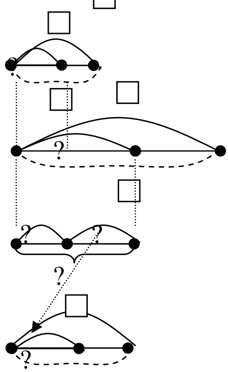
Таким чином, порівнявши математичні структури прямої і обернених задач та плани їх розв'язування, узагальнюємо математичну структуру задач на спільну роботу та план розв'язування (табл. 5).

Істотні ознаки задач на спільну роботу:

1) три пропорційні величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи;
2) три випадки: перший стосується роботи першого виконавця, другий – роботи другого виконавця, третій – спільної роботи двох виконавців.
3) для двох випадків дано значення загального виробітку і часу роботи;
4) для іншого випадку дано лише одне числове значення (або загального виробітку, або часу роботи), а інше – є шуканим.

Таблиця 5

Опорні схеми та плани розв'язування прямих і обернених задач на спільну роботу (4-й клас)

<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th><th>План розв'язування</th></tr>
<tr><td>Пряма задача</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Загальний виробіток</th><th>Продуктивність праці</th><th>Час роботи</th></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td>IіII</td><td>□</td><td>?</td><td>?</td></tr>
</table>
</td><td></td><td rowspan="3">
<u>План розв'язування</u>
1) знаходимо продуктивність першого..виконавця / спільну ;
2) знаходимо продуктивність другого / першого..або..другого виконавця;
3) знаходимо продуктивність спільну / другого..або..першого ;
4) відповідаємо на запитання задачі.
</td></tr>
<tr><td>Перша обернена задача</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Загальний виробіток</th><th>Продуктивність праці</th><th>Час роботи</th></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td>IіII</td><td>?</td><td>?</td><td>□</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Друга обернена задача</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Загальний виробіток</th><th>Продуктивність праці</th><th>Час роботи</th></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td><td>?</td><td>?</td></tr>
<tr><td>IіII</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
</table>

Третя обернена задача

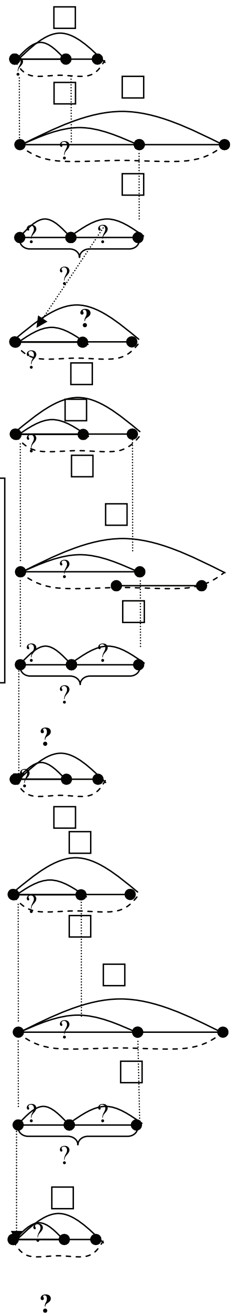
	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I	□	?	□
II	?	?	□
ІіІІ	□	?	□

Четверта обернена задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I	?	?	□
II	□	?	□
ІіІІ	□	?	□

П'ята обернена задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I	□	?	?
I	□	?	□
ІіІІ	□	?	□



2.1.3. Ознайомлення з задачами на спільну роботу, в яких спільна продуктивність являє собою різницю продуктивностей двох виконавців

Учням пропонується розв'язати задачу на спільну роботу на знаходження часу спільної праці, в якій продуктивність спільної праці знаходять дією додавання.

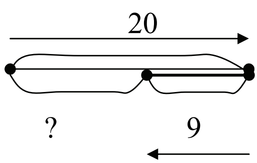
18 т води перший насос може викачати за 6 год., а другий – за 3 год. За скільки годин викачають 18 т води обидва насоси, працюючи разом?

Причому школярам пропонується готове розв'язання, в якому час спільної праці знайшли додаванням часу роботи кожного виконавця. Діти пояснюють, що у задачах на спільну роботу можна додавати лише продуктивності кожного виконавця, а не можна додавати час їхньої роботи. Отже, увага учнів зосереджується на тому, що продуктивність спільної праці можна знайти дією додавання.

В наступній задачі виконавці „*діють у протилежних напрямках*” – через кран вода вливається, а через зливний отвір вода виливається.

За годину через верхній кран вливається 20 відер води, а через нижній кран за годину виливається 9 відер води. Скільки відер води наллється в бак за 1 годину? За 2 години? За 3 години?

Учням пропонується, спираючись на схематичний рисунок,



визначити як і на скільки змінюється загальна величина за одиницю часу у випадку роботи обох виконавців? Як змінюється загальна величина за певний час спільної роботи обох виконавців?

Діти дістають висновку, що продуктивність спільної роботи знаходять:

1) додаванням продуктивностей роботи кожного виконавця, якщо обидва виконавця „працюють в одному напрямку – на один результат” ;

2) відніманням продуктивностей роботи кожного виконавця, якщо обидва виконавця „працюють у протилежних напрямках – на протилежні результати”.

Коли засвоєні способи знаходження продуктивності спільної праці і випадки, в яких вони застосовуються, учням пропонується „типова” задача на спільну роботу, в якій продуктивність спільної праці знаходиться дією віднімання.

Через кран у ванну за 1 хвилину вливається 20 л води, а через зливний отвір за 1 хвилину виливається 15 л води. За скільки хвилин наповниться ванна, об'ємом 160 л, якщо і кран, і зливний отвір будуть весь час відкриті?

З метою перевірки правильності розв'язання задачі пропонуємо учням скласти і розв'язати різноманітні обернені задачі.

2.2. Задачі на рух в різних напрямках (назустріч та у протилежних напрямках)

Особливий вид задач, які містять опис процесу руху двох тіл одне відносно одного, які переміщуються в одному або в різних напрямках, ми називаємо задачами на рух. До задач на рух відносяться задачі: на рух в різних напрямках: назустріч, в протилежних напрямках; на рух в одному напрямку: навздогін та з відставанням.

Задачі на рух містять пропорційні величини: відстань, швидкість та час. Кожна з цих задач має три підвиди в залежності від даних та шуканого: I – *задачі на знаходження відстані*: дано швидкості обох тіл та час їх спільного руху, треба знайти відстань; II – *задачі на знаходження швидкості*: дано відстань, яку подолали обидва тіла, відомий час їх спільного руху та швидкість одного з тіл, треба знайти швидкість другого тіла; III – *задачі на знаходження часу*: дано значення відстані та швидкостей обох тіл, треба визначити час їх спільного руху.

В методичній літературі описано підхід до ознайомлення учнів с задачами на одночасний рух в різних напрямках згідно з яким учні спочатку знайомляться з трьома підвидами задач на одночасний рух назустріч і розв'язують їх двома способами, і лише після цього знайомляться с задачами на одночасний рух в протилежних напрямках (М. О. Бантова, М. В. Богданович, М. В. Король, Я. А. Козак, О. О. Свєчніков, О. С. Пчьолко, Н. Б. Істоміна та інші). Між тим, задачі на знаходження відстані при одночасному русі назустріч та в протилежних напрямах мають однакові способи розв'язування. Те ж саме, можна сказати і про задачі на знаходження швидкості та часу. Тому, ***має сенс розглядати одночасно задачі на рух назустріч та задачі на рух в протилежних напрямах.***

Треба зазначити, що традиційно учні відразу знайомляться із двома способами розв'язування задач на знаходження відстані і швидкості. Однак, ці способи принципово відмінні: при розв'язанні першим способом розглядається рух кожного тіла окремо, і лише потім відповідають на запитання задачі; а при розв'язанні другим способом розглядається рух одного тіла відносно іншого і дізнаються на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу. Саме це є „ключем" до розв'язання задачі, після чого можна відповісти на її запитання. Практика свідчить, що діти краще засвоюють перший спосіб міркування, другий спосіб викликає у багатьох дітей труднощі. Тому ми пропонуємо ***спочатку навчити молодших школярів розв'язувати задачі першим способом, а потім – другим; після чого їх порівняти и узагальнити***.

Отже, ми пропонуємо підхід, коли *задачі на одночасний рух назустріч і одночасний рух в протилежних напрямках розглядаються разом, спочатку розв'язуються задачі на знаходження відстані і швидкості першим способом, і після засвоєння першого способу, вводиться другий спосіб і вивчаються задачі на знаходження часу*.

Дослідження задач на одночасний рух відбувається за наступними змінами*: за зміною напрямку руху тіл; за зміною числових даних задачі; за зміною шуканого*.

Визначення впливу цих змін на математичну структуру задачі та план її розв'язування допомагає учням сформулювати істотні ознаки задач на одночасний рух в різних напрямках та план їх розв'язування:

Істотні ознаки задач на одночасний рух назустріч та у протилежних напрямках:

1) в цих задачах йде мова про спільний рух двох тіл - $\frac{\textit{назустріч}}{\textit{в..протилежних..напрямках}}$;

2) в цих задачах є чотири числові значення: швидкість руху першого тіла, швидкість руху другого тіла, час їх спільного руху, відстань, яку подолали обидва тіла під час спільного руху; при чому три з них дані, а одне – шукане.

План розв'язування (1 спосіб: S, V)

1) першою дією визначають відстань, яку подолало перше тіло.

2) другою дією визначають відстань, яку подолало друге тіло.

3) третьою дією відповідають на запитання задачі.

План розв'язування (2-й спосіб)

1) першою дією визначають на скільки $\frac{\textit{збільшується}}{\textit{зменшується}}$ відстань між тілами за одиницю часу.

2) другою дією відповідають на запитання задачі.

2.2.1. Підготовча робота

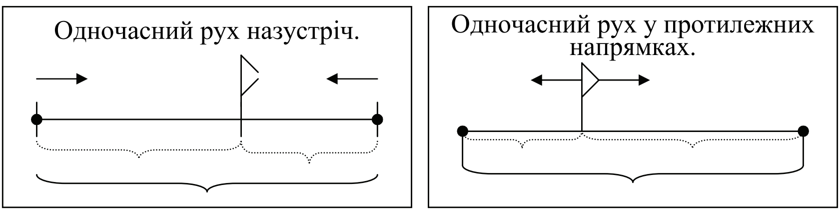
Мета – актуалізувати знання пропорційних величин: відстань, швидкість та час, взаємозв'язків між ними; спостереження за рухом двох тіл відносно одне одного.

Актуалізація знань учнів про пропорційні величини: відстань, швидкість та час здійснюється під час розв'язування простих та складених задач відомих дітям видів. Крім того, на цьому етапі треба повторити не лише взаємозв'язок між даними величинами, а й приділити певну увагу фізичному змісту швидкості. Наприклад:

1. Пояснити зміст речень: равлик повзе зі швидкістю 6 $\frac{м}{год}$; літак летить зі швидкістю 950 $\frac{км}{год}$.

2. Чому дорівнює швидкість руху: меч-риби, якщо вона за кожну годину пропливає по 100 км; верблюда, якщо він за кожну годину проходить 25 км.

На етапі підготовчої роботи також слід узагальнити і систематизувати уявлення дітей про рух назустріч та рух у протилежних напрямах. З цією метою учні спостерігають за рухом одного тіла відносно іншого і вчаться схематично зображати рух (мал. 80).



Мал. 80. Схематичне зображення одночасного руху назустріч та у протилежних напрямках

Спостерігаючи за одночасним рухом двох тіл учні роблять висновки про характер зміни відстані між тілами під час руху назустріч та при русі у протилежних напрямках, про час руху обох тіл та про величину відстані між тілами на момент початку (закінчення) руху.

Під час одночасного руху $\dfrac{назустріч}{в...протилежних...напрямках}$:

1. Відстань між тілами весь час $\dfrac{зменшується}{збільшується}$.

2. Весь шлях складається зі шляху, який подолано першим тілом та шляху, який подолало друге тіло.

3. Кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно і закінчили рухатися одночасно.

Для усвідомлення зроблених висновків учням пропонують спеціальні завдання на знаходження часу руху кожного тіла, якщо відомий час зустрічі тіл; на знаходження часу руху одного з тіл, якщо відомий час руху другого тіла до зустрічі; на порівняння відстаней, що подолало кожне тіло, за умов однакових та різних швидкостей; на *визначення характеру зміни відстані між тілами при їх одночасному русі назустріч та у протилежних напрямках*, та *визначення числового значення цієї зміни за одиницю часу*. Наприклад:

1. Із двох міст одночасно назустріч вийшли два пішоходи і зустрілися через 3 години. Скільки часу рухався кожний пішохід?
2. З села в місто вийшов пішохід і в цей же час із міста назустріч йому виїхав мотоцикліст, який зустрів пішохода через 40 хвилин. Скільки часу рухався до зустрічі пішохід?
3. Два пішохода вийшли одночасно в протилежних напрямах і закінчили свій рух через 2 години. Скільки часу рухався кожний пішохід? Що можна сказати про відстань, яку пройшов кожний пішохід, якщо:
   - вони рухалися з однаковою швидкістю;
   - швидкість першого більше швидкості другого.
4. Два лижники вийшли одночасно назустріч один одному. Перший лижник йшов зі швидкістю 12 $\frac{км}{год}$, а другий – 14 $\frac{км}{год}$. Як змінюється відстань між лижниками? На скільки зменшиться відстань за 1-шу годину, за 2-гу годину ?
5. Два велосипедисти виїхали одночасно з одного пункту в протилежних напрямах. Швидкість першого велосипедиста 5 $\frac{м}{с}$, а другого – 3 $\frac{м}{с}$. Як змінюється відстань між велосипедистами? На скільки збільшиться відстань за 1-шу секунду, за 2-гу секунду ?

Після розв’язання задач, аналогічних останній учні роблять висновок:
Якщо два тіла рухаються одночасно назустріч одне одному або в протилежних напрямках, то **відстань** між ними весь час **змінюється на одне й те саме число** одиниць, яке дорівнює **сумі відстаней, що долає кожне тіло за одиницю часу**.

З метою закріплення цього висновку учні розв’язують завдання на визначення характеру та числового значення зміни відстані між тілами за одиницю часу при одночасному русі назустріч або у протилежних напрямках, якщо дано швидкість кожного тіла; складають і розв’язують обернені задачі до них на знаходження швидкості; розв’язують завдання на знаходження швидкості одного з тіл за відомими швидкістю другого тіла та числовим значенням зміни відстані між тілами за одиницю часу. Наприклад:

6. Дві черепахи одночасно виринули назустріч одна одній. Швидкість першої черепахи 9 $\frac{дм}{хв}$, а швидкість другої черепахи 5 $\frac{дм}{хв}$. Як змінюється відстань між черепахами? На скільки дециметрів зменшується відстань між черепахами за кожну секунду?
7. Два лижники вийшли з одного селища одночасно у протилежних напрямках. Знайди швидкість другого лижника, якщо відома швидкість першого лижника 5 $\frac{км}{год}$ і відомо, що вони віддаляються щогодини на 12 км.

2.2.2. Ознайомлення із першим способом розв’язування

Задача 1. Два лижника вийшли одночасно назустріч один одному з двох селищ і зустрілися через 3 години. Перший лижник йшов зі швидкістю 12 $\frac{км}{год}$, а інший – 14 $\frac{км}{год}$. Яка відстань між селищами?

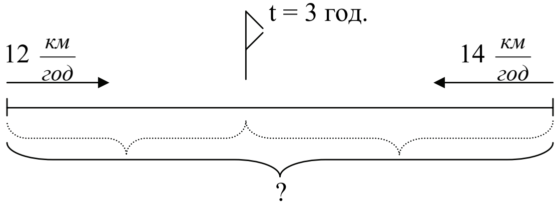
Розглянемо докладно методику роботи над задачею.

1. Про що йде мова в задачі? (В задачі йде мова про рух двох лижників. Тому короткий запис задачі буде у формі креслення).
2. Що відомо про час початку руху? (Лижники почали рухатися одночасно).
3. Як рухаються лижники? (Лижники рухаються назустріч один одному.) Покажемо це на кресленні стрілочками „назустріч”.
4. Зробіть висновки.

1) *Відстань між тілами весь час зменшується.*

2) *Весь шлях складається зі шляху, який подолано першим тілом та шляху, який подолало друге тіло.*

3) *Кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно і закінчили рухатися одночасно.*



5. Складіть короткий запис задачі. (Над стрілочками записуємо швидкості руху кожного лижника. Поставимо прапорець на місті зустрічі: тут треба подумати, як він розташовується відносно селищ – швидкість першого лижника менше, ніж швидкість другого лижника, на рух вони витратили однаковий час, тобто 3 год.; значить перший пройшов меншу відстань, ніж другий. Прапорець треба поставити ближче до першого селища. На рух кожний лижник витратив 3 години, лижники зустрілися через 3 години. Біля прапорця напишемо t = 3 год. Треба знайти відстань між селищами: позначимо її фігурною дужкою. Нагадаємо, що вся відстань складається з відстані, яку пройшов перший лижник та відстані, яку пройшов другий лижник. Покажемо це фігурними дужками.)

6. За коротким записом поясніть числа задачі. (Число 12 позначає швидкість першого лижника. 12 $\frac{км}{год}$ означає, що перший лижник за кожну годину проходив по 12 км. Число 14 означає швидкість другого лижника. 14 $\frac{км}{год}$ означає, що за кожну годину другий лижник пробігає по 14 км. Число 3 означає час, який рухався кожний лижник).

