ISSN 2309-4001

БУКОВИНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ЖУРНАЛ

Том 4, № 3–4

Чернівці
Чернівецький національний університет
2016

Буковинський математичний журнал. – Т. 4, № 3–4. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2016. – 196 с.

Журнал входить до переліку наукових фахових видань України

Друкується за ухвалою Вченої ради
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Журнал публікує оригінальні статті англійською та українською мовами за спеціальностями: математичний аналіз, диференціальні рівняння, теорія ймовірностей і математична статистика, математичне моделювання та обчислювальні методи

Реферується Zentralblatt MATH

Редколегія:

Адреса редакції:

58012 м.Чернівці, вул. Університетська, 28, тел. (0372)58-48-70, e-mail: appl-dpt@chnu.edu.ua

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
Державної реєстраційної служби України: серія КВ № 19465–9265 ПР від 07.11.2012

(Видання є правонаступником Наукового вісника Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: математика. Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Міністерства юстиції України: серія КВ № 15749–4221Р від 26.10.2009)

Вітчизняне наукове видання
Рік заснування 2013

Bukovinian Mathematical Journal. – Vol. 4, No 3–4. – Chernivtsi: Chernivtsi Nat. Univ., 2016. – 196 p.

The journal is included in the List of Scientific Professional Publications of Ukraine

The journal publishes original papers in English and Ukrainian in mathematical analysis, differential equations, probability theory and mathematical statistics, mathematical modelling and methods of computations

Reviewed by Zentralblatt

Editorial office address:
58012, Chernivtsi, Universytetska str., 28, tel. (0372)58-48-70, e-mail: appl-dpt@chnu.edu.ua

Certificate of state registration of the print mass media of the State Registration Service of Ukraine: Series KB No 19465-9265 PR of 11/07/2012
(The journal is the assignee of Naukovyj Visnyk Chernivets'kogo Universytetu. Matematyka. Chernivets'kyj Universytet, Chernivtsi. Ukrainian. Certificate of state registration of the print mass media of the Ministry of Justice of Ukraine: Series KB No 15749-4221 P of 10/26/2009)

National Scientific Publication
Founded in 2013

ЗМІСТ

CONTENTS

ⓒ2016 р. Я.Й. Бігун, М.І. Матійчук, І.Д. Пукальський, І.М. Черевко

Міжнародна наукова конференція "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування"

Конференція, присвячена 80-річчю з дня народження професора Василя Івановича Фодчука, відбулась 28-30 вересня 2016 року на факультеті математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. У рамках конференції пройшов симпозіум, присвячений 70-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 80-річчю з дня народження професора М.П. Ленюка (1936–2013).

Для участі в конференції зареєструвалось 168 науковців із семи країн: Білорусі, Італії, Молдови, Польщі, США, Угорщини, Чехії. Подано й опубліковано у матеріалах конференції 111 тез доповідей. У конференції взяв участь також представник Казахстану.

Під час проведення конференції працювали 3 секції: звичайні диференціальні та диференціально-функціональні рівняння, диференціальні рівняння з частинними похідними, математичне моделювання в прикладних задачах.

За три дні роботи конференції виголошено 12 пленарних доповідей:

1. Agrachev Andrei (Italy). Optimal Control and a Generalized Hamiltonian System.

2. Бігун Ярослав (Україна). Життєвий і науковий шлях професора В.І. Фодчука.

3. Івасишен Степан (Україна). Професор С.Д. Ейдельман як засновник наукової школи та один з фундаторів кафедри диференціальних рівнянь у Чернівецькому університеті.

4. Конет Іван (Україна). Основні напрямки наукової діяльності професора М.П. Ленюка.

5. Матійчук Михайло (Україна). Про зв'язок між фундаментальними розв'язками параболічних рівнянь та рівнянь з дробовими похідними.

6. Петрик Михайло, Шинкарик Микола, Петрик Оксана, Мудрик Іван (Україна). Обернені коефіцієнтні задачі компетитивної дифузії в середовищах частинок напористої структури з використанням високопродуктивних градієнтних методів.

7. Пташник Богдан (Україна). Основоположник Української математичної культури в Галичині.

8. Пукальський Іван (Україна). Кафедрі диференціальних рівнянь - 70 років: історія і сьогодення.

9. Ronto Andras (Czech Republic), Ronto Miclos (Hungary), Varha Jana (Ukraine)/ Investigation of nonlinear boundary value problems by parametrization at multiple nodes.

10. Слюсарчук Василь (Україна). Теорія Фаваро-Амеріо для функціонально-диференціальних рівнянь без H-класів.

11. Станжицький Олександр (Україна). В'язкі розв'язки рівнянь на часових шкалах.

12. Черевко Ігор (Україна). Метод інтегральних многовидів в теорії сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь.

Ця конференція продовжила започатковані у Чернівецькому університеті три Всесоюзні міжвузівські конференції із теорії та застосувань диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється, у 1965, 1968 і 1972 роках та Всеукраїнської конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування" у 1996 році.

Професор Василь Іванович Фодчук заклав наукову школу з теорії диференціально-функціональних рівнянь у Чернівецькому університеті. Він народився 30 січня 1936 року у селі Тулова Снятинського району на Івано-Франківщині у селянській родині. У 1947–1951 роках навчався в Устянській семирічній школі, а у 1951–1953 роках – у Прутівській середній школі.

Професор Василь Іванович Фодчук
(30.01.1936 – 09.05.1992)

У 1953 році Василь Фодчук вступив на фізико-математичний факультет Чернівецького державного університету (ЧДУ), спеціалізувався на кафедрі диференціальних рівнянь. Після закінчення університету у 1958 році працював учителем у селі Веренчанка Заставнівського району Чернівецької області. У 1959-1962 роках навчався в аспірантурі Інституту математики АН УРСР під керівництвом професора Ю.О. Митропольського.

На засіданні Об'єднаної вченої ради Інститутів математики, кібернетики і Головної астрономічної обсерваторії АН УРСР 12 січня 1963 р. він захистив кандидатську дисертацію "Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений с запаздыванием", в якій розвинув асимптотичний метод Крилова-Боголюбова, обґрунтував метод усереднення Боголюбова й узагальнив метод інтегральних многовидів для деяких квазілінійних рівнянь із запізненням.

З 1962 до 1967 року В.І. Фодчук працював в Інституті математики на посаді наукового співробітника, а з 1967 по 1972 рік - старшим науковим співробітником.

У травні 1972 року В.І. Фодчук захистив докторську дисертацію "Асимптотические методы нелинейной механики в теории дифференциально-разностных уравнений" за спеціальністю 01-003 – диференціальні і інтегральні рівняння, науковий консультант – академік Ю.О. Митропольський, офіційні опоненти - професори С.М. Шіманов, Ю.О. Рябов і К.Г. Валєєв.

У 1972 році Василь Іванович запрошений працювати у ЧДУ і обраний на посаду завідувача кафедри прикладної математики і механіки. У травні 1976 року йому присвоєно вчене звання професора по цій кафедрі.

Під керівництвом професора В.І. Фодчука виконали кандидатські дисертації В. А. Домбровський (1972 р.), А. Холматов (1975 р.), М. С. Бортей (1980 р.), Я. Й. Бігун (1981 р.), І. М. Черевко (1983 р.), І. І. Клевчук (1986 р.), М. М. Попов (1987 р., співкерівник А.М. Плічко), І. В. Якімов (1989 р.).

Наукові результати В. І. Фодчука відображені в 133 публікаціях і в колективній монографії "Регулярно і сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння"(1996 р.). Його наукові здобутки стосувалися широкого кола питань теорії диференціально-функціональних рівнянь. Ним уперше дано обґрунтування методу усереднення для диференціальних рівнянь нейтрального типу, розвинено метод усереднення й асимптотичні методи Крилова-Боголюбова-Митропольського для сингулярно збурених диференціальних рівнянь запізнюючого та нейтрального типів, досліджено метод інтегральних многовидів для нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням, вивчено схеми побудови періодичних та обмежених розв'язків рівнянь із запізненням і диференціальних рівнянь з частинними похідними.

В.І. Фодчук вдало поєднував наукову та навчально-виховну роботу. За результатами наукових досліджень він підготував і вів навчальні курси ”Додаткові глави фізико-математичних дисциплін”, ”Асимптотичні методи в нелінійній механіці”, викладав курси з вищої математики на загальнотехнічному факультеті ЧДУ.

Професор В.І. Фодчук надавав значної уваги застосуванню математичних методів у прикладних дослідженнях. Він керував виконанням трьох госпдоговірних тем: оптимізація і програмна реалізація алгоритмів оцінювання в навігаційних системах, розвиток методів інтерполяції рівномірних сіток із застосуванням до задач навігації і математичної фізики, розробка спеціальних аналогових засобів шумопогашення в каналі зчитування. Розробив і був науковим керівником кафедральних науково-дослідними тем, зокрема Республіканською науково-дослідна роботою ”Асимптотичні і числово-аналітичні методи дослідження нелінійних диференціальних і диференціально-функціональних рівнянь”.

В.І. Фодчук відійшов у вічність 9 травня 1992 року. Похований на центральному кладовищі м. Чернівці.

Кафедра диференціальних рівнянь створена у ЧДУ 12 жовтня 1946 року згідно з наказом Міністерства освіти СРСР. Першим її завідувачем був Микола Іванович Сімонов, завідував кафедрою у 1946-1953 і 1956-1958 роках. Докторську дисертацію "Прикладные методы анализа у Эйлера"захистив у 1956 році.

У 1954-1956 і 1958-1960 роках обов’язки завідувача кафедри диференціальних рівнянь виконував кандидат фізико-математичних наук, доцент Василь Павлович Рубаник.

Самуїл Давидович Ейдельман, який закінчив ЧДУ у 1948 році, завідував кафедрою у 1960-1963 роках. У 1959 році він захистив докторську дисертацію ”Исследование по теории параболических систем”.

Його науковими інтересами було дослідження коректної розв’язності та властивостей розв’язків задачі Коші і крайових задач для параболічних за І.Г. Петровським систем диференціальних рівнянь. Результати досліджень С.Д. Ейдельмана у ЧДУ викладені в монографії "Параболические системы"(1964 р.) та в інших працях. Він підготував 4 доктори і 17 кандидатів фізико-математичних наук, які є випускниками ЧДУ.

У 1963 - 1969 роках кафедрою завідував Степан Дмитрович Івасишен, учень С.Д. Ейдельмана, випускник кафедри диференціальних рівнянь ЧДУ 1959 р. У 1981 р. він захистив докторську дисертацію ”Матрицы Грина параболических граничных задач”.

З 1988 по 2003 роки професор С.Д. Івасишен завідував кафедрою математичного моделювання ЧДУ. У 1992 році його обрано академіком Академії наук вищої школи України, одним із засновником якої він був.

С.Д. Івасишен автор понад 200 публікацій, серед яких 3 монографії, 8 статей монографічного характеру та 10 навчальних посібників. Під його керівництвом захищено одну докторську і тринадцять кандидатських дисертацій.

Завідувачем кафедрою у 1969 - 2006 роках був її випускник 1960 року Михайло Іванович Матійчук. Під керівництвом С.Д. Ейдельмана у 1961 - 1963 роках він навчався в аспірантурі. Вчене звання доцента йому присуджено в 1966, а професора – у 1982 році. У 1980 році М.І. Матійчук захистив докторську дисертацію ”Исследование классических решений линейных параболических и некоторых эллиптических граничных задач”.

Тематикою його наукових досліджень є: задача Коші й крайові задачі для рівнянь і систем параболічного і еліптичного типу в нормованих просторах Діні, задачі з подвійними виродженнями і квазілінійні крайові задачі, задачі з рухомими межами без початкових даних та задачі з імпульсною дією, нелокальними і інтегральними умовами, для інтегро-диференціальних рівнянь та рівнянь з фрактальними похідними.

Автор понад 200 наукових і навчально-методичних праць, серед яких 3 монографії: ”Параболічні сингулярні крайові задачі” (1999), ”Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями” (2003), ”Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні” (2010).

Під керівництвом професора М.І. Матійчука здобули наукові ступені І.Д. Пукальський, І.І. Веренич, В.М. Лучко, М.І. Конаровська, А.О. Данилюк.

З січня 2007 року кафедру диференціальних рівнянь очолює Іван Дмитрович Пукальський, випускник кафедри диференціальних рівнянь. Після закінчення ЧДУ з 1973 р. працював на посаді асистента кафедри, з 1989 р. – доцент, а з 2008 р. – професор кафедри диференціальних рівнянь.

У 2006 р. І.Д. Пукальський захистив докторську дисертацію "Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями та особливостями". Наукові праці присвячені побудові класів коректної розв’язності основних крайових задач для параболічних та еліптичних рівнянь з довільними степеневими особливостями та виродженнями у коефіцієнтах рівнянь і крайових умов.

Автор понад 160 наукових і науково-методичних праць, з них 1 монографія (Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями, 2008 р.).

Заслужений працівник народної освіти України, кандидат фізико-математичних наук Володимир Васильович Крехівський працював на кафедрі диференціальних рівнянь з 1957 р. на посаді асистента, а з 1969 до 2005 року – доцент кафедри. З вересня 1968 р. по січень 1995 р. був деканом математичного факультету ЧДУ.

З 1975 року, після закінчення ЧДУ, на кафедрі диференціальних рівнянь працює Роман Іванович Петришин, доцент з 1986 року, професор – з 1995 року. В 1995 році захистив докторську дисертацію на тему ”Дослідження коливних систем з повільно змінними частотами за допомогою методу усереднення”, науковий консультант – академік НАН України А.М. Самойленко. У коло його наукових інтересів входить розробка й обґрунтування асимптотичних методів Крилова-Боголюбова на випадок багаточастотних систем диференціальних рівнянь, яким властиве явище резонансу.

У 1996-2001 роках він завідував кафедрою прикладної математики і механіки, у 1999-2005 роках - декан математичного факультету, а з квітня 2005 року – перший проректор Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Р.І. Петришину присуджено почесне звання заслужений працівник освіти України (2007 р.), він є лауреатом Державної премії України в галузі науки і техніки (2008 р.).

У співавторстві із А.М. Самойленком він опублікував три монографії: ”Multifrecuency Oscillations of Nonlinear Systems” (2004 р.), ”Математичні аспекти теорії нелінійних коливань” (2004 р.), ”Багаточастотні коливання нелінійних систем” (1998 р.). Підготував 3-ох кандидатів наук.

Також серед 24 випускників кафедри, які захистили докторські дисертації, добре відомі в Україні та за її межами праці Т.І. Зеленяка (1956 рік випуску), В.І. Фодчука (1958 р.), Є.Ф. Царкова (1959 р.), В.К. Романка (1960 р.), Н.В. Житарашу (1962 р), А.Ю. Лучки (1967 р.), М.С. Гончара (1969 р.). Випускниками кафедри захищено понад 70 кандидатських дисертацій.

Основні напрямки наукових досліджень на кафедрі диференціальних рівнянь:

– нерегулярні крайові задачі та задачі оптимізації для параболічних рівнянь та рівнянь математичної фізики;

– сингулярні параболічні крайові задачі, мішані задачі з некласичними умовами для рівнянь з частинними похідними та задачі для псевдодиференціальних рівнянь;

– дослідження розв’язків стохастичних параболічних крайових задач;

– гібридні інтегральні перетворення та їх застосування для розв’язування задач математичної фізики.

Сьогодні на кафедрі диференціальних рівнянь працюють 4 доктори і 8 кандидатів фізико-математичних наук. За час своєї діяльності кафедрою диференціальних рівнянь підготовлено понад 1200 фахівців (спеціалістів і магістрів), опубліковано понад 40 монографій і тематичних видань оглядового характеру та 28 - навчальних посібників.

З 1992 року на кафедрі видавався тематичний збірник наукових праць "Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач", а з 1996 року - "Крайові задачі для диференціальних рівнянь, головним редактором і засновником яких був доктор фізико-математичних наук, професор Ленюк Михайло Павлович (30.10.1936 - 23.03.2013).

Професор Ленюк Михайло Павлович

(30.10.1936 – 23.03.2013)

Відомий математик і педагог, доктор фізико-математичних наук, академік АН ВШ України, професор Ленюк Михайло Павлович працював на кафедрі диференціальних рівнянь з 1963 по 2013 рік, професором з 1995 року. В 1993 році захистив докторську дисертацію "Інтегральні перетворення для задач математичної фізики неоднорідних структур".

Одноосібно і у співавторстві з учнями опублікував 34 монографії та 14 навчально-методичних посібників. Під його керівництвом аспірантами та здобувачами підготовлено і захищено 17 кандидатських дисертацій.

Його наукові інтереси були зосереджені на дослідженні актуальних проблем диференціальних рівнянь, розвитку теорії гібридних інтегральних перетворень та їх застосування до розв'язання крайових задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

З 2002 року і до 22 березня 2013 року професор Ленюк М.П. очолював кафедру інформаційних систем Чернівецького факультету Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут", працюючи за сумісництвом професором кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

©2016 р. Я.Й. Бігун, В.Ю. Слюсарчук, П.Ф. Ярема

ДО 100-РІЧЧЯ З ДНЯ НАРОДЖЕННЯ ПРОФЕСОРА В.П. РУБАНИКА

01.01.1917–09.04.1993

Василь Павлович Рубаник народився 1 січня 1917 року в селі Клишки Шосткинського району Сумської області.

Після закінчення в 1930 році семи класів Василь Павлович допомагав батькам по господарству, у 1934–1935 роках працював діловодом у сільській раді, а у 1935–1938 роках – на будівництві, навчаючись одночасно на робітфаці в місті Шостка.

У 1938 році В.П. Рубаник вступив до Київського державного університету, але закінчити університет завадила війна. З третього курсу – у 1941 по 1945 роках, В.П. Рубаник брав участь у Другій світовій війні, офіцер-танкіст, нагороджений багатьма орденами і медалями.

Звільнившись з армії в запас у 1946 році, В.П. Рубаник до 1950 року працював учителем фізики і математики в школах міста Шостки. У 1948 році заочно закінчив Київський педагогічний інститут.

У 1950 році вступив до аспірантури Київського державного університету (його науковим керівником був професор Ю.О. Митропольський), яку закінчив у 1953 році з захистом кандидатської дисертації "Резонансные явления в некоторых нелинейных системах".

З вересня 1953 року наукова і педагогічна діяльність В.П. Рубаника пов'язана з Чернівецьким державним університетом. У 1953–1954 роках він працював на кафедрі диференціальних рівнянь на посаді старшого викладача, наступні два роки виконував обов'язки завідувача цієї кафедри. З березня 1956 року – доцент кафедри диференціальних рівнянь, а з грудня 1958 року і до кінця 1960-1961 навчального року знову виконував обов'язки завідувача кафедри. Був деканом фізико-математичного факультету в 1960–1961 роках. З вересня 1961 по травень 1962 року виконував обов'язки завідувача кафедри математичного аналізу. У 1968–1972 роках – проректор із наукової роботи Чернівецького державного університету.

У 1964 році В.П. Рубаник захистив докторську дисертацію "Колебания квазилинейных систем из запаздывающими связями", науковий керівник – дійсний член Академії наук УРСР Ю.О. Митропольский.

В.П. Рубаник надавав значної уваги науковій тематиці прикладного характеру. За його ініціативою в 1962 році була створена кафедра прикладної математики і механіки, якою він завідував у 1962–1972 роках. У 1972 році він заснував кафедру математичних проблем управління і кібернетики, завідувачем якої був до 1976 року.

В.П. Рубаник започаткував наукову тематику, яка на той час була досить популярною в Україні і за рубежем, мала прикладне значення і не залишається поза увагою і в наш час. Він і його учні досліджували квазілінійні коливні системи із запізненням під дією детермінованих і випадкових збурень. Для таких систем розвивався метод усереднення й асимптотичний метод Крилова-Боголюбова, вивчалася взаємодія й синхронізація в нелінійних коливних системах і з запізненням. Спільно з Є.Ф. Царковим він започаткував дослідження стохастичних диференціальних рівнянь із запізненням.

Ще одним напрямом наукових пошуків В.П. Рубаника було дослідження коливних процесів як у детермінованому випадку, так і для стохастичних квазілінійних систем рівнянь із запізненням, що містять взаємозв'язані рівняння зі звичайними і частинними похідними.

В.П. Рубаник доклав значних зусиль для організації і проведення в 1965, 1968 і 1972 роках трьох Всесоюзних міжвузівських конференцій із теорії та застосувань диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється.

У його науковому доробку дві монографії: "Колебания квазилинейных систем с запаздыванием" (1969 р.) і "Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием" (1985 р.), посібник "Основные принципы разработки и функционирования АСУ" (1977 р.) та 110 наукових статей.

В.П. Рубаник упроваджував нові спецкурси для спеціалістів з обчислювальної математики, зокрема з автоматизованих систем керування. Глибоко розуміючи роль ЕОМ у науково-технічному прогресі, він дбав про поповнення технічної бази, розвиток обчислювального центру університету, який став і центром підготовки науково-педагогічних кадрів, науковим центром і місцем практики студентів.

В.П. Рубаник зробив вагомий внесок у підготовку спеціалістів вищої кваліфікації. Під його керівництвом, а також разом із професором Є.Ф. Царковим, захищено 13 кандидатських дисертацій. Більшість його учнів працювали в Чернівецькому державному університеті.

У 1976 році В.П. Рубаник переїхав у місто Гомель. Працюючи в Гомельському державному університеті імені Ф. Скорини, Василь Павлович зробив вагомий внесок у розвиток математичного факультету університету. У різний час він очолював кафедри математичних проблем управління, обчислювальної математики і програмування, працював професором. У грудні 1989 року за станом здоров'я Василь Павлович вийшов на пенсію.

Відійшов у вічність 9 квітня 1993 року, похований у місті Гомель.

УДК 517.95

©2016 р.   Катерина Балик, Микола Іванчов

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ З ВИРОДЖЕННЯМ

Встановлено умови існування та єдиності гладкого розв'язку оберненої задачі для рівняння теплопровідності з невідомим залежним від часу старшим коефіцієнтом. Припускається, що межа області є невідомою і разом з рівнянням вироджується в початковий момент часу.

We establish conditions for existence and uniqueness of a smooth solution to an inverse problem for the heat equation with an unknown time-dependent leading coefficient. The boundary of the domain is supposed unknown and degenerate at the initial moment.

Вступ. Задача, яка досліджується у даній роботі, поєднує три типи задач, а саме, коефіцієнтну обернену задачу, задачу для рівнянь з виродженням та задачу з вільною межею. Обернені задачі для параболічних рівнянь в областях з вільними межами досліджувались в [1]-[5]. Задачі ідентифікації невідомих коефіцієнтів параболічних рівнянь з виродженням були розглянуті в працях [6]-[8]. Аналогічні задачі, але вже в областях з невідомими межами, вивчались у [9]. Крайову та обернену задачу для параболічного рівняння в області з невідомою межею, яка вироджується в початковий моментт часу, досліджено [10] та [11]. Ця робота присвячена випадку з подвійним виродженням у початковий момент часу як рівняння, так і невідомої межі. Отримано умови існування та єдиності розв'язку для одновимірного рівняння теплопровідності.

1. Формулювання задачі та основні припущення. В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < t^\gamma \tilde{h}(t), 0 < t < T\}$ з невідомою частиною межі $x = t^\gamma \tilde{h}(t)$ розглянемо задачу визначення невідомих $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x,t)), \tilde{h}(t) > 0, \tilde{a}(t) > 0, t \in [0,T]$ з умов

$$u_t = \tilde{a}(t) t^\beta u_{xx} + \tilde{f}(x,t), \quad 0 < x < t^\gamma \tilde{h}(t), \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(t^\gamma \tilde{h}(t), t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$\tilde{a}(t) u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\int_0^{t^\gamma \tilde{h}(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

де $\beta > 0, \gamma > 0$ - задані числа, а $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x,t))$ - невідомі.

Заміною незалежних змінних $y = \dfrac{x}{\tilde{h}(t)}$, $\sigma = t^\gamma$ задачу (1)-(4) зведемо до еквівалентної задачі в області $Q_{T_1} := \{(y,\sigma) : 0 < y < \sigma, 0 < \sigma < T_1\}$ з відомою межею:

$$v_\sigma = a(\sigma) \frac{\sigma^{\beta_1}}{\gamma h^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{y h'(\sigma)}{h(\sigma)} v_y + \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(yh(\sigma), \sigma), \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1}, \tag{5}$$

$$v(0,\sigma) = \nu_1(\sigma), \quad v(\sigma,\sigma) = \nu_2(\sigma), \quad \sigma \in [0, T_1], \tag{6}$$

$$a(\sigma) v_y(0,\sigma) = h(\sigma)\nu_3(\sigma), \quad \sigma \in [0, T_1], \tag{7}$$

$$h(\sigma) \int_0^\sigma v(y,\sigma)dy = \nu_4(\sigma), \quad \sigma \in [0, T_1]. \tag{8}$$

Тут використані такі позначення:

$$T_1 = T^\gamma, \quad \beta_1 = \frac{\beta + 1 - \gamma}{\gamma}, \quad a(\sigma) = \tilde{a}(\sigma^{\frac{1}{\gamma}}),$$
$$h(\sigma) = \tilde{h}(\sigma^{\frac{1}{\gamma}}), \quad v(y,\sigma) = u(yh(\sigma), \sigma^{\frac{1}{\gamma}}),$$
$$f(yh(\sigma),\sigma) = \tilde{f}(y\tilde{h}(\sigma^{\frac{1}{\gamma}}), \sigma^{\frac{1}{\gamma}}),$$
$$\nu_i(\sigma) = \mu_i(\sigma^{\frac{1}{\gamma}}), i = \overline{1,4}.$$

Надалі будемо вважати виродження рівняння (5) слабким ($0 < \beta_1 < 1$). Це припущення буде виконуватись для будь-яких β, γ, таких, що $\gamma > 1, \gamma - 1 < \beta < 2\gamma - 1$. Припустимо також, що виконуються такі припущення:

(A1) $\mu_i \in C^1[0,T], i = 1,2,4, \mu_3 \in C[0,T]$, $\mu_i'(t) = \lambda_i(t)t^{\gamma-1}, \quad \lambda_i \in C[0,T], i = 1,2$; $\tilde{f} \in C([0,\infty) \times [0,T])$ задовольняє локально умову Гельдера за змінною x з показником $\alpha \in (0,1)$;

(A2) $\mu_i(t) > 0, i = 1,2,3, \quad \mu_4(t) = \mu_0(t)t^\gamma$, $\mu_0(t) > 0, t \in [0,T], \tilde{f}(x,t) \geqslant 0, (x,t) \in [0,\infty) \times$ $\times [0,T], \lambda_2(t) > \lambda_1(t), t \in [0,T]$;

(A3) $\mu_1(0) = \mu_2(0)$.

2. Зведення задачі (1)-(4) до системи інтегральних рівнянь. Встановимо існування розв'язку задачі (5)-(8), оскільки вона еквівалентна задачі (1)-(4).

Заміною

$$v(y,\sigma) = \tilde{v}(y,\sigma) + \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma))$$

перейдемо від (5)-(6) до задачі з нульовими крайовими умовами:

$$\tilde{v}_\sigma(y,\sigma) = \frac{\sigma^{\beta_1} a(\sigma)}{\gamma h^2(\sigma)} \tilde{v}_{yy} + \frac{y h'(\sigma)}{h(\sigma)} \tilde{v}_y + \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} \times$$
$$\times f(yh(\sigma),\sigma) - \nu_1'(\sigma) - \frac{y}{\sigma}(\nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma)) +$$
$$+ \frac{y}{\sigma^2}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \frac{y h'(\sigma)}{h(\sigma)\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)),$$
$$(y,\sigma) \in Q_{T_1}, \tag{9}$$
$$\tilde{v}(0,\sigma) = \tilde{v}(\sigma,\sigma) = 0, \quad \sigma \in [0,T_1]. \tag{10}$$

Використовуючи функцію Гріна $G(y,\sigma,\eta,\tau)$ задачі

$$v_\sigma(y,\sigma) = \frac{\sigma^{\beta_1} a(\sigma)}{\gamma h^2(\sigma)} v_{yy}, \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1},$$
$$v(0,\sigma) = v(\sigma,\sigma) = 0, \quad \sigma \in [0,T_1],$$

зведемо задачу (9), (10) до інтегро-диференціального рівняння

$$\tilde{v}(y,\sigma) = \int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau G(y,\sigma,\eta,\tau) \left(\frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)} \times \right.$$
$$\times \tilde{v}_\eta(\eta,\tau) + \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(\eta h(\tau),\tau) - \nu_1'(\tau) -$$
$$- \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau - \nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) +$$
$$\left. + \frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)\tau}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) \right) d\eta, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}.$$

Повертаючись до функції $v(y,\sigma)$, звідси отримуємо

$$v(y,\sigma) = \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) +$$
$$+ \int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau G(y,\sigma,\eta,\tau) \left(\frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)} v_\eta(\eta,\tau) + \right.$$
$$+ \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(\eta h(\tau),\tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) -$$
$$\left. - \nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))) \right) d\eta,$$
$$(y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \tag{11}$$

Оцінимо знизу розв'язок задачі (9), (10), подаючи його у вигляді

$$v(y,\sigma) = v_0(y,\sigma) + \hat{v}(y,\sigma),$$

де $v_0(y,\sigma)$ є розв'язком задачі

$$v_\sigma = a(\sigma) \frac{\sigma^{\beta_1}}{\gamma h^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{y h'(\sigma)}{h(\sigma)} v_y,$$
$$(y,\sigma) \in Q_{T_1},$$
$$v(0,\sigma) = \nu_1(\sigma), v(\sigma,\sigma) = \nu_2(\sigma),$$
$$\sigma \in [0,T_1], \tag{12}$$

а $\hat{v}(y,\sigma)$ задовольняє умови

$$v_\sigma = a(\sigma) \frac{\sigma^{\beta_1}}{\gamma h^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{y h'(\sigma)}{h(\sigma)} v_y +$$
$$+ \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(yh(\sigma),\sigma), \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1},$$
$$v(0,\sigma) = v(\sigma,\sigma) = 0, \quad \sigma \in [0,T_1]. \tag{13}$$

З припущень **(A2)** та принципу максимуму знаходимо

$$v_0(y,\sigma) \geq \min\{\min_{[0,T]} \mu_1(t), \min_{[0,T]} \mu_2(t)\} :=$$
$$= M_1 > 0,$$
$$\hat{v}(y,\sigma) \geq 0, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1},$$

або

$$v(y,\sigma) \geq M_1 > 0, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \tag{14}$$

Введемо позначення $w(y,\sigma) := v_y(y,\sigma)$, $p(\sigma) := \sigma h'(\sigma)$ і зведемо рівняння (11) до системи інтегральних рівнянь

$$v(y,\sigma) = \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) +$$
$$+ \int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau G(y,\sigma,\eta,\tau) \left(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)} w(\eta,\tau) + \right.$$
$$+ \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(\eta h(\tau),\tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) -$$
$$\left. -\nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) \right) d\eta,$$
$$(y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}, \tag{15}$$
$$w(y,\sigma) = \frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} +$$
$$+ \int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau G_y(y,\sigma,\eta,\tau) \left(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)} w(\eta,\tau) + \right.$$
$$+ \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(\eta h(\tau),\tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) -$$
$$\left. -\nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) \right) d\eta,$$
$$(y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}, \tag{16}$$

Умови (7) та (8) подамо у вигляді

$$h(\sigma) = \frac{\nu_4(\sigma)}{\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}, \quad \sigma \in (0,T_1], \tag{17}$$

$$a(\sigma)w(0,\sigma) = h(\sigma)\nu_3(\sigma), \quad \sigma \in [0,T_1]. \tag{18}$$

Диференціюємо умову (8) :

$$h'(\sigma) \int_0^\sigma v(y,\sigma)dy + h(\sigma)v(\sigma,\sigma) +$$
$$+ h(\sigma) \int_0^\sigma v_\sigma(y,\sigma)dy = \nu_4'(\sigma).$$

Скориставшись рівнянням (5) , отримаємо

$$h'(\sigma) \int_0^\sigma v(y,\sigma)dy + h(\sigma)\nu_2(\sigma) +$$
$$+ h(\sigma) \int_0^\sigma \left(a(\sigma) \frac{\sigma^{\beta_1}}{\gamma h^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{y h'(\sigma)}{h(\sigma)} v_y + \right.$$
$$\left. + \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(yh(\sigma),\sigma) \right) dy = \nu_4'(\sigma).$$

Обчислюючи інтеграли, приходимо до рівняння

$$p(\sigma) = \frac{1}{\nu_2(\sigma)} \left(\nu_4'(\sigma) - h(\sigma)\nu_2(\sigma) - \right.$$
$$- \frac{a(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h(\sigma)}(w(\sigma,\sigma) - w(0,\sigma)) - h(\sigma)\frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} \times$$
$$\left. \times \int_0^\sigma f(yh(\sigma),\sigma)dy \right), \quad \sigma \in (0,T_1]. \tag{19}$$

Отже, задачу (5)-(8) зведено до системи рівнянь (15)-(19) стосовно невідомих $h(\sigma), p(\sigma), a(\sigma), v(y,\sigma), w(y,\sigma)$.

3. Існування розв'язку задачі (1)-(4).

Теорема 1. Припустимо, що виконуються умови **(A1)-(A3)**. Тоді можна вказати таке число $T_0 \in (0,T]$, яке визначається відомими величинами, що задача (1)-(4) матиме розв'язок $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x,t))$ з класу $C[0,T_0] \cap C^1(0,T_0] \times C[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$ такий, що $\tilde{h}(t) > 0, \tilde{a}(t) > 0, t \in [0,T_0]$.

Доведення. З міркувань, наведених в [5], випливає, що для доведення теореми достатньо встановити існування неперервного розв'язку системи рівнянь (15)-(18). Для цього скористаємося теоремою Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора.

Спочатку знайдемо апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (15)-(19). Беручи до уваги **(A2)** та (14), з (17) маємо

$$h(\sigma) \le H_1 < \infty, \quad \sigma \in [0,T_1]. \tag{20}$$

Оскільки рівняння (15), (16) еквівалентні рівнянню (11), а рівняння (11) еквівалентне задачі (5), (6), то, застосовуючи до останньої принцип максимуму, отримаємо

$$v(y,\sigma) \le M_2 < \infty, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \tag{21}$$

Тоді з (17) та (21) випливає оцінка

$$h(\sigma) \ge \frac{\sigma \nu_0(\sigma)}{\sigma M_2} \ge H_0 > 0, \quad \sigma \in [0,T_1]. \tag{22}$$

Знайдемо оцінку $w(y,\sigma)$ знизу. Виходячи з означення функцій $\nu_i(\sigma)$ та припущень

(A2), знаходимо

$$\nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma) = \frac{1}{\gamma}(\lambda_2(t) - \lambda_1(t)) > 0,$$
$$\sigma \in (0, T_1],$$
$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} = \nu_2'(0) - \nu_1'(0) > 0.$$

Звідси маємо

$$\frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} \geq M_3 > 0, \quad \sigma \in [0, T_1]. \quad (23)$$

Припускаючи, що функції $a(\sigma), w(y,\sigma)$, $p(\sigma)$ є неперервними на проміжку $[0, T_1]$, дослідимо поведінку інтеграла у рівнянні (16). Використовуючи оцінки функції Гріна [11], будемо мати:

$$\Bigg|\int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G_y(y,\sigma,\eta,\tau)\left(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)} w(\eta,\tau) + \right.$$
$$+\frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(\eta h(\tau),\tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) -$$
$$\left. -\nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))\right) d\eta \Bigg| \leq$$
$$\leq C_1 \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau |G_y(y,\sigma,\eta,\tau)|\, d\eta \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma) - \theta(\tau)}},$$

де $\theta(\sigma) = \int\limits_0^\sigma a(s) s^{\beta_1} ds$. Тоді

$$\int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma) - \theta(\tau)}} \leq C_3 \sigma^{\frac{1-\beta_1}{2}}.$$

Це означає, що існує число $T_0 \in (0, T_1]$ таке, що

$$\Bigg|\int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G_y(y,\sigma,\eta,\tau)\left(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)} w(\eta,\tau) + \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} \times \right.$$
$$\times f(\eta h(\tau),\tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau - \nu_1'(\tau)) +$$
$$\left. + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))\right) d\eta \Bigg| \leq \frac{M_3}{2}, (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_0}. \quad (24)$$

Звідси випливають оцінки

$$w(y,\sigma) \geq \frac{M_3}{2},$$
$$w(y,\sigma) \leq \frac{M_3}{2} + \max_{[0,T_1]} \frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} := M_4,$$
$$(y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_0}. \quad (25)$$

Використовуючи (25) у (18), (19), отримуємо

$$0 < A_0 \leq a(\sigma) \leq A_1,$$
$$|p(\sigma)| \leq M_5, \sigma \in [0, T_0]. \quad (26)$$

Отже, оцінки розв'язків системи рівнянь (15)-(19) отримані. Подамо систему рівнянь (15)-(19) у вигляді

$$\omega = P\omega, \quad (27)$$

де $\omega = (v, w, h, a, p)$, а оператор P визначається правою частиною рівнянь (15)-(19). Визначимо множину $\mathcal{N} := \{(v, w, h, a, p) \in \left(C(\bar{Q}_{T_0})\right)^2 \times (C[0, T_0])^3 : M_1 \leq v(y,\sigma) \leq M_2,$ $M_3/2 \leq w(y,\sigma) \leq M_4, H_0 \leq h(\sigma) \leq H_1, A_0 \leq a(\sigma) \leq A_1, |p(\sigma)| \leq M_5\}$ З оцінок (14), (20)-(22), (25), (26) випливає, що оператор P переводить множину $\mathcal{N}$ в себе. Компактність оператора P була встановлена в [12]. Використовуючи теорему Шаудера, отримуємо існування розв'язку задачі (1)-(4).

4. Єдиність розв'язку задачі.

Теорема 2. Нехай виконується умова:

(A4) $\tilde{f} \in C^{1,0}([0,\infty) \times [0,T]), \mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2, \mu_i(t) \neq 0, i = 2,3, \mu_4(t) = \mu_0(t) t^\gamma$, $\mu_0(t) \neq 0, t \in [0,T]$.

Тоді задача (1)-(4) не може мати більше одного розв'язку $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x,t))$ з класу $C^1(0,T] \cap C[0,T] \times C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. Оскільки задачі (1)-(4) та (5)-(8) є еквівалентними, то досить довести єдиність розв'язку задачі (5)-(8). Припустимо, що існують два різні розв'язки $(h_i(\sigma), a_i(\sigma), v_i(y,\sigma)), i = 1,2$, задачі (5)-(8). Позначимо $h(\sigma) := h_1(\sigma) - h_2(\sigma)$, $a(\sigma) := a_1(\sigma) - a_2(\sigma), v(y,\sigma) := v_1(y,\sigma) - v_2(y,\sigma)$. Для $(h(t), a(t), u(x,t))$ отримуємо з (5)-(8) таку задачу:

$$v_\sigma = \frac{a_1(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h_1^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{y h_1'(\sigma)}{h_1(\sigma)} v_y +$$

$$+\frac{\sigma^{\beta_1}(a(\sigma)h_2^2(\sigma)-a_2(\sigma)h(\sigma)(h_1(\sigma)+h_2(\sigma)))}{\gamma h_1^2(\sigma)h_2^2(\sigma)}\times$$
$$\times v_{2yy}+\frac{h'(\sigma)h_2(\sigma)-h_2'(\sigma)h(\sigma)}{h_1(\sigma)h_2(\sigma)}yv_{2y}+$$
$$+\frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}yh(\sigma)f_1(y,\sigma),(y,\sigma)\in Q_{T_1}, \quad (28)$$
$$v(0,\sigma)=v(\sigma,\sigma)=0, \quad \sigma\in[0,T_1], \quad (29)$$
$$a_1(\sigma)v_y(0,\sigma)=\nu_3(\sigma)h(\sigma)-a(\sigma)v_{2y}(0,\sigma),$$
$$\sigma\in[0,T_1], \quad (30)$$
$$h_1(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy=-h(\sigma)\int\limits_0^\sigma v_2(y,\sigma)dy,$$
$$\sigma\in[0,T_1], \quad (31)$$

де

$$f_1(y,\sigma):=\int\limits_0^1 \left.\frac{\partial f(z,\sigma)}{\partial z}\right|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)}ds.$$

Використовуючи функцію Гріна $G^*(y,\sigma,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_\sigma=\frac{a_1(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h_1^2(\sigma)}v_{yy}+\frac{yh_1'(\sigma)}{h_1(\sigma)}v_y, \quad (y,\sigma)\in Q_{T_1},$$

зведемо задачу (28)-(31) до системи рівнянь

$$v(y,\sigma)=\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau G^*(y,\sigma,\eta,\tau)\big(v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)\times$$
$$\times(\tau^{\beta_1}(a(\tau)h_2^2(\tau)-a_2(\tau)h(\tau)(h_1(\tau)+$$
$$+h_2(\tau)))(\gamma h_1^2(\tau)h_2^2(\tau))^{-1}+$$
$$+\frac{\eta(p(\tau)h_2(\tau)-\tau h_2'(\tau)h(\tau))}{\tau h_1(\tau)h_2(\tau)}v_{2\eta}(\eta,\tau)+$$
$$+\frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}\eta h(\tau)f_1(\eta,\tau)\Big)d\eta,(y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}, \quad (32)$$
$$h(\sigma)=-\frac{h_1(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}{\int\limits_0^\sigma v_2(y,\sigma)dy},\sigma\in[0,T_1], \quad (33)$$
$$a(\sigma)=\frac{\nu_3(\sigma)h(\sigma)-a_1(\sigma)v_y(0,\sigma)}{v_{2y}(0,\sigma)},$$
$$\sigma\in[0,T_1], \quad (34)$$

$$p(\sigma)=\frac{1}{\nu_2(\sigma)}\Bigg(-h(\sigma)\nu_2(\sigma)-\frac{a_1(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h_1(\sigma)}\times$$
$$\times(v_y(\sigma,\sigma)-v_y(0,\sigma))+$$
$$+\frac{\sigma^{\beta_1}(a_2(\sigma)h(\sigma)-a(\sigma)h_2(\sigma))}{\gamma h_1(\sigma)h_2(\sigma)}(v_{2y}(\sigma,\sigma)-$$
$$-v_{2y}(0,\sigma))-\frac{h(\sigma)h_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)}\sigma\nu_2(\sigma)-$$
$$-\frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}h(\sigma)\big(h_1(\sigma)f_1(y,\sigma)\big)dy+$$
$$+\int\limits_0^\sigma f(yh(\sigma),\sigma)dy)\Bigg),\sigma\in[0,T_1], \quad (35)$$

де $p(\sigma):=\sigma h'(\sigma)$. Підставивши вирази для $v(y,\sigma)$ і $h(\sigma)$ з (32) і (33) у формули (34) і (35), легко переконатись, що (32)-(35) є системою однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду. Окрім того, оскільки $v_2(y,\sigma)$ задовольняє умову (7), то з припущень теореми маємо $v_{2_y}(0,\sigma)\neq 0,\sigma\in[0,T_1]$. Так само з припущень теореми випливає, що знаменник у (35) відмінний від нуля при $\sigma\in[0,T_1]$. Використовуючи умови теореми і те, що $v_2(y,\sigma)$ задовольняє умову (8), надамо правій частині рівняння (33) такого вигляду:

$$\frac{h_1(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}{\int\limits_0^\sigma v_2(y,\sigma)dy}=\frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}{\nu_4(\sigma)}=$$
$$=\frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}{\sigma\nu_0(\sigma)}.$$

З того, що функція $\frac{1}{\sigma}\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy$ є неперервною на проміжку $[0,T_1]$, випливає, що права частина рівняння (33) неперервна на $[0,T_1]$. Отже, ядра інтегральних рівнянь (32)-(35) інтегровні.

Дослідимо поведінку густин інтегральних рівнянь (32)-(35). Для оцінки $v_{2_{yy}}(y,\sigma)$, що знаходиться під знаком інтеграла з (32), зробимо заміну

$$v_2(y,\sigma)=\tilde v_2(y,\sigma)+\nu_1(\sigma)+\frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma)).$$

Функція $\tilde{v}_2(y,\sigma)$ є розв'язком задачі

$$\tilde{v}_{2\sigma} = \frac{a_2(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h_2^2(\sigma)}\tilde{v}_{2yy} + \frac{yh_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)}\tilde{v}_{2y} + \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}\times$$
$$\times f(yh_2(\sigma),\sigma) - \nu_1'(\sigma) - \frac{y}{\sigma}(\nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma)) +$$
$$+ \frac{y}{\sigma^2}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \frac{yh_2'(\sigma)}{\sigma h_2(\sigma)}(\nu_2(\sigma) -$$
$$- \nu_1(\sigma)), \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1},$$
$$\tilde{v}_2(0,\sigma) = \tilde{v}_2(\sigma,\sigma) = 0, \quad \sigma \in [0,T_1].$$

За допомогою функції Гріна $\tilde{G}(y,\sigma,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\tilde{v}_{2\sigma} = \frac{a_2(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h_2^2(\sigma)}\tilde{v}_{2yy} + \frac{yh_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)}\tilde{v}_{2y}$$

його можна подати у вигляді

$$\tilde{v}_2(y,\sigma) = \int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau \tilde{G}(y,\sigma,\eta,\tau)\Bigg(\frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}\times$$
$$\times f(\eta h_2(\tau),\tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)) +$$
$$+ \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) + \frac{\eta h_2'(\tau)}{\tau h_2(\tau)}(\nu_2(\tau) -$$
$$- \nu_1(\tau))\Bigg)d\eta, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \tag{36}$$

Повертаючись до $v_2(y,\sigma)$, знаходимо

$$v_{2yy}(y,\sigma) = \int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau \tilde{G}_{yy}(y,\sigma,\eta,\tau)\Bigg(\frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma}\times$$
$$\times f(\eta h_2(\tau),\tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)) +$$
$$+ \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) + \frac{\eta h_2'(\tau)}{\tau h_2(\tau)}(\nu_2(\tau) -$$
$$- \nu_1(\tau))\Bigg)d\eta, \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1}. \tag{37}$$

Для оцінки одержаного виразу скористаємось оцінкою другої похідної об'ємного потенціалу [14]:

$$\left|\int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau \tilde{G}_{yy}(y,\sigma,\eta,\tau)q(\eta,\tau)d\eta\right| \leq$$
$$\leq C\int\limits_0^\sigma \frac{d\tau}{(\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau))^{1-\delta/2}}. \tag{38}$$

Тут $q(y,\sigma)$ – довільна неперервна в $\overline{Q}_{T_1}$ функція, яка задовольняє умову Гельдера за змінною y з показником $\delta, 0 < \delta < 1, C-$ відома стала, $\theta_2(\sigma) = \int\limits_0^\sigma \frac{a_2(\tau)\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma h_2^2(\tau)}d\tau$.

Беручи до уваги (38) та співвідношення $\nu_1'(\sigma) = \frac{1}{\gamma}\mu_i'(\sigma^{\frac{1}{\gamma}})\sigma^{\frac{1}{\gamma}-1}, i = 1,2$, оцінимо один з виразів, що утворюють (37):

$$\left|\int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau \tilde{G}_{yy}(y,\sigma,\eta,\tau)\frac{\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)}{\tau}\eta d\eta\right| \leq$$
$$\leq C_4\int\limits_0^\sigma \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}-\delta}d\tau}{(\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau))^{1-\frac{\delta}{2}}}, \tag{39}$$

Інші вирази з (37) оцінюємо аналогічно, використовуючи умови теореми. Тоді, зважаючи на нерівність $\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau) \geq C_5(\sigma^{\frac{1}{\gamma}} - \tau^{\frac{1}{\gamma}})$, з (37) і (39) отримуємо

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \leqslant C_6\int\limits_0^\sigma \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}-\delta}d\tau}{(\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau))^{1-\frac{\delta}{2}}} \leq$$
$$\leq C_{25}\int\limits_0^\sigma \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}-\delta}d\tau}{(\sigma^{\frac{1}{\gamma}} - \tau^{\frac{1}{\gamma}})^{1-\frac{\delta}{2}}}.$$

В останньому інтегралі виконаємо заміну $z = \frac{\tau}{\sigma}$:

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \leqslant C_7\sigma^{\frac{\delta}{2\gamma}-\delta}\int\limits_0^1 \frac{z^{\frac{1-\gamma}{\gamma}-\delta}dz}{(1 - z^{\frac{1}{\gamma}})^{1-\frac{\delta}{2}}} \leq$$
$$\leq C_8\sigma^{\frac{\delta}{2\gamma}-\delta}.$$

Звідси випливає, що права частина (32) визначена і неперервна в $\overline{Q}_{T_1}$. Отже, система рівнянь (32)-(35) має лише тривіальний розв'язок. Це означає, що розв'язок задачі (5)-(8), а також і задачі (1)-(4) єдиний. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Lorenzi L.* An identification problem for a one-phase Stefan problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2001. – **9**, N6. – P. 1-27.

2. *Іванчов М.І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, N7. – С. 901-910.

3. *Баранська І.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, N2. – С. 32-42.

4. *Баранська І., Іванчов М.* Обернена задача для двовимірного параболічного рівняння в області з вільною межею // Укр. мат. вісник. – 2007. – **4**, N4. – С. 467-484.

5. *Снітко Г.А.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, N4. – С. 7-18.

6. *Ivanchov M., Saldina N.* An inverse problem for strongly degenerate heat equation // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2006. – **14**, N5. – P. 465-480.

7. *Іванчов М., Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння із сильним степеневим виродженням // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, N2. – С. 1487-1500.

8. *Ivanchov M., Lorenzi A., Saldina N.* Solving a scalar degenerate multidimensional identification problem in a Banach space // J.Inv. Ill-Posed Problems. – 2008. – **16**, N4. – P. 397-415.

9. *Гринців Н.* Обернена задача для параболічного рівняння із сильним степеневим виродженням в області з вільною межею // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – **64**. – С. 84-97.

10. *Іванчов М.І.* Задача теплопровідності з вільною межею, яка вироджується у початковий момент часу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, N2. – С. 82-87.

11. *Іванчов М., Савіцька Т.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею, яка вироджується в початковий момент часу // Укр. мат. вісник. – 2011. – **8**, N3. – С. 381-403.

12. *Ivanchov M.* Inverse problem for equation of parabolic type. — Lviv: VNTL Publ., 2003. – 240 p.

13. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. – 736 с.

14. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968. – 428 с.

УДК 517.95

©2016 р. Я.О. Баранецький, П.І. Каленюк, Л.І. Коляса

Національний університет "Львівська політехніка"

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ АБСТРАКТНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРОМ ІНВОЛЮЦІЇ

Вивчається нелокальна задача для диференціально-операторних рівнянь з інволюцією. Встановлено спектральні властивості та умови існування і єдиності розв'язку. Наведено достатні умови при яких система кореневих функцій суттєво несамоспряженого оператора задачі утворює базис Рісса.

We study a nonlocal problem for differential-operator equations of order 2 with involution. The spectral properties of the operator of this problem are analyzed and the conditions for the existence and uniqueness of its solution are established. It is also proved that the system of root functions essentially a nonself-adjoint operator of the analyzed problem forms a Riesz basis.

Statement of the Problem.

Suppose that H is a separable Hilbert space, $A : H \to H$ is a positive self-adjoint operator with point spectrum $\sigma_p(A) = \{z_k \in \mathbf{R} : z_k \sim \beta k^{\alpha},\, \alpha, \beta > 0, k = 1, 2, ...\}$, $V(A) \equiv \{v_k \in H : k = 1, 2, ...\}$ is a system of eigenfunctions that form an orthonormalized basis in the space H, $H(A^s) = \{v \in H : A^s v \in H\}$, $s \geq 0$, $(u, v; H(A^s)) \equiv (A^s u, A^s v; H)$, $\|y; H(A^s)\| \equiv \|A^s y; H\|$, $H_1 \equiv L_2((0,1), H) = \{u(t) : (0,1) \to H,\ \|u(t); H\| \in L_2(0,1)\}$, $D_x : H_1 \to H_1$ is a strong derivative in the space H_1, i.e. $\left\|\dfrac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} - D_x u; H\right\| \to 0$, $(\Delta x \to 0)$, $I : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ is operator of involution: $Iu(x) \equiv u(1-x), (u(x) \in L_2(0,1))$, $p_0 \equiv \frac{1}{2}(E + I)$, $p_1 \equiv \frac{1}{2}(E - I)$, $L_{2,j}(0,1) \equiv \{y \in L_2(0,1) : y = p_j y\}$, $H_{1,j} \equiv \{y(x) \in H_1 : y(x) \equiv p_j y(x)\}, j = 0, 1$, $H_2 \equiv \{y(x) \in H_1 : D_x^2 y \in H_1, A^2 y \in H_1\}$, $\|y; H_2\|^2 \equiv \|D_x^2 y; H_1\|^2 + \|A^2 y; H_1\|^2$, $L(H(A^m); H(A^q))$ is algebra of bounded linear operators $A : H(A^m) \to H(A^q)$, $(m, q \geq 0)$, $H(A^0) = H$, $L(H(A^m)) \equiv L(H(A^m); H(A^m))$, $H^1 \equiv H\left(A^{\frac{3}{2}}\right)$, $H^2 \equiv H\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$, $B^j \in L(H^2), B(x) \equiv \sum_{r=1}^{q} B_r \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2r-1}$, $B_r \in L(H_2)$, $B_r v_k = \frac{1}{r!} b_{r,k} v_k, B^j v_k = b_k^j v_k, B(x) v_k = b_k(x) v_k$, $b_{r,k}, b_k^j \in R, r = 1, 2, ...; q, j = 0, 1; k = 1, 2, \ldots$. Consider the following problem:

$$L(D_x, A)\, y \equiv -D_x^2 y(x) + A^2 y + B(x)(y(x) - -y(1-x)) = f(x), \qquad (1)$$

$$l_1 y \equiv y(0) - y(1) = h_1, \qquad (2)$$

$$l_2 y \equiv B^0 D_x y(0) + B^1 D_x y(1) = h_2, \qquad (3)$$

$$f(x) \in H_1, h_1 \in H^1, h_2 \in H^2.$$

We interpret the solution [16,21] of problem (1), (3) as a function $y(x) \in H_2$ satisfying the equalities

$$\|L(D_x, A)\, y - f; H_1\| = 0, \left\|l_1 y - h_1; H^1\right\| = 0,$$

$$\left\|l_2 y - h_2; H^2\right\| = 0.$$

Differential equation (1) includes operator of involution. First study the properties of involution operator launched C.Babbage (see [5]). In paper [13] T.Carleman introduced the concept of operator shift – a generalization of the concept of involution $Iy(x) \equiv y(1-x)$, $x \in L_2(0,1)$. Exploration partial differential equations with involution are devoted [2, 3, 4, 7, 11, 13, 22, 32, 37, 37].

Properties spectral problems for ordinary differential and functional- differential equations with involution investigated in the works [1, 9- 10, 17- 20, 23- 25, 29- 31, 34- 36, 38] and [5, 6, 8, 12, 27, 33, 39] respectively.

Solutions of spectral problem

$$L(D_x, A)\,y = \lambda y(x), \quad \lambda \in C, l_1 y = 0, l_2 y = 0, \tag{4}$$

consider as a product $y(x) = u(x)\,v_k$, $k = 1, 2, ...$, $u(x) \in W_2^2(0,1)$.

To determine the functions $u(x)$ obtain spectral problem

$$L_k(D_x)\,u \equiv -D_x^2 u(x) + z_k^2 u + b_k(x)\,(u(x) + u(1-x)) = \lambda u(x), \tag{5}$$

.

$$l_{1,k} u \equiv u(0) - u(1) = 0, \tag{6}$$

$$l_{2,k} u \equiv b_k^0 D_x u(0) + b_k^1 D_x(1) = 0. \tag{7}$$

Auxiliary spectral problems.

Consider the particular case the problem (5) – (7) if the specified conditions $B(x) = 0$, $b_k^0 = -b_k^1 = 1$.

$$-D_x^2 u(x) + z_k^2 u = \lambda u(x), \tag{8}$$

$$u(0) - u(1) = 0, \quad D_x u(0) - D_x u(1) = 0. \tag{9}$$

Lemma 1. *Let $B^0 = -B^1 = E$, $B(x) = 0$. Then problem (8), (9) have point spectrum $\sigma_k \equiv \left\{\lambda_{k,n} \in \mathbf{R} : \lambda_{k,n} = (2\pi n)^2 + z_k^2,\ n = 0, 1, ...,\right\}$ and system of eigenfunctions*

$$T \equiv \Big\{t_n^s \in L_2(0,1) : t_0^0(x) = 1, \quad t_n^0(x) = \sqrt{2}\cos 2\pi n x, \quad t_n^1(x) = \sqrt{2}\sin 2\pi n x, n \in N\Big\}$$

forms a ortonormalized basis in spaces $L_2(0,1)$.

Property of spectral problem (6) – (8).

We now consider the operator $L_{0,k} : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ of the problem (6) – (8)

$$L_{0,k} u \equiv -D_x^2 u + z_k^2 u, u \in D(L_{0,k}), \quad D(L_{0,k}) \equiv \{u \in W_2^2(0,1) : l_{1,k} u = 0, \ l_{2,k} u = 0\}.$$

Let

$$v_{k,0}^{0,0}(x) \equiv 1, \ v_{k,n}^{0,0}(x) \equiv \sqrt{2}\cos 2\pi n x, \tag{10}$$

$$v_{k,n}^{1,0}(x) \equiv \sqrt{2}\,(1 + \beta_k(2x-1))\sin 2\pi n x, \tag{11}$$

$$\beta_k \equiv \left(b_k^0 - b_k^1\right)^{-1}\left(b_k^0 + b_k^1\right). \tag{12}$$

You can check that

$$L_{0,k} v_{k,n}^{1,0}(x) = \lambda_{k,n} v_{k,n}^{1,0} + \xi_{k,n}^0 v_{k,n}^{0,0}, \quad \xi_{k,n}^0 = -8\pi n \beta_k, n = 0, 1, 2... . \tag{13}$$

Hence

$V(L_{0,k}) \equiv \left\{v_{k,n}^{s,0}(x); s = 0, 1, n = 0, 1, 2, ...\right\}$ are the system of root functions of the operator $L_{0,k}$ in the sense of equality (13).

Lemma 2. *Let $b_k^0 \neq b_k^1$, $k = 1, 2, ...$. Then the operator $L_{0,k}$ of problem (8), (6), (7) have point spectrum σ_k, and system $V(L_{0,k})$ of root functions complete and minimal in $L_2(0,1)$.*

Proof. We now consider the adjoint spectral problem

$$-D_x^2 w(x) + z_k^2 w = \mu w(x), \mu \in C, \quad b_k^1 w(0) + b_k^0 w(1) = 0, \quad D_x w(0) - D_x w(1) = 0. \tag{14}$$

The operator of this adjoint problem (14) have point spectrum σ_k, and system of root functions

$$w_{k,0}^{1,0}(x) \equiv 1 - \beta_k(2x-1), \quad w_{k,n}^{0,0}(x) \equiv \sqrt{2}\sin 2\pi n x, \tag{15}$$

$$w_{k,n}^{1,0}(x) \equiv \sqrt{2}\,(1 - \beta_k(2x-1))\cos 2\pi n x. \tag{16}$$

You can check that

$$L_{0,k}v_{k,n}^{1,0}(R_0)=\lambda_{k,n}v_{k,n}^{1,0}+\xi_{k,n}^{0}v_{k,n}^{0,0},\qquad(17)$$
$$\xi_{k,n}^{0}=8\pi n\beta_k,n=1,2...\ .$$

Hence, the system of root functions $V(L_{0,k})$ of the operator $L_{0,k}$ possesses a unique biorthogonal system $W(L_{0,k})\equiv\left\{w_{k,n}^{s,0}(x);s=0,1;n=1,2,...\right\}$ are the system of root functions of the problem (14) in the sense of equality (17).

$\left(v_{k,n}^{r,0},w_{k,q}^{s,0};L_2(0,1)\right)=\delta_{r,s}\delta_{k,q}$, $(r,s=0,1;q,n=0,1...)$.

Consider the operators $R_{0,k},S_{0,k}:L_2(0,1)\to L_2(0,1)$, $R_{0,k}t_{k,n}^{p}\equiv v_{k,n}^{p,0}$, $R_{0,k}=E+S_{0,k}$, $p=0,1;n=0,1,\dots$.

From the definition of the operator $R_{0,k}$ and the completeness of system $V(L_{0,k})$ in space $L_2(0,1)$ we get $S_{0,k}:L_{2,0}(0,1)\to 0,S_{0,k}:L_{2,1}(0,1)\to L_{2,0}(0,1)$

To prove that the system $V(L_{0,k})$ forms a Riesz basis (see [15, 26]) in $L_2(0,1)$, it is sufficient, according to formula $R_{0,k}=E+S_{0,k}$, to show that the operator $S_{0,k}:L_2(0,1)\to L_2(0,1)$ is bounded.

Let ω be an arbitrary element from the space $L_2(0,1))$. We represent ω as a Fourier series in the system T.

$$\omega=\omega_0^0t_0^0+\sum_{m=1}^{\infty}\omega_m^0t_m^0+\omega_m^1t_m^1,$$

$$\omega_m^j=\left(\omega,t_m^j;L_2(0,1)\right).$$

According to the definition of the operator $S_{0,k}$, we find

$$S_{0,k}\omega=\beta_k(2x-1)\sum_{m=0}^{\infty}\omega_m^0\sqrt{2}\cos 2\pi mx.$$

Using the ratio

$$\|S_{0,k}\omega;L_2(0,1)\|=$$

$$=\left\|\beta_k(2x-1),\sum_{m=0}^{\infty}\omega_m^0\sqrt{2}\cos 2\pi mx;L_2(0,1)\right\|,$$

we estimate it

$$\|S_{0,k}\omega;L_2(0,1)\|\le|\beta_k|\,\|\omega;L_2(0,1)\|.$$

Hence, $R_{0,k}=E+S_{0,k}\in L(L_2(0,1))$ and $\left(R_{0,k}^{-1}\right)^*=E-S_{0,k}^*\in L(L_2(0,1))$.

So using theorem N.K.Bary (see theorem 6. 2.1 [15]) we obtain the following statement.

Theorem 1. *Let $b_k^0\ne b_k^1$, $k=1,2,\dots$. Then the operator $L_{0,k}$ of problem* (8), (6), (7) *have point spectrum σ_k, and system $V(L_{0,k})$ of root functions in the sense of equality* (12) *forms a Riesz basis in $L_2(0,1)$.*

Further, we introduce operator $L_{1,k}:L_2(0,1)\to L_2(0,1)$ of the problem (5) – (7):

$$L_{1,k}u\equiv L_k(D_x)u,u\in D(L_{1,k}),$$

$$D(L_{1,k})\equiv\left\{u\in W_2^2(0,1):l_{1,k}u=0,l_{2,k}u=0\right\}.$$

By the direct substitution we can show that the functions $v_{k,n}^{0,1}(x)=\sqrt{2}\cos 2\pi nx$, is eigenfunctions of operator $L_{1,k}$:

$$v_{k,n}^{0,1}(x)=\sqrt{2}\cos 2\pi nx\in D(L_{1,k}),$$

$$L_{1,k}v_{k,n}^{0,1}(x)=\lambda_{k,n}v_{k,n}^{0,1}(x),k=1,2...\ .$$

Root function of operator $L_{1,k}$, defined by relation

$$v_{k,n}^{1,1}(x)\equiv\sqrt{2}\sin 2\pi nx+v_{k,n}^{0}(x)+$$
$$+v_{k,n}^{1}(x)+v_{k,n}^{2}(x),\qquad(18)$$

$$v_{k,n}^{0}(x)\equiv\sqrt{2}\beta_k(2x-1)\sin 2\pi nx,$$
$$\beta_k\equiv\left(b_k^0-b_k^1\right)^{-1}\left(b_k^0+b_k^1\right),\qquad(19)$$

$$v_{k,n}^{1}(x)\equiv\sqrt{2}\beta_{k,n}^{1}(2x-1)\sin 2\pi nx,\qquad(20)$$

$$v_{k,n}^{2}(x) \equiv \sqrt{2}\sum_{j=1}^{q+1} c_{2j+1,n,k}\tfrac{1}{(2j+1)!}\left(x- -\tfrac{1}{2}\right)^{2j+1}\sin 2\pi nx+ +\sqrt{2}\sum_{j=0}^{q} c_{2j,n,k}\tfrac{1}{(2j)!}\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^{2j}\cos 2\pi nx. \quad (21)$$

Support functions $v_{k,n}^{1}(x)$, $v_{k,n}^{2}(x)$ so choose

$$\left(L_k(D_x)-\lambda_{k,n}\right)v_{k,n}^{1,1}(x)=\xi_{k,n}^{1}v_{k,n}^{0,1}(x)=0, \quad (22)$$

$$l_{1,k}\left(v_{k,n}^{1}(x)+v_{k,n}^{2}(x)\right)=0, \quad (23)$$

$$l_{2,k}\left(v_{k,n}^{1}(x)+v_{k,n}^{2}(x)\right)=0. \quad (24)$$

Substitute equity (21) ratio (22) and equal define parameters $c_{r,n,k}$

$$c_{2s,n,k}=\tfrac{1}{2\pi n}\left(b_{s-1,k}\pm\frac{1}{(4\pi n)^2}b_{s-1,k}+...\pm \pm\frac{1}{(4\pi n)^{2q-2s+2}}b_{q,k}\right), \quad (25)$$

$$c_{2s+1,n,k}=-\tfrac{1}{2(\pi n)^2}\left(b_{s,k}\pm\frac{1}{(4\pi n)^2}b_{s+1,k}+...\pm \pm\frac{1}{(4\pi n)^{2q-2s}}b_{q,k}\right). \quad (26)$$

Taking into account that $v_{k,n}^{1}(x)+v_{k,n}^{2}(x)\in L_{2,0}(0,1)$, $\sqrt{2}\sin 2\pi nx+v_{k,n}^{0}(x)=v_{k,n}^{1,0}(x)\in D(L_{0,k})$ obtain equality

$$l_{1,k}v_{k,n}^{1,1}=l_{1,k}\left(v_{k,n}^{1,0}+v_{k,n}^{1}+v_{k,n}^{2}\right)=0.$$

If

$$D_x v_{k,n}^{1}(0)+D_x v_{k,n}^{2}(0)\equiv 2\sqrt{2}\beta_{k,n}^{1}+ +2\sqrt{2}\sum_{j=1}^{q+1} c_{2j+1,n,k}\tfrac{1}{(2j)!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2j}=0,$$

$\beta_{k,n}^{1}=-\sum_{j=1}^{q+1} c_{2j+1,n,k}\tfrac{1}{(2j)!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2j}$ then

$$l_{2,k}v_{k,n}^{1,1}=l_{2,k}v_{k,n}^{1,0}+l_{2,k}\left(v_{k,n}^{1}+v_{k,n}^{2}\right)= =l_{2,k}\left(v_{k,n}^{1}+v_{k,n}^{2}\right)=0.$$

Hence, $v_{k,n}^{1,1}(x)\in D(L_{1,k})$,

$$L_{1,k}v_{k,n}^{1,1}(x)\equiv\lambda_{k,n}v_{k,n}^{1,1}(x)+\xi_{k,n}^{1}v_{k,n}^{0,1}(x), \quad (27)$$

here

$$\xi_{k,n}^{1}=8\pi n\left(\beta_n+\beta_n^1\right), k=1,2,...,n=0,1,...$$

.

Consider the system functions $V_k\equiv\left\{v_{k,n}(x), v_{k,n}^{0,1}(x)\in L_2(0,1),\ k=1,2,...,n=0,1,...\right\}$,

here

$$v_{k,n}(x)\equiv\sqrt{2}\cos 2\pi nx+v_{k,n}^{0}(x)+v_{k,n}^{1}(x), \quad v_{k,n}^{0,1}(x)=\sqrt{2}\sin 2\pi nx, k=1,2,..., n=0,1,... . \quad (28)$$

Lemma 3. *Let* $b_k^0\neq b_k^1$, $k=1,2,...$ *Then the system functions (28) forms a Riesz basis in space* $L_2(0,1)$.

Lemma proved just as Theorem 1.

Lemma 4. *Let* $b_k^0\neq b_k^1, k=1,2,...$. *Then the system functions* V_k and $V(L_{1,k})$ *a square close in space* $L_2(0,1)$.

Proof. A formula (19), (25), (26) that follows.

So get inequality

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|v_{k,n}^{1,1}-v_{k,n}, L_2(0,1)\right\|^2= =\sum_{n=0}^{\infty}\left\|v_{k,n}^{2}, L_2(0,1)\right\|^2<\infty.$$

Of the results [14] follows that the system V_k is complete and minimal in space $L_2(0,1)$.

Hence, the system of root functions $V(L_{1,k})$ of the operator $L_{1,k}$ possesses a unique bi-orthogonal system $W(L_{1,k})$

$$\left(v_{k,n}^{r,1}, w_{q,n}^{s,1}; L_2(0,1)\right)=\delta_{r,s}\delta_{k,q}, \quad (r,s=0,1; q,k=0,1...)$$

.

So using theorem N.K.Bary (see theorem 6. 2.3 [15]) we obtain the following statement.

Theorem 2. *Let* $b_k^0 \neq b_k^1$, $k = 1,2,\dots$. *Then the operator* $L_{1,k}$ *of problem (5) – (7) have point spectrum* σ_k, *and system* $V(L_{1,k})$ *of root functions in the sense of equality (27) forms a Riesz basis in space* $L_2(0,1)$.

The spectral problem (1)**,** (2)**.**

We now consider the operator $L : H_1 \to H_1$ of problem (1), (2):

$$Ly \equiv L(D_x, A)\, y, y \in D(L),$$

$$D(L) \equiv \{y \in H_2 : l_1 y = 0, l_2 y = 0\}.$$

Let $b_k^0 \neq b_k^1$, $k = 1,2,\dots$. Then the operator L of problem (1), (2) have point spectrum

$$\sigma \equiv \left\{\lambda_{k,n} \in R : \lambda_{k,n} \equiv 4n^2\pi^2 + z_k^2,\right.$$

$$\left. n = 0,1\dots; k = 1,2,\dots\right\},$$

and system of root functions

$$V(L) \equiv \left\{v_{k,n}^s(L) \in H_1 : v_{k,n}^s(L) = v_{k,n}^{s,1}(x)\, v_k,\right.$$

$$\left. s = 0,1; n = 0,1,2,\dots; k = 1,\dots\right\},$$

$$v_{k,0}^0(L) \equiv v_k, v_{k,n}^0(L) \equiv \sqrt{2}\sin 2\pi n x v_k,$$

$$v_{k,n}^1(L) \equiv v_{k,n}^{1,1}(x)\, v_k, \;\; n,k = 1,2,\dots .$$

System $V(L)$ of root functions of the operator L possesses a unique biorthogonal system $W(L) \equiv \left\{w_{p,m}^s \in H_1 v : w_{p,m}^s \equiv w_{p,m}^{s,1}(x)\, v_m,\right.$ $\left. p = 1,2,\dots; m = 0,1,\dots; s = 0,1\right\}$ in the sense of equality

$$\left(v_{k,m}^j, w_{p,n}^s; H_1\right) = \delta_{j,s}\delta_{k,p}\delta_{m,n}.$$

Hence, we obtain the following statement.

Lemma 5. *Let* $b_k^0 \neq b_k^1$, $k = 1,2,\dots$. *Then the operator* L *of problem* (1), (2) *have complete and minimal in* H_1 *system of root functions* $V(L_0)$.

Then $\|R_{1,k}\omega; L_2(0,1)\| \leq C\|\omega; L_2(0,1)\|$, $\left\|\left(R_{1,k}^{-1}\right)\omega; L_2(0,1)\right\| \leq C\|\omega; L_2(0,1)\|$, $C > 0$.

Further, we introduce operator $B \equiv (B^0 + B^1)(B^0 - B^1)^{-1}$.

Theorem 3. *Let* $B \in L(H^2)$, $B_r \in L(H_2)$, $r = 1,2,\dots,q$. *Then the operator* L *of problem* (1), (2)*, have system of root functions* $V(L)$ *forms a Riesz basis in* H_1.

Proof. Let

$$T_1 \equiv \left\{t_{k,n}^s \in H_1 : t_{k,n}^j \equiv t_n^j v_k, t_n^j \in T,\right.$$
$$\left. v_k \in V(A), j = 0,1, n = 0,1,\dots,k = 1,2,\dots\right\}.$$

Consider the operators $R_1, S_1 : H_1 \to H_1$, $R_1 t_{k,n}^s \equiv v_{k,n}^{s,1}$, $R_1 = E + S_1$.

From the definition of the operator R_1 for any $g = \sum_{s,k,m} g_{k,m}^s t_{k,m}^s \in H_1$, $g_{k,m}^s = \left(g, t_{k,m}^s; H_1\right)$ we get

$$R_1 g = \sum_{j,k,m} g_{k,m}^j v_{k,m}^{j,1} \in H_1,$$

$$\left(R_1^{-1}\right)^* \sum_{j,k,m} g_{k,m}^j t_{k,m}^j = \sum_{j,k,m} g_{k,m}^j w_{k,m}^{j,1}$$

$$\|R_1 g, H_1\| \leq \max\|E + S_{1,k}, L(H_1)\|\,\|g, H_1\| =$$

$$= C_1\|g, H_1\|,$$

$$\left\|\left(R_1^{-1}\right)^* g, H_1\right\| \leq \max\left\|E - (S_{1,k})^*, L(H_1)\right\|$$

$$\|g, H_1\| = C_2\|g, H_1\|, \;\; k = 1,2,\dots .$$

So using theorem N.K.Bary (see theorem 6. 2.1 [15]) we obtain the following statement of the theorem 3.

3. Property of problem (1)**,** (2)**.**

Replaced condition (2) on equivalent terms

$$\begin{array}{c} l_1 y \equiv y(0) - y(1) = h_1, \\ l_3 y \equiv D_x y(0) - D_x y(1) + \\ + B\left(D_x y(0) + D_x y(1)\right) = h_3. \end{array} \tag{29}$$

Here $h_3 \equiv 2\left(B^0 - B^1\right)^{-1} h_1$.

Consider the particular case the problem (1), (29) if the specified conditions $B = 0$, $B_0 = 0$

$$-D_x^2 y(x) + A^2 y = g(x), \tag{30}$$

$$\begin{array}{c} y(0) - y(1) = g_1, \\ D_x y(0) - D_x y(1) = g_2, \;\; g_j \in H^j, j = 1,2. \end{array} \tag{31}$$

Theorem 4. *Let $B = 0$, $B_0 = 0$. Then for any $g \in H_1, g_1 \in H^1, g_2 \in H^2$, there exists a unique solution of problem (30), (31).*

Proof. We seek the solution of this problem in the form $y = u + v$, there u is the solution of the problem

$$-D_x^2 u(x) + A^2 u = g(x), y(0) - y(1) = 0, \\ D_x y(0) - D_x y(1) = 0 \tag{32}$$

and v is the solution of the problem

$$-D_x^2 v(x) + A^2 v(x) = 0, v(0) - v(1) = g_1, \\ D_x v(0) - D_x v(1) = g_2. \tag{33}$$

Consider the problem (32). We expand the functions $u(x), g(x)$ in a series in the orthonormalized T_1 basis in the space H_1 :

$$u = \sum_{s,k,m} u_{k,m}^s t_{k,m}^s, \quad u_{k,m}^s = \left(u, t_{k,m}^s; H_1\right),$$

$$g = \sum_{s,k,m} g_{k,m}^s t_{k,m}^s, \quad g_{k,m}^s = \left(g, t_{k,m}^s; H_1\right).$$

We estimate a number

$$-D_x^2 u = \sum_{s,k,m} (2\pi m)^2 \left((2\pi m)^2 + z_k^2\right)^{-1} g_{k,m}^s t_{k,m}^s,$$

$$\left\|D_x^2 u; H_1\right\| \le \|g; H_1\|,$$

$$A^2 u = \sum_{s,k,m} z_k^2 \left((2\pi m)^2 + z_k^2\right)^{-1} g_{k,m}^s t_{k,m}^s,$$

$$\left\|A^2 u; H_1\right\| \le \|g; H_1\|.$$

Hence

$$\|u; H_2\| \le \sqrt{2}\, \|g; H_1\|. \tag{34}$$

Consider the problem (33). Further, we introduce operators, $Y_j(x, A) \equiv e^{Ax} + (-1)^j e^{A(1-x)} \in L(H^2; H_2)$, $j = j = 0, 1$. The solution of the differential equation (33) has the form

$$v(x) = Y_0(x, A)\varphi_0 + Y_1(x, A)\varphi_1 \tag{35}$$

where φ_0, φ_1 are unknown.

To determine the, $\varphi_0, \varphi_1 \in H^1$ we substitute expression (35) in the condition (33) and obtain

$$\varphi_1 = \tfrac{1}{2} W_1(0, A)^{-1} g_1, \varphi_0 = \tfrac{1}{2} W_1(0, A)^{-1} A^{-1} g_2.$$

Hence,

$$v = \tfrac{1}{2} W_1(x, A) W_1(0, A)^{-1} g_1 + \\ + \tfrac{1}{2} W_0(x, A) W_1(0, A)^{-1} A^{-1} g_2,$$

$$\|v; H_2\|^2 \le C\left(\left\|g_1; H^1\right\|^2 + \left\|g_2; H^2\right\|^2\right). \tag{36}$$

Therefore follows from inequalities (34), (36) inequality

$$\|y; H_2\|^2 \le C_1\left(\|g; H_1\|^2 + \\ + \left\|g_1; H^1\right\|^2 + \left\|g_2; H^2\right\|^2\right).$$

We now return to the original problem (1), (2). Consider in connection problem as the sum $y = y_0 + y_1$, $y_j \in H_{1,j} \bigcap H_{2,j}$, $j = 0, 1$.

To determine the unknowns $y_j \in H_{1,j}$ get the problem

$$-D_x^2 y_1(x) + A^2 y_1(x) = f_1(x), f_1(x) \in H_{1,1},$$

$$y_1(0) - y_1(1) = h_1, D_x y_1(0) - D_x y_1(1) = 0,$$

$$-D_x^2 y_0(x) + A^2 y_0(x) = f_0(x) - 2B(x) y_1(x),$$

$$f_0(x) \in H_{1,0},$$

$$y_0(0) - y_0(1) = 0, D_x y_0(0) - D_x y_0(1) = \\ = h_3 - B\left(D_x y_1(0) + D_x y_1(1)\right),$$

$$\|y; H_2\|^2 \le C\left(\|f; H_1\|^2 + \left\|h_1; H^1\right\|^2 + \\ + \left\|h_2; H^2\right\|^2\right), (C > 0).$$

For unknown functions $y_j \in H_{1,j}$ get that problem is a particular case of the problem (21), (22). Hence the statement is correct.

Theorem 5. Let $B \in L(H^1)$, $B(x) \in L(H_2)$. *Then for any* $f \in H_1, h_1 \in H^1, h_2 \in H^2$, *there exists a unique solution of problem* (1), (2) *and fair inequality*

$$\|y; H_2\|^2 \leq C \left(\|f; H_1\|^2 + \left\|h_1; H^1\right\|^2 + \right.$$

$$\left. + \left\|h_2; H^2\right\|^2 \right), (C > 0).$$

Conclusion.

Investigated the spectral properties essentially a nonself-adjoint operator nonlocal problems for abstract differential equation with involution.

Studied the problem solution is built on a number of root functions

References

1. *Aftabizadeh A. R., Huang Y. K., Wiener J.* Bounded solutions for differential equations with reection of the argument // J. Math. Anal. Appl. – 1988. –**135**, – P. 31–37.

2. *Aliev B. D., Aliev R. M.* Properties of the solutions of elliptic equations with deviating arguments // Izdat. Akad. Nauk Azerbaijan. SSR, Baku, – 1968. – P. 15-25. (Russian)

3. *Andreev A. A., Shindin I. P.* On the well-posedness of boundary value problems for a partial differential equation with deviating argument // Kuibyshev. Gos. Univ. – 1987. – P. 3–6. (Russian)

4. *Ashyralyev A. , Sarsenbi A. M.* Well– posedness of an elliptic equations with an involution// Electron. J. Diff. Equ. – 2015. – **284**, – P. 1–8.

5. *Babbage C.* An essay towards the calculus of calculus of functions // Philos. Trans. Roy. Soc. London. – 1816. – **106**, Part II. – P. 179–256.

6. *Baranetskij Ya. O.* Boundary value problems with irregular conditions for differential-operator equations // Bukov. Mathemat.Journ. – 2015. – **3**, N3-4. – P. 33–40. (Ukraine)

7. *Baranetskij Ya., Yarka Y.* The existence of izospectral perturbation of Dirichlet problem of infinite order differential operator // Visnyk Derzh. Univ. "L'viv. Politekhnika,"Ser. Prykl. Matem. – 1997. – **320**, – P. 15–18. (Ukraine)

8. *Baranetskij Ya., Yarka Y.* One class of boundary value probems for differential- operator equatons of even probem // Mat. Metody Fiz.- Mekh. Polya. – 1999. – **42**, N4. – P. 64-67. (Ukraine)

9. *Baranetskij Ya., Kalenyuk P., Yarka Y.* Perturbation boundary value problems for ordinary differential equations of second order // Visnyk Derzh. Univ. "L'viv. Politekhnika,"Ser. Prykl. Matem.– 1998. – **337**, – P. 70–73. (Ukraine)

10. *Baranetskij Ya., Yarka Y., Fedushko S.* Izospectral perturbation the differential operator Dirichlet. Spectral property // Sci. Bull. Uzhgor. Univer. – 2012. – **23**, N1. – P. 12–16. (Ukraine)

11. *Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P.* Initial-boundary value problems for first-order hyperbolic equations with involution // Doklady Math. – 2011. – **84**, N3. – P. 783–786.

12. *Busenberg S. N., Travis C. C.* On the use of reducible-functional-differential equations in biological models // J. Math. Anal. Appl. – 1982. – **89**, – P. 46–66.

13. *Carleman T.* Sur la the'orie des e'quations inte'grales et ses applications // Verh. Internat. Math. Kongr. – 1932. – **1**, – P. 138–151.

14. *Gomilko A. M., Radzievskii G. V.* Equivalence in Lp[0,1] of the system expi2πkx (k=0,$\pm$1,. . .)and the system of the eigenfunctions of an ordinary functional-differential operator // Mathematical Notes, – 1991, – **49**, N1. – P. 34–40.

15. *Gokhberg I. Ts., Krein M. G.* Introduction to the Theory of Linear Not Self-Adjoint Operators.— M.: Nauka, 1965. — 448 pp.(Russian)

16. *Gorbachuk V. L.,Gorbachuk M.L.* Boundary Value Problems for Differential- Operator Equations.— K.: Nauk. dumka, 1984. — 320 pp.(Russian)

17. *Gupta C. P.* Boundary value problems for differential equations in Hilbert spaces involving reflection of the argument // J. Math. Anal. Appl. – 1987. – **128**, – P. 375–388.

18. *Gupta C. P.* Two-point boundary value problems involving reflection of the argument // Int. J., Math. Math. Sci. – 1987. – **10**, N2. – P. 361–371.

19. *Gupta C. P.* Existence and uniqueness theorems for boundary value problems involving refection of the argument // Nonlinear Anal. – 1987. – **11**, – P. 1075–1083.

20. *Fernandez A.E. , Araujo J.A.E., Tojo F.A.F., Villamarin D.M.* Existence results for a linear equation with reflection, non-constant coeficient and periodic boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2014. – **412**, N1. – P. 529-546.

21. *Kalenyuk P. I., Baranetskij Ya. E., Nitrebich Z. N.* Generalized Method of the Separation of Variables. — K.: Nauk. dumka, 1993. — 231 pp. (Russian)

22. *Kirane M., Al-Salti N.* Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation // J.Nonlinear Sci. Appl. – 2016. – **9**, – P. 1243–1251.

23. *Kopzhassarova A. A., Lukashov A. L., Sarsenbi A. M.* Spectral properties of non-self-

adjoint perturbations for a spectral problem with involution// Abstr. Appl. Anal. – 2012. – P. 1–5. doi:10.1155/2012/576843
24. *Kritskov L. V. , Sarsenbi A. M.* Spectral properties of a nonlocal problem for the differential equation with involution // Differ. Equ. – 2015. – **51**, N8. – P. 984–990. (Russian)
25. *Kurdyumov V. P.* On Riescz bases of eigenfunction of 2-nd order differential operator with involution and integral boundary conditions // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. – 2015. – **15**, N4. – P. 392–405 (Russian)
26. *Naimark M. A.* Linear differential operators.— M.: Nayka, 1969.—528 pp. (Russian)
27. *Przeworska-Rolewicz D.* Sur les a equations involutives et leurs applications // Stud. Math. – 1961. – **20**, – P. 95–117.
28. *Przeworska- Rolewicz D.* Equations with Transformed Argument. An Algebraic Approach, (W.: Polish Scientific Publishers, 1973. — 354 pp.
29. *O'Regan D.* Existence results for differential equations with reflection of the a reflection of the argument// J. Aust. Math. Soc. – 1994. – **57**, N2. – P. 237–260.
30. *Sadybekov M. A., Sarsenbi A. M.* Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution // Differ. Equ. – 2012. – **48**, N8. – P. 1112–1118. (Russian)
31. *Sadybekov M. A., Sarsenbi A. M.* Mixed problem for a differential equation with involution under boundary conditions of general form. In:A. Ashyralyev, A. Lukashov // (eds.) First International Conference on Analysis and Applied Mathematics: ICAAM 2012. AIP Conference Proceedings. – 2012. – **1470**, – P. 225–227.
32. *Sarsenbi A. M., Tengaeva A. A.* On the basis properties of root functions of two generalized eigenvalue problems // Differ. Equ. – 2012. – **48**, N2. – P. 306–308. (Russian)
33. *Sharkovsky A. N.* Functional-differential equations with a finite group of argument transformations, Asymptotic Behavior of Solutions of Functional-Differential Equations // Coll. sci. Works, Akad. Nauk Ukraine SSR, Inst. Mat., K.: – 1978. – P. 118–142.(Russian)
34. *Shevelo V. N., GritsaўI A. G.* Some approaches to the study of the properties of solutions of differential equations with involutions, Methods for Investigating Differential and Functional-Differential Equations // Akad. Nauk Ukraine SSR, Inst. Mat., K.: – 1990. – P. 110–117. (Russian)
35. *Silberstein L.* Solution of the equation f _(x) = f(1/x) // Philos. Mag. – 1940. – **30,** N7. – P. 185–186.
36. *Wiener J.* Differential equations with involutions // Differ. Equ. – 1969. – **5**, N 6. – P. 1131–1137. (Russian)
37. *Wiener J.* Partial differential equations with involutions // Differ. Equ. – 1970. – **6**, N 7. – P. 1320–1322. (Russian)
38. *Wiener J., Aftabizadeh A. R.* Boundary value problems for differential equations with reflection of the argument // Int. J. Math. Math. Sci. – 1985. – **8**, N1. – P. 151–163.
39. *Wiener J.* Generalized solutions of functional differential equations // Singapore Singapore World Sci, – 1993. – P. 160–215.

УДК 517.9

©2016 р. Я.Й. Бігун, І.В. Краснокутська, Р.І. Петришин

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМИ АРГУМЕНТАМИ І ТОЧКОВИМИ ТА ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ

Розглянуто багаточастотну систему рівнянь із лінійно перетвореними аргументами та з точковими й інтегральними умовами. Досліджено існування та єдиність розв'язку задачі. На підставі оцінки осциляційних інтегралів обґрунтовано метод усереднення та одержано оцінку похибки методу усереднення для повільних змінних.

The multifrequency system of equations with linearly transformed arguments and with point and integral conditions is considered. The existence and uniqueness of solution of the problem are investigated. The averaging method is justified based on evaluation of oscillating integrals and the estimation error of averaging method for slow variables is obtained.

1. Вступ

Методом усереднення багаточастотні системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a, \varphi, \varepsilon),$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a, \varphi, \varepsilon)$$

з інтегральними умовами досліджувались у працях [1, 2] та ін. Зокрема, у роботі [1] здійснено усереднення як у системі диференціальних рівнянь, так і в інтегральних умовах й одержано асимптотичну оцінку похибки методу усереднення.

Аналогічна задача для багаточастотних систем із лінійно перетвореними аргументами у резонансному випадку розглянута у працях [3–5]. Асимптотика оцінки у цьому випадку залежить від розмірності вектора частот і кількості лінійно перетворених аргументів у швидких змінних.

У даній роботі вивчається задача з точковими й інтегральними умовами. Питання існування розв'язку для диференціального рівняння з умовами такого типу розглядалось в роботі [6], а саме для задачі

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a < x < b,$$

$$y(x_1) = y_2, \qquad \int\limits_{x_1}^{x_2} y(x)dx = y_2,$$

де $a < x_1 < x_2 < b$ і $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

2. Постановка задачі і схема усереднення. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{2}$$

де $\tau \in [0, L]$, $a \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$, $m \geqslant 1$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \ll 1$, $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $\lambda_i, \theta_j \in (0; 1]$, $a_\Lambda = (a_{\lambda_1}, ..., a_{\lambda_r})$, $a_{\lambda_i}(\tau) = a(\lambda_i \tau)$, $i = \overline{1, r}$, $\varphi_\Theta = (\varphi_{\theta_1}, \ldots, \varphi_{\theta_s})$, $\varphi_{\theta_j}(\tau) = \varphi(\theta_j \tau)$, $j = \overline{1, s}$.

Задамо наступні умови для розв'язку системи рівнянь (1), (2):

$$a(\tau_0) = a_0, \qquad 0 \leqslant \tau_0 \leqslant L; \tag{3}$$

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \Bigg[\sum_{j=1}^{s} b_j(\tau, a_\Lambda(\tau)) \varphi_{\theta_j}(\tau) + g(\tau, a_\Lambda(\tau), \varphi_\Theta(\tau)) \Bigg] d\tau = d, \tag{4}$$

де $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant L$.

Умови такого типу можна одержати, наприклад, при розгляді системи слабко зв'язаних осциляторів

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2(\tau) u_i = \varepsilon f_i(\tau, u(t), u(\lambda t), \dot{u}(t), \dot{u}(\lambda t)),$$

де $i = \overline{1, n}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad \dot{u} := \dfrac{du}{dt}$,

$u := (u_1, \ldots, u_n), \quad \dot{u} := (\dot{u}_1, \ldots, \dot{u}_n)$, f_i — задані функції.

Використавши заміну Крилова – Боголюбова [7], одержимо систему диференціальних рівнянь для амплітуд a_i і фаз φ_i вигляду

$$\frac{da_i}{d\tau} = -\frac{1}{\omega_i(\tau)}\Big(g_i(\tau, a, a_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda) + +a_i\omega_i'(\tau)\sin\psi_i\Big)\sin\psi_i,$$

$$\frac{d\varphi_i}{d\tau} = \frac{\omega_i(\tau)}{\varepsilon} - \frac{1}{a_i\omega_i(\tau)} \times \times\Big(g_i(\tau, a, a_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda) + +a_i\omega_i'(\tau)\cos\psi_i\Big)\cos\psi_i.$$

Умовою (3) задається значення вектора амплітуд в деякій точці $\tau_0 \in [0, L]$.

Усереднивши за швидкими змінними φ_{θ_j} праві частини рівнянь (1), (2) і функцію g в умові (4), одержимо усереднену задачу

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \overline{a}_\Lambda), \tag{5}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \overline{a}_\Lambda), \tag{6}$$

$$\overline{a}(\tau_0) = a_0, \tag{7}$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \Bigg[\sum_{j=1}^{s} b_j(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau))\overline{\varphi}_{\theta_j}(\tau) + +g_0(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau))\Bigg]d\tau = d. \tag{8}$$

Одержана задача значно простіша порівняно з (1)–(4), оскільки праві частини рівнянь не залежать від $\overline{\varphi}$. Компонента розв'язку $\overline{a}(\tau)$ знаходиться із (5), (7), після чого знаходження компоненти розв'язку $\overline{\varphi}$ зводиться до інтегрування з початковою умовою, що знаходиться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

3. Існування розв'язку усередненої задачі

Лема 1. Нехай функція X_0 неперервна за сукупністю змінних в області $[0, L]\times \times S_R^r$, де $S_R = \{a : \|a - a_0\| \leqslant R\}$ і $\sigma = \max\limits_{[0,L]\times S_R^r} \|X_0(\tau, a_\Lambda)\|$, $\sigma L \leqslant R$. Тоді на проміжку $[0, L]$ існує хоча б один розв'язок задачі (5), (7).

Доведення. Введемо оператор

$$Fa := a_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} X_0(z, a_\Lambda(z))dz,$$

визначений у просторі $\mathbb{C}[0, L]$ на кулі S_R. Із неперервності та обмеженості функції X_0 випливає рівностепенева неперервність множини Fa при $a \in S_R$. Оскільки

$$\|(Fa)(\tau)\| \leqslant \|a_0\| + \left\|\int_{\tau_0}^{\tau} A_0(z, a_\Lambda(z))dz\right\| \leqslant \|a_0\| + L\sigma,$$

то множина значень Fa рівномірно обмежена.

На підставі теореми Арцела [8] маємо, що оператор F є цілком неперервним.

Із того, що

$$\|(Fa)(\tau) - a_0\| = \left\|\int_{\tau_0}^{\tau} A_0(z, a_\Lambda(z))dz\right\| \leqslant R,$$

випливає, що $F : S_R \to S_R$.

Таким чином, оператор F задовольняє умови теореми Шаудера, що гарантує існування розв'язку задачі (5), (7).

Лема 2. Нехай виконуються умови леми 1, вектор-функція X_0 задовольняє умову Ліпшиця за змінними a_{λ_i} із сталою $\alpha > 0$ і

$$\alpha r L < 1. \tag{9}$$

Тоді розв'язок задачі (5), (7) існує і єдиний.

Доведення. Із леми 1 та умови (9) випливає, що оператор F — стискаючий. Справді, для будь-яких $a_1, a_2 \in D$

$$\|Fa_2 - Fa_1\| \leqslant \leqslant \alpha \sum_{i=1}^{r} \int_{\tau_0}^{\tau} \|a_2(\lambda_i z) - a_1(\lambda_i z)\|dz \leqslant \leqslant \alpha r L\|a_2 - a_1\|.$$

На підставі теореми Банаха [8] існує єдина нерухома точка оператора F, отже існує єдиний розв'язок задачі (5), (7).

Лема 3. Нехай $\overline{a}(\tau)=\overline{a}(\tau,\overline{y})$, $\overline{a}(0,\overline{y})=\overline{y}$ — розв'язок задачі (5), (7), в області визначення норми ω, X_0, Y_0 і g_0 обмежені сталою σ, норми b_j сталими β_j, а матриця

$$S(\tau_1,\tau_2):=\sum_{j=1}^{s}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} b_j(\tau,\overline{a}_\Lambda(\tau))d\tau$$

невироджена.

Тоді існує єдиний розв'язок рівняння (6), який задовольняє інтегральну умову (8). При цьому для $\tau\in[0,L]$

$$\|\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)\|\leqslant c_1+\frac{c_2}{\varepsilon}, \qquad (10)$$

де c_1,c_2 — додатні сталі, $\overline{\varphi}(0;\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)=\overline{\psi}$.

Доведення. Із рівняння (6) знаходимо

$$\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)=\overline{\psi}+\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},0,\varepsilon).$$

Після підстановки $\overline{\varphi}$ в умову (8) одержимо для $\overline{\psi}$ рівняння

$$S(\tau_1,\tau_2)\ \overline{\psi}=d-\\ -\sum_{j=1}^{s}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} b_j(\tau,\overline{a}(\tau))\overline{\varphi}(\tau_j;\overline{y},0,\varepsilon)d\tau-\\ -\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} g_0(\tau,\overline{a}(\tau))d\tau.$$

Оскільки

$$\|\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},0,\varepsilon)\|\leqslant\sigma\tau\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

і

$$\|\overline{\psi}\|\leqslant\|S^{-1}(\tau_1,\tau_2)\|\Bigg(\|d\|+\\ +\sum_{j=1}^{s}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\|\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},0,\varepsilon)\|ds\Bigg),$$

то для норми $\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)$ одержимо оцінку (10), де

$$c_1=\|S^{-1}(\tau_1,\tau_2)\|\Bigg(\|d\|+\sigma(\tau_2-\tau_1)\times\\ \times\left(0.5(\tau_2+\tau_1)\sum_{i=1}^{s}\beta_i\theta_i+1\right)+\sigma L\Bigg),$$

$$c_2=\sigma\Bigg(0.5\|S^{-1}(\tau_1,\tau_2)\|({\tau_2}^2-{\tau_1}^2)\times\\ \times\sum_{i=1}^{s}\beta_i\theta_i+L\Bigg).$$

4. Позначення й умови. Нехай $G:=[0,L]\times D^r$, $G_1:=G\times T^{ms}$, $f:=(X,Y,g)$. Припустимо, що виконуються наступні умови:

1^0. $f\in\mathbb{C}^2_{a_\Lambda}(G_1,\sigma)$, $f\in\mathbb{C}^1_\tau(G_1,\sigma)$, де сталою σ обмежені норми f та похідних.

2^0. $f\in\mathbb{C}^{mr+1}_{\varphi_\Theta}(G_1,\sigma)$.

3^0. $b_j\in\mathbb{C}^2(G,\beta_j)$, $j=\overline{1,s}$.

4^0. $\omega\in\mathbb{C}^{ms-1}([0,L],\sigma)$ і визначник Вронського $V(\tau)$, побудований за системою функцій $\big\{\omega(\theta_1\tau),\ldots,\omega(\theta_s\tau)\big\}$, відмінний від нуля при $\tau\in[0,L]$.

5^0. Існує єдиний розв'язок задачі (5), (7), який лежить в області D разом із деяким ρ-околом.

Виконання умови 3^0 гарантує незастрягання розв'язку системи рівнянь (1), (2) в околі резонансу, умовою якого в точці $\tau\in\in[0,L]$ є виконання рівності

$$\gamma_k(\tau):=\sum_{j=1}^{s}\theta_j(k_j,\omega(\theta_j\tau))=0,$$

де $k_j\in\mathbb{Z}^m$, $\sum\limits_{j=1}^{s}\|k_j\|\neq0$.

6^0. Припустимо, що матриці

$$S(\tau_0)=I-\sum_{j=1}^{s}\int\limits_{0}^{\tau_0}\frac{\partial X_0(\tau,\overline{a}_\Lambda(\tau,\overline{y}))}{\partial a_{\lambda_j}}\frac{\partial a_{\lambda_j}(\tau,\overline{y})}{\partial\overline{y}}d\tau,$$

і $S(\tau_1,\tau_2)$ — невироджені.

Умова 4^0 дозволяє одержати для осциляційного інтеграла

$$I_k(\tau,\varepsilon)=\int\limits_0^\tau f(z,\varepsilon)\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^z\gamma_k(t)dt\right)dz$$

рівномірну оцінку

$$\|I_k(\tau,\varepsilon)\|\leqslant c_3\left(\sup\|f(t,\varepsilon)\|+\frac{1}{\|k\|}\sup\left\|\frac{df}{dt}\right\|\right),$$

де $c_3>0$ і не залежить від ε і k.

На підставі оцінки осциляційного інтеграла одержується оцінка похибки методу усереднення для розв'язків систем (1), (2) і (5), (6), початкові значення яких збігаються при $\tau = 0$, і має вигляд [4, 5]

$$\|a(\tau) - \overline{a}(\tau)\| + \|\varphi(\tau) - \overline{\varphi}(\tau)\| \leqslant c_4 \varepsilon^{\alpha}. \quad (11)$$

5. Обгрунтування методу усереднення

Теорема. Нехай виконуються умови 1^0–6^0. Тоді для досить малого $\varepsilon_0 > 0$ існує єдиний розв'язок задачі (1)–(4) і для всіх $\tau \in [0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виконується оцінка

$$\begin{aligned}&\|a(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{a}(\tau, \overline{y})\| + \\ &\quad + \|\varphi(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon) - \\ &\quad - \eta(\varepsilon)\| \leqslant c_5 \varepsilon^{\alpha}, \end{aligned} \quad (12)$$

де $\alpha = (rm)^{-1}$, а для функції $\eta(\varepsilon)$ справджується оцінка

$$\|\eta(\varepsilon)\| \leqslant c_6 \varepsilon^{\alpha - 1}.$$

Доведення. Нехай $\big(\overline{a}(\tau), \overline{\varphi}(\tau)\big) := := \big(\overline{a}(\tau, \overline{y}), \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)\big)$ — розв'язок задачі (5), (8) при $\tau \in [0, L]$, $\tilde{a}(\tau) = \overline{a}(\tau, \overline{y} + \mu)$ і $\overline{y} + \mu \in D$. Тоді із рівняння (5) маємо

$$\begin{aligned}&\tilde{a}(\tau) - \overline{a}(\tau) = \mu + \\ &+ \int_0^{\tau} \Big[X_0(z, \overline{a}_{\Lambda}(z, \overline{y} + \mu)) - X_0(z, \overline{a}_{\Lambda}(z, \overline{y})) \Big] dz.\end{aligned}$$

Звідси одержимо

$$\begin{aligned}&\|\tilde{a}(\tau) - \overline{a}(\tau)\| \leqslant \|\mu\| + \\ &\quad + \sigma \sum_{j=1}^{r} \int_0^{\tau} \|\tilde{a}_{\lambda_j}(z) - \overline{a}_{\lambda_j}(z)\| dz.\end{aligned}$$

На підставі інтегральної нерівності [4], яка є узагальненням нерівності Гронуолла – Беллмана, маємо

$$\|\tilde{a}(\tau) - \overline{a}(\tau)\| \leqslant \|\mu\| \exp\left(\sigma \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\right) \tau.$$

Таким чином, для всіх $\tau \in [0, L]$

$$\|\tilde{a}(\tau) - \overline{a}(\tau)\| \leqslant c_7 \|\mu\|, \quad (13)$$

де $c_7 = \exp\left(\sigma L \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i\right)$.

Нескладно одержується і така оцінка

$$\begin{aligned}&\|\overline{\varphi}(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)\| \leqslant \\ &\quad \leqslant \|\xi\| + c_7 r \sigma L \|\mu\|.\end{aligned} \quad (14)$$

Покажемо, що можна знайти таке $\mu \in \mathbb{R}^n$, що розв'язок $a(\tau) = a(\tau, \overline{y} + \mu, \psi, \varepsilon)$ визначений на $[0, L]$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\psi \in \mathbb{R}^m$ і при цьому $a(\tau_0) = \overline{a}(\tau_0)$. Нехай

$$c_7 \|\mu\| \leqslant 0.5\rho, \qquad c_4 \varepsilon^{\alpha} \leqslant 0.5\rho.$$

Тоді, як показано в [4], існує єдиний розв'язок системи (1), (2) з початковими умовами $\overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi$. Далі маємо,

$$\begin{aligned}&\|a(\tau, \overline{y} + \mu, \psi, \varepsilon) - \overline{a}(\tau, \overline{y})\| \leqslant \\ &\quad \leqslant \|a(\tau, \overline{y} + \mu, \psi, \varepsilon) - \overline{a}(\tau, \overline{y} + \mu)\| + \\ &\qquad + \|\overline{a}(\tau, \overline{y} + \mu) - \overline{a}(\tau, \overline{y})\| \leqslant \\ &\quad \leqslant c_4 \varepsilon^{\alpha} + c_7 \|\mu\|.\end{aligned}$$

Із виконання умов (3) і (5) на підставі рівнянь (1) і (4) одержимо

$$\begin{aligned}\mu = &- \int_0^{\tau_0} \Big(X_0(\tau, a_{\Lambda}(\tau)) - \\ &\qquad - X_0(\tau, \overline{a}_{\Lambda}(\tau, \overline{y})) \Big) d\tau - \\ &- \int_0^{\tau_0} \Big(X_0(\tau, \overline{a}_{\Lambda}(\tau, \overline{y} + \mu)) - \\ &\qquad - X_0(\tau, \overline{a}_{\Lambda}(\tau, \overline{y})) \Big) d\tau - \\ &- \int_0^{\tau_0} \tilde{X}(\tau, a_{\Lambda}(\tau), \varphi_{\Theta}(\tau)) d\tau = \\ = &\, R_1 + R_2 + R_3.\end{aligned}$$

Тут

$$\tilde{X}(\tau, a_{\Lambda}, \varphi_{\Theta}) = \sum_{k \neq 0} X_k(\tau, a_{\Lambda}(\tau)) e^{i(k, \varphi_{\Theta})}.$$

На підставі оцінки (13) маємо

$$\|R_1\| \leqslant \sigma \tau_0 r c_4 \varepsilon^{\alpha}.$$

Перетворивши вираз R_2, одержимо

$$R_2 = -S(\tau_0)\mu + R_4(\mu),$$

де для R_4 справджується оцінка

$$R_4(\mu) \leqslant c_8\|\mu\|^2.$$

На підставі оцінки осциляційного інтеграла маємо

$$\|R_3(\varepsilon,\mu)\| \leqslant c_9\varepsilon^\alpha,$$

де $c_9 > 0$ і не залежить від ε і μ.

Отже, для знаходження μ маємо рівняння

$$\mu = \Phi_1(\mu,\varepsilon),$$

$$\text{де } \Phi_1(\mu,\varepsilon) = S^{-1}(\tau_0)(R_1(\varepsilon,\mu) + R_4(\mu) + R_3(\varepsilon,\mu)).$$

Із оцінок для R_1, R_4 і R_3 одержимо

$$\|\Phi_1(\mu,\varepsilon)\| \leqslant c_{10}\varepsilon^\alpha + c_{11}\|\mu\|^2,$$

де $c_{10} = \|S^{-1}(\tau_0)\|(\sigma\tau_0 r c_4 + c_7)\varepsilon^\alpha$,
$c_{11} = \|S^{-1}(\tau_0)\|c_6$.

Нехай $\mu \in \mathbb{R}^n$ таке, що

$$\|\mu\| \leqslant c_{12}\varepsilon^\alpha, \tag{15}$$

$c_{12} = 2c_{10}$ і $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2 = (4c_{10}c_{11})^{-1/2}$. Тоді

$$\|\Phi_1(\mu,\varepsilon)\| \leqslant c_{12}\varepsilon^\alpha$$

і Φ_1 відображає кулю радіуса $c_{12}\varepsilon^\alpha$ в себе при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2]$.

Застосувавши методику оцінок, запропоновану у праці [2] і реалізовану для диференціальних рівнянь із лінійно перетвореним аргументом в [4], одержимо

$$\left\|\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mu}\right\| \leqslant c_{13}\|\mu\| + c_{14}\varepsilon^\alpha \leqslant \frac{1}{2},$$

якщо $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2 = (2(c_1 2c_{13} + c_{14}))^{-1/\alpha}$.

Отже, для довільного $\varepsilon \in (0, \min(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)]$ існує єдине значення $\mu = \mu(\varepsilon)$, тобто єдиний розв'язок $a(\tau) = a(\tau,\overline{y}+\mu(\varepsilon),\psi,\varepsilon)$ рівняння (1) такий, що $a(\tau_0) = a_0$.

Нехай $\overline{\varphi}(\tau) = \overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)$ — розв'язок задачі (6), (8). Знайдемо таке $\xi(\mu,\varepsilon) \in \mathbb{R}^m$, що $\varphi(\tau) = \varphi(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+ +\xi,\varepsilon)$ є розв'язком задачі (2), (4). Із умов (4) і (8) маємо

$$\begin{aligned}
\xi = -S^{-1}(\tau_1,\tau_2) \times \\
\times\Bigg\{ \sum_{j=1}^{s}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \Big[b_j(\tau,a_\Lambda(\tau)) \times \\
\times\big(\varphi_{\theta_j}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi},\varepsilon) - \\
-\overline{\varphi}_{\theta_j}(\tau,\overline{y}+\mu,\psi,\varepsilon)\big) + \\
+\big(b_j(\tau,a_\Lambda(\tau)) - b_j(\tau,\overline{a}_\Lambda(\tau))\big) \times \\
\times\overline{\varphi}_{\theta_j}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi},\varepsilon) + \\
+b_j(\tau,\overline{a}_\Lambda(\tau))\big(\overline{\varphi}_{\theta_j}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi},\varepsilon) - \\
-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)\big)\Big] d\tau + \\
+\int_{\tau_1}^{\tau_2} \Big[\big(g_0(\tau,a_\Lambda(\tau)) - g_0(\tau,\tilde{a}_\Lambda(\tau))\big) + \\
+g_0(\tau,\tilde{a}_\Lambda(\tau)) - g_0(\tau,\overline{a}_\Lambda(\tau)) + \\
+\tilde{g}(\tau,a_\Lambda,\varphi_\Theta)\Big] d\tau \Bigg\} = \\
= -S^{-1}(\tau_1,\tau_2)(R_5 + R_6).
\end{aligned}$$

На підставі нерівностей (10), (11), (13) і (14) маємо

$$\|S^{-1}(\tau_1,\tau_2)R_5(\xi,\mu,\varepsilon)\| \leqslant c_{15}\varepsilon^\alpha + c_{16}\varepsilon^{\alpha-1}.$$

Аналогічно як і при оцінці Φ_1, одержимо

$$\|S^{-1}(\tau_1,\tau_2)R_6(\mu,\xi,\varepsilon)\| \leqslant c_{17}\varepsilon^\alpha.$$

Нехай $\varepsilon \leqslant \varepsilon_3 = c_{16}(c_{15} + c_{17})^{-1}$, $\|\xi\| \leqslant 2c_{16}\varepsilon^{\alpha-1}$. Тоді при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_4 = \min(\varepsilon_2,\varepsilon_3)$

$$\|\Phi_2(\xi,\mu,\varepsilon)\| \leqslant 2c_{16}\varepsilon^{\alpha-1}.$$

Таким же чином, як і при оцінці $\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\xi}$, одержимо для всіх $0 < \varepsilon \leqslant \min(\varepsilon_4,\varepsilon_5)$

$$\left\|\frac{\partial\Phi_2(\xi(\varepsilon),\mu(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\xi}\right\| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Отже, існує єдиний розв'язок системи рівнянь (1), (2) з початковими умовами $\overline{y}+\mu(\varepsilon), \overline{\psi}+\xi(\mu(\varepsilon),\varepsilon)$, який задовольняє умови (3), (4).

Нехай $\varepsilon \leqslant \varepsilon_5$, $\eta(\varepsilon) = c_6\varepsilon^{\alpha-1}$, $c_6 = 2c_{16}$. Тоді для всіх $0 \leqslant \tau \leqslant L$

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon) - \eta(\varepsilon)\| \leqslant \\
&\leqslant \|\varphi(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y} + \mu,\overline{\psi} + \xi,\varepsilon)\|+ \\
&+\|\overline{\varphi}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)-\eta(\varepsilon)\| \leqslant \\
&\leqslant (c_4 + c_7c_{12}r\sigma L)\varepsilon^{\alpha}, \qquad (16)
\end{aligned}$$

Врахувавши оцінки (15) і (16), одержимо оцінку (12), де $c_5 = c_4 + +c_{12}c_7(1 + r\sigma L)$.

6. Приклад. Розглянемо задачу

$$\begin{aligned}
&\frac{da}{d\tau} = 1 + \cos(\varphi - 2\varphi_\theta), \qquad \theta = 0.5 \\
&\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1+2\tau}{\varepsilon}, \qquad \tau \in [0,1], \\
&a(\tau_0) = a_0, \qquad 0 < \tau_0 \leqslant 1 \\
&\int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi(\tau)d\tau = d, \qquad 0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant 1.
\end{aligned}$$

У точці $\tau = 0$ досягається резонанс, оскільки $\gamma(\tau) := \omega(\tau) - \theta\times \times\omega(\theta\tau) = \tau$. Умова 4^0 виконується:

$$\begin{vmatrix} 1+2\tau & 1+\tau \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Усереднена задача для повільної змінної набуває вигляду

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = 1, \qquad \overline{a}(\tau_0) = a_0.$$

З інтегральної умови знаходимо

$$\begin{aligned}
\psi = \overline{\psi} = d(\tau_2 - \tau_1)^{-1} \\
-\big(3(\tau_1+\tau_2) + 2(\tau_1^2+\tau_1\tau_2+\tau_2^2\big)/6\varepsilon.
\end{aligned}$$

Оскільки $a(\tau_0) = \overline{a}(\tau_0)$, то

$$a(0) - \overline{a}(0) = \mu = -\int_0^{\tau_0} \cos\left(\frac{\tau^2}{2\varepsilon} + \psi\right) d\tau.$$

Оцінка похибки для повільної змінної

$$\|a(\tau)-\overline{a}(\tau)\| = \left|\int_{\tau_0}^{\tau} \cos\left(\frac{\tau^2}{2\varepsilon}+\psi\right) d\tau\right| \leqslant c_{18}\sqrt{\varepsilon},$$

одержується на підставі асимптотики інтеграла Френеля [9].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Петришин Р.І., Петришин Я.Р.* Усереднення крайових задач для систем диференціальних рівнянь з повільними та швидкими змінними // Нелінійні коливання. — 1998. — **1,** №1. — С. 51–65.

2. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – К.: Наукова думка, 2004. – 474 с.

3. *Березовська (Краснокутська) І.В.* Усереднення в багаточастотних крайових задачах із лінійно перетвореними аргументами // Нелінійні коливання, 2013. — **16,** №2. — С. 147–156.

4. *Бігун Я.Й.* Існування розв'язку та усереднення багатоточкових крайових задач для багаточастотних систем із лінійно перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. — 2008. — **11,** №4. — С. 462–471.

5. *Петришин Р.І., Бігун Я.Й.* Про усереднення в системах із лінійно перетвореним аргументом в резонансному випадку // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 421. Математика. — Чернівці: Рута, 2008. — С. 84–89.

6. *Benchohra M., Henderson J., Luca R., Ouahab A.* Boundary data smoothness for solutions of second order ordinary differential equations with integral boundary conditions. // Dyn. Syst. Appl. — 2014. — **23**(2). — P. 133–144.

7. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.

8. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975. — 302 с.

9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974, том 2. — 296 с.

УДК 517.983

©2015 р. **В. Герасимов, С. Гефтер, А. Рибалко**

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

НЕЯВНЕ ЛІНІЙНЕ НЕОДНОРІДНЕ ФУНКЦІОНАЛЬНЕ РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ ПОММ'Є В КІЛЬЦІ $\mathbb{Z}[[x]]$

У роботі для довільного цілого числа $b \neq \pm 1$ знайдено критерій існування розв'язку рівняння $b\frac{y(x)-y(0)}{x} + f(x) = y(x)$ з кільця $\mathbb{Z}[[x]]$ формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами та отримано явну формулу для його єдиного розв'язку, що належить цьому кільцю. Результати роботи основані на застосуванні p-адичної топології на кільці $\mathbb{Z}$.

For an arbitrary integer $b \neq \pm 1$ an existence criterion of a solution of the equation $b\frac{y(x)-y(0)}{x} + f(x) = y(x)$ from the ring $\mathbb{Z}[[x]]$ of formal power series with integers coefficients is found in the paper. Moreover, an explicit formula for its unique solution from this ring is obtain. The results of paper are based of using the p-adic topology on the ring $\mathbb{Z}$.

1. Вступ

Нехай b - фіксоване ціле число, $\mathbb{Z}[[x]]$ - кільце формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами і $f \in \mathbb{Z}[[x]]$. Розглянемо наступне функціональне рівняння

$$b \cdot \frac{y(x) - y(0)}{x} + f(x) = y(x). \qquad (1)$$

Ліва частина цього рівняння містить оператор Помм'є

$$\Delta(y)(x) = \frac{y(x) - y(0)}{x}$$

(див., наприклад, [1]), що є коректно визначеним у кільці $\mathbb{Z}[[x]]$: якщо $y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$, тоді $\Delta(y)(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots$. Оператор Δ ще називають оператором лівого зсуву (або the bachward shift operator). Оператор Помм'є знаходить важливі застосування у теорії функцій ([2]-[4]), теорії операторів у просторах голоморфних функцій (див., наприклад, [1], [5]-[7]) та в загальній теорії лінійних операторів [8]). Рівняння (1) будемо називати рівнянням Помм'є. Якщо $b = 1$, тоді, як легко бачити, для будь-якого $y_0 \in \mathbb{Z}$ початкова задача

$$\begin{cases} b \cdot \frac{y(x)-y(0)}{x} + f(x) = y(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (2)$$

має наступний єдиний розв'язок, що належить $\mathbb{Z}[[x]]$:

$$y(x) = \frac{y_0 - xf(x)}{1 - x} = (y_0 - xf(x))(1 + x + x^2 + \ldots).$$

При $b \neq \pm 1$ рівняння (1) є неявним над кільцем цілих чисел. У роботі для довільного цілого $b \neq \pm 1$ знайдено крітерій існування розв'язку початкової задачи (2) з кільця $\mathbb{Z}[[x]]$ (див. теорему 3.3 та наслідок 3.6) та отримано явну формулу для єдиного розв'язку рівняння (1), що належить $\mathbb{Z}[[x]]$ (наслідок 3.5). Важливу роль при цьому відіграє застосування p-адичної топології на кільці цілих чисел (див., наприклад, [9, 10]).

За основними результатами роботи була зроблена доповідь на міжнародній науковій конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування", присвяченій 80-річчю від дня народження В.І.Фодчука [11].

2. Рівняння Помм'є в просторі $\mathbb{Q}[[x]]$ та в кільці $\mathbb{Z}[x]$

В цьому розділі ми розглянемо питання про розв'язки рівняння Помм'є (1) у векторному просторі $\mathbb{Q}[[x]]$ формальних степеневих рядів з раціональними коефіцієнтами та в кільці $\mathbb{Z}[x]$ поліномів з цілими коефіцієнтами.

Випадок простору $\mathbb{Q}[[x]]$ є дуже простим.

Теорема 2.1. *Нехай $b \in \mathbb{Q}$ і $f \in \mathbb{Q}[[x]]$. Тоді для будь-якої початкової умови $y(0) = y_0 \in \mathbb{Q}$ задача (2) має єдиний розв'язок, що* *належить простору* $\mathbb{Q}[[x]]$.

Доведення. Можна вважати, що $b \neq 0$. Оскільки $y(0) = y_0$, то з рівняння (1) ми отримуємо

$$y(x) = \frac{by_0 - xf(x)}{b-x} =$$

$$= \left(y_0 - \frac{x}{b}\cdot f(x)\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)^{-1} =$$

$$= \left(y_0 - \frac{x}{b}f(x)\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{b^n}\right).$$

Таким чином, якщо $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, тоді єдиний розв'язок початкової задачі (2) у вигляді формального степеневого ряду з раціональними коефіцієнтами має наступний явний вигляд:

$$y(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{b^n}\right)y_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{b^{n-k}}\right)x^n.$$

□

Розглянемо тепер випадок, коли f – поліном з цілими коефіцієнтами.

Теорема 2.2. *Нехай* $b \in \mathbb{Z}$, $f \in \mathbb{Z}[x]$ *і* $\deg f = m$. *Тоді рівняння (1) має єдиний поліноміальний розв'язок* $y(x)$ *з цілими коефіцієнтами і* $\deg y = m$.

Доведення. Нехай $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$. Тоді $\triangle(f)(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = a_1 + a_2x + \ldots + a_mx^{m-1}$. Таким чином, $\triangle(f) \in \mathbb{Z}[x]$ і $\deg \triangle(f) = m-1$.

Розглянемо тепер поліном

$$y = f + b\triangle(f) + b^2\triangle^2(f) + \ldots + b^m\triangle^m(f). \quad (3)$$

Ми маємо, що $y \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg y = m$ і

$$b\triangle(y) + f = b\triangle(f) + b^2\triangle^2(f) + \ldots +$$

$$+ b^m\triangle^m(f) + f,$$

оскільки $\triangle^{m+1}(f) = 0$. Таким чином, $b\triangle(y) + f = y$, тобто y є розв'язком рівняння (1). Доведемо єдиність розв'язку з кільця $\mathbb{Z}[x]$. Нехай $b\triangle(y) = y$. Тоді

$$y = b\triangle(y) = b^2\triangle^2(y) = \ldots =$$

$$= b^{m+1}\triangle^{m+1}(y) = 0.$$

Теорему доведено.

З рівності (3) тепер випливає таке твердження.

Наслідок 2.3. *Нехай* $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$ *і* $y_0 \in \mathbb{Z}$. *Тоді початкова задача (2) має розв'язок з кільця* $\mathbb{Z}[x]$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$a_0 + ba_1 + b^2a_2 + \ldots + b^ma_m = y_0, \quad (4)$$

тобто $y_0 = f(b)$.

3. Рівняння Помм'є в кільці $\mathbb{Z}[[x]]$

В цьому розділі ми будемо розглядати основний випадок, коли $f(x)$ – формальний степеневий ряд з цілими коефіцієнтами. Якщо f не є поліномом, то ситуація більш складна і цікава. По-перше, відзначимо, що рівняння (1) взагалі може не мати розв'язку у вигляді формального степеневого ряду з цілими коефіцієнтами.

Теорема 3.1. *Нехай* $b = 2$ *і* $f(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots$ *Тоді рівняння (1), тобто рівняння*

$$2\cdot\frac{y(x)-y(0)}{x} + 1 + x^2 + x^4 + \ldots = y(x)$$

не має розв'язків у вигляді формального степеневого ряду з цілими коефіцієнтами.

Доведення. Нехай $y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$ – розв'язок нашого рівняння з простору $\mathbb{Q}[[x]]$ (див. теорему 2.1). Тоді для коефіцієнтів c_n маємо рекуррентне співвідношення $c_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n - a_n)$, де $a_{2k} = 1$, $a_{2k-1} = 0$ для всіх $k = 0, 1, 2, \ldots$ Звідси

$$|c_{n+1}| \leq \frac{1}{2}(|c_n| + 1) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|c_{n-1}| + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \leq \ldots,$$

звідки

$$|c_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(|c_0|+1) + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}}(|c_0|+1) + 1.$$

Тому існує таке $n_0 \in \mathbb{N}$, що $|c_{n+1}| < 2$ для $n \geq n_0$. Якщо припустити, що $c_{n+1} \in \mathbb{Z}$, отримуємо: $c_n = 0$ або $c_n = \pm 1$ для всіх $n \geq n_0 - 1$. Якщо $c_n = 0$ для деякого n, тоді

$c_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$, тобто n є непарним і $c_{n+1} = 0$. Звідси $c_{n+2} = -\frac{1}{2}a_{n+1} = -\frac{1}{2}$, що неможливо. Нехай тепер $|c_n| = 1$ для всіх $n \geq n_0 - 1$. Тоді для непарного n ми також маємо невірну рівність $|c_{n+1}| = \frac{1}{2}|c_n|$. Таким чином, всі коефіцієнти c_n не можуть бути цілими. □

Зауваження 3.2. *Узагальнюючи міркування з доведення теореми 3.1, можна показати, що рівняння*

$$2 \cdot \frac{y(x) - y(0)}{x} + a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = y(x)$$

не має розв'язків з кільця $\mathbb{Z}[[x]]$ для будь-якого ряду $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$, де $a_n = 0$, або $a_n = 1$, і 0 та 1 зустрічаються серед коефіцієнтів a_n нескінченну кількість разів.

Рівняння (1) може не мати розв'язків з кільця $\mathbb{Z}[[x]]$, але, якщо такий розв'язок існує, то, як правило, він є єдиним.

Теорема 3.2 *Нехай $b \neq \pm 1$. Тоді однорідне рівняння*

$$b \cdot \frac{y(x) - y(0)}{x} = y$$

має тільки нульовий розв'язок у вигляді формального степеневого ряду з цілими коефіцієнтами.

Доведення. Нехай $y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$ – розв'язок однорідного рівняння $b \cdot \frac{y(x)-y(0)}{x} = y$, що належить $\mathbb{Z}[[x]]$. Тоді

$$\frac{y(x) - y(0)}{x} = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots$$

і ми маємо: $bc_1 = c_0$, $bc_2 = c_1$, $bc_3 = c_2, \ldots$ Звідси віпливає, що $c_0 = b^n c_n$ для будь якого n. Тому $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = 0$, тобто $y = 0$.□

Для отримання критерію існування розв'язку рівняння (1) з кільця $\mathbb{Z}[[x]]$ ми будемо використовувати p-адичну топологію на кільці $\mathbb{Z}$.

Нехай p–просте число і $\mathbb{Z}_p$ – кільце цілих p-адичних чисел. На $\mathbb{Z}_p$ ми будемо розглядати стандартну топологію і норму $||\cdot||_p$ (див. [10], [11]). Для нас буде важливим, що збіжність в кільці $\mathbb{Z}_p$ ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ є еквівалентною тому, що $\alpha_n \to 0$ в $\mathbb{Z}_p$.

Наступна теорема є основним результатом роботи.

Теорема 3.3. *Нехай $b \neq 0$, $b \neq \pm 1$ і $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ – формальний степеневий ряд з цілими коефіцієнтами. Рівняння*

$$b \cdot \frac{y(x) - y(0)}{x} + f(x) = y(x)$$

має розв'язок у вигляді формального степеневого ряду з цілими коефіцієнтами тоді і тільки тоді, коли існує таке ціле число c_0, що для всіх простих чисел p, на які ділиться число b, виконується наступна рівність в кільці $\mathbb{Z}_p$:

$$a_0 + a_1b + a_2b^2 + a_3b^3 + \ldots = c_0. \qquad (5)$$

При цьому розв'язок з кільця $\mathbb{Z}[[x]]$ є єдиним і має такий вигляд:

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots,$$

де

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots, \\ c_1 &= a_1 + a_2b + a_3b^2 + \ldots, \\ c_2 &= a_2 + a_3b + a_4b^2 + \ldots, \\ &\cdots \end{aligned} \qquad (6)$$

і всі ряди у правих частинах рівностей (6) збігаються в $\mathbb{Z}_p$, для тих p, що є дільниками числа b.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots$, $c_n \in \mathbb{Z}$ – розв'язок рівняння (1). Тоді для коефіцієнтів c_n ми маємо наступне рекурентне співвідношення:

$$bc_{n+1} + a_n = c_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (7)$$

Розглянемо тепер ряд у лівій частині рівності (5). Якщо b ділиться на просте число p, то $b^n \to 0$ в кільці $\mathbb{Z}_p$. Тому $a_n b^n \to 0$ в $\mathbb{Z}_p$, тобто ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ збігається у кільці $\mathbb{Z}_p$. Знайдемо його суму. З рівності (7) отримуємо:

$$a_0 + a_1b + a_2b^2 + a_3b^3 + \ldots + a_N b^N =$$

$$= c_0 - bc_1 + b(c_1 - bc_2) + b^2(c_2 - bc_3) + \ldots +$$

$$+ b^N(c_N - bc_{N+1}) = c_0 - b^{N+1}c_{N+1}.$$

Оскільки $b^{N+1}c_{N+1} \to 0$ в кільці $\mathbb{Z}_p$, то ми одержуємо рівність (5).

Доведемо тепер *достатність* умови (5). Якщо b ділиться на просте число p, то всі ряди у правих частинах рівності (6) збігаються у кільці $\mathbb{Z}_p$. Оскільки $c_0 \in \mathbb{Z}$ і ряд (5) збігається для всіх p, на які ділиться число b, то можна показати, що суми всіх рядів з рівності (6) є цілими числами. Тепер легко перевірити, що послідовність $\{c_n\}$ задовольняє рекурентне співвідношення (7). Тому степеневий ряд $y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots$ є розв'язком рівняння (1). Єдиність цього розв'язку випливає з теореми 3.2. □

Зауваження 3.4. *Якщо* $f \in \mathbb{Z}[[x]]$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ *і* b *ділиться на* p, *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nb^n$ *збігається в кільці* $\mathbb{Z}_p$ *і його суму можна розглядати як значення* f *у точці* b.

Наслідок 3.5. *Нехай* $b \neq \pm 1$ *і для* $b \neq 0$ *виконана умова (5). Тоді единий розв'язок рівняння (1) з кільця* $\mathbb{Z}[[x]]$ *можна записати в наступній формі*

$$y(x) = f(b) + \sum_{n=1}^{\infty} \triangle^n(f)(b)x^n.$$

З теореми 3.3 випливає твердження, що є аналогом наслідка 2.3 для випадку формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами.

Наслідок 3.6. *Нехай* $f \in \mathbb{Z}[[x]]$, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ *і* $y_0 \in \mathbb{Z}$. *Тоді початкова задача (2) має розв'язок з кільця* $\mathbb{Z}[[x]]$ *тоді і тільки тоді, коли для всіх простих чисел* p, *на які ділиться число* b, *виконується наступна рівність в кільці* $\mathbb{Z}_p$:

$$a_0 + a_1b + a_2b^2 + a_3b^3 + \ldots = y_0, \qquad (8)$$

тобто $y_0 = f(b)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Нагнибіда М.І.*Оператори Помм'є в просторі аналітичних у крузі функцій. — Киев: Інститут математики НАН України, 1997. — 125 с.

2. *Pommies M.* Sur les zeros des reste successifs des series de Taylor. // Acad. Sci. Univ. Toulouse – 1960. – **250**, N7. – pp. 1168–1170.

3. *Pommies M.* Sur les restes successifs des series de Taylor // C. R. Acad. Sci. – 1960. – **250**, N15. – pp. 2669—2671.

4. *Лінчук С.С.* Про наукову спадщину професора Миколи Івановича Нагнибіди // Математичний вісник Наукового Товариства ім. Шевченка: [зб. наук. пр.].— 2009. – **6**. – с. 15–34.

5. *Линчук Н.Е.* Представления коммутантов оператора Поммье и их приложения // Матем. заметки. – 1988. – **44**, N6. – с. 794–802.

6. *Dimovski I.N., Hristov V.Z.* Commutants of the Pommiez operator // Int. J. Math. and Math. Science. – 2005. – **44**. – p. 1239—1251.

7. *Linchuk Yu.S.* Cyclical elements of operators which are left-inverses to multiplication by an independent variable // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2006. **12**, N4. – p. 384—388.

8. *Douglas R.G., Shapiro H.S., and Shields A.L.* Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1970. **20**, N1. – 37—76.

9. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. — М.: Наука, 1985.— 504 с.

10. *Ганюшкін О.Г.* Вступ до алгебри. — Київ, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет 2011. — 176 с.

11. *Герасимов В., Гефтер С., Рибалко А.* Неявне лінійне неоднорідне функціональне рівняння з оператором Помм'є в кільці $\mathbb{Z}[[x]]$ // Матеріали міжнародної наукової конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування присвяченої 80-річчю від дня народження професора В.І. Фодчука, 28–30 вересня 2016 року.— Чернівці: 2016. – с. 33–34.

УДК 517.9

©2015 р. В.В. Гоцуленко

Інститут технічної теплофізики НАН України

РОЗРИВНІ І ХАОТИЧНІ АВТОКОЛИВАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Одержано умови існування розривних періодичних і хаотичних автоколивальних розв'язків для нелінійної крайової задачі для хвильового рівняння. Показано, що виникнення даних розв'язків еквівалентно наявності циклів або хаотичних атракторів у відповідному одновимірному рекуррентному відображенні.

The obtained conditions for the existence of discontinuous periodic and chaotic self-oscillatory solutions for a nonlinear boundary value problem for the wave equation. It is shown that the appearance of the data, the solution is equivalent to the existence of cycles or chaotic attractors in the corresponding one-dimensional recurrence map.

Вступ. Виникнення розривних (релаксаційних) автоколивальних розв'язків дисипативних динамічних систем зазвичай асоціюється з вивченням їх асимптотик при $\varepsilon \to 0$, де малий параметр $\varepsilon > 0$ знаходиться множником при головній похідній. Класичним таким прикладом є сингулярно збурена система рівнянь осцилятора Ван дер Поля [1]

$$\frac{dx}{dt} = -y,\ \varepsilon\frac{dy}{dt} = x - \frac{y^3}{3} + y.$$

Однак збудження розривних автоколивань в дисипативній динамічній системі може відбуватися і при відсутності постійного малого параметра $\varepsilon > 0$. В [2] розглядалися умови виникнення розривних періодичних автоколивань в неявно сингулярно збурених динамічних системах

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x, y\right),\ \frac{dy}{dt} = g\left(x, z\right),$$

де $y = \varphi\left(z\right)$ – неперервно диференційована функція, що не має однозначної оберненої функції.

Мабуть вперше, О. А. Вітт [3] при дослідженні розривних (релаксаційних) автоколивань в системі телеграфних рівнянь за допомогою автомодельных розв'язків звів рішення даної задачі до розгляду певних одновимірних рекурентних відображень. Однак у той час теорія динамічного хаосу [4] ще не була відкрита, і таким чином, хаотичні розв'язки крайових задач для гіперболічних рівнянь, які породжуються нерегулярними аттракторами відповідних одновимірних рекурентних відображень не були знайденими.

В монографії [5] розглянуто крайові задачі для рівнянь з частинними похідними, які можна звести до різницевих або диференціально-різницевих рівнянь.

Постановка задачі та формалізація одержаних результатів. В даній роботі розглядаються умови виникнення розривних періодичних або хаотичних автоколивань в хвильовому рівнянні

$$u_{xx}\left(x, t\right) = a^2 u_{tt}\ \forall\left(x, t\right) \in \Omega = (0;\ell)\times\mathbb{R}, \quad (1)$$

яке доповнюється граничними умовами:

$$u\left(0, t\right) = 0;\ \int\limits_0^\ell u_t\left(x, t\right)dx = \Psi\left[u\left(\ell, t\right)\right], \quad (2)$$

де $a = \text{const}$, $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – довільна неперервна функція.

Добре відомо, що автоколивання від початкових умов не залежать (принаймні в досить малої околиці відповідного граничного циклу). Тому надалі ми їх явно не конкретизуємо. Також зазначимо, що хвильове рівняння з нульовими граничними умовами є консервативною системою. Завдяки саме граничній умові при $x = \ell$ дана динамічна система (1)–(2) є дисипативною.

Надалі розв'язки задачі (1)–(2) розуміються в слабкому сенсі як елементи простору $L^{\infty}(\Omega)$.

Означення. Функцію $u \in L^{\infty}(\Omega)$ будемо називати слабким розв'язком задачі (1) – (2), якщо виконуються варіаційні рівності:

$$\forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)\,,\ \forall \psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$$

$$\iint\limits_{\Omega} u(x,t)\left[a^2\varphi_{xx}(x,t) - \varphi_{tt}(x,t)\right]dxdt = 0,$$

$$\iint\limits_{\Omega} u(x,t)\,\psi'(t)dxdt = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi\left[u(\ell,t)\right]\psi(t)\,dt.$$

Теорема. Введемо до розгляду відображення

$$Y = \mathcal{F}[X] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (3)$$

яке задається параметрично

$$Y = \frac{a^{-1}\Psi[u] - u}{2},\ X = \frac{a^{-1}\Psi[u] + u}{2}\ \forall u \in \mathbb{R}.$$

Тоді будь який стійкий m – цикл $(m > 1)$ даного відображення

$$\mathcal{C}_m\left\{F_1^{\infty}, F_2^{\infty} = \mathcal{F}(F_1^{\infty}), \ldots, F_m^{\infty} = \mathcal{F}(F_1^{\infty})\right\}$$

породжує орбітально асимптотично стійкий періодичний розв'язок задачі (1)–(2), який визначається співвідношенням

$$u(x,t) = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F\left(t + \frac{x}{a}\right), \qquad (4)$$

де функція F являється mT – періодичною і при $0 \le t < mT$ $(T = 2a\ell)$ задається рівністю

$$F(t) = \sum_{k=0}^{m-1} F_{k+1}^{\infty}\chi_{[kT;(k+1)T)}(t)\,. \qquad (5)$$

У випадку, коли відображення (3) має хаотичний атрактор

$$\mathcal{C}_{\infty} = \left\{F_k^{\infty} : F_{k+1}^{\infty} = \mathcal{F}\left[F_k^{\infty}\right] \forall k \ge 1\right\},$$

наприклад атрактор Фейгенбаума, то він породжує хаотичний автоколивальний розв'язок задачі (1)–(2), який задається формулою (4), де функція $F(t)$ задається рівністю

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} F_{k+1}^{\infty}\chi_{[kT;(k+1)T)}(t)\,, \qquad (6)$$

та при $k \le 1$ покладено $F_{k-1}^{\infty} = \mathcal{F}\left[F_k^{\infty}\right]$.

Доведення. Введемо до розгляду нову змінну $i(x,t) = \int\limits_0^x u_t(x,t)\,dx$ за допомогою якої хвильове рівняння (1) може бути представлено у вигляді системи телеграфних рівнянь першого порядку

$$i_x - u_t = 0,\ u_x + \frac{1}{a^2}i_t = 0. \qquad (7)$$

Відповідно граничні умови (2) запишуться у наступному вигляді

$$u(0,t) = 0,\ i(\ell,t) = \Psi\left[u(\ell,t)\right]. \qquad (8)$$

Неважко перевірити, що система рівнянь (7) допускає автомодельний розв'язок

$$u(x,t) = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F\left(t + \frac{x}{a}\right), \qquad (9)$$

$$i(x,t) = a\left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) + F\left(t + \frac{x}{a}\right)\right], \qquad (10)$$

де F – довільна кусково - неперервна функція. Зазначимо також, що при цьому перша гранична умова з (8) автоматично виконується. Підставляючи співвідношення (9) – (10) в другу граничну умову (7), одержується наступне рівняння

$$\alpha + \beta = a^{-1}\Psi\left[\alpha - \beta\right], \qquad (11)$$

де $\alpha = F(t - \ell/a)$, $\beta = F(t + \ell/a)$. За теоремою про неявну функцію співвідношення (11) допускає явне подання $\beta = \mathcal{F}[\alpha]$.

Отримане функціональне рівняння дає можливість визначати значення функції F в момент часу $t + T$, якщо відомо її значення в момент часу t:

$$F(t+T) = \mathcal{F}\left[F(t)\right],\ T = 2\ell/a. \qquad (12)$$

Позначимо через $\mathcal{K}(\mathbb{R},T)$ клас всіх функцій $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ кусково - постійних на кожному інтервалі $I_k = (kT;(k+1)T)$, $k \in \mathbb{Z}$ дійсної вісі $\mathbb{R}$. Звуження функціонального рівняння (12) на даний клас функцій $\mathcal{K}(\mathbb{R},T)$ призводить до розгляду одновимірного рекурентного відображення:

$$F_{n+1} = \mathcal{F}\left[F_n\right],\ n \in \mathbb{Z}. \qquad (13)$$

Припустимо, що відображення (13) має стійкий m – цикл $\mathcal{C}_m\left\{F_1^\infty, F_2^\infty, \ldots, F_m^\infty\right\}$. Перевіремо, що в даному випадку формули (4) – (5) задають орбітально стійкий, в сенсі наведеного вище означення, розв'язок задачі (1) – (2). Дійсно, в даному випадку кусково - постійна періодична функція (5) є розв'язком функціонального рівняння (12). Отже підставляючи (5) в формули (9) – (10), одержується тотожнє виконання рівності $i\left(\ell,t\right) = \Psi\left[u\left(\ell,t\right)\right]\ \forall t \in \mathbb{R}$. Розглядаючи похідну $u_t(x,t)$ в сенсі розподілів, друга варіаційна рівність з означення може бути записана у вигляді

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\left[\int\limits_{0}^{\ell} u_t dx\right] - \Psi\left[u\left(\ell,t\right)\right]\right)\psi\left(t\right)dt = 0.$$

Однак підинтигральний вираз в дужках, в нових позначеннях, співпадає з виразом $i\left(\ell,t\right) - \Psi\left[u\left(\ell,t\right)\right]$, який тотожно дорівнює нулю. Далі, для будь- якої кусково - неперервної функції F мають місце рівності

$$\iint\limits_{\Omega} F\left(t - \tfrac{x}{a}\right)\left[a^2\varphi_{xx} - \varphi_{tt}\right]dxdt =$$
$$= a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F\left(z\right)\left[\varphi_{zz} - \varphi_{tt}\right]dzdt,$$

$$\int F\left(t + \tfrac{x}{a}\right)\left[a^2\varphi_{xx} - \varphi_{tt}\right]dxdt =$$
$$= -a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F\left(z\right)\left[\varphi_{zz} - \varphi_{tt}\right]dzdt,$$

які одержуються шляхом заміни змінних $\left\{z = t - \frac{x}{a}, t = t\right\}$ відповідно в першому, та $\left\{z = t + \frac{x}{a}, t = t\right\}$ другому інтегралах. Таким чином, перша рівність з означення розв'язку також виконується.

Орбітальна асимптотична стійкість побудованого розв'язку є наслідком стійкості відповідного m – циклу $\mathcal{C}_m$ відображення $\mathcal{F}$.

У випадку, коли відображення (13) має хаотичний атрактор $\mathcal{C}_\infty$, рівність (6) визначає кусково - постійну, обмежану функцію $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка за побудовою задовольняє функціональне рівняння (12). За повною аналогією, як у попередньому випадку, перевіряється, що формули (4), (6) визначають узагальнений розв'язок задачі (1) – (2).

Приклади. Розглянемо задачу (1) – (2), де відображення $u \to \Psi\left[u\right]$ задається параметрично ($t \in \mathbb{R}$)

$$u = t\left(a + 1 - t\right), \Psi\left[u\right] = a^{-1}t\left(a - 1 + t\right).$$

Неважко перевірити, що в даному випадку відображення (3) являється логістичним з параметром a^{-1}. Таким чином, згідно з теоремою Фейгейнбаума [4], дане відображення при $a \le a^* \approx 0.2802$ має неперіодичні траєкторії, що відповідають режиму детермінованого хаоса, а при $a > a^*$ має цикли періодів 2^n, де $n \to \infty$, при $a \to a^* + 0$.

Тепер розглянемо відображення Ψ, що задається формулами ($X_0 < X_1 < X_2$)

$$u = X - Y,\ \Psi\left[u\right] = a\left(X + Y\right), \text{ де}$$

$$Y = \begin{cases} \frac{X_2 - X_1}{X_1 - X_0}\left(X - X_0\right) + X_1,\ X_0 \le X \le X_1 \\ \frac{X_2 - X_0}{X_2 - X_1}\left(X_1 - X\right) + X_2,\ X_1 < X \le X_2 \end{cases}$$

Нескладно перевірити, що в даному випадку відображення (3) має цикл періоду три $\mathcal{C}_3 = \left\{X_0, X_1, X_2\right\}$. Таким чином, за теоремою Лі та Йорке [4] дане відображення має континуум неперіодичних траєкторій, які породжують хаотичні розв'язки задачі (1) – (2). Також за теоремою О. М. Шарковського відображення (3) має безліч циклів, періоди яких підпорядковуються так званому порядку Шарковського [5], та які породжують розривні періодичні розв'язки задачі (1) – (2).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н.* Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978. — 392 с.

2. *Гоцуленко В.В.* Автоколебания в неявно сингулярно возмущенных динамических системах на плоскости // Нелинейная динамика. – 2014. – **10 (2)**. – С. 157-175.

3. *Витт А.А.* К теории скрипичной струны // Журнал технической физики. – 1936. – **6 (9)**. – С. 1459-1479.

4. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. — М.: Физматлит, 2001. — 296 с.

5. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — К.: Наук. думка, 1986. — 280 с.

УДК 517.929

©2015 р. А.Б. Дорош, І.М. Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Методом стискаючих відображень встановлено достатні умови існування розв'язку крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу.

Sufficient conditions for boundary value problem solution existence for neutral integral-differential equations are obtained using the contraction mapping principle.

1. Вступ

Диференціальні та інтегро-диференціальні рівняння з аргументом, що відхиляється, описують багато прикладних задач в електродинаміці, теорії автоматичного керування, хіміко-технологічних процесах та ін. Значний інтерес представляють крайові задачі для таких рівнянь, що виникають у задачах оптимального керування системами із запізненням, у задачах балістики, екології тощо.

Існування та єдиність розв'язків крайових задач для рівнянь із запізненням вивчались у роботах [1-3]. Крайові задачі для диференціальних рівнянь нейтрального типу досліджувались у працях [4-5] із використанням методу стискаючих відображень та топологічних методів.

У даній роботі встановлено достатні умови існування розв'язку крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу, які продовжують дослідження роботи [6].

2. Позначення та постановка задачі

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = f\Big(x, y(x), y(x-\tau_0(x)), y'(x), y'(x-\tau_1(x)), y''(x-\tau_2(x))\Big) + \int_a^b g\Big(x, s, y(s), y(s-\tau_0(s)), y'(s), y'(s-\tau_1(s)), y''(s-\tau_2(s))\Big) ds, \quad (1)$$

$$y^{(i)}(x) = \varphi^{(i)}(x), \quad i = 0,1,2, \quad x \in [a^*; a], \quad y(b) = \beta, \quad (2)$$

де запізнення $\tau_0(x), \tau_1(x), \tau_2(x)$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a,b]$, $\varphi(x)$ – задана двічі неперервно-диференційовна функція на $[a^*; a]$, $\beta \in R$,

$$a^* = \max\Big\{\min_{x\in[a;b]}(x-\tau_0(x)), \min_{x\in[a;b]}(x-\tau_1(x)), \min_{x\in[a;b]}(x-\tau_2(x))\Big\}.$$

Нехай функції $f(x, u_0, u_1, v_0, v_1, w)$, $g(x, s, u_0, u_1, v_0, v_1, w)$ неперервні за сукупністю змінних в області $G = [a,b]\times G_1^2 \times G_2^2 \times G_3$ та $Q = [a,b]\times G$, де $G_1 = \{u \in R: |u| < P_1\}$, $G_2 = \{v \in R: |v| < P_2\}$, $G_3 = \{w \in R: |w| < P_3\}$, P_1, P_2, P_3 – додатні сталі.

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x), \tau_2(x)$:

$$E_1 = \big\{x_i \in [a,b]: x_i - \tau_1(x_i) = a, \ i = 1,2,...\big\},$$

$$E_2 = \big\{x_j \in [a,b]: x_0 = a, \ x_{j+1} - \tau_2(x_{j+1}) = x_j, \ j = 1,2,...\big\},$$

$$E = E_1 \cup E_2.$$

Нехай функції $\tau_1(x), \tau_2(x)$ такі, що множини E_1, E_2 є скінченними. Точки множини E занумеруємо в порядку їхнього зростання:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_k < b.$$

Введемо такі позначення:

$$P=\sup\left\{\left|f\left(x,u,u_1,v,v_1,w\right)\right|+\right.$$

$$\left|\int\limits_a^b g(x,s,u,u_1,v,v_1,w)ds\right|:\ |u_i|<P_1,$$

$$\left.|v_i|<P_2,\ i=0,1,\ |w|<P_3,\ x,s\in[a,b]\right\},$$

$$J=[a^*,a],I=[a,b],I_1=[a,x_1],I_2=[x_1,x_2],$$
$$\ldots,\ I_k=\left[x_{k-1},x_k\right],\ I_{k+1}=\left[x_k,b\right].$$

Означимо множину функцій

$$B\left(J\cup I\right)=\left\{y\left(x\right):\right. \tag{3}$$

$$y(x)\in\Big(C(J\cup I)\cap\big(C^1(I)\big)\cap\Big(\bigcup_{j=1}^{k+1}C^2(I_j)\Big)\Big),$$

$$\left.|y\left(x\right)|\le P_1,\ |y'\left(x\right)|\le P_2,\ |y''\left(x\right)|\le P_3\right\}.$$

Функцію $y=y\left(x\right)$ із простору $B\left(J\cup I\right)$ називатимемо розв'язком задачі (1)-(2), якщо вона задовольняє рівняння (1) на $[a;b]$ (за можливим винятком точок множини E) і крайові умови (2).

3. Існування розв'язку

Введемо у просторі $B\left(J\cup I\right)$ норму

$$\|y\|_B=\max\left\{\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in J\cup I}\left|y\left(x\right)\right|,\right. \tag{4}$$
$$\frac{2}{b-a}\max\Big(\max_{x\in J}\left|y'\left(x\right)\right|,\max_{x\in I}\left|y'\left(x\right)\right|\Big)$$
$$\max\Big(\max_{x\in J}\left|y''\left(x\right)\right|,\max_{x\in I_1}\left|y''\left(x\right)\right|,\ldots,$$
$$\left.\max_{x\in I_{k+1}}\left|y''\left(x\right)\right|\Big)\right\}.$$

Простір $B\left(J\cup I\right)$ із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (1)-(2) еквівалентна такому інтегральному рівнянню [1, 5]:

$$y\left(x\right)=\int\limits_{a^*}^b\Big[f\Big(s,y\left(s\right),y\left(s-\tau_0\left(s\right)\right),y'\left(s\right),$$

$$y'\left(s-\tau_1\left(s\right)\right),y''\left(s-\tau_2\left(s\right)\right)\Big)+ \tag{5}$$

$$+\int\limits_a^b g\Big(s,\xi,y\left(\xi\right),y\left(\xi-\tau_0\left(\xi\right)\right),y'\left(\xi\right),$$

$$y'\left(\xi-\tau_1\left(\xi\right)\right),y''\left(\xi-\tau_2\left(\xi\right)\right)\Big)d\xi\Big]\bar G\left(x,s\right)ds+$$

$$l\left(x\right),x\in J\cup I,$$

де $\bar G\left(x,s\right)=\begin{cases}G\left(x,s\right),\ x,s\in I,\\ 0,\ x,s\notin I,\end{cases}$

$$l(x)=\begin{cases}\varphi\left(x\right),\ x\in J,\\ \frac{\beta-\varphi(a)}{b-a}\left(x-a\right)+\varphi\left(a\right),\ x\in I,\end{cases}$$

а $G\left(x,s\right)$ – функція Гріна для такої крайової задачі:

$$y''\left(x\right)=0,x\in I,y\left(a\right)=y\left(b\right)=0.$$

Зазначимо, що, не зменшуючи загальності, можна вважати крайові умови (2) нульовими. У протилежному випадку, лінійна заміна

$$z\left(x\right)=y\left(x\right)-\psi\left(x\right),$$

де $\psi\left(x\right)=\begin{cases}\varphi\left(x\right),\ x\in\left[a^*,a\right],\\ \frac{\varphi(a)(b-x)+\beta(x-a)}{b-a},\ x\in\left[a,b\right],\end{cases}$ приводить до крайової задачі типу (1)-(2) з нульовими крайовими умовами

$$y^{(i)}=0,\ x\in\left[a^*,a\right],i=0,1,2,\ y\left(b\right)=0. \tag{6}$$

Визначимо оператор T, що діє в просторі $B\left(J\cup I\right)$, формулою

$$\left(Ty\right)\left(x\right)=\int\limits_{a^*}^b\Big[f\Big(s,y\left(s\right),y\left(s-\tau_0\left(s\right)\right),y'\left(s\right),$$

$$y'\left(s-\tau_1\left(s\right)\right),y''\left(s-\tau_2\left(s\right)\right)\Big)+ \tag{7}$$

$$+\int\limits_a^b g\Big(s,\xi,y\left(\xi\right),y\left(\xi-\tau_0\left(\xi\right)\right),y'\left(\xi\right),$$

$$y'\left(\xi-\tau_1\left(\xi\right)\right),y''\left(\xi-\tau_2\left(\xi\right)\right)\Big)d\xi\Big]\bar G\left(x,s\right)ds+$$

$$+l\left(x\right),\ x\in J\cup I.$$

Тоді

$$(Ty)'(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\Big[f\Big(s,y(s),y(s-\tau_0(s)),y'(s),$$
$$y'(s-\tau_1(s)),y''(s-\tau_2(s))\Big)+ \tag{8}$$
$$+\int\limits_a^b g\Big(s,\xi,y(\xi),y(\xi-\tau_0(\xi)),y'(\xi),$$
$$y'(\xi-\tau_1(\xi)),y''(\xi-\tau_2(\xi))\Big)d\xi\Big]\bar{G}'_x(x,s)\,ds+$$
$$+l'(x),\ x\in J\cup I,$$

$$(Ty)''(x)=f\Big(s,y(s),y(s-\tau_0(s)),y'(s),$$
$$y'(s-\tau_1(s)),y''(s-\tau_2(s))\Big)+ \tag{9}$$
$$+\int\limits_a^b g\Big(s,\xi,y(\xi),y(\xi-\tau_0(\xi)),y'(\xi),$$
$$y'(\xi-\tau_1(\xi)),y''(\xi-\tau_2(\xi))\Big)d\xi+$$
$$+l''(x),\ x\in J\cup I.$$

Теорема 1. *Нехай справджуються такі припущення:*

1) $\max\Big\{\max\limits_{x\in J}|\varphi(x)|,\ \frac{(b-a)^2}{8}P+\max(|\varphi(a)|,|\gamma|)\Big\}\leq P_1,$

2) $\max\Big\{\max\limits_{x\in J}|\varphi'(x)|,\ \frac{b-a}{2}P+\Big|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\Big|\Big\}\leq P_2,$

3) $\max\Big\{\max\limits_{x\in J}|\varphi''(x)|,\ P\Big\}\leq P_3,$

4) *функції* $f(x,u_0,u_1,v_0,v_1,w)$, $g(x,s,u_0,u_1,v_0,v_1,w)$ *задовольняють умову Ліпшиця по змінних* $u_i,v_i,i=\overline{0,1},w$ *зі сталими* $L_j,M_j,\ j=\overline{1,5}$ *в* G *та* Q,

5) $\frac{(b-a)^2}{8}\sum\limits_{j=1}^{2}\Big(L_j+(b-a)M_j\Big)+\frac{b-a}{2}\sum\limits_{j=3}^{4}\Big(L_j+(b-a)M_j\Big)+L_5+(b-a)M_5<1.$

Тоді існує єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(2) в $B(J\cup I)$.

Доведення. Для функції Гріна має місце співвідношення [5]

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{(s-a)(x-b)}{b-a}, & a\leq s\leq x\leq b,\\ \frac{(x-a)(s-b)}{b-a}, & a\leq x\leq s\leq b,\end{cases}$$

і правильні такі оцінки

$$\int\limits_a^b|G(x,s)|\,ds\leq\frac{(b-a)^2}{8}, \tag{10}$$
$$\int\limits_a^b\Big|G'_x(x,s)\Big|\,ds\leq\frac{b-a}{2}.$$

Якщо умови 1)-3) та нерівності (10) справджуються, тоді оператор T відображає простір $B(J\cup I)$ у себе.

Нехай $y_1,y_2\in B(J\cup I)$. Враховуючи умову 4) та оцінки (10), одержуємо:

$$\Big|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\Big|\leq$$
$$\leq\int\limits_{a^*}^{b}\Big[(L_1+L_2)\max_{x\in J\cup I}|y_1(x)-y_2(x)|+$$
$$+(L_3+L_4)\max\Big\{\max_{x\in I}\Big|y_1'(x)-y_2'(x)\Big|,$$
$$\max_{x\in J}\Big|y_1'(x)-y_2'(x)\Big|\Big\}+$$
$$+L_5\max\Big\{\max_{x\in J}\Big|y_1''(x)-y_2''(x)\Big|,$$
$$\max_{x\in I_1}\Big|y_1''(x)-y_2''(x)\Big|,\ldots,$$
$$\max_{x\in I_{k+1}}\Big|y_1''(x)-y_2''(x)\Big|\Big\}+$$
$$+(b-a)(M_1+M_2)\max_{x\in J\cup I}|y_1(x)-y_2(x)|+$$
$$+(b-a)(M_3+M_4)\max\Big\{\max_{x\in I}\Big|y_1'(x)-y_2'(x)\Big|,$$
$$\max_{x\in J}\Big|y_1'(x)-y_2'(x)\Big|\Big\}+$$
$$+M_5(b-a)\max\Big\{\max_{x\in J}\Big|y_1''(x)-y_2''(x)\Big|,$$

$$\max_{x\in I_1}\left|y_1''(x)-y_2''(x)\right|,\ldots,$$

$$\left.\left.\max_{x\in I_{k+1}}\left|y_1''(x)-y_2''(x)\right|\right\}\right]$$

$$\times\bar{G}(x,s)\,ds\le$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{8}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\big(L_1+L_2+\right.$$

$$+(b-a)(M_1+M_2)\big)+$$

$$+\frac{b-a}{2}\big(L_3+L_4+(b-a)(M_3+M_4)\big)+$$

$$\left.+L_5+(b-a)M_5\right]\|y_1-y_2\|_B,$$

$$\left|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\right|\le$$

$$\le\frac{b-a}{2}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\big(L_1+L_2+\right.$$

$$+(b-a)\big(M_1+M_2\big)\big)+$$

$$+\frac{b-a}{2}\big(L_3+L_4+(b-a)(M_3+M_4)\big)+$$

$$\left.+L_5+(b-a)M_5\right]\|y_1-y_2\|_B,$$

$$\left|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\right|\le$$

$$\le\left[\frac{(b-a)^2}{8}\big(L_1+L_2+(b-a)\big(M_1+M_2\big)\big)+\right.$$

$$+\frac{b-a}{2}\big(L_3+L_4+(b-a)(M_3+M_4)\big)+$$

$$\left.+L_5+(b-a)M_5\right]\|y_1-y_2\|_B.$$

Виходячи із одержаних оцінок та означення норми в просторі $B(J\cup I)$, маємо

$$\|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\|_B\le \tag{11}$$

$$\le\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{j=1}^{2}(L_j+(b-a)M_j)+\right.$$

$$+\frac{b-a}{2}\sum_{j=3}^{4}(L_j+(b-a)M_j)+$$

$$\left.+L_5+(b-a)M_5\right]\|y_1-y_2\|_B.$$

Із нерівності (11), при виконанні умови 5), дістаємо, що оператор T є стискаючим у просторі $B(J\cup I)$ і має єдину нерухому точку в цьому просторі. Отже, крайова задача (1)-(2) має єдиний розв'язок у $B(J\cup I)$. Теорему доведено.