7. Яке запитання задачі? Що можна сказати про шукану величину? Як шукана величина пов’язана з іншими величинами? (В задачі запитується про відстань між селищами. Відстань між селищами дорівнює усій відстані, що пробігли разом лижники. Отже, вся відстань складається з відстані, яку пробіг перший лижник та відстані, яку пробіг другий лижник. Щоб знайти відстань, треба швидкість помножити на час).

8. Яке запитання задачі? (Яка відстань між селами?). Як ми його пере формулювали? (Яку відстань пройшли обидва лижники разом?).

9. Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Треба знати два числові значення: 1 – відстань, яку пробіг перший лижник, не відомо, та П – відстань, яку пробіг другий лижник, невідомо).

10. Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією додавання).

11. Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Не можна, тому що ми не знаємо: I – відстань, яку пройшов перший лижник та не знаємо II – відстань, яку пройшов другий лижник).

12. Що треба знати, щоб дізнатися про відстань, яку пройшов перший лижник? (Треба знати два числові значення: I – швидкість першого лижника, відомо 12 $\frac{км}{год}$, та II – час руху першого лижника, відомо 3 год.).

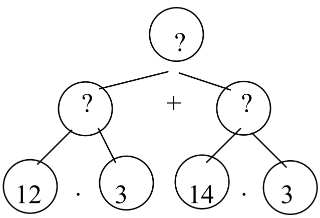
13. Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією множення).

14. Чи можна тепер відповісти на запитання задачі? (Не можна, тому що ми не знаємо яку відстань подолав другий лижник).

15. Що треба знати, щоб про це дізнатися? (Треба знати два числові значення: I – швидкість другого лижника, відомо 14 $\frac{км}{год}$, та II – час руху другого лижника, відомо 3 год.).

16. Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією множення.)

17. Чи можна тепер відповісти на запитання задачі? (Так, ми від запитання задачі перейшли до числових даних. Аналіз закінчено).



18. Складіть план розв’язування задачі. (Першою дією дізнаємося про відстань, яку пройшов перший лижник. Другою дією дізнаємося про відстань, яку пройшов другий лижник. Третьою дією дізнаємося про відстань, яку пройшли разом обидва лижники і відповімо на запитання задачі.)

19. Запишіть розв’язання по діях з поясненням.

Розв’язання

1) $12 \cdot 3 = 36$ (км) – відстань, яку пройшов перший лижник;

2) $14 \cdot 3 = 42$ (км) – відстань, яку пройшов другий лижник;

3) $36 + 42 = 78$ (км) – відстань, яку пройшли обидва лижники разом; відстань між селищами.

Відповідь: 78 км – відстань між селищами.

Зміна напрямку руху у задачі № 1 – тіла рухаються у протилежних напрямках. Дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі. Задача на знаходження відстані при одночасному русі назустріч перетворюється у задачу на знаходження відстані при одночасному русі у протилежних напрямках. Учні виконують зміни у кресленні, роблять висновки щодо характеру зміни відстані між тілами за одиницю часу, про час, який витратило на рух кожне тіло, про відстань, яку подолали обидва тіла; порівнюють цю задачу з попередньою. Спільним у формулюванні цих задач є діючи особи; однакові значення величин: швидкостей та часу; в обох задачах вимагається знайти відстань; тіла почали рухатися одночасно. Відмінним у формулюванні задач є те, що в першій тіла рухалися назустріч одне одному, а в другій – у протилежних напрямках. Далі з'ясовується як ця зміна вплине на розв'язання задачі: арифметичні дії не змінюються! Учні узагальнюють план розв'язування задач на знаходження відстані при одночасному русі назустріч та у протилежних напрямках: якщо в задачі треба знайти відстань при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямах, то її розв'язують за планом:

Першою дією визначають відстань, яку пройшло перше тіло.
Другою дією визначають відстань, яку пройшло друге тіло.
Третьою дією визначають відстань, яку пройшли обидва тіла.

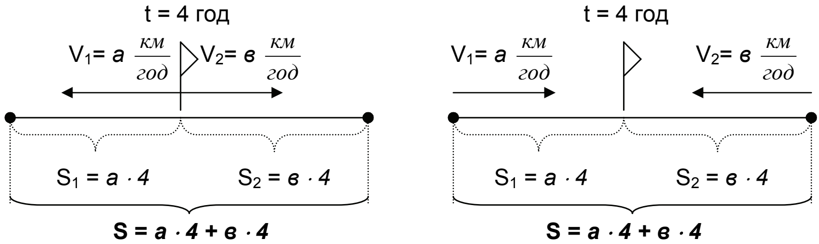
Заміна числових даних швидкостей тіл буквами та дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі. Школярам пропонується задача, в якій значення швидкостей тіл, подані буквами, і шуканою є відстань, але за умов двох варіантів руху – руху назустріч та руху у протилежних напрямках. Наприклад:

Пішохід йде зі швидкістю $\boldsymbol{a}$ $\frac{км}{год}$, а вершник рухається зі швидкістю $\boldsymbol{в}$ $\frac{км}{год}$. Знайди:

а) відстань, яка буде між ними через 4 години, якщо вони вирушили одночасно з одного міста в протилежних напрямах;
б) відстань, яка була між ними на момент початку руху, якщо вони зустрілися через 4 години.

Діти виконують рисунок до кожного варіанту руху та розв'язують обидві задачі (мал. 81).

Заміна числових значень буквами не вплинула на план розв'язування задач: першою дією знаходимо відстань, що подолало перше тіло, другою дією – відстань, що подолало друге тіло і третьою дією знаходимо відстань, яку подолали обидва тіла.



Мал. 81. Опорні схеми та математична модель задач на одночасний рух у різних напрямках, в яких шуканою є відстань

а, в – числові дані

Зміна шуканого в задачі № 1. Складання і розв'язання оберненої задачі на знаходження швидкості.

З двох сіл виїхали одночасно назустріч один одному трактор та бричка з конем. Трактор рухався зі швидкістю 9 $\frac{км}{год}$, а швидкість брички 7 $\frac{км}{год}$. Чому дорівнює відстань між селами, якщо вони зустрілися через 2 години?

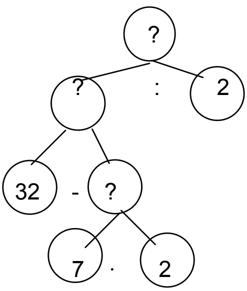
Отже, учні розв'язують задачу на знаходження відстані при одночасному русі назустріч, застосовуючи узагальнений план, і перевіряють правильність її розв'язання засобом складання і розв'язання оберненої задачі на знаходження швидкості (задача № 2).

Задача 2. З двох сіл, відстань між якими 32 км, одночасно назустріч один одному вирушили трактор та бричка з конем і зустрілися через 2 години. Чому дорівнює швидкість трактора, якщо швидкість брички 7 $\frac{км}{год}$?

Учні виконують зміни у короткому записі прямої задачі, роблять відповідні висновки, пояснюють числові дані задачі та з'ясовують як пов'язана шукана величина з іншими величинами, виконується аналітичний пошук розв'язування, формулюється план і записується розв'язання по діях з поясненням.

- Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Треба знати два числові значення: 1 – відстань, яку проїхав трактор , не відомо, та ІІ – час руху трактору, відомо, 2 год.).

- Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією ділення).
- Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Не можна, тому що ми не знаємо: 1 – відстань, яку подолав трактор до зустрічі).
- Що треба знати, щоб дізнатися про відстань, яку подолав трактор до зустрічі? (Треба знати два числові значення: 1 – загальну відстань, яку подолали і трактор і бричка, відомо 32 км, та ІІ – відстань, яку подолала бричка, невідомо).
- Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією віднімання).
- Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Не можна, тому що ми не знаємо яку відстань подолала бричка).
- Що треба знати, щоб про це дізнатися? (Треба знати два числові значення: 1 – швидкість брички, відомо 7 $\frac{км}{год}$, та ІІ – час руху брички, відомо 2 год.).
- Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією множення).



- Чи можна тепер відповісти на запитання задачі? (Так, ми від запитання задачі перейшли до числових даних. Аналіз закінчено).
- Складіть план розв'язування задачі. (Першою дією дізнаємося про відстань, яку подолала бричка. Другою дією дізнаємося про відстань, яку подолав трактор. Третьою дією дізнаємося про швидкість трактора і відповімо на запитання задачі).

Розв'язання

$7 \cdot 2 = 14$ (км) – відстань, яку подолала бричка;

$32 - 14 = 18$ (км) – відстань, яку подолав трактор;

$18 : 2 = 9$ ($\frac{км}{год}$) – швидкість трактора.

Відповідь: 9 $\frac{км}{год}$ – швидкість трактора.

Зміна напрямку руху в задачі № 2 – тіла рухаються у протилежних напрямках. Дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі. Школярі виконують зміни у короткому записі задачі № 2, пояснюють числові дані та роблять відповідні висновки; з'ясовують чим ця задача відрізняється від попередньої та як вплине ця зміна на розв'язання задачі. Діти встановлюють, що розв'язання лишається тим самим, план розв'язування не змінюється, тому задачі на знаходження швидкості при одночасному русі назустріч та при одночасному русі у протилежних напрямках розв'язуються за планом:

Першою дією визначають відстань, яку пройшло перше тіло.

Другою дією визначають відстань, яку пройшло друге тіло.

Третьою дією визначають швидкість.

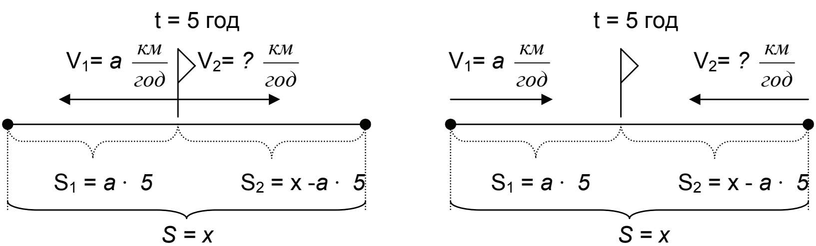
Заміна числових даних швидкості одного з тіл та відстані буквами та дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі. Пропонується задача, в якій значення швидкості одного тіла та відстані подані буквами і шуканою є швидкість іншого тіла за умов двох варіантів руху – руху назустріч та руху у протилежних напрямках. Наприклад:

Два велосипедиста вирушили одночасно, при чому швидкість першого велосипедиста ***а*** $\frac{км}{год}$. Знайдіть швидкість другого велосипедиста, якщо:

а) вони рухаються в протилежних напрямах і відстань через 5 годин після початку руху складала ***х*** км;

б) відстань на початку руху складала ***х*** км, а зустріч відбулася через 5 годин.

Діти виконують рисунок до кожного варіанту руху та розв'язують обидві задачі (мал. 82).



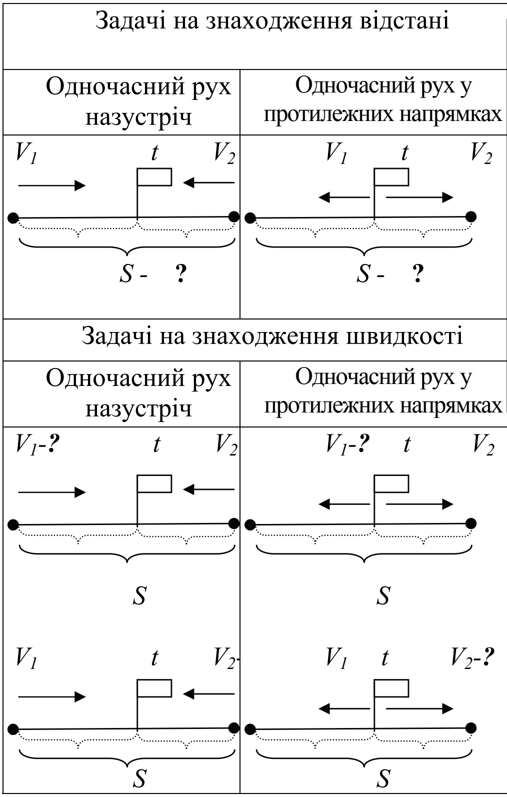
$V_2 = (x – a \cdot 5) : 5$ $\qquad$ $V_2 = (x – a \cdot 5) : 5$

Мал. 82. Опорні схеми та математична модель задач на одночасний рух у різних напрямках, в яких шуканою є швидкість

а, х – числові дані

Заміна числових значень буквами не вплинула на план розв’язування задач: першою дією знаходимо відстань, що подолало одне тіло, другою дією – відстань, що подолало інше тіло і третьою дією знаходимо швидкість іншого тіла і відповідаємо на запитання задачі.

Узагальнення планів розв’язування задач на знаходження відстані та на знаходження швидкості при одночасному русі назустріч та у протилежних напрямках. Формулювання першого способу розв’язування цих задач. Порівнявши плани розв’язування задач на знаходження відстані і швидкості при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямках робимо узагальнюючий висновок: якщо в задачі треба знайти відстань або швидкість при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямах, то цю задачу розв’язують за планом (див. мал. 83).



<u>План розв’язування</u>

Першою дією дізнаються про відстань, яку пройшло перше тіло.

Другою дією дізнаються про відстань, яку пройшло друге тіло.

Третьою дією відповідають на запитання задачі.

Мал. 83. Опорні схеми та план розв’язування задач на одночасний рух в різних напрямках, в яких шуканою є відстань або час

(І спосіб)

V_1 - швидкість першого тіла, V_2 швидкість другого тіла, t – час спільного руху, S – відстань між тілами на момент початку або на момент закінчення руху

Істотні ознаки задач на одночасний рух назустріч та у протилежних напрямках:

1) йде мова про спільний рух двох тіл – $\frac{\textit{назустріч}}{\textit{в..протилежних..напрямках}}$;

2) є чотири числові значення: швидкість руху першого тіла, швидкість руху другого тіла, час їх спільного руху, відстань, яку подолали обидва тіла під час спільного руху; при чому три з них дані, а одне – шукане.

Для розв'язування задач на рух назустріч або у протилежних напрямках, в яких шуканою є або відстань або швидкість, пропонуємо пам'ятку:

Пам'ятка (1 спосіб: S, V)

1. Про що йде мова в задачі?
2. Що відомо про час початку руху?
3 .Як рухаються тіла?
4. Зробіть висновки.

Відстань між тілами весь час $\frac{\textit{збільшується}}{\textit{зменшується}}$.

Весь шлях складається зі шляху, який подолано першим тілом та шляху, який подолало друге тіло.

Кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно і закінчили рухатися одночасно.

5. Складіть короткий запис задачі.
6. За коротким записом поясніть числа задачі.
7. Складіть план розв'язування задачі.

Першою дією визначають відстань, яку пройшло перше тіло.

Другою дією визначають відстань, яку пройшло друге тіло.

Третьою дією відповідаємо на запитання задачі.

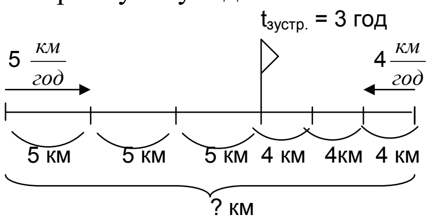
8. Запишіть розв'язання по діях з поясненням або виразом.
9. Запишіть відповідь до задачі.
10. Складіть і розв'яжіть обернену задачу (на знаходження $\frac{\textit{відстані}}{\textit{швидкості}}$) або перетворіть задачу у задачу на $\frac{\textit{рух...назустріч}}{\textit{рух...в...протилежних...напрямках}}$.

2.2.3. Ознайомлення з другим способом розв'язання

Пропонуємо учням розв'язати задачу на знаходження відстані при одночасному русі назустріч відомим способом.

Задача 3. З двох селищ одночасно назустріч один одному вирушили хлопчик і дівчинка. Швидкість хлопчика 5 $\frac{км}{год}$, а швидкість дівчинки 4 $\frac{км}{год}$. Яка відстань між селищами, якщо вони зустрілися через 3 години після початку руху?

Робота над задачею після її розв'язання полягає у розв'язанні цієї задачі другим способом. Пропозиція вчителя розв'язати задачу другим способом викликає здивування в учнів і активізує пізнавальну активність. Складається проблемна ситуація, вихід з якої полягає у зверненні уваги учнів на характер зміни відстані при одночасному русі назустріч – відстань кожної години зменшується; згадуємо як дізнатися про числове значення зміни відстані (це було опрацьовано на етапі підготовки до введення задач на рух). Отже, „ключ" до розв'язання задачі іншим способом знайдено – характер і числове значення зміни відстані за одиницю часу! Далі звертаємо увагу учнів на час руху обох тіл до зустрічі, що свідчить про те „скільки разів" здійснювалося „зменшення, наближення" поки вони не зустрілися, тому помноживши числове значення відстані, на яку наближалися тіла за одиницю часу на час їх руху до зустрічі, дізнаємося про відстань, на яку вони наблизилися в результаті спільного руху, а тому й дізнаємося про шукану відстань.



Розв'язання задачі другим способом передбачає ще й переформулювання запитання задачі – запитання „Яка відстань між пунктами, з яких почали рухатися тіла?" слід переформулювати так: „На яку відстань наблизилися тіла один до одного під час їх спільного руху до зустрічі?".

Розв'язання

1) 5 + 4 = 9 (км) на стільки наближаються діти одне до одного за кожну годину;

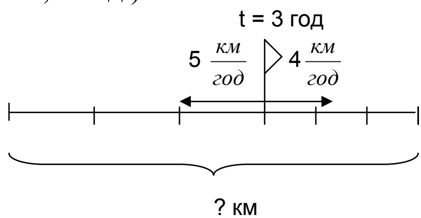
2) 9 · 3 = 27 (км) на стільки наблизяться діти одне до одного за 3 години.

Відповідь: 27 км – відстань між селищами.

Зміна напрямку руху в задачі № 3 – тіла рухаються у протилежних напрямках. Дослідження впливу цієї зміни на другий спосіб розв’язування.

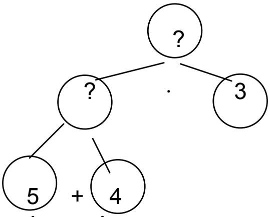
Далі учням пропонується перетворити попередню задачу на знаходження відстані при одночасному русі назустріч в задачу на одночасний рух у протилежних напрямках і розв’язати її двома способами. Виконавши зміни у короткому записі задачі № 3, учні пояснюють числові дані, роблять відповідні висновки, розв’язують задачу спочатку другим способом переформулювавши запитання задачі. Далі здійснюються аналітичні міркування від запитання задачі до числових даних, складається план розв’язування і записується розв’язання по діях з поясненням.

- За коротким записом поясніть числа задачі.
- Яке запитання задачі? Як можна його переформулювати? (Запитання: Яка відстань між дітьми буде через 3 години можна переформулювати так – на скільки збільшиться відстань між дітьми через 3 години?)
- Що треба знати , щоб відповісти на запитання задачі? (Треба знати два числові значення: 1 – на скільки кілометрів збільшується відстань між дітьми за кожну годину , не відомо, та II – час руху дітей, відомо, 3 год.).



- Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією множення).
- Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? (Не можна, тому що ми не знаємо: на скільки збільшується відстань між дітьми за кожну годину).
- Що треба знати, щоб про це дізнатися? (Треба знати два числові значення: 1 – відстань, яку проходить хлопчик за кожну годину, відомо 5 км, та II – відстань, яку проходить дівчинка за кожну годину, відомо 4 км).
- Якою арифметичною дією відповімо на це запитання? (Дією додавання).

- Чи можна відразу відповісти на це запитання? (Так, ми від запитання задачі перейшли до числових даних. Аналіз закінчено).



Складіть план розв'язування задачі. (Першою дією дізнаємося на скільки кілометрів збільшується відстань між дітьми за кожну годину. Другою дією дізнаємося на скільки збільшиться відстань між дітьми за 3 години і відповімо на запитання задачі).

Розв'язання

1) 5 + 4 = 9 (км) – на стільки збільшується відстань між дітьми за кожну годину;
2) 9 · 3 = 27 (км) – на стільки збільшиться відстань між дітьми за 3 години.

Вчитель пропонує порівняти другі способи розв'язування цієї та попередньої задачі. Школярі помічають, що в них майже однакові розв'язання: однакові дії, але різні пояснення – в першій задачі тіла наближуються, а в другій – віддаляються; першою дією дізнаємося на скільки тіла наближаються чи віддаляються – на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу, а другою дією дізнаємося на скільки тіла наблизилися чи віддалилися – на скільки змінилася відстань між тілами за весь час руху.

Розв'язавши задачу першим способом, порівнюємо перші способи розв'язування цих двох задач – учні дістають висновку, що вони мають однакові розв'язання. Потім порівнюємо перший та другий спосіб розв'язання задач: першим способом ми розв'язали задачу трьома діями, а другий спосіб містить лише дві дії (див. табл. 6).

Таблиця 6

Способи розв'язування задач на одночасний рух в різних напрямках на знаходження відстані

1 спосіб	2 спосіб
Першою дією дізнаються про відстань, яку пройшло перше тіло. Другою дією дізнаються про відстань, яку пройшло друге тіло. Третьою дією дізнаються про всю відстань.	Першою дією дізнаються на скільки змінюється відстань за одиницю часу. Другою дією дізнаються на скільки змінилася відстань за весь час руху.

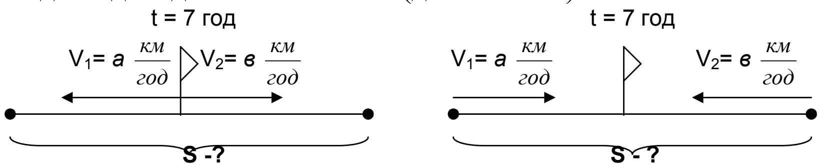
При першому способі розв'язування ми розглядаємо спочатку окремо рух першого тіла та окремо рух другого тіла. І лише після цього знаходимо, яку відстань обидва тіла подолали разом. При другому способі розв'язування ми розглядаємо рух двох тіл одне відносно одного: спочатку знаходимо на скільки змінюється відстань за одиницю часу, а потім – як змінилися відстань за весь час руху.

Заміна числових даних швидкості буквами та дослідження впливу цієї зміни на план розв'язання задачі. Школярам пропонується задача, в якій значення швидкостей тіл подані буквами і шуканою є відстань за умов двох варіантів руху – руху назустріч та руху у протилежних напрямках.

Вантажна машина їде зі швидкістю $a \ \frac{км}{год}$, а легкова машина зі швидкістю $в \ \frac{км}{год}$. Знайди:

а) відстань, яка буде між ними через 7 години, якщо вони вирушили одночасно з одного міста в протилежних напрямах;
б) відстань, яка була між ними на момент початку руху, якщо вони зустрілися через 7 години.

Діти виконують рисунок до кожного варіанту руху та розв'язують обидві задачі двома способами (див. мал. 84).



1 спосіб	2 спосіб
$S = a \cdot 7 + в \cdot 7$	$S = (a + в) \cdot 7$

Мал. 84. Опорні схеми та математична модель двох способів розв'язування задач на одночасний рух у різних напрямках, в яких шуканою є відстань (*а, в* – числові дані)

Як бачимо вирази до першого та другого способів розв'язування цих задач зовсім однакові. Отже, заміна числових значень буквами не впливає на способи розв'язування задач на знаходження відстані при одночасному русі назустріч та у протилежних напрямках.

Зміна шуканого в задачі № 3. Складання і розв'язання оберненої задачі на знаходження швидкості при одночасному русі назустріч (задача № 4).

До попередньої задачі складається і розв'язується обернена задача на знаходження швидкості при одночасному русі в протилежних напрямках. Учні розв'язують цю задачу першим способом за пам'яткою.

Задача 4. З одного селища одночасно у протилежних напрямках вирушили хлопчик і дівчинка. Через 3 години відстань між ними складала 27 км. Яка швидкість хлопчика, якщо швидкість дівчинки 4 $\frac{км}{год}$?

Далі вчитель звертає увагу на тому, що при даному способі розв'язування ми розглядали рух тіл окремо один від одного. Існує інший спосіб розв'язування, коли розглядається рух двох тіл одне відносно одного. При розв'язанні задачі другим способом нас цікавить характер зміни відстані між тілами за одиницю часу та її числове значення. Отже, „ключ" до розв'язання цієї задачі той самий, що й для попередньої – на скільки змінюється відстань за одиницю часу, але спосіб його знаходження інший. Якщо у задачі на знаходження відстані ми про це дізнавалися додаванням відстаней, що подолало кожне тіло за одиницю часу, то в даній задачі – діленням відстані, на яку віддалилися тіла на час їх спільного руху. Знаючи на скільки змінюється (збільшується) відстань за одиницю часу між тілами і знаючи скільки долає одне з тіл за одиницю часу, дією віднімання знаходимо яку відстань долає інше тіло за одиницю часу з цього робимо висновок про швидкість іншого тіла.

- На скільки кілометрів віддалялися діти одне від одного за 3 години? (На 27 км).
- На скільки кілометрів віддалялися діти одне від одного за 1 годину? (На 27 : 3 = 9 км).
- Скільки кілометрів з цих 9 км проходила дівчинка? (Дівчинка проходила за кожну годину 4 км).
- Скільки ж кілометрів з цих 9 км проходив хлопчик? (9 – 4 = 5 км).
- Отже, хлопчик щогодини проходив по 5 км. Чому дорівнює швидкість хлопчика? (5 $\frac{км}{год}$)
- Розкажіть план розв'язування цієї задачі. (Першою дією дізнаємось на скільки кілометрів віддалялися діти за 1 годину. Другою дією дізнаємось скільки кілометрів проходив за кожну годину хлопчик, тобто дізнаємось про швидкість хлопчика).
- Запишіть розв'язання задачі по діях з поясненням.

Розв'язання

1) 27 : 3 = 9 (км) – на стільки віддалялися діти за кожну годину;
2) 9 – 4 = 5 (км) проходив хлопчик за кожну годину, тому швидкість хлопчика 5 $\frac{км}{год}$. Відповідь: 5 $\frac{км}{год}$.

Таким чином, розв'язання задачі на знаходження швидкості при одночасному русі в протилежних напрямках передбачає також переформулювання запитання. Запитання „Яка швидкість тала?" виходячи з фізичного змісту швидкості замінюється запитанням „Яку відстань долає це тіло за одиницю часу?".

Зміна напрямку руху в задачі № 4 – тіла рухаються назустріч одне одному. Дослідження цієї зміни на розв'язання задачі.

Припускаємо, що тіла рухалися назустріч одне одному і з'ясовуємо як ця зміна впливає на знаходження швидкості одного з тіл другим способом. У розв'язанні треба „поправити" лише пояснення до першої дії: „на скільки кілометрів збільшується відстань між талами" слід замінити „на скільки кілометрів зменшується відстань між тілами". Отже, ця зміна майже не впливає на план розв'язування задачі: першою дією знаходимо на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу, а другою дією знаходимо яку відстань долає тіло за одиницю часу і робимо висновок про його швидкість.

Порівнявши перші та другі способи розв'язування цих задач узагальнюємо їх (див. табл. 7).

Таблиця 7

Способи розв'язування задач на одночасний рух у різних напрямках, в яких шуканою є швидкість одного з тіл

1 спосіб	2 спосіб
Першою дією дізнаються про відстань, яку пройшло перше тіло. Другою дією дізнаються про відстань, яку пройшло друге тіло. Третьою дією дізнаються про швидкість.	Першою дією дізнаються на скільки змінюється відстань за одиницю часу. Другою дією дізнаються яку відстань проходить тіло за одиницю часу, тобто дізнаються про швидкість його руху.

При першому способі розв'язання ми розглядаємо спочатку окремо рух першого тіла та окремо рух другого тіла. І лише після цього знаходимо шукану швидкість. При другому способі розв'язання ми розглядаємо рух двох тіл одне відносно одного: спочатку знаходимо на скільки змінюється відстань за одиницю часу, а потім – скільки кілометрів проходить тіло за одиницю часу і робимо висновок про швидкість його руху.

Заміна числових даних швидкості одного з тіл та відстані буквами і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язання задачі.

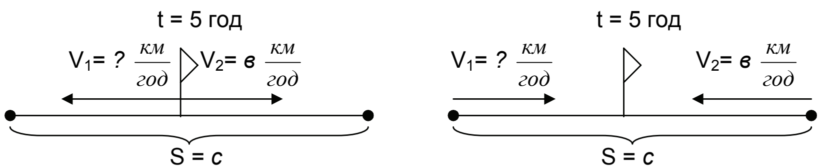
Пропонується задача, в якій значення швидкості одного тіла та відстані подані буквами і шуканою є швидкість іншого тіла за умов двох варіантів руху – руху назустріч та руху у протилежних напрямках.

Вершник і велосипедист вирушили одночасно. Знайти швидкість вершника, якщо швидкість велосипедиста $в\ \frac{км}{год}$, і :

а) якщо вони вирушили одночасно з одного міста в протилежних напрямах та через 5 годин відстань між ними складала *с* км;

б) якщо вони вирушили одночасно назустріч один одному з двох пунктів, відстань між якими с км і зустрілися через 5 годин.

Діти виконують рисунок до кожного варіанту руху та розв'язують обидві задачі двома способами (мал. 85).



1 спосіб	2 спосіб
$V = (с - в \cdot 5) : 5$	$V = с : 5 - в$

Мал. 85. Опорні схеми та математична модель двох способів розв'язування задач на одночасний рух у різних напрямках, в яких шуканою є швидкість

с, в – числові дані

Математичні моделі першого та другого способів розв'язання цих задач зовсім однакові; заміна числових значень буквами не вплинула на розв'язання задач обома способами. Отже, напрямок руху (назустріч або у протилежних напрямках) не впливає на математичну модель задачі.

Методика роботи над цими задачами складається за пам'ятками.

Пам'ятка (2 спосіб)

1. Про що йде мова в задачі?
2. Що відомо про час початку руху?
3. Як рухаються тіла?
4. Зробіть висновки.

Відстань між тілами весь час $\frac{\text{збільшується}}{\text{зменшується}}$.

Весь шлях складається зі шляху, який подолано першим тілом та шляху, який подолало друге тіло.

Кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно і закінчили рухатися одночасно.

5. Складіть короткий запис задачі.
6. За коротким записом поясніть числа задачі.
7. Складіть план розв'язування задачі.

Першою дією визначають на скільки $\frac{\text{збільшується}}{\text{зменшується}}$ *відстань між тілами за кожну годину.*

Другою дією відповідають на запитання задачі.

8. Запишіть розв'язання по діях з поясненням або виразом.
9. Запишіть відповідь до задачі.
10. Розв'яжіть задачу першим способом або складіть і розв'яжіть обернену задачу (на знаходження $\frac{\text{відстані}}{\text{швидкості}}$) або перетворіть задачу у задачу на $\frac{\text{рух...назустріч}}{\text{рух...у...протилежних...напрямках}}$.

Зазначимо, що треба звернути увагу учнів на те, що кожну задачу можна розв'язати двома діями, при чому першою дією знаходимо на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу, але в задачі на знаходження відстані ми це визначаємо дією додавання, а в задачі на знаходження швидкості – дією ділення.

Задачі на знаходження часу при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямах вводимо, як обернені задачі до задач на знаходження відстані.

Пряма задача. З Києва та Одеси одночасно назустріч один одному відправилися два автобуси. Швидкість першого автобуса 60 $\frac{км}{год}$, швидкість другого автобуса 90 $\frac{км}{год}$. Яка відстань між містами, якщо автобуси зустрілися через 3 години після початку руху?

Розв’язуємо пряму задачу другим способом, після її розв’язання *складаємо обернену задачу на знаходження часу*.

Задача №5. З Києва та Одеси одночасно назустріч один одному відправилися два автобуси. Швидкість першого автобуса 60 $\frac{км}{год}$, швидкість другого автобуса 90 $\frac{км}{год}$. Через скільки годин вони зустрінуться, якщо відстань між містами 450 км?

Вносимо зміни у короткий запис, з’ясовуємо як ця зміна вплине на розв’язання задачі: перша дія не змінюється – знаходимо на скільки змінюється (скорочується) відстань між тілами за одиницю часу. Отже, „ключ” до розв’язання задачі на знаходження часу той самий, що й для задач на знаходження відстані та швидкості – на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу. При чому її числове значення знаходять так само, як і у задачах на знаходження відстані – додаванням числових значень відстаней, які долає кожне тіло за одиницю часу. Знаючи відстань, на яку повинні наблизитися тіла за весь час спільного руху та знаючи на скільки вони наближаються один до одного за одиницю часу, можна дізнатися „скільки разів вони повинні здійснити наближення, щоб зустрітися”, про час зустрічі. Отже, змінюється друга дія – в цій задачі ми знаходимо час дією ділення.

Розв’язання

1) 90 + 60 = 150 (км) – на стільки скорочується відстань між автобусами за кожну годину;

2) 450 : 150 = 3 – стільки годин рухалися до зустрічі автобуси.

Відповідь: через 3 години автобуси зустрілися.

На відміну від задач на знаходження відстані та на знаходження швидкості при одночасному русі в різних напрямках, задачі на знаходження часу руху розв’язуються лише одним способом – другим – <u>способом, коли розглядаємо рух двох тіл одне відносно одного</u>.

Зміна напрямку руху задачі № 5 – тіла рухаються у протилежних напрямках. Дослідження впливу цієї зміни на розв’язання задачі.

За умовою попередньої задачі тіла зустрілися, продовжимо цю задачу – припустимо тіла продовжили рух, але у протилежних напрямках. Учні вносять зміни у короткий запис попередньої задач та формулюють отриману задачу. З’ясовують, чим відрізняються ці задачі і як ця зміна вплине на розв'язання задачі: змінюються пояснення до арифметичних дій, узагальнюємо план розв'язування задач на знаходження часу при одночасному русі назустріч та у протилежних напрямках.

Першою дією визначають на скільки $\frac{\textit{збільшується}}{\textit{зменшується}}$ відстань між тілами за кожну годину.

Другою дією – скільки разів в загальній відстані міститься по числу кілометрів, на яке змінюється відстань між поїздами за кожну годину і робимо висновок про час руху.

Заміна числових даних швидкостей тіл та відстані буквами та дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі.

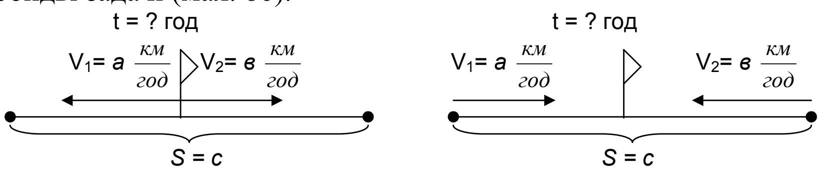
Пропонується задача, в якій значення швидкостей тіл та відстані подані буквами і шуканою є час їх спільного руху за умов двох варіантів руху – руху назустріч та руху у протилежних напрямках.

Два пішоходи вирушили одночасно. Швидкість першого $a\ \frac{км}{год}$, а швидкість другого $в\ \frac{км}{год}$. Знайти час руху пішоходів, якщо:

а) вони вирушили з одного міста у протилежних напрямках і віддалилися один від одного на *с км*;

б) вони вирушили назустріч один одному з двох пунктів, відстань між якими *с км*.