Зауваження. Ітераційна схема знаходження наближеного розв'язку крайової задачі (1)-(2) за допомогою кубічних сплайнів дефекту 2 досліджена в роботі [7].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Grim L.J., Schmitt K.* Boundary Value Problems for Delay Differential Equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – **74**, N5. – P. 997-1000.
2. *Лучка А.Ю.* О краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Дифференциально-функциональные и разностные уравнения. — К.: Ін-т математики АН УРСР, 1981. — С. 35-56.
3. *Athanassiadou E.S.* On the Existence and Uniqueness of Solutions of Boundary Value Problems for Second Order Functional Differential Equations // Mathematica Moravica. – 2013. – **17**, N1. – P. 51-57.
4. *Biga A., Gaber R.* Existence, Uniqueness and Approximation for the Solution of a Second Order Neutral Differential Equation With Delay in Banach Spaces // Mathematica. – 2007. – **49**, N2. – P. 117-130.
5. *Каменский Т.А., Мышкис А.Д.* Краевые задачи для нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Дифференц. уравнения. – 1972. – **8**, N12. – С. 2171-2179.
6. *Cherevko I., Dorosh A.* Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations // J. Numer. Anal. Approx. Theory. – 2016. – **44**, N2. – P. 154-165.
7. *Настасьева Н.П., Черевко І.М.* Наближений метод розв'язування крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу // Математичні студії. – 1998. – 10, № 2. – С. 147-–152.

УДК 517.956.4

©2016 р. В.С. Дронь, С.Д. Івасишен

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Львів

ВЛАСТИВОСТІ ОБ'ЄМНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ

Розглядається задача Коші для виродженого параболічного рівняння типу Колмогорова довільного порядку із залежними лише від часової змінної t коефіцієнтами. Встановлюються властивості відповідного такій задачі об'ємного потенціалу в просторах Гельдера зростаючих при $|x| \to \infty$ функцій. З цих властивостей випливає коректна розв'язність задачі Коші з однорідними початковими умовами.

A Cauchy problem for degenerate parabolic equation of Kolmogorov type of arbitrary order with dependent on only time-variable t coefficients is considered. Properties of a volume potential which corresponding to the problem are established in Hölder spaces of increased as $|x| \to \infty$ functions. From these properties a well-posedness of the Cauchy problem with homogeneous initial conditions is implied.

Вступ. Розглядатимемо одновимірну часову змінну t і n-вимірну просторову змінну x, яка складається з груп змінних $x_j := (x_{j1}, ...x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, де $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 0$, $n = n_1 + n_2 + n_3$. Об'єктом дослідження в цій статті є задача Коші вигляду

$$\Big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{|k_1|\leq 2b} a_{k_1}(t)\partial_{x_1}^{k_1}\Big)\times$$

$$\times u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (1)$$

$$u(t,x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (2)$$

де b – задане натуральне число, $\Pi_{(0,T]} := (0,T] \times \mathbb{R}^n$, T – додатне число. Припускається, що коефіцієнти a_{k_1}, $k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$, $|k_1| \leq 2b$, є неперервними комплекснозначними функціями на $[0,T]$ і такими, що диференціальний вираз $\partial_t - \sum\limits_{|k_1|\leq 2b} a_{k_1}(t)\partial_{x_1}^{k_1}$ рівномірно на $[0,T] \times \mathbb{R}^{n_1}$ параболічний за Петровським.

Якщо $n_3 \geq 1$, то рівняння (1) вироджується за двома групами змінних x_2 і x_3. Коли $n_3 = 0$, а $n_2 \geq 1$, то є виродження за однією групою змінних x_2. У випадку $n_2 = n_3 = 0$ рівняння (1) невироджене.

Для рівняння (1) існує фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) G, детальні властивості якого наведено в [1]. Функція G породжує об'ємний потенціал з густиною f вигляду

$$u(t,x) := \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \qquad (3)$$

Для випадку, коли рівняння (1) 2-го порядку, тобто $b = 1$, в [1] досліджувались властивості функції (3) в припущенні локальної гельдеровості й експоненціального зростання при $|x| \to \infty$ функції f, у [2] з'ясовувався зв'язок гельдерівських властивостей і поведінки при $|x| \to \infty$ густини f і функції u та її похідних. Тут ми досліджуємо аналогічні властивості (3) для рівняння (1) довільного порядку $2b$.

1. Означення норм і просторів. Користуватимемось такими позначеннями: $M := \{1, 2, 3\}$; $N := (n_1 + (2b+1)n_2 + (4b+1)n_3)/(2b)$, $N_1 := n_1/(2b)$, $N_2 := (n_1 + (2b+1)n_2)/(2b)$; $q := 2b/(2b-1)$; $\overline{x}_{1j}(t) := x_{1j}$, $j \in \{1, ..., n_1\}$; $\overline{x}_{2j}(t) := x_{2j} + tx_{1j}$, $j \in \{1, ..., n_2\}$; $\overline{x}_{3j}(t) := x_{3j} + tx_{2j} + (t^2/2)x_{1j}$, $j \in \{1, ..., n_3\}$; $\overline{x}_l(t) := (\overline{x}_{l1}(t), ..., \overline{x}_{ln_l}(t))$, $l \in M$; $X_1(t) := (\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t), \overline{x}_3(t))$; $X_2(t) := (\xi_1, \overline{x}_2(t), \overline{x}_3(t))$; $X_3(t) := (\xi_1, \xi_2, \overline{x}_3(t))$; $\rho_s(t,x,\xi) := \sum\limits_{l=1}^{s} t^{1-lq}|\overline{x}_l(t) - \xi_l|^q$, $s \in M$; $\rho_0(t,x,\xi) := 0$; $\rho(t,x,\xi) := \rho_3(t,x,\xi)$; $E_c(t,x;\tau,\xi) := \exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\}$, якщо

c – додатна стала; $[a,x] := \sum\limits_{l=1}^{3} a_l |x_l|^q$, якщо $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$, $|x_l| := \left(\sum\limits_{j=1}^{n_l} x_{lj}^2\right)^{1/2}$, $x_l \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in M$; $\mathbb{Z}_+^l$ – множина всіх l-вимірних мультиіндексів; $m_l := (m_{l1}, ..., m_{ln_l})$ – елемент множини $\mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in M$; $m := (m_1, m_2, m_3)$ – елемент множини $\mathbb{Z}_+^n$; $|m_l| := m_{l1} + ... + m_{ln_l}$, якщо $m_l \in \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in M$; ∂_t, ∂_y – операції диференціювання першого порядку відповідно за змінними t, y; ∂_y^k – операція диференціювання порядку $k > 1$ за змінною y; $\partial_{x_l}^{m_l} := \partial_{x_{l1}}^{m_{l1}} ... \partial_{x_{ln_l}}^{m_{ln_l}}$, якщо $x_l \in \mathbb{R}^{n_l}$, $m_l \in \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in M$; $\Delta_x^{x'} f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, x', \cdot)$; $d(x, \xi; \alpha) := d(x, \xi; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := \sum\limits_{l=1}^{3} |x_l - \xi_l|^{\alpha_l/(2b(l-1)+1)}$, $d(x, \xi) := d(x, \xi; 1, 1, 1)$, якщо $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_1 \in [0, 1]$, $\alpha_2 \in [0, 2b+1]$, $\alpha_3 \in [0, 4b+1]$; $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, 0) \le R\}$.

Зауважимо, що існують додатні числа b_1, b_2 такі, що для довільних $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$ і $\gamma > 0$: $b_1(d(x;\xi))^\gamma \le d(x, \xi; \gamma, \gamma, \gamma) \le b_2(d(x;\xi))^\gamma$.

Однаково позначаються різні сталі, якщо їх величини нас не цікавлять.

Для додатного числа c_0 і набору $a := (a_1, a_2, a_3)$ невід'ємних чисел a_l, $l \in M$, таких, що $T < \min\limits_{l \in M} (c_0/a_l)^{(2b-1)/(2b(l-1)+1)}$, розглянемо функції [1]

$k_l(t, a_l) := c_0 a_l (c_0^{2b-1} - a_l^{2b-1} t^{2b(l-1)+1})^{1-q}$, $l \in M$,
$k(t) := (k_1(t, a_1), k_2(t, a_2), k_3(t, a_3))$,
$s_1(t) := k_1(t, a_1) + 2^{q-1} t^q k_2(t, a_2) + 2^{q-2} t^{2q} k_3(t, a_3)$,
$s_2(t) := 2^{q-1} k_2(t, a_2) + 4^{q-1} t^q k_3(t, a_3)$,
$s_3(t) := 4^{q-1} k_3(t, a_3)$,
$s(t) := (s_1(t), s_2(t), s_3(t))$, $t \in [0, T]$,
які мають такі властивості:

$$k(0) = a, \ a_l \le k_l(\tau, a_l) < k_l(t, a_l) < s_l(t), \ 0 \le \tau < t \le T, \ l \in M; \tag{4}$$

$$k_l(t-\tau, k_l(\tau, a_l)) \le k_l(t, a_l), \ 0 \le \tau \le t \le T, \ l \in M; \tag{5}$$

$$-c_0 \rho(t, x, \xi) + [a, \xi] \le [k(t), X_1(t)] \le [s(t), x], \ t \in (0, T], \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Крім того, легко переконатися, що справджуються ще такі нерівності:

$$-c_0 \rho(t-\tau, x, \xi) + [k(\tau), \xi)] \le [k(t), X_1(t-\tau)] \le \le [s(t), x], \ 0 \le \tau < t \le T, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \tag{7}$$

$$-c_0 \rho_{l-1}(t-\tau, x, \xi) + [k(\tau), X_l(t-\tau)] \le \le [k(t), X_1(t-\tau)], \ 0 \le \tau < t \le T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \ l \in M; \tag{8}$$

$$[k(T), X_1(t)] \le [s(T), x], t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Означимо норми і простори функцій. Нехай $\alpha_1 \in (0, 1]$, $\alpha_2 \in (1, 2b+1]$, $\alpha_3 \in (2b+1, 4b+1]$, $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $p_1 \in \{0, 1, ..., 2b\}$, $\{p_2, p_3\} \subset \{0, 1\}$, $p := (p_1, p_2, p_3)$. Використовуватимемо такі гельдерові простори функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$:

$C_{k(\cdot)}$ – простір усіх неперервних функцій w, для яких скінченною є норма

$$||w||_{k(\cdot)} := \sup_{(t,x) \in \Pi_{[0,T]}} (|w(t, x)| \exp\{-[k(t), x]\});$$

$C_{k(\cdot)}^\alpha$ – простір усіх функцій w, для яких скінченною є норма

$$||w||_{k(\cdot)}^\alpha := ||w||_{k(\cdot)} + [w]_{k(\cdot)}^\alpha,$$

де $[w]_{k(\cdot)}^\alpha := \sup\limits_{\substack{\{(t,x),(t,x')\} \subset \Pi_{[0,T]} \\ x \ne x'}} \frac{|\Delta_x^{x'} w(t,x)|}{d(x, x'; \alpha)} \times$

$$\times (\exp\{[k(t), x]\} + \exp\{[k(t), x']\})^{-1};$$

$C_{k(\cdot)}^{p,\alpha}$ – простір усіх функцій w, які разом зі своїми похідними $\partial_{x_l}^{m_l} w$, $|m_l| \le p_l$, $l \in M$, належать до простору $C_{k(\cdot)}^\alpha$, тобто є скінченною норма

$$||w||_{k(\cdot)}^{p,\alpha} := ||w||_{k(\cdot)}^\alpha + \sum_{l=1}^{3} \sum_{0 < |m_l| \le p_l} ||\partial_{x_l}^{m_l} w||_{k(\cdot)}^\alpha;$$

$C_{s(\cdot)}^{p,\alpha}$ – простір, означення якого одержується з означення простору $C_{k(\cdot)}^{p,\alpha}$ заміною функції k на функцію s.

2. Відомості про фундаментальний розв'язок задачі Коші. В [1] встановлено, що ФРЗК G для рівняння (1) має вигляд

$$G(t, x; \tau, \xi) = = (t-\tau)^{-N} F_{\sigma \to y}^{-1} [\tilde{V}(t, \tau, \sigma)](t, \tau, y)|_{y = y(t-\tau, x, \xi)}, \quad 0 \le \tau < t \le T, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де F^{-1} – обернене перетворення Фур'є за просторовими змінними,

$$\tilde{V}(t, \tau, \sigma) := \exp\{\sum_{|k_1| \le 2b} i^{|k_1|} (t-\tau)^{1-|k_1|/(2b)} \times \times \int_0^1 a_{k_1}(\tau + (t-\tau)\beta)(\sigma_1' + \beta\sigma_2' + \tfrac{\beta^2}{2}\sigma_3)^{k_1'} \times \times (\sigma_1'' + \beta\sigma_2'')^{k_1''} (\sigma_1''')^{k_1'''} d\beta\},$$

$y(t, x, \xi) := (t^{-1/(2b)}(x_1 - \xi_1), t^{-1-1/(2b)}(x_2 + t\hat{x}_1 - \xi_2), t^{-2-1/(2b)}(x_3 + tx_2' + \frac{t^2}{2} x_1' - \xi_3))$, $x_1' := (x_{11}, ..., x_{1n_3})$, $x_1'' := (x_{1(n_3+1)}, ..., x_{1n_2})$, $x_1''' := (x_{1(n_2+1)}, ..., x_{1n_1})$, $\hat{x}_1 := (x_{11}, ..., x_{1n_2})$, і такі властивості:

1) функція $G(t, x; \tau, \xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, неперервна при $(t, x) \ne (\tau, \xi)$ ра-

зом зі своїми похідними $\partial_{x_1}^{m_1}\partial_{x_2}^{m_2}\partial_{x_3}^{m_3}G$ і справджуються оцінки

$$|\partial_{x_1}^{m_1}\partial_{x_2}^{m_2}\partial_{x_3}^{m_3}G(t,x;\tau,\xi)| \le$$
$$\le C_m(t-\tau)^{-N-(|m_1|+(2b+1)|m_2|+(4b+1)|m_3|)/(2b)}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi), \quad 0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$
$$m_l\in\mathbb{Z}_+^{n_l}, \quad l\in M, \qquad (10)$$

де C_m і c – деякі додатні сталі;

2) для довільного $\gamma\in(0,1]$ і того самого c, що в (10), правильними є оцінки

$$|\Delta_x^{x'}\partial_x^m G(t,x;\tau,\xi)| \le C_m(d(x;x'))^\gamma\times$$
$$\times(t-\tau)^{-N-(|m_1|+(2b+1)|m_2||(4b+1)|m_3|+\gamma)/(2b)}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi), \quad (d(x;x'))^{2b}\le t-\tau,$$
$$0\le\tau<t\le T, \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n, m\in\mathbb{Z}_+^n; \quad (11)$$

3) справджується рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)d\xi =$$
$$= \exp\{(t-\tau)\int\limits_0^1 a_0(\tau+(t-\tau)\beta)d\beta\},$$
$$0\le\tau<t\le T, \ x\in\mathbb{R}^n; \qquad (12)$$

4) для $0\le\tau<t\le T$ і $x\in\mathbb{R}^n$ правильні рівності

$$\partial_x^m\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)d\xi = 0, \quad m\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\};$$
$$\partial_{x_2}^{m_2}\partial_{x_3}^{m_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3 = 0,$$
$$(m_2,m_3)\in\mathbb{Z}_+^{n_2+n_3}\setminus\{0\};$$
$$\partial_{x_3}^{m_3}\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3 = 0, m_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}. \quad (13)$$

Зауваження 1. Зі структури рівняння (1) та ФРЗК для нього випливає, що функція $\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3$ є ФРЗК для рівняння (1), якщо в нього входять тільки перші дві групи просторових змінних ($n_3=0$), а $\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3$ – ФРЗК для невиродженого параболічного за Петровським рівняння ($n_2=n_3=0$), адже

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3 = (t-\tau)^{-N_2}\times$$
$$\times F^{-1}_{(\sigma_1,\sigma_2)\to(y_1,y_2)}[\tilde V(t,\tau,(\sigma_1,\sigma_2,0))](t,\tau,y_1,y_2),$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3 = (t-\tau)^{-N_1}\times$$
$$\times F^{-1}_{\sigma_1\to y_1}[\tilde V(t,\tau,(\sigma_1,0,0))](t,\tau,y_1),$$

де $y_1=y_1(t-\tau,x,\xi)$, $y_2=y_2(t-\tau,x,\xi)$.

Твердження із зауваження 1 було враховано в [1], зокрема, при доведенні рівностей (13).

Надалі сталу c_0 з означення функцій $k_l(t,a_l)$, $l\in M$, братимемо з інтервалу $(0,c)$, де c – стала з оцінок (10). Права частина нерівності (10) містить функції E_c і ρ, які мають такі властивості [1]:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-N}E_\delta(t,x;\tau,\xi)d\xi = C, \ \tau<t,$$
$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \delta>0; \qquad (14)$$

$$(d(X_s(t-\tau);\xi))^\beta E_{\bar c}(t,x;\tau,\xi) \le$$
$$\le C(t-\tau)^{\beta/(2b)}E_{\bar c_1}(t,x;\tau,\xi), 0\le\tau<t\le T,$$
$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \ \bar c_1\in(0,\bar c), \ \beta\in(0,1]; \qquad (15)$$

$$\forall\{c_1,c_2\}\subset\mathbb{R}, 0<c_2<c_1, \ \exists C>0:$$
$$\exp\{-c_1\rho(t,x',\xi)\}\le C\exp\{-c_2\rho(t,x,\xi)\},$$
$$x\in\mathbb{R}^n, \quad t>0, \quad d(x,x')<t^{1/(2b)}. \qquad (16)$$

Крім того, правильна нерівність

$$\forall\bar R>0: \ \rho(t,x,\xi)\ge t^{-\lambda}R^q, \ t\in(0,T],$$
$$x\in B_{\bar R}, \ \xi\in R^n\setminus B_{2R}, \qquad (17)$$

де $R := \bar R(1+T+T^2/2)$, $\lambda=q-1$ при $t\in(0,1]$, $\lambda=3q-1$ при $t>1$.

Доведемо нерівність (17). Маємо

$$\rho(t,x,\xi)\ge t^{-\lambda}\sum_{l=1}^3|\bar x_l(t)-\xi_l|^q\ge t^{-\lambda}||\xi|-|X_1(t)||^q.$$

Якщо $t\in(0,T]$, $x\in B_{\bar R}$, то $|X_1(t)| =$
$= |x+t(0,(x_{11},...,x_{1n_2}),(x_{21},...,x_{2n_3}))+$
$+(t^2/2)(0,0,(x_{11},...,x_{1n_3}))\le$
$\le |x|+t(|x_1|+|x_2|)+(t^2/2)|x_1|\le$
$\le(1+t+t^2/2)|x|\le(1+T+T^2/2)\bar R$. Тому для $\xi\in R^n\setminus B_{2R}$, $R=\bar R(1+T+T^2/2)$:
$\rho(t,x,\xi)\ge t^{-\lambda}(2R-\bar R(1+T+T^2/2))^q = t^{-\lambda}R^q$.

3. Формули для похідних від об'ємного потенціалу, породженого фундаментальним розв'язком рівняння (1). Далі позначатимемо: $r_1:=2b$; $r_2:=1$; $r_3:=1$.

Теорема 1. *Нехай $f\in C_{k(\cdot)}$ і задовольняється така умова Гельдера з числами $\alpha_1\in(0,1]$, $\alpha_2\in(1,2b+1]$ і $\alpha_3\in(2b+1,4b+1]$:*

$$\forall R>0 \ \exists C>0 \ \forall(t,x)\in[0,T]\times B_R:$$
$$|\Delta_x^{x'}f(t,x)|\le Cd(x,x';\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3). \qquad (18)$$

Тоді об'ємний потенціал (3) має неперервні похідні, що входять у рівняння (1), які визначаються для $(t,x)\in\Pi_{(0,T]}$ формулами

$$\partial_{x_1}^{m_1}u(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{m_1}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$|m_1|<2b; \tag{19}$$

$$\partial_{x_l}^{m_l}u(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_l}^{m_l}G(t,x;\tau,\xi)\times$$

$$\times\Delta_\xi^{X_l(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi,\quad |m_l|=r_l,\ l\in M; \tag{20}$$

$$\partial_t u(t,x)=f(t,x)+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_t G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{X_3(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\partial_t\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3\times$$

$$\times\Delta_{X_3(t-\tau)}^{X_2(t-\tau)}f(\tau,X_3(t-\tau))d\xi_1d\xi_2+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\partial_t\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2d\xi_3\times$$

$$\times\Delta_{X_2(t-\tau)}^{X_1(t-\tau)}f(\tau,X_2(t-\tau))d\xi_1+$$

$$+\int\limits_0^t\partial_t\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,x;\tau,\xi)d\xi f(\tau,X_1(t-\tau))d\tau. \tag{21}$$

Крім того задовольняється умова

$$\partial_{x_l}^{m_l}u(t,x)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0,\quad |m_l|\le r_l,\ l\in M, \tag{22}$$

рівномірно стосовно $x\in B_R$ з довільним додатним R.

Доведення. Покладемо

$$I(t,x;\tau):=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$K_{m_1}(t,x;\tau):=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{m_1}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{23}$$

Тоді

$$u(t,x)=\int\limits_0^t I(t,x;\tau)d\tau,\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}.$$

Спочатку доведемо правильність формули (19). Щоб довести, що

$$\partial_{x_1}^{m_1}I(t,x;\tau)=K_{m_1}(t,x;\tau),\quad 0\le\tau<t\le T,$$

$$x\in\mathbb{R}^n,\ |m_1|<2b, \tag{24}$$

необхідно переконатися, що інтеграл $K_{m_1}(t,x;\tau)$ збігається рівномірно стосовно $x\in B_R$ для довільного $R>0$ та фіксованих t і τ. Оцінимо підінтегральну функцію з K_{m_1}. На підставі (10) та належності функції f до простору $C_{k(\cdot)}$ маємо

$$|\partial_{x_1}^{m_1}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)|\le C_m(t-\tau)^{-N-|m_1|/(2b)}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)\exp\{[k(\tau),\xi]\}||f||_{k(\cdot)}.$$

За допомогою нерівності (7) отримуємо

$$|\partial_{x_1}^{m_1}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)|\le C_m(t-\tau)^{-N-|m_1|/(2b)}\times$$
$$\times E_{c-c_0}(t,x;\tau,\xi)\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}=$$
$$=C_m||f||_{k(\cdot)}\exp\{[s(t),x]\}(t-\tau)^{-N-|m_1|/(2b)}\times$$
$$\times\exp\{-(c-c_0)\sum_{l=1}^3(t-\tau)^{1-lq}|\bar{x}_l(t-\tau)-\xi_l|^q\}=$$
$$=:J_1(t,x;\tau,\xi).$$

Якщо в інтегралі по $\xi\in\mathbb{R}^n$ від оцінної функції J_1 зробити заміну змінних ξ_l за формулами

$$\eta_l=(t-\tau)^{1/q-l}(\xi_l-\bar{x}_l(t-\tau)),\ l\in M, \tag{25}$$

то дістанемо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}J_1(t,x;\tau,\xi)d\xi=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}C_m(t-\tau)^{-|m_1|/(2b)}\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}\times$$
$$\times\exp\{-(c-c_0)\sum_{l=1}^3|\eta_l|^q\}d\eta=$$
$$=C(t-\tau)^{-|m_1|/(2b)}\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}.$$

Отже, інтеграл $K_{m_1}(t,x;\tau)$ збігається рівномірно стосовно $x\in B_R$ для довільного $R>0$ та фіксованих t і τ, тому справджуються рівність (24) та оцінка

$$|\partial_{x_1}^{m_1}I(t,x;\tau)|\le$$
$$\le C(t-\tau)^{-|m_1|/(2b)}\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)},$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad x\in\mathbb{R}^n,\ |m_1|<2b. \tag{26}$$

За допомогою нерівності (26) доводиться рівномірна збіжність стосовно $(t,x)\in[0,T]\times B_R$, $R>0$, інтеграла

$$\int\limits_0^t\partial_{x_1}^{m_1}I(t,x;\tau)d\tau.$$

Отже, правильна рівність

$$\partial_{x_1}^{m_1} u(t,x) = \int_0^t \partial_{x_1}^{m_1} I(t,x;\tau) d\tau,$$

$$(t,x) \in [0,T] \times B_R,\ R > 0,$$

звідки на підставі довільності $R > 0$ та (24) випливає формула (19). Крім того, справджується оцінка

$$|\partial_{x_1}^{m_1} u(t,x)| \le C t^{1-|m_1|/(2b)} \exp\{[s(t),x]\} ||f||_{k(\cdot)},$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]},\ |m_1| < 2b. \qquad (27)$$

Для доведення рівності (20) покладемо

$$I'(t,x;\tau) := \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) \Delta_\xi^y f(\tau,\xi)|_{y=X_l(t-\tau)} d\xi,$$

$$K'_{m_l}(t,x;\tau) := = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_l}^{m_l} G(t,x;\tau,\xi) \Delta_\xi^{X_l(t-\tau)} f(\tau,\xi) d\xi,$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Доведемо, що

$$\partial_{x_l}^{m_l} I'(t,x;\tau) = K'_{m_l}(t,x;\tau),\ 0 \le \tau < t \le T,$$

$$x \in \mathbb{R}^n,\ |m_l| = r_l,\ l \in M. \qquad (28)$$

Для цього оцінимо підінтегральну функцію з K'_{m_l}. Нехай $\bar{R} > 0$, $R := \bar{R}(1 + T + T^2/2)$. При $(t,x) \in (0,T] \times B_{\bar{R}}$ і $(\tau,\xi) \in [0,t) \times B_{2R}$ на підставі (10) та (18), а потім (15) з $\bar{c} = c$ з урахуванням того, що $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$, маємо

$$|\partial_{x_l}^{m_l} G(t,x;\tau,\xi) \Delta_\xi^{X_l(t-\tau)} f(\tau,\xi)| \le$$
$$\le C_m (t-\tau)^{-N-(l-1/q)|m_l|} \times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi) d(\xi, X_l(t-\tau); \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \le$$
$$\le C_m (t-\tau)^{-N-(l-1/q)|m_l|+\alpha_l/(2b)} E_{\bar{c}_1}(t,x;\tau,\xi). \qquad (29)$$

Використовуючи нерівності (7), (8), (10) і (17), а також те, що $f \in C_{k(\cdot)}$, для $(t,x) \in (0,T] \times B_{\bar{R}}$ і $(\tau,\xi) \in [0,t) \times (\mathbb{R}^n \setminus B_{2R})$ отримуємо

$$|\partial_{x_l}^{m_l} G(t,x;\tau,\xi) \Delta_\xi^{X_l(t-\tau)} f(\tau,\xi)| \le$$
$$\le C_m (t-\tau)^{-N-(l-1/q)|m_l|} E_c(t,x;\tau,\xi) \times$$
$$\times (\exp\{[k(\tau),\xi]\} + \exp\{[k(\tau), X_l(t-\tau)]\}) \times$$
$$\times ||f||_{k(\cdot)} \le C_m (t-\tau)^{-N-(l-1/q)|m_l|} \times$$
$$\times E_{c-c_0}(t,x;\tau,\xi) \exp\{[s(t),x]\} ||f||_{k(\cdot)} \le$$
$$\le C_m (t-\tau)^{-N-(l-1/q)|m_l|} \times$$
$$\times \exp\{-\tfrac{c-c_0}{2}(t-\tau)^{-\lambda} R^q\} \times$$
$$\times E_{(c-c_0)/2}(t,x;\tau,\xi) \exp\{[s(t),x]\} ||f||_{k(\cdot)}.$$

Очевидно, що існує таке $c_2 \in (0, \frac{c-c_0}{2})$, що

$$(t-\tau)^{-(l-1/q)|m_l|} \exp\{-\tfrac{c-c_0}{2}(t-\tau)^{-\lambda} R^q\} \le$$
$$\le C \exp\{-c_2 (t-\tau)^{-\lambda} R^q\}.$$

Тому

$$|\partial_{x_l}^{m_l} G(t,x;\tau,\xi) \Delta_\xi^{X_l(t-\tau)} f(\tau,\xi)| \le$$
$$\le C (t-\tau)^{-N} \exp\{-c_2 (t-\tau)^{-\lambda} R^q\} \times$$
$$\times E_{(c-c_0)/2}(t,x;\tau,\xi) \exp\{[s(t),x]\} ||f||_{k(\cdot)},$$

$$(t,x) \in (0,T] \times B_{\bar{R}}, (\tau,\xi) \in [0,t) \times (\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}). \qquad (30)$$

Якщо подати K'_{m_l} у вигляді суми інтегралів по B_{2R} і по $\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}$, то на підставі (29) і (30) перший доданок оціниться через

$$J_2(t,x;\tau) := \int_{B_{2R}} C_m (t-\tau)^{-N-(l-1/q)|m_l|+\alpha_l/(2b)} \times$$
$$\times E_{\bar{c}_1}(t,x;\tau,\xi) d\xi, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad x \in B_{\bar{R}},$$

а другий – через

$$J_3(t,x;\tau) :=$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}} C (t-\tau)^{-N} \exp\{-c_2 (t-\tau)^{-\lambda} R^q\} \times$$
$$\times E_{(c-c_0)/2}(t,x;\tau,\xi) \exp\{[s(t),x]\} ||f||_{k(\cdot)} d\xi,$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad x \in B_{\bar{R}}.$$

Враховуючи рівності (14) і те, що при заданих α_l і $|m_l| = r_l$ виконується нерівність $-(l-1/q)|m_l| + \alpha_l/(2b) > -1$, $l \in M$, дістаємо збіжність інтегралів J_2 і J_3 та рівномірну збіжність інтеграла $K'_{m_l}(t,x;\tau)$ стосовно $x \in B_{\bar{R}}$ при фіксованих t і τ. На підставі довільності $\bar{R} > 0$ звідси випливає рівність (28). Крім того, оскільки

$$J_2(t,x;\tau) \le \int_{R^n} C_m (t-\tau)^{-N-(l-1/q)|m_l|+\alpha_l/(2b)} \times$$
$$\times E_{\bar{c}_1}(t,x;\tau,\xi) d\xi = C (t-\tau)^{-(l-1/q)|m_l|+\alpha_l/(2b)},$$
$$J_3(t,x;\tau) \le \int_{\mathbb{R}^n} C (t-\tau)^{-N} E_{(c-c_0)/2}(t,x;\tau,\xi) d\xi \times$$
$$\times \exp\{[s(t),x]\} ||f||_{k(\cdot)} = C \exp\{[s(t),x]\} ||f||_{k(\cdot)},$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

то маємо ще таку оцінку для $|m_l| = r_l$, $l \in M$:

$$|\partial_{x_l}^{m_l} I'(t,x;\tau)| \le C((t-\tau)^{-(l-1/q)|m_l|+\alpha_l/(2b)} +$$
$$+ \exp\{[s(t),x]\} ||f||_{k(\cdot)}), \quad 0 \le \tau < t \le T,$$

$$x \in \mathbb{R}^n. \qquad (31)$$

Вираз $\partial_{x_l}^{m_l} I'(t,x;\tau)$ можна записати у вигляді

$$\partial_{x_l}^{m_l} I'(t,x;\tau) = \partial_{x_l}^{m_l} I(t,x;\tau) + \partial_{x_l}^{m_l} I'_1(t,x;\tau),$$

де I – інтеграл з формули (23), а

$$I'_1(t,x;\tau) := \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,y)|_{y=X_l(t-\tau)} d\xi,$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Оскільки

$$I'_1(t,x;\tau) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}\times\ldots\times\mathbb{R}^{n_{l-1}}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_l}\times\ldots\times\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi) d\xi_l \ldots d\xi_3 \Big) \times$$
$$\times f(\tau,y)|_{y=X_l(t-\tau)} d\xi_1 \ldots d\xi_{l-1},$$

то на підставі відповідної рівності з (13)

$$\partial_{x_l}^{m_l} I_1'(t,x;\tau) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}\times\ldots\times\mathbb{R}^{n_{l-1}}} \partial_{x_l}^{m_l} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_l}\times\ldots\times\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi) d\xi_l \ldots d\xi_3 \Big) \times$$
$$\times f(\tau,y)|_{y=X_l(t-\tau)} d\xi_1 \ldots d\xi_{l-1} = 0.$$

Отже,

$$\partial_{x_l}^{m_l} I'(t,x;\tau) = \partial_{x_l}^{m_l} I(t,x;\tau),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (32)$$

Оцінка (31), в якій $-(l-\frac{1}{q})|m_l| + \frac{\alpha_l}{2b} > -1$, та рівність (32) доводять рівномірну збіжність стосовно $(t,x) \in (0,T] \times B_R$ при довільному $R > 0$ інтеграла

$$\int\limits_0^t \partial_{x_l}^{m_l} I(t,x;\tau) d\tau.$$

Звідси та довільності $R > 0$ випливає рівність

$$\partial_{x_l}^{m_l} u(t,x) = \int\limits_0^t \partial_{x_l}^{m_l} I(t,x;\tau) d\tau,$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \ |m_l| = r_l, \ l \in M,$$

що разом з (32) і (28) доводить формулу (20). Крім того, справджується оцінка

$$|\partial_{x_l}^{m_l} u(t,x)| \le C(t^{1-(l-1/q)|m_l|+\alpha_l/(2b)} +$$
$$+ t\exp\{[s(t),x]\} ||f||_{k(\cdot)}),$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \ |m_l| = r_l, \ l \in M. \qquad (33)$$

Тепер доведемо правильність формули (21) для $(t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}$, де $t_0 > 0$. Для цього розглянемо сукупність функцій

$$u_h(t,x) := \int\limits_0^{t-h} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi =$$
$$= \int\limits_0^{t-h} I(t,x;\tau) d\tau, \ (t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}, 0 < h < t_0. \qquad (34)$$

Оскільки підінтегральна функція I на підставі оцінки (26) є обмеженою, то існує похідна $\partial_t u_h$ в $\Pi_{[t_0,T]}$, причому

$$\partial_t u_h(t,x) = I(t,x;t-h) + \int\limits_0^{t-h} \partial_t I(t,x;\tau) d\tau,$$
$$(t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}. \qquad (35)$$

Очевидно, що інтеграл I можна подати у вигляді такої суми:

$$I(t,x;\tau) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) \Delta_{\xi}^{y_3} f(\tau,\xi)|_{y_3 = X_3(t-\tau)} d\xi +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) \Delta_{y_3}^{y_2} f(\tau,y_3)|_{\substack{y_2 = X_2(t-\tau) \\ y_3 = X_3(t-\tau)}} d\xi +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) \Delta_{y_2}^{y_1} f(\tau,y_2)|_{\substack{y_1 = X_1(t-\tau) \\ y_2 = X_2(t-\tau)}} d\xi +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,y_1)|_{y_1 = X_1(t-\tau)} d\xi =$$
$$=: \sum_{l=1}^4 I_l''(t,x;\tau), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тому

$$\partial_t I(t,x;\tau) = \sum_{l=1}^4 \partial_t I_l''(t,x;\tau),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \ x \in \mathbb{R}^n. \qquad (36)$$

Покладемо

$$K_1(t,x;\tau) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,x;\tau,\xi) \Delta_{\xi}^{X_3(t-\tau)} f(\tau,\xi) d\xi,$$
$$K_2(t,x;\tau) := \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi) d\xi_3 \times$$
$$\times \Delta_{X_3(t-\tau)}^{X_2(t-\tau)} f(\tau, X_3(t-\tau)) d\xi_1 d\xi_2,$$
$$K_3(t,x;\tau) := \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi) d\xi_2 d\xi_3 \times$$
$$\times \Delta_{X_2(t-\tau)}^{X_1(t-\tau)} f(\tau, X_2(t-\tau)) d\xi_1,$$
$$K_4(t,x;\tau) := \partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) d\xi f(\tau, X_1(t-\tau)),$$

і доведемо, що

$$\partial_t I_l''(t,x;\tau) = K_l(t,x;\tau), \quad 0 \le \tau < t \le T,$$
$$x \in \mathbb{R}^n, \ l \in \{1,2,3,4\}. \qquad (37)$$

Для цього встановимо, що інтеграли $K_l(t,x;\tau)$ збігаються рівномірно стосовно $t \in [t_1 - h/3, \min(t_1 + h/3, T)]$, де t_1 – довільно фіксоване число з $[t_0,T]$, для фіксованих $x \in \mathbb{R}^n$ і $\tau \in [0, t_1 - 2h/3]$.

При $l \in \{1,2,3\}$ це доводиться аналогічно до доведення збіжності інтегралів K_{m_l}', тільки для оцінювання підінтегральних функцій з K_l використовуються не безпосередньо оцінки (10), а оцінки

$$|\partial_t G(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-N-2-1/(2b)} \times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)(|x_1| + |x_2|),$$
$$|\partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi) d\xi_3| \le C(t-\tau)^{-N_2-1-1/(2b)} \times$$
$$\times \exp\{-c\rho_2(t-\tau,x,\xi)\} |x_1|,$$
$$|\partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi) d\xi_2 d\xi_3| \le C(t-\tau)^{-N_1-1} \times$$
$$\times \exp\{-c\rho_1(t-\tau,x,\xi)\},$$
$$0 \le \tau < t \le T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \qquad (38)$$

Щоб отримати першу з оцінок (38), потрібно підставити G в однорідне рівняння (1), скористатися тим, що G є розв'язком цього рівняння, оцінками (10) та обмеженістю коефіцієнтів. Дві наступні оцінки з (38) отримуються подібним чином, тільки з урахуванням зауваження 1.

Зазначимо, що при доведенні (37) при $l \in \{1,2,3\}$ отримуємо такі оцінки:

$$|\partial_t I_1''(t,x;\tau)| = |K_1(t,x;\tau)| \le \le C((t-\tau)^{-2-1/(2b)+\alpha_3/(2b)} \times \times(|x_1|+|x_2|) + \exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}),$$

$$|\partial_t I_2''(t,x;\tau)| = |K_2(t,x;\tau)| \le C(|x_1|\times \times(t-\tau)^{-1-1/(2b)+\alpha_2/(2b)} + \exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}),$$

$$|\partial_t I_3''(t,x;\tau)| = |K_3(t,x;\tau)| \le C((t-\tau)^{-1+\frac{\alpha_1}{2b}} + + \exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (39)$$

На підставі рівності (12), належності f до простору $C_{k(\cdot)}$, а також нерівностей (4) і (7) маємо

$$|K_4(t,x;\tau)| \le C\exp\{[k(\tau), X_1(t-\tau)]\}||f||_{k(\cdot)} \le \le C\exp\{[k(t), X_1(t-\tau)]\}||f||_{k(\cdot)} \le \le C\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)},$$
$$0 \le \tau < t \le T, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Звідси випливає, що $K_4(t,x;\tau)$ також рівномірно збігається стосовно $t \in [t_1 - h/3, \min(t_1 + h/3, T)]$, справджуються рівність (37) з $l = 4$ та оцінка

$$|\partial_t I_4''(t,x;\tau)| = |K_4(t,x;\tau)| \le C\exp\{[s(t),x]\}\times \times||f||_{k(\cdot)}, \quad 0 \le \tau < t \le T, \ x \in \mathbb{R}^n. \qquad (40)$$

Об'єднавши рівності (35), (36) і (37), отримаємо

$$\partial_t u_h(t,x) = I(t,x;t-h) + + \int_0^{t-h} \sum_{l=1}^4 K_l(t,x;\tau)d\tau = = I(t,x;t-h) + \sum_{l=1}^4 \int_0^{t-h} K_l(t,x;\tau)d\tau,$$

$$(t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}, \ h \in (0,t_0). \qquad (41)$$

Оскільки для довільних $\bar{R} > 0$ і $t_0 \in (0,T)$ рівномірно стосовно $(t,x) \in [t_0,T] \times B_{\bar{R}}$ є правильними такі граничні співвідношення:

$$u_h(t,x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} u(t,x); \qquad (42)$$

$$I(t,x;t-h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(t,x); \qquad (43)$$

$$\int_0^{t-h} K_l(t,x;\tau)d\tau \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_0^t K_l(t,x;\tau)d\tau,$$
$$l \in \{1,2,3,4\}, \qquad (44)$$

то при прямуванні в рівності (41) до границі при $h \to 0$ отримаємо формулу (21).

Доведемо співвідношення (42)–(44). За допомогою оцінки (26) маємо

$$|u(t,x) - u_h(t,x)| = = |\int_{t-h}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi| \le \le |\int_{t-h}^t |I(t,x;\tau)|d\tau \le \le \int_{t-h}^t C\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}d\tau = = C\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}h,$$
$$(t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}, \ 0 < h < t_0,$$

звідки випливає (42).

Розпишемо

$$I(t,x;t-h) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;t-h,\xi)f(t,\xi)d\xi + + \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;t-h,\xi)\Delta_{t-h}^t f(t-h,\xi)d\xi. \qquad (45)$$

На підставі граничної властивості інтеграла Пуассона задачі Коші [1]

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;t-h,\xi)f(t,\xi)d\xi \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(t,x) \qquad (46)$$

рівномірно стосовно $(t,x) \in [t_0,T] \times B_{\bar{R}}$.

Унаслідок оцінок (10) і (17), належності f до $C_{k(\cdot)}$ та неперервності функції f за t в $[t_0,T] \times B_R$ отримаємо

$$|\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;t-h,\xi)\Delta_{t-h}^t f(t-h,\xi)d\xi| \le \le \int_{B_{2R}} |G(t,x;t-h,\xi)\Delta_{t-h}^t f(t-h,\xi)|d\xi + + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}} |G(t,x;t-h,\xi)\Delta_{t-h}^t f(t-h,\xi)|d\xi \le \le \int_{B_{2R}} Ch^{-N}E_c(t,x;t-h,\xi)\omega(h,R)d\xi + + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}} Ch^{-N}E_c(t,x;t-h,\xi)\times \times(\exp\{[k(t-h),\xi)]\} + \exp\{[k(t),\xi)]\})\times \times||f||_{k(\cdot)}d\xi =: J_4(t,x;h) + J_5(t,x;h),$$

де $R = \bar{R}(1 + T + T^2/2)$, $\omega(h,R) \to 0$ при $h \to 0$.

Використовуючи рівність (14), маємо

$$J_4(t,x;h) \le$$

$$\leq \int\limits_{R^n} Ch^{-N}E_c(t,x;t-h,\xi)\omega(h,R)d\xi =$$
$$= C\omega(h,R),\ (t,x)\in[t_0,T]\times B_{\bar{R}},$$
а на підставі (7), (14) і (17)
$$J_5(t,x;h) = \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}} Ch^{-N}\exp\{-c\rho(h,x,\xi)\}||f||_{k(\cdot)}\times$$
$$\times(\exp\{[k(t-h),\xi)]\}+\exp\{[k(t),\xi)]\})d\xi \leq$$
$$\leq C\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}} h^{-N}\exp\{-(c-c_0)\rho(h,x,\xi)\}\times$$
$$\times(\exp\{[k(t),X_1(h)]\}+$$
$$+\exp\{[k(t+h),X_1(h))]\})d\xi||f||_{k(\cdot)} \leq$$
$$\leq C\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}} h^{-N}\exp\{-\tfrac{c-c_0}{2}h^{-\lambda}R^q\}\times$$
$$\times E_{(c-c)/2}(h,x;0,\xi)d\xi(\exp\{[k(t),X_1(h)]\}+$$
$$+\exp\{[k(t+h),X_1(h)]\})||f||_{k(\cdot)} \leq$$
$$\leq C\exp\{-\tfrac{c-c_0}{2}h^{-\lambda}R^q\}||f||_{k(\cdot)}\times$$
$$\times(\exp\{[k(t),X_1(h)]\}+\exp\{[k(t+h),X_1(h)]\}),$$
$$(t,x)\in[t_0,T]\times B_{\bar{R}}.$$

Оскільки J_4 та J_5 прямують до нуля при $h\to 0$ рівномірно щодо $(t,x)\in[t_0,T]\times B_{\bar{R}}$, то другий доданок правої частини (45) рівномірно в цій області прямує до нуля при $h\to 0$, а з урахуванням (46) отримуємо (43).

Співвідношення (44) випливає з оцінок (39) і (40), на підставі яких $\left|\int\limits_{t-h}^{t} K_l(t,x;\tau)d\tau\right| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ рівномірно щодо $(t,x)\in[t_0,T]\times B_{\bar{R}}$, $l\in\{1,2,3,4\}$.

Отже, доведена правильність формул (19)–(21). Правильність (22) безпосередньо випливає з оцінок (27) і (33). $\triangleright$

Зауваження 2. З виведених формул (19)–(21) на підставі того, що функція $G(t,x;\tau,\xi)$ як функція t і x при довільно фіксованих $\tau\in[0,t)$ і $\xi\in\mathbb{R}^n$ є розв'язком рівняння (1) з $f=0$, випливає, що функція (3) є регулярним розв'язком неоднорідного рівняння (1).

4. Властивості об'ємного потенціалу. Крім наведених у теоремі 1 і зауваженні 2 властивостей об'ємного потенціалу, наступна теорема містить нові його властивості.

Теорема 2. *Якщо* $f\in C^{\alpha}_{k(\cdot)}$, *де* $\alpha := (\beta,\beta+1,\beta+2b+1)$ *з деяким* $\beta\in(0,1]$, *то* $u\in C^{r,\alpha'}_{s(\cdot)}$, *де* $\alpha' := (\beta,\beta,\beta)$, $r := (r_1,r_2,r_3)$, *справджуються оцінка*

$$||u||^{r,\alpha'}_{s(\cdot)} \leq C||f||^{\alpha}_{k(\cdot)} \qquad (47)$$

і рівності

$$\lim_{t\to 0}\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(|\partial^{m_l}_{x_l}u(t,x)|\exp\{-[s(t),x]\})\Big)=0,$$
$$|m_l|\leq r_l,\ l\in M. \qquad (48)$$

Доведення. Перш за все зауважимо, що оскільки $f\in C^{\alpha}_{k(\cdot)}$, $\alpha=(\beta,\beta+1,\beta+2b+1)$ з деяким $\beta\in(0,1]$, то функція f задовольняє умови теореми 1, зокрема умову (18) з $\alpha_1=\beta$, $\alpha_2=\beta+1$, $\alpha_3=\beta+2b+1$. Тому для u правильні всі твердження теореми 1.

Спочатку розглянемо випадок, коли $|m_1|<2b$. На підставі (27) при $d(x,x')\geq t^{1/(2b)}$ для довільного $\gamma\in(0,1]$ одержуємо
$$|\Delta^{x'}_x\partial^{m_1}_{x_1}u(t,x)|\leq|\partial^{m_1}_{x_1}u(t,x)|+$$
$$+|\partial^{m_1}_{x_1}u(t,x)|_{x=x'}|\leq Ct^{1-|m_1|/(2b)}\times$$
$$\times(\exp\{[s(t),x]\}+\exp\{[s(t),x']\})||f||_{k(\cdot)}\leq$$
$$\leq C(d(x,x'))^{\gamma}t^{1-(|m_1|+\gamma)/(2b)}(\exp\{[s(t),x]\}+$$
$$+\exp\{[s(t),x']\})||f||_{k(\cdot)}.$$

Якщо $d(x,x')<t^{1/(2b)}$, то за допомогою (7), (11), (14), (19) і належності f до $C^{\alpha}_{k(\cdot)}$ маємо
$$|\Delta^{x'}_x\partial^{m_1}_{x_1}u(t,x)|\leq$$
$$\leq\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\Delta^{x'}_x\partial^{m_1}_{x_1}G(t,x;\tau,\xi)||f(\tau,\xi)|d\xi\leq$$
$$\leq C(d(x,x'))^{\gamma}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-N-(|m_1|+\gamma)/(2b)}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)\exp\{[k(\tau),\xi]\}d\xi||f||_{k(\cdot)}\leq$$
$$\leq C(d(x,x'))^{\gamma}\int\limits_0^t(t-\tau)^{-(|m_1|+\gamma)/(2b)}d\tau\times$$
$$\times\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}=$$
$$=C(d(x,x'))^{\gamma}t^{1-(|m_1|+\gamma)/(2b)}\times$$
$$\times\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}.$$
З цих оцінок та (27) випливає, що $u\in C^{p,\alpha''}_{s(\cdot)}$, де $p=(p_1,0,0)$, $p_1<2b$, $\alpha''=(\gamma,\gamma,\gamma)$, $\gamma\in(0,1]$, і
$$||u||^{p,\alpha''}_{s(\cdot)}\leq C||f||_{k(\cdot)}. \qquad (49)$$

Нехай тепер $|m_l|=r_l$, $l\in M$. Оцінки (33) за умов теореми на f не є точними. Тому оцінимо $\partial^{m_l}_{x_l}u$ за допомогою формули (20), належності f до $C^{\alpha}_{k(\cdot)}$, нерівностей (7), (8), (10) і (15) та рівності (14). Маємо

$$|\partial^{m_l}_{x_l}u(t,x)|\leq C_m\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-N-(l-\frac{1}{q})|m_l|}\times$$

$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)d(\xi,X_l(t-\tau);\beta,\beta+1,\beta+2b+1)\times$$
$$\times(\exp\{[k(\tau),\xi]\}+\exp\{[k(\tau),X_l(t-\tau)]\})d\xi\times$$
$$\times[f]^\alpha_{k(\cdot)}\le C\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-N-(l-\frac{1}{q})|m_l|}\times$$
$$\times E_{c-c_0}(t,x;\tau,\xi)\times$$
$$\times d(\xi,X_l(t-\tau);\beta,\beta+1,\beta+2b+1)d\xi\times$$
$$\times\exp\{[s(t),x]\}[f]^\alpha_{k(\cdot)}\le$$
$$\le C\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-N-(l-\frac{1}{q})|m_l|+\alpha_l/(2b)}\times$$
$$\times E_{\bar{c}_1}(t,x;\tau,\xi)d\xi\exp\{[s(t),x]\}[f]^\alpha_{k(\cdot)}=$$
$$=C\int\limits_0^t(t-\tau)^{-(l-\frac{1}{q})|m_l|+\alpha_l/(2b)}d\tau\times$$
$$\times\exp\{[s(t),x]\}[f]^\alpha_{k(\cdot)}=$$
$$=Ct^{1-(l-\frac{1}{q})|m_l|+\alpha_l/(2b)}\exp\{[s(t),x]\}[f]^\alpha_{k(\cdot)}.$$

Оскільки $|m_l|=r_l$, $l\in M$, і $\alpha_1=\beta$, $\alpha_2=\beta+1$, $\alpha_3=\beta+2b+1$, то $-(l-\frac{1}{q})|m_l|+\alpha_l/(2b)=-1+\beta/(2b)$, $l\in M$, і отримуємо таку оцінку:

$$|\partial^{m_l}_{x_l}u(t,x)|\le Ct^{\beta/(2b)}\exp\{[s(t),x]\}[f]^\alpha_{k(\cdot)},$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\ |m_l|=r_l,\ l\in M. \qquad (50)$$

Якщо $d(x,x')\ge t^{1/(2b)}$, то з (50) відразу маємо

$$|\Delta^{x'}_x\partial^{m_l}_{x_l}u(t,x)|\le C(d(x,x'))^\beta(\exp\{[s(t),x]\}+$$
$$+\exp\{[s(t),x']\})[f]^\alpha_{k(\cdot)},\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{(0,T]}. \qquad (51)$$

Нехай тепер $\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{(0,T]}$ і $d:=d(x,x')<t^{1/(2b)}$. Тоді

$$|\Delta^{x'}_x\partial^{m_l}_{x_l}u(t,x)|\le$$
$$\le\left|\int\limits_0^{t-d^{2b}}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta^{x'}_x\partial^{m_l}_{x_l}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi\right|+$$
$$+\left|\int\limits_{t-d^{2b}}^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^{m_l}_{x_l}G(t,x;\tau,\xi)\Delta^{X_l(t-\tau)}_\xi f(\tau,\xi)d\xi\right|+$$
$$+\left|\int\limits_{t-d^{2b}}^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^{m_l}_{x_l}G(t,x;\tau,\xi)\Delta^{X'_l(t-\tau)}_\xi f(\tau,\xi)d\xi\right|=$$
$$=:P_1+P_2+P_3,$$

де $X'_l(t-\tau)=X_l(t-\tau)|_{x=x'}$, $l\in M$.

За допомогою (11), першої рівності з (13) і належності f до $C^\alpha_{k(\cdot)}$ маємо

$$P_1\le\int\limits_0^{t-d^{2b}}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\Delta^{x'}_x\partial^{m_l}_{x_l}G(t,x;\tau,\xi)|\times$$
$$\times|\Delta^{X_l(t-\tau)}_\xi f(\tau,\xi)|d\xi\le$$
$$\le Cd^\gamma\int\limits_0^{t-d^{2b}}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-N-(l-\frac{1}{q})|m_l|-\gamma/(2b)}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)d(\xi,X_l(t-\tau);\beta,\beta+1,\beta+2b+1)\times$$
$$\times(\exp\{[k(\tau),\xi]\}+\exp\{[k(\tau),X_l(t-\tau)]\})d\xi)\times$$
$$\times[f]^\alpha_{k(\cdot)}.$$

Далі використаємо нерівності (7), (8) і (15) та рівність (14). Одержуємо

$$P_1\le Cd^\gamma\int\limits_0^{t-d^{2b}}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-N-(l-\frac{1}{q})|m_l|-\gamma/(2b)}\times$$
$$\times d(\xi,X_l(t-\tau);\beta,\beta+1,\beta+2b+1)d\xi\times$$
$$\times E_{c-c_0}(t,x;\tau,\xi)\exp\{[s(t),x]\}[f]^\alpha_{k(\cdot)}\le$$
$$\le Cd^\gamma\int\limits_0^{t-d^{2b}}(t-\tau)^{-(l-\frac{1}{q})|m_l|+(\alpha_l-\gamma)/(2b)}d\tau\times$$
$$\times\exp\{[s(t),x]\}[f]^\alpha_{k(\cdot)}=Cd^\gamma\times$$
$$\times\int\limits_0^{t-d^{2b}}(t-\tau)^{-1+(\beta-\gamma)/(2b)}d\tau\exp\{[s(t),x]\}[f]^\alpha_{k(\cdot)}$$

або при $\gamma\in(\beta,1)$

$$P_1\le Cd^\gamma(t-\tau)^{(\beta-\gamma)/(2b)}\Big|_0^{t-d^{2b}}\exp\{[s(t),x]\}\times$$
$$\times[f]^\alpha_{k(\cdot)}=Cd^\gamma(d^{\beta-\gamma}-t^{(\beta-\gamma)/(2b)})\times$$
$$\times\exp\{[s(t),x]\}[f]^\alpha_{k(\cdot)}\le$$
$$\le C(d(x,x'))^\beta\exp\{[s(t),x]\}[f]^\alpha_{k(\cdot)}. \qquad (52)$$

На підставі (7), (8), (10), (14) і (15) та належності f до $C^{\alpha}_{k(\cdot)}$ маємо

$$P_2 \le C \int\limits_{t-d^{2b}}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-N-(l-\frac{1}{q})|m_l|} \times$$

$$\times E_c(t,x;\tau,\xi) d(\xi, X_l(t-\tau); \beta, \beta+1, \beta+2b+1) \times$$
$$\times(\exp\{[k(\tau),\xi]\} + \exp\{[k(\tau), X_l(t-\tau)]\}) d\xi \times$$

$$\times [f]^{\alpha}_{k(\cdot)} \le C \int\limits_{t-d^{2b}}^{t} (t-\tau)^{-(l-\frac{1}{q})|m_l| + \alpha_l/(2b)} d\tau \times$$

$$\times \exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)} = C \int\limits_{t-d^{2b}}^{t} (t-\tau)^{-1+\beta/(2b)} d\tau \times$$

$$\times \exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)} = C(t-\tau)^{\beta/(2b)}\Big|_{t}^{t-d^{2b}} \times$$
$$\times \exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)} =$$
$$= C(d(x,x'))^{\beta} \exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}. \qquad (53)$$

Аналогічно

$$P_3 \le C(d(x,x'))^{\beta} \exp\{[s(t),x']\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}. \qquad (54)$$

З оцінок (51)–(54) випливає, що $u \in C^{r,\alpha'}_{s(\cdot)}$, де $\alpha' = (\beta,\beta,\beta)$, $r = (r_1, r_2, r_3) = (2b, 1, 1)$ і правильна оцінка (47). З оцінок (27) і (50) безпосередньо випливає (48). $\triangleright$

5. Коректна розв'язність задачі Коші (1), (2). Виберемо невід'ємні числа a_l, $l \in M$, які входять у вирази для функцій k_l і s_l, $l \in M$, так, щоб виконувалася умова

$$T < \min_{l \in M} (c_0/s_l(T))^{(2b-1)/(2b(l-1)+1)}.$$

На підставі зауваження 2 та рівності (48) за умов теореми 2 об'ємний потенціал (3), породжений ФРЗК для рівняння (1), є розв'язком неоднорідного рівняння (1) з однорідною початковою умовою (2).

З результатів, отриманих в [1] (теорема 3.8), випливає, що не існує більше одного розв'язку рівняння (1), який задовольняє такі умови:

1) $\exists C > 0 \ \ \forall t \in (0, T]$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|u(t,x)| \exp\{-[s(t),x]\}) \le C;$$

2) $\lim\limits_{t \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\psi(x)dx = 0$

для довільної функції ψ такої, що $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| \exp\{[s(T),x]\}dx < \infty$.

Наслідком цього є такий результат.

Твердження. *У просторі* $C^{r,\alpha'}_{s(\cdot)}$, *де* $r = (2b,1,1)$, $\alpha' = (\beta,\beta,\beta)$ *з деяким* $\beta \in (0,1]$, *не існує більше одного розв'язку рівняння (1), для якого виконується умова (48).*

З теорем 1 і 2 та цього твердження випливає така теорема про коректну розв'язність задачі Коші (1), (2).

Теорема 3. *Нехай* $f \in C^{\alpha}_{k(\cdot)}$, *де* $\alpha = (\beta, \beta+1, \beta+2b+1)$ *з деяким* $\beta \in (0,1]$. *Тоді формулою (3) визначається єдиний розв'язок рівняння (1), який належить до простору* $C^{r,\alpha'}_{s(\cdot)}$, *де* $r = (2b,1,1)$, $\alpha' = (\beta,\beta,\beta)$, *і для якого справджуються оцінка (47) та рівності (48).*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

2. *Дронь В.С.* Про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Наук. вісник Чернівецького ун-ту – 2000. – **76**. – С. 32-41.

УДК 517.956.4

©2016 р. С. Д. Івасишен[1], І. П. Мединський[2], Г. С. Пасічник[3]

[1]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут",
[2]Національний університет "Львівська політехніка",
[3]Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМИ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Наведено короткий огляд результатів учнів С. Д. Ейдельмана, що стосуються побудови, дослідження і застосування фундаментального розв'язку задачі Коші для параболічних і деяких ультрапараболічних типу Колмогорова рівнянь з виродженнями на початковій гіперплощині.

A brief review of results of S. D. Eidelman's disciples is presented. These results relate to construction, research and application of fundamental solution of the Cauchy problem for parabolic and some ultraparabolic Kolmogorov equations with degenerations on initial hyperplane.

Вступ. У зв'язку з відзначенням у 2016 р. 70-річчя кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького університету принагідно згадати її фундаторів, які започаткували перспективні напрямки наукових досліджень. Одним із таких фундаторів був С. Д. Ейдельман, який, працюючи в Чернівцях, запропонував і почав активно розробляти низку актуальних проблем теорії параболічних рівнянь. Отримані ним і його учнями результати добре відомі світовій математичній громадськості. У цій статті наводиться короткий огляд одержаних учнями С. Д. Ейдельмана результатів дослідження параболічних рівнянь, які мають виродження на гіперплощині задання початкових даних.

Поштовхом до цих досліджень були праці [1–4], в яких розглядались параболічні за Петровським рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині. У працях А. С. Калашникова [1, 2] знайдено класи коректності для вироджених за часовою змінною параболічних рівнянь другого порядку, що включають зростаючі функції. Ці результати були одержані без використання фундаментального розв'язку. А. В. Глушак та С. Д. Шмулевич [3] побудували фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для вироджених на початковій гіперплощині $\{t = 0\}$ параболічних рівнянь довільного порядку, за допомогою якого визначили клас коректності задачі без початкових умов. Цей клас ширший, ніж клас, одержаний в [1]. Він містить функції, які зростають як при $|x| \to \infty$, так і при $t \to 0$. У праці В. П. Глушка [4] доведено, що сильно вироджене рівняння не дозволяє розглядати класичну задачу Коші з початковими даними при $t = 0$. Тому природно задавати початкову умову з деякою вагою. Саме такі розв'язки, які з деякою вагою задовольняють початкову умову спеціального вигляду, були знайдені в [3].

Розглядатимемо рівняння (скалярне або векторне, тобто систему скалярних рівнянь) вигляду

$$\Big(\alpha(t)\partial_t - \beta(t)\mathbb{A}(t,x,\partial_x) - a_0(t,x)\Big)u = f, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де a_0 – задана функція, $\mathbb{A}$ – диференціальний вираз за n-вимірною просторовою змінною x такий, що вираз

$$\partial_t - \mathbb{A}(t,x,\partial_x) - a_0(t,x) \tag{2}$$

рівномірно параболічний в тому чи іншому сенсі в шарі $\Pi_{[0,T]} := [0,T] \times \mathbb{R}^n$; α і β – неперервні на $[0,T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t > 0$ і $\alpha(0)\beta(0) = 0$, причому функція β монотонно неспадна.

Оскільки рівняння (1) при $t = 0$ вироджується, то для нього не завжди можна розглядати задачу Коші з початковими даними при $t = 0$ у звичайному розумінні. Але можна говорити про фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) згідно з таким означенням.

Означення 1. *ФРЗК для рівняння* (1) *називається функція* $G(t,x;\tau,\xi)$, $0 < \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, *така, що формула*

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi,\ (t,x) \in \Pi_{(\tau,T]},$$

визначає розв'язок рівняння (1) *при* $t > \tau$, $x \in \mathbb{R}^n$, *який задовольняє початкову умову*

$$u(t,x)\bigg|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для будь-якого $\tau \in (0,T)$ *і довільної неперервної та обмеженої функції* φ.

Рівняння (1) мають виродження при $t = 0$, які класифікуються за величинами

$$A(t,\tau) := \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \quad \text{і} \quad B(t,\tau) := \int\limits_{\tau}^{t} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta.$$

Так, у випадку, коли $A(T,0) < +\infty$, рівняння (1) має слабке виродження, а коли $A(T,0) = +\infty$, то – сильне. Якщо $A(T,0) = +\infty$ і $B(T,0) = +\infty$, то маємо випадок дуже сильного виродження.

Зауважимо, що коли $a_0 \equiv 0$, то в рівнянні (1) від змінної $t \in (0,T]$ можна перейти до нової змінної $\tau = -B(T,t)$. При цьому величина τ буде змінюватися на інтервалі $(-B(T,0),0]$, який у випадку дуже сильного виродження є необмеженим. Отже, рівняння (1) зведеться до рівняння без вироджень, яке треба розглядати, взагалі кажучи, на необмеженому часовому інтервалі. Такий розгляд вимагає спеціального додаткового дослідження.

Для скалярних рівнянь, які далі розглядатимемо, побудовано ФРЗК (в деяких випадках в явному вигляді), одержано оцінки ФРЗК та його похідних, установлено різні властивості ФРЗК. За допомогою цих властивостей досліджено коректну розв'язність рівнянь із звичайною початковою умовою у випадку слабкого виродження і без початкової умови, якщо виродження сильне. У випадку слабкого виродження знайдено необхідні й достатні умови зображення розв'язків рівнянь у вигляді суми інтегралів Пуассона та об'ємних потенціалів, досліджено, в якому сенсі дані розв'язки задовольняють початкові умови, та описано множини початкових значень розв'язків.

1. Параболічні за Петровським чи за Ейдельманом рівняння з обмеженими коефіцієнтами. Розглянемо рівняння (1), в якому вираз (2) є рівномірно параболічним за Петровським чи за Ейдельманом і його коефіцієнти обмежені. Наведемо для такого рівняння результати, які опубліковані у працях [5–13]. У формулюваннях обмежимось тільки рівняннями Ейдельмана, частинним випадком яких є рівняння Петровського.

Нехай $n, b_1, \ldots, b_n$ – задані натуральні числа; b – найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $q_j := 2b_j/(2b_j - 1)$, $1 \le j \le n$; $M := \sum\limits_{j=1}^{n}(b/b_j)$; $||k|| := \sum\limits_{j=1}^{n}(bk_j/b_j)$, якщо $k := (k_1, \ldots, k_n)$ – мультиіндекс; $p(x;y) := (\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j - y_j|^{2b_j/b})^{1/2}$ – $\overrightarrow{2b}$-параболічна відстань між точками $x := (x_1, \ldots, x_n)$ і $y := (y_1, \ldots, y_n)$ з $\mathbb{R}^n$; $\Delta_x^{x'}$ і $\Delta_t^{t'}$ – прирости відповідно за змінними x і t; а $\Delta_{t,x}^{t',x'}$ – приріст за t і x;

$$\mathbb{A}(t,x,\partial_x) = \sum_{0<||k||\le 2b} a_k(t,x)\,\partial_x^k. \qquad (3)$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

$\mathbf{A_1}$) *рівняння* (1) *у випадку* (3) *рівномірно* $\overrightarrow{2b}$-*параболічне на множині* $\Pi_{[0,T]}$;

$\mathbf{A_2}$) *коефіцієнти* a_k, $||k|| \le 2b$, *обмежені, неперервні за* t *(для векторного рівняння неперервність за* t a_k *з* $||k|| = 2b$ *рівномірна щодо* $x \in \mathbb{R}^n$*) і гельдерові за* x *рівномірно стосовно* t *з показником* $\gamma \in (0,1)$ *в* $\Pi_{[0,T]}$.

Тоді для цього рівняння існує ФРЗК G, *для якого правильні оцінки*

$$|\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)| \le C(B(t,\tau))^{-M-||k||/(2b)}\times$$
$$\times E_c^d(t,x;\tau,\xi), \qquad (4)$$

$$|\Delta_x^{x'}\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)| \le C(p(x;x'))^\gamma \times$$
$$\times (B(t,\tau))^{-M-(\|k\|+\gamma)/(2b)} \times$$
$$\times \Big(E_c^d(t,x;\tau,\xi) + E_c^d(t,x';\tau,\xi) \Big), \qquad (5)$$
$$0<\tau<t\le T, \quad \{x,x',\xi\}\subset \mathbb{R}^n, \quad \|k\|\le 2b,$$

де $C>0$, $c>0$ *і* $d\in\mathbb{R}$.

В оцінках (4) і (5)

$$E_c^d(t,x;\tau,\xi) := E_c(t,x;\tau,\xi)E^d(t,\tau),$$
$$E^d(t,\tau) := \exp\{dA(t,\tau)\}, \;\; E_c(t,x;\tau,\xi) :=$$
$$= \exp\Big\{ -c\sum_{j=1}^n (B(t,\tau))^{1-q_j}\,|x_j-\xi_j|^{q_j} \Big\}.$$

Якщо додатково до умов теореми 1 виконується ще умова

$\mathbf{A_3)}$ коефіцієнти a_k, $\|k\|\le 2b$, для довільних $\{t,t'\}\subset(0,T]$, $t<t'$, і $x\in\mathbb{R}^n$ задовольняють умову

$$|\Delta_t^{t'}a_k(t,x)| \le C(A(t',t))^{\gamma/(2b)},$$

то, крім оцінок (4) і (5), справджуються оцінки

$$|\Delta_{t,x}^{t',x'}\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)| \le C(p(t',x';t,x))^\gamma \times$$
$$\times\Big((B(t,\tau))^{-M-(\|k\|+\gamma)/(2b)}E_c^d(t,x;\tau,\xi)+$$
$$+(B(t',\tau))^{-M-(\|k\|+\gamma)/(2b)}E_c^d(t',x';\tau,\xi)\Big),$$
$$\|k\|\le 2b, \qquad (6)$$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G(t,x;\tau,y)dy\Big| \le C(B(t,\tau))^{-(\|k\|-\gamma)/(2b)}\times$$
$$\times E^d(t,\tau), \quad 0<\|k\|\le 2b, \qquad (7)$$

$$\Big|\Delta_{t,x}^{t',x'}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G(t,x;\tau,y)dy\Big| \le C(p(t',x';t,x))^\gamma\times$$
$$\times\Big(E^d(t,\tau)+E^d(t',\tau)\Big), \quad 0<\|k\|\le 2b, \;\; (8)$$

де $0<\tau<t<t'\le T$, $\{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $p(t,x;\tau,y) := ((A(t,\tau))^{1/b}+(p(x;y))^2)^{1/2}$.

В оцінках (4)–(8) стала d може бути довільного знака або нулем. У випадку слабкого виродження рівняння (1) у цих оцінках можна брати $\tau=0$ і $d=0$.

ФРЗК G породжує інтеграл Пуассона функції φ

$$u_1(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \;\; (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad (9)$$

інтеграл Пуассона узагальненої міри μ

$$u_2(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)d\mu(\xi), \; (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad (10)$$

та об'ємний потенціал

$$v(t,x) := \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \qquad (11)$$

Результати про ФРЗК дозволяють досліджувати коректну розв'язність задач з початковими умовами і задач без початкових умов у залежності від характеру вироджень рівнянь. Наведемо деякі результати такого дослідження.

Розглядатимемо простори функцій, які є неперервними або мають потрібну гладкість та задовольняють певні умови при $t\to 0$ і $|x|\to\infty$. Їх поведінка при $t\to 0$ описується функцією

$$(\delta(t))^\mu(\Delta(t,0))^r E^d(T,t), \quad t\in(0,T],$$

де μ – невід'ємне ціле число, $\{r,d\}\subset\mathbb{R}$, $\delta:[0,T]\to[0,\infty)$ – неперервна монотонно неспадна функція така, що для довільних $t\in(0,T]$

$$0<\delta(t)\le\beta(t), \quad \Delta(t,0) := \int_0^t \frac{\delta(\lambda)}{\alpha(\lambda)}d\lambda < \infty,$$

а при $|x|\to\infty$ – функцією

$$\Phi_\nu(t,x) := \exp\Big\{ \nu\sum_{j=1}^n k_j(t,a_j)|x_j|^{q_j} \Big\},$$
$$(t,x)\in\Pi_{[0,T]}, \quad \nu\in\{-1,1\}, \qquad (12)$$

з $\vec{k}(t,\vec{a}) := (k_1(t,a_1),...,k_n(t,a_n))$, $t\in[0,T]$, де

$$k_j(t,a_j) :=$$

$$:= c_0 a_j (c_0^{2b_j-1} - (T - B(T,t)) a_j^{2b_j-1})^{1-q_j},$$
$$j \in \{1, ..., n\}, \qquad (13)$$

для $t \in (0,T]$ и $k_j(0,a_j) := 0$, якщо $B(T,0) = \infty$. Тут c_0 – фіксоване число з проміжку $(0,c)$, де c – стала з оцінок ФРЗК, а числа a_j такі, що $0 \le a_j < c_0 T^{1-q_j}$.

Зазначимо, що кожна з функцій $k_j(\cdot, a_j)$, $j \in \{1, ..., n\}$, монотонно зростає і справджується нерівність

$$E_{c_0}(t,x;\tau,\xi)\Phi_1(\tau,\xi) \le \Phi_1(t,x),$$
$$0 < \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Нехай $p \in [1,\infty]$ і $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, – задана комплекснозначна функція, вимірна за x при довільному $t \in [0,T]$. Для кожного $t \in [0,T]$ означимо норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} := \|u(t,\cdot)\Phi_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Через $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$ позначимо простір вимірних за Лебегом функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких скінченна норма $\|\varphi\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$.

Нехай $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борельових множин простору $\mathbb{R}^n$, а M – сукупність усіх злічено адитивних функцій $\nu : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ (узагальнених борельових мір), які мають скінченну повну варіацію $|\nu|$. Через $M^{\vec{k}(0,\vec{a})}$ позначимо сукупність усіх узагальнених мір $\mu : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ таких, що функція

$$\nu(A) = \int_A \Phi_{-1}(0,x)\, d\mu(x), \quad A \in \mathfrak{B},$$

належить до простору M. При цьому для довільної $\mu \in M^{\vec{k}(0,\vec{a})}$

$$\|\mu\|^{\vec{k}(0,\vec{a})} := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{-1}(0,x)\, d|\mu|(x) < \infty.$$

Використовуватимемо ще простори $L_1^{-k(T,\vec{a})}$, вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою $\|\psi\|_1^{-\vec{k}(T,\vec{a})} := \|\psi(\cdot)\Phi_1(T,\cdot)\}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$ і простір $C_0^{-\vec{k}(T,\vec{a})}$ неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що $|\psi(x)|\Phi_1(T,x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Для $\psi \in C_0^{-\vec{k}(T,\vec{a})}$ покладемо $\|\psi\|_\infty^{-\vec{k}(T,\vec{a})} := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} (|\psi(x)|\,\Phi_1(T,x))$.

Для функції $f : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$ використовуватимемо такі умови:

$\mathbf{Д_1}$) для довільного $R > 0$ існують сталі $C > 0$ і $\gamma \in (0,1]$ такі, що для будь-яких $t \in (0,T]$ і $\{x,\xi\} \subset B_R$ виконується нерівність

$$|\Delta_x^\xi f(t,x)| \le C(p(x,\xi))^\lambda;$$

$\mathbf{Д_2}$) для будь-якого $R > 0$ існують сталі $C > 0$ і $\gamma \in (0,1]$ такі, що для довільних $t \in (0,T]$ и $\{x,\xi\} \subset B_R$ виконується нерівність

$$|\Delta_x^\xi f(t,x)| \le C\delta(t)E^{-d}(T,t)(p(x;\xi))^\gamma,$$

де $\delta : (0,T] \to [0,\infty)$ – функція, яка задовольняє умову $\int\limits_0^T (\delta(t)/\alpha(t))dt < \infty$;

$\mathbf{Д_{3p}}$) для довільних $t \in (0,T]$ скінченні величини $\|f(t,\cdot)\|^{\vec{k}(t,\vec{a})}$ і $F_{3p}(t) := \int\limits_0^t (B(t-\tau))^{-1+1/(2b)}\|f(\tau,\cdot)\|^{\vec{k}(\tau,\vec{a})}d\tau$, $1 \le p \le \infty$;

$\mathbf{Д_4}$) існує така стала $C > 0$, що для довільних $t \in (0,T]$ виконується нерівність

$$F(t) := \int_0^t E^d(T,\tau)\|f(\tau,\cdot)\|^{\vec{k}(\tau,\vec{a})}\frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \le C,$$

де B_R – куля в $\mathbb{R}^n$ радіуса R з центром у початку координат,

$$\|f(\tau,\cdot)\|^{\vec{k}(\tau,\vec{a})} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(|f(\tau,x)|\Psi_{-1}(\tau,x)).$$

У випадку слабкого виродження можна розглядати задачу Коші для рівняння (1) з початковою умовою

$$u(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (14)$$

Теорема 2. *Нехай рівняння* (1) *у випадку* (3) *має слабке виродження і для його коефіцієнтів виконуються умови* $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ *та умова*

$\mathbf{A_3}$) *існують похідні* $\partial_x^k a_k$, $||k|| \le 2b$, *які задовольняють умову* $\mathbf{A_2}$.

Тоді правильними є такі твердження:

1) якщо $\varphi \in L_p^{\vec{k}(0,\vec{a})}$ *і функція* f *задовольняє умови* $\mathbf{Д_1}$ *та* $\mathbf{Д_{3p}}$, $1 \le p \le \infty$, *то функція*

$$u(t,x) := u_1(t,x) + v(t,x),\ (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (15)$$

є єдиним розв'язком рівняння (1) *таким, що*

$$\exists C>0 \quad \forall t\in(0,T] \quad \forall l\in\mathbb{Z}_+^n,\ ||l||\le 2b:$$
$$\|\partial_x^l u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}\le C\left(\|\varphi\|_p^{\vec{k}(0,\vec{a})}+F_{3p}(t)\right),$$

при $1\le p<\infty$

$$\lim_{t\to 0+}\|u(t,\cdot)-\varphi\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}=0$$

і при $p=\infty$

$$\lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u(t,x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\varphi(x)dx$$

для будь-якої функції $\psi\in L_1^{-\vec{k}(T,\vec{a})}$;

2) якщо $\mu\in M^{\vec{k}(0,\vec{a})}$ *і для функції* f *виконуються умови* $\mathbf{Д_1}$ *та* $\mathbf{Д_{31}}$, *то функція*

$$u(t,x):=u_2(t,x)+v(t,x),\ (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{16}$$

є єдиним розв'язком рівняння (1), *який задовольняє такі умови:*

$$\exists C>0 \quad \forall t\in(0,T]:$$
$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\vec{k}(t,\vec{a})}\le C\left(\|\mu\|^{\vec{k}(0,\vec{a})}+F_{31}(t)\right),$$

і

$$\lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u(t,x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)d\mu(x)$$

для довільної функції $\psi\in C_0^{-\vec{k}(T,\vec{a})}$.

Якщо рівняння (1) має дуже сильне виродження, то для цього рівняння початкову умову вигляду (14) задовольнити, взагалі кажучи, не можна. Наведемо теорему, в якій даються умови коректної розв'язності дуже сильно виродженого рівняння (1) без початкових умов.

Теорема 3. *Нехай для коэфіцієнтів* a_k, $\|k\|\le 2b$, *рівняння* (1) *виконуються умови* $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ *та умова*

$\mathbf{A_4}$) *коефіцієнти* a_k, $||k||\le 2b$, *обмежені, гельдерові за* t, x *з показником* $\gamma\in(0,1)$ *в* $\Pi_{[0,T]}$ *і та* $A(T,0)=\infty$. *Якщо функція* $f:\Pi_{(0,T]}\to\mathbb{C}$ *непрервна та задовольняє зі сталою* d *з оцінок* (4) *умови* $\mathbf{Д_2}$ *і* $\mathbf{Д_4}$, *то формула* (11) *визначає єдиний розв'язок рівняння* (1), *для якого правильна оцінка*

$$\|v(t,\cdot)\|^{\vec{k}(t,\vec{a})}\le CE^{-d}(T,t)F(t),\quad t\in(0,T].$$

У випадку сильного виродження рівняння (1), можна ставити початкову умову у вигляді

$$\left(u(t,x)E^d(T,t)\right)\Big|_{t=0}=\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{17}$$

де число d з оцінок (4). Розв'язок задачі (1), (17) зображується у вигляді

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(t,x;\xi)\varphi(\xi)d\xi+v(t,x),$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{18}$$

де

$$G_0(t,x;\xi):=\lim_{\tau\to 0}(G(t,x;\tau,\xi)E^{-d}(T,\tau)).$$

Зазначимо, що в працях В. В. Городецького та І. В. Житарюка [14, 15] вивчені властивості розв'язків задачі Коші для параболічних рівнянь зі слабким виродженням на початковій гіперплощині та початковими даними із спеціальних просторів узагальнених функцій.