Діти виконують рисунок до кожного варіанту руху та розв'язують обидві задачі (мал. 86).



1 спосіб	2 спосіб
-	$t = c : (a + в)$

Мал. 86. Опорні схеми та математична модель двох способів розв'язування задач на одночасний рух у різних напрямках, в яких шуканим є час руху

а, в, с – числові дані

Математичні моделі цих задач однакові. Отже, задачі на знаходження часу руху при одночасному русі назустріч або у протилежних напрямках розв'язуються лише одним способом; і запропоновану пам'ятку для знаходження відстані і швидкості (другим способом) можна узагальнити і для знаходження часу .

Зазначимо, що треба звернути увагу учнів на те, що кожну задачу можна розв'язати двома діями, при чому першою дією знаходимо на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу, але в задачі на знаходження відстані і часу ми це визначаємо дією додавання, а в задачі на знаходження швидкості – дією ділення. Результати узагальнення подані на малюнку 87.

При **формуванні умінь** розв'язувати задачі на одночасний рух назустріч або у протилежних напрямках працюємо над задачами за пам'ятками і розв'язуємо задачі на знаходження відстані і швидкості двома способами, часу – одним способом, складаємо обернені задачі.

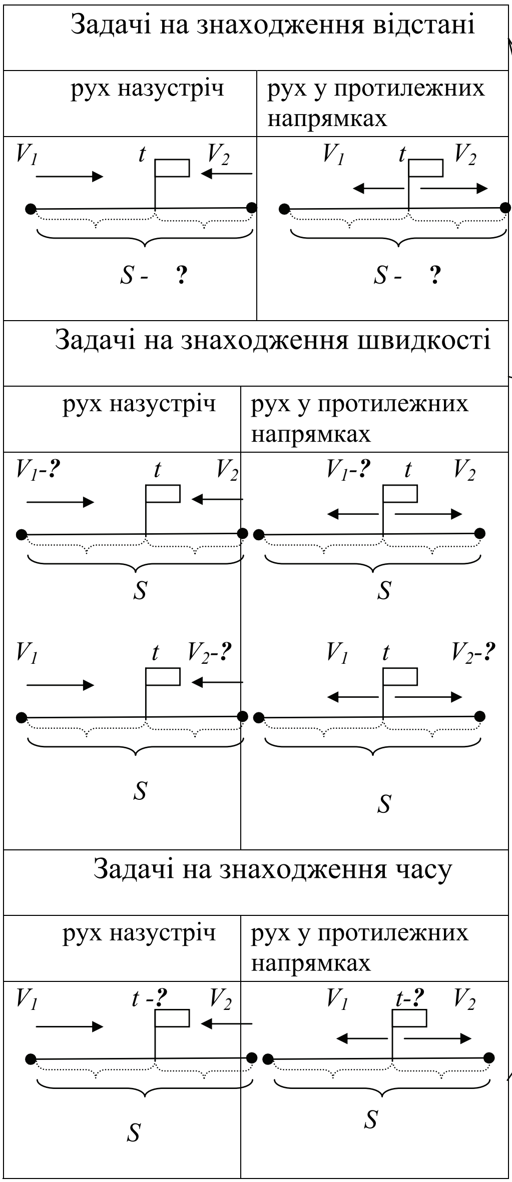
До задач ставимо творчі запитання, наприклад: „Чи могли тіла зустрітися на середині шляху? За яких умов? Якщо тіла після зустрічі продовжать свій рух, то яке тіло приїде у кінцевий пункт раніше?".

З метою ускладнення задач, на цьому етапі навчання, застосовують наступні прийоми:

- значення швидкостей пропонуються у різних одиницях вимірювання;
- вимагається дізнатися яка відстань буде між тілами через певний час при одночасному русі назустріч і через який час вони зустрінуться;
- у задачах на знаходження відстані і часу значення швидкості одного з тіл не дано, але дано різницеве відношення швидкостей обох тіл;
- одночасний рух у протилежних напрямках починається не з одного, а з різних пунктів;
- не дано час спільного руху, а сказано о котрій годині розпочався рух та у котрій годині він закінчився;
- рух тіл розпочинається не одночасно.

2.2.4. Співставлення задач на рух та на спільну роботу

З метою підведення учнів до можливості порівняння задач на рух із задачами на спільну роботу, а також перетворення задачі на рух у задачу на спільну роботу і навпаки, учні знайомляться з табличною формою короткого запису задач на рух, вчаться складати за таблицею дві задачі на рух (на рух назустріч і рух у протилежних напрямках) (див. мал. 88).



1 спосіб	2 спосіб
1) знаходимо відстань, яку пройшло одне тіло; 2) знаходимо відстань, яку подолало інше тіло; 3) відповідаємо на запитання задачі.	1) знаходимо, на скільки змінюється відстань за одиницю часу; 2) відповідаємо на запитання задачі.

Мал. 87. Опорні схеми та план розв'язування задач на одночасний рух у різних напрямках двома способами

За кожною з цих таблиць можна скласти дві задачі: задачу на одночасний рух назустріч і задачу на одночасний рух у протилежних напрямках; при чому ці задачі мають однакову математичну модель.

З метою узагальнення способів розв'язування задач на рух та на спільну роботу можна здійснити зіставлення задач на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці являє собою суму продуктивностей виконавців, з задачами на одночасний рух в різних напрямках.

1)

	відстань	швидкість	час
I		V_1	
II		V_2	
I і II	**?**	?	t

2)

	відстань	швидкість	час
I		V_1	
II		V_2	
I і II	S	?	**?**

3)

	відстань	швидкість	час
I		**?**	
II		V_2	
I і II	S	?	t

4)

	відстань	швидкість	час
I		V_1	
II		**?**	
I і II	S	?	t

Мал. 88. Таблична форма короткого запису задач на одночасний рух в різних напрямках

Учням пропонуються для розв'язання пари задач з однаковими числовими даними, але перша задача – задача на рух, а друга задача – на спільну роботу.

1) З двох станцій виїхали одночасно назустріч один одному два товарних потяги і зустрілися через 5 годин. Перший потяг рухався зі швидкістю 29 $\frac{км}{год}$, а другий – 35 $\frac{км}{год}$. Яка відстань між станціями?	2) Два робітники виконали планове завдання за 5 годин, працюючи разом. Перший робітник виготовляв 29 деталей щогодини, а другий – 35 деталей щогодини. Скільки деталей становило планове завдання?

Школярі записують кожну задачу коротко в формі таблиці і порівнюючи короткі записи, помічають схожість математичних структур цих задач. Після розв'язання задач двома способами, якщо це можливо, знов здійснюється порівняння і робиться висновок про те, що ці задачі мають однакові розв'язання.

Спочатку учням пропонується пари задач на знаходження відстані при одночасному русі назустріч (а потім й у протилежних напрямках) та на знаходження загального виробітку спільної праці. Потім – на знаходження часу руху при русі назустріч (при русі у протилежних напрямках) та на знаходження часу спільної праці. І, нарешті, на знаходження швидкості одного з тіл при русі назустріч (при русі у протилежних напрямках) та на знаходження продуктивності одного з виконавців.

Така робота надає можливість узагальнити математичну структуру та способи розв'язування задач на одночасний рух та задач на спільну роботу (мал. 89).

	$\frac{заг..виробіток}{відстань}$	$\frac{продукт..пр.}{швидкість}$	час
I		N_1 / V_1	
II		N_2 / V_2	
I і II	A / S	?	t

1 спосіб	2 спосіб
$A = N_1 \cdot t + N_2 \cdot t$ $S = V_1 \cdot t + V_2 \cdot t$	$A = (N_1 + N_2) \cdot t$ $S = (V_1 + V_2) \cdot t$
	$t = A : (N_1 + N_2)$ $t = S : (V_1 + V_2)$
$N_1 = (A - N_2 \cdot t) : t$ $N_2 = (A - N_1 \cdot t) : t$ $V_1 = (S - V_2 \cdot t) : t$ $V_2 = (S - V_1 \cdot t) : t$	$N_1 = A : t - N_2$ $N_2 = A : t - N_1$ $V_1 = S : t - V_2$ $V_2 = S : t - V_1$

Мал. 89. Узагальнена таблиця та способи розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух в різних напрямках

Істотні спільні ознаки задач на спільну роботу та на одночасний рух в різних напрямках. Ці задачі містять:

1) три пропорційні величини: $\frac{загальний..виробіток}{відстань}$, $\frac{продуктивність..праці}{швидкість}$, час $\frac{роботи}{руху}$;

2) три випадки: перші два стосуються $\frac{роботи}{руху}$ кожного з двох об'єктів, а третій – їх спільної $\frac{роботи}{руху}$;

3) чотири числові значення: $\frac{продуктивність..праці}{швидкість..руху}$ першого об'єкта, $\frac{продуктивність..праці}{швидкість..руху}$ другого об'єкта, $\frac{загальний..виробіток}{загальна..відстань}$ при їх спільн$\frac{ій..праці}{ому..русі}$ та час спільн$\frac{ої..роботи}{ого..руху}$; три з них дано, а одне є шуканим.

Також з метою узагальнення способів розв’язування задач на спільну роботу та рух здійснюємо *перетворення задачі на рух у задачу на спільну роботу*. Перетворення задачі на спільну роботу у задачу на рух. Учням пропонуються три задачі на одночасний рух у різних напрямках: на знаходження відстані, на знаходження швидкості та на знаходження часу руху. Ці задачі школярі перетворюють відповідно у задачі на знаходження загального виробітку спільної праці, на знаходження продуктивності одного з виконавців та на знаходження часу спільної праці. При перетворенні задач на спільну роботу у задачі на одночасний рух в різних напрямках, до кожної задачі на спільну роботу учні складають по дві задачі на рух – на рух назустріч та на рух у протилежних напрямках. Вчитель вимагає записати розв’язання кожної задачі виразами, учні застосовують висновки, які були зроблені на попередньому етапі навчання і складають до пари задач лише один вираз до кожного способу розв’язування.

Перетворення задачі на спільну роботу, в якій не дано продуктивності кожного виконавця, у відповідні задачі (ускладнені) на рух.

Учням пропонується задача:

В басейні 2520 л води. Один насос може викачати цю воду за 21 хвилину, а другий – за 28 хвилин. За скільки хвилин викачають цю воду обидва насоси працюючи разом?

Вони встановлюють, що це задача на спільну роботу на знаходження часу спільної праці, записують її коротко в формі таблиці і розв’язують її. Далі вчитель пропонує перетворити дану задачу у задачу на одночасний рух назустріч.

Відстань між будинками двох хлопчиків 2520 м. Перший хлопчик проходить цю відстань за 21 хвилину, а другий – за 28 хвилин. Через скільки хвилин хлопчики зустрінуться, якщо вони вирушать одночасно назустріч один одному?

Діти вносять зміни у короткий запис попередньої задачі, формулюють отриману задачу і з’ясовують, як зміна формулювання задачі вплине на її розв’язання: арифметичні дії не зміняться, але зміняться пояснення до них. Школярі формулюють план розв’язування задачі на знаходження часу зустрічі при одночасному русі назустріч і вносять зміни у розв’язання задачі на спільну роботу. Робота над задачею на цьому не припиняється – радимо учням за таблицею скласти задачу на одночасний рух у протилежних напрямках і дослідити, як ця зміна вплине на розв'язання задачі. Наприклад:

Шлях між будинками двох хлопчиків повз школу 2520 м. Якщо вони одночасно виходять із школи, то й одночасно приходять до дому. Два хлопчики одночасно вийшли зі школи і пішли у протилежних напрямках до власних будинків. Перший хлопчик проходить усю цю відстань за 21 хвилину, а другий – за 28 хвилин. Через скільки хвилин хлопчики будуть вдома?

При цьому розв'язання попередньої задачі майже не змінюється, треба змінити лише пояснення до третьої дії.

Далі визначається чим відрізняється розв'язання цих двох задач на рух від розв'язання звичайних задач на знаходження часу при одночасному русі. Задачі на знаходження часу ми розв'язували двома діями. Ці задачі дещо ускладнені – в них не дано швидкості кожного тіла, а дано для кожного з них час та відстань. Тому для розв'язання таких задач треба виконати додатково ще дві дії, щоб знайти швидкості кожного тіла.

Порівнявши розв'язання трьох задач (вирази), дістаємо висновку, що задачі на знаходження часу при спільній роботі та на знаходження часу руху при одночасному русі в різних напрямках мають одну й ту саму математичну структуру та одну математичну модель (мал. 90).

	заг..виробіток / *відстань*	*продукт..пр.* / *швидкість*	час
I	*A/ S*	*?*	t_1
II	*A/ S*	*?*	t_2
I і II	*A / S*	?	***?***

1 спосіб	2 спосіб
	$t = A : (A : t_1 + A : t_2)$ $t = S : (S : t_1 + S : t_2)$

Мал. 90. Опорні схеми та математична модель розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух в різних напрямках ускладненої структури, в яких шуканим є час спільної праці або спільного руху

t_1 – час роботи або час руху першого об'єкта; t_2 – час роботи або час руху другого об'єкта; t – час спільного руху або час спільної праці; A – загальний виробіток; S – відстань між тілами на момент початку або на момент закінчення руху

Далі пропонується задача на спільну роботу, в якій шуканим є загальний виробіток при спільній праці:

Перша бригада проклала за 3 дні 120 м дороги, а друга 200 м за 4 дні. Скільки метрів дороги прокладуть за 2 дні обидві бригади, якщо працюватимуть разом?

Після розв'язування задачі двома способами, радимо учням змінити величини та перетворити цю задачу у задачу на одночасний рух у протилежних напрямках.

Відстань між воротами спортивного майданчика становить 120 м. Хлопчик долає відстань між воротами за 3 хвилини, а дівчинка за 4 хвилини. Яка відстань буде між хлопчиком і дівчинкою через 2 хвилини, якщо вони вирушили одночасно у протилежних напрямках від центру майданчика?

Учні з'ясовують, як зміна формулювання впливає спочатку на перший спосіб, а потім й на другий спосіб розв'язування задачі, формулюють план розв'язування кожним способом і вносять зміни у розв'язання попередньої задачі. Складаємо ще одну задачу на рух – на одночасний рух назустріч.

Хлопчик долає відстань 120 м за 3 хвилини, а дівчинка за 4 хвилини. Від протилежних воріт спортивного майданчика одночасно назустріч один одному вирушили хлопчик і дівчинка і зустрілися через 2 хвилини. Яка відстань між воротами спортивного майданчику?

Від цього перший спосіб розв'язування не змінюється, а у другому способі треба змінити пояснення лише до третьої дії.

Школярі встановлюють, чим відрізняються одержані задачі від „звичайних" задач на одночасний рух на знаходження відстані, в чому полягає ускладнення цих задач, і як воно впливає на розв'язання задачі.

Порівнявши задачі на знаходження загального виробітку при спільній роботі та на знаходження відстані при одночасному русі в різних напрямках діти дістають висновку, що вони мають одну й ту саму математичну структуру та одну математичну модель (мал. 91).

Після цього можна ще розв'язати задачу на спільну роботу на знаходження часу самостійної праці одного з виконавців, а потім і задачу на знаходження загального виробітку одного з виконавців.

Обидва насоси викачали 4800 відер води за 15 годин роботи. За скільки годин викачає цю воду перший насос, якщо другий насос це може зробити за 24 години роботи?

Майстер і учень виготовили 286 деталей за 11 робочих годин. Скільки деталей може виготовити учень за 6 годин роботи, якщо майстер за 2 години робить 42 деталі?

	заг..виробіток / *відстань*	*продукт..пр.* / *швидкість*	час
I	*A/ S*	?	t_1
II	*A/ S*	?	t_2
I і II	***?***	?	t

1 спосіб	2 спосіб
$A = A : t_1 \cdot t + A : t_2 \cdot t$ $S = S : t_1 \cdot t + S : t_2 \cdot t$	$A = (A : t_1 + A : t_2) \cdot t$ $S = (S : t_1 + S : t_1) \cdot t$

Мал.91. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух в різних напрямках, в яких шуканою є продуктивність одного з виконавців або швидкість одного з тіл

Після розв'язання кожної задачі, так само як і у попередніх випадках, учні перетворюють її у задачу на одночасний рух назустріч та у протилежних напрямках, узагальнюють їх математичні структури і способи розв'язування (див. мал. 92, 93).

	заг..виробіток / *відстань*	*продукт..пр.* / *швидкість*	час
I	*A/ S*	?	***?***
II	*A/ S*	?	t_2
I і II	*A / S*	?	t

1 спосіб	2 спосіб
	$t_2 = A : (A : t - A : t_2)$ $t_2 = S : (S : t - S : t_2)$

Мал.92. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух в різних напрямках, в яких шуканою є час роботи одного з виконавців або час руху одного з тіл

	заг..виробіток / *відстань*	*продукт..пр.* / *швидкість*	час
I	***?***	?	t_1
II	A_2/ S_2	?	t_2
I і II	*A / S*	?	t

1 спосіб	2 спосіб
	$A_1 = (A : t - A_2 : t_2) \cdot t_1$ $S = (S : t - S_2 : t_1) \cdot t_1$

Мал. 93. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух в різних напрямках, в яких шуканим є загальний виробіток при спільній праці або відстань

2.3. Задачі на рух в одному напрямку (навздогін та з відставанням)

Методичну основу розробки методики формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі на рух в одному напрямку становлять:

1. Зіставлення задач на одночасний рух назустріч та одночасний рух навздогін, задач на рух навздогін та задач на рух з відставанням, під час ознайомлення (П. М. Ерднієв).
2. Узагальнення способів розв'язування задач на рух в одному напрямку на підставі задач з буквеними даними (Л. Г. Петерсон).

Теоретичною основою розробки методики формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі на одночасний рух в одному напрямку, так само, як і для розробки методики навчання розв'язування задач на одночасний рух в різних напрямках, є теорія змістовних узагальнень В. В. Давидова. В основі будь-якого узагальнення, в тому числі й змістовного, лежить порівняння. Порівняння може бути організовано по-різному – послідовно або паралельно, що на думку А. К. Артьомова суттєво впливає на результат навчання. Суть послідовного порівняння полягає в тому, що новий об'єкт порівнюється з раніш вивченим. Паралельне порівняння характеризується тим, що відразу, одночасно подаються декілька зразків, що відображують усі або найбільш типові варіанти з даної сукупності, щоб на підставі їх порівняння зробити правильне узагальнення.

При використанні в навчанні як послідовного, так і паралельного порівняння, гальмуються помилкові і закріплюються правильні тимчасові зв'язки, підвищується диференціація понять і правил, утворюються міцні асоціативні зв'язки за схожістю і контрастом. Взагалі, психологами встановлено, що знання, подані у порівнянні, засвоюються ефективніше і запам'ятовуються міцніше. Крім того, слід зазначити, що порівняння сприяє встановленню більш глибоких зв'язків раніш вивченого і нового матеріалу, полегшує засвоєння знань, допомагає побачити аналогії. Саме такий підхід до навчання розв'язування задач на рух в одному напрямку обрано П. М. Ерднієвим.

Тому дану методику ми розробили на основі послідовного порівняння задач на одночасний рух в різних напрямках та задач на одночасний рух в одному напрямку, і паралельного порівняння задач на одночасний рух навздогін з задачами на одночасний рух з відставанням. Дана методика реалізується за допомогою системи завдань, у якій містяться задачі з двома умовами руху: або рух відбувається назустріч або навздогін; або рух відбувається у протилежних напрямках або з відставанням; або навздогін або з відставанням. При розгляді задач, в яких подано два варіанти руху – навздогін та з відставанням, учні досліджують ці задачі за зміною шуканого.

2.3.1. Підготовча робота

На ступені підготовчої роботи учні повинні :

1) спостерігати за рухом двох тіл в одному напрямку;
2) усвідомити, що коли швидкість тіла, що рухається позаду, $\frac{\textit{більша}}{\textit{менша}}$ за швидкість тіла, що рухається попереду, то відбувається $\frac{\textit{наближення}}{\textit{відставання}}$ одного тіла $\frac{\textit{до}}{\textit{від}}$ другого.
3) зробити висновок: знайти на скільки $\frac{\textit{зменшується}}{\textit{збільшується}}$ відстань між тілами за одиницю часу, треба відніманням.

Підготовча робота розпочинається з визначення характеру зміни певної величини за одиницю часу (кількості людей, об’єму води, маси вугілля), тобто величини, яка не пов’язана з рухом двох тіл одне відносно одного. Наприклад: Порівняй і розв’яжи задачі:

В кімнаті кілька осіб. Кожну хвилину у кімнату входять 3 людини з однієї двері та 2 людини з другої двері. Як зміниться кількість людей в кімнаті за 1 хвилину? За 2 хвилини? Скільки осіб стане в кімнаті через 5 хвилин, якщо спочатку у кімнаті було 2 людини?	В кімнаті кілька осіб. Кожну хвилину у кімнату через перші двері входять 3 людини, а через другі двері виходять 2 людини. Як зміниться кількість людей в кімнаті за 1 хвилину? За 2 хвилини? Скільки осіб стане в кімнаті через 5 хвилин, якщо спочатку у кімнаті було 2 людини?

Після спостереження учнями руху в одному напрямі (у випадках, коли швидкість тіла, що рухається позаду більше або менше швидкості тіла, що рухається попереду) учні роблять висновок:

Якщо швидкість тіла, що рухається позаду $\frac{\text{більша}}{\text{менша}}$ за швидкість тіла, що рухається попереду, то відстань між тілами весь час $\frac{\text{зменшується}}{\text{збільшується}}$.

Перше тіло $\frac{\text{наздогоняє}}{\text{відстає...від}}$ друг$\frac{\text{е}}{\text{ого}}$ тіл$\frac{\text{о}}{\text{а}}$.

З метою закріплення цього висновку дітям пропонуються завдання на з'ясування умов, при яких одне діло наздоганяє інше або відстає від нього або відстань між ними не змінюється. Наприклад:

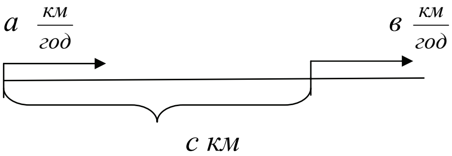
Собака побігла за лисицею, яка знаходилася на відстані 120 м. Лисиця пробігає за хвилину 320 м. Чи зможе собака наздогнати лисицю, якщо буде пробігати 300 м за хвилину? Поясни відповідь.
- З якою швидкістю повинна бігти собака, щоб відстань між нею і лисицею не змінювалась?
- Якою повинна бути швидкість собаки, щоб відстань між нею і лисицею скорочувалася?
- Чи наздожене собака лисицю, якщо пробігатиме за хвилину по 350 м?

Далі учням пропонуються завдання, які містять опис руху двох тіл в одному напрямку і пропонується *визначити характер зміни відстані між ними за одиницю часу і числове значення зміни відстані між тілами за одиницю часу*.

Для формулювання правила знаходження числового значення зміни відстані між тілами, що рухаються в одному напрямку, учні розглядають ситуацію, коли два хлопчики починають бігти одночасно з одного пункту в одному напрямку з різними швидкостями. Виходячи з фізичного змісту швидкості школярі визначають, яку відстань долає кожний хлопчик за одиницю часу, показуючи це відповідними відрізками, знаходять їх різницеве відношення. Отже, щоб дізнатися, на скільки одне тіло буде відставати від іншого або інше буде його випереджати, слід від більшого числового значення швидкості відняти менше. Для закріплення цього висновку пропонуються завдання:

Перша черепаха рухається за другою черепахою. Швидкість першої 8 $\frac{дм}{хв}$, швидкість другої – 6 $\frac{дм}{хв}$. Як змінюється відстань між черепахами? На скільки змінюється відстань між черепахами за кожну хвилину?

Також на етапі підготовчої роботи діти вчаться виконувати рисунки при одночасному русі в одному напрямку з різних пунктів (мал. 93).



Мал. 93. Схематичний рисунок одночасного руху в одному напрямку з різних пунктів *а, в, с* – числові дані задачі

Відстань між черепахами за кожну хвилину скорочується, тому що швидкість тієї черепахи, що рухається позаду більша за швидкість черепахи, що рухається попереду.

Перша черепаха за кожну хвилину долає 8 дм, а друга – 6 дм. У той час, коли перша черепаха наблизилася до другої на 8 дм, друга від неї віддалилася на 6 дм. Але 8 дм більше за 6 дм., тому все ж таки відстань між черепахами скорочується на: *8 – 6 = 2 (дм).*

Відповідь: відстань між черепахами скорочується на 2 дм за кожну хвилину.

З метою подолання вузького узагальнення, слід пропонувати аналогічні завдання, на визначення характеру зміни відстані між тілами за одиницю часу та її числового значення, не лише у випадку руху в одному напрямку наздогін або з відставанням, а й на рух назустріч і в протилежних напрямах.

Далі корисно *порівняти задачі на рух назустріч та рух в протилежних напрямах та на рух наздогін та рух з відставанням і узагальнити міркування при визначенні на скільки змінюється відстань за одиницю часу*. Учням пропонуються задачі з однаковими числовими даними, але заданими двома варіантами напрямку руху. Наприклад:

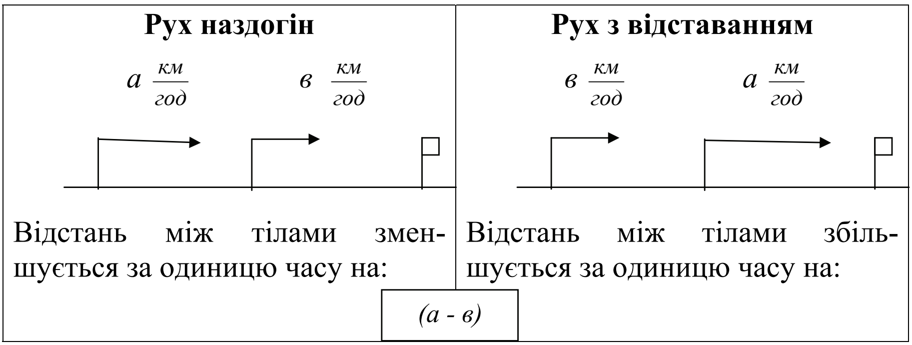
1. З пунктів А і В одночасно $\frac{\textit{назустріч...один...одному}}{\textit{в...протилежних...напрямках}}$ вирушили одночасно два вершники. Швидкість першого вершника $a\ \frac{км}{год}$, а швидкість другого $в\frac{км}{год}$. Як змінюється відстань між вершниками? На скільки кілометрів вершники $\frac{\textit{наблизяться}}{\textit{віддаляться}}$ за кожну годину?

2. З А і В одночасно в одному напрямку вирушили два вершники. Швидкість першого вершника $a\ \frac{км}{год}$, а швидкість другого

$в\frac{км}{год}$; при чому $a>в$. Як могли рухатися вершники? Як змінюється відстань між вершниками? На скільки кілометрів вершники $\frac{\textit{наблизяться}}{\textit{віддаляться}}$ за кожну годину?

При цьому учні дістають висновків, що при русі $\frac{\textit{назустріч}}{\textit{в..протилежних..напрямках}}$ відстань між тілами весь час $\frac{\textit{зменшується}}{\textit{збільшується}}$ на суму числових значень швидкостей цих тіл, а при русі $\frac{\textit{наздогін}}{\textit{з..відставанням}}$ відстань між тілами весь час $\frac{\textit{зменшується}}{\textit{збільшується}}$ на різницю числових значень швидкостей цих тіл (мал. 94).

Також слід звернути увагу школярів на *однаковий характер зміни відстані між тілами за одиницю часу при одночасному русі назустріч та навздогін або при русі у протилежних напрямках та з відставанням*, допоможе також розв'язання задач з однаковими числовими даними, але двома варіантами напрямку руху.



Мал. 94. Схематичний рисунок одночасного руху наздогін та з відставанням. Характер та числове значення зміни відстані між тілами за одиницю часу
а, в, с – числові дані задачі

Наприклад:

1. З А і В одночасно $\frac{\textit{назустріч...один...одному}}{\textit{наздогін}}$ вирушили одночасно два вершники. Швидкість першого вершника $a\ \frac{км}{год}$, а швидкість другого $в\frac{км}{год}$; при чому $a>в$. Як змінюється відстань між вершниками? На скільки кілометрів вершники наближаються за кожну годину?

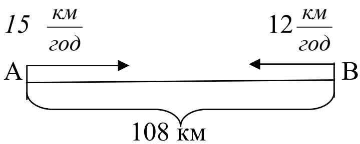
2. З пунктів А і В одночасно $\frac{назустріч...один...одному}{в...протилежних...напрямках}$ вирушили одночасно два вершники. Швидкість першого вершника *а* $\frac{км}{год}$, а швидкість другого $в\frac{км}{год}$. Як змінюється відстань між вершниками? На скільки кілометрів вершники віддаляються за кожну годину?

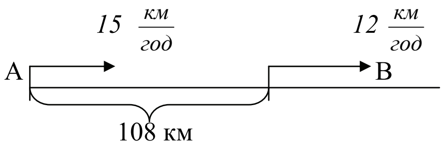
Отже на етапі підготовчої роботи застосовується послідовне порівняння руху в різних напрямках і руху в одному напрямку: руху назустріч і руху наздогін, руху в протилежних напрямках і руху з відставанням; результати порівняння узагальнюються в буквеній формі. Крім того, використовується паралельне порівняння руху наздогін та руху з відставанням. Таким чином, після проведення запропонованої підготовчої роботи учні усвідомлюють, що рух в одному напрямку може відбуватися за двома варіантами: навздогін або з відставанням. Розглядаються умови здійснення того чи іншого варіанту; характер зміни відстані між тілами за одиницю часу за обома варіантами; спосіб знаходження цієї величини. Діти вчаться схематично зображати рух двох тіл в одному напрямку.

2.3.2. Ознайомлення

Ознайомлення учнів із задачами на рух в одному напрямку цілком побудовано на порівнянні відомих учням видів задач – на рух в різних напрямках (назустріч та у протилежних напрямках) с задачами нового виду. Обидва види задач мають однакові способи знаходження відстані, часу та швидкості – і це учні усвідомлюють на підставі порівняння задач. Порівнюючи задачі, учні ще раз підкреслюють відмінність у знаходженні числового значення зміни відстані за одиницю часу при русі в різних та в одному напрямку. Таким чином здійснюється послідовне порівняння. Результати послідовного порівняння нами узагальнені в буквеній формі.

Задача 1. Відстань між пунктами А і В 108 км. З цих пунктів одночасно $\frac{назустріч}{наздогін}$ один одному вирушили велосипедист і вершник. Швидкість вершника 12 $\frac{км}{год}$, а швидкість велосипедиста 15 $\frac{км}{год}$. На скільки кілометрів відстань скорочується за кожну годину? На скільки вони наблизяться один до одного за 3 години? Якою буде відстань між вершником і велосипедистом через 3 години?





На скільки кілометрів відстань скорочується за кожну годину?

Велосипедист і вершник наближаються один до одного за кожну годину на (15 + 12) км	*Велосипедист наближається до вершника за кожну годину на (15 – 12) км*

- В якому випадку відстань між велосипедистом і вершником скорочується на більше число кілометрів? (Коли велосипедист і вершник рухаються назустріч один одному).
- Чому в першому випадку відстань скорочується за 1 годину на більше число кілометрів? (Тому що ми це знаходимо дією додавання! <u>Відстань при одночасному русі назустріч скорочується на суму відстаней, яку проходить кожне тіло за одиницю часу</u>.)
- В якому випадку відстань між велосипедистом і вершником скорочується на менше число кілометрів? (Коли велосипедист і вершник рухаються наздогін).
- Чому в другому випадку відстань скорочується за 1 годину на менше число кілометрів? Тому що ми це знаходимо дією віднімання! <u>Відстань при одночасному русі наздогін скорочується на різницю відстаней, яку проходить кожне тіло за одиницю часу</u>).

На скільки вони $\frac{\textit{наблизяться}}{\textit{віддаляться}}$ за 3 години?

Велосипедист і вершник наближаються один до одного за 3 години на *(15 + 12) · 3* *або* *15 · 3 + 12 · 3*	*Велосипедист наблизиться до вершника за 3 години на* *(15 – 12) · 3* *або* *15 · 3 – 12 · 3*

Якою буде відстань між вершником і велосипедистом через 3 години?

108 – (15 + 12) · 3 *або* *108 – (15 · 3 + 12 · 3)*	*108 – (15 - 12) · 3* *або* *108 – (15 · 3 - 12 · 3)*

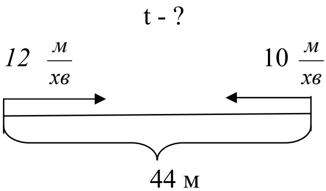
Через скільки годин вони опиняться разом?

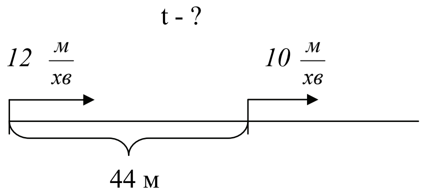
- На скільки метрів вони повинні для цього наблизитися один до одного?
- На скільки метрів вони наближаються один до одного за кожну годину?

Велосипедист і вершник зустрінуться через: *108 : (15 + 12)*	*Велосипедист дожене вершника через:* *108 : (15 – 12)*

Задача 2. Відстань між двома лижниками на момент початку руху складала 44 м. Вони почали рухатися одночасно $\frac{\textit{назустріч}}{\textit{наздогін}}$ один одному. Швидкість першого лижника 12 $\frac{м}{хв}$ а швидкість другого 10 $\frac{м}{хв}$ Через скільки хвилин опиняться разом?

Оскільки учні вміють розв'язувати задачі на знаходження часу при одночасному русі назустріч, то спочатку розв'язується ця задача. Після її розв'язання розглядається інший варіант руху – наздогін, з'ясовується, як зміна напрямку вплине на розв'язання задачі.

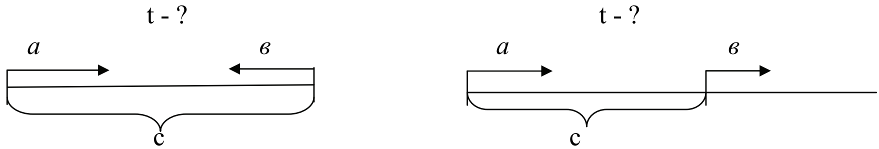




Висновки: відстань між лижниками весь час зменшується; на рух вони витратили однаковий час; відстань, яка була між лижниками на момент початку руху складається з відстані, яку подолав перший лижник та відстані, яку подолав другий лижник. 1) 12 + 10 = 22 (м) – на стільки наближаються лижники один до одного за кожну годину; 2) 44 : 22 = 2 – через стільки хвилин лижники наблизяться один до одного.	Висновки: відстань між лижниками весь час зменшується; на рух вони витратили однаковий час; відстань, яка була між лижниками на момент початку руху дорівнює різниці відстані, яку подолав перший лижник та відстані, яку подолав другий лижник. 1) 12 – 10 = 2 (м) – на стільки наближається перший лижник до другого за кожну годину; 2) 44 :2 = 22 – через стільки хвилин перший лижник дожене другого. Перевірка

Перевірка $12 \cdot 2 = 24$ (м) – на стільки наблизився перший лижник до другого за 2 хвилини; $10 \cdot 2 = 20$ (м) – на стільки наблизився другий лижник до першого за 2 хвилини; $20 + 24 = 44$ (м) – було між лижниками на момент початку руху. Відповідь: 5 хвилин.	1) $12 \cdot 22 = 264$ (м) – на стільки наблизився перший лижник до другого за 22 хвилини; 2) $10 \cdot 22 = 220$ (м) – на стільки віддалився другий лижник від першого за 22 хвилини; 3) $264 - 220 = 44$ (м) – було між лижниками на момент початку руху Відповідь: 22 хвилини..