2. Параболічні рівняння зі зростаючими коефіцієнтами. У випадку, коли коефіцієнти виразу $\mathbb{A}$ та a_0 можуть зростати при $|x|\to+\infty$, результати опубліковано в [16–18]. Сформулюємо відповідні теореми для випадку рівнянь з

$$\mathbb{A}(t,x,\partial_x)=\sum_{||k||\le 2b}a_k(t,x)\,\partial_x^k,\quad a_0(t,x)=0 \tag{19}$$

і

$$\mathbb{A}(t,x,\partial_x)=\sum_{0<||k||\le 2b}a_k(t,x)\partial_x^k,$$
$$a_0(t,x)=b(t,x), \tag{20}$$

Щоб сформулювати припущення щодо коефіцієнтів рівняння (1), розглянемо відповідне рівнянню (1) у випадку (19) рівняння без виродження

$$\Big(\partial_t-\sum_{||k||\le 2b}a_k(t,x)\partial_x^k\Big)u(t,x)=0,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad (21)$$

та у випадку (20) рівняння без виродження і без члена з коефіцієнтом b

$$\Big(\partial_t-\sum_{0<||k||\le 2b}a_k(t,x)\partial_x^k\Big)u(t,x)=0,$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad (22)$$

Означення 2. *Рівняння з виродженням (1) у випадках (19) і (20) називають дисипативними $\overrightarrow{2b}$-параболічними в $\Pi_{[0,T]}$, якщо такими є відповідно рівняння (21) і (22).*

Означення 3. *Рівняння (21) називатимемо дисипативним $\overrightarrow{2b}$-параболічним (за Ейдельманом) в $\Pi_{[0,T]}$, якщо існує неперервна функція $D:\mathbb{R}^n\to[1,\infty)$, яка задовольняє такі умови:*

1) $D(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$;

2) функції $b_k(t,x):=a_k(t,x)(D(x))^{||k||-2b}$, $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$, $||k||\le 2b$, обмежені;

3) рівняння

$$\Big(\partial_t-\sum_{||k||+k_{n+1}=2b}b_k(t,x)\partial_x^k(-i\partial_{x_{n+1}})^{k_{n+1}}\Big)v(t,x)=0$$

з обмеженими коефіцієнтами і додатковою просторовою змінною x_{n+1} є рівномірно на $\Pi_{[0,T]}\times\mathbb{R}$ $\overrightarrow{2B}$-параболічним, де $\overrightarrow{2B}:=(2b_1,\ldots,2b_n,2b)$. Функція D при цьому називається характеристикою дисипації рівняння (21).

Теорема 4. *Нехай для коефіцієнтів a_k, $\|k\|\le 2b$, рівняння (1) у випадку (19) виконуються умови*

Б$_1$) *рівняння (1) є дисипативним $\overrightarrow{2b}$-параболічним у $\Pi_{[0,T]}$ з характеристикою дисипації D;*

Б$_2$) *коефіцієнти a_k, $||k||\le 2b$, рівняння мають неперервні похідні $\partial_x^l a_k$, $||k||\le 2b$, $||l||\le 2b$, для яких справджуються оцінки*

$$|\partial_x^l a_k(t,x)|\le C(D(x))^{2b-||k||+||l||(1-\varepsilon)},$$
$$(t,x)\in\Pi_{[0,T]},$$

де $C>0$, $\varepsilon\in(0,1)$; функції b_k, $||k||\le 2b$, як функції t, є неперервними рівномірно щодо $x\in\mathbb{R}^n$;

Б$_3$) *похідні $\partial_x^l a_k$, $||k||\le 2b$, $||l||\le 2b$, задовольняють локальну умову Гельдера за x з показником $\lambda\in(0,1]$ відносно відстані p рівномірно щодо $t\in[0,T]$, тобто*

$$\forall R>0\ \exists C>0\ \forall\{x,x'\}\subset B_R\ \forall t\in[0,T]:$$
$$|\Delta_x^{x'}\partial_x^l a_k(t,x)|\le C(p(x,x'))^\lambda.$$

Тоді для такого рівняння існує ФРЗК G, для якого правильні оцінки

$$|\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)|\le C(B(t,\tau))^{-M-\|k\|/(2b)}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)\exp\{dB(t,\tau)\} \qquad (23)$$

і

$$|\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)|\le C\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{||k||}(B(t,\tau))^{-M-(||k||-j)/(2b)}(D(x))^{j(1-\varepsilon)}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)\exp\{dB(t,\tau)+g(x)-g(\xi)\}, \qquad (24)$$

$$0<\tau<t\le T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ \|k\|\le 2b,$$

в яких $C>0$, $c>0$, $d\in\mathbb{R}$, а g – довільна функція, що задовольняє умову

Б$_4$) *$g(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$; існують локально неперервні за Гельдером з показником λ з умови $\mathbf{A}_3$ похідні $\partial_x^k g$, $0<||k||\le 4s$, які пов'язані з характеристикою дисипації D умовою*

$$|\partial_x^k g(x)|\le C\eta(D(x))^{||k||(1-\varepsilon)},$$
$$x\in\mathbb{R}^n,\quad 0<||k||\le 4b,$$

де $C>0$, $\varepsilon\in(0,1)$, η – досить мале додатне число, вибором якого в кожній конкретній ситуації розпоряджаємось.

Для рівняння (1) і випадку (20) правильна наступна теорема про ФРЗК.

Теорема 5. *Якщо для коефіцієнтів a_k, $0<\|k\|\le 2b$, і характеристики дисипації D виконані умови*

В$_1$) *виконується умова* **Б$_1$***;*

В$_2$) *$\exists C>0\ \exists\gamma\in(0,1]\ \forall\{(t,x),(t,y)\}\subset\Pi_{[0,T]}\ \forall k\in\mathbb{Z}_+^n$, $||k||\le 2b$: $|\Delta_x^y a_k(t,x)|\le C(p(x,y))^\gamma((D(x))^{2b-||k||}+(D(y))^{2b-||k||})$; функції b_k, $||k||\le 2b$, як функції t, є неперервними рівномірно стосовно $x\in\mathbb{R}^n$;*

В$_3$) *характеристика дисипації D задовольняє такі умови:*

1) $\exists C>0\ \forall\{x,y\}\subset\mathbb{R}^n$, $q(x,y)\le 1$: $D(x)\le CD(y)$;

2) $\exists C>0\ \forall\{x,y\}\subset\mathbb{R}^n,\ q(x,y)>1$*:*

$$D(x)\le C\exp\{\varepsilon\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|(D(y))^{m_j}\},$$

де ε *– досить мале додатне число, вибором якого в конкретній ситуації розпоряджаємось, а функція* b *обмежена, неперервна за* t *і гельдерова за* x *з показником* γ *в* $\Pi_{[0,T]}$*, а* $q(x,y):=(\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^{q_j})^{1/q'}$ *– спеціальна відстань між точками* x *і* y *простору* $\mathbb{R}^n$*, а* $q':=\max_{i\in\{1,\dots,n\}}q_j$*, то для рівняння* (1) *у випадку* (20) *існує ФРЗК* G*, для якого правильні при* $\|k\|<2b$ *оцінки*

$$|\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)|\le C_l\left((B(t,\tau))^{-M-\|k\|/(2b)}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\{-cB(t,\tau)(D(\xi))^{2b}\}+(D(\xi))^{-l}\right)\times$$
$$\times E_c^d(t,x;\tau,\xi),\qquad(25)$$

$$|\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)|\le C\sum_{j=0}^{\|k\|}(B(t,\tau))^{-M-(\|k\|-j)/(2b)}\times$$
$$(D(x))^jE_c^d(t,x;\tau,\xi)\exp\{g(x)-g(\xi)\},\quad(26)$$

а при $\|k\|=2b$ *оцінки*

$$|\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)|\le C_l\left((B(t,\tau))^{-M-1}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\{-cB(t,\tau)(D(\xi))^{2b}\}+(D(\xi))^{-l}\right)\times$$
$$\times E_c^d(t,x;\tau,\xi)\times$$

$$\times\left((D(x))^{2b}+\exp\{2b\varepsilon MB(t,\tau)(D(x))^{2b}\}\right).\qquad(27)$$

В оцінках (25)*–*(27) $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$*,* l *– довільне додатне число,* g *– довільна функція, що зводовольняє умову*

B₄) $g(x)\to\infty$ *при* $|x|\to\infty$*, існують похідні* $\partial_x^k g$*,* $0<||k||\le 2b$*, для яких справджуються нерівності*

$$|\partial_x^k g(x)|\le C\eta(D(x))^{||k||},$$
$$|\Delta_x^y\partial_x^k g(x)|\le C\eta(p(x,y))^\gamma\left((D(x))^{||k||}+\right.$$
$$\left.+(D(y))^{||k||}\right),\quad\{x,y\}\subset\mathbb{R}^n,\quad 0<||k||\le 2b,$$

де $C>0$*,* $\gamma\in(0,1]$ *з умови* $\mathbf{Б}_2$*,* η *– досить мале додатне число, вибором якого в конкретній ситуації розпоряджаємось;*
$C_l>0$*,* $C>0$*,* $c>0$*,* $d\in\mathbb{R}$*.*

Зазначимо, що набір умов **В** не вимагає великої гладкості коефіцієнтів, але накладається спеціальне обмеження на характеристику дисипації D.

Наведемо ще результати про ФРЗК для рівняння (1) у випадку (19) зі зростаючими коефіцієнтами, для якого виконані інші умови. Нехай $b':=\max_{j\in\{1,\dots,n\}}b_j$, $\delta_0\in(0,1)$ і функція $\eta_0\in C^{4b'}(\mathbb{R})$ така, що $\eta_0(r):=|r|$ при $|r|\ge 1+\delta_0$, $\eta_0(r):=1$ при $|r|\le 1-\delta_0$ і $|\eta_0^{(k)}(r)|\le C$, $r\in\mathbb{R}$, $k\in\{1,\dots,4b'\}$. Розглянемо функції

$$D_0(x):=\left(\sum_{j=1}^{n}(\eta_0(x_j))^{q_j}\right)^{(1-\varepsilon_0)/(2b)},\ x\in\mathbb{R}^n,\qquad(28)$$

і

$$g_0(t,x):=a(1-(Aa)^{2b-1}B(t,0))^{-1/(2b-1)}\times$$
$$\times(D_0(x))^{2b},\ (t,x)\in\Pi_{[0,T]},\qquad(29)$$

де число $\varepsilon_0\in(0,1)$ в кожній конкретній ситуації вибирається спеціальним способом, A – досить велике додатне число, а число $a>0$ таке, що виконується нерівність $T\le(Aa)^{1-2b}/2$.

Використовуватимемо наступний набір умов з функцією $D=D_0$, означеною в (28).

$\mathbf{Г_1}$. Функції $b_k(t,x):=a_k(t,x)\times\times(D_0(x))^{\|k\|-2b}$, $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$, $\|k\|\le 2b$, обмежені і рівняння (21) рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічне в $\Pi_{[0,T]}$.

$\mathbf{Г_2}$. Виконуються умови $\mathbf{A}_1$ і $\mathbf{A}_3$.

$\mathbf{Г_3}$. Для рівняння (1) у випадку (19) існує спряжене рівняння, для коефіцієнтів якого виконується умова $\mathbf{Б}_2$.

$\mathbf{Г_4}$. Має місце слабке виродження.

Теорема 6. *Якщо для рівняння* (1) *у випадку* (19) *виконуються умови* $\mathbf{Г_1}$*,* $\mathbf{Г_2}$ *і* $\mathbf{Г_4}$*, то для нього існує ФРЗК* G*, для якого правильними є оцінки*

$$|\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)|\le C\times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\|k\|} (B(t,\tau))^{-(M+\|k\|-j)/(2b)} (D_0(x))^{j(1-\varepsilon)} \times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi) \exp\{g_0(t,x) - g_0(\tau,\xi)\},$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \|k\| \le 2b, \tag{30}$$

де $C > 0$, $c > 0$, *функції* D_0 *і* g_0 *відповідно з* (28) *і* (29).

Якщо додатково припустити виконання умови $\mathbf{Г_3}$, *то ФРЗК* G *володіє властивістю нормальності і для нього правильна формула згортки.*

Наведемо теореми про розв'язність рівнянь зі зростаючими коефіцієнтати.

Крім функцій (12), розглянемо ще функції

$$\Psi_\nu(x) := \exp\{\nu g(x)\},$$
$$\Psi_\nu(t,x) := \exp\{\nu g_0(t,x)\},$$
$$(t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad \nu \in \{-1,1\},$$

і норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a}),g(\cdot)} :=$$
$$:= \|u(t,\cdot)\Phi_{-1}(t,\cdot)\Psi_{-1}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$
$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a}),g_0(t,\cdot)} :=$$
$$:= \|u(t,\cdot)\Phi_{-1}(t,\cdot)\Psi_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$
$$1 \le p \le \infty, \quad t \in [0,T],$$

і відповідно простори $L_p^{\vec{k}(0,\vec{a}),g(\cdot)}$, $L_p^{\vec{k}(0,\vec{a}),g_0(0,\cdot)}$, $L_1^{-\vec{k}(T,\vec{a}),-g(\cdot)}$, $L_1^{-\vec{k}(T,\vec{a}),-g_0(T,\cdot)}$, $C_0^{-\vec{k}(T,\vec{a}),-g(\cdot)}$, $C_0^{-\vec{k}(T,\vec{a}),-g_0(T,\cdot)}$, $M^{\vec{k}(0,\vec{a}),g(\cdot)}$, $M^{\vec{k}(0,\vec{a}),g_0(0,\cdot)}$

Для функції $f : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$ використовуватимемо ще такі умови:

$\mathbf{Д_{5p}}$) для довільного $t \in (0,T]$ скінченними є величини $||f(t,\cdot)||^{\vec{k}(t,\vec{a}),g(\cdot)}$ і $F_{5p}(t) \equiv \int\limits_0^t \|f(\tau,\cdot)\|_p^{\vec{k}(\tau,\vec{a}),g(\cdot)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty, \quad 1 \le p \le \infty;$

$\mathbf{Д_{6p}}$) для довільного $t \in (0,T]$ скінченними є величини $||f(t,\cdot)||_p^{\vec{k}(t,\vec{a}),g_0(t,\cdot)}$ і $F_{6p}(t) := \int\limits_0^t \|f(\tau,\cdot)\|_p^{\vec{k}(\tau,\vec{a}),g_0(\tau,\cdot)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty, \quad 1 \le p \le \infty;$

$\mathbf{Д_7}$) для будь-якого $R > 0$ існують сталі $C > 0$ і $\gamma \in (0,1]$ такі, що для довільних $t \in (0,T]$ і $\{x,\xi\} \subset B_R$ виконується нерівність

$$|\Delta_x^\xi f(t,x)| \le C\delta(t) E^{-d}(B(T,t))(p(x,\xi))^\lambda,$$

де $\delta : (0,T] \to [0,\infty)$ – функція, яка задовольняє умову $\int\limits_0^T (\delta(t)/\alpha(t))dt < \infty$, а d – стала з оцінок (24);

$\mathbf{Д_8}$) для довільного $t \in (0,T]$ скінченними є величини $||f(t,\cdot)||_\infty^{\vec{k}(t,\vec{a}),g_0(t,\cdot)}$ і $F(t) := \int\limits_0^t E^d(B(T,\tau))\|f(\tau,\cdot)\|_\infty^{\vec{k}(\tau,\vec{a}),g_0(\tau,\cdot)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty$, де стала d така сама, як в умові $\mathbf{Д_7}$.

Теорема 7. *Нехай рівняння* (1) *у випадку* (19) *має слабке виродження і виконуються умови* $\mathbf{Б_1}$ – $\mathbf{Б_3}$. *Тоді правильними є такі твердження:*

1) якщо $\varphi \in L_p^{\vec{k}(0,\vec{a}),g(\cdot)}$ *і функція* f *задовольняє умови* $\mathbf{Д_1}$ *та* $\mathbf{Д_{5p}}$, $1 \le p \le \infty$, *то функція* (15) *є розв'язком рівняння* (1) *таким, що*

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, t \in (0,T]:$$
$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a}),g(\cdot)} \le C\left(\|\varphi\|_p^{\vec{k}(0,\vec{a}),g(\cdot)} + F_{5p}(t)\right),$$

при $1 \le p < \infty$

$$\lim_{t\to 0+} \|u(t,\cdot) - \varphi\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a}),g(\cdot)} = 0$$

і при $p = \infty$

$$\lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)dx$$

для будь-якої функції $\psi \in L_1^{-\vec{k}(T,\vec{a}),-g(\cdot)}$;

2) якщо $\mu \in M^{\vec{k}(0,\vec{a}),g(\cdot)}$ *і для функції* f *виконуються умови* $\mathbf{Д_1}$ *та* $\mathbf{Д_{51}}$, *то функція* (16) *є розв'язком рівняння* (1), *який задовольняє такі умови:*

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, t \in (0,T]:$$
$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\vec{k}(t,\vec{a}),g(\cdot)} \le C\left(\|\mu\|^{\vec{k}(0,\vec{a}),g(\cdot)} + F_{51}(t)\right),$$

і

$$\lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi'(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi'(x)d\mu(x)$$

для довільної функції $\psi \in C_0^{-\vec{k}(T,\vec{a}),-g(\cdot)}$.

Теорема 8. *Нехай для слабко виродженого рівняння* (1) *у випадку* (19) *виконуються умови* $\mathbf{Г_1}$, $\mathbf{Г_2}$ *і* $\mathbf{Г_4}$. *Тоді*

1) якщо $\varphi \in L_p^{\vec{k}(0,\vec{a}),g_0(0,\cdot)}$ *і функція* f *задовольняє умови* **Д₁** *та* **Д₆ₚ**, $1 \le p \le \infty$, *з функцією* g_0 *з* (29), *то функція* (15) *є розв'язком рівняння* (1) *таким, що*

$$\exists C > 0 \quad \forall t \in (0,T]: \ \|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a}),g_0(t,\cdot)} \le \le C \left(\|\varphi\|_p^{\vec{k}(0,\vec{a}),g_0(0,\cdot)} + F_{6p}(t) \right),$$

при $1 \le p < \infty$

$$\lim_{t \to 0+} \|u(t,\cdot) - \varphi\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a}),g_0(t,\cdot)} = 0$$

і при $p = \infty$

$$\lim_{t \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi'(x)\overline{u(t,x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi'(x)\overline{\varphi(x)}dx$$

для будь-якої функції $\psi \in L_1^{-\vec{k}(T,\vec{a}),-g_0(T,\cdot)}$;

2) якщо $\mu \in M^{\vec{k}(0,\vec{a}),g_0(0,\cdot)}$ *і для функції* f *виконуються умови* **Д₁** *та* **Д₃₆**, *то функція* (16) *є розв'язком рівняння* (1), *який задовольняє такі умови:*

$$\exists C > 0 \quad \forall t \in (0,T]: \ \|u(t,\cdot)\|_1^{\vec{k}(t,\vec{a}),g_0(t,\cdot)} \le \le C \left(\|\mu\|^{\vec{k}(0,\vec{a}),g_0(0,\cdot)} + F_{61}(t) \right),$$

і для довільної функції $\forall\, \psi \in C_0^{-\vec{k}(T,\vec{a}),-g_0(T,\cdot)}$:

$$\lim_{t \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\overline{u(t,x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)d\overline{(\mu(x))}.$$

Якщо ж додатково припускати виконання умови **Г₃**, *то розв'язки, що визначаються формулами* (15) *і* (16), *є єдиними в класі функцій, які задовольняють умову*

$$\exists C > 0 \ \forall t \in (0,T]: \ ||u(t,\cdot)||_p^{\vec{k}(t,\vec{a}),D(\cdot),g_0(t,\cdot)} := = ||\Phi_{-1}(t,\cdot)(D(\cdot))^{2b}\Psi_{-1}(t,\cdot)u(t,\cdot)||_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

Теорема 9. *Нехай для рівняння* (1) *у випадку* (19) *виконуються умови* **Б₁** – **Б₃** *і* $B(T,0) = \infty$. *Якщо* f *задовольняє умови* **Д₇** *і* **Д₈**, *то функція* (11) *є розв'язком рівняння* (1), *для якого справджується оцінка*

$$||v_2(t,\cdot)||_\infty^{\vec{k}(t,\vec{a}),g(\cdot)} \le CE^{-d}(B(T,t))F(t), \quad t \in (0,T].$$

Цей розв'язок єдиний, якщо єдиним є відповідний розв'язок задачі Коші для рівняння (21) *в* $\Pi_{[t_1,T]}$ *при довільному* $t_1 \in (0,T)$.

Аналогічні результати про розв'язність задачі Коші та задачі без початкових умов одержуються й для рівняння (1) у випадку (20) за умов **В**.

Зауважимо, що наведені в пунктах 1 і 2 результати для скалярних рівнянь узагальнено в працях [16–18] на системи рівнянь.

3. Ультрапараболічні рівняння типу Колмогорова Нехай n, n_1, n_2 і n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \ge n_2 \ge n_3$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$, просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних: основної групи $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ і груп змінних виродження $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ та $x_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$, де $x_j := (x_{j1},\ldots,x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1,2,3\}$, так що $x := (x_1,x_2,x_3)$.

У працях [19–21] розглянуто рівняння вигляду (1) з

$$\mathbb{A}(t,x,\partial_x) = \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} + A(t,\partial_{x_1}), \quad a_0(t,x) = a_0(t), \tag{31}$$

де $A(t,\partial_{x_1})$ – диференціальний вираз з неперервними на $[0,T]$ коефіцієнтами такий, що вираз $\partial_t - A(t,\partial_{x_1})$ є рівномірно параболічним за Петровським чи за Ейдельманом у шарі $\Pi^1_{[0,T]} := [0,T] \times \mathbb{R}^{n_1}$. Для таких рівнянь побудовано ФРЗК, вивчено його властивості та властивості породжених ним інтегралів Пуассона, які застосовано до дослідження розв'язності цих рівнянь зі звичайними початковими даними у випадку слабкого виродження.

У статті [22] результати праць [19–21], що стосуються побудови та дослідження ФРЗК, узагальнено на випадок рівняння (1) другого порядку з

$$\mathbb{A}(t,x,\partial_x) = \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} + A(t,x_1,\partial_{x_1}),$$

$$A(t,x_1,\partial_{x_1}) := \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x_1)\partial_{x_{1j}}, \ \ a_0(t,x)=a_0(t,x_1), \quad (32)$$

а просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з двох груп змінних: основної групи $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ і групи змінних виродження $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$.

Останні нові результати стосуються рівняння (1) з

$$\mathbb{A}(t,x,\partial_x)=\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}}+\sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}+$$
$$+\sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}}+b\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}\partial_{x_{1j}},$$
$$a_0(t,x)=a, \quad (33)$$

де a_{jl}, a і b – сталі, причому

$$\exists\,\delta>0 \ \ \forall\,\sigma_1\in\mathbb{R}^{n_1}: \ \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s}\geq\delta|\sigma_1|^2.$$

У цьому випадку отримано явну формулу для ФРЗК, з якої для довільного $T>0$ і будь-яких мультиіндексів $\{k_l,m_l\}\subset\mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l\in\{1,2,3\}$, випливають оцінки

$$|\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\xi_1}^{m_1}\partial_{\xi_2}^{m_2}\partial_{\xi_3}^{m_3}G(t,x;\tau,\xi)|\leq$$
$$\leq C_{k_1k_2k_3m_1m_2m_3}e^{n_1bB(t,\tau)}\times$$
$$\times\prod_{l=1}^{3}(p_l(B(t,\tau)))^{-(n_l+|k_l|+|m_l|)/2}\times$$
$$\times\hat{E}_c^a(t,x;\tau,\xi), \ 0\leq\tau<t\leq T, \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \quad (34)$$

де $C_{k_1k_2k_3m_1m_2m_3}$ і c – додатні сталі, які залежать лише від коефіцієнтів a_{jl}, b, n_1, n_2 і n_3, а також від T тільки у випадку, коли $b>0$;

$$\hat{E}_c^a(t,x;\tau,\xi):=\hat{E}_c(t,x;\tau,\xi)\,E^a(t,\tau),$$
$$\hat{E}^a(t,\tau):=\exp\{aA(t,\tau)\}$$
$$\hat{E}_c(t,x;\tau,\xi):=$$
$$=\exp\Big\{-c\,\Big(\frac{|e^{bB(t,\tau)}X_1(B(t,\tau))-\xi_1|^2}{p_1(B(t,\tau))}+$$
$$+\sum_{l=2}^{3}\frac{|X_l(B(t,\tau))-\xi_l|^2}{p_l(B(t,\tau))}\Big)\Big\},$$
$$X_1(t):=x_1, \quad X_2(t):=x_2+\alpha_b(t)\hat{x}_1,$$
$$X_3(t):=x_3+tx_2'+\frac{\alpha_b(t)-t}{b}x_1',$$
$$\alpha_b(t):=\begin{cases}\dfrac{e^{bt}-1}{b}, & b\neq 0,\\ t, & b=0.\end{cases}$$

Для цього рівняння вводяться аналогічно до (13) такі набори функцій, визначених для $t\in[0,T]$:

$$\vec{\hat{k}}(t,\vec{a}):=(\hat{k}_1(t,a_1),\hat{k}_2(t,a_2),\hat{k}_3(t,a_3)),$$
$$\hat{k}_1(t,a_1):=\frac{c_0a_1e^{2b(T-B(T,t))}}{c_0-a_1p_1(T-B(T,t))},$$
$$\hat{k}_l(t,a_l):=\frac{c_0a_l}{c_0-a_lp_l(T-B(T,t))}, \quad l\in\{2,3\};$$
$$\vec{\hat{s}}(t):=(s_1(t),s_2(t),s_3(t)),$$
$$\vec{s_l}(t):=(s_{l1}(t),\ldots,s_{ln_l}(t)), \ l\in\{1,2,3\},$$
$$\hat{s}_{1j}(t):=\hat{k}_1(t,a_1)+$$
$$+2\theta(n_2-j)(\alpha_b(B(t,0)))^2\hat{k}_2(t,a_2)+$$
$$+4\Big(\frac{\alpha_b(B(t,0))-B(t,0)}{b}\Big)^2\theta(n_3-j)\hat{k}_3(t,a_3),$$
$$j\in\{1,\ldots,n_1\},$$
$$\hat{s}_{2j}(t):=2\hat{k}_2(t,a_2)+4(B(t,0))^2\theta(n_3-j)\times$$
$$\times\hat{k}_3(t,a_3), \ j\in\{1,\ldots,n_2\},$$
$$\hat{s}_{3j}(t):=4\hat{k}_3(t,a_3), \quad j\in\{1,\ldots,n_3\},$$

де $c_0\in(0,c)$, c – стала з оцінок (34), $\vec{a}:=(a_1,a_2,a_3)$ – набір таких невід'ємних чисел, що $p_l(T)<\dfrac{c_0}{a_l}$, $l\in\{1,2,3\}$, $\theta(\tau)=1$ для $\tau\geq 0$ і $\theta(\tau)=0$ для $\tau<0$, а також вагові функції

$$\hat{\Phi}_\nu(t,x):=\exp\Big\{\,\nu\sum_{l=1}^{3}\hat{k}_l(t,a_l)|X_l(B(t,0))|^2\,\Big\},$$
$$\hat{\Psi}_\nu(t,x):=\exp\Big\{\,\nu\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}\hat{s}_{lj}(t)\,|x_{lj}|^2\,\Big\},$$
$$(t,x)\in\Pi_{[0,T]}, \quad \nu\in\mathbb{R}.$$

і норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{\hat{k}}(t,\vec{a})}:=\|u(t,\cdot)\hat{\Phi}_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$
$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{\hat{s}}(t)}:=\|u(t,\cdot)\hat{\Psi}_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Зазначимо, що початкова умова у випадку слабкого виродження задовольняється в розумінні другої норми.

4. Зауваження та висновки. У працях [23–25] установлено локальну розв'язність квазілінійних параболічних рівнянь з виродженнями на початковій гіперплощині.

Огляд деяких результатів з теорії параболічних рівнянь з виродженнями при $t = 0$ міститься в праці [26, с. 162–172].

Лінійні та квазілінійні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині відносяться до класу рівнянь з особливостями та виродженнями, які мають практичне застосування і які на даний час досліджено ще недостатньо. Праці, огляду яких присвячена ця стаття, вносять певний вклад у теорію параболічних рівнянь з виродженнями на гіперплощині задання початкових даних. Результати цих праць сприятимуть подальшому розвитку теорії таких класів рівнянь.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Калашников А.С.* О растущих решениях линейных уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой / А.С. Калашников // Мат. заметки. – 1968. – **3**, № 2. – С. 171–178.

2. *Калашников А.С.* Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка / А.С. Калашников // Вест. МГУ. Сер. мат., механ. – 1971. – № 2, 3. – С. 42–48, 3–9.

3. *Глушак А.В.* О некоторых корректных задачах для параболических уравнений высокого порядка, вырождающихся по временной переменной / А.В. Глушак, С.Д. Шмулевич // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 6. – С. 1065–1068.

4. *Глушко В.П.* Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. II / В.П. Глушко // Дифференц. уравнения. – 1968. – **4**, № 11. – С. 1956–1966.

5. *Возняк О.Г.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / О.Г. Возняк, С.Д. Івасишен // Доп. АН України. – 1994. – № 6. – С. 7–11.

6. *Березан Л.П.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині / Л.П. Березан, С.Д. Івасишен // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 7–12.

7. *Мединський І.П.* Апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням / І.П. Мединський // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка". № 337. Прикладна математика. – Львів, 1998. – С. 133–136.

8. *Мединський І.П.* Про властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині / І.П. Мединський // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка". № 364. Прикладна математика. – Львів, 1999. – С. 298–307.

9. *Березан Л.П.* Інтегральне зображення розв'язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи / Л.П. Березан // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип. 46. Математика. – Чернівці, 1999. – С. 13–18.

10. *Ivasyshen S.D.* Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane / S.D. Ivasyshen, I.P. Medynsky// Мат. студії. – 2000. – **13**, № 1. – С. 33–46.

11. *Мединський І.П.* Про апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / І.П. Мединський // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". № 407. Прикладна математика. – Львів, 2000. – С. 185–194.

12. *Березан Л. П.* Деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / Л. П. Березан // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип. 76. Математика. – Чернівці, 2000. – С. 5–10.

13. *Івасишен С. Д.* Задача Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / С. Д. Івасишен, І. П. Мединський // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 3. – С. 15–24.

14. *Городецький В.В.* Про розв'язки задачі Коші для рівнянь параболічного типу з виродженням / В.В. Городецький, І.В. Житарюк // Доп. АН УРСР. Сер.А – 1989. – № 12. – С. 5–8.

15. *Городецкий В.В.* О разрешимости задачи Коши для эволюционных уравнений параболического типа с вырождением в некоторых пространствах / В.В. Городецкий, И.В. Житарюк // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 8. – С. 1373–1381.

16. *Івасишен С. Д.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // Доп. НАН України. – 1999. – № 6. – С. 18–22.

17. *Пасічник Г.С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем з необмеженими коефіцієнтами і виродженнями на початковій гіперплощині / Г. С. Пасічник, С. Д. Івасишен // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип. 76. Математика. – Чернівці: Рута, 2000. – С. 82–91.

18. *Івасишен С.Д.* Про задачу Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами / С.Д. Івасишен, Г.С. Пасічник // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1484–1496.

19. *Возняк О.Г.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування / О.Г. Возняк, С.Д. Івасишен // Доп. НАН України. – 1996. – № 10. – С. 11–16.

20. *Івасишен С.Д.* Про фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь / С.Д. Івасишен, О.Г. Возняк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 2. – С. 13–19.

21. *Возняк О.Г.* Однозначна розв'язність і властивість локалізації розв'язків задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь з узагальненими початковими даними / О.Г. Возняк, С.Д. Івасишен // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 27–39.

22. *Возняк О.Г.* Про фундаментальний розв'язок задачі коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині / О.Г. Возняк, С.Д. Івасишен, І.П. Мединський // Буковинський мат. журн. – 2015. – **3**, № 3–4, – С. 41–51.

23. *Мединський І.П.* Задача Коші для квазілінійних параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / І.П. Мединський // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип.111. Математика. – Чернівці: Рута, 2001. – С. 90–95.

24. *Івасишен С.Д.* Локальна розв'язність задачі Коші для квазілінійної $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи зі слабким виродженням на початковій гіперплощині / С.Д. Івасишен, І.П. Мединський // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 110–114.

25. *Мединський І.П.* Дослідження С.Д. Ейдельмана нелінійних задач та їх розвиток / І.П. Мединський // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр.– **1**, № 1–2. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-ту, 2011. – С. 114–128.

26. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

УДК 517.95

©2016 р. **П.І. Каленюк[1], З.М. Нитребич[2], Г. Кудук[1], М.М. Симотюк[3]**

[1]Жешувський університет, Польща,
[2,3]Національний університет „Львівська політехніка“,
[3]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С. Підстригача НАН України

ІНТЕГРАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ У НЕОБМЕЖЕНІЙ СМУЗІ

Встановлено умови існування в шкалі просторів Соболєва єдиного розв'язку задачі з інтегральними умовами у вигляді моментів для рівнянь із частинними похідними другого порядку.

The conditions of existence and uniqueness (in the scale of Sobolev spaces) of solution to the problem with momentum integral conditions for partial differential equations of second order.

1. Вступ. У багатьох задачах природознавства виникають задачі з нелокальними інтегральними умовами для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними. Прикладом можуть бути задачі, пов'язані з дослідженнями процесів поширення тепла, процесів вологопереносу у капілярнопористих середовищах, дифузії частинок у турбулентній плазмі, обернених задач, а також задач математичної біології та демографії [1–7, 9–11, 13]. Дослідження задач з інтегральними умовами для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними розпочалося порівняно недавно. Інтерес до їх вивчення зумовлений не тільки важливістю їхньої фізичної інтерпретації, а також тим, що для багатьох таких рівнянь неможлива коректна постановка локальних крайових задач.

У даній роботі викладено результати, отримані при дослідженні задачі з інтегральними умовами у вигляді моментів для рівнянь із частинними похідними другого порядку в необмеженій смузі; при цьому описано клас рівнянь із частинними похідними, для яких вказана задача є коректною у просторах Соболєва. Відзначимо, що у випадку обмежених областей розв'язність задач з інтегральними умовами у вигляді моментів для систем рівнянь із частинними похідними, взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників [3–5], для оцінок знизу яких використано метричний підхід та результати метричної теорії чисел [9]. Близькими до проведених досліджень є результати роботи [11], де для системи рівнянь із частинними похідними в необмеженій смузі розглянуто задачу з інтегральними умовами, які не містять вагових функцій під знаком інтеграла), а також результати роботи [13], де застосовано узагальнений метод відокремлення змінних для побудови та вивчення властивостей розв'язку задачі з інтегральними умовами у вигляді моментів для еволюційного рівняння.

2. Основні умовні позначення. Будемо використовувати такі позначення: $\Pi(T) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0;T), x \in \mathbb{R}\}$, $T > 0$, $\mathbf{H}_\alpha$, $\alpha \geq 0$, — класичний простір Соболєва, який складається з таких функцій $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$, для яких $(1+\xi^2)^{\alpha/2}\tilde{\varphi}(\xi) \in L_2(\mathbb{R})$, де $\tilde{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-ix\xi}dx$ — перетворення Фур'є функції $\varphi(x)$. Норма в просторі $\mathbf{H}_\alpha$ визначається рівністю

$$\|\varphi(x);\mathbf{H}_\alpha\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,(1+\xi^2)^\alpha\,d\xi};$$

$\mathbf{H}^n_\alpha$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — простір таких функцій $u(t,x)$, що похідні $\partial^j u(t,x)/\partial t^j$, $j = 0,1,\ldots,n$, для кожного фіксованого $t \in [0;T]$ належать до простору $\mathbf{H}_{\alpha-j}$ і неперервно змінюються за $t \in [0;T]$ в цьому просторі; норму в просторі

$\mathbf{H}_\alpha^n$ задаємо рівністю

$$\|u(t,x);\mathbf{H}_\alpha^n\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0;T]} \left\| \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}; \mathbf{H}_{\alpha-j} \right\|.$$

3. Формулювання задачі. В області $\Pi(T)$ для рівняння

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_1\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} + a_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

де $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, розглянемо задачу з інтегральними умовами

$$\int_0^T t^{j-1}u(t,x)dt = \varphi_j(x), j = 1,2, x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Будемо припускати, що рівняння (1) є таким, що для коренів λ_1, λ_2 многочлена $L(\lambda, i)$ виконується умова

$$\operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2, \quad \operatorname{Re}\lambda_1 \neq 0, \quad \operatorname{Re}\lambda_2 \neq 0. \tag{3}$$

Умова (3) виконується, наприклад, якщо $a_1 = 0, a_2 = 1$, і порушується, якщо $a_1 = 0, a_2 = -1$. У першому випадку рівняння (1) є рівнянням Лапласа, в другому — рівнянням малих коливань струни.

Означення. *Задачу* (1), (2) *будемо називати* (α_1,α_2)*-коректною, якщо для довільних* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{H}_{\alpha_1}$ *у просторі* $\mathbf{H}_{\alpha_2}^2$ *існує єдина функція* $u(t,x)$*, яка справджує рівняння* (1)*, умови* (2)*, і виконується нерівність*

$$\|u;\mathbf{H}_{\alpha_2}^2\| \le C\left(\|\varphi_1;\mathbf{H}_{\alpha_1}\| + \|\varphi_2;\mathbf{H}_{\alpha_1}\|\right),$$

де стала $C > 0$ *не залежить від вибору функцій* $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$.

Метою даної роботи є встановлення умов, при виконанні яких задача (1), (2) є (α_1,α_2)-коректною. Ці умови викладено в теоремі 1, яка є основним результатом роботи.

4. Побудова формального розв'язку. Нехай $\tilde u(t,\xi)$, $\tilde\varphi_1(\xi)$, $\tilde\varphi_2(\xi)$ — перетворення Фур'є за змінною x функцій $u(t,x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ відповідно. Застосовуючи перетворення Фур'є до рівняння (1) та умов (2), отримаємо, що функція $\tilde u(t,\xi)$ є розв'язком такої інтегральної задачі з параметром $\xi\in\mathbb{R}$:

$$\frac{d^2\tilde u(t,\xi)}{dt^2} + a_1(i\xi)\frac{d\tilde u(t,\xi)}{dt} + a_2(i\xi)^2\tilde u(t,\xi) = 0, \tag{4}$$

$$\int_0^T t^{j-1}\tilde u(t,\xi)dt = \tilde\varphi_j(\xi), j = 1,2. \tag{5}$$

Нехай $f_1(t,\xi), f_2(t,\xi)$ — така фундаментальна система розв'язків рівняння (4), що $f_q^{(j-1)}(0,\xi) = \delta_{j,q}$, $j,q = 1,2$, де $\delta_{j,q}$ — символ Кронекера. Зауважимо, що функції $f_1(t,\xi), f_2(t,\xi)$, є аналітичними за t,ξ. Для цих функцій виконуються такі зображення

$$f_1(t,\xi) = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1\xi t} - \lambda_1 e^{\lambda_2\xi t}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \tag{6}$$

$$f_2(t,\xi) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda_2\xi t} - e^{\lambda_1\xi t}}{(\lambda_2-\lambda_1)\xi}, & \xi\neq 0,\\ t, & \xi = 0.\end{cases} \tag{7}$$

Розв'язок задачі (4)–(5) зображується формулою

$$\tilde u(t,\xi) = C_1(\xi)f_1(t,\xi) + C_2(\xi)f_2(t,\xi), \tag{8}$$

де сталі $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$ є розв'язками системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{q=1}^2 C_q(\xi)\int_0^T f_q(t,\xi)dt = \tilde\varphi_1(\xi),\\ \sum_{q=1}^2 C_q(\xi)\int_0^T t f_q(t,\xi)dt = \tilde\varphi_2(\xi).\end{cases} \tag{9}$$

Нехай $\Delta(\xi)$ – визначник системи (9):

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} \int_0^T f_1(t,\xi)dt & \int_0^T f_2(t,\xi)dt \\ \int_0^T t f_1(t,\xi)dt & \int_0^T t f_2(t,\xi)dt\end{vmatrix}. \tag{10}$$

Зауважимо, що $\Delta(0)\neq 0$. Дійсно, $f_1(t,0) = 1$, $f_2(t,0) = t$, тому

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} \int_0^T dt & \int_0^T tdt \\ \int_0^T tdt & \int_0^T t^2dt\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} T & T^2/2 \\ T^2/2 & T^3/3\end{vmatrix} = \frac{T^4}{12}. \tag{11}$$

Якщо виконується умова

$$\forall\xi\in\mathbb{R}\backslash\{0\} \quad \Delta(\xi)\neq 0, \tag{12}$$

то система (9) має єдиний розв'язок $(C_1(\xi), C_2(\xi))$. Використовуючи правило Крамера, дістанемо

$$C_1(\xi) = \frac{\tilde\varphi_1(\xi)}{\Delta(\xi)}\int_0^T t f_2(t,\xi)dt -$$

$$-\frac{\tilde{\varphi}_2(\xi)}{\Delta(\xi)}\int_0^T f_2(t,\xi)dt,$$

$$C_2(\xi) = -\frac{\tilde{\varphi}_1(\xi)}{\Delta(\xi)}\int_0^T tf_1(t,\xi)dt+$$

$$+\frac{\tilde{\varphi}_2(\xi)}{\Delta(\xi)}\int_0^T f_1(t,\xi)dt.$$

Тому при виконанні умови (12) задача (4), (5) має єдиний розв'язок

$$\tilde{u}(t,\xi) = \sum_{j,q=1}^{2}\frac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)}f_q(t,\xi)\tilde{\varphi}_j(\xi), \qquad (13)$$

де $\Delta_{j,q}(\xi)$ — алгебричне доповнення елемента $\int_0^T t^{j-1}f_q(t,\xi)dt$, $j,q=1,2$, у визначнику $\Delta(\xi)$.

Наведемо приклади задач, для яких умова (12) виконується або порушується.

Приклад 1. Визначник $\Delta(\xi)$ задачі з умовами (2) для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0 \qquad (14)$$

обчислюється за формулою $\Delta(\xi) =$

$$= \frac{2\,\mathrm{sh}(\xi T/2)}{\xi^4}\left[\xi T\,\mathrm{ch}(\xi T/2) - 2\,\mathrm{sh}(\xi T/2)\right], \qquad (15)$$

якщо $\xi \neq 0$ і $\Delta(0) = T^4/12$. Оскільки $t\,\mathrm{ch}\,t - \mathrm{sh}\,t \neq 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, то з формули (15) випливає, що для задачі (2), (14) умова (12) виконується.

Твердження 1. *Якщо корені λ_1, λ_2 многочлена $L(\lambda, i)$ є дійсними і різними, то визначник $\Delta(\xi)$ є відмінним від нуля.*

Доведення. Дійсно, розглянемо визначник (10) як функцію параметра T. Диференціюючи його за змінною T, одержимо

$$\frac{d\Delta(\xi)}{dT} = \begin{vmatrix} f_1(T,\xi) & f_2(T,\xi) \\ \int_0^T tf_1(t,\xi)dt & \int_0^T tf_2(t,\xi)dt \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \int_0^T f_1(t,\xi)dt & \int_0^T f_2(t,\xi)dt \\ Tf_1(T,\xi) & Tf_2(T,\xi) \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^T t(f_1(T,\xi)f_2(t,\xi) - f_2(T,\xi)f_1(t,\xi))dt +$$

$$+\int_0^T T(f_1(t,\xi)f_2(T,\xi) - f_2(t,\xi)f_1(T,\xi))dt =$$

$$= \int_0^T (T-t)\delta(\xi;t,T)dt, \qquad (16)$$

де

$$\delta(\xi;t_1,t_2) = \begin{vmatrix} f_1(t_1,\xi) & f_2(t_1,\xi) \\ f_1(t_2,\xi) & f_2(t_2,\xi) \end{vmatrix},$$

де $t_1,t_2 \in [0,T]$. Із формул (7) випливає, що $\delta(0;t_1,t_2) = (t_2-t_1)$ і

$$\delta(\xi;t_1,t_2) = \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)\xi}\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t_1\xi} & e^{\lambda_2 t_1 \xi} \\ e^{\lambda_1 t_2 \xi} & e^{\lambda_2 t_2 \xi}\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{e^{(\lambda_1+\lambda_2)t_1\xi}\left(e^{\lambda_2(t_2-t_1)\xi} - e^{\lambda_1(t_2-t_1)\xi}\right)}{(\lambda_2-\lambda_1)\xi},$$

якщо $\xi \neq 0$. Оскільки числа λ_1, λ_2 є дійсними і різними, то з отриманих формул для $\delta(\xi;t_1,t_2)$ випливає, що $\delta(\xi;t,T) > 0$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}$ та $t \in [0;T)$. Тому з рівності (16) отримаємо, що $\frac{d\Delta(\xi)}{dT} > 0$ при $T > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, тобто для кожного $\xi \in \mathbb{R}$ функція $\Delta(\xi)$ є зростаючою функцією $T \geq 0$. Оскільки $\Delta(\xi)|_{T=0} = 0$, то з попередньої нерівності випливає, що $\Delta(\xi) > \Delta(\xi)|_{T=0} = 0$ при $T > 0$.

5. Умови коректності задачі. Дослідимо питання про приналежність функції

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(t,\xi)e^{ix\xi}d\xi =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,q=1}^{2}\frac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)}f_q(t,\xi)\tilde{\varphi}_j(\xi)e^{ix\xi}d\xi \qquad (17)$$

до простору $\mathbf{H}^2_{\alpha_2}$, якщо $\Delta(\xi) \neq 0$ і $\varphi_j \in \mathbf{H}_{\alpha_1}$, $j=1,2$, для деякого $\alpha_1 \geq 0$. Для цього встановимо оцінки для функцій $\tilde{u}(t,\xi)$ та їхніх похідних за t до порядку 2 включно. Зауважимо, що

$$\tilde{u}(t,0) = \left(\frac{4}{T} - \frac{6t}{T^2}\right)\tilde{\varphi}_1(0) + \left(\frac{12t}{T^3} - \frac{6}{T^2}\right)\tilde{\varphi}_2(0),$$

$$\tilde{u}(t,\xi) = \sum_{j,q=1}^{2}\frac{\Gamma_{j,q}(\xi)}{\Gamma(\xi)}e^{\lambda_q\xi t}\tilde{\varphi}_j(\xi), \quad \xi \neq 0, \qquad (18)$$

де

$$\Gamma(\xi) = \begin{vmatrix} \gamma_{11}(\xi) & \gamma_{12}(\xi) \\ \gamma_{21}(\xi) & \gamma_{22}(\xi)\end{vmatrix}, \qquad (19)$$

$\gamma_{11}(\xi)=\frac{e^{\lambda_1\xi T}-1}{\lambda_1\xi}$, $\gamma_{12}(\xi)=\frac{e^{\lambda_2\xi T}-1}{\lambda_2\xi}$,

$$\gamma_{21}(\xi)=\frac{1}{\lambda_1\xi}\left[Te^{\lambda_1\xi T}-\frac{e^{\lambda_1\xi T}-1}{\lambda_1\xi}\right],$$

$$\gamma_{22}(\xi)=\frac{1}{\lambda_2\xi}\left[Te^{\lambda_2\xi T}-\frac{e^{\lambda_2\xi T}-1}{\lambda_2\xi}\right],$$

а $\Gamma_{j,q}(\xi)$ — алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині j-го рядка та q-го стовпця у визначнику $\Gamma(\xi)$. Відзначимо, що $\Gamma(\xi)=(\lambda_2-\lambda_1)\xi\Delta(\xi)$, $\xi\neq 0$, тому умови $\Delta(\xi)\neq 0$ та $\Gamma(\xi)\neq 0$ при $\xi\neq 0$ є рівносильними.

Лема 1. *Нехай* $0<\operatorname{Re}\lambda_1<\operatorname{Re}\lambda_2$. *Тоді виконуються оцінки*

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(e^{\lambda_q\xi t}\right)^{(r)}\right|\leq$$

$$\leq C_1(1+|\xi|)^{r-1}e^{Re\,(\lambda_1+\lambda_2)\xi T},\ \xi>0, \tag{20}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(e^{\lambda_q\xi t}\right)^{(r)}\right|\leq$$

$$\leq C_2(1+|\xi|)^{r-1},\ \xi<0,$$

де $j,q=1,2,\ r=0,1,2.$

Доведення. Оскільки

$$\Gamma_{j,q}(\xi)=\int_0^T t^{2-j}e^{\lambda_{3-q}\xi t}dt, j,q=1,2,$$

то при $0<\operatorname{Re}\lambda_1<\operatorname{Re}\lambda_2$ для досить великих $|\xi|$ виконуються оцінки

$$\max_{t\in[0,T]}|e^{\lambda_q\xi t}|\leq\begin{cases}e^{Re\,\lambda_q\xi T}, & q=1,2, \quad \xi>0,\\ 1, \quad q=1,2, & \xi<0,\end{cases}$$

$$|\Gamma_{j,q}(\xi)|\leq\int_0^T t^{2-j}e^{Re\,\lambda_{3-q}\xi t}dt\leq$$

$$\leq\begin{cases}C_3(1+|\xi|)^{-1}e^{Re\,\lambda_{3-q}\xi T}, & \xi>0,\\ C_3(1+|\xi|)^{-1}, \quad \xi<0,\end{cases}$$

де $j,q=1,2$, а отже,

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(\lambda_q\xi\right)^r e^{\lambda_q\xi t}\right|\leq$$

$$\leq C_3(1+|\xi|)^{r-1}e^{Re\,(\lambda_{3-q}+\lambda_q)\xi T}=$$

$$=C_3(1+|\xi|)^{r-1}e^{Re\,(\lambda_1+\lambda_2)\xi T},\ \xi>0, \tag{21}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(\lambda_q\xi\right)^r e^{\lambda_q\xi t}\right|\leq$$

$$\leq C_3(1+|\xi|)^{r-1},\ \xi<0. \tag{22}$$

де $j,q=1,2,\ r=0,1,2$. Лему доведено.

Лема 2. *Нехай* $\operatorname{Re}\lambda_1<0<\operatorname{Re}\lambda_2$. *Тоді виконуються оцінки*

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(e^{\lambda_q\xi t}\right)^{(r)}\right|\leq$$

$$\leq C_4(1+|\xi|)^{r-1}e^{Re\,\lambda_2\xi T},\ \xi>0, \tag{23}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(e^{\lambda_q\xi t}\right)^{(r)}\right|\leq$$

$$\leq C_4(1+|\xi|)^{r-1}e^{Re\,\lambda_1\xi T},\xi<0,$$

де $j,q=1,2,\ r=0,1,2.$

Лема 3. *Нехай* $\operatorname{Re}\lambda_1<\operatorname{Re}\lambda_2<0$. *Тоді виконуються оцінки*

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(e^{\lambda_q\xi t}\right)^{(r)}\right|\leq$$

$$\leq C_5(1+|\xi|)^{r-1}\ \xi>0, \tag{24}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)\left(e^{\lambda_q\xi t}\right)^{(r)}\right|\leq$$

$$\leq C_5(1+|\xi|)^{r-1}e^{Re\,(\lambda_1+\lambda_2)\xi T},\quad \xi<0,$$

де $j,q=1,2,\ r=0,1,2.$

Доведення лем 2, 3 проводиться аналогічно до доведення леми 1.

Лема 4. *Для довільних квадратних матриць* $A=\|a_{jq}\|_{j,q=1}^2$, $B=\|b_{jq}\|_{j,q=1}^2$ *з комплексними елементами виконується нерівність*

$$|\det A-\det B|\leq 4m_1M,$$

де

$$m_1=\max_{1\leq j,q\leq 2}|a_{jq}-b_{jq}|,$$

$$M=\max_{1\leq j,q\leq 2}\{|a_{jq}|,|b_{jq}|\}.$$

Доведення. Оцінка леми випливає з того, що $|\det A-\det B|=$

$$=|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}-b_{11}b_{22}+b_{12}b_{21}|=$$

$$=|a_{22}(a_{11}-b_{11})+b_{11}(a_{22}-b_{22})-$$

$$-a_{2,1}(a_{1,2}-b_{12})+b_{12}(a_{21}-b_{21})|\leq 4m_1M.$$

Лему доведено.

Лема 5. *Нехай* $0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2$. *Тоді існує таке число* $R > 0$, *що для всіх* $\xi, |\xi| > R$, *виконується оцінка*

$$|\Gamma(\xi)| \geq$$

$$\geq \begin{cases} C_6(1+|\xi|)^{-3}e^{Re\,(\lambda_1+\lambda_2)\xi T}, & \xi > R, \\ C_6(1+|\xi|)^{-3}, & \xi < -R. \end{cases} \tag{25}$$

Доведення. Для $\xi \neq 0$ розглянемо матриці $A(\xi) = \|a_{jq}(\xi)\|_{j,q=1}^2$, $B(\xi) = \|b_{jq}(\xi)\|_{j,q=1}^2$, такі, що $A(\xi) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{\lambda_1\xi T}-1}{\lambda_1\xi} & \frac{e^{\lambda_2\xi T}-1}{\lambda_2\xi} \\ \frac{1}{\lambda_1\xi}\left[T - \frac{e^{\lambda_1\xi T}-1}{\lambda_1\xi}\right] & \frac{1}{\lambda_2\xi}\left[T - \frac{e^{\lambda_2\xi T}-1}{\lambda_2\xi}\right] \end{pmatrix},$$

$$B(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{e^{\lambda_1\xi T}}{\lambda_1\xi} & \frac{e^{\lambda_2\xi T}}{\lambda_2\xi} \\ -\frac{e^{\lambda_1\xi T}}{\lambda_1^2\xi^2} & -\frac{e^{\lambda_2\xi T}}{\lambda_2^2\xi^2} \end{pmatrix}.$$

Визначник $\Gamma(\xi)$ не зміниться, якщо від його другого рядка відняти його перший рядок, домножений на T. Тому $\det A(\xi) = \Gamma(\xi)$. Зауважимо, що

$$\det A(\xi) = \frac{e^{(\lambda_1+\lambda_2)\xi T}}{\lambda_1\lambda_2\xi^3}\det A_1(\xi),$$

$$\det B(\xi) = \frac{e^{(\lambda_1+\lambda_2)\xi T}}{\lambda_1\lambda_2\xi^3}\det B_1,$$

де

$$A_1(\xi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(\xi) & \alpha_{12}(\xi) \\ \alpha_{21}(\xi) & \alpha_{22}(\xi) \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$\alpha_{11}(\xi) = 1 - e^{-\lambda_1\xi T}, \alpha_{12}(\xi) = 1 - e^{-\lambda_2\xi T},$$

$$\alpha_{21}(\xi) = -\frac{1}{\lambda_1} + \left(\xi T + \frac{1}{\lambda_1}\right)e^{-\lambda_1\xi T},$$

$$\alpha_{22}(\xi) = -\frac{1}{\lambda_2} + \left(\xi T + \frac{1}{\lambda_2}\right)e^{-\lambda_2\xi T}.$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{\lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Добре відомо, що для довільного $\rho > 0$ існують такі числа $C(\rho), R(\rho) > 0$, що для всіх $x > R(\rho)$ виконується оцінка $x^\rho e^{-x} \leq C(\rho)$. Враховуючи лему 4, звідси дістанемо, що існує таке число $R > 0$, що для всіх $\xi > R$ справджується нерівність

$$|\det A_1(\xi)| \geq \frac{1}{2}|\det B_1| = \frac{|\lambda_2 - \lambda_1|}{2|\lambda_1\lambda_2|}.$$

Таким чином,

$$|\Gamma(\xi)| = |\det A(\xi)| \geq \frac{|\lambda_2-\lambda_1|e^{Re(\lambda_1+\lambda_2)\xi T}}{2|\lambda_1^2\lambda_2^2\xi^3|} \geq$$

$$\geq C_7(1+|\xi|)^{-3}e^{Re\,(\lambda_1+\lambda_2)\xi T},$$

для всіх $\xi > R$, тобто верхня нерівність у формулі (25) встановлена.

Розглянемо тепер випадок, коли $\xi < 0$. У цьому випадку $\Gamma(\xi) = \dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2\xi^3}\det A_2(\xi)$, де

$$A_2(\xi) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(\xi) & \beta_{12}(\xi) \\ \beta_{21}(\xi) & \beta_{22}(\xi) \end{pmatrix}.$$

$$\beta_{11}(\xi) = 1 - e^{\lambda_1\xi T}, \beta_{12}(\xi) = 1 - e^{\lambda_2\xi T},$$

$$\beta_{21}(\xi) = \frac{1}{\lambda_1} + \left(\xi T - \frac{1}{\lambda_1}\right)e^{\lambda_1\xi T},$$

$$\beta_{22}(\xi) = \frac{1}{\lambda_2} + \left(\xi T - \frac{1}{\lambda_2}\right)e^{\lambda_2\xi T}.$$

Використовуючи лему 4 дістанемо, що існує таке $R_1 > 0$, що для всіх $\xi < -R_1$ справджується нерівність $|\det A_2(\xi)| \geq \frac{1}{2}|\det B_1| = \frac{|\lambda_2-\lambda_1|}{2|\lambda_1\lambda_2|}$. Отже,

$$|\Gamma(\xi)| = \left|\frac{1}{\lambda_1\lambda_2\xi^3}\det A_2(\xi)\right| \geq$$

$$\geq \frac{|\lambda_2-\lambda_1|}{2|\lambda_1^2\lambda_2^2\xi^3|} \geq C_8(1+|\xi|)^{-3},$$

для всіх $\xi < -R_1$, тобто і нижня нерівність у формулі (25) встановлена. Лему доведено.

Лема 6. *Нехай* $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0 < \operatorname{Re}\lambda_2$. *Тоді існує таке число* $R_2 > 0$, *що для всіх* $\xi, |\xi| > R_2$, *виконується оцінка*

$$|\Gamma(\xi)| \geq \begin{cases} C_9(1+|\xi|)^{-3}e^{Re\,\lambda_2\xi T}, & \xi > R_2, \\ C_9(1+|\xi|)^{-3}e^{Re\,\lambda_1\xi T}, & \xi < -R_2. \end{cases} \tag{27}$$

Лема 7. *Нехай* $0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2$. *Тоді існує таке число* $R_3 > 0$, *що для всіх* $\xi, |\xi| > R_3$, *виконується оцінка*

$$|\Gamma(\xi)| \geq \begin{cases} C_{10}(1+|\xi|)^{-3}, \xi > R_3, \\ C_{10}(1+|\xi|)^{-3}e^{Re\,(\lambda_1+\lambda_2)\xi T}, \xi < -R_3. \end{cases} \tag{28}$$

Доведення лем 6, 7 проводиться аналогічно до доведення леми 5.

Тепер ми можемо встановити основний результат даної роботи про існування єдиного розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 1. *Нехай корені* λ_1, λ_2 *многочлена* $L(\lambda, i)$ *мають різні ненульові дійсні частини. Якщо* $\Delta(\xi) \neq 0$ *для всіх* $\xi \neq 0$, *то задача* (1), (2) *є* (α_1, α_2)*-коректною, де* $\alpha_2 = \alpha_1 - 2$, $\alpha_1 \geq 2$.

Доведення. Оскільки корені λ_1, λ_2 мають різні ненульові дійсні частини, то з лем 1, 2, 3 та лем 5, 6 випливає, що існує число $R_4 > 0$ таке, що для всіх $\xi, |\xi| > R_4$, виконуються оцінки

$$\max_{t\in[0;T]} \left| \frac{\Gamma_{j,q}(\xi)}{\Gamma(\xi)} \left(e^{\lambda_q \xi t}\right)^r \right| \leq C_{11}(1+|\xi|)^{r+2}, \tag{29}$$

де $j, q = 1, 2$, $r = 0, 1, 2$. Тоді з формул (18), (29) дістаємо, що для всіх $\xi, |\xi| > R_4$,

$$\max_{t\in[0;T]} \left| \frac{\partial^r \tilde{u}(t,\xi)}{\partial t^r} \right| \leq C_{12}(1+|\xi|)^{r+2} \times$$

$$\times \left(|\tilde{\varphi}_1(\xi)| + |\tilde{\varphi}_2(\xi)|\right), \tag{30}$$

де $j, q = 1, 2, r = 0, 1, 2$. Оскільки $\Delta(\xi) \neq 0$ для всіх $\xi \neq 0$ і $\Delta(\xi)$ – неперервна функція параметра ξ, то існує стала $C_{13} > 0$ така, що $|\Delta(\xi)| \geq C_{13} > 0$ для всіх $\xi \in [-R_4; R_4]$. Тому оцінки (30) зберігають свою силу і для $|\xi| \leq R_4$.

Тоді з формул (17), (18), (30) та означення норми в просторі $\mathbf{H}^2_{\alpha_2}$ отримуємо

$$\|u(t,x); \mathbf{H}^2_{\alpha_2}\| =$$

$$= \sum_{r=0}^{2} \max_{t\in[0,T]} \left\| \partial^r u(t,x)/\partial t^r; \mathbf{H}_{\alpha_2 - r} \right\| \leq$$

$$\leq C_{14} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\xi|)^{2\alpha_2+4} |\tilde{\varphi}_1(\xi)|^2 d\xi} +$$

$$+ C_{14} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\xi|)^{2\alpha_2+4} |\tilde{\varphi}_2(\xi)|^2 d\xi} \leq$$

$$\leq C_{14}\|\varphi_1; \mathbf{H}_{\alpha_1}\| + C_{14}\|\varphi_2; \mathbf{H}_{\alpha_1}\|,$$

якщо $\alpha_1 \geq \alpha_2 + 2$. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вігак В.М.* Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами // Доп. АН України. – Сер. А. – 1994. – № 8. – С. 57–60.

2. *Иванчов Н.И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференц. уравнения. – 2004. – 40, № 4. – С. 547–564.

3. *Ільків В.С.* Задача з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами // Вісник ДУ „Львівська політехніка“. Прикл. матем. – 1999. – № 364. – С. 318–323.

4. *Камынин В.Л., Саролди М.* Нелинейная обратная задача для параболического уравнения высокого порядка // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. – 1998, 38, № 10. – С. 1683–1691.

5. *Медвідь О.М., Симотюк М.М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних систем рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, № 1. – С. 32–39.

6. *Медвідь Оксана, Симотюк Михайло.* Задача з інтегральними умовами для систем рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументу // Математичний вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 414–427.

7. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995.

8. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 1. – 391 с. – Ч. 2. – 432 с.

9. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264с.

10. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1980. – 16, № 11. – С. 1925–1935.

11. *Фардигола Л.В.* Интегральная краевая задача в слое для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Матем. сборник. – 1995. – 186, № 11. – С. 123–144.

12. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

13. *Kalenyuk P.I., Kuduk G., Kohut I. V., Nytrebych Z.M.* Problem with integral condition for evolution equation // Journal of Mathematics and Applications 2015. – Vol. 38. – P. 71–76.

УДК 517.925

©2016 р. К.С. Корепанова

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, м.Одеса

УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТЕПЕНЕВОГО ВИДУ У ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПРАВИЛЬНО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Встановлюються умови існування деяких типів розв'язків степеневого виду у двочленного неавтономного звичайного диференціального рівняння з правильно змінними нелінійностями.

The conditions of existence of some types of power-mode solutions of a binomial non-autonomous ordinary differential equation with regularly varying nonlinearities are established.

1. Постановка задачі

Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}), \tag{1.1}$$

де $n \geq 3$, $\alpha \in \{-1, 1\}$, $p : [a, +\infty[\to]0, +\infty[$ – неперервна функція, $\varphi_j : \Delta Y_j \to]0; +\infty[$ – неперевна та правильно змінна при $y^{(j)} \to Y_j$ функція порядку σ_j, $j = \overline{0, n-1}$, ΔY_j – деякий односторонній окіл точки Y_j, Y_j дорівнює або 0, або $\pm\infty$[1].

Функції φ_j ($j = \overline{0, n-1}$) (см.[1], гл.I, §1, с.10) можуть бути зображені у вигляді

$$\varphi_j(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_j} L_j(y^{(j)}) \ (j = \overline{0, n-1}), \tag{1.2}$$

де $L_j : \Delta Y_j \to]0, +\infty[$ $(j = \overline{0, n-1})$ – повільно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ функції. Згідно з означенням та властивостями повільно змінних функцій для будь-якого $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{L_j(\lambda y^{(j)})}{L_j(y^{(j)})} = 1 \ \ (j = \overline{0, n-1}), \tag{1.3}$$

причому дані граничні співвідношення виконуються рівномірно по λ на будь-якому відрізку $[c, d] \in]0, +\infty[$.

У цій роботі вважаючи, що для деякого $k \in \{3, \dots, n\}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{y^{(i)} \to Y_i} \varphi_i(y^{(i)}) = \varphi_i^0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ i = \overline{n-k+1, n-2}, \end{cases} \tag{1.4}$$

встановлюються умови існування у рівнянні (1.1) розв'язків, для яких

$$\lim_{t \to +\infty} y^{(n-k)}(t) = c \quad (c \neq 0), \tag{1.5}$$

а також асиптотичні при $t \to +\infty$ зображення таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно.

Очевидно, що в силу (1.5) для таких розв'язків мають місце наступні асимптотичні при $t \to +\infty$ зображення

$$y^{(j-1)}(t) = \frac{ct^{n-k-j+1}}{(n-k-j+1)!}[1 + o(1)] \ (l = \overline{1, n-k}) \tag{1.6}$$

і $c \in \Delta Y_{n-k}$.

З вигляду рівняння (1.1) також зрозуміло, що $y^{(n)}(t)$ зберігає знак в деякому околі $+\infty$. Тоді $y^{(n-l)}(t)$ $(l = \overline{1, k-1})$ є строго монотонними функціями в околі $+\infty$ і, в силу (1.5), можуть прямувати лише до нуля при $t \to +\infty$. Тому для існування таких розв'язків насамперед необхідно, щоб

$$Y_{j-1} = 0 \quad \text{при} \ \ j = \overline{n-k+2, n}. \tag{1.7}$$

Для визначення знаків чисел з околів ΔY_j $(j = \overline{0, n-1})$ будемо вважати, що

$$\mu_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо } Y_j = 0 \text{ та } \Delta Y_j - \\ & \text{правий окіл 0 або } Y_j = +\infty, \\ -1, & \text{якщо } Y_j = 0 \text{ та } \Delta Y_j - \\ & \text{лівий окіл 0 або } Y_j = -\infty \end{cases}$$

і тоді з (1.6) випливає, що при $j = \overline{1, n-k}$

$$Y_{j-1} = \begin{cases} +\infty, & \text{якщо } \ \mu_{n-k} > 0, \\ -\infty, & \text{якщо } \ \mu_{n-k} < 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

[1] При $Y_j = \pm\infty$ тут і далі будемо вважати, що усі числа з околу ΔY_j одного знаку.

Ці умови являються необхідними для існування у рівняння (1.1) розв'язків, для яких має місце (1.5).

Отримані тут результати доповнюють наслідок 8.2 [2, Гл. II, §8, стр. 207] і теорему 16.9 [2, Гл. IV, §16, стр. 321] з монографії І.Кігурадзе і Т.Чантурія для диференціальних рівнянь n–го порядку загального вигляду.

2. Основні результати

Для визначенності будемо вважати, що

$$\Delta Y_{n-1}=\begin{cases}[y^0_{n-1},Y_{n-1}[, & \text{якщо } \Delta Y_{n-1} - \\ & \text{лівий окіл } Y_{n-1};\\ ]Y_{n-1},y^0_{n-1}], & \text{якщо } \Delta Y_{n-1} - \\ & \text{правий окіл } Y_{n-1},\end{cases}$$

і введемо функцію $\Phi(y)$ наступним чином

$$\Phi(y)=\int\limits_B^y \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)},$$

$$B=\begin{cases}Y_{n-1}, & \text{якщо } \int\limits_{y^0_{n-1}}^{Y_{n-1}} \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)}<+\infty;\\ y^0_{n-1}, & \text{якщо } \int\limits_{y^0_{n-1}}^{Y_{n-1}} \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)}=\pm\infty.\end{cases}$$

Оскільки $\Phi'(y)>0$ при $y\in\Delta Y_{n-1}$, то $\Phi:\Delta Y_{n-1}\to\Delta Z_{n-1}$, де

$$\Delta Z_{n-1}=$$

$$=\begin{cases}[z^0_{n-1},Z_{n-1}[, \text{ якщо } \Delta Y_{n-1}=[y^0_{n-1},Y_{n-1}[;\\ ]Z_{n-1},z^0_{n-1}], \text{ якщо } \Delta Y_{n-1}=]Y_{n-1},y^0_{n-1}],\end{cases}$$

$Z_{n-1}=\lim\limits_{y\to Y_{n-1}}\Phi(y)$, $z^0_{n-1}=\Phi(y^0_{n-1})$, і для неї існує зворотня функція $\Phi^{-1}:\Delta Z_{n-1}\to\Delta Y_{n-1}$.

Крім того, з врахуванням (1.4) покладемо

$$K=\left(\varphi_{n-k}(c)\prod_{i=n-k+1}^{n-2}\varphi^0_i\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{j=1}^{n-k}\left|\frac{c}{(n-k-j+1)!}\right|^{\sigma_{j-1}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_{n-1}}},$$

і при $Y_{j-1}=\pm\infty$ $(j=\overline{1,n-k})$ введемо функцію $W_0(t)=\Phi^{-1}(\alpha I(t))$, де

$$I(t)=\int\limits_A^t p(\tau)\prod_{j=0}^{n-k-1}\varphi_j\left(\mu_j\tau^{n-k-j}\right)d\tau,$$

$$A=\begin{cases}+\infty, \text{якщо } \int\limits_{a_0}^{+\infty}p(\tau)\prod\limits_{j=0}^{n-k-1}\varphi_j\left(\mu_j\tau^{n-k-j}\right)d\tau<+\infty;\\ a_0, \text{якщо } \int\limits_{a_0}^{+\infty}p(\tau)\prod\limits_{j=0}^{n-k-1}\varphi_j\left(\mu_j\tau^{n-k-j}\right)d\tau=\pm\infty,\end{cases}$$

$a_0\ge a$ таке, що $\mu_{j-1}t^{n-k-j+1}\in\Delta Y_{j-1}$ $(j=\overline{1,n-k})$ при $t\ge a_0$.

Теорема. *Нехай* $k\in\{3,\dots,n\}$, $\sigma_{n-1}\ne 1$ *і справджується* (1.4). *Для існування у рівнянняя* (1.1) *розв'язків, для яких має місце* (1.5), *необхідно і достатньо, щоб* $c\in\Delta Y_{n-k}$ *і виконувались умови* (1.6) – (1.8), *а також*

$$A=+\infty, \text{ якщо } B=0,\quad A=a_0, \text{ якщо } B=y^0_{n-1}, \tag{2.1}$$

$$\alpha y^0_{n-1}(1-\sigma_{n-1})I(t)>0 \text{ при } t\in]a_0,+\infty[\tag{2.2}$$

$$\int\limits_{a_1}^{+\infty}|W_m(\tau)|d\tau<+\infty\ \ (m=\overline{0,k-2}), \tag{2.3}$$

де $a_1\ge a_0$ *таке, що* $\alpha I(t)\in\Delta Z_{n-1}$ *при* $t\ge a_1$, *і* $W_m(t)$ *визначаються з врахуванням вигляду* $W_0(t)$ *наступним чином*

$$W_m(t)=\int\limits_{+\infty}^t W_{m-1}(s)ds\quad (m=\overline{1,k-2}).$$

Більш того, для кожного $c\in\Delta Y_{n-k}$ *при виконанні цих умов у випадку* $signI(t)=1$ *при* $t>a_0$ *існує* $(n-k+1)$*–параметрична, а у випадку* $signI(t)=-1$ *при* $t>a_0$ – $(n-k)$*–параметрична сім'я таких розв'язків і для кожного з них окрім* (1.6) *мають місце при* $t\to+\infty$ *наступні асимптотичні зображення*

$$\begin{aligned}&y^{(n-k)}(t)=c+KW_{k-1}(s)[1+o(1)],\\ &y^{(j)}(t)=KW_{n-j-1}(t)[1+o(1)]\\ &(j=\overline{n-k+1,n-1}),\end{aligned} \tag{2.4}$$

де $W_{k-1}(t)=\int\limits_{+\infty}^t W_{k-2}(s)ds.$

Доведення теореми. *Необхідність.* Нехай у рівняння (1.1) існує розв'язок y, заданий на $[t_0, +\infty[$ та який задовольняє (1.5). Тоді $c \in \Delta Y_{n-k}$, справджуються (1.7)-(1.8) і мають місце асимптотичні при $t \to +\infty$ формули (1.6).

Враховуючи зображення (1.2) правильно змінних при $t \to +\infty$ функцій $\varphi_j(y^{(j)})$ $(j = \overline{0, n-k})$ і справедливість виконання співвідношень (1.3) рівномірно по λ на будь-якому відрізку $[d_1, d_2] \subset]0, +\infty[$, при $t \to +\infty$ маємо

$$\varphi_{j-1}\left(\frac{ct^{n-k-j+1}}{(n-k-j+1)!}[1+o(1)]\right) =$$
$$= \left|\frac{ct^{n-k-j+1}}{(n-k-j+1)!}[1+o(1)]\right|^{\sigma_{j-1}} \times$$
$$\times L_{j-1}\left(\frac{ct^{n-k-j+1}}{(n-k-j+1)!}[1+o(1)]\right) =$$
$$= \left|\frac{c}{(n-k-j+1)!}\right|^{\sigma_{j-1}} \times$$
$$\times t^{n-k-j+1} L_{j-1}\left(\mu_{j-1} t^{n-k-j+1}\right)[1+o(1)] =$$
$$= \left|\frac{c}{(n-k-j+1)!}\right|^{\sigma_{j-1}} \times$$
$$\times \varphi_{j-1}(\mu_{j-1} t^{n-k-j+1})[1+o(1)] \; (j = \overline{1, n-k+1}).$$

Тоді, підставивши розв'язок разом з похідними до порядку $n-k$ включно в (1.1), отримаємо

$$\frac{y^{(n)}(t)}{\varphi_{n-1}(y^{(n-1)}(t))} = \alpha K^{1-\sigma_{n-1}} p(t) \times$$
$$\times \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j\left(\mu_j \tau^{n-k-j}\right)[1+o(1)] \;\text{ при } t \to +\infty.$$

Проінтегрувавши дане співвідношення на $[t_*, t]$, де $t_* = \max\{a_0, t_0\}$, та зробивши в інтегралі, що стоїть зліва, заміну змінної $s = y^{(n-1)}(t)$, маємо

$$\int\limits_{y_{n-1}(t_*)}^{y_{n-1}(t)} \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)} = \alpha K^{1-\sigma_{n-1}} \times$$
$$\times \int\limits_{t_*}^{t} p(\tau) \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j\left(\mu_j \tau^{n-k-j}\right)[1+o(1)] d\tau.$$

Оскільки при $t \to +\infty$ $y^{(n-1)}(t) \to Y_{n-1} = 0$, отримаємо, що інтеграли $\int\limits_{y^{(n-1)}(t_*)}^{0} \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)}$ та $\int\limits_{t_*}^{+\infty} p(\tau) \prod\limits_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j\left(\mu_j \tau^{n-k-j}\right) d\tau$ збігаються та розбігаються одночасно. Тому справджується (2.1). Крім того, з врахування вигляду функції Φ та її властивостей, а також пропонування 6 з монографії [3] (гл.V, §3, с.293) про асимптотичне обчислення інтегралів, при $t \to +\infty$ маємо

$$\Phi(y^{(n-1)}(t)) = \alpha K^{1-\sigma_{n-1}} I(t)[1+o(1)]. \quad (2.5)$$

Використовуючи пропонування 2 з [4] (Appendix, p.123) та враховуючи те, що φ_{n-1} – правильно змінна при $y \to 0$ функція порядку $\sigma_{n-1} \neq 1$, отримаємо, що $\Phi(y) \sim \frac{1}{1-\sigma_{n-1}} \frac{y}{\varphi_{n-1}(y)}$ при $y \to 0$ і тоді

$$\lim_{y \to 0} \frac{y\Phi'(y)}{\Phi(y)} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{y}{\varphi_{n-1}(y)}}{\Phi(y)} = 1 - \sigma_{n-1}.$$

Звідси випливає, що $\text{sign}\Phi(y) = \text{sign}(y^0_{n-1}(1-\sigma_{n-1}))$ при $y \in \Delta Y_{n-1}$ та з врахуванням (2.5) маємо справедливість знакової умови (2.2). Крім того, отримали, що $\Phi(y)$ — правильно змінна при $y \to 0$ функція порядку $1 - \sigma_{n-1}$ і, в силу властивостей правильно змінних функцій та умови $\sigma_{n-1} \neq 1$, звоpотня до неї функція $\Phi^{-1}(z)$ — правильно змінна при $z \to Z_{n-1} = \lim\limits_{y \to 0} \Phi(y)$ функція порядку $\frac{1}{1-\sigma_{n-1}}$. Тоді, з врахуванням теореми про рівномірну збіжність (див.[1], гл.I, §1, с.10), з (2.5) випливає, що при $t \to +\infty$

$$y^{(n-1)}(t) = \Phi^{-1}(\alpha K^{1-\sigma_{n-1}} I(t)[1+o(1)]) =$$
$$= \Phi^{-1}(\alpha K^{1-\sigma_{n-1}} I(t))[1+o(1)] =$$
$$= K\Phi^{-1}(\alpha I(t))[1+o(1)],$$

тобто має місце останнє зображення з (2.4). Проінтегрувавши його на $[t_*, t]$, де $t_* = \max\{a_1, t_0\}$, отримаємо

$$y^{(n-2)}(t) = y^{(n-2)}(t_*) + K\int\limits_{t_*}^{t} \Phi^{-1}(\alpha I(\tau))[1+o(1)] d\tau.$$

Оскільки при $t \to +\infty$ $y^{(n-2)} \to Y_{n-2} = 0$, то інтеграл, що стоїть зправа, при $t \to +\infty$ має скінченну границю і тоді для $(n-2)$–ї похідної розв'язку має місце зображення з (2.4) і справджується (2.3) при $m = 0$.