Узагальнюємо спосіб знаходження часу руху при одночасному русі в різних та в одному напрямку (мал. 95).



Одночасний рух назустріч	Одночасний рух наздогін
$t = c : (a + в)$	$t = c : (a - в)$

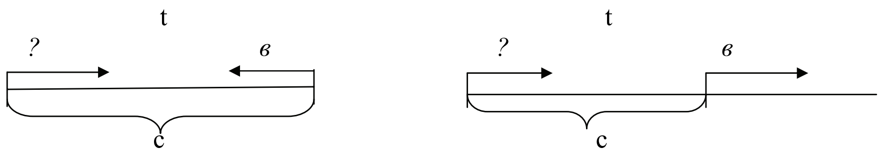
Мал. 95. Спосіб знаходження часу руху при одночасному русі назустріч та наздогін

а, в, с - числові дані задачі

Задача 3. Відстань між двома чоловіками на момент початку руху була 600 м. Вони одночасно почали рухатися $\frac{\textit{назустріч}}{\textit{наздогін}}$ і опинилися поряд через 2 хвилини. Яка швидкість другого чоловіка, якщо швидкість першого $170\ \frac{м}{хв}$? (у випадку руху в одному напрямку другий рухається попереду першого).

Працюємо над цією задачею аналогічно попередній. Розв’язавши задачу на одночасний рух назустріч, змінюємо напрямок руху і з’ясовуємо, що перша дія не змінюється і ми так само, як у попередній задачі знаходимо числове значення зміни відстані за одиницю часу, але змінюється друга дія – віднімання замінюється додаванням. У іншому способі розв’язування, так само змінюється друга дія, і відповідно, змінюються числа у третій дії.

Узагальнюємо способи знаходження швидкості при одночасному русі назустріч та наздогін (мал. 96).



Одночасний рух назустріч	*Одночасний рух наздогін*
1 спосіб	1 спосіб
$a = c : t - в$	$a = c : t + в$
2 спосіб	2 спосіб
$a = (c - в \cdot t) : t$	$a = (c + в \cdot t) : t$

Мал. 96. Спосіб знаходження швидкості одного з тіл при одночасному русі назустріч та наздогін *(в, с, t* - числові дані задачі)

Задача 4. Два пішоходи почали рухатися одночасно $\frac{\textit{назустріч}}{\textit{наздогін}}$. Якою була відстань між ними на момент початку руху, якщо вони опинилися разом через 3 год., при чому перший йшов зі швидкість 5 $\frac{км}{год}$, а другий зі швидкістю 3 $\frac{км}{год}$?

Робота над задачею відбувається аналогічно попереднім. Зміна напрямку руху впливає на першу дію, тому що числове значення зміни відстані за одиницю часу при русі навздогін знаходять не додаванням, а відніманням, тому треба замінити одне з чисел у останній – другій дії. При розв'язанні задачі трьома діями змінюється остання дія – додавання замінюється відніманням.

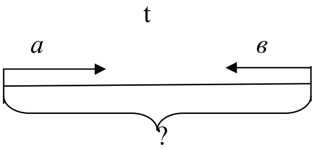
Узагальнюємо способи знаходження швидкості при одночасному русі назустріч та наздогін (мал. 97).

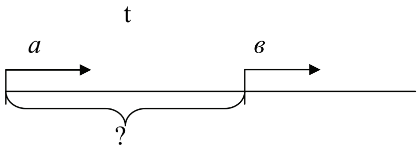
Таким чином, на основі послідовного порівняння задач на одночасний рух назустріч та на одночасний рух наздогін, нами визначено способи знаходження часу зустрічі, швидкості одного з тіл та відстані на момент початку руху у випадку, коли тіла рухаються в одному напрямку та одне тіло наближається до другого. Тепер існує можливість розглянути задачі на рух наздогін та з відставанням на основі паралельного порівняння.

Задача 5. Два велосипедиста знаходяться на відстані 240 м один від одного. Швидкість першого велосипедиста 5 $\frac{м}{с}$, а швидкість другого 3 $\frac{м}{с}$. Вони почали рухатися одночасно в одному напрямі. Якою буде відстань між ними через 30 с, якщо вони рухаються так, що:

1) перший іде за другим;

2) другий їде за першим?



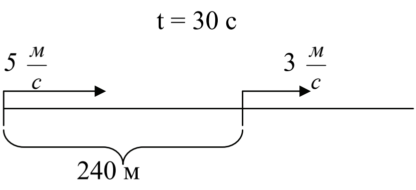


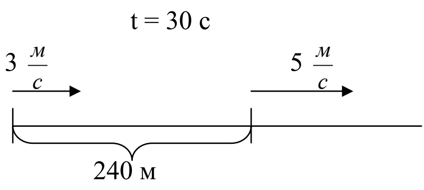
Одночасний рух назустріч	*Одночасний рух наздогін*
1 спосіб	1 спосіб
$S = (a + в) \cdot t$	$S = (a - в) \cdot t$
2 спосіб	2 спосіб
$S = a \cdot t + в \cdot t$	$S = a \cdot t - в \cdot t$

Мал. 97. Спосіб знаходження відстані на момент початку руху при одночасному русі назустріч та наздогін (*в, а, t* - числові дані задачі)

Спочатку розв’язується задача на рух наздогін. При першому способі учні визначають характер і числове значення зміни відстані за одиницю часу, дізнаються про числове значення зміни відстані за даний в умові задачі час, і третьою дією – про відстань, яку залишилося обом тілам подолати до зустрічі. При іншому способі першою дією дізнаємося на скільки наближається одне тіло до другого за даний час, другою дією дізнаємося яку відстань залишилося скоротити першому, щоб дістати другого; третьою дією – на скільки віддаляється друге тіло від першого за даний час; четвертою дією – про відстань між тілами через даний час.

Далі відбувається *зміна напрямку руху тіл*: тепер друге тіло рухається за першим, відбувається рух з відставанням. З’ясовуємо як ця зміна впливає на розв’язання задачі: в першому способі змінюється остання дія – віднімання замінюється додаванням; а другий спосіб майже не змінився – помінялися місцями числові значення швидкості в першій та третій діях.





Швидкість велосипедиста, що їде позаду більша за швидкість велосипедиста, що їде попереду. Тому відстань між велоси-	Швидкість велосипедиста, що їде позаду менша за швидкість велосипедиста, що їде попереду. Тому відстань між велоси-

педистами весь час буде зменшуватися. 1 спосіб. 5 – 3 = 2 (м) – на стільки зменшується відстань за кожну секунду; 2 · 30 = 60 (м) – на стільки зменшиться відстань за 30 с; 240 – 60 = 180 (м) – буде між велосипедистами через 30 с. II спосіб: 1) 5 · 30 = 150 (м) – на стільки наблизиться перший велосипедист до другого за 30 с; 2) 240 – 150= 90 (м) – стільки залишиться від першого велосипедиста до другого; 3) 3 · 30 = 90 (м) – на стільки віддалиться другий від першого за 30 с; 4) 90 + 90 = 180 (м) – буде між велосипедистами за 30 с. Відповідь: 180 м буде між велосипедистами через 30 секунд.	педистами весь час буде збільшуватися. 1 спосіб. 5 – 3 = 2 (м) – на стільки збільшується відстань за кожну секунду; 2 · 30 = 60 (м) – на стільки збільшується відстань за 30 с; 240 + 60 = 300 (м) буде між велосипедистами через 30 с. II спосіб: 1) 3 · 30 = 90 (м) – на стільки наблизиться другий велосипедист до першого за 30 с; 2) 240 – 90= 150 (м) – стільки залишиться від другого велосипедиста до першого; 3) 5 · 30 = 150 (м) – на стільки віддалиться перший від другого за 30 с; 4) 150 + 150 = 300 (м) – буде між велосипедистами за 30 с. Відповідь: 300 м буде між велосипедистами через 30 секунд.

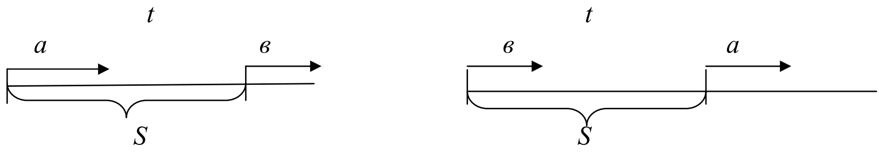
Узагальнюємо способи знаходження відстані між тілами через певний час спільного руху при одночасному русі навздогін та з відставанням (мал. 98).

Учні пояснюють числа задачі № 4 до кожного варіанту руху, і *складають відповідно дві обернені задачі на знаходження відстані на момент початку руху*.

Задача 6. Два велосипедиста почали рухатися одночасно в одному напрямі. Швидкість першого велосипедиста 5 $\frac{м}{с}$, а швидкість другого 3 $\frac{м}{с}$. Якою була відстань на момент початку руху, якщо через 30 с після початку руху відстань між ними була:

1) 180 м, при чому перший їде за другим;

2) 300 м, при чому другий їде за першим?



Одночасний рух навздогін	Одночасний рух з відставанням
1 спосіб $S - (a - в) \cdot t$ 2 спосіб $S - a \cdot t + в \cdot t$	1 спосіб $S + (a - в) \cdot t$ 2 спосіб $S - в \cdot t + a \cdot t$

Мал. 98. Спосіб знаходження відстані між тілами через певний час руху при одночасному русі наздогін та з відставанням (*в, а, t, S* - числові дані задачі)

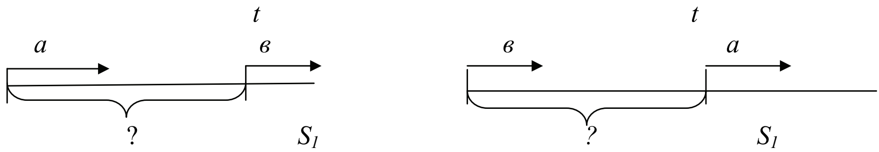
Робота йде аналогічно. Спочатку розв'язуємо задачу на рух навздогін. Першою дією дізнаємося про числове значення зміни відстані за одиницю часу, другою дією – про числове значення зміни відстані за час спільного руху тіл, третьою дією дізнаємось про відстань на момент початку руху. *Зміна напрямку руху тіл* – рух з відставанням, викликає відповідні зміни у поясненні до першої та другої дії (відстань між тілами не зменшується, а збільшується), змінюється третя дія – додавання замінюється відніманням.

Узагальнюємо спосіб знаходження відстані між тілами на момент початку руху при одночасному русі наздогін та з відставанням (мал. 99).

Складаємо *другу обернену задачу* на знаходження швидкості одного з тіл:

Задача 6. Два велосипедиста знаходяться на відстані 240 м один від одного. Яка швидкість першого велосипедиста, якщо швидкість другого велосипедиста 3 $\frac{м}{с}$. Вони почали рухатися одночасно в одному напрямі, при чому:

1) перший їде за другим та через 30 с після початку руху відстань між ними складала 180 м;
2) другий їде за першим та через 30 с після початку руху відстань між ними складала 300 м.

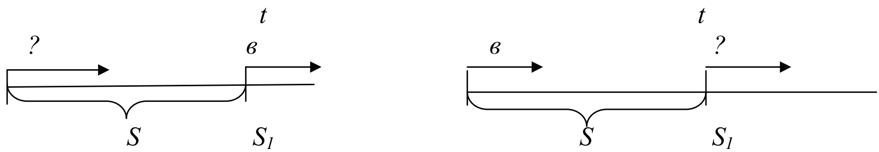


Одночасний рух навздогін	Одночасний рух з відставанням
$S_1 + (a - в) \cdot t$	$S_1 - (a - в) \cdot t$

Мал. 99. Спосіб знаходження відстані на момент початку руху при одночасному русі наздогін та з відставанням (*в, а, t,* S_1- числові дані задачі)

Працюємо аналогічно. *Зміна умов руху* впливає лише на першу дію – в ній приймають участь інші числові дані, а план розв’язання не змінюється: першою дією дізнаємось про числове значення зміни відстані за час спільного руху; другою дією дізнаємось про відстань, яку подолало одне з тіл за час спільного руху; третьою дією – про відстань, яку подолало інше тіло за весь час руху; четвертою дією – знаходимо швидкість іншого тіла.

Узагальнюємо спосіб знаходження швидкості одного з тіл при одночасному русі наздогін та з відставанням (мал. 100).



Одночасний рух навздогін	Одночасний рух з відставанням
$(S - S_1 + в \cdot t) : t$	$(S_1 - S + в \cdot t) : t$

Мал. 100. Спосіб знаходження швидкості одного з тіл при одночасному русі наздогін та з відставанням (*в, t, S,* S_1- числові дані задачі)

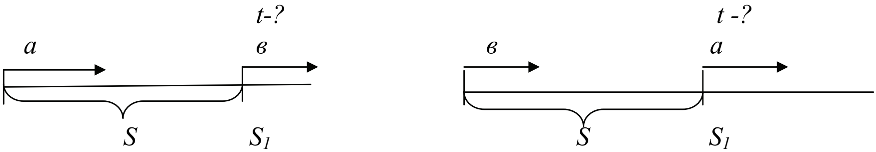
Третя обернена задача на знаходження часу спільного руху:

Задача 7. Два велосипедиста знаходяться на відстані 240 м один від одного. Швидкість першого велосипедиста 5 $\frac{м}{с}$, а швидкість другого велосипедиста 3 $\frac{м}{с}$. Через скільки секунд відстань між ними складатиме:

1) 180 м , якщо перший їде за другим;
2) 300 м , якщо другий їде за першим.

Працюємо аналогічно. Узагальнюємо плани розв'язування задач на знаходження часу спільного руху при одночасному русі наздогін та з відставанням: першою дією дізнаємося про числове значення зміни відстані між тілами за одиницю часу; другою дією дізнаємось про числове значення зміни відстані між тілами за час спільного руху; третьою дією – про час спільного руху.

Узагальнюємо спосіб знаходження часу спільного руху при одночасному русі наздогін та з відставанням (мал. 101).



Одночасний рух навздогін	*Одночасний рух з відставанням*
$(S - S_1) : (a - в)$	$(S_1 - S) : (a - в)$

Мал. 101. Спосіб знаходження часу спільного руху при одночасному русі наздогін та з відставанням ($в$, a, S, S_1 - числові дані задачі)

Формування умінь розв'язувати задачі на одночасний рух в одному напрямку. Обов'язковими елементами при роботі над задачами на цьому етапі є визначення характеру зміни відстані між тілами за одиницю часу, числового значення цієї зміни – це „ключ" до розв'язання задачі. Якщо учні не пам'ятають способу розв'язування, то виконується аналітичний або синтетичний пошук розв'язування задачі.

На етапі роботи над задачею після її розв'язання діти складають і розв'язують обернені задачі, або змінюють порядок прямування тіл і розв'язують отриману задачу.

Учням також пропонуються дещо ускладнені задачі на рух в одному напрямку, при чому ускладнення йде за рахунок:

- зміни швидкості тіла, що рухається по переду, через певний час спільного руху двох тіл, при русі наздогін;
- неодночасного початку руху двох тіл з одного пункту;
- продовження руху наздогін після того, як тіло, що рухалося позаду опинилося поруч з тілом, що рухалося попереду;
- введення різницевого або кратного відношення швидкостей двох тіл.

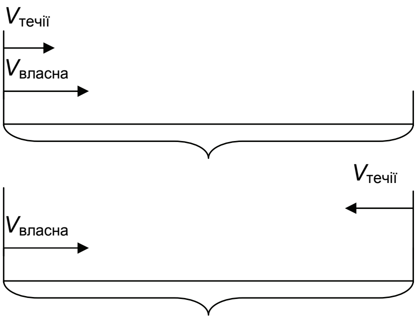
Далі можна узагальнити математичні структури та способи розв'язування задач на рух навздогін та задач на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання.

2.4. Задачі на рух за течією та проти течії річки

Серед задач на рух виділяються ще й задачі на рух за течією та проти течії річки. Ці задачі спираються на поняття: власна швидкість катера ($V_{\text{власна}}$), швидкість течії річки($V_{\text{течії}}$), швидкість катера за течією річки ($V_{\text{за течією}}$) та швидкість катера проти течії річки ($V_{\text{проти течії}}$). Отже, ці поняття слід ввести, познайомити учнів з відповідними формулами та показати учням як виконується рисунок до подібних задач.

Познайомити учнів з даними поняттями можна залучивши досвід дітей по спостереженню за рухом маленького паперового кораблика у річці. Під час такого спостереження учні дістають висновків:

- При русі катера за течією річки, течія ніби підштовхує катер і його швидкість збільшується на швидкість течії;
- При русі проти течії річки, течія заважає руху катера, його швидкість зменшується на швидкість течії.



$$\boxed{V_{\text{за течією}} = V_{\text{власна}} + V_{\text{течії}}}$$

$$\boxed{V_{\text{за течією}} = V_{\text{власна}} - V_{\text{течії}}}$$

Мал. 102. Схематичне зображення руху за течією та проти течії річки

$V_{\text{власна}}$ – власна швидкість катера, швидкість катера в стоячій воді
$V_{\text{течії}}$ – швидкість течії
$V_{\text{за течією}}$ – швидкість катера за течією
$V_{\text{проти течії}}$ – швидкість катера проти течії

Шуканим у задачах на рух за течією та проти течії річки може бути:

- час руху за течією або проти течії річки;
- відстань;
- швидкість течії річки;

- власна швидкість катеру.

Спосіб розв'язання задач цього виду полягає на знанні відповідних формул та умінні перетворювати їх. Наприклад, треба знайти швидкість течії, якщо дано швидкість за течією або проти течії та власну швидкість.

В формулі: $V_{\text{за течією}} = V_{\text{власна}} + V_{\text{течії}}$

Сума 1 доданок 2 доданок

швидкість течії – це другий доданок. Щоб знайти другий доданок, треба від суми відняти перший доданок. Отже маємо:

$$V_{\text{течії}} = V_{\text{за течією}} - V_{\text{власна}}$$

В формулі:

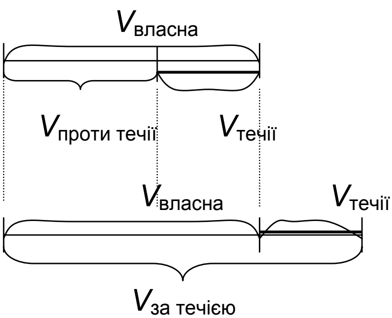
$$V_{\text{проти течії}} = V_{\text{власна}} - V_{\text{течії}}$$

Різниця Зменшуване Від'ємник

швидкість течії – це від'ємник. Щоб знайти невідомий від'ємник, треба від зменшуваного відняти різницю. Отже, маємо:

$$V_{\text{течії}} = V_{\text{власна}} - V_{\text{проти течії}}$$

Складнішою є задача на знаходження швидкості течії за відомими швидкістю за течією річки та швидкістю проти течії річки.



Мал. 103. Схематичне зображення співвіднесення значень величин, пов'язаних з рухом за течією та проти течії річки

З малюнка бачимо, що швидкість човна за течією більше швидкості човна проти течії на подвійну швидкість течії. Тому маємо формулу:

$$V_{\text{течії}} = (V_{\text{за течією}} - V_{\text{проти течії}}) : 2$$

3. Методика формування окремих умінь розв'язувати задачі на знаходження середнього арифметичного

Задачі на знаходження середнього арифметичного вивчаються за планом:

1. Задачі на застосування правила знаходження середнього арифметичного: на знаходження середньої температури; на знаходження середньої довжини; на знаходження середньої маси; на знаходження середньої швидкості; на знаходження середньої схожості насіння; на знаходження середньої ціни.
2. Ускладнені задачі на знаходження середнього арифметичного: на знаходження середньої довжини; на знаходження середньої маси; на знаходження середньої швидкості; на знаходження середньої схожості насіння; на знаходження середньої ціни.

Дослідження задач на знаходження середнього арифметичного відбувається за наступними ***змінами***:

- за зміною ситуації задачі: задача на знаходження середньої температури перетворюється у задачу на знаходження середньої довжини, а потім – на знаходження середньої маси і так далі;
- за зміною числових даних задачі;
- за наступною зміною: задача, у якій містилося кілька значень однієї і тієї самої величини перетворюється у задачу, що містить групу пропорційних величин (ускладнену).

Виконавши певні зміни учні досліджують їх вплив на математичну структуру та план розв'язування задачі. Таке дослідження задачі є могутнім засобом визначення істотних ознак математичної структури та плану розв'язування задачі.

Істотні ознаки задач на знаходження середнього арифметичного:

1) ці задачі містять або кілька числових значень однієї тієї самої величини або містять три пропорційні величини і кілька випадків;

2) якщо задача містить групу пропорційних величин, то дані значення двох величин: $\frac{\text{величини однієї одиниці виміру чи лічби}}{\text{загальної величини}}$ та кількості або часу для кількох випадків;

3) в цих задачах шуканим є середнє значення або середнє значення величини однієї одиниці виміру або лічби.

„Ключем" до розв'язання цих задач є правила знаходження середньої величини.

Спосіб розв'язування задач на знаходження середнього арифметичного

1) знаходимо суму значень загальної величини для усіх випадків;
2) знаходимо суму значень кількості або часу;
3) знаходимо середє значення.

3.1. Підготовча робота

На етапі підготовки до введення задач нового виду пропонуємо ознайомити учнів з поняттям середнього арифметичного. Таким чином, метою підготовчої роботи є формування в учнів поняття про середнє арифметичне кількох чисел та правила знаходження середнього арифметичного.

Ознайомлення із середнім арифметичним відбувається під час практичної роботи: учні отримують дві палички і вчитель пропонує виміряти довжини кожної палички, а потім знайти, якою була б довжина паличок, якби вони були однаковими.

Після виконання завдання повідомляємо, що ми знаходили середню довжину паличок, а на „мові математики", знаходження середньої величини є знаходженням середнього арифметичного. Ознайомлюємо учнів із правилом знаходження середнього арифметичного двох чисел. Правило можна подати дітям у готовому вигляді:

Щоб знайти середнє арифметичне двох чисел, треба їх суму поділити на 2.

Середнє арифметичне двох чисел дорівнює їх полусумі:

$$(a + в) : 2 = \frac{a + в}{2}$$

Учні читають правило та разом із вчителем визначають порядок виконання дій при знаходженні середнього арифметичного двох чисел. Далі пропонуються спеціальні завдання на застосування цього правила: подаються вирази, записані двома способами (застосовуючи знак ділення – двокрапку та риску дробу); вимагається знайти середнє арифметичне двох чисел, коментуючи дії по кроках; розглядається випадок знаходження середнього арифметичного двох рівних чисел; пропонується порівняти середні арифметичні пар чисел, при чому одне з чисел однакове (тут застосовується зміна суми в залежності від зміни одного з доданків).

Після виконання певної кількості вправ ми проводимо перенос правила знаходження середнього арифметичного двох чисел на інші випадки – знаходження середнього арифметичного 3-х, 4-х, 5-ти …n чисел. Для цього пригадуємо правило знаходження середнього арифметичного двох чисел. З’ясовуємо, чому саме треба суму двох чисел ділити на 2 і визначаємо на скільки треба було б ділити суму чисел, якби доданків було 3 або 4...

Знаходимо середнє арифметичне чотирьох, п’яти і т.д. чисел. Якщо клас добре підготовлений, можна узагальнити це правило та запропонувати учням записати середнє арифметичне n чисел, позначаючи кожне число буквою а, але з індексом 1, 2, 3… n:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Формулюємо правило:

Щоб знайти середнє арифметичне кількох чисел, треба їх суму поділити на кількість цих чисел.

Подаємо пам’ятку (порядок виконання дій при знаходження середнього арифметичного кількох чисел)

Знаходження середнього арифметичного кількох чисел:

1. Знаходжу суму усіх чисел.
2. Підраховую кількість чисел.
3. Ділю суму чисел на їх кількість.

Проводимо закріплення, використовуючи завдання аналогічні знаходженню середнього арифметичного 2-х чисел. Корисними є завдання на знаходження суми кількох чисел, якщо дано їх середнє арифметичне. Засобом аналогічних завдань підводимо дітей до висновку:

Сума чисел дорівнює їх середньому арифметичному, яке помножено на кількість чисел.

Отже, до моменту ознайомлення учнів із задачами нового виду, у дітей повинно бути сформованим уміння знаходити середнє арифметичне кількох чисел.

3.2. Задачі на застосування правила знаходження середнього арифметичного

Ознайомлення здійснюється на задачі на знаходження середньої температури за тиждень: Яка середня температура за тиждень, якщо протягом тижня термометр показував: 19, 20, 21, 22, 21, 20, 17 градусів?

Ситуація цієї задачі не є новою для учнів, на уроках природознавства вони ведуть календар природи, записуючи щоденну температуру повітря. Учні „перекладають" задачу на „мову математики": знайти середню температуру за тиждень – це означає знайти середнє арифметичне 7 чисел, які показують щоденну температуру кожного дня тижня. Застосовуючи правило знаходження середнього арифметичного, складаємо вираз і відповідаємо на запитання задачі.

Далі пропонується аналогічна задача на знаходження середньої схожості насіння. Учні відразу перекладають її на мову математики, встановлюють середнє арифметичне скількох чисел слід знайти, записують розв'язання виразом і відповідають на запитання задачі.

Подальше засвоєння уміння розв'язувати задачі на застосування правила знаходження середнього арифметичного відбувається на задачах наступних видів:

- задачі на знаходження середньої схожості (Для перевірки схожості насіння посадили у 3 ящики. У першому ящику проросло 93, в другому – 89, в третьому – 97 штук. Яка середня схожість насіння?);
- задачі на знаходження середньої температури (Знайди середню температуру за день, якщо в перший день вона складала 22°, а за другий – 20°);
- задачі на знаходження середньої маси (Маса одного кроля 2 кг, а маса другого – 3 кг. Знайди середню масу кролів.);
- задачі на знаходження середньої довжини (Довжина одного відрізка 12 см, а другого – 8 см. Знайди середню довжину відрізків.);
- задачі на знаходження середньої швидкості руху (За першу годину автомобіль пройшов 56 км, а за другу – 60 км. Яка середня швидкість руху автомобіля?);
- задачі на знаходження середньої врожайності (На двох ділянках, площею по 1 га вирощували кукурудзу. На першій ділянці

врожайність становила 2 т з га, а на другій – 3 т з га. Яка середня врожайність кукурудзи на цих ділянках?)

Прочитавши задачу, учні впізнають її – „це задача на знаходження середнього арифметичного”; з’ясовують середнє арифметичне яких чисел треба знайти в цій задачі, скільки таких чисел; і застосовують правило знаходження середнього арифметичного.

3.3. Ускладнені задачі на знаходження середнього арифметичного

Спочатку учні розв’язують задачу на знаходження середньої довжини на застосування правила знаходження середнього арифметичного.

Тесляр розпиляв дошку на дві частини. Довжина однієї частини 2 м 30 см, а другої – 2 м 60 см. Якої довжини була б кожна частина, якби дошку розпиляли на дві рівні частини?

Після розв’язання цієї задачі аналізується вираз, який є розв’язком: що означає вираз, записаний у діленому, що означає дільник? На цій основі учні формулюють правило:

Щоб знайти середню довжину, слід загальну довжину усіх частин поділити на загальну кількість частин.

Після цього ми перетворюємо задачу на ускладнену (задача № 1), або пропонуємо учням нову.

Задача № 1. Для в’язання узяли 3 клубочки пряжі по 23 м ниток та 5 клубочків по 15 м. Знайдіть середню довжину ниток в одному клубочку.

На відміну від попередньої задачі, де кожна частина або відріз або клубок мали різну довжину, в ускладненій задачі – серед них кілька частин або відрізів або клубків мають однакову довжину. Записуємо задачу коротко в формі таблиці, визначаючи групу пропорційних величин; за таблицею пояснюємо числа задачі. З’ясовуємо, чим схожа ця задача на попередню, як ми попередню задачу „перекладали” мовою математики, чи можна аналогічно „перекласти” і цю задачу; середнє арифметичне яких і скількох чисел в ній слід знайти; виписуємо усі ці числа в рядок.

Дізнаємося чим відрізняється ця задача від попередньої і як ця зміна вплине на розв’язання задачі: в цій задачі слід знайти середнє арифметичне не двох а більше чисел, при чому серед них є групи однакових чисел. Записуємо розв'язання виразом і виконуємо тотожні перетворення – суму однакових чисел замінюємо добутком. Аналізуємо перетворений вираз: що означає вираз, який записаний у діленому, у дільнику? Робимо висновок про знаходження середньої довжини. Наведемо методику роботи над цією задачею:

	Загальна довжина (м)	Довжина 1 кл. (м)	Кількість клубків (шт..)
1	?	23 м	3 шт
II	?	15 м	5 шт.
		Середня довжина - ?	

Після аналізу умови задачі, ми проводимо таку бесіду:
- Чим схожі ці задачі? (В них треба знайти середню довжину)
- Як ми переклали на мову математики першу задачу? (Знайти середнє арифметичне двох чисел)
- А у цій задачі теж треба знайти середнє арифметичне двох чисел? (Ні)
- А скількох? (Не відомо)
- Випишемо усі доданки у ряд: 23 23 23 15 15 15 15 15.
- Чим відрізняються задачі? (У першій треба було знайти середнє арифметичне 2-х доданків, а тут 8-ми)
- Давайте складемо вираз для розв'язання задачі. Погляньте уважно, скільки було клубків, довжиною по 23м? (3 клубки)
- Як знайти загальну довжину ниток у цих клубках? (Треба скласти їх довжини, тобто 23+23+23)
- Як знайти довжину ниток у клубках по 15 м? (Треба скласти усі довжини: 15+15+15+15+15)
- Як знайти загальну довжину ниток? (До довжини ниток у клубках по 23 м додати довжину ниток у клубках по 15 м: 23+23+23+15+15+15+15+15)
- Чим цікава ця сума? (Можна виділити 2 групи однакових доданків) Як записати її коротше? ($23 \cdot 3+15 \cdot 5$)
- Ми знайшли загальну довжину ниток у клубках. Чи знаємо ми із умови задачі загальну кількість клубків? (Ні)
- Як знайти кількість клубків? (Треба до кількості клубків по 23 м додати кількість клубків по 15 м: 3 + 5)
- Знайдіть середню довжину ниток в одному клубочку:

$$\frac{23*3+15*5}{3+5}=\frac{69+75}{8}=\frac{144}{8}=18(м)$$

- Що означає вираз над рискою? (Загальну довжину)
- Що означає вираз під рискою? (Загальну кількість)
- Який можна зробити висновок?

Щоб знайти середню довжину, слід загальну довжину усіх частин поділити на загальну кількість частин

Загальна довжина всіх частин
Середня довжина = ---------------------------------------
Загальну кількість частин

Після цього можна запропонувати учням перетворити цю задачу на спрощену та порівняти їх умови. Для в'язання узяли клубок пряжі у 20 м ниток та клубок у 15 м. Знайдіть середню довжину ниток в клубочку.

При розв'язанні наступних задач на знаходження середньої довжини, виконується аналітичний пошук розв'язання, і якщо учням важко записати відразу вираз, розв'язання записується по діях з поясненням.

Аналогічно вводиться *ускладнена задача на знаходження середньої маси.* Учні розв'язують задачу на знаходження середньої маси двох тіл:

Маса першого кроля 2 кг 200 г, а другого 1 кг 600 г. Знайди середню масу цих кролів.

Записують розв'язання виразом, аналізують його і пояснюють, що у діленому записано загальну масу двох тіл, а у дільнику – їх кількість. Отже, робимо висновок:

Щоб знайти середню масу, слід загальну масу усіх тіл поділити на загальну кількість тіл.

Після розв'язання такої задачі ми перетворюємо її на ускладнену: тепер кілька тіл матимуть однакову масу.

Задача № 2. У господарки 4 білих кролі по 2 кг 200 г, і 2 чорних кролі по 1 кг 600 г. Знайдіть середню масу одного кроля.

Після аналізу умови задачі ми проводимо бесіду, аналогічну як при роботі над задачами на знаходження середньої довжини. Порівнявши умови цієї і попередньої задачі, учні визначають, як ця зміна впливає на розв'язання задачі і дістають висновку, що в цій задачі слід знайти середнє арифметичне не двох, а більше чисел; виписують ці числа, застосовуючи правило знаходження середнього арифметичного, складають вираз. Далі виконуємо тотожні перетворення виразу, замінюючи суму однакових доданків добутком. Аналізуючи вираз з'ясовуємо що означає кожний вираз, записаний у діленому та у дільнику і формулюємо правило знаходження середньої маси.

$$\text{Середня маса} = \frac{\text{Загальна маса}}{\text{Загальну кількість}}$$

При розв'язанні наступних задач на знаходження середньої маси, виконується аналітичний пошук розв'язування, і якщо учням важко записати відразу вираз, розв'язання записується по діях з поясненням.

При введенні *ускладненої задачі на знаходження середньої швидкості* застосовуємо також підхід співставлення задачі на знаходження середньої швидкості на застосування правила знаходження середнього арифметичного та ускладненої задачі. Спочатку розв'язується задача на застосування правила:

За першу годину автомобіль їхав з швидкістю 50 $\frac{км}{год}$, а за другу – 80 $\frac{км}{год}$. Яка середня швидкість руху автомобіля?

А потім вона дещо ускладнюється: на відміну від попередньої задачі, з даною швидкістю тіло рухалося не одну годину, а кілька годин.

Задача № 3. По асфальтовій дорозі автомобіль їхав 2 години зі швидкістю 80 $\frac{км}{год}$, по ґрунтовій дорозі він їхав 4 години зі швидкістю 50 $\frac{км}{год}$.Знайди середню швидкість автомобіля.

Здійснюється порівняння задач, учні встановлюють, що обидві задачі на знаходження середньої швидкості тобто середнього арифметичного; з'ясовують, як знайшли середнє арифметичне двох чисел у попередній задачі і чи відомо в цій задачі середнє арифметичне скількох чисел слід знайти? На основі фізичного змісту швидкості встановлюємо яку відстань подолало тіло за кожну годину руху, виписуємо ці числа, і визначаємо їх кількість. Наприклад:

- Автомобіль по асфальтовій дорозі проїхав за першу годину 80 км та за другу годину ще 80 км; а по ґрунтовій дорозі – за першу годину 50 км, за другу годину – 50 км, за третю годину 50 км, за четверту годину 50 км. Тому, щоб знайти загальний шлях, що подолав автомобіль треба: 80 + 80 + = 50 + 50 + 50 + 50

- Так середнє арифметичне скількох чисел ми будемо шукати? (Шести).