Продовжуючи міркування аналогічним чином, встановлюємо справедливість всіх останніх $k-1$ зображень з (2.4) та збіжність інтегралів (2.3) при всіх $m=\overline{0,k-3}$. Проінтегрувавши отримане співвідношення для $(n-k+1)$–ї похідної на $[t_*,t]$, де $t_*=\max\{a_0,t_0\}$, маємо

$$y^{(n-k)}(t)=y^{(n-k)}(t_*)+ +K\int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_{+\infty}^{t_{k-2}}\dots\int\limits_{+\infty}^{t_1}\Phi^{-1}(\alpha I(\tau))[1+o(1)]dt_1\dots dt_{k-2}d\tau. \tag{2.6}$$

В силу припущення (1.5)

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_{+\infty}^{t_{k-2}}\dots\int\limits_{+\infty}^{t_1}\Phi^{-1}(\alpha I(\tau))[1+o(1)]dt_1\dots dt_{k-2}d\tau = \mathrm{const}$$

та за ознакою порівняння справджується (2.3) при $m=k-2$, а співвідношення (2.6) може бути переписано у вигляді 1–го зображення з (2.4).

Достатність. Припустивши, що справджуються умови (1.7) – (1.8), (2.1) – (2.3), виберемо довільним чином число $c\in\Delta Y_{n-k}$.

Застосовуючи до рівняння (1.1) перетворення

$$\begin{aligned}&y^{(j-1)}(t)=\tfrac{ct^{n-k-j+1}}{(n-k-j+1)!}\,[1+v_j(t)]\ (j=\overline{1,n-k}),\\ &y^{(n-k)}(t)=c+KW_{k-1}(t)[1+v_{n-k+1}(t)],\\ &y^{(j)}(t)=KW_{n-j-1}(t)[1+v_{j+1}(t)]\quad (j= =\overline{n-k+1,n-1}),\end{aligned} \tag{2.7}$$

отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_j'=\frac{n-k-j+1}{t}[-v_j+v_{j+1}]\ (j=\overline{1,n-k-1}),\\ v_{n-k}'=-\frac{1}{t}v_{n-k}+\frac{KW_{k-1}(t)}{tc}v_{n-k+1}+\frac{KW_{k-1}(t)}{tc},\\ v_j'=\frac{W_{n-j-1}(t)}{W_{n-j}(t)}[-v_j+v_{j+1}]\ (j=\overline{n-k+1,n-1}),\\ v_n'=\frac{1}{W_0(t)}[-W_0'(t)[1+v_n]+\\ +\frac{\alpha}{K}p(t)\prod\limits_{j=0}^{n-k-1}\varphi_j\left(\frac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!}[1+v_{j+1}]\right)\times\\ \times\varphi_{n-k}(c+KW_{k-1}(t)[1+v_{n-k+1}])\times\\ \times\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1}\varphi_j\left(KW_{n-j-1}(t)[1+v_{j+1}]\right)] \end{cases} \tag{2.8}$$

Розглянемо її на множині $\Omega^n=[t_0,+\infty[\times\mathbb{R}^n_{\frac12}$, де $\mathbb{R}^n_{\frac12}=\{(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n:|v_j|\le\frac12,\ j=\overline{1,n}\}$ і $t_0\ge a_1$ вибране з врахуванням (2.3) таким чином, щоб при $t>t_0$ і $(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac12}$ виконувались умови:

$$\begin{aligned}&\tfrac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!}\,[1+v_{j+1}]\in\Delta Y_j\ (j=\overline{0,n-k-1}),\\ &c+KW_{k-1}(t)[1+v_{n-k+1}]\in\Delta Y_{n-k},\\ &KW_{n-j-1}(t)[1+v_{j+1}]\in\Delta Y_j\ (j=\overline{n-k+1,n-1}).\end{aligned}$$

Оскільки функції $\varphi_j(y^{(j)})$ $(j=\overline{0,n-k-1})$ можуть бути представлені у вигляді (1.2), співвідношення (1.3) виконуються рівномірно по λ на будь-якому відрізку $[d_1,d_2]\subset]0,+\infty[$ і справджується (1.4), а також в силу неперервності функції $\varphi_{n-k}(y^{(n-k)})$ на ΔY_{n-k} і (2.3), маємо

$$\begin{aligned}&\varphi_j\left(\tfrac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!}[1+v_{j+1}]\right)=\left|\tfrac{c}{(n-k-j)!}\right|^{\sigma_j}\times\\ &\times\varphi_j(\mu_jt^{n-k-j})(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1}))\\ &(j=\overline{0,n-k-1}),\\ &\varphi_j(KW_{n-j-1}(t)[1+v_{j+1}])=\\ &=\varphi_j^0(1+R_j(t,v_{j+1}))\ (j=\overline{n-k+1,n-2}),\\ &\varphi_{n-1}(KW_0(t)[1+v_n])=K^{\sigma_{n-1}}\varphi_{n-1}(W_0(t))\times\\ &\times(1+v_n)^{\sigma_{n-1}}(1+R_{n-1}(t,v_n)),\\ &\varphi_{n-k}(c+KW_{k-1}(t))[1+v_{n-k+1}]=\\ &=\varphi_{n-k}(c)(1+R_{n-k}(t,v_{n-k+1})),\end{aligned}$$

де функції $R_j(t,v_{j+1})$ $(j=\overline{0,n-1})$ прямують до нуля при $t\to+\infty$ рівномірно по $v_{j+1}\in\left[-\frac12,\frac12\right]$. Крім того,

$$W_0'(t)=\varphi_{n-1}(W_0(t))\alpha KI'(t).$$

В силу цих зображень систему рівнянь (2.8) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} v_j'=\frac{n-k-j+1}{t}[-v_j+v_{j+1}]\ (j=\overline{1,n-k-1}),\\ v_{n-k}'=-\frac1t v_{n-k}+\frac{KW_{k-1}(t)}{tc}v_{n-k+1}+\frac{KW_{k-1}(t)}{tc},\\ v_j'=\frac{W_{n-j-1}(t)}{W_{n-j}(t)}[-v_j+v_{j+1}]\ (j=\overline{n-k+1,n-1}),\\ v_n'=\frac{W_0'(t)}{W_0(t)}\left[\sum\limits_{j=1}^{n-k}\sigma_{j-1}v_j+(\sigma_{n-1}-1)v_n+\right.\\ \left.+\sum\limits_{k=1}^{2}Y_{nk}(t,v_1,\dots,v_n)\right], \end{cases} \tag{2.9}$$

де $Y_{n1}(t,v_1,...,v_n)=$

$$=R(t,v_1,...,v_n)(1+v_n)^{\sigma_{n-1}}\prod_{j=1}^{n-k}(1+v_j)^{\sigma_{j-1}},$$

$R(t,v_1,...,v_n)=(1+R_0(t,v_1))...(1+R_{n-1}(t,v_n))-$ -1 при $t\to+\infty$ прямує до нуля рівномірно по $v_i\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ $(i=\overline{1,n})$,

$$Y_{n2}(t,v_1,...,v_n)=(1+v_n)^{\sigma_{n-1}}\prod_{j=1}^{n-k}(1+v_j)^{\sigma_{j-1}}-$$
$$-\sigma_{n-1}v_n\prod_{j=1}^{n-k}\sigma_{j-1}v_j-1.$$

Уважаючи в неї

$$\begin{aligned} &v_j=\delta z_j\ (j=\overline{1,n-k}),\\ &v_j=z_j\ (j=\overline{n-k+1,n}), \end{aligned} \tag{2.10}$$

де $\delta>0$ вибрано так, щоб справджувалась нерівність $0<\delta\sum\limits_{j=0}^{n-k-1}|\sigma_j|<|\sigma_{n-1}-1|$, отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\left\{\begin{aligned} &z_j'=\frac{n-k-j+1}{t}[-z_j+z_{j+1}]\ (j=\overline{1,n-k-1}),\\ &z_{n-k}'=-\frac{1}{t}z_{n-k}+\frac{KW_{k-1}(t)}{\delta tc}z_{n-k+1}+\frac{KW_{k-1}(t)}{\delta tc},\\ &z_{n-k+1}'=\frac{W_{k-2}(t)}{W_{k-1}(t)}[-z_{n-k+1}+\delta z_{n-k}],\\ &z_j'=\frac{W_{n-j-1}(t)}{W_{n-j}(t)}[-z_j+z_{j+1}]\ (j=\overline{n-k+2,n-1}),\\ &z_n'=\frac{W_0'(t)}{W_0(t)}\left[\delta\sum_{j=1}^{n-k}\sigma_{j-1}z_j+(\sigma_{n-1}-1)z_n+\right.\\ &\left.+\sum_{k=1}^{2}Z_{nk}(t,z_1,\dots,z_n)\right] \end{aligned}\right. \tag{2.11}$$

в якій $Z_{nk}(t,z_1,\dots,z_n)=Y_{nk}(t,\frac{1}{\delta}v_1,\dots,\frac{1}{\delta}v_{n-k},v_{n-k+1},\dots,v_n)$ $(k=1,2)$ і такі, що $\lim\limits_{t\to+\infty}Z_{n1}(t,z_1,\dots,z_n)=0$ рівномірно по $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}_l^n=\{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n:|z_j|\le l,\ j=\overline{1,n}\}$, $l=\min\left\{\frac{1}{2\delta},\frac{1}{2}\right\}$, $\lim\limits_{|z_1|+\ldots+|z_n|\to0}\frac{\partial Z_{n2}(t,z_1,\ldots,z_n)}{\partial z_k}=0$ $(k=\overline{1,n})$ рівномірно по $t\in[t_0,+\infty[$.

В силу вигляду $W_j(t)$ $(j=\overline{1,k-1})$ й (2.3) $\lim\limits_{t\to+\infty}W_j(t)=0$,

$$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{W_{n-j-1}(t)dt}{W_{n-j}(t)}=\pm\infty\ (j=\overline{n-k+1,n-1}),$$
$$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{W_0'(t)dt}{W_0(t)}=\pm\infty$$

та при $t>t_0$

$$\frac{W_{n-j-1}(t)}{W_{n-j}(t)}<0\ (j=\overline{n-k+1,n-1}),$$

$$\begin{aligned} &\frac{W_0'(t)}{W_0(t)}(\sigma_{n-1}-1)<0,\ \text{ якщо }\operatorname{sign}I(t)=1,\\ &\frac{W_0'(t)}{W_0(t)}(\sigma_{n-1}-1)>0,\ \text{ якщо }\operatorname{sign}I(t)=-1. \end{aligned}$$

При зазначеному виборі числа δ в силу описаних вище умов для системи (2.11) виконані всі умови теореми 1.2 з роботи [5]. Тоді в неї існує $q-$параметрична сім'я прямуючих до нуля при $t\to+\infty$ розв'язків $(z_j)_{j=1}^n:[t_1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}_l^n$ $(t_1\ge t_0)$, де

$$q=\begin{cases} n-k+1, & \text{якщо }\operatorname{sign}I(t)=1,\\ n-k, & \text{якщо }\operatorname{sign}I(t)=-1, \end{cases}$$

кожному з яких в силу перетворень (2.7) і (2.10) відповідає розв'язок вигляду (1.5) диференціального рівняння (1.1), що допускає асимптотичні зображення (2.4). Теорема доведена.

3. Висновки

У даній роботі для двочленного неавтономного звичайного диференціального рівняння n-го порядку з правильно змінними нелінійностями (1.1) у випадку, коли границі $\varphi_i(y^{(i)})$ $(i=\overline{n-k+1,n-2})$ при $y^{(i)}\to Y_i$ дорівнюють додатним сталим, отримані необхідні та достатні умови існування розв'язків, для яких $(n-k)-$а похідна прямує до відмінної від нуля сталої при $t\to+\infty$.

При цьому були встановлені асимптотичні при $t\to+\infty$ формули для похідних таких типів розв'язків до порядку $n-1$ включно та з'ясоване питання про кількість розв'язків зі знайденими зображеннями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.

2. *Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990. — 430 с.

3. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. — М.: Наука, 1965. — 424 с.

4. *Maric V.* Regular variation and differential equations (Seria: Lecture Notes in Mathematics Series). — Springer-Verlag. New York LLC, 2000. – 140 p.

5. *Евтухов В.М., Самойленко А.М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. ж. – 2010. – **62**, N1. – С. 52-80.

УДК 517.95

©2016 р. Г. П. Лопушанська, В. Р. Шумська

Львівський національний університет імені Івана Франка

ЗНАХОДЖЕННЯ ДВОХ МОЛОДШИХ КОЕФІЦІЄНТІВ У ТЕЛЕГРАФНОМУ РІВНЯННІ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Встановлюємо однозначну розв'язність оберненої задачі Коші для рівняння $u_t^{(\alpha)} - r(t)u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\gamma/2}u - b(t)u = F_0(x)g(t)$, $(x,t) \in \mathrm{R}^n \times (0,T]$, з дробовими похідними, заданими узагальненими функціями F_0 та у правих частинах початкових умов. Задача полягає у знаходженні трійки функцій: узагальненого розв'язку u (неперервного й інтегровного за часом в узагальненому сенсі) та невідомих неперервних та інтегровних коефіцієнтів $b(t)$, $r(t)$.

We establish the unique solvability of an inverse Cauchy problem for the equation $u_t^{(\alpha)} - r(t)u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\gamma/2}u - b(t)u = F_0(x)g(t)$, $(x,t) \in \mathrm{R}^n \times (0,T]$, with fractional derivatives, given distributions F_0 and in right-hand sides of the initial conditions. The problem is to find the generalized solution u (continuous and integrable in time in generalized sense) and unknown continuous and integrable coefficients $b(t)$, $r(t)$.

Вступ. У [1, 2] досліджена задача Коші для певних класів параболічних рівнянь із псевдодиференціальним оператором у просторах узагальнених функцій типу Шварца. У [3–7] доведені теореми існування і єдиності, а також одержано зображення за допомогою функцій Гріна класичних розв'язків задач Коші для рівнянь із дробовою похідною за часом.

Обернені задачі для рівнянь із дробовими похідними виникають у багатьох галузях науки і техніки.

Обернені крайові задачі на визначення або головного коефіцієнта, або правої частини, або порядку дробової похідної у рівнянні, або невідомої крайової умови вивчались у [8–14] та інших працях, розв'язність прямої й оберненої задач для одного класу рівнянь із псевдодиференціальним оператором встановлено у [15]. Обернені задачі з невідомими молодшими коефіцієнтами у рівняннях із дробовими похідними мало вивчені.

У даній статті ми досліджуємо існування і єдиність розв'язку (u, r, b) оберненої задачі Коші

$$\begin{aligned} u_t^{(\alpha)} - r(t)u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\gamma/2}u - b(t)u = \\ = F_0(x)g(t), \quad (x,t) \in \mathrm{R}^n \times (0,T], \end{aligned} \tag{1}$$

$$u(x,0) = F_1(x),$$

$$u_t(x,0) = F_2(x), \; x \in \mathrm{R}^n, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \big(u(\cdot,t), \varphi_1(\cdot)\big) = \Phi_1(t), \\ \big(u(\cdot,t), \varphi_2(\cdot)\big) = \Phi_2(t), \quad t \in (0,T] \end{aligned} \tag{3}$$

з дробовими похідними Рімана-Ліувіля $u_t^{(\alpha)}, u_t^{(\beta)}$ та $(-\Delta)^{\gamma/2}u$, визначеною з використанням перетворення Фур'є

$$\mathcal{F}[(-\Delta)^{\gamma/2}u] = |\lambda|^\gamma \mathcal{F}[u]$$

при умові

(L) $\alpha \in (1,2)$, $\beta \in (0,1)$, $\gamma > \alpha$, $\min\{n, 2, \gamma\} > (n-1)/2$,

де F_0, F_1, F_2 – задані узагальнені функції, $g, \Phi_1, \Phi_2, \varphi_1, \varphi_2$ – задані гладкі функції, через (f, φ) позначено значення узагальненої функції f на основній функції φ, a^2 – додатна стала.

Зауважимо, що однозначну розв'язність задачі Коші для рівняння (1) при $b(t) = r(t) = 0$, $t \in [0,T]$ у просторах узагальнених функцій було доведено в [16, 17], зокрема, у [17] – у просторах беселевих потенціалів при $\alpha \in (0,1]$.

1. Позначення, формулювання задачі й допоміжні результати. Нехай N – множина натуральних чисел, $\mathrm{Z}_+ = \mathrm{N} \cup 0$, $Q = \mathrm{R}^n \times (0,T]$, $n \in \mathrm{N}$, $\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$ – простір нескінченно диференційовних функцій із компактними носіями в R^n, $\mathcal{E}(\mathrm{R}^n) = C^\infty(\mathrm{R}^n)$,

$\mathcal{D}(\bar{Q})$ – простір нескінченно диференційовних функцій із компактними носіями і таких, що $(\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=T} = 0$, $k \in \mathrm{Z}_+$, $\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)$ – простір функцій із $C^k(\mathrm{R}^n)$ з компактними носіями, $||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)} = \max\limits_{|\kappa|\le k} \max\limits_{x\in supp\varphi} |D^\kappa\varphi(x)|$, де $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$, $\kappa_j \in \mathrm{Z}_+$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $|\kappa| = \kappa_1 + \cdots + \kappa_n$, $D^\kappa\varphi(x) = \frac{\partial^{|\kappa|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}}$, $\mathcal{D}'(\mathrm{R}^n)$, $\mathcal{E}'(\mathrm{R}^n)$ і $\mathcal{D}'(\bar{Q})$ – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на $\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$, $\mathcal{E}(\mathrm{R}^n)$ і $\mathcal{D}(\bar{Q})$. Зауважимо, що $\mathcal{E}'(\mathrm{R}^n)$ – простір узагальнених функцій із компактними носіями. Нехай

$$\mathcal{D}'_+(\mathrm{R}) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathrm{R}) : f = 0, t < 0\},$$
$$\mathcal{D}'_C(\bar{Q}) = \{v \in \mathcal{D}'(\bar{Q}) : (v(\cdot,t), \varphi(\cdot)) \in C[0,T] \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n)\},$$
$$\mathcal{D}'_{C,L}(Q) = \{v \in \mathcal{D}'(\bar{Q}) : (v(\cdot,t), \varphi(\cdot)) \in C(0,T] \cap L(0,T) \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n)\}.$$

Через $f*g$ позначаємо згортку узагальних функцій f і g, використовуємо функцію

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \theta(t)t^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda), & \lambda > 0,\\ f'_{1+\lambda}(t), & \lambda \le 0,\end{cases}$$

де $\Gamma(z)$ – гама-функція, $\theta(t)$ – функція Хевісайда. Зауважимо, що

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}.$$

Нагадаємо, що похідна Рімана-Ліувіля порядку $\beta > 0$ визначена формулою

$$v_t^{(\beta)}(x,t) = f_{-\beta}(t) * v(x,t),$$

а похідна Капуто – формулою

$$D_t^\alpha v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\frac{d^n}{d\tau^n}v(\tau)d\tau$$

при $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$.

Позначаємо

$C_{\alpha,\gamma}(Q) = \{v \in C(Q) : (-\Delta)^{\gamma/2}v, D_t^\alpha v \in C(Q)\}$,

$C_{\alpha,\gamma}(\bar{Q}) = \{v \in C_{\alpha,\gamma}(Q) \mid v, v_t \in C(\bar{Q})\}$,

$(Lv)(x,t) = v_t^{(\alpha)}(x,t) + a^2(-\Delta)^{\gamma/2}v(x,t)$,

$(L^{reg}v)(x,t) = D_t^\alpha v(x,t) + a^2(-\Delta)^{\gamma/2}v(x,t)$,

$(\widehat{L}v)(x,t) = f_{-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t) + a^2(-\Delta)^{\gamma/2}v(x,t)$, $(x,t) \in Q$,

де при $v \in \mathcal{D}(\bar{Q})$

$$f_{-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t) = \big(f_{-\alpha}(\tau), v(x,t+\tau)\big).$$

Правильна формула Гріна [16]:

$$\int\limits_Q v(y,\tau)(\widehat{L}\psi)(y,\tau)dyd\tau = \int\limits_Q (L^{reg}v)(y,\tau)\psi(y,\tau)dyd\tau - \int\limits_{\mathrm{R}^n} v(y,0)dy\int\limits_0^T f_{2-\alpha}(\tau)\psi_\tau(y,\tau)d\tau + \int\limits_{\mathrm{R}^n} v_t(y,0)dy\int\limits_0^T f_{2-\alpha}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau$$
$$\forall v \in C_{\alpha,\gamma}(\bar{Q}) \quad \psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}).$$

Припущення:

(A1) $F_0, F_1, F_2 \in \mathcal{E}'(\mathrm{R}^n)$,
$s \in [0, \min\{(\alpha-\beta)/2, 1-\beta\})$,
$t^s g \in C[0,T]$,

(A2) $ln\,t\,\Phi_j, t^\beta\,ln\,t\,\Phi_j^{(\beta)}, t^s\,\Phi_j^{(\alpha)} \in C[0,T]$,
$\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$, $j = 1,2$, $d(t) :=$
$t^\beta(1+|\,ln\,t|)[\Phi_1^{(\beta)}(t)\Phi_2(t) - \Phi_1(t)\Phi_2^{(\beta)}(t)]$,
$\inf\limits_{t\in(0,T]}|d(t)| = d_0 > 0$.

Означення 1. Трійка функцій $(u,r,b) \in U = U(T) := \mathcal{D}'_{C,L}(Q) \times (C(0,T] \cap L(0,T))^2$, яка задовольняє тотожність

$$(u, \widehat{L}\psi) = \int\limits_0^T g(t)\big(F_0(\cdot), \psi(\cdot,t)\big)dt + \int\limits_0^T r(t)\big(u_t^{(\beta)}(\cdot,t), \psi(\cdot,t)\big)dt + \int\limits_0^T b(t)\big(u(\cdot,t), \psi(\cdot,t)\big)dt + \sum_{j=1}^2\big(F_j(x)f_{j-\alpha}(t), \psi(x,t)\big) \qquad \forall\psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}) \tag{4}$$

та умови (3), називається розв'язком задачі (1)-(3).

Зауважимо, що у подібному формулюванні в [18] встановлена однозначна розв'язність у просторі $\mathcal{D}'_C(\bar{Q}) \times C(0,T]$ задачі Коші для рівняння (1) при $b(t) = 0$ та одній додатковій умові в (3). Тут розглядаємо задачу з двома невідомими коефіцієнтами та коли регулярні дані задачі можуть мати слабкі особливості при $t = 0$.

Для доведення розв'язності задачі використовуємо метод функції Гріна.

Означення 2. Вектор-функція $\big(G_0(x,t), G_1(x,t), G_2(x,t)\big)$ така, що при достатньо регулярних g_0, g_1, g_2 функція

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathrm{R}^n} G_0(x-y,t-\tau) g_0(y,\tau) dy$$
$$+ \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\mathrm{R}^n} G_j(x-y,t) g_j(y) dy, \ \ (x,t) \in \bar{Q} \tag{5}$$

є класичним (із $C_{\alpha,\gamma}(\bar{Q})$) розв'язком задачі Коші

$$L^{reg} u(x,t) = g_0(x,t), \ \ (x,t) \in Q,$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad u_t(x,0) = g_2(x), \quad x \in \mathrm{R}^n$$

називається вектор-функцією Гріна цієї задачі. Позначаємо

$$(\widehat{\mathcal{G}}_0 \varphi)(y,\tau) = \int\limits_\tau^T \int\limits_{\mathrm{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)\varphi(x,t) dx dt,$$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_j \varphi)(y) = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathrm{R}^n} G_j(x-y,t)\varphi(x,t) dx dt,$$
$$j = 1,2,$$

$$(\widehat{G_j}\varphi)(y,t) = \int\limits_{\mathrm{R}^n} G_j(x-y,t)\varphi(x)\, dx,$$
$$j = 0,1,2.$$

Лема 1 [16]. Правильні наступні співвідношення:

$$G_j(x,t) = \big(f_{j-\alpha}(\tau), G_0(x,t-\tau)\big),$$
$$(x,t) \in Q, \ \ j = 1,2,$$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi))(y,\tau) = \psi(y,\tau), \ \ (y,\tau) \in \bar{Q},$$
$$(\widehat{\mathcal{G}}_j(\widehat{L}\psi))(y) = \big(f_{j-\alpha}(\tau), \psi(y,\tau)\big),$$
$$y \in \mathrm{R}^n, \quad j = 1,2, \ \ \forall \psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}). \tag{6}$$

Лема 2. Вектор-функція Гріна задачі Коші (1), (2) існує.

Доведення. У [5, 16] одержано зображення компонент вектор-функції Гріна

$$G_0(x,t) = \frac{\pi^{-n/2} t^{\alpha-1}}{|x|^n} \times$$
$$H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^\gamma}{2^\gamma a^2 t^\alpha} \middle| \begin{matrix} (1,1) & (\alpha,\alpha) & \\ (1,1) & (n/2,\gamma/2) & (1,\gamma/2) \end{matrix} \right),$$

$$G_j(x,t) = \frac{\pi^{-n/2} t^{j-1}}{|x|^n} \times$$
$$H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^\gamma}{2^\gamma a^2 t^\alpha} \middle| \begin{matrix} (1,1) & (j,\alpha) & \\ (1,1) & (n/2,\gamma/2) & (1,\gamma/2) \end{matrix} \right),$$

$j = 1,2$, де $H^{m,n}_{p,q}\left(z \middle| \begin{matrix} (a_1,\gamma_1) & \dots & (a_p,\gamma_p) \\ (b_1,\alpha_1) & \dots & (b_q,\alpha_q) \end{matrix} \right)$ –Н-функція Фокса [19, 20].

Для функцій G_j, $j = 0,1,2$ маємо

$$a^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=n+1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i - \sum_{i=m+1}^{q} \beta_i =$$
$$= 2 - \alpha > 0,$$
$$\Delta^* = \sum_{i=1}^{q} \beta_i - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \gamma - \alpha > 0.$$

Тому за припущення (L) за теоремою 1.1 [20] ці функції існують для всіх $x \neq 0$, $t > 0$.

Лема 3. Для всіх $k \in \mathrm{Z}_+$, мультиіндексів κ, $|\kappa| = k$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$,

$$D^\kappa_y(\widehat{G_j}\varphi) \in C(Q), \ \ D^\kappa_y(\widehat{G_j}\varphi)^{(\beta)}_t \in C(Q),$$

$j = 0,1,2$, і правильні наступні оцінки:

$$\big| D^\kappa_y(\widehat{G_0}\varphi)(y,t) \big| \leq c t^{\alpha-1}(1 + |ln\, t|) ||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},$$
$$\big| D^\kappa_y(\widehat{G_j}\varphi)(y,t) \big| \leq c t^{j-1}(1 + |ln\, t|) ||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},$$
$$\big| D^\kappa_y(\widehat{G_0}\varphi)^{(\beta)}_t(y,t) \big| \leq$$
$$\leq c_\beta t^{\alpha-\beta-1}(1 + |ln\, t|) ||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},$$
$$\big| D^\kappa_y(\widehat{G_j}\varphi)^{(\beta)}_t(y,t) \big| \leq$$
$$c_\beta t^{j-\beta-1}(1 + |ln\, t|) ||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},$$
$$(y,t) \in Q, j = 1,2.$$

Тут і далі $b_i, c, c_\beta, C_i, C^*_i, c_i, c^*_i$ $(i \in \mathrm{Z}_+)$– додатні сталі.

Доведення. Лема доводиться з використанням оцінок компонент вектор-функції Гріна. Вони були отримані в роботі [16] на базі властивостей та асимптотики H-функцій Фокса [20]. Враховуючи теорему 1.7 із [20], одержано оцінки

$$|G_0(x,t)| \le \frac{C_0 t^{\alpha-1}}{|x|^n}, \;\; |G_j(x,t)| \le \frac{C_j t^{j-1}}{|x|^n},$$
$$j=1,2 \quad \text{при} \quad |x|^\gamma > t^\alpha, \tag{7}$$

а за наслідком з теореми 1.12 [20] у випадку

$$\gamma \ne \frac{n+2l}{\sigma}, \quad l \in \mathbb{Z}_+, \sigma \in \mathbb{N} \tag{8}$$

одержано оцінки при $|x|^\gamma < t^\alpha$:

$$|G_0(x,t)| \le \frac{C_0^*}{t|x|^{n-\gamma}}, \quad \text{якщо} \quad \gamma < n, \tag{9}$$

$$|G_0(x,t)| \le C_0^* t^{\alpha-1-n\alpha/\gamma} \quad \text{для} \quad \gamma \ge n, \tag{10}$$

$$|G_j(x,t)| \le \frac{C_j^* t^{j-1-\alpha}}{|x|^{n-\gamma}} \quad \text{при} \quad \gamma < n, \tag{11}$$

$$|G_j(x,t)| \le C_j^* t^{j-1-n\alpha/\gamma} \text{для} \quad \gamma \ge n, j=1,2. \tag{12}$$

У загальному випадку правильні такі ж оцінки, але з множниками $ln^N \frac{t^\alpha}{|x|^\gamma}$ при деяких натуральних N у формулах (9)–(12). Не обмежуючи загальності, далі розглядаємо випадок (8).

Із наведених оцінок випливає інтегровність функцій $G_j(x,t)$ в $\mathbb{R}^n$ для кожного $t>0$, $j=0,1,2$. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial y_i} G_j(x-y,t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} G_j(x-y,t),$$
$$i=1,\dots,n, \;\; j=0,1,2$$

і подібно для похідних вищих порядків, то для всіх $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ та мультиіндексів κ

$$D^\kappa(\mathcal{G}_j\varphi)(y,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t) D^\kappa \varphi(x) dx$$

за умови рівномірної збіжності інтегралів

$$v_{j,\kappa}(y,t) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t) D^\kappa \varphi(x) dx, \; j=0,1,2.$$

За цих умов з попередньої рівності одержимо, що $D^\kappa(\widehat{G}_j\varphi) \in C(Q)$ для довільного мультиіндексу κ, а отже, $\widehat{G}_j\varphi \in C^\infty(Q)$ при $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $j=0,1,2$.

Покажемо рівномірну збіжність інтегралів $v_{j,\kappa}(y,t)$ для кожного κ.

Враховуючи оцінки (7), (9) функції $G_0(x-y,t)$, фінітність та обмеженість функцій $D^\kappa\varphi(x,t)$ в Q_T, у випадку $|\kappa|=k$, $\gamma<n$ одержуємо

$$|v_{0,\kappa}(y,t)| \le$$
$$\le \Big[\int_{x:|x-y|^\gamma<t^\alpha} |G_0(x-y,t)| \cdot |D^\kappa\varphi(x)| dx +$$
$$+ \int_{x:|x-y|^\gamma>t^\alpha} |G_0(x-y,t)| \cdot |D^\kappa\varphi(x)| dx \Big] \le$$
$$\le d_{0,\kappa,0} \Big[\int_{x:|x-y|^\gamma<t^\alpha} \frac{|D^\kappa\varphi(x)|}{t|x-y|^{n-\gamma}} dx +$$
$$+ \int_{x:|x-y|^\gamma>t^\alpha} \frac{t^{\alpha-1}|D^\kappa\varphi(x)|}{|x-y|^n} dx \Big] dt \le$$
$$\le d_{0,\kappa,1} \Big[\frac{1}{t} \int_0^{t^{\alpha/\gamma}} r^{\gamma-1} dr + t^{\alpha-1}|ln\, t| \Big] \, ||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)}$$
$$\le d_{0,\kappa,2} t^{\alpha-1-\varepsilon} \, ||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},$$

а з (7), (10) при $\gamma \ge n$

$$|v_{0,\kappa}(y,t)| \le$$
$$\le d_{0,\kappa,0} \Big[t^{\alpha-1-n\alpha/\gamma} \int_{x:|x-y|^\gamma<t^\alpha} |D^\kappa\varphi(x)| dx +$$
$$+ t^{\alpha-1} \int_{x:|x-y|^\gamma>t^\alpha} \frac{|D^\kappa\varphi(x)|}{|x-y|^n} dx \Big] dt \le$$
$$\le d_{0,\kappa,1} \Big[t^{\alpha-1-n\alpha/\gamma} \int_0^{t^{\alpha/\gamma}} r^{n-1} dr +$$
$$+ t^{\alpha-1}|ln\, t| \Big] \, ||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)} \le$$
$$\le d_{0,\kappa,2} t^{\alpha-1-\varepsilon} \, ||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)} \;\; \forall \varepsilon \in (0,1).$$

Тут і далі $d_{j,\kappa,0} = \max\{C_j, C_j^*\}$, $d_{j,\kappa,k}, d_{j,\kappa,k}$ $(j=0,1,2,\; k \in \mathbb{Z}_+)$ – додатні сталі.

Аналогічно, враховуючи оцінки (7), (11) функцій $G_j(x-y,t)$, $j=1,2$, при $\gamma<n$ одержуємо

$$\Big|v_{j,\kappa}(y,t)| \le$$
$$\le | \int\limits_{x:|x-y|^{\gamma}<t^{\alpha}} G_j(x-y,t)D^{\kappa}\varphi(x)dx+$$
$$+ \int\limits_{x:|x-y|^{\gamma}>t^{\alpha}} G_j(x-y,t)D^{\kappa}\varphi(x)dx\Big| \le$$
$$\le d_{j,\kappa,0}\Big[t^{j-1-\alpha} \int\limits_{x:|x-y|^{\gamma}<t^{\alpha}} \tfrac{|D^{\kappa}\varphi(x)|}{|x-y|^{n-\gamma}}dx+$$
$$+t^{j-1} \int\limits_{x:|x-y|^{\gamma}>t^{\alpha}} \tfrac{|D^{\kappa}\varphi(x)|}{|x-y|^{n}}dx\Big] \le$$
$$\le d_{j,\kappa,1}\Big[t^{j-1-\alpha} \int\limits_{0}^{t^{\alpha/\gamma}} r^{\gamma-1}dr+$$
$$+t^{j-1} \int\limits_{t^{\alpha/\gamma}}^{+\infty} |D^{\kappa}\varphi(x)|r^{-1}dr\Big] \le$$
$$\le d_{j,\kappa,2}t^{j-1-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},\ k=|\kappa|.$$

У випадку $\gamma \ge n$ з врахуванням оцінок (7), (12), матимемо

$$|v_{j,\kappa}(y,t)| \le d_{j,\kappa,0}t^{j-1}\Big[\int\limits_{x:|x-y|^{\gamma}<t^{\alpha}} \tfrac{|D^{\kappa}\varphi(x)|}{t^{n\alpha/\gamma}}dx+$$
$$+ \int\limits_{x:|x-y|^{\gamma}>t^{\alpha}} \tfrac{|D^{\kappa}\varphi(x)|}{|x-y|^{n}}dx\Big] \le$$
$$\le d_{j,\kappa,1}t^{j-1}[1+|lnt|]\,||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)} \le$$
$$\le d_{j,\kappa,2}t^{j-1-\varepsilon}\,||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)}, \quad j=1,2.$$

Використовуючи властивість 2.3 [20]

$$H^{m,n}_{p,q}\left(\tfrac{1}{z}\Big|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right) =$$
$$= H^{n,m}_{q,p}\left(z\Big|\begin{matrix}(1-b_1,\beta_1) & \dots & (1-b_q,\beta_q)\\ (1-a_1,\alpha_1) & \dots & (1-a_p,\alpha_p)\end{matrix}\right)$$

Н-функції Фокса, можемо подати функції $G_j(x,t)$ як

$$G_0(x,t) = \tfrac{\pi^{-n/2}t^{\alpha-1}}{|x|^n}$$
$$H^{1,2}_{3,2}\left(\tfrac{2^{\gamma}a^2}{|x|^{\gamma}}t^{\alpha}\Big|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\gamma/2) & (0,\gamma/2)\\ (0,1) & (1-\alpha,\alpha) & \end{matrix}\right),$$
$$G_j(x,t) = \tfrac{\pi^{-n/2}t^{j-1}}{|x|^n}$$
$$H^{1,2}_{3,2}\left(\tfrac{2^{\gamma}a^2}{|x|^{\gamma}}t^{\alpha}\Big|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\gamma/2) & (0,\gamma/2)\\ (0,1) & (1-j,\alpha) & \end{matrix}\right),$$
$$j=1,2.$$

За теоремою 2.7 із [20] про дробове диференціювання Н-функцій

$$f_{1-\beta}(t)*G_0(x,t) = \tfrac{\pi^{-n/2}t^{\alpha-\beta}}{|x|^n}\times$$
$$\times H^{1,2}_{3,2}\left(t^{\alpha}\Big|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\gamma/2) & (0,\gamma/2)\\ & (0,1) & (\beta-\alpha,\alpha)\end{matrix}\right).$$

За властивістю 2.8 [20] про диференціювання знаходимо

$$(f_{1-\beta}(t)*G_0)_t = \tfrac{\pi^{-n/2}t^{\alpha-\beta-1}}{|x|^n}\times$$
$$\times H^{2,1}_{2,3}\left(\tfrac{|x|^{\gamma}}{2^{\gamma}a^2t^{\alpha}}\Big|\begin{matrix}(1,1) & (\alpha-\beta,\alpha) & \\ (1,1) & (n/2,\gamma/2) & (1,\gamma/2)\end{matrix}\right).$$

Подібно обчислюємо

$$f_{1-\beta}(t)*G_j(x,t) = \tfrac{\pi^{-n/2}t^{j-\beta}}{|x|^n}\times$$
$$\times H^{1,2}_{3,2}\left(\tfrac{2^{\gamma}a^2}{|x|^{\gamma}}t^{\alpha}\Big|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\gamma/2) & (0,\gamma/2)\\ (0,1) & (\beta-j,\alpha) & \end{matrix}\right),$$
$$\tfrac{\partial}{\partial t}\big(f_{1-\beta}(t)*G_j(x,t)\big) = \tfrac{\pi^{-n/2}t^{j-\beta-1}}{|x|^n}\times$$
$$\times H^{1,2}_{3,2}\left(\tfrac{2^{\gamma}a^2}{|x|^{\gamma}}t^{\alpha}\Big|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\gamma/2) & (0,\gamma/2)\\ (0,1) & (1+\beta-j,\alpha) & \end{matrix}\right)$$
$$= \tfrac{\pi^{-n/2}t^{j-\beta-1}}{|x|^n}\times$$
$$\times H^{2,1}_{2,3}\left(\tfrac{|x|^{\gamma}}{2^{\gamma}a^2t^{\alpha}}\Big|\begin{matrix}(1,1) & (j-\beta,\alpha) & \\ (1,1) & (n/2,\gamma/2) & (1,\gamma/2)\end{matrix}\right),$$
$$j=1,2.$$

Для всіх функцій $\frac{\partial}{\partial t}\big(f_{1-\beta}(t)*G_j(x,t)\big)$ $(j=0,1,2)$ маємо $\Delta^*=\gamma-\alpha>0$, $a^*=2-\alpha>0$. Тому за теоремою 1.1 із [20] ці функції існують для всіх $x\ne 0$, $t>0$.

Враховуючи теорему 1.7 із [20], знаходимо оцінки

$$|\frac{\partial}{\partial t}\big(f_{1-\beta}(t)*G_0(x,t)\big)| \le \frac{c_0t^{\alpha-\beta-1}}{|x|^n},$$
$$|\frac{\partial}{\partial t}\big(f_{1-\beta}(t)*G_j(x,t)\big)| \le \frac{c_jt^{j-\beta-1}}{|x|^n}, \quad j=1,2$$
$$\text{при} \quad |x|^{\gamma}>t^{\alpha}.$$

За наслідком з теореми 1.12 [20] одержуємо оцінки при $|x|^{\gamma}<t^{\alpha}$:

$$|\frac{\partial}{\partial t}\big(f_{1-\beta}(t)*G_0(x,t)\big)| \le$$
$$\le \frac{c_0^*t^{\alpha-\beta-1}}{|x|^n}\Big(\frac{|x|^{\gamma}}{t^{\alpha}}\Big)^{\min\{1,n/\gamma\}} =$$
$$= \begin{cases}\frac{c_0^*}{t^{\beta+1}|x|^{n-\gamma}}, & \gamma<n\\ \frac{c_0^*}{t^{\beta+1+\alpha(\frac{n}{\gamma}-1)}}, & \gamma\ge n\end{cases},$$

$$|\frac{\partial}{\partial t}\big(f_{1-\beta}(t)*G_j(x,t)\big)|\le$$
$$\le \frac{c_j^* t^{j-1-\beta}}{|x|^n}\Big(\frac{|x|^\gamma}{t^\alpha}\Big)^{\min\{1,n/\gamma\}}=$$
$$=\begin{cases}\frac{c_j^*}{t^{\alpha+\beta+1-j}|x|^{n-\gamma}}, & \gamma<n\\ \frac{c_j^*}{t^{\beta+1-j+\alpha\frac{n}{\gamma}}}, & \gamma\ge n\end{cases},\quad j=1,2.$$

Нехай

$$w_{j,\gamma}(y,t)=\big((f_{1-\widehat{\beta(t)*G_j})_t}\varphi\big)(y,t)=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial t}\big(f_{1-\beta}(t)*G_j(x-y,t)\big)D^\gamma\varphi(x)dx,$$
$$j=0,1,2,\quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Використовуючи знайдені вище оцінки, у випадку $\gamma<n$ матимемо

$$|w_{0,\gamma}(y,t)|\le$$
$$\le d_{0,\gamma,3}\Big[\frac{1}{t^{\beta+1}}\int\limits_{x:|x-y|^\gamma<t^\alpha}\frac{|D^\gamma\varphi(x)|}{|x-y|^{n-\gamma}}dx+$$
$$+t^{\alpha-\beta-1}\int\limits_{x:|x-y|^\gamma>t^\alpha}\frac{|D^\gamma\varphi(x,t)|}{|x-y|^n}dx\Big]\le$$
$$\le d_{0,\gamma,4}t^{\alpha-\beta-1}(1+|ln\,t|)||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)}\le$$
$$\le d_{\gamma,5}t^{\alpha-\beta-1-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},\ \forall\varepsilon>0,$$

$$|w_{j,\gamma}(y,t)|\le$$
$$\le d_{j,\gamma,3}\Big[\int\limits_{x:|x-y|^\gamma<t^\alpha}\frac{|D^\gamma\varphi(x)|}{t^{\alpha+\beta+1-j}|x-y|^{n-\gamma}}dx+$$
$$+\int\limits_{x:|x-y|^\gamma>t^\alpha}\frac{t^{j-\beta-1}|D^\gamma\varphi(x,t)|}{|x-y|^n}dx\Big]\le$$
$$\le d_{j,\gamma,4}t^{j-\beta-1}(1+|ln\,t|)||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)}\le$$
$$d_{j,\gamma,5}t^{j-\beta-1-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},\ \forall\varepsilon>0,\ j=1,2,$$

а у випадку $\gamma\ge n$

$$|w_{0,\gamma}(y,t)|\le$$
$$\le d_{0,\gamma,3}\Big[\frac{1}{t^{\beta+1+\alpha(\frac{n}{\gamma}-1)}}\int\limits_{x:|x-y|^\gamma<t^\alpha}|D^\gamma\varphi(x)|dx+$$
$$+t^{\alpha-\beta-1}\int\limits_{x:|x-y|^\gamma>t^\alpha}\frac{|D^\gamma\varphi(x,t)|}{|x-y|^n}dx\Big]\le$$
$$\le d_{0,\gamma,4}t^{\alpha-\beta-1}(1+|ln\,t|)||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)}\le$$
$$\le d_{0,\gamma,5}t^{\alpha-\beta-1-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},\ \forall\varepsilon>0,$$

$$|w_{j,\gamma}(y,t)|\le$$
$$\le d_{j,\gamma,3}\Big[\int\limits_{x:|x-y|^\gamma<t^\alpha}\frac{|D^\gamma\varphi(x)|}{t^{\beta+1-j+\alpha\frac{n}{\gamma}}}dx+$$
$$+\int\limits_{x:|x-y|^\gamma>t^\alpha}\frac{t^{j-\beta-1}|D^\gamma\varphi(x,t)|}{|x-y|^n}dx\Big]\le$$
$$\le d_{j,\gamma,4}t^{j-\beta-1}(1+|ln\,t|)||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)}\le$$
$$\le d_{j,\gamma,5}t^{j-\beta-1-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},\ \forall\varepsilon>0,$$
$$j=1,2,\ k=|\gamma|.$$

Теорема 1. *Нехай виконані припущення (L), (A1) при $s\in[0,\alpha-\beta)$. Тоді існує єдиний розв'язок $u\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$ задачі (1), (2) із $r(t)=b(t)=0$, $t\in[0,T]$ такий, що $u_t^{(\beta)}\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$. Він визначений формулою*

$$\Big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\Big)=h_\varphi(t)$$
$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n),\ t\in(0,T],\tag{13}$$

де

$$h_\varphi(t)=\sum_{j=1}^{2}\Big(F_j(\cdot),(\widehat{G}_j\varphi)(\cdot,t)\Big)+$$
$$+\int\limits_0^t g(\tau)\Big(F_0(\cdot),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\Big)d\tau,\quad t\in(0,T].$$

Доведення. Використовуємо схему доведення теореми 3 із [21]. Узагальнені функції F_j мають скінченні порядки сингулярностей $s(F_j)\le k_j$, $j=0,1,2$: існують числа $k_0,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_+$ і функції $g_{j\kappa}\in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $|\kappa|\le k_j$, $j=0,1,2$ такі, що

$$(F_j,\varphi)=\sum_{|\kappa|\le k_j}\int\limits_{\mathbb{R}^n}g_{j\kappa}(y)D^\kappa\varphi(y)dy$$
$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\quad j=0,1,2.\tag{14}$$

Використовуючи зображення (14) та лему 3, переконуємось, що для довільної $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\int\limits_0^t g(\tau)\Big(F_0(y),(\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau)\Big)d\tau=$$
$$=\sum_{|\kappa|\le k_0}\int\limits_0^t g(\tau)\times$$

$$\times\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n} g_{0\alpha}(y)D_y^{\kappa}(\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau)dy\Big]d\tau,$$

$$\Big(F_j(y),(\widehat{G_j}\varphi)(y,t)\Big) =$$
$$= \sum_{|\kappa|\le k_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} g_{1\kappa}(y)D_y^{\kappa}(\widehat{G_1}\varphi)(y,t)dy$$

та правильні оцінки

$$\Big|\int\limits_0^t g(\tau)\Big(F_0(y),(\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau)\Big)\,d\tau\Big| \le$$
$$\le c_0||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_0}(\mathbb{R}^n)}\times$$
$$\times\int\limits_0^t \tau^s|g(\tau)|\tau^{-s}(t-\tau)^{\alpha-1-\varepsilon}\,d\tau$$
$$\le b_0 t^{\alpha-s-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_0}(\mathbb{R}^n)},\quad t\in[0,T],$$

$$\big|\big(F_j(y),(\widehat{G_j}\varphi)(y,t)\big)\big| \le b_j t^{j-1-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_j}(\mathbb{R}^n)},$$
$$t\in(0,T],\ \ \varepsilon\in(0,1),\ \ j=1,2.$$

Отож, при $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ права частина (13) (функція h_φ) належить $C(0,T]\cap L(0,T)$.

Покажемо, що функція (13) є розв'язком задачі в сенсі означення 1. Для довільної $\psi\in\mathcal{D}(\overline{Q})$ знаходимо

$$\big(u,(\widehat{L}\psi)\big) = \int\limits_0^T \Big(u(\cdot,t),(\widehat{L}\psi)(\cdot,t)\Big)dt =$$
$$\int\limits_0^T\Big(\int\limits_0^t g(\tau)\Big(F_0(y),(\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau)\Big)d\tau\Big)dt$$
$$+\sum_{j=1}^2\int\limits_0^T\Big(F_j(y),(\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(y,t)\Big)dt =$$

$$= \Big(F_0(y),\int\limits_0^T g(\tau)d\tau\int\limits_\tau^T(\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau)dt\Big)+$$
$$+\sum_{j=1}^2\Big(F_j(y),\int\limits_0^T(\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(y,t)dt\Big) =$$
$$= \Big(F_0(y)\cdot g(\tau),(\widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi))(y,\tau)\Big)+$$
$$+\sum_{j=1}^2\Big(F_j,\widehat{\mathcal{G}}_j(\widehat{L}\psi)\Big).$$

Скориставшись формулами (6), для функції u, заданої формулою (13), і довільної $\psi\in\mathcal{D}(\overline{Q})$ одержуємо тотожність (4) при $r(t)=b(t)=0,\ t\in[0,T]$. За означенням 1 функція (13) є розв'язком задачі шуканого класу.

Єдиність розв'язку задачі доводиться, як у [21].

Покажемо, що $u_t^{(\beta)}\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$.

Використовуючи зображення (13), для довільної $\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$ одержуємо

$$\Big(u_t^{(\beta)}(\cdot,t),\varphi(\cdot)\Big) = h_\varphi^{(\beta)}(t) =$$
$$= \sum_{j=1}^2\Big(F_j(\cdot),(\widehat{G}_j\varphi)_t^{(\beta)}(\cdot,t)\Big)+$$

$$+f_{-\beta}(t)*\int\limits_0^t g(\tau)\Big(F_0(\cdot),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\Big)d\tau =$$
$$= \sum_{j=1}^2\Big(F_j(\cdot),\big((f_{1-\beta}(t)*\widehat{G}_j)\varphi\big)_t(\cdot,t)\Big)+$$
$$+\Big(F_0(\cdot),f_{1-\beta}(t)*\frac{\partial}{\partial t}\big(g(t)*(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t)\big)\Big) =$$
$$= \sum_{j=1}^2\Big(F_j(\cdot),\big((f_{1-\beta}(t)*\widehat{G}_j)_t\varphi\big)(\cdot,t)\Big)+$$
$$+\Big(F_0(\cdot),g(t)*\big((f_{1-\beta}(t)*\widehat{G}_0)_t\varphi\big)(\cdot,t)\Big) =$$
$$= \sum_{j=1}^2\Big(F_j(\cdot),\big((f_{1-\widehat{\beta(t)*}G_j})_t\varphi\big)(\cdot,t)\Big)+$$
$$+\Big(F_0(\cdot),g(t)*\big((f_{1-\widehat{\beta(t)*}G_0})_t\varphi\big)(\cdot,t)\Big).$$

За лемою 3 та формулою (14) при $j=0$ для довільної $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\Big|\Big(F_0(\cdot),g(t)*\big((f_{1-\widehat{\beta(t)*}G_0})_t\varphi\big)(\cdot,t)\Big)\Big| =$$
$$\Big|\int\limits_0^t g(\tau)\Big(F_0(y),(\widehat{G_0}\varphi)_t^{(\beta)}(y,t-\tau)\Big)\,d\tau\Big| \le$$
$$\le c_0||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_0}(\mathbb{R}^n)}\times$$

$$\times \int\limits_0^t \tau^s |g(\tau)|(t-\tau)^{\alpha-\beta-1-\varepsilon}\tau^{-s}\, d\tau$$

$$\le \widehat{b}_0 t^{\alpha-\beta-s-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_0}(\mathbb{R}^n)}, \quad t\in[0,T],$$

$$\Big|\Big(F_j(\cdot), \big((f_{1-\beta}\widehat{(t)*G_j})_t\varphi\big)(\cdot,t)\Big)\Big| \le$$
$$\le \widehat{b}_j t^{j-\beta-1-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_j}(\mathbb{R}^n)}, \quad t\in(0,T].$$

Отож, також $h_\varphi^{(\beta)} \in C(0,T]\cap L(0,T)$ при $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Наслідок 1. Нехай виконані припущення теореми 1 при $s=0$ та $F_1=0$. Тоді існує єдиний розв'язок u задачі (1), (2) із $r(t)=b(t)=0$, $t\in[0,T]$ такий, що $u, u_t^{(\beta)} \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q})$.

2. Теореми існування та єдиності для оберненої задачі. За теоремою 1 за припущень (L), (A1) маємо $h_\varphi, h_\varphi^{(\beta)} \in C(0,T]\cap L(0,T)$ для всіх $\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$ і будь-який розв'язок $u\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$ рівняння

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big) = h_\varphi(t)+ \tag{15}$$
$$+\int\limits_0^t r(\tau)\Big(u_\tau^{(\beta)}(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\Big)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t b(\tau)\Big(u(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\Big)d\tau$$
$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n), t\in(0,T],$$

при $r(t)=b(t)=0$ є розв'язком задачі (1), (2). При $r(t)\ne 0$ для довільної $\psi\in\mathcal{D}(\overline{Q})$

$$\int\limits_0^T dt\int\limits_0^t r(\tau)\Big(u_\tau^{(\beta)}(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot,t-\tau)d\tau\Big) =$$

$$=\int\limits_0^T r(\tau)d\tau\int\limits_\tau^T\Big(u_\tau^{(\beta)}(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot,t-\tau)\Big)dt$$

$$=\int\limits_0^T r(\tau)\Big(u_\tau^{(\beta)}(\cdot,\tau),\int\limits_\tau^T(\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot,t-\tau)dt\Big)d\tau$$

$$=\int\limits_0^T r(\tau)\Big(u_\tau^{(\beta)}(\cdot,\tau),(\widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot,\tau)\Big)d\tau$$

$$=\int\limits_0^T r(t)\Big(u_t^{(\beta)}(\cdot,t),\psi(\cdot,t)\Big)dt.$$

Аналогічно при $b(t)\ne 0$

$$\int\limits_0^T dt\int\limits_0^t b(\tau)\Big(u(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot,t-\tau)d\tau\Big)$$

$$=\int\limits_0^T b(\tau)d\tau\int\limits_\tau^T\Big(u(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot,t-\tau)\Big)dt$$

$$=\int\limits_0^T b(\tau)\Big(u(\cdot,\tau),\int\limits_\tau^T(\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot,t-\tau)dt\Big)d\tau$$

$$=\int\limits_0^T b(\tau)\Big(u(\cdot,\tau),(\widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot,\tau)\Big)d\tau$$

$$=\int\limits_0^T b(t)\Big(u(\cdot,t),\psi(\cdot,t)\Big)dt.$$

Отже, права частина (15) задовольняє тотожність (4) і за означенням будь-який розв'язок $u\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$ рівняння (15) є розв'язком задачі (1), (2).

З рівняння (1) отримуємо

$$\big(u_t^{(\alpha)}(\cdot,t),\varphi_j(\cdot)\big)+a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_j(\cdot)\big)=$$
$$=r(t)\big(u_t^{(\beta)}(\cdot,t),\varphi_j\big)+$$
$$+b(t)\big(u(\cdot,t),\varphi_j\big)+g(t)\big(F_0,\varphi_j\big), \;\; j=1,2,$$

а використовуючи умови (3), матимемо

$$\Phi_1^{(\alpha)}(t)=-a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)\big)$$
$$+r(t)\Phi_1^{(\beta)}(t)+b(t)\Phi_1(t)+g(t)\big(F_0,\varphi_1\big),$$
$$\Phi_2^{(\alpha)}(t)=-a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)\big)$$
$$+r(t)\Phi_2^{(\beta)}(t)+b(t)\Phi_2(t)+g(t)\big(F_0,\varphi_2\big).$$

Звідси, враховуючи припущення (A2), знаходимо неперервні й інтегровні функції

$$r(t)=\Big[\Big(\Phi_1^{(\alpha)}(t)+a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)\big) \tag{16}$$
$$-g(t)\big(F_0,\varphi_1\big)\Big)\Phi_2(t)-$$

$$-\Big(\Phi_2^{(\alpha)}(t)+a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)\big)-$$

$$-g(t)\big(F_0,\varphi_2\big)\Big)\Phi_1(t)\Big]t^{\beta}(1+|ln\,t|)[d(t)]^{-1},$$

$$b(t)=\Big[-\Big(\Phi_1^{(\alpha)}(t)+a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)\big)-$$

$$-g(t)\big(F_0,\varphi_1\big)\Big)\Phi_2^{(\beta)}(t)+$$

$$+\Big(\Phi_2^{(\alpha)}(t)+a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)\big)-$$

$$-g(t)\big(F_0,\varphi_2\big)\Big)\Phi_1^{(\beta)}(t)\Big]t^{\beta}(1+|ln\,t|)[d(t)]^{-1},$$

$$t\in(0,T].$$

Відзначимо, що $r(t)=O(t^{\beta-s}(1+|ln\,t|))$, $b(t)=O(t^{-s})$, $t\to+0$ та інтегровні на $(0,T)$ при $0\le s<1-\beta$.

Позначимо через $H_1(u,t)$, $H_2(u,t)$ праві частини (16), підставимо їх у (15) відповідно замість $r(t)$, $b(t)$. Отримуємо нелінійне операторне рівняння

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=h_\varphi(t)+ \tag{17}$$

$$+\int\limits_0^t H_1(u,\tau)\big(u_\tau^{(\beta)}(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t H_2(u,\tau)\big(u(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)d\tau$$

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n),t\in(0,T]$$

щодо невідомої $u\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$. Навпаки, якщо $u\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$ – розв'язок рівняння (17), r,b визначені формулою (16), то з наведеного вище і доведення теореми 1 випливає, що трійка (u,r,b) задовольняє задачу (1)–(3).

Теорема 2. *За припущень (L), (A1), (A2) існує $T^*\in(0,T]$ (відповідно $Q^*=\mathrm{R}^n\times(0,T^*]$) і розв'язок $(u,r,b)\in U(T^*)$ задачі (1)-(3): функція u – розв'язок рівняння (17), r та b визначені формулами (16).*

Доведення. Згідно з наведеним, за припущень теореми трійка $(u,r,b)\in U$ така, що функція $u\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$ є розв'язком (17), а $r(t),b(t)$ визначені згідно з (16), є розв'язком задачі (1)-(3). Достатньо довести розв'язність рівняння (17) в $\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$.

Із доведення теореми 1 для всіх $\varepsilon\in(0,1)$, $\varphi\in\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)$ із $K\in\mathrm{Z}_+$, $K\ge\max\{k_0,k_1,k_2\}$ отримуємо

$$t^s\Big|\int\limits_0^t g(\tau)\big(F_0(\cdot),(\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)d\tau\Big|\le \tag{18}$$
$$\le b_0t^{\alpha-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)},$$

$$t^s|h_\varphi(t)|\le$$
$$\big[b_0t^{\alpha-\varepsilon}+b_1t^{s-\varepsilon}+b_2t^{s+1-\varepsilon}\big]\;||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}. \tag{19}$$

Нехай при $\mathrm{R}>0$

$$M_{R,s}=M_{R,s}(Q)=\Big\{v\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q):$$
$$||v||_s=\sup_{t\in(0,T]}\ \sup_{\varphi\in D^K(\mathrm{R}^n)}\frac{t^s\big|\big(v(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\big|}{||\varphi||_{D^K(\mathrm{R}^n)}}\le R\Big\}.$$

Визначаємо оператор

$$P:\mathcal{D}'_{C,L}(Q)\to\mathcal{D}'_C(Q),$$
$$\big((Pv)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=h_\varphi(t)$$
$$+\int\limits_0^t H_1(v,\tau)\big(v_\tau^{(\beta)}(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)d\tau$$
$$+\int\limits_0^t H_2(v,\tau)\big(v(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)d\tau$$
$$\forall\varphi\in D^K(\mathrm{R}^n).$$

Використовуючи принцип Банаха, доведемо розв'язність рівняння (17), тобто рівняння

$$u=Pu,\quad u\in M_{R,s}(Q)\subset\mathcal{D}'_{C,L}(Q).$$

Спочатку покажемо, що існують $R>0,T^*\in(0,T]$, $Q^*=\mathrm{R}^n\times(0,T^*]$ і $M^*_{R,s}=M_{R,s}(Q^*)$ такі, що $P:M^*_{R,s}\to M^*_{R,s}$.

Для кожної $v\in M_{R,s}$ маємо

$$\tau^s\big|\big(v(\cdot,\tau),a^2(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_j(\cdot)\big)\big|\le$$

$$\le R\|(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_j\|_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}:=B_jR,$$

тому

$$\tau^s|H_j(v,\tau)|\le\frac{A_j+B_jR}{d_0},\quad j=1,2,$$

де

$$A_1 = \sup_{\tau\in(0,T]} \tau^s \Big| [\Phi_1^{(\alpha)}(\tau) - g(\tau)(F_0,\varphi_1)]\Phi_2(\tau)$$
$$-[\Phi_2^{(\alpha)}(\tau) - g(\tau)(F_0,\varphi_2)]\Phi_1(\tau)\Big| \tau^\beta(1+|ln\,\tau|)),$$
$$A_2 = -\sup_{\tau\in(0,T]} \tau^s \Big| [\Phi_1^{(\alpha)}(\tau)-$$
$$-g(\tau)(F_0,\varphi_1)]\Phi_2^{(\beta)}(\tau) - [\Phi_2^{(\alpha)}(\tau)-$$
$$-g(\tau)(F_0,\varphi_2)]\Phi_1^{(\beta)}(\tau)\Big| \tau^\beta(1+|ln\,\tau|)).$$

Звідси, враховуючи (18), (19) і лему 3, для всіх $v\in M_{R,s}$, $\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$, $t\in(0,T]$ при $0\le s<\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\varepsilon<\min\{\alpha-\beta-s,s\}$ отримуємо

$$\frac{t^s\big|\big((Pv)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\big|}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}} \le$$
$$b_0t^{\alpha-\varepsilon}+b_1t^{s-\varepsilon}+b_2t^{s+1-\varepsilon}+$$
$$+\frac{(A_1+B_1R)Rt^s}{d_0}\times$$
$$\times\int\limits_0^t \frac{||(\widehat{G}_0\varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}\tau^{-2s}d\tau}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}$$
$$+\frac{(A_2+B_2R)Rt^s}{d_0}\times$$
$$\times\int\limits_0^t \frac{||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}\tau^{-2s}d\tau}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}$$
$$\le b_0t^{\alpha-\varepsilon}+b_1t^{s-\varepsilon}+b_2t^{s+1-\varepsilon}+$$
$$+\frac{(A_1+B_1R)Rt^s}{d_0}\int\limits_0^t c_K(t-\tau)^{\alpha-\beta-\varepsilon-1}\tau^{-2s}d\tau+$$
$$+\frac{(A_2+B_2R)Rt^s}{d_0}\int\limits_0^t c_K(t-\tau)^{\alpha-\varepsilon-1}\tau^{-2s}d\tau\le$$

$$\le b_0t^{\alpha-\varepsilon}+b_1t^{s-\varepsilon}+b_2t^{s+1-\varepsilon}+$$
$$+\frac{(A_1+B_1R)R}{d_0}t^{\alpha-\beta-\varepsilon}+\frac{(A_2+B_2R)R}{f}t^{\alpha-\varepsilon}\le$$
$$\le t^{\alpha-\beta-s-\varepsilon}(q_0R^2+q_1R)+q_2,$$

де q_j ($j\in\{0,1,2,3\}$) – додатні сталі.

Для виконання нерівності

$$t^{\alpha-\beta-s-\varepsilon}(q_0R^2+q_1R)+q_2\le R\quad\forall t\in[0,T^*] \tag{20}$$

із деякими $R>0$, $T^*\in(0,T]$, спочатку виберемо $R\ge\max\{1,2q_2\}$. Тоді (20) випливає з нерівності

$$(q_0+q_1)Rt^{\alpha-\beta-s-\varepsilon}\le\frac{1}{2}\quad\forall t\in[0,T^*] \tag{21}$$

при вибраному R, правильної при $T^*\le\min\{T,[2(q_0+q_1)R]^{-\frac{1}{\alpha-\beta-s-\varepsilon}}\}$. Ми довели існування $R\ge\max\{1,2q_2\}$, $T^*\in(0,T]$ таких, що $P:M^*_{R,s}\to M^*_{R,s}$ при $s\in[0,\frac{\alpha-\beta}{2})$.

Тепер покажемо, що P є стисним оператором на $M^*_{R,s}$. Для $v_1,v_2\in M^*_{R,s}$, $\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$, $t\in[0,T^*]$ маємо

$$\frac{t^s\big|\big((Pv_1)(\cdot,t)-\big((Pv_2)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\big|}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}=$$
$$=\frac{t^s}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\Big|\int\limits_0^t H_1(v_2,\tau)\times$$
$$\times\big(v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot,t-\tau)\big)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\big(H_1(v_1,\tau)-H_1(v_2,\tau)\big)\times$$
$$\times\big(v_1(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot,t-\tau)\big)d\tau\Big|+$$
$$+\frac{t^s}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\Big|\int\limits_0^t H_2(v_2,\tau)\times$$
$$\times\big(v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\big(H_2(v_1,\tau)-H_2(v_2,\tau)\big)\times$$
$$\times\big(v_1(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)d\tau\Big|\le$$

$$\le\frac{(A_1+B_1R)t^s}{d_0}\times$$
$$\times\int\limits_0^t\frac{\big|\big(v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot,t-\tau)\big)\big|}{||(\widehat{G}_0\varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}$$
$$\frac{||(\widehat{G}_0\varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\tau^{-s}d\tau+$$
$$+\frac{a^2t^sR||(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}{d_0}\times$$

$$\times \int\limits_0^t \frac{\left|\left(v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)\right)\right|}{||(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\times$$

$$\times\frac{||(\widehat{G}_0\varphi)^{(\beta)}_\tau(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\tau^{-s}d\tau+$$

$$+\frac{(A_2+B_2R)t^s}{d_0}\times$$

$$\times \int\limits_0^t \frac{\left|\left(v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\right)\right|}{||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}$$

$$\frac{||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\tau^{-s}d\tau+$$

$$+\frac{a^2t^sR||(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}{d_0}\times$$

$$\times \int\limits_0^t \frac{\left|\left(v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)\right)\right|}{||(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\times$$

$$\times\frac{||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\tau^{-s}d\tau$$

$$\le \frac{(2A_1+B_1R)t^s}{d_0}\cdot||v_1-v_2||_s\times$$

$$\times\frac{\int\limits_0^t ||(\widehat{G}_0\varphi)^{(\beta)}_\tau(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}\tau^{-2s}d\tau}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}+$$

$$+\frac{(2A_2+B_2R)t^s}{d_0}\cdot||v_1-v_2||_s\times$$

$$\times\frac{\int\limits_0^t ||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}\tau^{-2s}d\tau}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\le$$

$$\le (2q_0R+q_1)t^{\alpha-\beta-s-\varepsilon}||v_1-v_2||_s.$$

Якщо $(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_j(x)\equiv 0,\ x\in\mathrm{R}^n$, то

$$\left(v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_j(\cdot)\right)=0$$
$$\forall t\in[0,T^*],\quad j=1,2.$$

Для $t\in[0,T^*]$ маємо

$$(2q_0R+q_1)t^{\alpha-\beta-s-\varepsilon}\le$$
$$\le\frac{2q_0R+q_1}{2(q_0+q_1)R}<\frac{2q_0+q_1}{2(q_0+q_1)}<1.$$

Отже, P є стисним оператором на $M_{R,s}(Q^*)$, і за теоремою Банаха отримуємо розв'язність рівняння (17) в $M^*_{R,s}\subset\mathcal{D}'_{C,L}(Q^*)$.

Наслідок 2. Нехай $F_1=0$, виконані припущення (L), (A1) при $s=0$, $\varphi_j\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$, $\Phi_j,\Phi_j^{(\beta)},\Phi_j^{(\alpha)}\in C[0,T]$, $j=1,2$, $\Phi_1(0)=0$, $\Phi_2(0)=(F_2,\varphi_2)$, $\inf\limits_{t\in(0,T]}|p(t)|=p_0>0$, де $p(t):=\Phi_1^{(\beta)}(t)\Phi_2(t)-\Phi_1(t)\Phi_2^{(\beta)}(t)$. Тоді існує $T^*\in(0,T]$ (відповідно $Q^*=\mathrm{R}^n\times(0,T^*]$) і розв'язок

$$(u,r,b)\in\mathcal{D}'_C(\bar{Q})\times C[0,T]^2$$

задачі (1)-(3): функція u є розв'язком рівняння (17),

$$r(t)=H_1(u,t)=\Big[\Big(\Phi_1^{(\alpha)}(t)+$$
$$+a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)\big)-$$
$$-g(t)\big(F_0,\varphi_1\big)\Big)\Phi_2(t)-$$
$$-\Big(\Phi_2^{(\alpha)}(t)+a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)\big)-$$
$$-g(t)\big(F_0,\varphi_2\big)\Big)\Phi_1(t)\Big][p(t)]^{-1},$$

$$b(t)=H_2(u,t)=\Big[-\Big(\Phi_1^{(\alpha)}(t)+$$
$$+a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)\big)-$$
$$-g(t)\big(F_0,\varphi_1\big)\Big)\Phi_2^{(\beta)}(t)+$$
$$+\Big(\Phi_2^{(\alpha)}(t)+a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)\big)-$$
$$-g(t)\big(F_0,\varphi_2\big)\Big)\Phi_1^{(\beta)}(t)\Big][p(t)]^{-1},\quad t\in(0,T].$$

Теорема 3. *За припущень (L), (A2) розв'язок $(u,r,b)\in U(T)$ задачі (1)-(3) єдиний.*

Доведення. Нехай існує два розв'язки (u_1,r_1,b_1), $(u_2,r_2,b_2)\in U$ задачі (1)-(3). Підставимо їх в (1), (2). Візьмемо $u=u_1-u_2$, $r=r_1-r_2$, $b=b_1-b_2$ і отримаємо задачу Коші для рівняння

$$u_t^{(\alpha)}=a^2(-\Delta)^{\gamma/2}u+r_2u_t^{(\beta)}+ru_{1t}^{(\beta)}+b_2u+bu_1 \tag{22}$$

з нульовими початковими умовами. За означенням розв'язку

$$(u,\widehat{L}\psi)=\int\limits_0^T\Big[r_2(t)\big(u_t^{(\beta)}(\cdot,t),\psi(\cdot,t)\big)+$$

$$+r(t)\big(u_{1t}^{(\beta)}(\cdot,t),\psi(\cdot,t)\big)+$$
$$+b_2(t)\big(u(\cdot,t),\psi(\cdot,t)\big)+b(t)\big(u_1(\cdot,t),\psi(\cdot,t)\big)\Big]dt$$
$$\forall\psi\in\mathcal{D}(\bar{Q}).$$

Згідно з [16], для кожної $\varrho\in\mathcal{D}(\bar{Q})$ існує $\psi=\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho\in\mathcal{D}(\bar{Q})$ така, що $\widehat{L}\psi=\varrho$ в Q. Тоді для кожної $\varrho\in\mathcal{D}(\bar{Q})$

$$\int_0^T\Big(u(\cdot,t),\varrho(\cdot,t)\Big)dt=$$
$$=\int_0^T\Big(r_2(t)u_t^{(\beta)}(\cdot,t)+ \tag{23}$$
$$r(t)u_{1t}^{(\beta)}(\cdot,t)+b_2(t)u(\cdot,t)+$$
$$+b(t)u_1(\cdot,t),(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)\Big)dt.$$

Зауважимо, що рівність (23) буде правильною також для такої ϱ, що $\varrho(\cdot,t)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ при кожному $t\in(0,T]$, а $\big(u_{1t}^{(\beta)}(\cdot,t),(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)\big)$ неперервна й інтегровна на $(0,T)$. З умови (3) знаходимо

$$r(t)\Phi_1^{(\beta)}(t)+b(t)\Phi_1(t)=$$
$$=a^2\Big(u(z,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(z)\Big),$$
$$r(t)\Phi_2^{(\beta)}(t)+b(t)\Phi_2(t)=$$
$$=a^2\Big(u(z,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(z)\Big),t\in(0,T],$$

звідки

$$r(t)=\frac{a^2t^\beta(1+|ln\,t|)}{d(t)}\times$$
$$\times\Big[\Big(u(z,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(z)\Big)\Phi_2(t)- \tag{24}$$
$$-\Big(u(z,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(z)\Big)\Phi_1(t)\Big],$$

$$b(t)=\frac{a^2t^\beta(1+|ln\,t|)}{d(t)}\times$$
$$\times\Big[\Big(u(z,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(z)\Big)\Phi_1^{(\beta)}(t) \tag{25}$$
$$-\Big(u(z,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(z)\Big)\Phi_2^{(\beta)}(t)\Big],$$
$$t\in(0,T]$$

і тоді, з (23), для всіх $\varrho\in\mathcal{D}(\bar{Q})$ отримуємо рівняння

$$\int_0^T\Big(u(\cdot,t),\varrho(\cdot,t)-r_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)_t^{(\beta)}(\cdot,t)- \tag{26}$$
$$-b_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)+w_\varrho(t)\Big)dt=0,$$

де

$$w_\varrho(t)=\frac{a^2t^\beta(1+|ln\,t|)}{d(t)}\big[\Phi_2(t)(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)-$$
$$-\Phi_1(t)(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)\big]\big(u_{1t}^{(\beta)}(\cdot,t),(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)\big)+$$
$$+\frac{a^2t^\beta(1+|ln\,t|)}{d(t)}\big[\Phi_1^{(\beta)}(t)(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)-$$
$$-\Phi_2^{(\beta)}(t)(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)\big]\big(u_1(\cdot,t),(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)\big)$$

і є відомою функцією із $C(0,T]\cap L(0,T)$,

$$\varrho(\cdot,t)-r_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)_t^{(\beta)}(\cdot,t)-b_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)+$$
$$+w_\varrho(t)\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)\quad\forall t\in(0,T]$$

і є неперервною й інтегровною функцією $t\in(0,T]$ (за лемою 3). Отже, для довільних $\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$, $\mu\in\mathcal{D}(0,T]$, $\mu(T)=0$ існує єдиний розв'язок $\varrho\in\mathcal{D}(Q)$ інтегрального рівняння Вольтерри другого роду

$$\varrho(x,t)-r_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)_t^{(\beta)}(x,t)-$$
$$-b_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)+w_\varrho(t)=\varphi(x)\mu(t),\ \ (x,t)\in Q$$

з інтегровним ядром. Тоді з (12)

$$\int_0^T\Big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\Big)\mu(t)dt=0$$
$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n),\ \mu\in\mathcal{D}(0,T],\ \mu(T)=0.$$

За лемою Дюбуа-Реймона отримуємо

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=0\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n),\ \ t\in(0,T].$$

Отже, $u=0$ в $\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$, а з (21) та (22) випливає, що $r(t)=0$, $b(t)=0$, $t\in(0,T]$.

3. Висновок. Вивчено обернену задачу Коші для телеграфного рівняння з дробовими похідними та заданими узагальненими функціями в правих частинах прямої задачі. Вона полягає у визначенні узагальненого розв'язку u і невідомих, залежних від часу, неперервних та інтегровних молодших коефіцієнтів b, r у рівнянні. Існування розв'язку $(u, r, b) \in U(T^*)$ отримано при деякому $T^* \in (0, T]$, а єдиність на всьому інтервалі $(0, T]$ за слабших припущень. $\square$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецкий В.В.* Параболические псевдодифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций / В.В. Городецкий, Я.М. Дринь //Препр./АН Украины. Ин-т прикл. пр. мех. и мат. – Львов – 1991, №4–91. — 57 с.
2. *Городецький В.В.* Задача Коші для псевдодифференціальних рівнянь у просторах узагальнених функцій типу S' / В.В. Городецкий, В.А. Літовченко // Доп. АН України – 1992. – **10**. – С. 6-9.
3. *Anh V.V.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random data / V.V. Anh and N.N. Leonenko // J. of Statistical Physics — 2001. — **104**, №5/6— P. 1349-1387.
4. *Djrbashian M.M.* Fractional derivatives and Cauchy problem for differentials of fractional order / M.M. Djrbashian, A.B. Nersessyan // Izv. AN Arm. SSR. Matematika —1968, №3. — P.3-29.
5. *Duan Jun Sheng.* Time- and space-fractional partial differential equations / Jun Sheng Duan // J. Math. Phis. — 2005. — **46**, №013504.
6. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei // Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin — 2004.
7. *Voroshylov A.A.* Conditions of the existence of classical solution of the Cauchy problem for diffusion-wave equation with Caputo partial derivative / A.A. Voroshylov, A.A. Kilbas // Dokl. Ak. Nauk — 2007. — **414**, №4. — P. 1-4.
8. *Cheng J.* Uniqueness in an inverse problem for a one-dimentional fractional diffusion equation / J. Cheng, J. Nakagawa, M. Yamamoto and T. Yamazaki // Inverse Problems — 2009. — **25**, №115002.
9. *Hatano Y.* Determination of order in fractional diffusion equation / Y. Hatano, J. Nakagawa, Sh. Wang and M. Yamamoto // Journal of Math-for-Industry — 2013, №5A.— P. 51-57.
10. *Hussein M.* An inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient from an integral condition / M. Hussein, D. Lesnic and M.I. Ismailov // Mathematical Methods in the Applied Sciences — 2016. — **39**, №5. — P. 963-980.
11. *Janno Ja.* Determination of the order of fractional derivative and a kernel in an inverse problem for a generalized time fractional diffusion equation / Ja. Janno // Electronic J. of Differential Equations, 2016, http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu — №199. —P. 1-28.
12. *Nakagawa J.*, Sakamoto K. and Yamamoto M., Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equation – new mathematical aspects motivated by industrial collaboration / J. Nakagawa, K. Sakamoto and M. Yamamoto // Journal of Math-for-Industry — 2010, №2A. — P. 99-108.
13. *Rundell W.* The determination of an unknown boundary condition in fractional diffusion equation / W. Rundell, X. Xu and L. Zuo // Applicable Analysis — 2012, №1. — P. 1-16.
14. *Zhang Y.* Inverse source problem for a fractional diffusion equation / Y. Zhang and X. Xu // Inverse Problems — 2011. — **27**. — P. 1–12.
15. *Дрінь Я.М.* Пряма і обернена задачі для одного класу рівнянь з псевдодиференціальним оператором / Я.М. Дрінь // Доп. НАН України – 2011, №5. – С. 12-17.
16. *Лопушанський А.О.* Розв'язок задачі Коші для рівнянь з дробовими похідними в просторах узагальнених функцій / А.О. Лопушанський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 77.– С. 132-144.
17. *Lopushansky A.O.* The Cauchy problem for an equation with fractional derivatives in Bessel potential spaces / A.O. Lopushansky // Sib. Math. J.— 2014. — **55**, №6. — P. 1089-1097.
18. *Lopushanska H.* Inverse Cauchy Problem for Fractional Telegraph Equations with Distributions / H. Lopushanska, V. Rapita // Carpathian Math. Publ. — 2016.— **8**, №1. — P. 118-126.
19. *Srivastava H.M.* The H-functions of one and two variables with applications / H.M. Srivastava, K.C. Gupta and S.P. Goyal // New Dehli, South Asian Publishers — 1982.
20. *Kilbas A.A.* H-Transforms: Theory and Applications / A.A. Kilbas, M. Sajgo // Boca-Raton: Chapman and Hall CRC — 2004.
21. *Lopushansky A.O.* Regularity of the solutions of the boundary value problems for diffusion-wave equation with generalized functions in right-hand sides / A.O. Lopushansky // Carp. Math. Publ.— 2013. — **5**, №2. — P. 279-289.