- Таким чином, середню швидкість ми знайдемо як середнє арифметичне: $\frac{80+80+50+50+50+50}{6}$.

- Що записано над рискою дробу? (Записана сума усіх чисел). А на мові фізики, нагадаю вам що тут йде мова про рух? (Це загальна відстань).

- А як можна по іншому знайти загальну відстань, що подолав автомобіль? (Якщо згадати формулу відстані $S = V \cdot t$, то отримаємо $80 \cdot 2 + 50 \cdot 4$.)

- Цей вираз можна отримати якщо перетворити складений нами вираз: $80 + 80 \quad + \quad 50 + 50 + 50 + 50 \quad = \; 80 \cdot 2 + 50 \cdot 3$

- Що означає число, що записано під рискою? (Кількість доданків).

- А як ми знайшли кількість доданків? (Ми ці доданки виписали). Але це дуже не зручно. Можна міркуванням встановити кількість доданків. Як це зробити? (Автомобіль рухався 2 години з швидкістю 80 $\frac{км}{год}$, тобто він проїхав 2 рази по 80 км, тому буде 2 доданки. Автомобіль їхав 4 години з швидкістю 50 $\frac{км}{год}$, тобто він проїхав 4 рази по 50 км, тому буде ще 4 доданків. Всього 2 + 4 = 6 доданків).

- Можна записати вираз так: $\frac{80\ \ 2\quad 50\ \ 4}{2\quad 4}$.

- Що означає число 2, виходячи із змісту задачі? (Число 2 означає час, який рухався автомобіль з швидкістю 80 $\frac{км}{год}$). Що означає число 4? (Число 4 означає час, який рухався автомобіль з швидкістю 50 $\frac{км}{год}$). Що означає вираз 2 + 4? (Загальний час руху автомобіля).

- Так, що в нашому виразі записано над рискою? (Загальна відстань). Що записано під рискою? (Загальний час руху). А про що ми дізнаємося за цим виразом? (Про середню швидкість).

- Як знайти середню швидкість?

Загальна відстань
Середня швидкість = ----------------------
Загальний час

Щоб знайти середню швидкість, слід загальну відстань поділити на загальний час руху.

При розв'язанні наступних задач на знаходження середньої швидкості виконується аналітичний пошук розв'язування, і, якщо учням важко записати відразу вираз, розв'язання записується по діях з поясненням.

Ускладнена задача на знаходження середньої врожайності. Як і у попередніх випадках ми пропонуємо просту задачу на знаходження середньої врожайності:

На двох ділянках по 1га вирощували картоплю. З першої ділянки зібрали 13 т картоплі, а з другої – 18 т. Яка середня врожайність картоплі на ділянках?

Далі ускладнюємо цю задачу:

Задача № 4. З 20 га зібрали по 13 т картоплі з гектара, а з 5 га – по 18 т з гектара. Знайди середню врожайність картоплі на цих двох ділянках.

Спочатку визначаємо, що змінилося і ставимо завдання „як ця зміна вплине на розв'язання задачі?". Але перед тим, сформулюємо правило знаходження середньої врожайності на основі аналогії із знаходженням середньої швидкості. Як знайти швидкість? Як знайти середню швидкість? Щоб знайти швидкість, треба відстань поділити на час. Щоб знайти середню швидкість, треба загальну відстань поділити на загальний час.

Порівнюємо, що спільного у знаходженні швидкості і середньої швидкості: в обох випадках ми ділимо відстань на час. Що відмінного: при знаходженні середньої швидкості ми ділимо загальні значення відстані на загальне значення часу. Згадуємо, як знайти врожайність – треба масу поділити на площу. Міркуючи за аналогією, формулюємо правило про знаходження середньої врожайності. Причому з'ясовуємо, чим будуть відрізнятися правила знаходження врожайності та середньої врожайності? При знаходженні середньої врожайності треба буде ділити загальне значення маси на загальну площу.

$$\text{Швидкість} = \frac{\text{Відстань}}{\text{Час}} \qquad \text{Середня швидкість} = \frac{\text{Загальна відстань}}{\text{Загальний час.}}$$

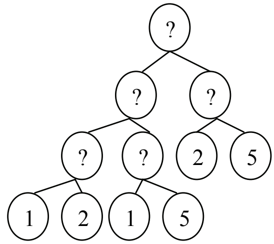
$$\text{Врожайність} = \frac{\text{Маса}}{\text{Площа}} \qquad \text{Середня врожайність} = \frac{\text{Загальна маса}}{\text{Загальна площа}}$$

Щоб знайти середню врожайність, необхідно загальну масу врожаю поділити на загальну площу

Потім повертаємось до розв'язання задачі: виконуємо аналітичний або синтетичний пошук розв'язування, складаємо план розв'язування записуємо розв'язання по діях або виразом. Наприклад:

- Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Потрібно знати 2 числових значення – загальний врожай картоплі з обох ділянок – невідомо та загальну площу ділянок – невідомо) Якою дією відповімо на це питання? (Дією ділення, бо щоб знайти середню врожайність, необхідно загальний врожай поділити на загальну площу) Чи можемо ми відповісти на питання задачі одразу? (Ні, бо нам невідомі обидва числових значення).
- Що потрібно знати, щоб знайти загальний врожай на обох ділянках? (Потрібно знати два числових значення – загальний врожай на першій –невідомо – та врожай на другій –невідомо – ділянках). Якою дією відповімо на це питання? (Дією додавання) Чи можемо ми тепер відповісти на запитання задачі? (Ні, нам невідомий загальний врожай на першій та другій ділянках)
- Що достатньо знати, щоб знайти загальний врожай на першій ділянці? (Потрібно знати два числових значення – врожайність – 13 т з га та площу ділянки – 20 га). Якою дією відповімо на це питання? (Дією множення, бо щоб знайти загальний врожай, потрібно врожайність з 1 га помножити на площу).
- Що потрібно знати, щоб знайти загальну кількість врожаю з другої ділянки? (Потрібно знати два числових значення – врожайність на ділянці – 18 т з 1 га та площу ділянки – 5 га) Якою дією відповімо на це питання? (Дією множення, бо щоб знайти загальний врожай, потрібно врожайність з 1 га помножити на площу) Чи можемо ми тепер відповісти на питання задачі? (Ні, бо невідома загальна площа ділянок).
- Що потрібно знати, щоб знайти загальну площу ділянок? (Потрібно знати два числових значення – площу першої – 20 га та площу другої – 5 га ділянок) Якою дією відповімо на це запитання? (Дією додавання).

Чи можемо ми тепер відповісти на питання задачі? (Так, бо відомі обидва числових даних)



- Складіть план розв’язування задачі.
- Запишіть розв’язання задачі за діями

1) $13 \cdot 20 = 260$ (т) – маса з 20 га;
2) $18 \cdot 5 = 90$ (т) – маса з 5 га;
3) $260 + 90 = 350$ (т) – загальна маса картоплі;
4) $20 + 5 = 25$ (га) – загальна площа;
$350 : 25 = 14$ (т) – середня врожайність
Відповідь. 14т з 1 га – середня врожайність.

При розв’язанні наступних задач на знаходження середньої врожайності, якщо учням важко записати відразу вираз, розв’язання записується по діях з поясненням.

Ускладнена задача на знаходження середньої ціни. Щоб ввести правило знаходження середньої ціни, учні пригадують як знаходили швидкість та середню швидкість; врожайність та середню врожайність; як знаходять ціну. Ставимо проблемне запитання: як знайти середню ціну? Робимо висновок по аналогії:

Щоб знайти середню ціну, необхідно загальну вартість поділити на загальну кількість

$$\text{Ціна} = \frac{\text{Вартість}}{\text{Кількість}} \qquad \text{Середня ціна} = \frac{\text{Загальна вартість}}{\text{Загальна кількість}}$$

Далі учням пропонується задача № 5.

Задача 5. 3 кг цукерок по 23 грн. змішали з 5 кг цукерок по 27 грн. Скільки коштуватиме 1 кілограм суміші?

Діти записують її коротко в формі таблиці, пояснюють числа задачі та застосовують зроблений висновок. Якщо учні здатні відразу записати розв’язання по діях з поясненням, то аналітичний або синтетичний пошук розв’язання задачі не проводиться. Аналогічно працюємо і над наступними задачами на знаходження середньої ціни.

Узагальнення способів знаходження середньої величини. Учні пригадують правила знаходження довжини одного відрізу та середньої довжини; маси одного предмету та середньої маси; швидкості і середньої швидкості, врожайності і середньої врожайності; ціни і середньої ціни.

$$\text{Довжина 1 ч.} = \frac{\text{Загальна довжина}}{\text{Кількість частин}} \qquad \text{Середня довжина} = \frac{\text{Загальна довжина всіх частин}}{\text{Загальну кількість частин}}$$

$$\text{Маса 1 предмету} = \frac{\text{Загальна маса}}{\text{Кількість}} \qquad \text{Середня маса} = \frac{\text{Загальна маса}}{\text{Загальна кількість}}$$

$$\text{Швидкість} = \frac{\text{Відстань}}{\text{Час}} \qquad \text{Середня швидкість} = \frac{\text{Загальна відстань}}{\text{Загальний час}}$$

$$\text{Врожайність} = \frac{\text{Маса}}{\text{Площа}} \qquad \text{Середня врожайність} = \frac{\text{Загальна маса}}{\text{Загальна площа}}$$

$$\text{Ціна} = \frac{\text{Вартість}}{\text{Кількість}} \qquad \text{Середня ціна} = \frac{\text{Загальна вартість}}{\text{Загальна кількість}}$$

$$\text{Середня величина 1 одиниці} = \frac{\text{Сума значень загальної величини}}{\text{Сума значень кількості / часу}}$$

Звертаємо увагу учнів на те, що довжина одного відрізу, маса одного тіла, швидкість, ціна, врожайність – це величина однієї одиниці. Ми знаходили середню величину однієї одиниці дією ділення суми значень загальної величини на суму значень кількості. Отже:

Щоб знайти середню величину однієї одиниці, треба суму значень загальної величини розділити на суму значень кількості або часу.

Порівнюючи різноманітні математичні структури задач на знаходження середнього арифметичного учні визначають їх істотні ознаки.

Істотні ознаки задач на знаходження середнього арифметичного:

1) ці задачі містять або кілька числових значень однієї тієї самої величини або містять значення трьох пропорційних величин і кілька випадків;

2) якщо задача містить групу пропорційних величин, то дані значення двох величин: $\frac{\textit{величини однієї одиниці виміру чи лічби}}{\textit{загальної величини}}$ та кількості або часу для кількох випадків;

3) в цих задачах шуканим є середнє значення або середнє значення величини однієї одиниці виміру або лічби.

Порівнюючи розв'язання, формулюють узагальнений план розв'язування задач на знаходження середнього арифметичного:

Спосіб розв'язування задач на знаходження середнього арифметичного

1) знаходимо суму значень загальної величини для усіх випадків;
2) знаходимо суму значень кількості або часу;
3) знаходимо середє значення.

Таким чином, нами розглянуто усі „типові" задачі, що пропонуються в курсі початкової математики.

Завдання для самоперевірки:

1. Визначити вид задачі. Скласти методику роботи над нею.

1) 1 ц 60 кг огірків розклали в 12 однакових ящиків. Скільки потрібно таких ящиків, щоб розкласти 3 ц огірків?

2) Один оператор набирає за день на комп'ютері 20 сторінок тексту, а другий – 24 сторінки. Скільки сторінок вони наберуть за 5 днів, якщо працюватимуть разом?

3) За фарбування віконних рам один маляр одержав 750 грн., а другий 450 грн. Другий робітник працював на 2 дні менше, ніж перший. Скільки днів працював кожний, якщо поденна оплата була однаковою?

4) З двох населених пунктів одночасно в протилежних напрямках виїхали колісний і гусеничний трактори. Швидкість колісного трактора 30 км/год., а гусеничного – 10 км/год. Через скільки годин відстань між ними буде 160 км?

5) За два дні швачка пошила 14 фартухів. Першого дня вона витратила 16 м тканини, а другого – 12 м. Скільки фартухів шила швачка кожного дня?

6) З 20 га зібрали по 13 т картоплі з гектара, а з 5 га – по 18 т з гектара. Знайди середню врожайність картоплі на цих двох ділянках.

7) У тракторну бригаду завезли 36 однакових бочок пального загальною місткістю 7308 л. Скільки літрів пального окремо в 5 і 13 таких бочках?
8) За 5 хвилин 7 швейних машин зробили 52500 стібків. Скільки стібків зроблять 18 таких машин за 1 хвилину?
9) Магазин продав до перерви 37 ящиків яблук, а після перерви 23 таких самих ящики яблук. Після перерви продали на 168 кг яблук менше, ніж до перерви. Скільки кілограмів яблук продали окремо до перерви і після перерви?
10) Перша зерноочисна машина за 6 хв. очищає 90 кг зерна, а друга за 4 хвилини – 80 кг зерна. За який час разом очистять ці машини 7 т зерна?
11) Хлопчик купив однакові зошити для малювання: 2 для себе і 3 для своїх друзів. За всі зошити він заплатив 4 грн. Скільки грошей мають повернути йому друзі?

ПІСЛЯСЛОВО

У новій редакції Державного стандарту початкової загальної освіти виокремлено змістову лінію «Сюжетні задачі», якою передбачено, що випускники початкової школи повинні мати уявлення про сюжетну задачу, виділяти її структурні компоненти; здійснювати семантичний аналіз тексту задачі й подавати його результати у вигляді схеми, рисунка, таблиці; складати план розв'язування складеної задачі, пояснювати вибір дій; записувати розв'язання задачі діями з поясненням, виразом або рівнянням; знаходити різні способи розв'язування задачі, визначати раціональний, перевіряти правильність розв'язання задачі; складати задачі за рисунком, схемою, математичним виразом, за практичними діями з предметами, задачі, аналогічні та обернені до розв'язаної; розв'язувати прості сюжетні задачі, що розкривають зміст арифметичних дій, задачі на знаходження невідомого компонента дій, задачі, які містять відношення різницевого й кратного порівняння, задачі на знаходження частини від числа або числа за його частиною, задачі з пропорційними величинами; розв'язувати складені задачі, що є композицією з двох – чотирьох видів простих задач, задачі на знаходження четвертого пропорційного, задачі на пропорційне ділення, на знаходження невідомого за двома різницями, на подвійне зведення до одиниці, на спільну роботу, на одночасний рух двох тіл.
Таким чином, вперше у Державному документі визначено види типових задач, які мають навчитися розв'язувати випускники початкової школи. Досягнення цього результату можливо за умов теоретично обґрунтованої методичної системи навчання учнів початкової школи розв'язування сюжетних задач.

Розроблена методична система принципово відрізняється від існуючих тим, що вона містить два обов'язкові компоненти – методику формування загального уміння та методику формування окремих умінь розв'язувати задачі певних видів, і реалізується протягом всього навчання у початковій школі.

Розглядаючи систему формування окремих умінь розв'язування задач певних видів, слід зазначити, що вона реалізується через три підсистеми – методику навчання розв'язування задач, що містять однакову (сталу) величину, методику навчання розв'язування задач на процеси (на спільну роботу та на рух); методику навчання розв'язування задач на знаходження середнього арифметичного. У свою чергу, кожний із зазначених компонентів включає елементи ще нижчого порядку.

Методика формування умінь розв'язування задач певних видів будується на поданому нами трактуванні поняття окремого уміння розв'язувати задачі та на класифікації задач із пропорційними величинами.

Теоретичну основу розробки методики формування умінь розв'язування задач певних видів становить теорія змістовних узагальнень В. В. Давидова.

При формуванні окремих умінь розв'язувати задачі учні залучаються у дослідження задачі через зміни величин задачі, або через зміни числових даних задачі, або через зміну шуканого (шуканих) задачі, або через зміну однакової (сталої) величини, якщо така є у задачі, або через зміну інших характеристик сюжету задачі. Таке всебічне дослідження задачі дозволяє учням узагальнити математичні структури задач певних видів і способи їх розв'язування. Також вивчаються умови застосування того або іншого способу розв'язування задачі тощо.

З метою зменшення об'єму навчального матеріалу, який підлягає запам'ятовуванню усі „типові" задачі об'єднані у три групи: 1) задачі, що містять однакову величину; 2) задачі на спільну роботу та на рух (на процеси); 3) задачі на знаходження середнього арифметичного. Здійснено узагальнення істотних ознак і способів розв'язування певних груп задач;

Розроблено загальну методику навчання молодших школярів розв'язування задач кожної групи. Основною ідеєю цієї методики є всебічний аналіз задачі з метою визначення істотних ознак задач певної математичної структури та узагальнення плану розв'язування. Розроблена методика передбачає поступове узагальнення математичних структур та планів розв'язування задач в межах кожної групи.

ЗМІСТ

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

Скворцова Світлана Олексіївна

Методика навчання розв'язування сюжетних задач у початковій школі:

Навчально-методичний посібник
Частина ІІ

В авторській редакції

Видавник ПП «Фенікс»
Свідоцтво ДК №1022 від 29.02.03
м. Одеса, вул. Зоопаркова, 25. Тел. 7777-591

Віддруковано з готового макету в ТОВ «Абрикос Компани»
м. Одеса, вул.. Зоопаркова, 25. Тел. 357-343

Підписано до друку 25.04.2011.
Формат 60х90/16. Ум. др. арк. 9,07.
Наклад 300 прим. Гарнітура TNR.