УДК 123.456

©2016 р. В. К. Маслюченко, О. В. Маслюченко, В. С. Мельник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ІСНУВАННЯ ПРОМІЖНИХ КУСКОВО ЛІНІЙНИХ ТА НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Для різних проміжків $I \subseteq \mathbb{R}$, напівнеперервних відповідно зверху та знизу функцій $g : I \to \mathbb{R}$ та $h : I \to \mathbb{R}$, таких, що $g(x) < h(x)$ на I, та константи $\gamma \in (g(x_0), h(x_0))$ для деякого $x_0 \in I$ знаходяться проміжні кусково лінійні та нескінченно диференційовні функції, що набувають значення γ в точці x_0.

For given interval $I \subseteq \mathbb{R}$, semicontinuous upper and lower respectively functions $g : I \to \mathbb{R}$ and $h : I \to \mathbb{R}$, such, that $g(x) < h(x)$ on I, and a constant $\gamma \in (g(x_0), h(x_0))$ for some $x_0 \in I$ we find intermediate piecewise linear and infinitely differentiable function, that gain γ in x_0.

1. Теорема Гана про проміжну функцію та її зв'язок з теоремою Тітце-Урисона.

Австрійський математик Г. Ган у своїй статті 1917 року [1] довів таку теорему: для метричного простору X, напівнеперервної зверху функції $g : X \to \mathbb{R}$ і напівнеперервної знизу функції $h : X \to \mathbb{R}$, таких, що $g(x) \le h(x)$ на X, існує така неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на X. Г. Тонґ [2] і М. Катетов [3] показали, що ця теорема є характеристичною для нормальності в класі T_1-просторів. Перед ними Ж. Д'єдонне [4] переніс теорему Гана на паракомпактні простори.

Відомо, що в нормальних просторах виконується і теорема Тітце-Урисона про продовження неперервних функцій [5]. Виявляється, ця теорема випливає з теореми Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова, яку ми коротко називатимемо теоремою Гана про проміжну функцію або просто теоремою Гана.

Справді, нехай X — нормальний простір, X_0 — замкнена множина в X і $f_0 : X_0 \to [0,1]$ — неперервна функція. Визначимо функції $g : X \to [0,1]$ і $h : X \to [0,1]$, покладаючи $g(x) = h(x) = f_0(x)$ на X_0 і $g(x) = 0$, $h(x) = 1$ на $X \setminus X_0$. Легко перевірити, що функція $g : X \to [0,1]$ напівнеперервна зверху, а $h : X \to [0,1]$ — знизу, при цьому $g(x) \le h(x)$ на X. За теоремою Гана існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$, для якої $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на X. Тоді f набуває значень у відрізку $[0,1]$ і $f(x) = f_0(x)$ на X_0. Таким чином, $f : X \to [0,1]$ — це неперервне продовження функції f_0.

2. Розвиток теореми Гана.

В останні роки теорема Гана про проміжну функцію обросла різними аналогами і узагальненнями. Щоб їх сформулювати, введемо нову термінологію.

Пару (g,h) функцій $g,h : X \to \mathbb{R}$, де g — напівнеперервна зверху, а h — знизу, для яких виконується нерівність $g(x) \le h(x)$ на X, називатимемо *парою Гана* на X, а у випадку, коли виконується строга нерівність $g(x) < h(x)$ на X — *строгою парою Гана* на X. Функцію f назвемо *проміжною* для пари Гана (g,h), якщо $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на $x \in X$, і *строго проміжною* для пари Гана (g,h), якщо $g(x) < f(x) < h(x)$ при $g(x) < h(x)$ і $g(x) = f(x) = h(x)$ при $g(x) = h(x)$.

К. Даукер [6] і М. Катетов [3] встановили, що T_1-простір X буде нормальним і зліченно паракомпактним тоді і тільки тоді, коли для кожної строгої пари Гана (g,h) на X існує строго проміжна неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$.

З другого боку Е. Майкл [7] довів, що T_1-простір X буде досконало нормальним тоді і тільки тоді, коли кожна пара Гана (g,h) на X має строго проміжну неперервну функцію $f : X \to \mathbb{R}$.

Нові доведення теорем про проміжну функцію дали К. Ґуд і Я. Старс [8]. Можливість перенесення теореми Гана на випадок загальніших, ніж $\mathbb{R}$ впорядкованих просторів значень вивчав К. Ямазакі [9].

Недавно з'явилися інші аналоги теореми Гана. Так, В. Маслюченко і С. Петей [10] встановили, що для довільної пари Гана (g, h) на відрізку $[a, b]$, де g і h — зростаючі функції існує зростаюча неперервна проміжна функція $f : X \to \mathbb{R}$.

Проміжні афінні функції $f : E \to \mathbb{R}$ на опуклих підмножинах векторних просторів для пари (g, h), що складається з опуклої функції $g : E \to \mathbb{R}$ і вгнутої функції $h : E \to \mathbb{R}$, вивчали В. Маслюченко і В. Мельник [11].

3. Нові задачі про проміжну функцію.

У зв'язку з результатом Маслюченка-Петея з [10] виникло питання: чи для кожної пари Гана (g, h) на відрізку $[a, b]$, де g і h — функції обмеженої варіації, існує проміжна неперервна функція обмеженої варіації $f : [a, b] \to \mathbb{R}$? Відповідь на це питання поки що не знайдена. У процесі пошуків відповіді на нього виникли питання про існування проміжних неперервно диференційовних (коротше: C^1-функція) чи кусково лінійних функцій, адже такі функції мають скінченну варіацію. Такі питання природно ставити для строгої пари Гана (g, h), оскільки у випадку рівності $g = h$ проміжна функція f буде мати ті ж властивості, що й g і h, а ці функції не зобов'язані бути неперервно диференційовними чи кусково лінійними. Питання про проміжну C^1-функцію чи кусково лінійну функцію для строгої пари Гана можна ставити не тільки для відрізка, а і, скажімо, для всієї числової прямої $\mathbb{R}$.

Тут ми покажемо, що для відрізка на це питання легко можна дати відповідь з допомогою теореми Даукера-Катетова.

Розглянемо банаховий простір $C_u[a, b]$ всіх неперервних функцій $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою $||f|| = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$.

Теорема 1. Нехай E — всюди щільна множина у просторі $C_u[a, b]$ і (g, h) — строга пара Гана на $[a, b]$. Тоді існує строго проміжна для (g, h) функція f з множини E.

Доведення. За теоремою Даукера-Катетова існує неперервна функція $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$, яка є строго проміжною для пари (g, h). Оскільки (f_1, h) — це теж строга пара Гана, то існує неперервна функція $f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, яка є строго проміжною для (f_1, h). Таким чином, для побудованих функцій маємо, що $g(x) < f_1(x) < f_2(x) < h(x)$ на $[a, b]$. Розглянемо функцію $\varphi(x) = \frac{f_1(x)+f_2(x)}{2}$ на $[a, b]$. Зрозуміло, що функція φ неперервна і $f_1(x) < \varphi(x) < f_2(x)$ на $[a, b]$. При цьому

$$\varphi(x) - f_1(x) = \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2} = f_2(x) - \varphi(x)$$

на $[a, b]$. За теоремою Вейерштрасса існує число

$$\varepsilon = \min_{a \le x \le b} (\varphi(x) - f_1(x)) =$$

$$= \frac{1}{2} \min_{a \le x \le b} (f_2(x) - f_1(x)) = \min_{a \le x \le b} (f_2(x) - \varphi(x))$$

і $\varepsilon > 0$. В ε-околі

$$U_\varepsilon(\varphi) = \{\psi \in C[a, b] : ||\psi - \varphi|| < \varepsilon\}$$

функції φ знайдеться якийсь елемент f з всюди щільної в $C_u[a, b]$ множини E. Цей елемент і буде шуканою функцією, адже

$$g(x) < f_1(x) = \varphi(x) - (\varphi(x) - f_1(x)) \le$$

$$\le \varphi(x) - \varepsilon < f(x) < \varphi(x) + \varepsilon \le$$

$$\le \varphi(x) + f_1(x) - \varphi(x) = f_2(x) < h(x)$$

на $[a, b]$.

Позначимо символом $P[a, b]$ множину всіх многочленів на $[a, b]$. За теоремою Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервних функцій многочленами на відрізку $[a, b]$ множина $P[a, b]$ всюди щільна в $C_u[a, b]$. Тому з теореми 1 негайно випливає.

Наслідок 1. Для кожної строгої пари Гана (g, h) на $[a, b]$ існує такий многочлен $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, який є строго проміжною функцією для (g, h) на $[a, b]$.

Зауважимо, що многочлен — це не тільки C^1-функція, а й C^∞-функція, тобто нескінченно диференційовна функція, отже, для кожної строгої пари Гана (g, h) на $[a, b]$ існує строго проміжна C^∞-функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Функцію $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ називають *кусково лінійною*, якщо існує таке розбиття $T : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ відрізка $[a, b]$, що кожне звуження $f|_{[x_{k-1}, x_k]}$ є лінійною функцією на $[x_{k-1}, x_k]$. Зрозуміло, що кожна кусково лінійна функція неперервна. Множину всіх кусково лінійних функцій $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ми позначаємо символом $Q[a, b]$. З теореми Кантора про рівномірну неперервність неперервної на відрізку $[a, b]$ функції негайно випливає, що множина $Q[a, b]$ всюди щільна в $C_u[a, b]$. Тому з теореми 1 отримуємо і наступний наслідок.

Наслідок 2. Для довільної строгої пари Гана (g, h) на $[a, b]$ існує строго проміжна кусково лінійна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Зауважимо, що для строгих пар Гана на $\mathbb{R}$ цей метод побудови строго проміжних C^∞-функцій чи кусково лінійних функцій не застосовний. Тут ми розвинемо інші методи, які дозволяють будувати строго проміжні C^∞-функції і кусково лінійні функції з певними додатковими властивостями для строгих пар Гана на відрізку $[a, b]$, не використовуючи при цьому теорему Даукера-Катетова, а безпосередньо доводячи її підсилені версії для $[a, b]$. Ці результати дозволяють здійснити побудову строго проміжних C^∞-функцій і кусково лінійних функцій і на довільних числових проміжках.

4. Існування проміжних кусково лінійних функцій з даним значенням.

Надалі позначатимемо символом $U_\varepsilon(x_0)$ ε-окіл $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ точки x_0 в $\mathbb{R}$.

Теорема 2. Нехай (g, h) — строга пара Гана на відрізку $I = [a, b]$ і $g(a) < \gamma < h(a)$. Тоді існує кусково лінійна функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що $g(x) < f(x) < h(x)$ на I та $f(a) = \gamma$.

Доведення. Розглянемо множину

$$X = \{x \in [a, b] : \exists f_x \in Q[a, x] \mid$$

$$g(t) < f_x(t) < h(t) \text{ на } [a, x] \text{ і } f_x(a) = \gamma\}$$

Зауважимо, що $a \in X$, оскільки на $\{a\}$ можна визначити кусково лінійну функцію $f_a(a) = \gamma$, і для неї $g(a) < f_a(a) < g(a)$, а отже, $X \neq \emptyset$. Окрім того, $X \subseteq [a, b]$, а отже, множина X обмежена зверху числом b. Тому існує $x_0 = \sup X$ і $a \le x_0 \le b$.

Доведемо спочатку, що $x_0 \in X$. Візьмемо довільне число y_0, таке, що $g(x_0) < y_0 < h(x_0)$. Оскільки функції g і h напівнеперервні в точці x_0 відповідно зверху і знизу, то існує таке $\delta_0 > 0$, що $g(x) < y_0 < h(x)$ на $U_{\delta_0}(x_0) \cap I$

За означенням супремуму існує $x_1 \in X$, таке, що $x_0 - \delta_0 < x_1 \le x_0$. Якщо $x_0 = x_1$, то $x_0 \in X$. Нехай $x_1 < x_0$. Оскільки функції g і h напівнеперервні в точці x_1 відповідно зверху і знизу, то існує таке $\delta_1 > 0$, що $x_1 + \delta_1 < x_0$ і $g(x) < y_1 < h(x)$ з $y_1 = f_{x_1}(x_1)$ на $U_{\delta_1}(x_1) \cap I$. Покладемо $c = \min\{y_0, y_1\}$ і $d = \max\{y_0, y_1\}$. Оскільки $g(x) < y_1 < h(x)$ і $g(x) < y_0 < h(x)$ на $J = [x_1; x_1+\delta_1]$, то $g(x) < c \le d < h(x)$ на J. Отже, прямокутник $P = J \times [c; d]$ не містить точок жодного з графіків функцій g і h.

Введемо функцію $f_{x_0} : [a, x_0] \to \mathbb{R}$:

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} f_{x_1}(x), \ x \in [a; x_1]; \\ y_1 + \frac{y_0 - y_1}{\delta_1}(x - x_1), \ x \in J; \\ y_0, \ x \in [x_1 + \delta_1; x_0]. \end{cases}$$

Дана функція коректно визначена і є кусково лінійною. Окрім того, $f_{x_0}(a) = \gamma$, і, як легко перевірити, $g(x) < f_{x_0}(x) < h(x)$ на $[a, x_0]$. Таким чином, $x_0 \in X$.

Доведемо тепер, що $x_0 = b$. Нехай $x_0 < b$. Покладемо $x_2 = \min\{x_0 + \frac{\delta_0}{2}; b\}$ і розглянемо функцію

$$f_{x_2}(x) = \begin{cases} f_{x_0}(x), \ x \in [a; x_0]; \\ y_0, \ x \in [x_0; x_2]. \end{cases}$$

Оскільки $[x_0; x_2] \subseteq U_{\delta_0}(x_0) \cap I$, то $g(x) < y_0 < h(x)$ на $[x_0, x_2]$. Крім того, f_{x_2} — кусково лінійна функція і $f(x_2) = \gamma$, отже, $x_2 \in X$. Але це неможливо, бо $x_2 > x_0 = \sup X$. Таким чином, маємо, що $x_0 = b$ і функція $f = f_b$ є шуканою.

Заміною $t = b - x$ з теореми 2 легко виводиться і такий результат.

Теорема 3. Нехай (g, h) — строга пара Гана на відрізку $I = [a, b]$ і $g(b) < \gamma < h(b)$. Тоді існує кусково лінійна функція $f : [a, b] \to$

$\mathbb{R}$, така, що $g(x) < f(x) < h(x)$ на I і $f(b) = \gamma$.

5. Лема про існування ланцюжка відрізків.

Система множин $\mathcal{A}$ називається *вписаною* в систему множин $\mathcal{B}$ (позначається: $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$), якщо для довільного $A \in \mathcal{A}$ існує $B \in \mathcal{B}$, таке, що $A \subseteq B$.

Кажуть, що відрізки $I = [a, b]$ та $J = [c, d]$ *перетинаються нетривіально*, якщо $a < c < b < d$.

Ланцюжком для відрізка $[a, b]$ ми називатимемо скінченну послідовність відрізків $I_1, ..., I_n$, таку, що відрізки I_k та I_{k+1} нетривіально перетинаються для кожного $k = 1, ..., n-1$, відрізки I_k та I_{k+2} не перетинаються для кожного $k = 1, ..., n-2$ і $\bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k \supseteq [a, b]$.

Надалі через $\overset{\circ}{A}$ ми позначатимемо внутрішність множини A.

Лема 1. Нехай $I = [a, b]$, $P_j = [\alpha_j, \beta_j]$ і $\alpha_j < \beta_j$ при $j = 0, 1, ..., m$ та $\tilde{a} = \min\{\beta_0, b\}$, причому $[\tilde{a}, b) \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m} \overset{\circ}{P}_j$ і $a \in \overset{\circ}{P}_0$. Тоді існує такий ланцюжок відрізків $I_k = [a_k, b_k]$, де $k = 0, 1, ..., n$, що система $\mathcal{I} = \{I_0, I_1, .., I_n\}$ вписана в систему $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, ..., P_m\}$, причому $a_0 = a$, $b_n = b$ і $I_0 \subseteq P_0$.

Доведення. За умовою $\alpha_0 < a < \beta_0$. Якщо $\beta_0 \geq b$, то ми покладаємо $a_0 = a$, $b_0 = b$, $I_0 = [a_0, b_0]$ і послідовність з одного відрізка I_0 буде шуканим ланцюжком.

Нехай $\beta_0 < b$. Покладемо $b_0 = \beta_0 = \tilde{a}$, $I_0 = [a_0, b_0]$ і $j_0 = 0$. Оскільки $b_0 \in [\tilde{a}, b)$, то існує такий індекс $j_1 = 1, ..., m$, що $b_0 \in \overset{\circ}{P}_{j_1}$, тобто $\alpha_{j_1} < b_0 < \beta_{j_1}$. Візьмемо $a_1 = \frac{\max\{\alpha_{j_1}, a\} + b_0}{2}$, $b_1 = \min\{\beta_{j_1}; b\}$ і покладемо $I_1 = [a_1, b_1]$. Оскільки $\alpha_{j_1} < b_0$ і $a < b_0$, то $\max\{\alpha_{j_1}, a\} < b_0$, а тому $a_0 = a \leq \max\{\alpha_{j_1}, a\} < a_1 < b_0$ і $a_1 > \alpha_{j_1}$. З другого боку $b_1 \leq \beta_{j_1}$, отже, $I_1 \subseteq P_{j_1}$. Крім того, $b_0 < \beta_{j_1}$ і $b_0 < b$, тому $b_0 < b_1$. Таким чином, $a_0 < a_1 < b_0 < b_1$, отже, відрізки I_0 та I_1 нетривіально перетинаються. Якщо $b_1 = b$, то пара (I_0, I_1) буде шуканим ланцюжком.

Нехай $b_1 < b$. Оскільки $b_1 > b_0 = \tilde{a}$, та $b_1 \in [\tilde{a}, b)$, отже, існує $j_2 = 1, ..., m$, таке, що $b_1 \in \overset{\circ}{P}_{j_2} = (\alpha_{j_2}, \beta_{j_2})$, тобто, $\alpha_{j_2} < b_1 < \beta_{j_2}$. Оскільки $b_1 = \beta_{j_1} \notin \overset{\circ}{P}_{j_1}$ і $b_1 \in \overset{\circ}{P}_{j_2}$, то $j_1 \neq j_2$. Тому всі три номери j_0, j_1 і j_2 різні. Візьмемо $a_2 = \frac{\max\{\alpha_{j_2}, b_0\} + b_1}{2}$, $b_2 = \min\{\beta_{j_2}; b\}$, $I_2 = [a_2, b_2]$. Оскільки $\alpha_{j_2} < b_1$ і $b_0 < b_1$, то $\max\{\alpha_{j_2}, b_0\} < b_1$, а тому $a_1 < \max\{\alpha_{j_2}, b_0\} < a_2 < b_1$ і $a_2 > \alpha_{j_2}$. З другого боку, $b_2 \leq \beta_{j_2}$, отже, $I_2 \subseteq P_{j_2}$. Крім того, $b_1 < \beta_{j_2}$ і $b_1 < b$, тому $b_1 < b_2$. Таким чином, $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$, отже, відрізки I_1 та I_2 нетривіально перетинаються. Окрім того, оскільки $b_0 \leq \max\{\alpha_{j_2}, b_0\} < a_2$, то відрізки I_0 та I_2 не перетинаються. Якщо $b_2 = b$, то трійка (I_0, I_1, I_2) буде шуканим ланцюжком, якщо ж $b_2 < b$, то побудова продовжується.

Припустимо, що для деякого номера $k > 2$ вже побудовані відрізки $I_s = [a_s, b_s]$ при $s = 0, ..., k-1$, такі, що сусідні відрізки I_s та I_{s+1} перетинаються нетривіально при $s = 0, ..., k-2$, а відрізки I_s та I_{s+2} не перетинаються при $s = 0, ..., k-3$. При цьому визначені різні номери $0 = j_0, j_1, ..., j_{j-1}$ серед чисел $0, 1, ..., m$, такі, що $I_s \subseteq P_{j_s}$ при $s = 0, ..., k-1$, $a_s = \frac{\max\{\alpha_{j_s}, b_{s-2}\} + b_{s-1}}{2}$, $b_s = \beta_{j_s}$ при $s = 2, ..., k-2$, $b_{k-1} = \min\{\beta_{j_{k-1}}; b\}$ і $b_0 < b_1 < ... < b_{k-1}$. Якщо $b_{k-1} = b$, то набір $(I_0, ..., I_{k-1})$ і буде шуканим ланцюжком відрізків.

Нехай $b_{k-1} < b$. Тоді $b_{k-1} \in [\tilde{a}, b)$, отже, існує такий номер $j_k = 1, ..., m$, що $b_{k-1} \in \overset{\circ}{P}_{j_k}$, тобто $\alpha_{j_k} < b_{k-1} < \beta_{j_k}$. За побудовою $b_{k-1} = \beta_{j_{k-1}} > b_{k-2} = \beta_{j_{k-2}} > ... > b_1 = \beta_{j_1}$, отже, $b_{k-1} \notin \overset{\circ}{P}_{j_s}$ при $s = 1, ..., k-1$. Крім того, $j_k \neq j_0 = 0$, бо $j_k \geq 1$. Таким чином, всі номери $j_0, ..., j_k$ різні.

Покладемо $a_k = \frac{\max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\} + b_{k-1}}{2}$, $b_k = \min\{\beta_{j_k}; b\}$ і $I_k = [a_k, b_k]$. Перевіримо, що $a_{k-1} < a_k < b_{k-1} < b_k$. Оскільки за припущенням відрізки I_{k-2} та I_{k-1} нетривіально перетинаються, то $a_{k-2} < a_{k-1} < b_{k-2} < b_{k-1}$, зокрема, $a_{k-1} < b_{k-2}$, а значить, $a_{k-1} < \max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\}$. Але $\alpha_{j_k} < b_{k-1}$ і $b_{k-2} < b_{k-1}$, тому $\max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\} < b_{k-1}$. Отже, $a_{k-1} < \max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\} < a_k < b_{k-1}$. Далі $b_{k-1} < \beta_{j_k}$ і $b_{k-1} < b$, тому $b_{k-1} < b_k$. Таким чином,

$a_k < b_k$, і відрізки I_{k-1} та I_k нетривіально перетинаються. До того ж

$$a_k > \max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\} \geq b_{k-2},$$

отже, відрізки I_{k-2} та I_k не перетинаються. Нарешті,

$$\alpha_{j_k} \leq \max\{\alpha_{j_k}, b_{k-2}\} < a_k < b_k \leq \beta_{j_k}.$$

Отже, $I_k \subseteq P_{j_k}$. Таким чином, побудову можна продовжити ще на один крок.

Оскільки число індексів відрізків P_j дорівнює $m+1$, то процес побудови відрізків I_k не може тривати до нескінченності, адже індекси $j_0, ..., j_k$, які виникають у побудові є різними. Отже, процедура завершується на якомусь кроці $n \leq m$ і ми отримаємо шуканий ланцюжок $I_0, ..., I_n$ для відрізка I.

6. Лема про нескінченно диференційовні функції.

Розглянемо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Добре відомо, що f — нескінченно диференційовна функція. При цьому $f(x) > 0$ на $(-1, 1)$.

Позначимо $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} e^{\frac{1}{x^2-1}}dx$. Ясно, що $I > 0$. Розглянемо функцію $g(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{I}dt$. Оскільки функція f неперервна, то $g'(x) = \frac{f(x)}{I} \geq 0$ на $\mathbb{R}$. Тому функція g нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$, g зростає на $\mathbb{R}$, причому $g(x) = 0$ при $x \leq -1$ і $g(x) = 1$ при $x \geq 1$.

Позначимо символом $C^\infty(\mathbb{R})$ простір всіх нескінченно диференційовних функцій $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Лема 2. Нехай $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і $a < b$. Тоді існує функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, така, що $\varphi(x) = \alpha$ при $x \leq a$, $\varphi(x) = \beta$ при $x \geq \beta$, і φ зростає при $\alpha < \beta$, спадає при $\alpha > \beta$ та є сталою при $\alpha = \beta$.

Доведення. Позначимо $\psi(x) = 2\frac{x-a}{b-a} - 1$. Легко перевірити, що функція $\varphi(x) = (\beta - \alpha)g(\psi(x)) + \alpha$, де g — вище побудована функція, є шуканою.

7. Існування нескінченно диференційовних проміжних функцій, локально сталих на кінцях відрізка.

Теорема 4. Нехай (g, h) — строга пара Гана на $I = [a, b]$, і γ — довільне число з інтервалу $(g(a), h(a))$. Тоді для пари (g, h) існує строго проміжна C^∞-функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що f локально стала в точках a і b і $f(a) = \gamma$.

Доведення. Для кожної точки $x \in (a, b]$ розглянемо довільне число y_x, таке, що $g(x) < y_x < h(x)$, і покладемо $y_a = \gamma$. Оскільки функція g напівнеперервна зверху, а h знизу, то для кожного $x \in I$ існує таке $\delta_x > 0$, що $g(u) < y_x < h(u)$ при $u \in V_x = (x - 2\delta_x, x + 2\delta_x)$ і $u \in I$.

Якщо $d = a + 2\delta_a \geq b$, то стала функція $f(x) = y_a = \gamma$ і буде шуканою. Нехай $d < b$. Покладемо $c = a + \delta_a$. Тоді $a < c < b$. Зрозуміло, що відрізок $[c, b]$ покривається системою інтервалів $U_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$, де x пробігає $[c, b]$, адже $x \in U_x$ для кожного $x \in [c, b]$. За лемою Гейне-Бореля існує скінченне число точок $x_1, ..., x_m$ з відрізка $[c, b]$, таких, що $[c, b] \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m} U_{x_j}$.

Візьмемо $P_j = \overline{U_{x_j}}$, $P_0 = [a, c]$ та $\mathcal{P} = \{P_j : j = 0, 1, ..., m\}$. За лемою 1, існує ланцюжок з відрізків $I_k = [a_k, b_k]$, $k = 0, 1, ..., n$, вписаний в покриття $\mathcal{P}$, такий, що $I_0 \subseteq P_0$, $a_0 = a$ і $b_n = b$. Оскільки для довільного $k = 0, ..., m$ маємо, що $I_k \subseteq P_{j_k} = \overline{U_{x_{j_k}}} \subseteq V_{x_{j_k}}$, то $g(u) < y_{x_{k_j}} < h(u)$ на $I \cap I_k$. Надалі будемо позначати $z_0 = y_a = \gamma$ і $y_{x_{j_k}} = z_k$ при $k = 1, ..., n$. Для нашого ланцюжка виконуються такі нерівності:

$$a = a_0 < a_1 < b_0 < a_2 < b_1 < ... < a_n <$$
$$< b_{n-1} < b_n = b$$

Покладемо $A_k = [a_k, b_{k-1}], k = 1, ..., n$; $B_0 = [a_0, a_1]$, $B_k = [a_{k-1}, a_{k+1}]$ при $k = 1, ..., n-1$, $B_n = [b_{n-1}, b_n]$. Маємо, що для кожного $k = 0, ..., n$ виконуються включення $B_k \subseteq I_k$ і для кожного $k = 1, ..., n$ — включення $A_k = I_{k-1} \cap I_k$.

Для кожного відрізка $A_k = [a_k, b_{k-1}]$ при $k = 1, ..., n$, використовуючи лему 2, побудуємо C^∞-функцію $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої

$\varphi_k(x) = z_{k-1}$ при $x \le a_k$, $\varphi_k(x) = z_k$ при $x \ge b_{k-1}$, причому функція φ_k зростає при $z_{k-1} \le z_k$ і спадає при $z_{k-1} \ge z_k$. Визначимо функцію $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, покладаючи $f(x) = z_k$, якщо $x \in B_k$ при $k = 0, 1, ..., n$, і $f(x) = \varphi_k(x)$, якщо $x \in A_k$ при $k = 1, ..., n$.

Зрозуміло, що функція f нескінченно диференційовна, локально стала у точках a і b, і $f(a) = z_0 = \gamma$.

Покажемо, що f є строго проміжною функцією для пари (g,h) на $[a,b]$. Нехай $x \in [a,b]$. Тоді існує такий номер $k = 0, 1, ..., n$, що $x \in B_k$, або такий номер $k = 1, ..., n$, що $x \in A_k$.

Припустимо, що $x \in B_k$ при $k = 1, ..., n-1$. Тоді $f(x) = z_k = y_{j_k}$ і $g(u) < y_{j_k} < h(u)$ на V_{j_k}. Оскільки відрізки I_{k-1} та I_k і I_k та I_{k+1} нетривіально перетинаються і $I_{k-1} \cap I_{k+1} = \emptyset$, то

$$a_{k-1} < a_k < b_{k-1} < a_{k+1} < b_k < b_{k+1},$$

отже, $B_k = [b_{k-1}, a_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k] = I_k \subseteq V_{x_{j_k}}$ а тому $f(x) = z_k \in (g(x), h(x))$.

Нехай $x \in B_0$. Тоді $f(x) = z_0 = y_a = \gamma$. Але $a = a_0 < a_1 < b_0$, тому

$$B_0 = [a_0, a_1] \subseteq [a_0, b_0] = I_0 \subseteq P_0 = [a, c] \subseteq V_a.$$

Отже $f(x) = \gamma \in (g(x), h(x))$.

Нарешті, нехай $x \in B_n$. Тоді $f(x) = z_n = y_{j_n}$. Але відрізки I_{n-1} та I_n нетривіально перетинаються. Тому $a_{n-1} < a_n < b_{n-1} < b_n$, отже,

$$B_n = [b_{n-1}, b_n] \subseteq [a_n, b_n] = I_n \subseteq V_{x_{j_n}}.$$

В такому разі $f(x) = y_{j_n} \in (g(x), h(x))$.

Нехай тепер $x \in A_k$ для деякого $k = 1, ..., n$. За побудовою $g(u) < z_s < h(u)$ на I_s для довільного $s = 0, 1, ..., n$. Нехай $c_k = \min\{z_{k-1}, z_k\}$ і $d_k = \max\{z_{k-1}, z_k\}$. Оскільки $A_k = I_{k-1} \cap I_k$, то $g(x) < c_k \le d_k < h(x)$. Але $f(x) = \varphi_k(x) \in [c_k, d_k]$. Тому $g(x) < f(x) < h(x)$. Таким чином, f — це шукана функція.

Заміною $t = b - x$ з теореми 2 легко виводиться і такий результат.

Теорема 5. Нехай (g,h) — строга пара Гана на $I = [a,b]$, і γ — довільне число з інтервалу $(g(b), h(b))$. Тоді для пари (g,h) існує строго проміжна C^∞-функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що f локально стала в точках a і b і $f(b) = \gamma$.

Зауважимо, що з леми про існування вписаного ланцюжка відрізків можна вивести і теорему 2.

8. Проміжні функції на різних проміжках.

З допомогою теорем 2, 3, 4 і 5 ми можемо здійснити побудову строго проміжних кусково лінійних чи C^∞-функцій на довільних проміжках числової прямої.

Теорема 6. Нехай $I = [a,b)$ — довільний відкритий справа проміжок в $\mathbb{R}$, скінченний чи нескінченний, (g,h) — строга пара Гана на I і $g(a) < \gamma < h(a)$. Тоді існує строго проміжна для пари (g,h) нескінченно диференційовна функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що $f(a) = \gamma$ і f — локально стала у точці a.

Доведення. Легко побудувати таку строго зростаючу послідовність точок $b_n \in (a,b)$, що $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Для одноманітності позначень покладемо $b_0 = a$. За теоремою 3 існує така C^∞-функція $f_1 : [b_0, b_1] \to \mathbb{R}$, що $f_1(b_0) = \gamma$, причому f_1 локально стала на кінцях відрізка $[b_0, b_1]$ і є строго проміжною для строгої пари Гана $(g|_{[b_0,b_1]}, h|_{[b_0,b_1]})$. На другому кроці будуємо таку C^∞-функцію $f_2 : [b_1, b_2] \to \mathbb{R}$, що $f_2(b_1) = f_1(b_1)$, причому вона є локально сталою на кінцях відрізка $[b_1, b_2]$, і є строго проміжною для строгої пари Гана $(g|_{[b_1,b_2]}, h|_{[b_1,b_2]})$.

Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми побудуємо для кожного номера $n \in \mathbb{N}$ таку C^∞-функцію $f_n : [b_{n-1}, b_n] \to \mathbb{R}$, що локально сталі на кінцях відрізка $[b_{n-1}, b_n]$, і $f_n(b_{n-1}) = f_{n-1}(b_{n-1})$ та є строго проміжною для строгої пари Гана $(g|_{[b_{n-1},b_n]}, h|_{[b_{n-1},b_n]})$.

Покладемо $f(x) = f_n(x)$ на $[b_{n-1}, b_n]$, де n — довільний номер. Цими умовами коректно визначається C^∞-функція $f : I \to \mathbb{R}$, яка і буде строго проміжною для строгої пари Гана (g,h) на I, причому $f(a) = \gamma$ і f є локально сталою в точці a.

Так само з теореми 4 легко виводиться такий результат, який можна отримати і з теореми 6 відповідною заміною.

Теорема 7. Нехай $I = (a,b]$ — довільний відкритий зліва проміжок, скінченний чи нескінченний, (g,h) — строга пара Гана на I і $g(b) < \gamma < h(b)$. Тоді існує строго проміжна для пари (g,h) нескінченно диференційовна функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що $f(b) = \gamma$ і f локально стала в точці b.

З теоерем 6 і 7 легко легко виводиться:

Теорема 8. Нехай $I = (a,b)$ — довільний інтервал в $\mathbb{R}$, скінченний чи нескінченний, $x_0 \in I$, (g,h) — строга пара Гана на I, і $g(x_0) < y_0 < h(x_0)$. Тоді існує строго проміжна для пари (g,h) нескінченно диференційовна функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що $f(x_0 = y_0$.

Доведення. За теоремами 6 і 7 існують C^∞-функції $f_- : (a,x_0] \to \mathbb{R}$ і $f_+ : [x_0,b) \to \mathbb{R}$, які є строго проміжними для строгих пар Гана $(g|_{(a,x_0]}, h|_{(a,x_0]})$ і $(g|_{[x_0,b)}, h|_{[x_0,b)})$ відповідно і $f_-(x_0) = y_0 = f_+(x_0)$, f_- та f_+ локально сталі в точці x_0. Тоді функція $f : I \to \mathbb{R}$, для якої $f(x) = f_-(x)$ на $(a,x_0]$ і $f(x) = f_+(x)$ на $[x_0,b)$ буде шуканою.

Функцію $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ /$f : (a,b] \to \mathbb{R}$/ ми називаємо *кусково лінійною*, якщо існує така строго зростаюча /спадна/ послідовність точок $(x_n)_{n=0}^\infty$, що $x_0 = a$ /$x_0 = b$/, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ /$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$/ і всі звуження $f|_{[x_n,x_{n+1}]}$ /$f|_{[x_{n+1},x_n]}$/ є лінійними.

Функцію $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ми називатимемо *кусково лінійною*, якщо існує така двостороння послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ точок x_n з інтервалу (a,b), що $x_n < x_{n+1}$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to-\infty} x_n = a$, і звуження $f|_{[x_n,x_{n+1}]}$ є лінійною функцією для кожного $n \in \mathbb{Z}$.

Аналогічні твердження справедливі і в тому випадку, коли I — довільний проміжок.

Так само як теорема 6 на основі теорем 2 і 3, легко встановлюються такі результати.

Теорема 9. Для довільної строгої пари Гана (g,h) на проміжку $I = [a,b)$ і числа γ, для якого $g(a) < \gamma < h(a)$, існує така строго проміжна для пари (g,h) кусково лінійна функція $f : I \to \mathbb{R}$, що $f(a) = \gamma$.

Теорема 10. Для довільної строгої пари Гана (g,h) на проміжку $I = (a,b]$ і числа γ, для якого $g(b) < \gamma < h(b)$, існує така строго проміжна для пари (g,h) кусково лінійна функція $f : I \to \mathbb{R}$, що $f(b) = \gamma$.

Теорема 11. Нехай $I = (a,b)$ довільний інтервал в $\mathbb{R}$, скінченний чи нескінченний, $x_0 \in I$, (g,h) — строга пара Гана на I, і $g(x_0) < y_0 < h(x_0)$. Тоді існує строго проміжна для пари (g,h) кусково лінійна функція $f : I \to \mathbb{R}$, така, що $f(x_0) = y_0$.

9. Приклади.

Покажемо, що коли $g(x) = h(x)$ хоча б в одній точці, то проміжні кусково лінійні чи нескінченно диференційовні функції можуть не існувати.

Приклад 1. Для точок $x_n = \frac{1}{n}$ з відрізка $[0,1]$ побудуємо функції $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ і $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, покладаючи $g(0) = h(0) = 0$, $g(x_n) = -\frac{2x_n}{3}$ і $h(x_n) = -\frac{x_n}{3}$, якщо n парне, $g(x_n) = \frac{x_n}{3}$ і $h(x_n) = \frac{2x_n}{3}$, якщо n непарне, і вважаючи, що функції g і h лінійні на кожному відрізку $[x_{n+1}, x_n]$.

Маємо, що $g(0) = h(0)$ і $g(x) < h(x)$ на $(0,1]$. Легко перевірити, що функції g і h неперервні. Покажемо, що для пари Гана (g,h) на $[0,1]$ не існує проміжної кусково лінійної функції. Справді, нехай $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — проміжна функція для пари (g,h). Покажемо, що на кожному відрізку $[x_{n+2}, x_n]$ функція f не може бути лінійною. Якщо n парне, то

$$f(x_n) \le h(x_n) = -\frac{x_n}{3} < 0 <$$

$$< \frac{x_{n+1}}{3} = g(x_{n+1}) \le f(x_{n+1})$$

і

$$f(x_{n+2}) \le h(x_{n+2}) = -\frac{x_{n+2}}{3} < 0 <$$

$$< \frac{x_{n+1}}{3} = g(x_{n+1}) \le f(x_{n+1}),$$

отже, $f(x_n) < f(x_{n+1})$ і $f(x_{n+1}) > f(x_{n+2})$, а $x_{n+2} < x_{n+1} < x_n$. Таким чином, функція f не є монотонною на I_n, а значить, не є і лінійною на I_n. Якщо n непарне, то $f(x_{n+1}) < f(x_n)$ і $f(x_{n+2}) > f(x_{n+1})$ і знову f не монотонна, а тому і не лінійна на I_n.

Тепер зрозуміло, що f не може бути кусково лінійною на $[0,1]$, інакше б існувало таке число $c \in (0,1)$, що f лінійна на $[0,c]$, але $x_n \to 0$, тому при достатньо великих n виконуються нерівності $0 < x_{n+2} < x_n < c$, а тоді $I_n \subseteq [0,c]$ і f лінійна на I_n, що неможливо.

Приклад 2. Візьмемо $g(x) = |x|$, $h(x) = 2|x|$. Покажемо, що не існує проміжної диференційовної функції для пари (g, h) на $[-1, 1]$.

Нехай така функція f існує. Тоді при $\Delta x > 0$:

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \frac{g(\Delta x)}{\Delta x} \leq \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \leq \frac{h(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{2|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \leq \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \leq \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{2\Delta x}{\Delta x}$. Звідки $1 \leq f'(0) \leq 2$.

З іншого боку, $\frac{|\Delta x|}{\Delta x} \geq \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \geq \frac{2|\Delta x|}{\Delta x}$ при $\Delta x < 0$, а отже, $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \geq \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \geq \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{2|\Delta x|}{\Delta x}$ звідки, $-1 \geq f'(0) \geq -2$.

Отримана суперечність показує, що проміжної диференційовної функції для пари (g, h) на $[-1, 1]$ не існує.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Hahn H.* Uber halbstetige und unstetige Functionen // Sitzungsberichte Akad.Wiss.Wien. Math. - naturwiss.Kl.Abt.IIa. — 1917. — **126**. — S.91-110.

2. *Tong H.* Some characterizations of normal and perfectly normal spaces // Duke Math.J. — 1952. — **19**. — P.289-292.

3. *Katetov M.* On real-valued functions in topological spaces // Fund.Math. — 1952. — **38**. — P.85-91.

4. *Dieudonne J.* Une généralisation des espaces compacts // J. de Math. Pyres et Appl. — 1944. — **23**. — P.65-76.

5. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.

6. *Dowker C. H.* On countably paracompact spaces // Canad. J. Math. — 1951. — **3**. — P.219-224.

7. *Michael E.* Continuous selections I // Ann. of Math. — 1956. — **63**. — P.361–382.

8. *Good C., Stares I.* New proofs of classical insertion theorems // Comm. Math. Univ. Carolinae. — 2000. — **41**,№1. — P.139-142.

9. *Yamazaki K.* The range of maps on classical insertion theorems // Acta Math. Hungar. — 2011. — **132**(1-2). — P.42-48.

10. *Маслюченко В.К., Петей С.П.* Поточкові границі неперервних монотонних функцій та функцій обмеженої варіації // Бук. мат. журн. — 2015. — **3**,№2. — С.64-71.

11. *Маслюченко В.К., Мельник В.С.* Теореми про проміжну афінну функцію для опуклої і вгнутої функцій // Бук. мат. журн. — 2016. — **4**,№1. — С.110-116.

УДК 517.946

©2016 р. М.І. Матійчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ ФУНДАМЕНТАЛЬНИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ І РІВНЯНЬ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Встановлюється зв'язок між функціями Гріна задачі Коші для параболічних рівнянь і відповідних рівнянь з дробовою похідною. На його основі виводяться оцінки компонент функції Гріна і будується розв'язок та фундаментальний розв'язок задачі Коші зі змінними коефіцієнтами фрактальних рівнянь.

It is established the connection between Green functions of the Cauchy problem for parabolic equations and related equations with fractional derivative. On the basis of such connection estimates of component of Green function are derived and the solution and the fundamental solution of the Cauchy problem with variable coefficients of fractal equations are constructed.

Вступ

Задачі для рівнянь з частинними похідними виникають при моделюванні різних складних явищ і процесів у сучасному природознавстві, техніці, математичній фізиці, квантовій механіці, теорії ядерних ланцюгових реакцій, економіці екології тощо. Класичні розв'язки задачі Коші й крайових задач вивчались в монографіях Т.Я. Загорского, С.Д. Ейдельмана, О.О. Ладижинської, С.Д. Івасишена, Б.Й. Пташника та ін.

Задачі з дробовими похідними були предметом досліджень багатьох математиків у різні періоди: Л. Ейлером, Ж. Ліувіллем та Ріманом, Ж. Адамаром, С. Самко і А. Кінбасом, А. Нахушевим тощо. Основи дробового інтегро-диференціювання подано у посібнику Н.О. Вірченко і В.Я. Рибака [1], де проаналізовано більше двохсот публікацій.

Для рівнянь параболічного типу тепер опубліковано вітчизняними і зарубіжними матемтаиками ряд визначних праць. Зокрема, у книзі С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, А.Н. Кочубея [3] за допомогою функцій Фокса вивчено властивості функції Гріна задачі Коші для рівнянь другого порядку, методом Є. Леві побудовано фундаментальний розв'язок і встановлено коректність цієї задачі.

У цій статті, яка складається із двох частин, компоненти функції Гріна задачі Коші для рівнянь з дробовою похідною визначаються за допомогою функції Гріна відповідного параболічного рівняння. Незалежно від порядку рівняння і числа просторових змінних встановлюється єдиний підхід до оцінок компонент функції Гріна. Він базується на зображенні інтегралів Лапласа по спеціальних контурах.

У другій частині дослдження розглядається задача Коші для рівнянь зі змінними коефіцієнтами. За допомогою об'ємного потенціала задача зводиться до нерегулярного інтегрального рівняння Вольтерра–Фредгольма з ядром із класу Діні. Будується резольвента і встановлюється коректність задачі Коші в нормованих просторах Діні.

§1. Функція Гріна задачі Коші

У півпросторі $\Pi = (0,\infty) \times E_n$ розглянемо задачу Коші для рівнянь параболічного типу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|\le 2b} A_k \mathfrak{D}_x^k u + f(t,x), \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x).$$

А також цю задачу для рівняння з модифікованим оператором дробового диференціювання

$$\mathfrak{D}_t^{\alpha} u_1 - \frac{u_1(0,t)}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}} =$$

$$= \sum_{|k|\le 2b} A_k \mathfrak{D}_x^k u_1 + f_1(t,x). \qquad (2)$$

Для знаходження розв'язків скористаємось перетвореннями Фур'є і Лапласа

$$F(t,\sigma) = Ff(t,x) = \int_{E_n} e^{-i\sigma x} f(t,x)dx, \qquad (3)$$

$$Lf_1(t,x) = \psi(p,x) = \int_0^\infty e^{-pt} f_1(t,x)dt, \qquad (4)$$

де $f \in L_1(E_n)$, f_1 – оригінал. Оператори F і L мають обернені F^{-1} і L^{-1}, з допомогою F^{-1} фундаментальний розв'язок задачі Коші (1) визначається формулою

$$G_0(t,x) = F^{-1}Q(t,\sigma) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} e^{i\sigma x} Q(t,\sigma)d\sigma, \qquad (5)$$

де $Q(t,\sigma) = \exp\{A(i\sigma)t\}$ – нормальний розв'язок рівняння

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{|k|\le 2b} A_k (i\sigma)^k v(t,\sigma) \equiv A(i\sigma)v,$$

$$\sigma \in E_n, i = \sqrt{-1}.$$

Припустимо, що рівняння (1) параболічне, причому функція $G(t,x)$ задовольняє нерівності [2]

$$|\mathfrak{D}_x^k G_0(t,x)| \le c_k t^{-\frac{n+|k|}{2b}} e^{-cp(t,x)}, \qquad (6)$$

для всіх $t \in (0,\infty)$, c_k, c – додатні сталі, $\rho_0(t,x) = \left(|x|t^{-\frac{1}{2b}}\right)^{q_0}$, $q_0 = \dfrac{2b}{2b-1}$. Зауважимо, що для $|x|<1$ справджується нерівність [2]

$$\int_0^T t^{-\frac{n+|k|}{2b}} e^{-\rho_0(t,x)} dt \le$$

$$\le c_T \begin{cases} 1, \ n+|k| < 2b, \\ \ln\frac{1}{|x|} + 1, \ n+|k| = 2b, \\ |x|^{-(n+|k|-2b)}, \ n+|k| > 2b. \end{cases}$$

Застосуємо до рівняння (2) перетворення Фур'є Лапласа, тоді отримаємо рівняння

$$p^\alpha v_1(p,\sigma) - p^{\alpha-1}\widetilde{\varphi}_1(\sigma) =$$

$$= \sum_{|k|\le 2b} A_k(i\sigma)v_1 + \widetilde{f}_1(p,\sigma). \qquad (7)$$

Звідси знаходимо

$$v_1(p,\sigma) = \frac{\widetilde{\varphi}_1(\sigma)p^{\alpha-1}}{p^\alpha - A(i\sigma)} + \frac{\widetilde{f}_1(p,\sigma)}{p^\alpha - A(i\sigma)}, \qquad (8)$$

$$A(\sigma) \equiv \sum_{|k|\le 2b} A_k (i\sigma)^k.$$

В результаті застосування оберненого оператора Фур'є-Лапласа до обох частин рівності та теореми про перетворення Фур'є-Лапласа згортки будемо мати

$$u_1(t,x) = \int_{E_n} G_1(t,x-\xi)\varphi_1(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} G_2(t-\tau, x-\xi) f_1(\tau,\xi)d\xi. \qquad (9)$$

Тут позначено

$$G_1(t,x) = F_\sigma^{-1} L_p^{-1} \left(\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - A(i\sigma)}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}i} \int_{a-i\sigma}^{a+i\sigma} e^{pt} \int_{E_n} e^{i\sigma x} \left(\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - A(\sigma)}\right) d\sigma dp;$$

$$G_2(t,x) = F^{-1} L_p^{-1} \left(\frac{1}{p^\alpha - A(i\sigma)}\right) =$$

$$= L_p^{-1} \left\{ \int_0^\infty e^{-p^\alpha \tau} G_0(\tau,x)d\tau \right\}. \qquad (10)$$

Теорема 1 (про функцію Гріна). *Якщо рівняння* (1) *параболічне, то компоненти функції Гріна задачі для рівняння* (2) *визначаються формулами* (10) *і для них справджуються нерівності*

$$|\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x)| \le$$

$$\le c_k e^{-c\rho(\widehat{x})} t^{-\frac{n+|k|}{2b}\alpha} \Psi_{n+|k|-2b}(\widehat{x}), \qquad (11)$$

$$|\mathfrak{D}_x^k G_2(t,x)| \le$$

$$\le c_k e^{-c\rho(\widehat{x})} t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}-1+\alpha} \Psi_{n+|k|-2b}(\widehat{x}), \qquad (12)$$

де для $|x|<1$

$$\Psi_m(x) = \begin{cases} 1, \quad m<0, \\ |\ln|x|| + 1, \quad m=0, \\ |x|^{-m}, \quad m>0, \end{cases}$$

а при $|x| \geq 1$ $\Psi_m(x) = \Psi_m(1)$ *і* $m \in E_1$, $\rho(\widehat{x}) = \left(\frac{|x|}{t^{\frac{\alpha}{2b}}}\right)^q$, $q = \frac{2b}{2b-\alpha}$

$$|\mathfrak{D}_t G_1(t,x)| \leq ct^{-\frac{n\alpha+2b}{2b}} \Psi_{n-2b|\widehat{x}|} e^{-c|\widehat{x}|^q}. \quad (13)$$

Для функцій $\varphi \in c^{(\omega)}(E_n)$, $f \in c^{(\omega)}((0,T) \times E_n)$ *розв'язок задачі Коші* (1), (2) *визначається формулою* (9) *і для нього правильна нерівність*

$$|\mathfrak{D}_x^k u(t,x)| \leq c_k \left[t^{-\frac{|k|}{2b}}(|\varphi|\omega + |f_1|\omega)\right],$$

$$|k| \leq 2b.$$

Доведення. Очевидно правильна рівність

$$\frac{1}{p^\alpha - A(i\sigma)} = \int_0^\infty e^{-(p^\alpha - A(i\sigma))\tau} d\tau.$$

Тому згідно з формулою (5) маємо зображення

$$G_1(t,x) = F^{-1}L^{-1}\left(\int_0^\infty e^{-(p^\alpha - A(i\sigma))\tau}_{p^{\alpha-1}} d\tau\right) =$$

$$= L^{-1}\left(\int_0^\infty e^{-p^\alpha\tau}_{p^{\alpha-1}} F_\sigma^{-1}\left(e^{A(i\sigma)\tau}\right) d\tau\right) =$$

$$= L_p^{-1}\left(\int_0^\infty e^{-p^\alpha\tau}_{p^{\alpha-1}} G_0(\tau,x) d\tau\right). \quad (14)$$

З другого боку також знаходимо

$$G_1(t,x) = F^{-1}L^{-1}\left(\frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha\left(1-\frac{A}{p^\alpha}\right)}\right) =$$

$$= F^{-1}L^{-1}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{p^{\alpha k}}\right)$$

для $|A(i\sigma)| < |p|^\alpha$. Скористаємось співвідношенням

$$L^{-1}p^{-\alpha k-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Re}p^\alpha \geq |A(\sigma)|} e^{pt} p^{-\alpha k-1} dp =$$

$$= \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad (k = 0,1,...),$$

яке легко перевіряється, якщо до обох частин застосувати пряме перетворення Лапласа $\int_0^\infty e^{-pt} t^{\alpha k} dt = p^{-(k+\alpha+1)}\Gamma(\alpha k+1)$.

Отже, приходимо до такого зображення функції

$$G_1(t,x) = F^{-1}\left(\sum_{k=0}^\infty A^k t^{\alpha k} \frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)}\right) =$$

$$= F_\sigma^{-1} E_\alpha(A(i\sigma)t^\alpha), \quad (15)$$

де $E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$ – функція Міттаг-Лефлера.

Оцінимо функцію $G_1(t,x)$ та її похідні, виходячи із зображення (14). Позначимо функцію під знаком оператора L_p^{-1} через $\varphi_\alpha(p,x)$ і продиференціюємо.

Будемо мати

$$\mathfrak{D}_x^k \varphi_\alpha(p,x) = \int_0^\infty e^{-p^\alpha\tau} \mathfrak{D}_x^k G_0(\tau,x) d\tau.$$

Для похідних $\mathfrak{D}_x^k G_1$, покладаючи $p = zt^{-1}$, $\tau = \beta t$, отримуємо формулу

$$\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} p^{\alpha-1} \mathfrak{D}_x^k \varphi_\alpha(p,x) dp =$$

$$= \frac{t^{-\alpha}}{2\pi i} \int_{at-i\infty}^{at+i\infty} e^z \mathfrak{D}_x^k \varphi_\alpha(zt^{-1},x) z^{\alpha-1} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^z z^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-z^\alpha\beta} \mathfrak{D}_x^k G_0(t^\alpha\beta,x) d\beta dz. \quad (16)$$

Спочатку оцінимо функцію $\mathfrak{D}_x^k \varphi_\alpha(zt^{-1},x)$. Зробивши заміну $\tau = t^\alpha\beta$, будемо мати

$$\mathfrak{D}_x^k \varphi_\alpha(zt^{-1},x) = t^\alpha \int_0^\infty e^{-z^\alpha\beta} \mathfrak{D}_x^k G_0(t^\alpha\beta,x) d\beta.$$

За допомогою нерівності (6) знаходимо

$$|\mathfrak{D}_x^k \varphi_\alpha(zt^{-1},x)| \le$$

$$\le ct^\alpha \int_0^\infty e^{-(\mathrm{Re} z^\alpha)\beta - cp(\beta,\widehat{x})}\beta^{-\frac{n+|k|}{2b}} d\beta t^{-\frac{n+|k|}{2b}\alpha}.$$

Скористаємось нерівністю [2, с. 153]

$$-A\beta - C_1(|\widehat{x}|\beta^{-\frac{1}{2b}})^q \le -C_0 A^{\frac{1}{2b}}|\widehat{x}|, \qquad (17)$$

де $C_0 = \dfrac{2bC_1^{\frac{1}{q}}}{(2b-1)^{\frac{1}{q}}}$, $0 < c_1 < c$, $A > 0$.

Якщо скористатись лемою 7.1 [2], то для $\mathrm{Re} Z^\alpha \ge c(\varphi) > 0$ отримаємо

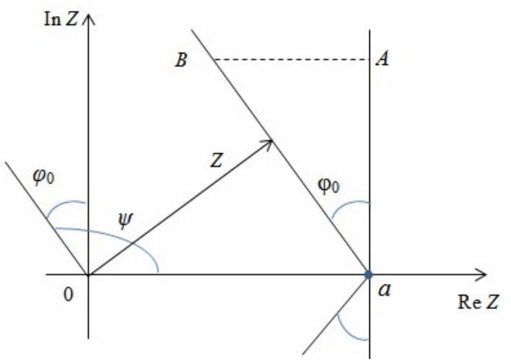
$$|\mathfrak{D}_x^k \varphi_\alpha(zt^{-1},x)| \le C_k e^{-(1-\varepsilon)(\mathrm{Re} z^\alpha)^{\frac{1}{2b}}|\widehat{x}|}\times$$

$$\times t^{-\frac{n+|k|-2b}{2b}\alpha} \int_0^\infty e^{-\varepsilon(\mathrm{Re} z^\alpha)\beta - \varepsilon\rho(\beta,\widehat{x})}\beta^{-\frac{n+|k|}{2b}} d\beta \le$$

$$\le C_k e^{-C_\varepsilon(\mathrm{Re} z^\alpha)^{\frac{1}{2b}}|\widehat{x}|}\Psi_{n+|k|-2b}(\widehat{x})\times$$

$$\times t^{-\frac{n+|k|-2b}{2b}\alpha}. \qquad (18)$$

В інтегралі (16) для $\mathfrak{D}^k G_1(t,x)$ підінтегральна функція $\Psi_k(z) \equiv e^z z^{\alpha-1}\mathfrak{D}_z^k \varphi_\alpha(zt^{-1},x)$ аналітична в області $Z = \{Z = (a_1 + iv_1)e^{i\varphi_0}, a_1 > 0, |v_1| < \infty, 0 < \varphi_0 < \dfrac{\varepsilon}{4}\}$.



У області Z міститься область $C_a = \{Z, Z = a + ive^{i(\mathrm{sgn} v)\varphi_0}, a > 0\}$, яка складається із двох прямих на площині, що виходять з точки $(a,0)$ під кутом φ_0 з уявною віссю при $v \ge 0$ і $(-\varphi_0)$ при $v \le 0$.

Якщо $z = |z|e^{i\psi}$, $z \in C_a$, $\cos\psi = \frac{\mathrm{Re} z}{|z|}$, то

$$\cos(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}) = -\sin\varphi_0 \le \cos\psi =$$

$$= \frac{\mathrm{Re} z = a - |v|\sin\varphi_0}{\sqrt{(a - v\sin\varphi_0)^2 + v^2\cos^2\varphi_0}} \le 1, \qquad (19)$$

тобто $0 \le \psi(v) \le \varphi_0 + \dfrac{\pi}{2}$, $v \in (0,\infty)$; $\cos\psi(0) = 1 + \cos\psi(\infty) = \cos(\dfrac{\pi}{2} + \varphi_0) < 0$, $a\cos\varphi_0 \le |z(v)| \le \sqrt{v^2 + a^2}$.

У формулі (16) інтеграл по контуру Бромвіча $(a - i\infty; a + i\infty)$ можна замінити на контур C_a. Справді, нехай $z = z_1 + iz_2$. Тоді функція $f(z)$ в інтегралі внаслідок оцінки (6) задовольняє нерівність

$$|f_k(z)| \le e^{\mathrm{Re} z}|z|^{\alpha-1}e^{c[\mathrm{Re}(z_1+iz_2)^\alpha]^{\frac{1}{2b}}} \le$$

$$\le C_k e^{z_1 - c|z|^{\frac{\alpha}{2b}}\cos\psi_\alpha|\widehat{x}|}\Psi_k(\widehat{x})|z|^{\alpha-1} \qquad (20)$$

і вона в області Z аналітична. За теоремою Коші (див. рис.)

$$\int_{aA} f(z)dz + \int_{AB} f(z)dz + \int_{C_a \simeq Ba} f(z)dz = 0.$$

Для точок $z \in C_a$ $\cos\alpha\psi \ge \cos\alpha\left(\dfrac{\pi}{2} + \varphi_0\right) = \gamma > 0$, якщо $0 < \varphi_0 < \left(\dfrac{1}{\alpha} - 1\right)\dfrac{\pi}{2}$. Тому $\lim\limits_{z_2\to\infty} f_k(z_1 + iz_2) = 0$, $z_1 \in (-\infty, a]$, $\widehat{x} \ne 0$

$$\lim_{z_2\to\infty}\int_{AB} f_k(z_1 + iz_2)dz_1 =$$

$$= \lim_{z_2\to\infty}\int_{-\infty}^{a} f_k(z_1 + iz_2)dz_1 = 0.$$

Отже, знаходимо, що

$$\lim_{z_2\to\infty}\int_{aA} f_k(z_1 + iz_2)dz_1 = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(z)dz =$$

$$= \int_{Ca^*} f(z)dz.$$

Тепер оцінимо похідні $\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x)$. Згідно з формулою (16)

$$\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x) = 2\pi i \int_{C_a} f_k(z,t,x)dz =$$

$$= \frac{t^{-\alpha}}{2\pi i}\int\limits_0^\infty f_k(z(v),t,x)dv.$$

Враховуючи нерівності $\mathrm{Re} z^\alpha \geq \gamma > 0$, (19), (20), будемо мати при $|\widehat{x}|<1$

$$|\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x)| \leq C_k t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty e^{a-v\sin\varphi_0-c(a\cos\varphi_0)^{\frac{\alpha}{2b}}\gamma|\widehat{x}|}(a\cos\varphi_0)^{\alpha-1}dv\times$$

$$\times\Psi_k(\widehat{x}) \leq C_k(a)t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}}\Psi_{n+|k|-2b}(\widehat{x}). \quad (21)$$

Якщо $|\widehat{x}|\geq 1$, то в інтегралі $\mathfrak{D}_x^k G_1$ по контуру C_a виконаємо заміну $z=|\widehat{x}|^y\xi$. Отримаємо

$$\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_a|\widehat{x}|^y} e^{\xi|\widehat{x}|^y}\mathfrak{D}_x^k G_1(t,\widehat{x}^y\xi,x)|\xi|^{-1}d\xi|\widehat{x}|^{y\alpha}t^{-\alpha}.$$

Знову з допомогою тих же нерівностей знаходимо

$$|\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x)| \leq C_k t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}}\Psi_{n+|k|-2b}(\widehat{x})\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty e^{(a-v\sin\varphi_0)|\widehat{x}|^y-c_2 a^{\frac{\alpha}{2b}}\gamma|\widehat{x}||\widehat{x}|^y\frac{\alpha}{2b}}dv|\widehat{x}|^{y\alpha}.$$

Оскільки $q\dfrac{\alpha}{2b}+1=\dfrac{2b}{2b-\alpha}\cdot\dfrac{\alpha}{2b}+1=\dfrac{2b}{2b-\alpha}=q$ і при досить малому $a: a-c_2a^{\frac{\alpha}{2b}}=-c_3$, $c_3>0$, то для $|\widehat{x}|\geq 1$ справджується нерівність

$$|\mathfrak{D}_x^k G_1(t,x)| \leq C_k\Psi_{n+|k|-2b}(\widehat{x})\times$$

$$\times t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}}|\widehat{x}|^{y\alpha}e^{-c_3|\widehat{x}|^{y_0}}\int\limits_0^\infty e^{-v\sin\varphi_0}dv \leq$$

$$\leq C_k\Psi_{n+|k|-2b}(\widehat{x})e^{-c_4|\widehat{x}|^q}t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}}. \quad (22)$$

Знаходимо ще похідну $\mathfrak{D}_t G_1$ із (16):

$$\mathfrak{D}_t G_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}p^{\alpha-1}\Phi_\alpha(p,x)dp.$$

Якщо виконати заміну $p=zt^{-1}$, а в інтегралі $\Phi_\alpha(zt^{-1},x)$ ввести заміну $\tau=\beta t^\alpha$, то отримаємо

$$\mathfrak{D}_t G_1(t,x) = \frac{1}{2\pi i}t^{-1}\int\limits_{at-i\infty}^{at+i\infty} e^z z^\alpha\Phi_\alpha(t^{-1}z,x)dz =$$

$$= \frac{t^{-1}}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}dz\int\limits_0^\infty e^{-\beta z^\alpha+z}z^\alpha G_0(\beta t^\alpha z,x)d\beta.$$

Внаслідок переходу в інтегралі по z на контур інтегрування C_a і повторенням проведених оцінок будемо мати

$$|\mathfrak{D}_t G_1(t,x)| \leq ct^{-\frac{\alpha n+2b}{2b}}\Psi_{n-2b}(\widehat{x})e^{-c|\widehat{x}|^{y_0}}.$$

Звідси для $|x|<t^{\frac{\alpha}{2b}}$

$$|\mathfrak{D}_t G_1| \leq$$

$$\leq e^{-|\widehat{x}|^{y_0}}\begin{cases} t^{-\frac{\alpha n+2b}{2b}},\ n<2b, \\ t^{-1-\alpha}|x|^{-n+2b},\ n>2b, \\ t^{-|1+\alpha|}\left[\ln\dfrac{|x|}{t^{\frac{\alpha}{2b}}}+1\right], n=2b, \end{cases} \quad (23)$$

а при $|x|>t^{\frac{\alpha}{2b}}$ отримуємо $|\mathfrak{D}_t G_1(t,x)| \leq ce^{-|\widehat{x}|^y}$.

Ще оцінимо дробову похідну $\mathfrak{D}_t^\alpha G_1(t,x)$ і порівняємо з $\mathfrak{D}_t G_1$. Функція $G_1(t,x)$ при $(t,x)\neq 0$ задовольняє рівняння

$$\mathfrak{D}_t^\alpha G_1(t,x) = \sum_{|k|\leq 2b} A_k\mathfrak{D}^k G_1(t,x).$$

Згідно з нерівністю (22) маємо, що

$$|\mathfrak{D}_t^\alpha G_1(t,x)| \leq C|\mathfrak{D}_x^{2b}G_1(t,x)| \leq$$

$$\leq C\Psi_n(\widehat{x})t^{-\alpha\frac{n+2b}{2b}}e^{-c|\widehat{x}|^{y_0}}.$$

Тому,

$$|\mathfrak{D}_t^\alpha G_1(t,x)| \leq$$

$$\leq c\begin{cases} t^{-\alpha}|x|^{-n},\ |x|<t^{\frac{\alpha}{2b}}, \\ t^{-\alpha\frac{n+2b}{2b}}e^{-c|\widehat{x}|^{y_0}},\ |x|>t^{\frac{\alpha}{2b}}. \end{cases} \quad (24)$$

Властивості функції Гріна

Властивість 1. *Функція $G_1(t,x)$ має таку властивість*

$$I_1 = \int\limits_{E_n} G_1(t,x-\xi)d\xi = E_\alpha(A(0)t^\alpha) =$$

$$= E_\alpha(A_0 t^\alpha). \qquad (25)$$

Зокрема, якщо в рівнянні (1) $A_0 = 0$, *то* $E_\alpha(0) = 1$ *і тому*

$$\int\limits_{E_n} G_1(t, x-\xi)d\xi = 1.$$

Доведення. Згідно з формулою (15)

$$I_1 = \int\limits_{E_n} G_1(t, x-\xi)d\xi =$$

$$= \int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n} e^{i\sigma(x-\xi)} E_\alpha(A(i\sigma)t^\alpha)d\sigma d\xi.$$

Після заміни порядку інтегрування за властивістю $\delta(x)$–функції отримаємо

$$I_1 = \int\limits_{E_n} E_\alpha(A(i\sigma)t^\alpha)\int\limits_{E_n} e^{i\sigma(x-\xi)}d\sigma =$$

$$= \int\limits_{E_n} E_\alpha(A(i\sigma)t^\alpha)\delta(\sigma)d\sigma =$$

$$= E_\alpha(A(0)t^\alpha) = E_\alpha(A_0 t^\alpha).$$

Аналогічно доводиться таке твердження.

Властивість 2. *Для компоненти* $G_2(t,x)$ *правильна рівність*

$$I_2(t) = \int\limits_{E_n} G_2(t, x-\xi)d\xi =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}, \text{ якщо } A_0 = 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1} + o(t^{\alpha-1}), \text{ якщо } A_0 \neq 0, t \to 0. \end{cases}$$

§2. Задача Коші для рівнянь зі змінними коефіцієнтами

1. Властивості об'ємного потенціала

Розглянемо рівняння з коефіцієнтами, які залежать від параметра $y \in E_n$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|\le 2b} A_k(y)\mathfrak{D}^k u.$$

Якщо $A_k \in C^{(\omega)}(E_n)$, то для приросту функції Гріна правильна нерівність [5]

$$|\Delta_y \mathfrak{D}_x^k G_0(t, x-\xi; y)| \le$$

$$\le C_k\omega_k(|\Delta y|)(t-\tau)^{-\frac{n+|k|}{2b}} e^{-c\left(\frac{|x-\xi|}{t^{\frac{1}{2b}}}\right)^{q_0}}.$$

Тут $\omega(\eta)$ – модуль неперервності $A_k(y)$, який надалі задовольняє умову Діні

$$F(\eta) = \int\limits_0^\eta \omega(t)t^{-1}dt < \infty.$$

Компоненти функції Гріна $G_1(t,x,\eta)$, $G_2(t,x,\eta)$, які визначаються формулами (10), наприклад

$$G_1(t, x-\xi; y) = \frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}p^{\alpha-1}\int\limits_0^\infty e^{-p^\alpha\tau}G_0(\tau, x-\xi; y)d\tau \qquad (26)$$

також по параметру y задовольнять відповідні нерівності (11) – (13), (23)

$$|\Delta_y \mathfrak{D}_x^k G_1(t, x-\xi; y)| \le C_k\omega(|\Delta y|)\times$$

$$\times e^{-c\rho_0(\widehat{x-\xi})}t^{-\alpha\frac{n+|k|}{2b}}\Psi_{n+|k|-2b}(\widehat{x-\xi}).$$

$$|\Delta_y \mathfrak{D}_t G_1(t, x-\xi; y)| \le C_k\omega(|\Delta y|)\times \qquad (27)$$

$$\times t^{-\frac{\alpha n+2b}{2b}}e^{-c\rho_0(\widehat{x-\xi})}\Psi_{n-2b}(\widehat{x-\xi}).$$

$$|\Delta_y \mathfrak{D}_x^k G_2(t, x-\xi; y)| \le \omega(\Delta y)\times$$

$$\times t^{-1+\alpha+\alpha\frac{n+|k|}{2b}}\Psi_{n+|k|-2b}(x-\xi)e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q}.$$

Далі розглянемо об'ємний потенціал

$$V(t,x) = \int\limits_0^t d\tau\int\limits_{E_n} G_2(t-\tau, x-\xi, \xi)f(\tau,\xi)d\xi.$$

Похідні $\mathfrak{D}_x^{2b}V$ знаходяться за формулою

$$\mathfrak{D}_x^{2b}V(t,x) = \int\limits_0^t d\tau\int\limits_{E_n}\mathfrak{D}_x^{2b}G_2(t-\tau, x-\xi, \xi)\times$$

$$\times[f(\tau,\xi) - f(\tau,x)]d\xi + \int\limits_0^t d\tau\times$$

$$\times \int\limits_{E_n} \left[\mathfrak{D}_x^{2b} G_2(t-\tau, x-\xi, \xi) - \right.$$

$$\left. -\mathfrak{D}_x^{-2b} G_2(t-\tau, x-\xi, x)\right] d\xi f(\tau, x) +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} \mathfrak{D}_x^{-2b} G_2(t-\tau, x-\xi, x) d\xi f(\tau, x) \equiv$$

$$\equiv I_1 + I_2 + I_3 f. \qquad (28)$$

Інтеграли I_1, I_2 оцінюються однаково з використанням умови Діні функції f по x і цієї умови для $G_2(t, \sigma, x-\xi, x)$ по третьому аргументу. Так для I_1 знаходимо

$$|I_1| \leq c \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int\limits_{E_n} e^{-c\left(\frac{|x-y|}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}\right)^q} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\alpha\frac{n+2b}{2b}} \Psi_n(\widehat{x-y}) \omega_f(|x-y|) dy |f|_\omega =$$

$$= c \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int\limits_{|x-y| \leq (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}} e^{-c|\widehat{x-y}|^q} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\alpha} |x-y|^{-n} \omega_f(|x-y|) dy |f|_\omega +$$

$$+ c \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int\limits_{|x-y| > (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}} e^{-c|\widehat{x-y}|^q} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\alpha\frac{n+2b}{2b}} \omega_f(|x-y|) dy |f|_\omega.$$

У інтегралі першого доданку перейдемо до сферичної системи координат, а в другому доданку ще використаєм властивість модуля неперервності: $\omega(t)t^{-1} < 2\omega(\tau)\tau^{-1}$ для $0 < \tau < t$. Будемо мати нерівність

$$|I_1| \leq c \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)} \int\limits_0^{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}} \omega_f(\rho) \rho^{-1} d\rho |f|_\omega +$$

$$+ c|f|_\omega \int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int\limits_{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}^{\infty} e^{-c\left(\frac{\rho}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}\right)^q} \rho^{n-1} \times$$

$$\times \omega_f((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}})(t-\tau)^{-\frac{\alpha n}{2b}} d\rho.$$

Звідси, покладаючи $\rho = (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}} z$, дістаємо що

$$|I_1| \leq c|f|\omega \int\limits_0^{t^{\frac{\alpha}{2b}}} F_f(\tau)\tau^{-1} d\tau + F_f(t^{\frac{\alpha}{2b}}) \equiv$$

$$\equiv c|f|\omega \Phi_f(t^{\frac{\alpha}{2b}}).$$

Така ж нерівність справджується і для I_2 тільки з модулем неперервності коефіцієнтів рівняння.

Інтеграл I_3 дорівнює нулеві за властивістю функції G_2. Отже, остаточно

$$|\mathfrak{D}_x^{2b} V(t,x)| \leq c_0 |f|_\omega [F_k[t^{\frac{\alpha}{2b}}] + \Phi_f[t^{\frac{\alpha}{2b}}]]. \qquad (29)$$

Тепер знайдемо дробову похідну $\mathfrak{D}_t^\alpha V(t,x)$ та оцінимо її вираз. Згідно з визначенням $\mathfrak{D}_t^\alpha V(t,x) = \mathfrak{D}_t I_t^{1-\alpha} V(t,x)$. Позначимо $I_t^{1-\alpha} V(t,x) \equiv W(t,x)$ і виразимо W через функцію G_1, враховуючи, що $G_2(t, x-\xi, \xi) = \mathfrak{D}_t^{1-\alpha} G_1(t, x-\xi, \xi)$. Очевидно, маємо

$$W(t,x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \int\limits_0^\tau d\beta \times$$

$$\times \int\limits_{E_n} \mathfrak{D}_\tau^{1-\alpha} G_1(\tau-\beta, x-\xi, \xi) f(\beta, \xi) d\xi.$$

Змінимо порядок інтегрування, отримаємо

$$W(t,x) = \int\limits_0^t d\beta \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right) \int\limits_\beta^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \times$$

$$\times \int\limits_{E_n} \mathfrak{D}_\tau^{1-\alpha} G_1(\tau-\beta, x-\xi, \xi) f(\beta, \xi) d\xi.$$

Оскільки $I_t^{1-\alpha}(\mathfrak{D}_t^{1-\alpha} f) = f$, то

$$W(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{E_n} G_1(\tau-\tau, x-\xi, \xi) f(\tau, \xi) d\xi. \qquad (30)$$

Отже, $\mathfrak{D}_t^\alpha V(t,x) = \mathfrak{D}_t W$. Але $\mathfrak{D}_t W$ знаходиться за формулою, яка аналогічна в [2]. Тому отримуємо, що

$$\mathfrak{D}_t^\alpha V(t,x) = \int\limits_{E_n} G_1(t-\tau, x-\xi, \xi) f(\tau,\xi) d\xi|_{\tau=t} +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} \frac{\partial}{\partial t} G_1(t-\tau, x-\xi, \xi) f(\tau,\xi) d\xi =$$

$$= f(t,x) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} \frac{\partial G}{\partial t} [f(\tau,\xi) - f(\tau,x)] d\xi +$$

$$+ f(t,x) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} \left[\frac{\partial}{\partial t} G_1(t-\tau, x-\xi, \xi) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial t} G_1(t-\tau, x-\xi, x)\right] d\xi f(\tau,x) +$$

$$+ \int\limits_0^t f \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{E_n} G_1(t-\tau, x-\xi, x) d\xi =$$

$$= f + H_1 + H_2 + H_3.$$

Інтеграли H_1 і H_2 оцінюються однаково з використанням гельдеровості $f(t,x)$ і G_1 по третьому аргументу та оцінки (27):

$$|H_1| \le c|f|_\omega \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q} (t-\tau)^{-\frac{n\alpha+2b}{2b}} \times$$

$$\times \omega_f(|x-\xi|) \Psi_{n-2b}(\widehat{x-\xi}) d\xi = c|f|_\omega \int\limits_0^t d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{|x-\xi| \le (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}} e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q} (t-\tau)^{-\frac{n\alpha+2b}{2b}} \omega_f(|x-\xi|) \times$$

$$\times \Psi_{n-2b}(\widehat{x-\xi}) d\xi + c|f|_\omega \int\limits_0^t d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{|x-\xi| \ge (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}} e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q} (t-\tau)^{-\frac{n\alpha+2b}{2b}} \times$$

$$\times \omega_f(|x-\xi|) \Psi_{n-2b}(\widehat{x-\xi}) d\xi = H_1^{(1)} + H_1^{(2)}.$$

Для $H_1^{(1)}$ внаслідок переходу до сферичної системи координат отримуємо нерівність

$$H_1^{(1)} \le c|f|_\omega \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}} \frac{\omega\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right)}{t-\tau} \times$$

$$\times \frac{e^{-\left(\frac{\rho}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}\right)^q} p^{n-1}}{pn-2b} dp = c|f|_\omega F(t^{\frac{\alpha}{2b}}).$$

Інтеграл $H_1^{(2)}$ оцінюється аналогічно, але при цьому використовується властивість модуля неперервності

$$H_1^{(2)} \le c|f|_\omega \int\limits_0^t \frac{\omega((t-\tau)^\alpha)}{t-\tau} d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}^\infty e^{-\left(\frac{\rho}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}\right)^q} \rho^n (t-\tau)^{-\frac{n\alpha+\alpha}{2b}} d\rho \le$$

$$\le c|f|_\omega F(t^{\frac{\alpha}{2b}}).$$

Для H_3 правильна нерівність $|H_3| \le c|f|_c$, бо $\int\limits_{E_n} G_1(t, x-\xi, x) d\xi$ за властивістю 1 має обмежену похідну по t. Отже, отримуємо нерівність

$$|\mathfrak{D}_t^\alpha V(t,x)| \le$$

$$\le |f|_c + C_0 \left[F_f(t^{\frac{\alpha}{2b}}) + F_k(t^{\frac{\alpha}{2b}})\right] |f|_\omega. \quad (31)$$

Теорема 2 (про об'ємний потенціал). *Нехай коефіцієнти A_k рівняння належать класу $C^{(\omega_k)}(E_n)$, а щільність потенціала $V(t,x)$ $f \in C^{(\omega_f)}(E_{n^+})$, причому модулі $\omega_k(t)$ і $\omega_f(t)$ задовольняють умови $\int\limits_0^t \omega_k(\tau)\tau^{-1} d\tau$, $\Phi_f(t) = \int\limits_0^t F_t(\tau)\tau^{-1} d\tau < \infty$, то $V(t,x)$ має неперервні похідні $\mathfrak{D}_x^k V(t,x)$, $|k| \le 2b$, $\mathfrak{D}_t^\alpha V(t,x)$, які задовільняють нерівності* (29), (31),

$$|\mathfrak{D}_x^k V(t,x)| \le C_k |f|_c t^{\frac{2b-|k|}{2b}\alpha}), \quad |k| < 2b.$$

2. Зведення задачі Коші до інтегрального рівняння, побудова резольвенти

У шарі $\Pi = (0, T) \times E_n$ розглянемо задачу Коші для модифікованого рівняння

$$\mathfrak{D}_t^{*\alpha} u \equiv \mathfrak{D}_t^{\alpha} u - \frac{u(0,x)}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}} =$$

$$= \sum_{|k| \le 2b} A_k(x) \mathfrak{D}_k u + f(t,x), \qquad (32)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \qquad (33)$$

Позначимо через $\Big\{G_1^{(0)}(t, x-\xi, y),$ $G_2^{(0)}(t, x-\xi, y)\Big\}$ функцію Гріна для рівняння із "замороженими"коефіцієнтами в групі старших членів

$$\mathfrak{D}_t^{*\alpha} u = \sum_{|k|=2b} A_k(y) \mathfrak{D}^k u + f(t,x), \qquad (34)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x).$$

Розв'язок задачі (32), (33) відшукуємо у вигляді суми потенціалів

$$u(t,x) = \int_{E_n} G_1^{(0)}(t, x-\xi, \xi) \varphi(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{E_n} G_2^{(0)}(t-\tau, x-\xi, \xi) \mu(\tau, \xi) d\xi, \quad (35)$$

де апріорі $\mu(\tau, \xi)$ – шукана функція, яка при $(t,x) \ne 0$ задовольняє нерівномірну умову Діні. Функція $G_1^{(0)}(t, x-\xi, y)$ задовольняє однорідне рівняння (32), а $G_2^{(0)}(t, x-\xi, y)$ – рівняння $\mathfrak{D}_t^{\alpha} G_2^{(0)}(t, x-\xi, y) = \sum\limits_{|k|=2b} A_k(y) \mathfrak{D}_x^k G_2^{(0)}$.

Якщо до функції $u(t,x)$ із (35) застосувати оператор $\mathfrak{D}_t^{*\alpha} - \sum\limits_{|k| \le 2b} A_k \mathfrak{D}_x^k$ і задовольнити рівняння (32), то на основі формул для похідних потенціалів (28), (29) для $\mu(t,x)$ отримуємо інтегральне рівняння

$$\mu(t,x) = \mathcal{F}(t,x) +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int K(t, \tau, x, \xi) \mu(\tau, \xi) d\xi, \qquad (36)$$

де

$$\mathcal{F}(t,x) = f(t,x) + \frac{\varphi(x)}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}} +$$

$$+ \int_{E_n} \sum_{|k| \le 2b} [A_k(x) - A_k(\xi) \delta_{2b|k|}] \mathfrak{D}_x^k \times$$

$$\times G_1^{(0)}(t, x-\xi, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \qquad (37)$$

$\delta_{2b|k|} = 1$, якщо $|k| = 2b$; $\delta_{2b|k|} = 0$, якщо $|k| < 2b$.

$$|\mathcal{F}(t,x)| \le |f| + C|\varphi|_c t^{-\alpha} \int_{E_n} e^{-\rho |\widehat{x-\xi}|^q} \times$$

$$\times \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} d\xi \le c \left(|f|_c + \frac{|\varphi|}{t^{\alpha}} \right)$$

$$K(t-\tau, x, \xi) \equiv \sum_{|k|=2b} [A_k(x) - A_k(\xi)] \mathfrak{D}_x^k \times$$

$$\times G_2^{(0)}(t-\tau, x-\xi, \xi) + \sum_{|k|<2b} A_k(x) \mathfrak{D}^k G_2^{(0)}. \quad (38)$$

Згідно з нерівностями (27) для $G_2^{(0)}$ і умовою $A_k \in c^{(\omega)}$ маємо

$$|K(t-\tau, x, \xi)| \le$$

$$\le C\omega(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n}|t-\tau|^{-1} e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q}, \quad (39)$$

де $\widehat{x-\xi} = (x-\xi)/(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}$.

При побудові резольвенти для ядра K скористаємося такою лемою.

Лема. *Для об'ємного інтеграла*

$$I_t(t, \tau, x, \xi) = \int_{\tau}^{t} \frac{d\beta}{t-\beta} \int_{E_n} e^{-\varepsilon |\widehat{x-y}|^q} \times$$

$$\times \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|} \frac{\omega(|y-\xi|^n)}{|y-\xi|^n} dy$$

справджується нерівність

$$I_t(t, \tau, x, \xi) \le C \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} \Phi\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right),$$

$$C = C(\varepsilon, n), \ \varepsilon > 0.$$

Доведення. Проведемо відрізок, який з'єднує точки x і ξ, і через його середину проведемо перпендикулярну площину. Через E_x позначимо ту частину простору, яка містить точку x, а через E_ξ – точку ξ. Якщо $y \in E_x$, то очевидно, що $|y-\xi| \geq \dfrac{|x-\xi|}{2}$, якщо $y \in E_\xi$, то $|x-y| \geq \dfrac{|x-\xi|}{2}$. Тепер інтеграл I запишемо у вигляді

$$I = \int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{t-\beta} \int\limits_{E_x} e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy +$$

$$+ \int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{t-\beta} \int\limits_{E_\xi} e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy =$$

$$= I^{(x)} + I^{(\xi)}.$$

За властивістю монотонності модуля неперервності $\omega(h)$ маємо, що

$$I^{(x)} \leq 2^n \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} \int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{t-\beta} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{|x-y|\leq(t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}} e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|x-y|\geq(t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}} e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} dy \right).$$

Внаслідок переходу до сферичної системи координат з центром в точці x звідси отримуємо

$$I^{(x)} \leq 2^n S_n \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} \left(\int\limits_0^{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}} \frac{dh}{h} \int\limits_0^h \frac{\omega(\rho)}{\rho} d\rho + \right.$$

$$\left. +2 \int\limits_\tau^t \frac{\omega([t-\beta]^{\frac{\alpha}{2b}})}{[t-\beta]^{\frac{\alpha}{2b}+1}} \int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon\left(\frac{\rho}{(t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}}\right)^q} d\rho \right).$$

Покладемо $\rho = (t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}\eta$, дістаємо нерівність

$$I^{(x)} \leq C_n \omega(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n} \times$$

$$\times \left[\Phi((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}) + F((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}) \right].$$

В інтегралі $I^{(\xi)}$ очевидно $|x-y| \geq \dfrac{1}{2}|x-\xi|$, тому

$$I^{(\xi)} \leq 2^n \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} \left(\int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{t-\beta} \times \right.$$

$$\times \int\limits_{|y-\xi|\leq(t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}} e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy +$$

$$\left. + \int\limits_{|y-\xi|\geq(t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}} e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy \right).$$

Звітси знаходимо

$$I^{(\xi)} \leq 2^n \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} \left(\int\limits_0^{(t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}} \frac{F(n)}{n} dn + \right.$$

$$\left. + \int\limits_\tau^t \frac{\omega(|t-\beta|^{\frac{\alpha}{2b}})}{|t-\beta|^{\frac{n\alpha}{2b}}} \int e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} dy d\beta \right).$$

Якщо в останньому інтегралі виконати заміну $x-y = (t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}} z$, то для $I(\xi)$ отримуємо потрібну нерівність, таку як для $I^{(x)}$.

Примітка. Аналогічно доводиться нерівність

$$I_\tau(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{\beta-\tau} \int\limits_{E_n} e^{-\varepsilon|\widehat{y-\xi}|^q} \times$$

$$\times \omega(|x-y|)|x-y|^{-n} \omega(|y-\xi|)|y-\xi|^{-n} dy \leq$$

$$\leq c\omega(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n} \Phi\left((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right).$$

Тепер оцінимо повторні ядра K_m для $K = K_1$:

$$K_m(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{E_n} K(t,\beta,x,y) \times$$

$$\times K_{m-1}(\beta,\tau,y,\xi), \quad (m = 2,3,...). \qquad (40)$$

Користуючись нерівністю для K_1 знаходимо

$$|K_2(t,\tau,x,\xi)| \leq C_1^2 \int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{(t-\beta)(\beta-\tau)} \times$$

$$\times \int\limits_{E_n} e^{-c|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} e^{-c|\widehat{y-\xi}|^q} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy.$$

Беручи до уваги нерівність $|\widehat{x-y}|^q + |\widehat{y-\xi}|^q \geq |\widehat{x-\xi}|^q$, отримуємо

$$|K_2| \leq C_1^2 (t-\tau)^{-1} e^{-(c-\varepsilon)|x-\xi|^q} \left[\int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{\beta-\tau} \times \right.$$

$$\times \int\limits_{E_n} e^{-\varepsilon|\widehat{x-\xi}|^q} \frac{\omega(|x-y|)\omega(|y-\xi|)}{|x-y|^n|y-\xi|^n} dy + \int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{t-\beta}$$

$$\left. \times \int\limits_{E_n} e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|x-y|)\omega(|y-\xi|)}{|x-y|^n|y-\xi|^n} dy \right] \equiv$$

$$\equiv c_1^2 \frac{\omega(|x-y|)}{(t-\tau)|x-\xi|^n} [I_\tau + I_t] \times$$

$$\times \exp\{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi}|^q\}, \quad 0 < \varepsilon < c.$$

Звітси з допомогою леми приходимо до нерівності

$$|K_2(t,\tau,x,\xi)| \leq C_1^2 C_n \Phi\left[(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right] \times$$

$$\times \frac{\omega(|x-\xi|)}{(t-\tau)|x-\xi|^n} e^{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi}|^q}. \qquad (41)$$

Для наступного ядра K_3 з врахуванням оцінок (40), (41) маємо, що

$$|K_3(t,\tau,x,\xi)| \leq C_1^3 C_n \int\limits_\tau^t \frac{\Phi((\beta-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}})}{(\beta-\tau)(t-\beta)} \times$$

$$\times \int\limits_{E_n} e^{-c|\widehat{x-y}|^q-(c-\varepsilon)|y-\xi|^q} \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^n} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy \leq$$

$$\leq C_1^3 C_n e^{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi}|^q} (t-\tau)^{-1} \times$$

$$\times \int\limits_\tau^t \left(\frac{1}{\beta-\tau} + \frac{1}{t-\beta} \right) \Phi((\beta-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}) \times$$

$$\times \int e^{-\varepsilon|\widehat{x-y}|^q} \frac{\omega(|y-x|)}{|x-y|^n} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^n} dy.$$

Звідси випливає нерівність

$$|K_3| \leq C_1^3 C_n^2 e^{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi}|^q} (t-\tau)^{-1} \times$$

$$\times \int\limits_\tau^t \left[\frac{\Phi((\beta-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}})}{\beta-\tau} \cdot F((t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}}) + \right.$$

$$\left. + \Phi((\beta-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}) \cdot \frac{F((t-\beta)^{\frac{\alpha}{2b}})}{t-\beta} \right] d\beta \times$$

$$\times \omega(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n}.$$

Остаточно дістаємо нерівність

$$|K_3(t,\tau,x,\xi)| \leq C_1^3 C_n^2 e^{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi}|^q} (t-\tau)^{-1} \times$$

$$\times \Phi((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}) \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} \Psi(t-\tau), \qquad (42)$$

де $\Psi(t) \equiv \int\limits_0^{t^{\frac{\alpha}{2b}}} \Phi(\tau)\tau^{-1} d\tau + \Phi(t^{\frac{\alpha}{2b}}) \leq c_0 \int\limits_0^{t^{\frac{\alpha}{2b}}} \Phi(\tau)\tau^{-1} d\tau$, $c_0 > 0$. По індукції встановлюються оцінки

$$|K_m(t,\tau,x,\xi)| \leq C_1^m C_n^{m-1} (t-\tau)^{-1} \Phi((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}) \times$$

$$\times \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n} e^{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi}|^q} \Psi^{m-1}(t-\tau), \qquad (43)$$

$$(m = 2, 3, \ldots).$$

Сума ряду Неймана – резольвента задовольняє нерівність

$$|R(t,\tau,x,\xi)| \leq C_1 \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n(t-\tau)} e^{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi}|^q} \times$$

$$\times \left[\sum_{m=1}^\infty (C_1 C_n \Psi)^m \Phi((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}) + 1 \right].$$

Якщо $C_1 C_n \Psi(t-\tau) < 1$ для $0 < t-\tau \leq T$, то ряд Неймана в області $|x-\xi| \geq \delta > 0$, $0 < t-\tau \leq T$ рівномірно і абсолютно збіжний, при цьому

$$|R(t,\tau,x,\xi)| \leq C(t-\tau)^{-1} \omega(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n} \times$$

$$\times e^{-(c-\varepsilon)|\widehat{x-\xi}|^q}. \qquad (44)$$

3. Оцінка розв'язку інтегрального рівняння

Розв'язок рівняння (36) визначається за допомогою резольвенти формулою

$$\mu(t,x) = \mathcal{F}(t,x) + \int_0^t d\tau \times$$

$$\times \int R(t,\tau,x,\xi)\mathcal{F}(\tau,\xi)d\xi, \qquad (45)$$

Користуючись нерівністю (27) для $G_1^0(t,x-\xi,\xi)$ і умовно, що $\varphi \in C^{(\omega_\varphi)}$, $f \in C^{\omega_\tau}(Q)$ отримуємо

$$|\mathcal{F}(t,x)| \leq |f| + \frac{|\varphi|_c}{t^\alpha} + C\int_{E_n} \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n t^\alpha}\times$$

$$\times e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q}|\varphi|_c d\xi \leq C\left(|f|_c + \frac{|\varphi|_c}{t^\alpha}\right). \qquad (46)$$

Тому для другого доданка в (45) правильна оцінка

$$|R\times\mathcal{F}| \leq C\int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n}e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q}\times$$

$$\times(|f|_c + \tau^{-\alpha}|\varphi|_c)d\xi \leq C\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)\tau^\alpha}\times$$

$$\times\left[\int_0^{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}} \frac{\omega(\rho)}{\rho}d\rho + \omega(t+\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}\right]\times$$

$$\times(|\varphi|_c + t^\alpha|f|_c)d\tau.$$

Звідси випливає нерівність

$$|R\times\mathcal{F}| \leq C\Phi(t^{\frac{\alpha}{2b}})\left(\frac{|\varphi|_c}{t^\alpha} + |f|_c\right),$$

тобто $\mu(t,x)$ також задовольняє нерівність (46).

Приріст $\Delta_x\mu(t,x)$ оцінимо на основі формули (36). Розглянемо в цій формулі інтегральний доданок, який запишемо у вигляді суми

$$\Delta_x(K\times\mu) = \int_0^{t-\eta} d\tau \int_{|x+h-\tau|\leq 2|h|} [K(t,\tau,x+h,\xi) -$$

$$-K(t,\tau,x,\xi)]\mu(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+\int_0^{t-\eta} d\tau \int_{|x+h-\xi|\geq 2|h|} \Delta_x K(t,\tau,x,\xi)\mu(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+\int_{t-\eta}^t d\tau \int_{E_n} K(t,\tau,x+h,\xi)\mu(\tau,\xi)d\xi -$$

$$-\int_{t-\eta}^t d\tau \int K(t,\tau,x,\xi)\mu(\tau,\xi)d\xi \equiv$$

$$\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \qquad (47)$$

де $\eta = |h|^{\frac{2b}{\alpha}}$, $h = \Delta x$, $|\Delta x| < \frac{1}{2}t^{\frac{\alpha}{2b}}$, $0 < \eta < \frac{t}{4}$.

В інтегралі I_1 доданки оцінимо по модулю за нерівностями (39), (46). Будемо мати

$$|I_1| \leq c\int_0^{t-\eta} \frac{d\tau}{(t-\tau)\tau^\alpha} \int_{|x+h-\xi|\geq 2|h|} \Big[e^{-c|\widehat{x+h-\xi}|^q}\times$$

$$\times\omega(|x+h-\xi|)|x+h-\xi|^{-n} +$$

$$+e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q}\omega(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n}\Big]d\xi\times|\varphi|_c + t^\alpha|f|_c.$$

Скористаємось властивістю аддитивності модуля $\omega(t+\tau) \leq \omega(t) + \omega(\tau)$ і нерівністю

$$\int_{|x+h-\xi|\leq 2h} \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^n}d\xi \leq$$

$$\leq \int_{|x-\xi|\leq 3h} \omega(|x-\xi|)|x-\xi|^{-n}d\xi \leq$$

$$\leq S_n\int_0^{3|h|} \frac{\omega(\rho)}{\rho}d\rho \leq 3S_n F(|h|).$$

Тоді отримуємо, беручи до уваги, що $\eta < |\Delta x|^{\frac{2b}{\alpha}} < 2^{-\frac{2b}{\alpha}}t$,

$$|I_1| \leq CF(|h|)\left[\int_0^{\frac{t}{2}} \frac{d\tau}{(t-\tau)\tau^\alpha} + \int_{\frac{t}{2}}^{t-\eta} \frac{d\tau}{(t-\tau)\tau^\alpha}\right]\times$$

$$\times(|\varphi|_c + t^\alpha|f|_c) \leq CF(|h|)\Big[\frac{2}{t}t^{1-\alpha} +$$

$$+\frac{2^\alpha}{t^\alpha}\ln\frac{1}{|\Delta x|}\Big](|\varphi|_c+t^\alpha|f|_c).$$

Отже,

$$|I_1|\le C(t^{-\alpha}|\varphi|_c+|f|_c)F(|\Delta x|)\times$$
$$\times\left|\ln\frac{1}{(|\Delta x|)}\right|. \qquad (48)$$

Для оцінки інтеграла I_2 запишемо приріст ядра $K(t,\tau,x,\xi)$ у вигляді

$$\Delta_x K(t,\tau,x,\xi)=\sum_{|k|=2b}\big[\Delta_x A_k(x)\mathfrak{D}_x^k G_2+$$
$$+(A_k(x)-A_k(\xi))\Delta_x\mathfrak{D}_x^k G_2\big]+$$
$$+\sum_{|k|<2b}\big[\Delta_x A_k(x)\mathfrak{D}_x^k G_2+$$
$$+A_k(x)\Delta_x\mathfrak{D}_x^k G_2(t-\tau,x-\xi,\xi)\big].$$

Скористаємось теоремою про середнє значення, нерівностями $|x+h-\xi|>2|h|$ для G_2 і умовою $|\Delta x|\le\frac{1}{2}(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}$. Знаходимо

$$|\Delta_x K(t,\tau,x,\xi)|\le c\omega(|\Delta x|)\times$$
$$\times[|x-\xi|^{-n}e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q}+e^{-c|\widehat{x+h-\xi}|^q}|x+h-\xi|^{-n}]\times$$
$$\times(t-\tau)^{-1}. \qquad (49)$$

Тому маємо для I_2 оцінку

$$|I_2|\le\omega(h)\int\limits_0^{t-h}\frac{d\tau}{t-\tau}\times$$
$$\times\int\limits_{|x+h-\xi|\ge 2|h|}\Big[|x-\xi|^{-n}e^{-c|\widehat{x-\xi}|^q}+$$
$$+|x+h-\xi|^{-n}e^{-c|\widehat{x+h-\xi}|^q}\Big]d\xi(|\varphi|_c+t^\alpha|f|_c).$$

Якщо $|x+h-\xi|\ge 2h$, то $|x-\xi|\ge h$, а тому отримаємо

$$|I_2|\le(|\varphi|_c+t^\alpha|f|_c)\omega(|\Delta x|)\times$$
$$\times\left[\int\limits_{|h|}^{\infty}\frac{e^{-\widehat{\rho}^q}}{\rho}d\rho+\int\limits_{|2h|}^{\infty}e^{-c\widehat{\rho}}\rho^{-1}d\rho\right]t^{-\alpha}\left|\ln|\Delta x|\right|,$$

тобто

$$|I_2|\le C\omega(|\Delta x|)\ln^2|\Delta x|(t^{-\alpha}|\varphi|_c+|f|_c). \quad (50)$$

Інтеграли I_3 і I_4 оцінюються однаково. За допомогою (39), (46) знаходимо

$$|I_3|\le\int\limits_{t-h}^{t}\frac{d\tau}{t-\tau}\Bigg[\int\limits_{|x+h-\xi|<(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}\omega(|x+h-\xi|)\times$$
$$\times|x+h-\xi|^{-n}e^{-c|\widehat{x+h-\xi}|^q}d\xi+$$
$$+\int\limits_{|x+h-\xi|\ge(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}\omega(|x+h-\xi|)|x+h-\xi|^{-n}\times$$
$$\times e^{-c|\widehat{x+h-\xi}|^q}d\xi\Bigg](|\varphi|_c t^{-\alpha}+|f|_c)\le\int\limits_{t-\eta}^{t}\frac{d\tau}{t-\tau}\times$$
$$\times\left[\int\limits_0^{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}}}\frac{\omega(\rho)}{\rho}d\rho+\omega((t-\tau)^{\frac{\alpha}{2b}})\right](|\varphi|_c t^{-\alpha}+|f|_c).$$

Звідси

$$|I_3|\le\left(\int\limits_0^{|\Delta x|}\frac{\mathcal{F}(\tau)}{\tau}d\tau+F(|\Delta x|)\right)(|\varphi|_c t^{-\alpha}+|f|_c).$$

З нерівності для I_1, I_2, I_3 випливає оцінка

$$|\Delta_x(K\times\mu)|\le C(t^{-\alpha}|\varphi|_c+|f|)\times$$
$$\times\left[F(|\Delta x|)\left|\ln\frac{1}{|\Delta x|}\right|+\omega(|\Delta x|)\ln^2|\Delta x|+\right.$$
$$\left.+\Phi(|\Delta x|)\right] \qquad (51)$$

для $|\Delta x|<t^{\frac{\alpha}{2b}}/2$

Щоб оцінити приріст $\Delta_x\mathcal{F}(t,x)$ у формулі (37) досить інтегральний доданок (позначимо його через $H(t,x)$) зобразити у вигляді суми інтегралів

$$H=\int\limits_{|x+n-\xi|\le 2|h|}\sum[A_k(x+h)-A_k(\xi)\delta_{2bk}]\times$$
$$\times\mathfrak{D}_x^k G_1^{(0)}\varphi d\xi-\int\limits_{|x+n-\xi|\le 2|h|}\sum[A_k(x+h)-$$
$$-A_k(\xi)\delta_{2bk}]\mathfrak{D}_x^k G_1^{(0)}\varphi d\xi+\int\limits_{|x+n-\xi|\ge 2|h|}\sum_{|k|\le 2b}\Delta_x\times$$

$$\times A_k(x)\mathfrak{D}_x^k G_1^{(0)}(t, x-h-\xi, \xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_{|x+n-\xi|\geq 2|h|} \sum_{|k|\leq 2b} [A_k(x) - A_k(\xi)v_{\nu k}]\times$$

$$\times \Delta_x \mathfrak{D}_x^k G_1(t, x-\xi, \xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

Оцінюючи з допомогою нерівності (27) для $G_1^{(0)}$ доданки як відповідні вирази в інтегралах I_1, I_2 для $|\Delta x| \leq |h| < t^{\frac{\alpha}{2b}}/2$ отримаємо

$$|H| \leq Ct^{-\alpha}\int\limits_0^{2|h|} \frac{\omega(\rho)}{\rho}d\rho|\varphi|_c + t^{-\alpha}\omega(|\Delta x|)\times$$

$$\times \left|\ln\frac{1}{|\Delta x|}\right| |\varphi|_c. \tag{52}$$

Якщо тепер порівняти нерівності (51), (52) і врахувати, що функції $F(|h|)\ln\dfrac{1}{|h|}$, $\omega(h)\ln^2|h|$ мають такий порядок при $h \to 0$ як $\Phi(h) = \displaystyle\int\limits_0^h \frac{F|\tau|}{\tau}d\tau = A^2\omega(h)$, то отримуємо остаточну нерівність

$$|\Delta\mu(t,x)| \leq C[\omega_\varphi(|h|) + \omega_f(|h|)+$$

$$+\Phi(|h|)](|\varphi|_\omega t^{-\alpha} + |f|_{\omega_f}). \tag{53}$$

Для приросту резольвенти встановлюється така нерівність

$$|\Delta_x R(t,\tau,x,\xi)| \leq C(t-\tau)^{-1}\omega(|\Delta x|)\times$$

$$\times \left[|x+\Delta x-\xi|^{-n} + |x-\xi|^{-n}\right] e^{-c|\widehat{x^*-\xi}|^q}, \tag{54}$$

де $|\widehat{x^*-\xi}| = \min|x+\Delta x-\xi|, |x-\xi|$.

Теорема 3 (про коректність). *Нехай рівняння* (32) *параболічне і функції, які визначають задачу* (32), (33), *належать класам:* $A_k \in C^{(\omega)}(E_n)$, $f \in C^{(\omega_f)}_{([0,T]\times E_n)}$, $\varphi \in C^{(\omega_\varphi)}_{(E_n)}$. *Модуль неперервності* $\Omega(h) = \omega_\varphi(h) + \omega_t(h) + \Phi(h)$ *задовольняє умову Діні. Тоді розв'язок цієї задачі Коші визначається формулою*

$$u(t,x) = \int\limits_{E_n} Z_1(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^\tau d\tau \int\limits_{E_n} Z_2(t,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi \tag{55}$$

і для нього виконується нерівність

$$|\mathfrak{D}_x^k u(t,x)| \leq C_k(t^{-\alpha}|\varphi|_c + |f|_\omega), \tag{56}$$

де $|k| \leq 2b$, $Z_i(t,\tau,x,\xi) = G_i^{(0)}(t,\tau,x,\xi) + W_i$, $W_2 = G_2 \times \times R$, *(*$i = 1,2$*).*

Зображення (55) виникає, якщо $\mu(t,x)$ із (45) підставити в формулу (35) і виділити в ній ядро обереного оператора задачі (32), (33).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Н.О. Вірченко, В.Я. Рибак. Основи дробового інтегро-диференціювання. – К.: ТОВ "Задруга 2007. – 364 с.

2. С.Д. Эйдельман. Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 444 с.

3. S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Koshubei. Analitic methods in theory of differential and pseudo-differential equation of parabolic type. – Basel: Birdhouses, 2004. – 390 p.

4. А.Н. Кочубей. Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. – 1990. – **24**, №4. – С. 485–492.

5. М.І. Матійчук. Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. – Чернівці: ЧНУ, 2010. –248 с.

6. M. Matiychuk. On the fundamental solution of a parabolic equation with fractional derivates // Матеріали X міжнародної наукової крнференції ім. В. Скоробагатька (25-28 серпня 2015 р., Дрогобич/ІПММ). – Львів, 2015. – С. 101.

7. А.М. Нахушев. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1955. – 301 с.

УДК 517.958

©2016 р. **В.Г. Маценко**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІКИ ВІКОВОЇ СТРУКТУРИ БІОЛОГІЧНИХ ПОПУЛЯЦІЙ З НЕЛІНІЙНИМИ ПРОЦЕСАМИ НАРОДЖУВАННЯ

Розглядається неперервна модель динаміки ізольованих популяцій з нелінійною народжуваністю. Для математичної моделі, що є нелінійною крайовою задачею для рівняння з частинними похідними доведена теорема існування та єдиності розв'язків. Вивчається питання існування та стійкості стаціонарних розподілів вікової структури.

We consider continuous model of the dynamic age structure for an isolation population with nonlinear birth-rate. For a mathematical model, which is a boundary value problem for a first order partial differential equation, we prove the existence and uniqueness theorem. We also study the existence and stability of a stationary distributions for the age structure.

1. Вступ

Особливе місце серед моделей динаміки чисельності біологічних популяцій займають моделі, що враховують неоднорідності особин популяції, зокрема, вікову структуру.

Класична лінійна модель динаміки вікової структури [1] (модель Маккендрика фон Фоерстера) являє собою систему рівнянь з частинними похідними першого порядку, що описують процес вимирання (рівняння виживання) та інтегрального рівняння відновлення, що визначає процес народжування, вигляду

$$\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial x}{\partial t}=-d(\tau)x(\tau,t), t,\tau>0,$$
$$x(0,t)=\int\limits_0^\infty b(\tau)x(\tau,t)d\tau, t>0, \qquad (1)$$
$$x(\tau,t)=\varphi(\tau),\tau\geq 0.$$

Тут $x(\tau,t)$ – вікова щільність особин віку τ в момент часу t, $d(\tau)$, $b(\tau)$ – функції, що описують процеси виживання та народжуваності, відповідно, $\varphi(\tau)$ – початковий віковий розподіл.

Поведінка розв'язків системи (1), як показано в [2], визначається системним параметром

$$P=\int\limits_0^\infty b(\tau)\exp\Big(-\int\limits_0^\tau d(\xi)d\xi\Big)d\tau,$$

який називається біологічним потенціалом.

В залежності саме від значення P маємо три різні поведінки розв'язку $x(\tau,t)$ [2]. При $P>1$ домінують процеси відтворення і $x(\tau,t)\to\infty$ при $t\to\infty$, при $P<1$ $x(\tau,t)\to 0$ при $t\to\infty$ для будь-якого $\tau\in[0,\infty)$. При $P=1$ процеси народжування і виживання перебувають в рівновазі і в системі (1) існує нескінченно багато стаціонарних станів $x_0\exp\Big(-\int\limits_0^\tau d(\xi)d\xi\Big)$, $x_0\in[0,\infty)$ і тільки від початкового значення $\varphi(\tau)$ залежить, який з них реалізується.

В останній час приділяється значна увага нелінійним моделям динаміки вікової структури, оскільки функції народжування та виживання залежать не тільки від віку τ, але й від щільності $x(\tau,t)$ і деяких функціоналів, наприклад, від зваженої чисельності популяції.

Моделі, які враховують нелінійності дозволяють відшукати механізми стабілізації розв'язків до нетривіальних станів рівноваги. Прикладами таких робіт є [3, 4].

Аналітичне дослідження математичних моделей динаміки вікової структури сприяє більш глибокому розумінню закономірностей розвитку біологічних систем та виробленню розумних стратегій раціонального керування наявними біоресурсами.

Метою даної роботи є дослідження моделі динаміки вікової структури біологічних популяцій у випадку, коли функція, що описує процес народжування нелінійно залежить від густини чисельності $x(\tau,t)$, тобто $b=b(\tau,x)$.

2. Формулювання об'єкта дослідження

Модель, що враховує нелінійності в процесах народжування узагальнює (1) і має вигляд

$$\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial x}{\partial t}=-d(\tau)x, t, \tau>0,$$

$$x(0,t)=\int\limits_0^\infty b(\tau,x)x(\tau,t)d\tau, t>0, \qquad (2)$$

$$x(\tau,t)=\varphi(\tau), \tau\geq 0.$$

Тут $b(\tau,x)$ – нелінійна функція народжуваності, що залежить від віку τ і щільності x. Типовий графік цієї залежності наведений на рис. 1.

Рис. 1

Така залежність визначає стимулюючу популяцію при невеликих x, при великих x така функція народжуваності лімітує кількісний ріст популяції, тобто найбільша народжуваність спостерігається при певній віковій щільності в популяції.

Зробимо такі припущення відносно параметрів системи (2):

1) $d(\tau)$ – неперервна на $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+=[0,\infty)$, $d(\infty)=\infty$;

2) $b(\tau,x)$ – неперервна й обмежена на $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, інтегровна по x на $\mathbb{R}^+$;

3) $b'_x(\tau,x)$ – обмежена на $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$;

4) $\varphi(\tau)$ – інтегровна на $\mathbb{R}^+$;

5) $d(\tau)$, $b(\tau,x)$, $\varphi(\tau)\geq 0$, τ, $x\in\mathbb{R}^+$.

3. Існування та єдиність розв'язків задачі (2)

Розв'язок рівняння виживання системи (2) можна подати у вигляді

$$x(\tau,t)=\Omega(t-\tau)\Lambda(\tau), \qquad (3)$$

де $\Lambda(\tau)=\exp\Big(-\int\limits_0^\tau d(\xi)d\xi\Big)$, $\Omega(t)$ – деяка функція, що має ясний біологічний зміст. Дійсно, $\Omega(t)=x(0,t)$ – щільність чисельність новонароджених особин в момент часу t.

Підставивши (3) в рівняння народжуваності системи (2), маємо

$$\Omega(t)=\int\limits_0^\infty b(\tau,\Omega(t-\tau)\Lambda(\tau))\Lambda(\tau)\Omega(t-\tau)d\tau. \qquad (4)$$

при $t=0$ $x(\tau,0)=\varphi(\tau)=\Omega(-\tau)\Lambda(\tau)$. Звідси

$$\Omega(-\tau)=\varphi(\tau)(\Lambda(\tau))^{-1}.$$

Подаючи в (4) $\int\limits_0^\infty=\int\limits_0^t+\int\limits_t^\infty$, отримаємо

$$\Omega(t)=\int\limits_0^t b(\tau,\Omega(t-\tau)\Lambda(\tau))\Lambda(\tau)\Omega(t-\tau)d\tau+Q(t), \qquad (5)$$

де

$$Q(t)=\int\limits_0^\infty b\Big(\tau+t,\varphi(\tau)\frac{\Lambda(\tau+t)}{\Lambda(\tau)}\Big)\times$$

$$\times\varphi(\tau)\frac{\Lambda(\tau+t)}{\Lambda(\tau)}d\tau. \qquad (6)$$

$Q(t)$ є щільністю новонароджених в момент часу t особинами, що складали популяцію в початковий момент часу $t=0$. Інтеграл в (5) дає щільність новонароджених від особин, що народилися за час t.

Рівняння (5) можна переписати у формі

$$\Omega(t)=\int\limits_0^t b(\tau+t,\Omega(\tau)\Lambda(\tau+t))\times$$

$$\times\Lambda(\tau+t)\Omega(\tau)d\tau+Q(t). \qquad (7)$$

Розглянемо простір $H=\{(\tau,x)\,|\,\tau,x\in\mathbb{R}^+\}$. Згідно з умовами 2), 3), 5) отримуємо оцінки

$$b_0=\sup_{\tau,x\in H} b(\tau,x),$$

$$b_1=\sup_{\tau,x\in H}|b'_x(\tau,x)|. \qquad (8)$$

Для всіх $x \geq 0$ із (6), (8) та (3), одержуємо

$$\Omega(t) \leq b_0 \int\limits_0^t \Omega(\tau) d\tau +$$

$$+ b_0 \overline{\Phi}, \overline{\Phi} = \int\limits_0^\infty \varphi(\tau) d\tau.$$

Згідно з лемою Гронуола-Белмана маємо оцінку

$$\Omega(t) \leq b_0 \overline{\Phi} e^{b_0 t}. \tag{9}$$

Доведемо таке твердження.

Теорема. *Якщо виконуються умови 1) – 5), то рівняння* (5) *має єдиний невід'ємний розв'язок для* $t \in [0, T]$, $T > 0$.

Доведення. Введемо до розгляду оператор

$$\Psi(\Omega) = \int\limits_0^t b(\tau + t, \Omega(\tau) \Lambda(\tau + t)) \times$$

$$\times \Lambda(\tau + t) \Omega(\tau) d\tau + \Theta(t).$$

Згідно з умовами 2), 5) оператор Ψ: $C^+(0, T) \to C^+[0, T]$, $T > 0$, де $C^+[0, T]$ – простір неперервних невід'ємних функцій на $[0, T]$. Доведемо тепер, що оператор Ψ є стискаючим в просторі $C^+[0, T]$, $T > 0$. Для цього розглянемо різницю

$$\Psi(\Omega_1) - \Psi(\Omega_2) = \int\limits_0^t [b(\tau + t, \Omega_1(\tau) \Lambda(\tau + t)) \times$$

$$\times \Omega_1(\tau) - b(\tau + t, \Omega_2(\tau) \Lambda(\tau + t)) \Omega_2(\tau)] \times$$

$$\times \Lambda(\tau + t) d\tau.$$

Звідси

$$|\Psi(\Omega_1) - \Psi(\Omega_2)| \leq \int\limits_0^t |b(\tau + t, \Omega_1(\tau) \Lambda(\tau + t)) \Omega_1(\tau) -$$

$$- b(\tau + t, \Omega_1(\tau) \Lambda(\tau + t)) \Omega_2(\tau)| d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t |b(\tau + t, \Omega_1(\tau) \Lambda(\tau + t)) \Omega_2(\tau) -$$

$$- b(\tau + t, \Omega_2(\tau) \Lambda(\tau + t)) \Omega_2(\tau)| d\tau$$

або

$$|\Psi(\Omega_1) - \Psi(\Omega_2)| \leq b_0 \int\limits_0^t |\Omega_1(\tau) - \Omega_2(\tau)| d\tau +$$

$$+ b_1 \int\limits_0^t |\Omega_1(\tau) - \Omega_2(\tau)| \Omega_2(\tau) d\tau.$$

Враховуючи оцінку (9) маємо

$$\|\Psi(\Omega_1) - \Psi(\Omega_2)\| \leq b_0 T \|\Omega_1 - \Omega_2\| +$$

$$+ b_1 T b_0 \overline{\Phi} e^{b_0 \tau} \|\Omega_1 - \Omega_2\| =$$

$$= (b_0 T + b_1 T b_0 \overline{\Phi} e^{b_0 T}) \|\Omega_1 - \Omega_2\|,$$

де

$$\|\Omega(t)\| = \sup_{t \in [0, T]} |\Omega(t)|.$$

Число T можна вибрати так, щоб

$$(b_0 + b_1 b_0 \overline{\Phi} e^{b_0 T}) T < 1.$$

Отже, відображення Ψ є стискаючим. Звідси випливає, що рівняння (7) має один і тільки один невід'ємний розв'язок, який можна продовжити до будь-якого $T > 0$. Теорему доведено.

4. Існування стаціонарних розв'язків популяційної задачі

При моделюванні динаміки чисельності біологічних популяцій особливу роль відіграють стаціонарні режими, оскільки саме ці режими найчастіше реалізуються в природі. Тому їх дослідження має конкретне практичне значення як істотний крок на шляху розуміння природних процесів.

Стаціонарні розв'язки $\overline{x}(\tau)$ задачі (2) визначаються з рівнянь

$$\frac{d\overline{x}(\tau)}{d\tau} = -d(\tau) \overline{x},$$

$$\overline{x}(0) = \int\limits_0^\infty b(\tau, \overline{x}) \overline{x}(\tau) d\tau. \tag{10}$$

З першого рівняння системи (10) маємо

$$\overline{x}(\tau) = \overline{x}(0) \Lambda(\tau),$$

тоді друге рівняння системи (10) можна записати у вигляді

$$\overline{x}(0)\Big(1 - \int\limits_0^\infty b(\tau, \overline{x}(0)\Lambda(\tau))\Lambda(\tau)d\tau\Big) = 0.$$

Звідси одержуємо, що $\overline{x}(0) = 0$, або $\overline{x}(0) = x_0$ знаходиться з рівняння $\Phi(u) = 1$, де

$$\Phi(u) = \int\limits_0^\infty b(\tau, u\Lambda(\tau))\Lambda(\tau)d\tau.$$

Позначимо $b(\tau, 0)\Lambda(\tau) = K(\tau)$ і розглянемо популяцію, в якої репродуктивний потенціал $P = \int\limits_0^\infty K(\tau)d\tau < 1$, тобто при малих щільностях популяція сама не може відтворитися.

Нехай $\Phi(u)$ – унімодальна функція, тоді можливі випадки:

(A) $\max\limits_{u\in\mathbb{R}^+}\Phi(u) > 1$;

(B) $\max\limits_{u\in\mathbb{R}^+}\Phi(u) < 1$.

Випадок $\max\limits_{u\in\mathbb{R}^+}\Phi(u) = 1$ на практиці є малоімовірним. Тоді у випадку A задача (2), крім нульового розв'язку має ще два ненульових стаціонарних стани $x_1(0)\Lambda(\tau)$ і $x_2(0)\Lambda(\tau)$, $x_1(0) < x_2(0)$.

5. Стійкість стаціонарних вікових розподілів

Дослідження стійкості стаціонарних станів екосистем є однією з основних задач популяційної екології, оскільки стійкість стаціонарних станів по відношенню до малих збурень може служити ознакою реалізації відповідного режиму в реальних біологічних угрупуваннях.

Для дослідження стійкості стаціонарного розподілу $\overline{x}(\tau)$ покладемо $x(\tau, t) = \overline{x}(\tau) + \xi(\tau, t)$.

Лінеаризація в околі нульового стаціонарного розв'язку дає лінійні моделі динаміки вікової структури типу (1), для яких нульовий розв'язок при умові

$$P = \int\limits_0^\infty K(\tau)d\tau < 1$$

є асимптотично стійким за першим наближенням.

Для ненульового стаціонарного стану система лінійного наближення має вигляд

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} + \frac{\partial\xi}{\partial t} = -d(\tau)\xi,$$

$$\xi(0, t) = \int\limits_0^\infty (b(\tau, \overline{x}(\tau)) + b'_x(\tau, \overline{x})\overline{x})\xi(\tau, t)d\tau.$$

Умова стійкості нульового розв'язку для цієї системи має вигляд

$$\int\limits_0^\infty (b(\tau, \overline{x}(\tau)) + b'_x(\tau, \overline{x}(\tau))\overline{x}(\tau))\Lambda(\tau)d\tau < 1,$$

або

$$\int\limits_0^\infty b'_x(\tau, \overline{x}(\tau))\overline{x}(\tau))\Lambda(\tau)d\tau < 0.$$

В силу унімодальності функції $\Phi(u)$ ця умова виконується для $x_2(0)$ і не виконується для $x_1(0)$. Тому стаціонарний розв'язок $x_1(0)\Lambda(\tau)$ нестійкий, а $x_2(0)\Lambda(\tau)$ стійкий за першим наближенням.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Von Foerster H.* Some remarks on changing populations // Kinetics of Cellular Proliferation. – New York: Crune and Stratton, 1959. – P. 382 – 407.

2. Динамическая теория биологических популяций / Под ред. Р.А. Полуэктова. – М.: Наука, 1974. – 455 с.

3. *Маценко В.Г.* Нелінійна модель динаміки вікової структури популяцій // Нелінійні коливання, 2003. – 6. – № 3. – С. 357–367.

4. *Маценко В.Г.* Аналіз стійкості стаціонарних розв'язків в моделях динаміки вікової структури популяцій з внутрішньовидовою конкуренцією // Буковинський мат. журн., 2016. – Т. 4, № 1-2. – С. 117–121.

УДК 517.956.4

©2016 р. Л.М. Мельничук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

СТРУКТУРА ТА ВЛАСТИВОСТІ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРАМИ БЕССЕЛЯ

Для одного класу параболічних рівнянь другого порядку із зростаючими за змінною $x \in \mathbb{R}^k$ при $|x| \to +\infty$ коефіцієнтами та з операторами Бесселя за змінними $y \in \mathbb{R}_+^m$ знайдені в явному вигляді фундаментальні розв'язки задачі Коші та вивчені деякі їх властивості.

Fundamental solution of the Cauchy problem is found in an explicit form and some their properties are investigated for one class of parabolic second order equations with growing coefficients on a variable $x \in \mathbb{R}^k$ as $|x| \to +\infty$ and with Bessel operators on a variable $y \in \mathbb{R}_+^m$.

У даний час для рівномірно параболічних рівнянь з обмеженими коефіцієнтами достатньо повно досліджені властивості фундаментального розв'язку і коректна розв'язність задачі Коші (див. [1–3]). Для параболічних рівнянь з необмеженими коефіцієнтами аналогічні питання досліджені ще недостатньо, хоч ця тематика є популярною (див., наприклад, [2, 4–7]).

У статті [6] розглядається параболічне рівняння другого порядку

$$\partial_t u(t,x,y) = \sum_{j,l=1}^{n} \partial_{x_j}\partial_{x_l}(a_{jl}(t,x,y)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(x_j u(t,x,y)) + B_y u(t,x,y),$$

$$t > 0, x \in \mathbb{R}^n, y > 0, \qquad (*)$$

де всі a_{jl} сталі, а матриця $(a_{jl})_{j,l=1}^n$ симетрична і додатно визначена; $B_y \equiv \partial_y^2 + \frac{2\nu+1}{y}dy$ – оператор Бесселя порядку $\nu \geq 0$. У цьому рівнянні коефіцієнти при перших похідних по x_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$, необмежено зростають при $|x| \to +\infty$, а коефіцієнт при першій похідній по y необмежений в околі точки $y = 0$. У працях [6, 7] для рівняння $(*)$ знайдено в явному вигляді фундаментальний розв'язок, вивчено його властивості та встановлено коректну розв'язність задачі Коші в спеціальних вагових L_p-просторах.

У даній статті деякі результати поширюються на клас рівнянь з багатьма операторами Бесселя.

Нехай $\{n,k,m\} \subset \mathbb{N}$, $k \leq n$; $\mathbb{R}_+^m \equiv \{y = (y_1,\ldots,y_n)\,|y_1 > 0,\ldots,y_m > 0\}$, $y^l \equiv y_1^l \cdot y_2^l \cdot \ldots \cdot y_m^l$; $x' \equiv (x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k$, $x'' \equiv (x_{k+1},\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$, $x \equiv (x', x'')$.

Розглянемо задачу Коші

$$\partial_t u(t,x,y) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 u(t,x,y) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} \partial_{x_j}(x_j u(t,x,y)) + \sum_{j=1}^{m} B_{y_j} u(t,x,y),$$

$$t > 0, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}_+^m, \qquad (1)$$

$$u(t,x,y)\Big|_{t=0} = \varphi(x,y), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}_+^m, \qquad (2)$$

$$\partial_{y_j} u(t,x,y)\Big|_{y_j=0} = 0, t > 0,$$

$$x \in \mathbb{R}^n, j \in \{1,2,\ldots,m\}, \qquad (3)$$

де $B_{y_j} \equiv \partial_{y_j}^2 + \frac{2\nu+1}{y_j}\partial_{y_j}$ – оператори Бесселя за змінними y_j порядку $\nu \geq 0$.

Визначимо обернене і пряме перетворення Фур'є-Бесселя функції w відповідно рівностями

$$F^{-1}_{\sigma\to x} F^{-1}_{B,\eta\to y}[w(\sigma,\eta)] \equiv$$

$$\equiv 2^{-2\nu m}(\Gamma(\nu+1))^{-2m}(2\pi)^{-n} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}_+^m} e^{i(x,\sigma)} w(\sigma,\eta)\Big(\prod_{l=1}^{m} j_\nu(\eta_l y_l)\Big) \times$$

$$\times\eta^{2\nu+1}d\eta d\sigma,\quad x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m_+,$$

$$F_{\sigma\to x}F_{B,y\to\eta}[w(x,y)]\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m_+}e^{-i(x,\sigma)}\times$$

$$\times w(x,y)\Big(\prod_{l=1}^m j_\nu(\eta_l y_l)\Big)y^{2\nu+1}dydx,$$

$$\sigma\in\mathbb{R}^n,\eta\in\mathbb{R}^m_+,$$

де $(x,\sigma)\equiv\sum\limits_{j=1}^n x_j\sigma_j$; $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$, $\alpha>0$; i – уявна одиниця; $j_\nu(z)\equiv 2^\nu\Gamma(\nu+1)z^{-\nu}J_\nu(z)$ – нормована функція Бесселя; J_ν – функція Бесселя першого роду порядку ν.

Розв'язок задачі Коші (1) – (3) шукаємо у вигляді

$$u(t,x,y)=F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[v(t,\sigma,\eta)],$$

$$t>0,x\in\mathbb{R}^n,\eta\in\mathbb{R}^m_+,\qquad(4)$$

де v – невідома функція.

Підставивши (4) в (1) і вважаючи, що всі операції законні, одержимо

$$\partial_t v(t,\sigma,\eta)+\sum_{j=1}^k\sigma_j\partial_{\sigma_j}v(t,\sigma,\eta)=$$

$$=(-|\sigma|^2-|\eta|^2)v(t,\sigma,\eta),\qquad(5)$$

$$t>0,\sigma\in\mathbb{R}^n,\eta\in\mathbb{R}^m_+.$$

Тут використана рівність з [8]

$$B_{y_j}[j_\nu(\eta_j y_j)]=-\eta_j^2 j_\nu(\eta_j y_j).$$

Далі підставимо (4) в початкову умову (2):

$$u(t,x,y)|_{t=0}=F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[v(0,\sigma,\eta)]=$$

$$=\varphi(x,y),x\in\mathbb{R}^n,y\in\mathbb{R}^m_+.$$

Припустимо, що для φ існує перетворення Фур'є-Бесселя, тоді

$$v(t,\sigma,\eta)|_{t=0}=F_{x\to\sigma}F_{B,y\to\eta}[\varphi(x,y)]\equiv$$

$$\equiv\Psi(\sigma,\eta),\sigma\in\mathbb{R}^n,\eta\in\mathbb{R}^m_+.\qquad(6)$$

Умова (3) виконується, оскільки за властивостями j_ν (див. [8])

$$\partial_{y_j}j_\nu(\eta_j y_j)\Big|_{y_j=0}=0.$$

Задачу (5), (6) для рівняння з частинними похідними першого порядку розв'яжемо методом характеристик. Відповідна система характеристичних рівнянь така:

$$\frac{dt}{1}=\frac{d\sigma_1}{\sigma_1}=\dots=\frac{d\sigma_k}{\sigma_k}=\frac{d\sigma_{k+1}}{0}=\dots=$$

$$=\frac{d\sigma_n}{0}=\frac{d\eta_j}{0}=\frac{dv}{(-|\sigma|^2-|\eta|^2)v}.$$

Розв'язавши цю систему, одержимо перші інтеграли

$$\begin{cases} C_j=\sigma_j e^{-t}, & j\in\{1,\dots,k\},\\ C_j=\sigma_j, & j\in\{k+1,\dots,n\},\\ C'_j=\eta_j, & j\in\{1,\dots,m\},\\ C_{n+1}=v(t,\sigma,\eta)\times & \\ \times\exp\Big\{\frac{|\sigma'|^2}{2}+|\sigma''|^2t+|\eta|^2t\Big\} & ,\end{cases}\qquad(7)$$

де $\sigma'\equiv(\sigma_1,\dots,\sigma_k)$, $\sigma''\equiv(\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n)$. Задовольнимо умову (6). З останньої рівності системи (7) маємо:

$$v|_{t=0}=C_{n+1}\exp\Big\{-\frac{|\sigma'|^2}{2}\Big\}=\Psi(\sigma,\eta).$$

Оскільки $\sigma_j|_{t=0}=C_j$, $j\in\{1,\dots,n\}$, $\eta_j|_{t=0}=C'_j$, $j\in\{1,\dots,m\}$, то

$$\Psi(C_1,\dots,C_n,C'_1,\dots,C'_m)=$$

$$=C_{n+1}\exp\Big\{-\frac{C_1^2+\dots+C_k^2}{2}\Big\}.$$

Підставимо замість сталих вирази з (7). Тоді

$$C_{n+1}=\Psi(\sigma_1e^{-t},\dots,\sigma_ke^{-t},\sigma_{k+1},\dots,$$

$$\sigma_n,\eta_1,\dots,\eta_m)\times$$

$$\times\exp\Big\{\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\dots+\sigma_k^2)e^{-2t}\Big\}.$$

Підставивши цю сталу в останню рівність з системи (7), одержимо розв'язок задачі (5), (6)

$$v(t,\sigma,\eta)=\Psi(\sigma'e^{-t},\sigma'',\eta)\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{|\sigma'|^2}{2}(1-e^{-2t})-|\sigma''|^2t-|\eta|^2t\Big\},$$

$$t>0,\sigma\in\mathbb{R}^n,\eta\in\mathbb{R}^m_+.\qquad(8)$$

Далі на підставі (4) знайдемо u

$$u(t,x,y)=F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}\Big[\Psi(\sigma'e^{-t},\sigma'',\eta)\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{|\sigma'|^2}{2}(1-e^{-2t})-|\sigma''|^2t-|\eta|^2t\Big\}\Big].\quad (9)$$

Використаємо властивості згортки

$$F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[f_1(\sigma,\eta)\cdot f_2(\sigma,\eta)]=$$

$$=F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[f_1(\sigma,\eta)]\otimes$$

$$\otimes F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[f_2(\sigma,\eta)],$$

де згортка $\otimes$ визначається так:

$$(g_1\otimes g_2)(x,y)\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m_+}T^\eta_y[g_1(x-\sigma,y)]\times$$

$$\times g_2(\sigma,\eta)\eta^{2\nu+1}d\eta d\xi,$$

а оператор узагальненого зсуву

$$T^\eta_y[f(y)]\equiv T^{\eta_1}_{y_1}[T^{\eta_2}_{y_2}[\ldots[T^{\eta_m}_{y_m}[f(y)]]\ldots]],$$

$$T^{\eta_j}_{y_j}[f(y)]\equiv\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac12)}\times$$

$$\times\int\limits_0^\pi f(\sqrt{y_j^2+\eta_j^2-2y_j\eta_j\cos\varphi})\times$$

$$\times\sin^{2\nu}\varphi d\varphi.$$

Зокрема, якщо $f(y)=\prod\limits_{j=1}^m f_j(y_j)$, то

$$T^\eta_y[f(y)]=\prod_{j=1}^m T^{\eta_j}_{y_j}[f_j(y_j)].$$

З врахуванням цих властивостей з (9) маємо

$$u(t,x,y)=F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}\Big[\exp\Big\{-\frac{|\sigma'|^2}{2}\times$$

$$\times(1-e^{-2t})-|\sigma''|^2t-|\eta|^2t\Big\}\Big]\otimes$$

$$\otimes F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[\Psi(\sigma'e^{-t},\sigma'',\eta)]\equiv$$

$$\equiv W_1(t,x,y)\otimes W_2(t,x,y).\qquad(10)$$

W_1 обчислюється, використовуючи відомий інтеграл Вебера з [8]

$$\int\limits_0^{+\infty}\exp\{-\eta_j^2t\}J_\nu(\eta_jy_j)\eta_j^{\nu+1}d\eta_j=$$

$$=\frac{y_j^\nu}{(2t)^{\nu+1}}\exp\Big\{-\frac{y^2}{4t}\Big\}.$$

Одержуємо

$$W_1(t,x,y)=2^{-n+\frac{k}{2}-m(2\nu+1)}\pi^{-\frac{n}{2}}\times$$

$$\times\Gamma^{-m}(\nu+1)(\sqrt{1-e^{-2t}})^{-k}\times$$

$$\times t^{-\frac{n-k}{2}-m(\nu+1)}\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{|x'|^2}{2(1-e^{-2t})}-\frac{|x''|^2}{4t}-\frac{|y|^2}{4t}\Big\}.\quad(11)$$

При обчисленні W_2 проводять заміну $\beta'=\sigma'e^{-t}$, $\beta''=\sigma''$ і використовують (6). Тоді

$$W_2(t,x,y)=e^{kt}\varphi(x'e^t,x'',y).\qquad(12)$$

Підставляючи (11) і (12) в (10), з урахуванням означення згортки маємо

$$u(t,x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m_+}T^\eta_y[W_1(t,x-\xi,y)]\times$$

$$\times e^{kt}\varphi(\xi'e^t,\xi'',\eta)\eta^{2\nu+1}d\eta d\xi.$$

Здійснивши в інтегралі по ξ заміну $\beta'=\xi'e^t$, $\beta''=\xi''$, одержимо розв'язок задачі (1) – (3) у вигляді інтеграла Пуассона

$$u(t,x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m_+}G(t,x,y;0,\beta,\eta)\times$$

$$\times\varphi(\beta,\eta)\eta^{2\nu+1}d\eta d\beta,$$

$$t>0,x\in\mathbb{R}^n,y\in\mathbb{R}^m_+,\qquad(13)$$

з ядром

$$G(t,x,y;0,\beta,\eta)=G_1(t,x',\beta')\times$$

$$\times G_2(t,x'',\beta'')G_3(t,y,\eta),\qquad(14)$$

де

$$G_1(t,x',\beta')=(2\pi)^{-\frac{k}{2}}(\sqrt{1-e^{-2t}})^{-k}\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{|x'-\beta'e^{-t}|^2}{2(1-e^{-2t})}\Big\},\qquad(15)$$

$$G_2(t,x'',\beta'')=(2\sqrt{\pi t})^{k-n}\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{|x''-\beta''|^2}{4t}\Big\},\qquad(16)$$

$$G_3(t,y,\eta)=2^{-m(2\nu+1)}\Gamma^{-m}(\nu+1)\times$$

$$\times t^{-m(\nu+1)} T_y^\eta \Big[e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \Big] =$$

$$= 2^{-m(2\nu+1)} \Gamma^{-m}(\nu+1) t^{-m(\nu+1)} \times$$

$$\times \exp\Big\{ -\frac{|y|^2+|\eta|^2}{4t} \Big\} \prod_{j=1}^m j_\nu\Big(-i\frac{y_j\eta_j}{2t} \Big). \quad (17)$$

Якщо припускати, що φ – неперервна і обмежена в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$, то можна переконатися, що (13) справді є розв'язком задачі (1) – (3), тобто що G є фундаментальним розв'язком цієї задачі Коші. Це також випливає з того, що G_1, G_2, G_3 є фундаментальними розв'язками задач Коші відповідно для рівнянь (див. [1, 4, 6])

$$\partial_t u(t,x') = \sum_{j=1}^k (\partial_{x_j}^2 u(t,x') +$$

$$+ \partial_{x_j}(x_j u(t,x'))), t > 0, x' \in \mathbb{R}^k,$$

$$\partial_t u(t,x'') = \sum_{j=k+1}^n \partial_{x_j}^2 u(t,x''), t > 0,$$

$$x \in \mathbb{R}^{n-k},$$

$$\partial_t u(t,y) = \sum_{j=1}^m B_{y_j} u(t,y), t > 0, y \in \mathbb{R}_+^m.$$

Із зображень (14) – (17) випливають такі оцінки похідних фундаментального розв'язку G:

$$|\partial_x^l \partial_\beta^p G(t,x,y;0,\beta,\eta)| \le$$

$$\le C_{lp}(1-e^{-2t})^{-\frac{k+|l'|+|p'|}{2}} \times$$

$$\times t^{-\frac{n-k+|l''|+|p''|}{2} - m(\nu+1)} \times$$

$$\times \exp\Big\{ -|p'|t - c_1 \frac{|x'-\beta' e^{-t}|^2}{1-e^{-2t}} -$$

$$- c_2 \frac{|x''-\beta''|^2}{t} - c_3 \frac{|y-\eta|^2}{t} \Big\} \times$$

$$\times T_y^\eta \Big[\exp\Big\{ -\Big(\frac{1}{4} - c_3\Big)\frac{y^2}{t} \Big\} \Big],$$

де $l' = (l_1, \ldots, l_k)$, $l'' = (l_{k+1}, \ldots, l_n)$, $l = (l', l'')$, $|l'| = l_1 + \cdots + l_k$, $|l''| = l_{k+1} + \cdots + l_n$, $l_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p = (p', p'')$; C_{kp}, c_1, c_2, c_3 – додатні сталі.

Безпосередньо обчислюючи інтеграли за допомогою (14) – (17), одержуємо властивість

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} G(t,x,y;0,\beta,\eta) \eta^{2\nu+1} d\eta d\xi = e^{kt}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

2. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – 152. – 390 p.

3. *Эйдельман С.Д.* Параболические уравнения // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. напр. – 1990. – Т. 63. – С. 201–313.

4. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Мат. сб. – 1955. – Т. 36, № 2. – С. 299–310.

5. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

6. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісник ЧНУ. Вип. 288. Математика: Зб. наук. праць. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 5–11.

7. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Задача Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісник ЧНУ. Вип. 314–315. Математика: Зб. наук. праць. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 7–16.

8. *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 287 с.

УДК 517.9

©2016 р. В.В. Могильова[1], О. Є. Лаврова[2]

[1]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка

АПРОКСИМАЦІЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НА ВІДРІЗКУ СІМ'ЄЮ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

В роботі доведено, що сім'я функцій Белмана $V_\lambda(t_0,x)$ задачі оптимального керування на $[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ локально рівномірно збігається в $\mathbb{R}^d$ до функції Белмана $V(t_0,x)$ задачі оптимального керування на $[t_0,t_1]$, при умові, що $\sup_{t\in[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}}\mu_\lambda(t)\to 0$, при $\lambda\to 0$, де $\mu_\lambda(t)$ – функція зернистості $\mathbb{T}_\lambda$.

There is proved that the family value functions $V_\lambda(t_0,x)$ of the optimal control problem on $[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ converges locally uniformly in $\mathbb{R}^d$ to the value function $V(t_0,x)$ of the optimal control in the $[t_0,t_1]$, provided that $\sup_{t\in[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}}\mu_\lambda(t)\to 0$, with $\lambda\to 0$, where $\mu_\lambda(t)$ is the graininess function of $\mathbb{T}_\lambda$.

Вступ. Дана робота присвячена вивченню граничної поведінки розв'язку задачі оптимального керування динамічних рівнянь, заданих на сім'ї часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$, при умові, що функція зернистості μ_λ прямує до нуля, при $\lambda\to 0$. При цьому відрізок часової шкали $[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}=[t_0,t_1]\cap\mathbb{T}_\lambda$ прямує до $[t_0,t_1]$ (наприклад, в метриці Хаусдорфа) і виникає природне питання про зв'язок задач керування на часових шкалах і на $[t_0,t_1]$.

Задачі дослідження якісної поведінки розв'язків добре вивчені у випадку ейлерових часових шкал (за класифікацією [6]), тобто у випадку $\mathbb{T}_\lambda=\lambda\mathbb{Z}_+$, $\lambda>0$, при цьому рівняння на часовій шкалі переходить у різницеве рівняння. Так, в роботі [9], досліджено зв'язок між існуванням обмежених на осі розв'язків диференціальних та відповідних їм різницевих рівнянь. В роботі [10] вивчено властивість збереження коливання розв'язків при переході від диференціальних рівнянь до різницевих і навпаки.

Ключову роль в перерахованих вище роботах відіграє метод ламаних Ейлера, який гарантує близькість відповідних розв'язків диференціальних і різницевих рівнянь на скінчених часових інтервалах при малих різницевих кроках. Однак, цей метод добре працює для неперервних правих частин диференціальних рівнянь. В цьому випадку їх розв'язки є гладкими функціями, що дозволяє досить легко отримати оцінки близькості між розв'язками диференціального рівняння і його різницевою апроксимацією. Але в задачах оптимального керування, про які йде мова в даній роботі, праві частини систем залежать від параметра керування – функції $u(t)$, яка, взагалі кажучи, є тільки вимірною. Тому розв'язок диференціального рівняння є лише абсолютно неперервною функцією, що значно ускладнює процедуру отримання відповідних оцінок близькості.

З цього приводу відзначимо роботи [12]–[14], де отримані оцінки близькості між розв'язками диференціальних рівнянь і їх різницевими апроксимаціями з використанням техніки опуклого аналізу. Маючи такі оцінки автори довели збіжність функцій Белмана задач оптимального керування для різницевих схем до функцій Белмана задач оптимального керування відповідних диференціальних рівнянь, коли крок апроксимації прямує до нуля.

Наша робота узагальнює результати [12]–[14] про граничну поведінку функції Белмана на випадок загальних часових шкал. Однак, у зв'язку зі складністю топологічної структури часової шкали, методи дослідження тут інші. Основну трудність тут становить доведення рівномірної збіжності розв'язку задачі Коші на $[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ до розв'язку відповідної задачі Коші на $[t_0,t_1]$. Ця складність викликана двома причинами: по-перше, праві частини наших рівнянь не є кусково неперервними, а, по-друге, на відміну від [12]–[14], ми маємо справу з більш складною часовою шкалою ніж ейлерова.

Сама робота складається зі вступу і трьох розділів. В першому розділі приведені основні поняття, пов'язані з теорією часових шкал (підрозділ 1.1) і розглядається постановка задачі (підрозділ 1.2). Другий розділ присвячений вивченню властивостей функції Белмана, за допомогою яких в третьому розділі встановлено основний результат роботи про збіжність функції Белмана.

1.1 Основні поняття, пов'язані з теорією часових шкал.

Нехай $\mathbb{T}$ – часова шкала, тобто довільна, непорожня, замкнена підмножина $\mathbb{R}^1$ [15]. Для кожної підмножини A з $\mathbb{R}$ позначимо $A_{\mathbb{T}} = A \cap \mathbb{T}$. Вважаємо, що $\sup \mathbb{T} = +\infty$.

Визначимо прямий і обернений оператори стрибка $\sigma, \rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ як $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s > t\}$ і $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} \mid s < t\}$. Функція зернистості $\mu : \mathbb{T} \to [0,\infty)$ визначається наступним чином $\mu(t) = \sigma(t) - t$. Точка $t \in \mathbb{T}$ називається *ліво-граничною* (*ліво-розсіяною*, *право-граничною* або *право-розсіяною*), якщо $\rho(t) = t$ ($\rho(t) < t$, $\sigma(t) = t$ або $\sigma(t) > t$). Визначимо поняття Δ–похідної.

Означення 1. *Функція $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}^1$ має Δ–похідну в $t \in \mathbb{T}$, якщо існує $\alpha \in \mathbb{R}^1$, що для $\varepsilon > 0$ існує окіл B точки t такий, що*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \alpha(\sigma(t) - s)| \le \varepsilon|\sigma(t) - s|,$$

для всіх $s \in B \cap \mathbb{T}$. При цьому $f^\Delta(t) = \alpha$.

Позначимо через RS (SS, LS, LD) відповідно множину всіх право-розсіяних (право-граничних, ліво-розсіяних, ліво-граничних точок) з часової шкали $\mathbb{T}$.

1.2 Постановка задачі.

Опишемо коротко постановку задачі. Нехай $\mathbb{T}_\lambda$ – сім'я часових шкал таких, що $\sup \mathbb{T}_\lambda = \infty$, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^1$ і 0 – гранична точка Λ. Нехай для довільного $\lambda \in \Lambda$, $t_0, t_1 \in \mathbb{T}_\lambda$. Позначимо $\mu_\lambda = \sup_{t \in [t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}} \mu(t)$. Будемо вважати, що $\mu_\lambda \to 0$, при $\lambda \to 0$.

На кожній з часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$ розглянемо наступну задачу оптимального керування

$$\begin{gathered} x^\Delta = f(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x, \\ J_\lambda(u) = \int_{[t_0,t_1)_{\mathbb{T}_\lambda}} L(t, x(t), u(t))\Delta t \to \inf . \end{gathered} \tag{1}$$

Тут $x \in \mathbb{R}^d$ – фазовий вектор, $u = u(t)$ – вектор керування, тобто Δ-вимірна функція, що приймає значення в деякому компакті $U \subset \mathbb{R}^m$.

Нехай $V_\lambda(t,x)$ – сім'я функцій Белмана задачі 1. Основний результат роботи – доведення локальної рівномірної збіжності $V_\lambda(t_0,x)$ до $V(t_0,x)$ при $\mu_\lambda \to 0$, коли $\lambda \to 0$, де $V(t_0,x)$ – функція Белмана неперервної задачі

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) = x, \\ J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt \to \inf . \end{gathered}$$

2. Властивості функції Белмана.

Нехай $\mathbb{T}$ – часова шкала, $\sup \mathbb{T} = +\infty$ і $t_0, t_1 \in \mathbb{T}$. Нехай $Q = [t_0,t_1)_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^d$, $\overline{Q} = [t_0,t_1]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^d$ – замикання множини Q, а $\partial Q = \{t_1\} \times \mathbb{R}^d$ – її границя.

Розглянемо наступну задачу оптимального керування

$$\begin{gathered} x^\Delta = f(t, x, u), \\ x(t_0) = x_0, \\ J(u) = \int_{[t_0,t_1)_{\mathbb{T}}} L(s, x(s), u(s))\Delta s + \Psi(x(t_1)) \to \inf . \end{gathered} \tag{2}$$

Нехай $U \subset \mathbb{R}^m$ – компакт в $\mathbb{R}^m$. Для кожного $t \in [t_0,t_1)_{\mathbb{T}}$ нехай $\mathcal{U}(t) = L^\infty([t,t_1]_{\mathbb{T}}, U)$ – множина обмежених, Δ-вимірних [5] функцій, які визначені на $[t,t_1]_{\mathbb{T}}$ і приймають значення в U. В задачі (2) допустимими будемо вважати керування $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_0)$. Помістимо задачу (2) в сім'ю задач

$$x^\Delta = f(t, x, u), \tag{3}$$

$$x(t) = x, \tag{4}$$

$$J(t,x,u) = \int_{[t_0,t_1)_{\mathbb{T}}} L(s, x(s), u(s))\Delta s + \Psi(x(t_1)) \to \inf, \tag{5}$$

де $t \in [t_0, t_1)_{\mathbb{T}}$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Стандартним чином введемо функцію Белмана:

$$V(t,x) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} J(t,x,u). \tag{6}$$

Відносно функцій $f : [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^d$, $L : [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^1$ і $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$ вважаємо виконаними наступні умови:

1) f – неперервна за сукупністю змінних, задовольняє глобальну умову Ліпшиця по x зі сталою K;

2) L і Ψ – неперервні за своїми аргументами функції, що задовольняють по змінній x глобальну умову Ліпшиця зі сталою K.

Відзначимо, що при виконанні умови 1) для керування з $\mathcal{U}(t)$ розв'язок задачі Коші (3)–(5) існує на всьому інтервалі $[t, t_1]_{\mathbb{T}}$ і єдиний [3].

Відносно властивостей функції Белмана справедлива теорема.

Теорема 1. *Нехай функції f, L і Ψ задовольняють умови 1) і 2). Тоді фунція Белмана є локально обмеженою і локально ліпшицевою в $\overline{Q}$.*

Доведення. Зафіксуємо $r > 0$ і розглянемо $B_r = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \le r\}$ – кулю радіуса r. Зафіксуємо $(t,x),(t,y) \in \overline{Q}$, так, щоб $x, y \in B_r$ і $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t)$. Нехай $x(\cdot)$ і $y(\cdot)$ – розв'язки (3) такі, що $x(t) = x, y(t) = y$ відповідно. Тоді для $s \in [t, t_1]_{\mathbb{T}}$ маємо

$$|x(s)| \le |x| + \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} |f(s, x(s), u(s))|\,\Delta s \le$$

$$\le |x| + \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} K\,|x(s)|\,\Delta s + \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} |f(s, 0, u(s))|\,\Delta s \le$$

$$\le |x| + A + \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} K\,|x(s)|\,\Delta s, \tag{7}$$

для деякої сталої $A > 0$, оскільки f – неперервна, а U – компакт.

З нерівності Гроноула [4, p.257] для $s \in [t, t_1]_{\mathbb{T}}$, маємо

$$|x(t)| \le (r + A) e_K(s, t), \tag{8}$$

тут $e_K(s, t)$ – експоненціальна функція [4].

Для подальшого доведення нам потрібна наступна лема.

Лема 1. *Експоненціальна функція $e_K(t, t_0)$ – обмежена на $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ з оцінкою, що не залежить від часової шкали [4].*

Доведення. Добре відомо, що $e_K(t, t_0)$ – розв'язок задачі Коші

$$x^{\Delta} = Kx,\ x(t_0) = 1.$$

Тоді

$$x(t) = 1 + K \int_{[t_0,t)_{\mathbb{T}}} x(\tau)\Delta\tau. \tag{9}$$

Розв'язуючи (9) методом послідовних наближень, маємо:

$$|x_1(t)| \le 1 + K \int_{[t_0,t)_{\mathbb{T}}} \Delta s \le 1 + K(t - t_0).$$

Тоді з [3, Лема 3], маємо

$$|x_2(t)| \le 1 + K \int_{[t_0,t)_{\mathbb{T}}} |x_1(s)|\Delta s \le$$

$$\le 1 + K(t - t_0) + \frac{K^2(t - t_0)^2}{2}.$$

Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$, отримаємо

$$|x_n(t)| \le e^{K(t - t_0)},$$

що і доводить лему 1.

З (8) і леми 1 ми маємо наступну оцінку

$$|x(t)| \le (r + A) e^{K(t_1 - t_0)} = A_1, \tag{10}$$

для $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ і $x \in B_r$. Тоді локальна обмеженість функції Белмана легко випливає з обмеженості L і Ψ для $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$, $|x| \le A_1$ і $u \in U$. Для $s \in [t, t_1]_{\mathbb{T}}$ маємо наступну оцінку

$$|x(s) - y(s)| \le |x - y| e_K(s, t). \tag{11}$$

Тоді з (11) і леми 1 ми отримаємо оцінку

$$|x(s) - y(s)| \le C_1 |x - y|, \tag{12}$$

для довільних $s \in [t, t_1]_{\mathbb{T}}$ і $x \in \mathbb{R}^d$, і деякої сталої $C_1 > 0$, що не залежить від t, x, u. Отже,

$$|J(t,x,u) - J(t,y,u)| \le$$

$$\le \int_{[t,t_1)_{\mathbb{T}}} |L(s, x(s), u(s)) - L(s, y(s), u(s))|\,\Delta s +$$

$$+ |\Psi(x(t_1)) - \Psi(y(t_1))| \le KC_1(t_1 - t)|x - y| +$$

$$+ KC_1|x - y| \le C_2|x - y|. \tag{13}$$

Таким чином, з (13) випливає, що

$$|V(t,x) - V(t,y)| = |\sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} J(t,x,u) - \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} J(t,y,u)| \le$$

$$\leq \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} |J(t,x,u) - J(t,y,u)| \leq C_3|x-y|, \qquad (14)$$

Зафіксуємо $(t,x) \in \overline{Q}$, $|x| \leq r$, $\tau \in [t,t_1]_{\mathbb{T}}$ і $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t)$. Звуження $u(\cdot)$ на $[\tau, t_1]$ є елементом $\mathcal{U}(\tau)$, яке ми знову позначимо через $u(\cdot)$. Тоді з урахуванням (13) маємо

$$|J(t,x,u) - J(\tau,x,u)| \leq |J(t,x,u) - J(\tau,x(\tau),u)| +$$

$$+|J(\tau,x(\tau),u) - J(\tau,x,u)| \leq C(r)|\tau - t| + C_2|x(\tau) - x|. \qquad (15)$$

Стала $C(r)$ в силу локальної обмеженості L, звісно, залежить від r. Але

$$x(\tau) = x + \int_{[t,\tau)_{\mathbb{T}}} f(s,x(s),u(s))\Delta s,$$

тоді з обмеженості f на $t \in [t_0,t_1]_{\mathbb{T}}$, $|x| \leq r$, $u \in U$ маємо

$$|x(\tau) - x| \leq C(r)|\tau - t|.$$

Таким чином, з (15) маємо

$$|V(t,x) - V(\tau,x)| \leq \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} |J(t,x,u) - J(\tau,x,u)| \leq$$

$$\leq C(r)|\tau - t| + C_2 C|\tau - t| = C_4(r)|\tau - t|. \qquad (16)$$

Тоді з (14) і (16) для (t,x) і $(s,y) \in \overline{Q}$ отримаємо

$$|V(t,x) - V(s,y)| \leq |V(t,x) - V(s,x)| +$$

$$+|V(s,x) - V(s,y)| \leq C_4(r)|t-s| + C_3|x-y|,$$

що і доводить теорему.

Зауваження 1. *Якщо функції f, L, Ψ – обмежені, то з доведення теореми в цьому випадку можна легко отримати, що функція Белмана є глобально ліпшицевою по x і t, і глобально обмеженою.*

3. Основний результат. Збіжність функції Белмана.

На кожній з часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$ розглянемо задачу оптимального керування

$$x^{\Delta} = f(t,x,u), \qquad (17)$$

$$x(t_0) = x_0, \qquad (18)$$

$$J_\lambda(u) = \int_{[t_0,t_1)_{\mathbb{T}_\lambda}} L(t,x(t),u(t))\Delta t \to \inf. \qquad (19)$$

Аналогічно попередньому пункту введемо сім'ю функцій Белмана $V_\lambda(t,x)$ як

$$V_\lambda(t,x) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} J_\lambda(t,x,u).$$

В цьому пункті ми з'ясуємо умови збіжності функції Белмана $V_\lambda(t_0,x)$ до $V(t_0,x)$ функції Белмана неперервної задачі на відрізку $[t_0,t_1]$.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t),u(t)),$$

$$x(t_0) = x, \qquad (20)$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt \to \inf.$$

Клас допустимих керувань визначається аналогічно пункту 2. Основним результатом даного розділу є теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) *функції f, f_x і L визначені і неперервні за сукупністю змінних на $[t_0,t_1] \times R^d \times U$;*

2) *f і L в області визначення задовольняють по змінній x глобальну умову Ліпшиця зі сталою $K > 0$.*

Тоді $V_\lambda(t_0,x) \to V(t_0,x)$ локально рівномірно в $\mathbb{R}^d$ при $\mu_\lambda \to 0$, коли $\lambda \to 0$, де $V(t_0,x)$ – функція Белмана неперервної задачі (20) на $\mathbb{T}_0$.

Доведення. Не втрачая загальності вважаємо, що $t_0 = 0$, $t_1 = 1$. Доведення теореми розіб'ємо на кілька етапів.

Крок 1. Візьмемо довільну часову шкалу $\mathbb{T}_\lambda$ і довільне допустиме керування $u_\lambda(t)$ на ній. Нехай $x_\lambda(t)$ – відповідна допустима траєкторія. Позначимо через $\tilde{u}_\lambda(t)$ розширення $u_\lambda(t)$ на весь відрізок $[0,1]$, побудоване наступним чином:

$$\tilde{u}_\lambda(t) = \begin{cases} u_\lambda(t), t \in [0,1]_{\mathbb{T}_\lambda} \\ u_\lambda(r), t \in [r, \sigma(r)), \end{cases} \qquad (21)$$

де $r \in$ RS. Побудоване таким чином керування є допустим для задачі (20). За допустимим керуванням $\tilde{u}_\lambda(t)$ побудуємо допустиму траєкторію $x(t)$ як розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\tilde{u}_\lambda(t))$$
$$x(0) = x_0.$$

Покажемо, що

$$\left|\int_{[0,1)_{\mathbb{T}_\lambda}} L(t,x_\lambda(t),u_\lambda(t))\Delta t - \int_0^1 L(t,x(t),\tilde{u}_\lambda(t))dt\right| \to 0, \tag{22}$$

при $\lambda \to 0$.

Використовуючи аналог нерівності Гронуола на часових шкалах [4], а також лему 1, можна встановити, що для кожного $r > 0$ існує стала $C(r) > 0$, що

$$|x_\lambda(t)| \le C(r),\ t \in [0,1]_{\mathbb{T}_\lambda},\ |x(t)| \le C(r), |x_0| \le r, \tag{23}$$

де $t \in [0,1]$. Відзначимо, що оцінки (23), в силу компактності U є рівномірними за всіма допустимими керуваннями. Тому існує $C_1(r) > 0$, що

$$|L(t,x_\lambda(t),u_\lambda(t))| \le C_1(r),\ |f(t,x_\lambda(t),u_\lambda(t))| \le C_1(r),$$

$$|f_x(t,x_\lambda(t),u_\lambda(t))| \le C_1(r),\ \forall t \in [0,1]_{\mathbb{T}_\lambda} \tag{24}$$

Тоді

$$\int_{[0,1)_{\mathbb{T}_\lambda}} L(t,x_\lambda(t),u_\lambda(t))\Delta t =$$

$$= \int_{[0,1)_{\mathbb{T}}\setminus \mathrm{RS}} L(t,x_\lambda(t),u_\lambda(t))\Delta t + \sum_{r\in \mathrm{RS}} L(r,x_\lambda(r),u_\lambda(r))\mu(r). \tag{25}$$

В силу (24), сума (скінченна або нескінченна) в (25) мажорується сумою $C_1 \sum_{r\in \mathrm{RS}} \mu_\lambda(r)$. Тоді

$$\sum_{r\in \mathrm{RS}} L(r,x_\lambda(r),u_\lambda(r))\mu(r) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} L(r_k,x_\lambda(r_k),u_\lambda(r_k))\mu(r_k) +$$

$$\sum_{k=N+1} L(r_k,x_\lambda(r_k),u_\lambda(r_k))\mu(r_k). \tag{26}$$

Для кожного λ виберемо $N(\lambda)$ так, щоб

$$\sum_{k=N+1} \mu(r_k) \le \frac{\mu_\lambda}{2}. \tag{27}$$

Викинемо тепер з часової шкали ті праворозсіяні точки, що фігурують в сумі (27). Їх загальна Δ-міра не більша ніж $\frac{\mu_\lambda}{2}$. Позначимо через $A = \cup_r [r_k, \sigma(r_k))$, де об'єднання береться по всім викинутим r. Очевидно, що міра Лебега $\lambda(A) \le \frac{\mu_\lambda}{2}$. Нехай $B = [0,1]\setminus A$.

Доповнимо функцію $x_\lambda(t)$ до функції $\tilde{x}_\lambda(t)$, яка визначена на всьому інтервалі $[0,1]$ за правилом (21). Аналогічно доповнимо функцію $L(t,x,u)$ як функцію по t, визначену на $\mathbb{T}_\lambda$ до функції $\widetilde{L}(t,x,u)$, яка визначена на всьому $[0,1]$. Очевидно, що $|\widetilde{L}(t,x,u)| \le C$. Тоді згідно з [7]

$$\int_{[0,1]_{\mathbb{T}_\lambda}} L(t,x_\lambda(t),u_\lambda(t))\Delta t = \int_0^1 \widetilde{L}(t,\tilde{x}_\lambda(t),\tilde{u}_\lambda(t))dt.$$

Тому ліва частина в (22) не перевущує

$$\left|\int_A (\widetilde{L}(t,\tilde{x}_\lambda(t),\tilde{u}_\lambda(t)) - L(t,x(t),\tilde{u}_\lambda(t)))\right| dt +$$

$$+ \left|\int_B (\widetilde{L}(t,\tilde{x}_\lambda(t),\tilde{u}_\lambda(t)) - L(t,x(t),\tilde{u}_\lambda(t)))\right| dt \le$$

$$\le C\mu_\lambda + \int_B \left|(\widetilde{L}(t,\tilde{x}_\lambda(t),\tilde{u}_\lambda(t)) - L(t,x(t),\tilde{u}_\lambda(t)))\right| dt. \tag{28}$$

Оцінимо другий доданок в (28). Множина B складається зі скінченної кількості праворозсіяних точок $(r_1,\ldots,r_N)$ і інтервалів між ними (якщо вони є), які складаються з граничних точок.

В силу оцінок (23), компактності множини U, тепер функції $f(t,x,u)$ і $L(t,x,u)$ можна розглядати лише на деякому компакті, де вони рівномірно непрервні. Тому можна вибрати $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$ так, щоб виконувались нерівності

$$|L(t,x,u) - L(s,x,u)| < \varepsilon,\ |f(t,x,u) - f(s,x,u)| < \varepsilon, \tag{29}$$

якщо $|t-s| < \varepsilon_1$. Будемо вважати також, що

$$\mu_\lambda < \varepsilon_1. \tag{30}$$

Позначимо $B_1 = B \setminus \cup_{i=1}^N [r_i, \sigma(r_i))$. Тоді

$$\int_B \widetilde{L}(t,\tilde{x}_\lambda(t),\tilde{u}_\lambda(t))dt =$$

$$= \int_{B_1} L(t,x_\lambda(t),u_\lambda(t))dt + \sum_{i=1}^N \int_{r_i}^{\sigma(r_i)} L(r_i,\tilde{x}_\lambda(t),\tilde{u}_\lambda(t))dt.$$

Звідси

$$\int_B |\widetilde{L}(t,\tilde{x}_\lambda(t),\tilde{u}_\lambda(t)) - L(t,x(t),\tilde{u}_\lambda(t))|dt \le$$

$$\le K\int_B |x_\lambda(t) - x(t)|dt + \varepsilon. \tag{31}$$

Оцінимо тепер різницю $|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)|$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що часова шкала $\mathbb{T}_\lambda$ має наступну структуру (рис.1).

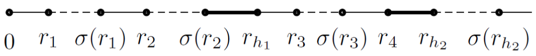


Рис. 1

Неперервною лінією позначені відрізки, що складаються з граничних точок; пунктиром позначені відрізки $[r_i, \sigma(r_i))$, де r_i – право-розсіяні точкі, що залишились; жирною лінією позначені множини, що складаються з викинутих точок (множина A).

Для інших структур часової шкали доведення аналогічне.

1) На $[0, r_1]$ маємо, що $u_\lambda(t) = \tilde{u}_\lambda(t)$, тому $\tilde{x}_\lambda(t) = x_\lambda(t)$.

2) На інтервалі $[r_1, \sigma(r_1))$ маємо, що $\tilde{x}_\lambda(t) = x_\lambda(r_1) = x(r_1)$, $\tilde{u}_\lambda(t) = u_\lambda(r_1)$. Але

$$x(t) = x(r_1) + \int_{r_1}^{t} f(s, x(s), u_\lambda(r_1))ds, \quad (32)$$

а тому при $t \in [r_1, \sigma(r_1))$ $x(t)$ – двічі гладка функція. Тому, використовуючи формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа, отримаємо

$$x(t) = x(r_1) + f(r_1, x(r_1), u_\lambda(r_1))(t - r_1)+$$

$$+f'_x(s_1, x(s_1), u_\lambda(r_1)) \cdot f(s_1, x(s_1), u_\lambda(r_1))\frac{(t-r_1)^2}{2}, \quad (33)$$

тут s_1 – деяка точка на $[r_1, \sigma(r_1)]$, а f'_x – матриця Якобі. З (24) випливає, що

$$\max_{t\in[t_0,t_1]} |f'_x(t, x(t), u_\lambda(t))f(t, x(t), u_\lambda(t))| \le C_1^2. \quad (34)$$

Таким чином, при $t \in [r_1, \sigma(r_1))$, отримаємо

$$|x(t) - \tilde{x}_\lambda(t)| \le \int_{r_1}^{\sigma(r_1)} |f(t, x(t), u_\lambda(r_1))|\, dt \le C_1\mu(r_1). \quad (35)$$

Але в точці $\sigma(r_1)$ отримаємо

$$\tilde{x}_\lambda(\sigma(r_1)) = x_\lambda(r_1)+f(r_1, x_\lambda(r_1), u_\lambda(r_1))\mu(r_1) =$$

$$= x(r_1) + f(r_1, x(r_1), u_\lambda(r_1))\mu(r_1).$$

Звідси, з урахуванням (33) і (34), отримаємо

$$|x(\sigma(r_1)) - \tilde{x}_\lambda(\sigma(r_1))| \le C_1^2\frac{\mu_\lambda^2(r_1)}{2} := \delta_1. \quad (36)$$

3) При $t \in [\sigma(r_1), r_2]$, аналогічно інтервалу $[0, r_1]$, маємо

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \le \delta_1 e^{K(r_2-\sigma(r_1))} := \delta_2. \quad (37)$$

4) На $[r_2, \sigma(r_2))$, аналогічно інтервалу $[r_1, \sigma(r_1))$, отримаємо

$$|x(t) - \tilde{x}_\lambda(t)| \le \delta_2 + \mu_\lambda(r_2)C_1, \quad (38)$$

$$|x(\sigma(r_2)) - \tilde{x}_\lambda(\sigma(r_2))| \le (1 + K\mu_\lambda(r_2))*$$

$$*\delta_2 + \frac{\mu_\lambda^2(r_2)}{2}C_1^2 := \delta_3.$$

5) На $[\sigma(r_2), r_{h_1}]$ маємо

$$|\tilde{x}(r_{h_1}) - \tilde{x}(\sigma(r_2))| \le C_1(r_{h_1} - r_2) = C_1\mu_1,$$

$$|x(r_{h_1}) - x(\sigma(r_2))| \le C_1\mu_1.$$

Таким чином,

$$|\tilde{x}_\lambda(r_{h_1}) - x(r_{h_1})| \le 2C_1\mu_1 + \delta_3 := \delta_4. \quad (39)$$

6) На інтервалі $[r_{h_1}, r_3]$, маємо

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \le \delta_4 e^{K(r_3-r_{h_1})} := \delta_5. \quad (40)$$

7) На $[r_3, \sigma(r_3))$, отримаємо оцінки

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \le \delta_5 + \mu_\lambda(r_3)C_1, \quad (41)$$

$$|\tilde{x}_\lambda(\sigma(r_3)) - x(\sigma(r_3))| \le \delta_5(1 + K\mu_\lambda(r_3))+$$

$$+\frac{\mu_\lambda^2(r_3)}{2}C_1^2 := \delta_6. \quad (42)$$

8) Аналогічно на $[\sigma(r_3), r_4]$ маємо

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \le \delta_6 e^{K(r_4-\sigma(r_3))} := \delta_7. \quad (43)$$

9) На (r_4, r_{h_2}) маємо

$$|\tilde{x}_\lambda(r_{h_2}) - x(r_{h_2})| \le \delta_7 + 2C_1\mu_2 := \delta_8.$$

10) На інтервалі $[r_{h_2}, \sigma(r_{h_2}))$, маємо

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \le \delta_8 + 2C_1\mu_2 + \mu_\lambda(r_{h_2})C_1, \quad (44)$$

$$|\tilde{x}_\lambda(\sigma(r_{h_2})) - x(\sigma(r_{h_2}))| \le \delta_8(1 + K\mu_\lambda(r_{h_2}))+$$

$$+\frac{\mu_\lambda^2(r_{h_2})}{2}C_1^2 := \delta_9 \quad (45)$$

11) На $[\sigma(r_{h_2}), r_5]$, отримаємо

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \le \delta_9 \cdot e^{K(r_5-\sigma(r_{h_2}))}. \quad (46)$$

Розписуючи останню нерівність з урахуванням введених позначень, отримаємо для $t \notin [r_k, \sigma(r_k))$ наступну оцінку

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \le \Pi e^K 2C_1 \sum_i \mu_i + \frac{1}{2}\Pi C_1^2 e^K \sum_i \mu^2(r_i) \le$$

$$\leq \mu_\lambda(\Pi e^K C_1 + \frac{1}{4}\Pi C_1^2 e^K) \to 0,\ \lambda \to 0, \tag{47}$$

де через Π ми позначили наступний вираз

$$\Pi = (1+K\mu_\lambda(r_1))(1+K\mu_\lambda(r_2))(1+K\mu_\lambda(r_3))*$$

$$*(1+K\mu_\lambda(r_{h_2}))\dots(1+K\mu_\lambda(r_N)).$$

При $t \in [r_k, \sigma(r_k))$, отримаємо оцінку

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \leq \mu_\lambda \Pi e^K(C_1 + \frac{C_1^2}{4}) + 2C_1\mu_i +$$

$$+\mu_\lambda(r_k)C_1 \leq \mu_\lambda(\Pi e^K(C_1 + \frac{C_1^2}{4}) + 3C_1). \tag{48}$$

Тому

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \to 0,\ \lambda \to 0,$$

рівномірно по всім $t \in [0,1]$.

Таким чином ми показали, що для довільної часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ і довільного допустимого керування задачі (19) $u_\lambda(t)$ на ній існує допустиме керування $\tilde{u}_\lambda(t)$ задачі (20), що

$$|J_\lambda(u_\lambda) - J(\tilde{u}_\lambda)| \to 0,\ \lambda \to 0, \tag{49}$$

що і доводить (22).

Крок 2. Візьмемо довільне допустиме керування $u(\cdot)$ задачі (20). Покажемо, що за ним можна для кожної часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ побудувати допустиме керування $u_{ts}^\lambda(\cdot)$ задачі (19), що

$$|J(u) - J_\lambda(u_{ts}^\lambda)| \to 0,\ \lambda \to 0. \tag{50}$$

Нехай $u_{ts}^\lambda(\cdot)$ – довільне допустиме керування задачі (19), а $x_{ts}^\lambda(\cdot)$ – відповідна допустима траєкторія. Аналогично, нехай $x(\cdot)$– допустима траєкторія задачі (20), що відповідає допустимому керуванню $u(\cdot)$. Тоді

$$\int_{[0,1)_{\mathbb{T}_\lambda}} L(t, x_{ts}^\lambda(t), u_{ts}^\lambda(t))\Delta t =$$

$$= \int_{[0,1)_{\mathbb{T}}\setminus \mathrm{RS}} L(t, x_{ts}^\lambda(t), u_{ts}^\lambda(t))\Delta t + \sum_{r\in \mathrm{RS}} L(r, x_{ts}^\lambda(r), u_{ts}^\lambda(r))\mu(r). \tag{51}$$

Для фіксованого $R > 0$, при $|x_0| \leq R$ і $t \in [0,1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ виконані оцінки (24). Отже, сума в (51) абсолютно збігається і мажорується сумою (скінченною або нескінченною)

$$C_1 \sum_{r\in \mathrm{RS}} \mu_\lambda(r), \tag{52}$$

незалежно від $u_{ts}^\lambda(\cdot)$. Аналогічно (26), отримаємо

$$\sum_{r\in \mathrm{RS}} L(r, x_{ts}^\lambda(r), u_{ts}^\lambda(r))\mu(r) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} L(r_k, x_{ts}^\lambda(r_k), u_{ts}^\lambda(r_k))\mu(r_k) +$$

$$+ \sum_{k=N+1} L(r_k, x_{ts}^\lambda(r_k), u_{ts}^\lambda(r_k))\mu(r_k).$$

Для кожного λ знову виберемо $N(\lambda)$ так, щоб

$$\sum_{k=N+1} \mu(r_k) \leq \frac{\mu_\lambda}{2}.$$

Тоді як і раніше $A = \cup_{r=N+1}[r_k, \sigma(r_k))$, її міра Лебега $\lambda(A) \leq \frac{\mu_\lambda}{2}$. Нехай $B = [0,1]_{\mathbb{T}_\lambda}\setminus A$. Тоді для $u(\cdot)$ і $u_{ts}^\lambda(\cdot)$

$$\left|\int_0^1 L(t, x(t), u(t))dt - \int_{[0,1)_{\mathbb{T}_\lambda}} L(t, x_{ts}^\lambda(t), u_{ts}^\lambda(t))\Delta t\right| \leq$$

$$\leq \mu_\lambda + \left|\int_{[0,1]\setminus A} L(t, x(t), u(t))dt - \int_B L(t, x_{ts}^\lambda(t), u_{ts}^\lambda(t))dt\right|. \tag{53}$$

Нехай $r_1, \dots, r_N$ – право-розсіяні точки з B. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і зафіксуємо його. За теоремою Лузіна існує неперервна на $[0,1]$ функція $u_\varepsilon(t)$, що міра Лебега множини

$$A_\varepsilon = \{t \in [0,1] : u(t) \neq u_\varepsilon(t)\},\ \lambda(A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Нехай $B_\varepsilon = [0,1] \setminus A_\varepsilon$. В силу рівномірної неперервності f і L за своїми змінними на компакті $[0,1] \times \{|x| \leq C_1\} \times U$ для довільного $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$ існує таке $0 < \varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1)$, що якщо $|u - u_1| < \varepsilon_2$, то

$$|f(t,x,u) - f(t,x,u_1)| + |L(t,x,u) - L(t,x,u_1)| < \varepsilon_1. \tag{54}$$

для довільних $t \in [0,1]$ і $|x| \leq C_1$. Будемо вважати, що $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Відмітимо, що $u_\varepsilon(t)$ – рівномірно неперервна на $[0,1]$ функція. Тому для вказаного ε_2 існує $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2$, що якщо $|t-s| < \varepsilon_3$, то $|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(s)| < \varepsilon_2$. Нехай тепер $\mu_\lambda < \varepsilon_3$.

Побудуємо тепер на $[0,1]$ за керуванням $u(t)$ і функцією $u_\varepsilon(t)$ нове допустиме керування u_c^λ, що враховує структуру часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$. На викинутих інтервалах, тобто в точках множини A, покладемо:

$$u_c^\lambda(t) = u(r),\ t \in [r, \sigma(r)).$$

Нехай $r_1, \dots, r_N$ – залишені право-розсіяні точки. На інтервалах $[\sigma(r_i), r_{i+1})$ покладемо

$$u_c^\lambda(t) = u(t), i = \overline{1, N-1}.$$

На $[r_i,\sigma(r_i))$, $i=\overline{1,N}$ поступаємо наступним чином:

1) якщо на $[r_i,\sigma(r_i))$ немає точок з множини B_ε, тоді $u_c^\lambda(t)=u(r_i)$.

2) якщо на $[r_i,\sigma(r_i))$ є точки з множини B_ε, то покладемо $u_c^\lambda(t)=u_\varepsilon(t_\varepsilon^i)$, тут t_ε^i – довільна точка множини $B_\varepsilon\cap[r_i,\sigma(r_i))$. Оскільки $t_\varepsilon^i\in B_\varepsilon$, то $u_\varepsilon(t_\varepsilon^i)=u(t_\varepsilon^i)\in U$, таким чином на $[r_i,\sigma(r_i))$ керування $u_c^\lambda(t)$ – допустиме.

Нехай $x_c^\lambda(t)$ – допустима траєкторія задачі (20). З побудови $u_c^\lambda(t)$ випливає, що воно є розширенням деякого допустимого керування $u_{ts}^\lambda(t)$, яке побудоване за формулою (21) на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$. Тоді, як випливає з (49)

$$|J_\lambda(u_{ts}^\lambda)-J(u_c^\lambda)|\to 0,\ \lambda\to 0. \tag{55}$$

Покажемо, що

$$|J(u)-J(u_c^\lambda)|\to 0,\lambda\to 0. \tag{56}$$

Маємо

$$\left|\int_0^1(L(t,x(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t)))dt\right|\le$$

$$\le\left|\int_{A_\varepsilon}(L(t,x(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t)))dt\right|+$$

$$+\left|\int_{B_\varepsilon}(L(t,x(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t)))dt\right|. \tag{57}$$

Перший доданок в (57) не перевищує $C_1(R)\lambda(A_\varepsilon)\le C_1(R)\varepsilon$. Оцінимо другий доданок в (57)

$$\left|\int_{B_\varepsilon}(L(t,x(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t)))dt\right|\le$$

$$\le K\int_{B_\varepsilon}|x(t)-x_c^\lambda(t)|dt+$$

$$+\int_{B_\varepsilon}\left|L(t,x_c^\lambda(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t))dt\right|. \tag{58}$$

Але

$$\int_{B_\varepsilon}\left|L(t,x_c^\lambda(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t))\right|dt\le$$

$$\le C_1(R)\mu_\lambda+\int_{B_\varepsilon\cap\bar{A}}\left|L(t,x_c^\lambda(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t))\right|dt. \tag{59}$$

Далі

$$\int_{B_\varepsilon\cap\bar{A}}|L(t,x_c^\lambda(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t))|dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{N-1}\int_{[\sigma(r_i),r_{i+1})\cap B_\varepsilon}|L(t,x_c^\lambda(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t))|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{[r_i,\sigma(r_i))\cap B_\varepsilon}|L(t,x_c^\lambda(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t))|dt. \tag{60}$$

За побудовою u_c^λ перший доданок в (60) дорівнює нулю, в сумі деякі доданки також можуть дорівнювати нулю, якщо на інтервалі $[r_i,\sigma(r_i))$ немає точок з множини B_ε. Оскільки $\mu_\lambda<\varepsilon_3$, то в силу рівномірної неперервності $u_\varepsilon(t)$ і (54) сума в (60) оцінюється виразом

$$\varepsilon_1\sum_{i=1}^{N}\mu(r_i)\le\varepsilon_1. \tag{61}$$

Тоді з (58), (59) і (61) маємо

$$\int_{B_\varepsilon}|L(t,x(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t))|dt\le$$

$$\le K\int_{B_\varepsilon}|x(t)-x_c^\lambda(t)|dt+C_1(R)\mu_\lambda+\varepsilon_1. \tag{62}$$

Оцінимо в (62) різницю $|x(t)-x_c^\lambda(t)|$. Нехай структура часової шкали така як на рис.1. Для інших випадків викладки аналогічні.

1) На відрізку $[0,r_1]$, $u(t)=u_c^\lambda(t)$ і $x(t)=x_c^\lambda(t)$.

2) На $(r_1,\sigma(r_1)]$, маємо

$$|x(t)-x_c^\lambda(t)|\le\int_{r_1}^t K|x(s)-x_c^\lambda(s)|ds+$$

$$+\int_{[r_1,\sigma(r_1))\cap A_\varepsilon}\left|f(t,x_c^\lambda(t),u(t))-f(t,x_c^\lambda(t),u(r_1))\right|dt+$$

$$+\int_{[r_1,\sigma(r_1))\cap B_\varepsilon}\left|f(t,x_c^\lambda,u_\varepsilon(t))-f(t,x_c^\lambda(t),u_\varepsilon(t_\varepsilon^1))\right|dt\le$$

$$\le\int_{r_1}^t K|x(s)-x_c^\lambda(s)|ds+\varepsilon_1\mu(r_1)+$$

$$+2C_1(R)\lambda([r_1,\sigma(r_1))\cap A_\varepsilon),$$

в силу рівномірної неперервності f на $[0,1]\times\{|x|\le C_1\}\times U$. Тоді з нерівності Гронуола отримаємо

$$|x(t)-x_c^\lambda(t)|\le(\varepsilon\mu(r_1)+2C_1(R)*$$

$$*\lambda([r_1,\sigma(r_1))\cap A_\varepsilon))e^{K\mu(r_1)}=\delta_1e^{K\mu(r_1)}, \tag{63}$$

3) На $[\sigma(r_1), r_2]$, маємо

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \le \delta_1 e^{K\mu(r_1)} e^{K(r_2-\sigma(r_1))} := \delta_2. \tag{64}$$

4) На $[r_2, \sigma(r_2))$ є точки з множини B_ε, тоді маємо

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \le \delta_2 + \int_{r_2}^t K|x(s) - x_c^\lambda(s)|ds+$$

$$+\int_{[r_2,\sigma(r_2))\cap A_\varepsilon} \left| f(t, x_c^\lambda, u(t)) - f(t, x_c^\lambda, u_c^\lambda(t)) \right| dt+$$

$$+\int_{[r_2,\sigma(r_2))\cap B_\varepsilon} \left| f(t, x_c^\lambda(t), u_\varepsilon(t)) - f(t, x_c^\lambda(t), u_c^\lambda(t_\varepsilon^2)) \right| dt \le$$

$$\le \delta_2 + 2C_1(R)\lambda([r_2, \sigma(r_2)) \cap A_\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon_1\mu(r_2) + \int_{r_2}^t K|x(s) - x_c^\lambda(s)|ds.$$

Тоді

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \le \delta_2 + 2C_1(R)\lambda([r_2, \sigma(r_2)) \cap A_\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon_1\mu(r_2))e^{K\mu(r_2)} := \delta_3. \tag{65}$$

5) На $[\sigma(r_2), r_{h_1}]$, отримаємо

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \le \delta_3 + 2C_1(R)\mu_1.$$

6) Далі на $[r_{h_1}, r_3]$, матимемо

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \le (\delta_3 + 2C_1(R)\mu_1)e^{K(r_3-r_{h_1})} := \delta_4.$$

7) На $[r_3, \sigma(r_3))$ є точки з множини B_ε, тоді маємо

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \le (\delta_4 + 2C_1(R)*$$

$$*\lambda([r_3, \sigma(r_3)) \cap A_\varepsilon) + \varepsilon_1\mu(r_3))e^{K\mu(r_3)} := \delta_5.$$

8) Розглянемо інтервал $[\sigma(r_3), r_{h_2})$. В силу нерівності Гронуола маємо

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \le \delta_5 e^{K(r_4-\sigma(r_3))}.$$

9) На викинутому інтервалі $[r_{h_2}, r_5)$, маємо

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \le \delta_5 e^{K(r_4-\sigma(r_3))} + 2C_1(R)\mu_2.$$

10) На $[r_5, \sigma(r_5))$ є точки з множини B_ε, тоді маємо

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \le (\delta_5 e^{K(r_{h_2}-\sigma(r_3))} + 2C_1(R)*$$

$$*\lambda([r_5, \sigma(r_5))\cap A_\varepsilon)+2C_1(R)\mu_2+\varepsilon_1\mu(r_5))e^{K\mu(r_5)}.$$

Розписуючи останню нерівність, з урахуванням введених позначень, для довільного $t \in [0, 1]$ ми отримаємо

$$|x(t)-x_c^\lambda(t)| \le (\varepsilon_1 \sum_{i=1}^{N(\lambda)} \mu(r_i)+2C_1(R) \sum_{i=1}^{N(\lambda)} \lambda([r_i, \sigma(r_i))\cap A_\varepsilon)+$$

$$+C_1(R)\sum_i \mu_i)e^K \le (\varepsilon_1 + 2C_1(R)\varepsilon + C_1(R)\mu_\lambda)e^K. \tag{66}$$

Тоді з (57)–(62) отримаємо оцінку

$$\left| \int_0^1 (L(t, x(t), u(t)) - L(t, x_c^\lambda(t), u_c^\lambda(t))) \right| dt \le$$

$$\le K(\varepsilon_1 + 2C_1(R)\varepsilon + C_1(R)\mu_\lambda)e^K+$$

$$+C_1(R)\mu_\lambda + \varepsilon_1 + C_1(R)\varepsilon.$$

Таким чином, в силу довільності ε і ε_1

$$|J(u) - J(u_c^\lambda)| \to 0, \lambda \to 0. \tag{67}$$

Тоді з (55) і (67) ми маємо (50), що і потрібно було показати.

В кроці 1 ми показали, що для довільної часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ і довільного допустимого керування задачі (19) $u_\lambda(t)$ на ній існує допустиме керування $\tilde{u}_\lambda$ задачі (20), що

$$|J_\lambda(u_\lambda) - J(\tilde{u}_\lambda)| = \varphi(\lambda) \to 0, \ \lambda \to 0.$$

Отже,

$$J(\tilde{u}_\lambda) \le J_\lambda(u_\lambda) + \varphi(\lambda).$$

Звідси і з означення функції Белмана, маємо

$$V(0, x) \le J_\lambda(u_\lambda) + \varphi(\lambda). \tag{68}$$

Нерівність (68) виконується для довільного допустимого керування u_λ, а отже і для інфінума по всім допустимим керуванням, тобто

$$V(0, x) \le V_\lambda(0, x) + \varphi(\lambda). \tag{69}$$

В умовах теореми 2 справедлива теорема 1. Таким чином, сім'я функцій Белмана $V_\lambda(0, x)$ компактна в довільній кулі $|x| \le R$, $R > 0$. Тому існує рівномірно на $|x| \le R$ збіжна підпослідовність $V_\lambda(0, x)$, що

$$V_{\lambda_n}(0, x) \rightrightarrows V_0(0, x), \tag{70}$$

при $n \to \infty$ $(\lambda_n \to 0)$.

Переходячи в (69) до границі при $\lambda_n \to 0$, маємо

$$V(0, x) \le V_0(0, x). \tag{71}$$

Покажемо, що нерівність $V(0,x) < V_0(0,x)$ неможлива.

Дійсно, нехай

$$V(0,x) < V_0(0,x). \tag{72}$$

Тоді існує $\delta > 0$ і λ_{n_0}, що при $\lambda_n \leq \lambda_{n_0}$

$$V_{\lambda_n}(0,x) > V(0,x) + \delta. \tag{73}$$

Для даного $\delta > 0$, очевидно, існує допустиме керування $u(t)$ системи (20), що

$$J(u) + \frac{\delta}{2} < V_{\lambda_n}(0,x). \tag{74}$$

Однак тоді для даного керування $u(t)$ системи (20) існує допустиме керування $u_{ts}^{\lambda_n}$ з виконанням (50). Тоді при достатньо малих λ_n маємо

$$J_{\lambda_n}(u_{ts}^{\lambda_n}) < V_{\lambda_n}(0,x),$$

що неможливо.

Отже, $V(0,x) = V_0(0,x)$. Таким чином, довільна збіжна послідовність $V_{\lambda_n}(0,x)$ має границю – $V(0,x)$. Тому в силу компактності сім'ї $V_\lambda(0,x)$ і вся послідовність $V_\lambda(0,x) \to V_0(0,x)$ при $\mu_\lambda \to 0$, коли $\lambda \to 0$, що і доводить теорему 2.

Зауваження 2. *Результат теореми 2 справедливий і для функціоналів більш загального вигляду*

$$J_\lambda(u) = \int_{[t_0,t_1)_{\mathbb{T}}} L(t,x(t),u(t))\Delta t + \Psi(x(t_1))$$

і відповідно

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt + \Psi(x(t_1)),$$

якщо $\Psi(x)$ задовольняє для $x \in \mathbb{R}^d$ глобальну умову Ліпшиця.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Zhan Z., Wei W., Xu H.* Hamilton-Jacobi-Bellman equations on time scales // Math. Comput. Modelling. –2009. – **49**, N1. – P. 2019-2028.

2. *Lastivka I., Lavrova O.* The method of dynamic programming for systems of differential equations on time scales // Bulletin of Kyiv Shevchenko National University, –2014. –, N2. – P. 71-76. (in Ukrainian)

3. *Bourdin L., Trelat E.* General Cauchy-Lipschits theory for Δ–Cauchy problems with Caratheodory dynamics on time scales // Journal of Difference Equations and Applications. – 2014. – **20**, N4. – P. 526-547.

4. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. — Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001. — 369 p.

5. *Bohner M., Peterson A.* Advances in dynamic equations on time scales. — Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2003. — 369 p.

6. Hall K., Oberste-Vorth R. Totally discrete and Eulerian time scales // Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polynomials (S. Elaydi, J. Cushing, R. Lasser, A. Ruffing, V. Papageorgion, W. Van Assche, eds.)., World Scientific. – 2007 – P. 462-470.

7. Bohner M., Stanzhytskyi O, Bratochkina A. Stohastic dynamic equastions on general time scales // Electronic Journal of Differential Equations. – 2013. – P. 1-15.

8. Fleming W., Soner H. Controlled Markov Processes and Viscosity Solution. — Springer Science and Business Media, Inc., 2006.

9. Karpenko O., Stanzhytskyi O. The relation between the existence of bounded solutions of differential equations and the corresponding difference equations // Journal of Difference Eq. and Appl. - 2013 – **19**, N12. – P. 1967-1982.

10. Bohner M., Karpenko O., Stanzhytskyi O. Oscillation of solutions of second-order linear differential equations and corresponding difference equations // Journal of Difference Eq. and Appl. -2013 – **20**, N7. – P. 1112-1126.

11. Grune L. Asymptotic behavior of dynamical and control systems perturbation and discretization — Springer-Verlag, Berlin, 2002. —231p.

12. Capuzzo Dolcetta I. On a discrete approximation of the Hamilton-Jacobi equation of dynamic programming // Appl. Math. Optim. -1983 – **10**, – P. 1831-1847.

13. Capuzzo Dolcetta I., Ishii H. Approximate solutions of the Bellman equation of deterministic control theory // Appl. Math. Optim. -1984 – **11**, – P. 161-181.

14. Gonzalez R., Tidball M. On a discrete time approximation of the Hamilton-Jacobi equation of dynamic programming // Report de recherche, INRIA. -1991,№1375.

15. Hilger S. Ein Maßkettenkalkül mit Anvendung auf Zentrums// PhD thesis, Universität Würzburg. - 1988.

MSC2000 4C14, 34C20, 34C45

©2016 year N. Neagu[1], D. Cozma[1], M. Popa[2]

[1]Tiraspol State University, Chişinău, Moldova,
[2]Institute of Mathematics and Informatics of ASM, Moldova

INVARIANT METHODS FOR STUDYING STABILITY OF UNPERTURBED MOTION IN TERNARY DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH POLYNOMIAL NONLINEARITIES

The centro-affine invariant conditions for Lyapunov stability of unperturbed motion in ternary differential systems with polynomial nonlinearities were determined and the centro-affine invariant conditions when a ternary differential system of the Lyapunov-Darboux form with quadratic nonlinearities have a holomorphic integral were obtained. On the base of the integral the stability of unperturbed period motion was studied.

1. Centro-affine invariant polynomials in ternary differential systems

Let us consider the ternary differential system with polynomial nonlinearities of perturbed motion (see, for example, [1] or [2])

$$\frac{dx^j}{dt} = a^j_\alpha x^\alpha + \sum_{i=1}^{l} a^j_{\alpha_1\cdots\alpha_{m_i}} x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_{m_i}} \qquad (1)$$
$$(j,\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m_i} = \overline{1,3}; l<\infty),$$

where $a^j_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m_i}}$ is a symmetric tensor in lower indices in which the total convolution is done and $\Gamma = \{m_1, m_2, ..., m_l\}$ $(m_i \geq 2)$ is a finite set of distinct natural numbers.

We will examine the centro-affine group $GL(3,\mathbb{R})$ for system (1) given by transformations q:

$$\bar{x}^j = q^j_\alpha x^\alpha \ (\Delta = det(q^j_\alpha) \neq 0)\ (j,\alpha = \overline{1,3}). \qquad (2)$$

Coefficients and variables in (1) and (2) takes values from the field of real numbers $\mathbb{R}$.

Observe that the transformation (2) preserves the form of the system (1)

$$\frac{d\bar{x}^j}{dt} = \bar{a}^j_\alpha \bar{x}^\alpha + \sum_{i=1}^{l} \bar{a}^j_{\alpha_1\cdots\alpha_{m_i}} \bar{x}^{\alpha_1}\cdots \bar{x}^{\alpha_{m_i}} \qquad (3)$$
$$(j,\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m_i} = \overline{1,3}; l<\infty),$$

where the coordinates of the vector $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ are determined by relations (2) and the coefficients from the right-hand sides of (3) are some linear functions in the coefficients of system (1) and rational in the parameters q^j_α of the transformation (2).

The phase variable vector $x = (x^1, x^2, x^3)$ of system (1), which change by formulas (2), in the theory of invariants [3] is called **contravariant**. The vector $u = (u_1, u_2, u_3)$, which change by formulas $u_r = p^j_r u_j$ $(r, j = \overline{1,3})$, where $p^r_j q^j_s = \delta^r_s$ is the Kroniker symbol, is called **covariant**. Any vector $y = (y^1, y^2, y^3)$, which change by formulas (2) is called **cogradient** of the vector x.

We will denote the set of coefficients of system (1) by a and of the system (3) by $\bar{a}$.

Definition 1. *We say (see [3]) that a polynomial $\varkappa(x,u,a)$ of the coefficients of system* (1) *and of the coordinates of vectors x and u is called* ***mixt comitant*** *of the system* (1) *with respect to the group $GL(3,\mathbb{R})$, if the following holds*

$$\varkappa(\bar{x},\bar{u},\bar{a}) = \Delta^{-g}\varkappa(x,u,a)$$

for all q from $GL(3,\mathbb{R})$, for every coordinates of vectors x and u, as well, any coefficients of system (1).

Here g is an integer number called **the weight of comitant**.

If the mixt comitant $\varkappa$ does not depend on coordinates of vector u, then following [4], we call it **comitant**. If $\varkappa$ does not depend on coordinates of vector x it will be called, as in [3], **contravariant**. If $\varkappa$ does not depend of x and u, then we call it **invariant** of the system (1) with respect to the group $GL(3,\mathbb{R})$.

It was shown in [5] that the expressions

$$\begin{gathered}\varkappa_1 = x^\alpha u_\alpha,\ \varkappa_2 = a^\alpha_\beta x^\beta u_\alpha,\\ \varkappa_3 = a^\alpha_\gamma a^\beta_\alpha x^\gamma u_\beta,\ \theta_1 = a^\alpha_\alpha,\ \theta_2 = a^\alpha_\beta a^\beta_\alpha,\\ \theta_3 = a^\alpha_\gamma a^\beta_\alpha a^\gamma_\beta,\ \delta_4 = a^\alpha_\gamma a^\beta_p a^\gamma_q u_\alpha u_\beta u_r \varepsilon^{pqr}\end{gathered} \tag{4}$$

in the coordinates of the vectors x, u and of the tensor a^j_α, compose a functional base of the mixt comitants of the linear part of differential system (1), where ε^{pqr} is the unit trivector with coordinates $\varepsilon^{123} = -\varepsilon^{132} = \varepsilon^{312} = -\varepsilon^{321} = \varepsilon^{231} = -\varepsilon^{213} = 1$ and $\varepsilon^{pqr} = 0 \ \ (p, q, r = \overline{1,3})$ for all other cases.

An important role in studying ternary systems with polynomial nonlinearities (1) has the comitant

$$\sigma_1 = a^\alpha_\mu a^\beta_\delta a^\gamma_\alpha x^\delta x^\mu x^\nu \varepsilon_{\beta\gamma\nu} \tag{5}$$

($\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{132} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{321} = \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{213} = 1$ and $\varepsilon_{\beta\gamma\nu} = 0 \ \ (\beta, \gamma, \nu = \overline{1,3})$) from [4], which is a particular integral of the system

$$\frac{dx^j}{dt} = a^j_\alpha x^\alpha \quad (j, \alpha = \overline{1,3}) \tag{6}$$

of the first approximation ([1], [2]) for (1).

In [6] it was proved the following assertion.

Lemma 1. *The following equivalences hold*:

$$\sigma_1(x) \equiv 0 \Longleftrightarrow \delta_4(u) \equiv 0 \tag{7}$$

and conversely

$$\sigma_1(x) \not\equiv 0 \Longleftrightarrow \delta_4(u) \not\equiv 0, \tag{8}$$

where δ_4 is from (4) and σ_1 is from (5).

2. Centro-affine invariant conditions for stability of unperturbed motion

As it follows from [2], the zero values of the variables $x^j(t)$ $(j = \overline{1,3})$ correspond to the to unperturbed motion of perturbed system (1). As consequence, we have the following **definition of stability by Lyapunov [2]**:

If for any small positive value ε, however small, one can find a positive number δ such that at $t = t_0$, for all perturbation $x^j(t_0)$ satisfying

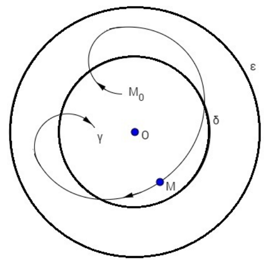
$$\sum_{j=1}^n (x^j(t_0))^2 \le \delta \tag{9}$$

the inequality

$$\sum_{j=1}^n (x^j(t))^2 < \varepsilon$$

is valid, then the unperturbed motion $x^j = 0$ $(j = \overline{1,3})$ is called stable, otherwise it is called unstable.

Geometrically this definition has the following interpretation:



If the motion is stable, then for sphere ε one can find another sphere δ such that starting at any point M_0 inside or on the surface of the sphere δ, the image point M will always remain inside the sphere ε, never reaching its external surface.

If the perturbed motion is unstable, then irrespective of how close to the reference origin the point M_0 may be, in time, at least one trajectory of the representative point M will cross the sphere ε from inside to outside.

If the unperturbed motion is stable and the value δ can be found however small such that for any perturbed motions satisfying (9) the condition

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{j=1}^n (x^j(t))^2 = 0$$

is valid, then the unperturbed motion is called *asymptotically stable.*

Lemma 2. The characteristic equation of system (1) and (6) is

$$\varrho^3 + L_{1,3}\varrho^2 + L_{2,3}\varrho + L_{3,3} = 0, \tag{10}$$

where

$$\begin{gathered} L_{1,3} = -\theta_1, \quad L_{2,3} = (\theta_1^2 - \theta_2)/2,\\ L_{3,3} = -(\theta_1^3 - 3\theta_1\theta_2 + 2\theta_3)/6,\end{gathered} \tag{11}$$

and θ_i $(i = \overline{1,3})$ are from (4).

According to Lyapunov theorems on stability of unperturbed motion by sign of the eigenvalues of the differential system in the first approximation and Hurwitz theorem to the root analysis of the characteristic equation (see [2]), there were proved the following theorems:

Theorem 1. *If the centro-affine invariants of* (1) *satisfy the following conditions*

$$L_{1,3} > 0,\ L_{2,3} > 0,\ L_{3,3} > 0,$$
$$L_{1,3}L_{2,3} - L_{3,3} > 0,$$

then the unperturbed motion $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ *of the system is asymptotically stable, where* $L_{i,3}$ $(i = \overline{1,3})$ *are the coefficients of the characteristic equation* (10) *of system* (1).

Theorem 2. *If at least one of the centro-affine invariant expression* (11) *of system* (1) *is negative, then the unperturbed motion* $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ *of this system is unstable.*

3. Lyapunov form of the ternary differential system

Let be given the system

$$\frac{dx^j}{dt} = \alpha^j_\alpha x^\alpha + a^j_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \equiv P^j(x), \tag{12}$$

$(j = \overline{1,3})$, which can be obtained from (1) for $\Gamma = \{1, 2\}$.

Lemma 3 [5]. *Suppose in* (5) *that* $\sigma_1 \equiv 0$. *Then by a centro-affine transformation*

$$\bar{x}^1 = x^2, \quad \bar{x}^2 = x^1 + \frac{a^3_2}{a^3_1}x^2, \quad \bar{x}^3 = x^3,$$

when $a^3_1 \neq 0$, *we obtain that the quadratic part of system* (12) *preserves the form, and the coefficients from the linear part of this system satisfy one of the following conditions:*

$$a^1_2 = a^1_3 = a^2_1 = a^2_3 = a^3_1 = a^3_2 = 0,\quad a^3_3 = a^2_2; \tag{13}$$

$$a^1_2 = a^1_3 = a^2_1 = a^2_3 = a^3_1 = a^3_2 = 0,\quad a^3_3 = a^1_1; \tag{14}$$

$$a^1_2 = a^1_3 = a^2_1 = a^2_3 = a^3_1 = a^3_2 = 0,\quad a^2_2 = a^1_1; \tag{15}$$

$$a^1_2 = a^1_3 = a^2_1 = a^3_1 = a^3_2 = 0,\quad a^2_3 \neq 0,\ a^3_3 = a^1_1; \tag{16}$$

$$a^1_2 = a^1_3 = a^2_1 = a^3_1 = a^3_2 = 0,\quad a^2_2 = a^1_1,\ a^2_3 \neq 0; \tag{17}$$

$$a^1_2 = a^2_1 = a^2_3 = a^3_1 = a^3_2 = 0,\quad a^1_3 \neq 0,\ a^3_3 = a^2_2; \tag{18}$$

$$a^1_2 = a^2_1 = a^3_1 = a^3_2 = 0,\quad a^1_3 \neq 0,\ a^2_2 = a^1_1; \tag{19}$$

$$a^2_1 = a^2_3 = a^3_1 = a^3_2 = 0,\quad a^1_2 \neq 0,\ a^3_3 = a^2_2; \tag{20}$$

$$a^2_1 = a^3_1 = a^3_2 = 0,\ a^1_2 \neq 0,\quad a^2_3 = \frac{a^1_3(a^2_2 - a^1_1)}{a^1_2},\ a^3_3 = a^1_1; \tag{21}$$

$$a^3_1 = a^3_2 = 0,\ a^1_3 = \frac{a^2_3(a^1_1 - a^3_3)}{a^2_1},\quad a^2_1 \neq 0,\ a^1_2 = \frac{(a^1_1 - a^3_3)(a^2_2 - a^3_3)}{a^2_1}; \tag{22}$$

$$a^2_1 = a^3_1 = 0,\ a^3_2 \neq 0,\ a^1_3 = \frac{a^1_2(a^3_3 - a^1_1)}{a^3_2},\quad a^2_3 = \frac{(a^1_1 - a^2_2)(a^1_1 - a^3_3)}{a^3_2}. \tag{23}$$

Lemma 4. *Suppose that for the linear part of system* (12) $\sigma_1 \equiv 0$, *where* σ_1 *is from* (5). *Then the characteristic equation* (10) *of this system has real eigenvalues.*

Proof. The roots of the characteristic equation (10) of system (12), under conditions (13)-(23) are given in Table 1:

Table 1.

System (12) under conditions	Eigenvalues of (10)
(13)	$\varrho_1 = a^1_1,\ \ \varrho_{2,3} = a^2_2$
(14)	$\varrho_{1,2} = a^1_1,\ \ \varrho_3 = a^2_2$
(15)	$\varrho_{1,2} = a^1_1,\ \ \varrho_3 = a^3_3$
(16)	$\varrho_{1,2} = a^1_1,\ \ \varrho_3 = a^2_2$
(17)	$\varrho_{1,2} = a^1_1,\ \ \varrho_3 = a^3_3$
(18)	$\varrho_1 = a^1_1,\ \ \varrho_{2,3} = a^2_2$
(19)	$\varrho_{1,2} = a^1_1,\ \ \varrho_3 = a^3_3$
(20)	$\varrho_1 = a^1_1,\ \ \varrho_{2,3} = a^2_2$
(21)	$\varrho_{1,2} = a^1_1,\ \ \varrho_3 = a^2_2$
(22)	$\varrho_{1,2} = a^3_3,$ $\varrho_3 = a^1_1 + a^2_2 - a^3_3$
(23)	$\varrho_{1,2} = a^1_1,$ $\varrho_3 = -a^1_1 + a^2_2 + a^3_3$

From Table 1, it follows that all eigenvalues ϱ_i $(i=\overline{1,3})$ are real. Lemma 4 is proved.

Lemma 5. *Suppose that in* (5) $\sigma_1 \not\equiv 0$. *Then system* (12), *by means of a centro-affine transformation, can be brought to the form*

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2 + a^1_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta, \\ \dot{x}^2 &= x^3 + a^2_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta, \\ \dot{x}^3 &= -L_{3,3}x^1 - L_{2,3}x^2 - \\ &\quad -L_{1,3}x^1 + a^3_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta, \end{aligned} \tag{24}$$

where $L_{i,3}$ $(i=\overline{1,3})$ *are from* (11).

Proof. Consider the substitution

$$\overline{x}^1 = \varkappa_1, \quad \overline{x}^2 = \varkappa_2, \quad \overline{x}^3 = \varkappa_3, \tag{25}$$

with $\varkappa_i$ $(i=\overline{1,3})$ given in (4).

From (25) we have

$$Det(\varkappa_1,\varkappa_2,\varkappa_3) \equiv \delta_4 = \\ = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_1^{\alpha_1}u_{\alpha_1} & a_2^{\alpha_1}u_{\alpha_1} & a_3^{\alpha_1}u_{\alpha_1} \\ a_1^{\alpha}a_\alpha^{\beta}u_\beta & a_2^{\alpha}a_\alpha^{\beta}u_\beta & a_3^{\alpha}a_\alpha^{\beta}u_\beta \end{vmatrix},$$

where δ_4 is from (4) and

$$\begin{aligned} x^1 = [&(a_2^{\alpha_1}a_3^{\alpha}a_\alpha^{\beta}u_{\alpha_1}u_\beta - a_3^{\alpha_1}a_2^{\alpha}a_\alpha^{\beta}u_{\alpha_1}u_\beta)\bar{x}^1 + \\ &+(a_2^{\alpha}a_\alpha^{\beta}u_\beta u_3 - a_3^{\alpha}a_\alpha^{\beta}u_\beta u_2)\bar{x}^2 + \\ &+(a_3^{\alpha_1}u_{\alpha_1}u_2 - a_2^{\alpha_1}u_{\alpha_1}u_3)\bar{x}^3]/\delta_4, \\ x^2 = [&(a_3^{\alpha_1}a_1^{\alpha}a_\alpha^{\beta}u_{\alpha_1}u_\beta - a_1^{\alpha_1}a_3^{\alpha}a_\alpha^{\beta}u_{\alpha_1}u_\beta)\bar{x}^1 + \\ &+(a_3^{\alpha}a_\alpha^{\beta}u_\beta u_1 - a_1^{\alpha}a_\alpha^{\beta}u_\beta u_3)\bar{x}^2 + \\ &+(a_1^{\alpha_1}u_{\alpha_1}u_3 - a_3^{\alpha_1}u_{\alpha_1}u_1)\bar{x}^3]/\delta_4, \\ x^3 = [&(a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha}a_\alpha^{\beta}u_{\alpha_1}u_\beta - a_2^{\alpha_1}a_1^{\alpha}a_\alpha^{\beta}u_{\alpha_1}u_\beta)\bar{x}^1 + \\ &+(a_1^{\alpha}a_\alpha^{\beta}u_\beta u_2 - a_2^{\alpha}a_\alpha^{\beta}u_\beta u_1)\bar{x}^2 + \\ &+(a_2^{\alpha_1}u_{\alpha_1}u_1 - a_1^{\alpha_1}u_{\alpha_1}u_2)\bar{x}^3]/\delta_4. \end{aligned} \tag{26}$$

Substituting (25) and (26) in (12) and taking into account Lemma 1 ($\delta_4 \not\equiv 0 \Leftrightarrow \sigma_1 \not\equiv 0$), we obtain the system (24). The initial notation of variables and coefficients in the quadratic parts of (24) are preserved. Lemma 5 is proved.

Lemma 6. *The characteristic equation* (10) *of system* (24) *with* $\sigma_1 \not\equiv 0$ *has purely imaginary eigenvalues if and only if the system has the form*

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2 + a^1_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta, \\ \dot{x}^2 &= x^3 + a^2_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta, \\ \dot{x}^3 &= -L_{1,3}L_{2,3}x^1 - L_{2,3}x^2 - \\ &\quad -L_{1,3}x^3 + a^3_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \quad (L_{2,3}>0), \end{aligned} \tag{27}$$

where $L_{i,3}$ $(i=\overline{1,3})$ *are of the form* (11).

Proof. By Lemma 3, it is necessary to examine only the case when $\sigma_1 \not\equiv 0$.

Assume the characteristic equation (10) has purely imaginary eigenvalues $\varrho_1 = \alpha i, \varrho_2 = -\alpha i$ ($\alpha \neq 0$ is real), then the third root, evidently is real $\varrho_3 = \beta$. By means of the *Viète* theorem for eigenvalues of (10), we can write

$$\begin{aligned} &\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = -L_{1,3}, \\ &\varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3 = L_{2,3}, \\ &\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = -L_{3,3}. \end{aligned}$$

Taking into account the last equalities, we get

$$\beta = -L_{1,3}, \quad \alpha^2 = L_{2,3}, \quad L_{3,3} = L_{1,3}L_{2,3}.$$

Since α is real and nonzero $\alpha \neq 0$, we have $L_{2,3} > 0$. Substituting the last conditions in (24), we obtain (27).

The sufficiency of these conditions is confirmed as follows. Assume system (24) is of the form (27), then the characteristic equation (10) can be written as

$$(\varrho^2 + L_{2,3})(\varrho + L_{1,3}) = 0.$$

Because $L_{2,3} > 0$, the equation has two purely imaginary eigenvalues and one real eigenvalue. Lemma 6 is proved.

Lemma 7. *By a centro-affine transformation the system* (27) *with* $\sigma_1 \not\equiv 0$ *can be brought to the Lyapunov form [1, §33]*

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= -\lambda x^2 + a^1_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta, \\ \dot{x}^2 &= \lambda x^1 + a^2_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta, \\ \dot{x}^3 &= x^2 - L_{1,3}x^3 + a^3_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta, \end{aligned} \tag{28}$$

where $L_{1,3}$ *is from* (11), *and*

$$\lambda^2 = L_{2,3} \ (L_{2,3} > 0).$$

Proof. We will examine the linear part of the ternary differential system (28) in the Lyapunov form. According to [1, §33], the linear part of this system must have the form

$$\begin{aligned} \dot{X}^1 &= -\lambda X^2 + ..., \\ \dot{X}^2 &= \lambda X^1 + ..., \\ \dot{X}^3 &= aX^1 + bX^2 + cX^3 + ..., \end{aligned} \tag{29}$$

where by dots we mean the quadratic part of the system. The coefficients λ, a, b, c are expressions in $L_{i,3}$ $(i=\overline{1,3})$ and the new variables X^1, X^2, X^3 have the form

$$\begin{aligned} X^1 &= \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, \\ X^2 &= \beta_1 x^1 + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3, \\ X^3 &= \gamma_1 x^1 + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3, \end{aligned} \tag{30}$$

where

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{31}$$

In these conditions, we observe that substitution (30) form a centro-affine transformation. Substituting (30) and (31) in the Lyapunov form (29) and comparing with the system (27), we obtain a system of nine algebraic equation in 12 unknowns.

Solving this system, we have

$$\begin{aligned} X^1 &= -L_{1,3}^2 \lambda x^1 + \lambda x^3, \\ X^2 &= L_{1,3} L_{2,3} x^1 + (L_{1,3}^2 + L_{2,3}) x^2 + L_{1,3} x^3, \\ X^3 &= 2L_{2,3} x^1 + L_{1,3} x^2 + x^3, \end{aligned}$$

where $\lambda^2 = L_{2,3}$, and

$$\Delta = -2L_{2,3}\lambda(L_{1,3}^2 + L_{2,3}) \neq 0 \ \ (L_{2,3} > 0).$$

This transformation brings the system (27) to a system with the linear part in the Lyapunov form

$$\begin{aligned} \dot{X}^1 &= -\lambda X^2 + ..., \\ \dot{X}^2 &= \lambda X^1 + ..., \\ \dot{X}^3 &= X^2 - L_{1,3} X^3 + ..., \end{aligned}$$

for which, preserving in the quadratic part the initial notations of variables and coefficients, we obtain (28). Lemma 7 is proved

4. Invariant conditions for stability of unperturbed periodic motions

We will use the following $GL(3,\mathbb{R})$-invariant polynomials for system (12) from [5–6]:

$$\begin{aligned} \eta = a^{\alpha}_{\beta\gamma} x^{\beta} x^{\gamma} x^{\delta} y^{\mu} \varepsilon_{\alpha\delta\mu},\ P_1 = a^{\alpha}_{\alpha\beta} x^{\beta}, \\ P_2 = a^{\alpha}_{\beta} a^{\beta}_{\alpha\gamma} x^{\gamma},\ \ P_3 = a^{\alpha}_{\gamma} a^{\beta}_{\alpha} a^{\gamma}_{\beta\delta} x^{\delta}, \end{aligned} \tag{32}$$

where η is a comitant of two cogradient vectors $x = (x^1, x^2, x^3)$ and $y = (y^1, y^2, y^3)$ which are linear independent.

It is easy to verify

Lemma 8 [6]. *Suppose that in system* (12) $\eta \equiv 0$. *Then the quadratic parts of this system have a common linear factor.*

The differential systems (12), with property stated in Lema 8, will be called the differential systems *of the Darboux form* [6]. If the linear part of system (12) has the Lyapunov form and the quadratic one - the Darboux form, then such systems will be called *Lyapunov-Darboux* differential systems.

In [6] it was proved the following assertion

Theorem 3. *Let* $\eta \equiv 0$. *Then system* (12) *has a* $GL(3,\mathbb{R})$*-invariant integrating factor* $\mu^{-1} = \sigma_1 \varphi$ *with* σ_1 *from* (5)*, where*

$$\varphi = -2L_{3,3} + 3L_{2,3}P_1 + 4L_{1,3}P_2 + 4P_3 \tag{33}$$

are $GL(3,\mathbb{R})$*-invariant particular integrals of this system with* $L_{i,3}$ $(i=\overline{1,3})$ *from* (11) *and* P_i $(i=\overline{1,3})$ *from* (32).

Lemma 9. *By a centro-affine transformation, the system* (12) *can be brought to the Lyapunov-Darboux form*

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= -\lambda x^2 + 2x^1(gx^1 + \\ &\quad + hx^2 + kx^3) \equiv P^1, \\ \frac{dx^2}{dt} &= \lambda x^1 + 2x^2(gx^1 + \\ &\quad + hx^2 + kx^3) \equiv P^2, \\ \frac{dx^3}{dt} &= x^2 - L_{1,3}x^3 + 2x^3(gx^1 + \\ &\quad + hx^2 + kx^3) \equiv P^3, \end{aligned} \tag{34}$$

if and only if the following centro-affine invariant conditions hold

$$\begin{aligned} &\sigma_1 \not\equiv 0, \quad \eta \equiv 0, \quad L_{1,3}L_{2,3} = L_{3,3} \\ &(\lambda^2 = L_{2,3},\ L_{2,3} > 0,\ L_{1,3} > 0), \end{aligned} \tag{35}$$

where σ_1 *is from* (5)*,* $L_{i,3}$ $(i=\overline{1,3})$ *is from* (11) *and* η *is from* (32).

The proof of Lemma 9 follows directly from Lemmas 6–8 and [1].

We determinate the Lie algebra of the operators admissible by system (34) [5]. We assume that the coordinate of the operator

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (i=\overline{1,3}),$$

have the form

$$\xi^i = A^i_\beta x^\beta + A^i_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma \quad (\beta, \gamma = \overline{1,3}),$$

and satisfy the determinant equations

$$\begin{aligned}
&(\xi^1)_{x^1} P^1 + (\xi^1)_{x^2} P^2 + (\xi^1)_{x^3} P^3 = \\
&\quad = \xi^1 P^1_{x^1} + \xi^2 P^1_{x^2} + \xi^3 P^1_{x^3}, \\
&(\xi^2)_{x^1} P^1 + (\xi^2)_{x^2} P^2 + (\xi^2)_{x^3} P^3 = \\
&\quad = \xi^1 P^2_{x^1} + \xi^2 P^2_{x^2} + \xi^3 P^2_{x^3}, \\
&(\xi^3)_{x^1} P^1 + (\xi^3)_{x^2} P^2 + (\xi^3)_{x^3} P^3 = \\
&\quad = \xi^1 P^3_{x^1} + \xi^2 P^3_{x^2} + \xi^3 P^3_{x^3}.
\end{aligned}$$

Then solving this system for (34), we obtain the following operators

$$\begin{aligned}
X_1 = {} & \{\lambda L_{1,3} x^1 - \lambda^2 x^2 + \\
& +2[(-k - hL_{1,3} + g\lambda)(x^1)^2 + \\
& +(gL_{1,3} + h\lambda)x^1 x^2]\}\frac{\partial}{\partial x^1} + \\
& +\{\lambda^2 x^1 + \lambda L_{1,3} x^2 + 2(-k - hL_{1,3} + \\
& +g\lambda)x^1 x^2 + 2(gL_{1,3} + h\lambda)(x^2)^2\}\frac{\partial}{\partial x^2} + \\
& +\{\lambda x^2 + 2(-k - hL_{1,3} + g\lambda)x^1 x^3 + \\
& +2(gL_{1,3} + h\lambda)x^2 x^3\}\frac{\partial}{\partial x^3}, \\
X_2 = {} & [\lambda^2 x^1 + \lambda L_{1,3} x^2 + \\
& +2(-gL_{1,3} - h\lambda)(x^1)^2 + \\
& +2(g\lambda - k - hL_{1,3})x^1 x^2]\frac{\partial}{\partial x^1} + \\
& +[\lambda L_{1,3} x^1 + \lambda^2 x^2 - 2(gL_{1,3} + h\lambda)x^1 x^2 + \\
& +2(g\lambda - k - hL_{1,3})(x^2)^2]\frac{\partial}{\partial x^2} + \\
& +[-\lambda x^1 + 2(-gL_{1,3} - h\lambda)x^1 x^3 - \\
& -2(k + hL_{1,3} - g\lambda)x^2 x^3]\frac{\partial}{\partial x^3}, \\
X_3 = {} & \{-\lambda L_{1,3} + 2[(k + hL_{1,3})x^1 - \\
& -gL_{1,3} x^2 + k\lambda x^3]\}(x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \\
& +x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3}).
\end{aligned} \tag{36}$$

By means of the commutators $[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$ we can verify that these operators form a Lie three-dimensional commutative algebra.

According to [7] and using the operators $X_\alpha = \xi^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}$ $(\alpha = 1, 2;\ i = \overline{1,3})$ (ignoring a constant factor) we obtain the Lie integrating factor of the form

$$\mu^{-1} = \begin{vmatrix} \xi^1_1 & \xi^2_1 & \xi^3_1 \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 & \xi^3_2 \\ P^1 & P^2 & P^3 \end{vmatrix}$$

or

$$\begin{aligned}
\mu^{-1} = {} & [\lambda L_{1,3} - 2((k + hL_{1,3})x^1 - \\
& -gL_{1,3} x^2 + k\lambda x^3)]\sigma_1.
\end{aligned} \tag{37}$$

Using this expression and the Theorem on integrating factor, we have

Theorem 4. *One of the first integrals of system* (34) *has the form*

$$F_1 \equiv \frac{f_1}{f_2^2} = C_1, \tag{38}$$

where

$$\begin{aligned}
f_1 &= (x^1)^2 + (x^2)^2, \\
f_2 &= -\lambda L_{1,3} + 2(k + hL_{1,3})x^1 - \\
&\quad -2gL_{1,3} x^2 + 2\lambda k x^3.
\end{aligned} \tag{39}$$

Corollary 1. *For system* (34) *we have*

$$\varphi = 12\lambda f_2, \tag{40}$$

where φ is of the form (33).

Corollary 2. *The first integral* (38) *with $f_2 \not\equiv 0$ ($\varphi \not\equiv 0$) can be written as a holomorphic integral of the form*

$$\widetilde{F_1} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + F(x^1, x^2, x^3), \tag{41}$$

where $F(x^1, x^2, x^3)$ contains terms of degree at least two in variables x^1, x^2, x^3.

By Lemma 9, Theorem 4, Corollaries 1 and 2, there were established the centro-affine invariant conditions for the existence of a holomorphic integral (41) for differential system (12). Taking into account this, the Lyapunov Theorem on stability of unperturbed motion [1, §40, p. 160] and the holomorphic integral (41) we obtain the following main result.

Theorem 5. *Suppose for system* (12) *the centro-affine invariant conditions* (35) *hold, the comitant* φ *from* (33) *is a non-constant function and is not identically zero, and condition* $L_{1,3} > 0$ *from* (11) *is satisfied. Then the system has a periodic solution containing an arbitrary constant and varying the constant one can obtain a continuous sequences of periodic motions which describe the studied unperturbed motion. This motion is stable and any other unperturbed motion will tend asymptotically to one of the periodic motions.*

Assume that $L_{1,3} = 0$, then the differential system (34) admits the following operators

$$\begin{aligned}
X_1 = {} & [2hx^1x^2 + 2(k-g\lambda)x^1x^3 - \\
& -\lambda x^2]\frac{\partial}{\partial x^1} + \\
& +[2h(x^2)^2 + \lambda x^1 + \\
& +2(k-g\lambda)x^2x^3]\frac{\partial}{\partial x^2} + [2hx^2x^3 + \\
& +2(k-g\lambda)(x^3)^2 + x^2]\frac{\partial}{\partial x^3}, \\
X_2 = {} & [2(k-g\lambda)x^1x^2 - 2h\lambda^2x^1x^3 - \\
& -\lambda^2x^1]\frac{\partial}{\partial x^1} + \\
& +[2(k-g\lambda)(x^2)^2 - \lambda^2x^2 - \\
& -2h\lambda^2x^2x^3]\frac{\partial}{\partial x^2} + [2(k-g\lambda)x^2x^3 - \\
& -2h\lambda^2(x^3)^2 + \lambda x^1]\frac{\partial}{\partial x^3}, \\
X_3 = {} & (x^1 + \lambda x^3)(x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \\
& +x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3}),
\end{aligned} \tag{42}$$

which form a Lie commutative algebra.

Using the first two operators and ignoring a constant factor, similarly to the previous case, we obtain the Lie integrating factor

$$\mu^{-1} = ((x^1)^2 + (x^2)^2)(x^1 + \lambda x^3)^2. \tag{43}$$

By means of this expression and the Lie Theorem on integrating factor [7], we have the following assertion.

Theorem 6. *The differential system* (34) *with* $L_{1,3} = 0$ *has a general integral composed of the following two first integrals*

$$\begin{aligned}
F_1 \equiv {} & \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2}{(x^1 + \lambda x^3)^2} = C_1, \\
F_2 \equiv {} & \frac{\lambda^2 + 2(\lambda g - k)x^2 + 2\lambda^2hx^3}{x^1 + \lambda x^3} + \\
& +2k\, arctg\frac{x^2}{x^1} = C_2.
\end{aligned} \tag{44}$$

Remark 1. *The Lie algebra* (42)*, the Lie integrating factor* (43)*, the first integral* (44) *of the system* (34)*, ignoring constant factor, can be obtained from the Lie algebra* (36)*, the first integrating factor* (37) *and the first integral* (38)*, respectively, by substituting* $L_{1,3} = 0$.

Acknowledgements. This research was supported by FP7-PEOPLE-2012-IRSES-316338.

REFERENCES

1. *Lyapunov A.M.* Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya. Sobranie sochinenii, II. — Moskva-Leningrad: Izd. Acad. nauk S.S.S.R., 1956. — 472 p.

2. *Merkin D.R.* Introduction to the Theory of Stability. — NY: Springer-Verlag, 1996. — 304 p.

3. *Gurevich G.B.* Foundations of the theory of algebraic invariants. — M.: GITTL, 1948. — 408 p. (English transl., Nordhoff, 1964).

4. *Sibirsky K.S.* Introduction to the algebraic theory of invariants of differential equations. Nonlinear Science: Theory and Applications. Manchester: Manchester University Press, 1988. — 169 p.

5. *Gerştega N.* Lie algebras for the three-dimensional differential system and applications. — Chişinău: Synopsis of PhD thesis, 2006. — 21 p.

6. *Diaconescu O.* Lie algebras and invariant integrals for polynomial differential systems. — Chişinău: PhD thesis, 2008. — 126 p.

7. *Gerştega N., Popa M.N.* Lie algebras of the operators and three-dimensional polynomial differential system// Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Moldova, Mat. – 2005. – **48**, N2. – P. 51-64.

УДК 517.95

©2016 р. З.М. Нитребич [1], О.М. Маланчук [1,2]

[1] Національний університет „Львівська політехніка", м. Львів
[2] Національний медичний університет ім. Д. Галицького, м. Львів

КРИТЕРІЙ ІСНУВАННЯ НЕТРИВІАЛЬНИХ КВАЗІПОЛІНОМНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОРІДНОЇ ДВОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Знайдено необхідні та достатні умови існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за $s \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ просторовими змінними зі сталими комплексними коефіцієнтами, що задовольняють однорідні локальні двоточкові умови. Існування таких розв'язків забезпечується умовою – множина нулів характеристичного визначника задачі не є порожньою.

The necessary and sufficient conditions of existence of the nontrivial quasipolynomial solutions of homogeneous partial differential equation of second order in time variable and generally infinite order in $s \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ spatial variables with constant complex coefficients that satisfy homogeneous local two-point conditions is established. The existence of these solutions is provided by the condition that the set of zeroes of characteristic determinant of problem is not empty.

Вступ. Розв'язність задач з багатоточковими умовами за часовою змінною для лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними на основі метричного підходу вперше було запропоновано у праці [1]. У цій статті було вказано на проблему малих знаменників, доведено некоректність цих задач, також було показано, що на відміну від задачі Коші відповідна однорідна багатоточкова за часом задача може мати нетривіальні розв'язки. Дослідження задач з багатоточковими умовами для рівнянь та систем диференціальних рівнянь із частинними похідними в обмежених областях з використанням метричного підходу за останні роки істотно розвинуто (див. праці [2, 3, 4] та бібліографію в них).

В необмежених областях (смуга, шар) однозначну розв'язність задач із локальними багатоточковими за часом умовами для рівнянь із частинними похідними досліджували у [5, 6, 7]. У цих працях знайдено простори функцій, у яких для n-точкової задачі є відсутньою проблема малих знаменників.

Зазначимо, що багатоточкова задача для звичайного диференціального рівняння зустрічається в літературі з назвою задача Валле-Пуссена. Такого роду задачі вперше вивчалися у працях [8, 9, 10].

У цій праці встановлено умови існування нетривіальних (квазіполіномного вигляду) розв'язків однорідного диференціального рівняння другого порядку за часом та загалом довільного порядку за просторовими змінними, що задовольняють локальні двоточкові за часом умови. Праця продовжує дослідження [11], де вивчалася двоточкова задача для диференціального рівняння з однією просторовою змінною.

1. Формулювання задачі. В області змінних $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^s$ $(s \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$ досліджується множина розв'язків однорідної двоточкової задачі:

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)U(t,x) \equiv \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2a\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t} + b\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U = 0, \quad (1)$$

$$A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(0,x) + A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0,$$
$$B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(h,x) + B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = 0. \quad (2)$$

У рівнянні (1) вважаємо, що операторні коефіцієнти $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ є довільними диференціальними виразами з комплексними коефіцієнтами скінченного або нескінченного порядку, а символи $a(\nu)$, $b(\nu)$ цих коефіцієнтів є цілими функціями комплексної векторзмінної $\nu \in \mathbb{C}^s$. Щодо диференціальних поліномів $A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ з комплексними коефіцієнтами у двоточкових умовах (2) накладаємо припущення, що $|A_1(\nu)|^2+|A_2(\nu)|^2 \neq 0$ та $|B_1(\nu)|^2+|B_2(\nu)|^2 \neq 0$ для довільного $\nu \in \mathbb{C}^s$. Крім того, $h > 0$.

Однорідна задача (1), (2), очевидно, має тривіальний розв'язок. У статті встановимо необхідні та достатні умови існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків задачі (1), (2) і вкажемо метод їх побудови.

2. Допоміжні результати. За рівнянням (1) та умовами (2) складемо характеристичний визначник задачі

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} \Delta_{11}(\nu) & \Delta_{12}(\nu) \\ \Delta_{21}(\nu) & \Delta_{22}(\nu) \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

де

$$\Delta_{11}(\nu) = A_1(\nu), \ \ \Delta_{12}(\nu) = A_2(\nu),$$
$$\Delta_{21}(\nu) = B_1(\nu)T_0(h,\nu) + B_2(\nu)\frac{dT_0}{dt}(h,\nu),$$
$$\Delta_{22}(\nu) = B_1(\nu)T_1(h,\nu) + B_2(\nu)\frac{dT_1}{dt}(h,\nu),$$

функції $T_0(t,\nu)$, $T_1(t,\nu)$ є елементами нормальної в точці $t = 0$ фундаментальної системи розв'язків звичайного диференціального рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)T(t,\nu) = 0, \quad \nu \in \mathbb{C}^s.$$

Розглянемо множину

$$M = \left\{\nu \in \mathbb{C}^s: \ \ \Delta(\nu) = 0\right\}, \qquad (4)$$

причому припускаємо, що $M \neq \varnothing$ і $M \neq \mathbb{C}^s$.

Нехай $\alpha \in M$. Розглянемо для комплексного вектора α таку множину мультиіндексів:

$$\Omega(\alpha) = \left\{r = (r_1,\dots,r_s) \in \mathbb{Z}_+^s : \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^r \Delta(\nu)\Big|_{\nu=\alpha} \equiv \Delta^{(r)}(\alpha) \neq 0\right\},$$

де $\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^r \Delta(\nu) = \frac{\partial^{|r|}\Delta(\nu)}{\partial\nu_1^{r_1}\dots\partial\nu_s^{r_s}}$, $|r| = r_1+\dots+r_s$.

Вважаємо, що $r \geq q$ для двох векторів $r = (r_1,\dots,r_s)$ та $q = (q_1,\dots,q_s)$ з $\mathbb{Z}_+^s$, якщо $r_1 \geq q_1,\dots,r_s \geq q_s$. Крім того, позначимо $C_r^q = \frac{r\,!}{q\,!(r-q)!}$, де $r\,! = \prod\limits_{k=1}^{s} r_k!$, $r_k! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot r_k$, $0! = 1$, O – вектор з нульовими координатами, $x^r = x_1^{r_1}\dots x_s^{r_s}$, $x = (x_1,\dots,x_s) \in \mathbb{R}^s$, $\nu\cdot x = \nu_1x_1+\dots+\nu_sx_s$, $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_s) \in \mathbb{C}^s$.

Лема 1. *Нехай задано аналітичну функцію $\mu(\nu)$, причому $\mu(\alpha) \neq 0$ для деякого $\alpha \in \mathbb{C}^s$, цілу функцію $\gamma(\nu)$, а також поліном $\varphi(x) = \sum\limits_{0\leq|r|\leq n} \varphi_r x^r$, $\varphi_r \in \mathbb{C}$, степінь якого дорівнює $n \in \mathbb{Z}_+$, тобто $\sum\limits_{|r|=n} |\varphi_r| > 0$. Тоді існує поліном $\varphi^\mu(x)$ степеня n, для якого виконується така рівність*

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\mu(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha} = \varphi^\mu\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha}. \quad (5)$$

Доведення. Ліву частину рівності (5) подамо у вигляді

$$\sum_{0\leq|r|\leq n} \varphi_r \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^r \left\{\mu(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha} = \sum_{0\leq|r|\leq n}\varphi_r \times$$
$$\times \sum_{O\leq q\leq r} C_r^q \mu^{(r-q)}(\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^q \left\{\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

Змінивши порядок сумування, одержимо

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\mu(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \sum_{0\leq|r|\leq n} \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^r \left\{\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha} \times$$
$$\times \sum_{q\geq r,\,|q|\leq n} C_q^r \mu^{(q-r)}(\alpha)\varphi_q.$$

Отже, шуканий поліном $\varphi^{\mu}(x)$ має такий вигляд:

$$\varphi^{\mu}(x)=\mu(\alpha)\sum_{|r|=n}\varphi_r x^r+$$
$$+\sum_{0\le|r|\le n-1}x^r\sum_{q\ge r,\,|q|\le n}C_q^r\mu^{(q-r)}(\alpha)\varphi_q.$$

Оскільки $\mu(\alpha)\ne 0$ і $\sum\limits_{|r|=n}|\varphi_r|>0$, то побудований поліном $\varphi^{\mu}(x)$ має степінь n і для нього виконується рівність (5). ■

Лема 2. *Нехай $A=A\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$ – диференціальний поліном з комплексними коефіцієнтами, $\alpha\in\mathbb{C}^s$ і $\varphi_\alpha(x)=\varphi(x)e^{\alpha\cdot x}$ – квазіполіномом, що належить до ядра оператора A, тобто $\varphi_\alpha\in\ker A$, або $A\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)\varphi_\alpha(x)\equiv 0$. Тоді $A(\alpha)=0$ і для довільної аналітичної в околі $\nu=O$ функції $\gamma(\nu)$ виконується тотожність на $\mathbb{R}^s$*

$$\varphi_\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{A(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}=$$
$$=\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{A(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}\equiv 0.\quad(6)$$

Доведення. Зобразимо квазіполіномний елемент ядра оператора A у вигляді

$$\varphi_\alpha(x)=\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\big\{e^{\nu\cdot x}\big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

Подіємо на останню рівність диференціальним виразом $A\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$:

$$A\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\varphi_\alpha(x)=A\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\big\{e^{\nu\cdot x}\big\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$
$$=\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

Оскільки $\varphi_\alpha\in\ker A$, то виконується тотожність на $\mathbb{R}^s$:

$$\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}\equiv 0.\qquad(7)$$

Тоді для довільного $x\in\mathbb{R}^s$ маємо

$$\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{A(\nu)\gamma(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$
$$=\gamma\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$
$$=\gamma\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\cdot 0=0.$$

Отже, тотожність (6) встановлено.

Доведемо, що $A(\alpha)=0$. Нехай $\varphi(x)=\sum\limits_{0\le|r|\le n}\varphi_r x^r$, $\varphi_r\in\mathbb{C}$, причому $\sum\limits_{|r|=n}|\varphi_r|>0$, тобто $\deg\varphi(x)=n$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Тоді з тотожності (7) отримуємо

$$0\equiv\sum_{0\le|r|\le n}\varphi_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$
$$=\sum_{|r|=n}\varphi_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}+$$
$$+\sum_{0\le|r|<n}\varphi_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$
$$=\sum_{|r|=n}\varphi_r\sum_{O\le q\le r}C_r^q x^q e^{\alpha\cdot x}A^{(r-q)}(\alpha)+$$
$$+\sum_{0\le|r|<n}\varphi_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=$$
$$=e^{\alpha\cdot x}A(\alpha)\sum_{|r|=n}\varphi_r x^r+$$
$$+e^{\alpha\cdot x}\sum_{|r|=n}\varphi_r\sum_{O\le q\le r,\,q\ne r}C_r^q A^{(r-q)}(\alpha)x^q+$$
$$+\sum_{0\le|r|<n}\varphi_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{A(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

З умови $\sum\limits_{|r|=n}|\varphi_r|>0$ маємо $A(\alpha)=0$. ■

3. Основний результат. Для підмножини D простору $\mathbb{C}^s$ розглянемо такі класи квазіполіномів:

— K_D – це клас квазіполіномів вигляду

$$g(x)=\sum_{j=1}^m Q_j(x)e^{\alpha_j\cdot x},\quad x\in\mathbb{R}^s,\ m\in\mathbb{N},$$

де $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ – попарно різні комплексні вектори з D і $Q_1(x),\dots,Q_m(x)$ – ненульові поліноми з комплексними коефіцієнтами;

— $K_{\mathbb{C},D}$ – це клас квазіполіномів вигляду

$$f(t,x)=\sum_{j=1}^m\sum_{l=1}^N P_{lj}(t,x)e^{\beta_l t+\alpha_j\cdot x},\ \ m,N\in\mathbb{N},$$

де $P_{11}(t,x),\dots,P_{Nm}(t,x)$ – ненульові поліноми змінних $t,x_1,\dots,x_s$ з комплексними коефіцієнтами, $\beta_1,\dots,\beta_N$ – попарно різні комплексні числа, а попарно різні комплексні вектори $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ належать до D.

Теорема 1. *Нехай M – множина (4) і $g(x)$ – нетривіальний одночленний квазіполіном з класу K_M вигляду*

$$g(x) = Q(x)e^{\alpha\cdot x}, \tag{8}$$

в якому $Q(x) = \sum\limits_{0\le|r|\le n} D_r x^r$ – поліном n-го степеня ($\sum\limits_{|r|=n}|D_r|>0,\ n\in\mathbb{Z}_+$), коефіцієнти D_r якого задовольняють однорідну систему алгебричних рівнянь:

$$\sum_{\substack{r\ge q,\,0\le|r|\le n,\\ r-q\,\in\,\Omega(\alpha)}} D_r C_r^q \Delta^{(r-q)}(\alpha) = 0,$$

$$q\in\mathbb{Z}_+^s,\ |q|\le n-1. \tag{9}$$

Тоді квазіполіном

$$U(t,x) = g\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O} = \\ = Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}, \tag{10}$$

в якому

$$\Phi(t,x,\nu) = \big[A_2(\nu)T_0(t,\nu) - A_1(\nu)T_1(t,\nu)\big]e^{\nu\cdot x}, \tag{11}$$

є нетривіальним розв'язком задачі (1), (2). Навпаки, якщо ненульовий квазіполіном, одночленний за змінною x, тобто $U(t,x)=F(t,x)e^{\alpha\cdot x}$, є розв'язком задачі (1), (2), то його можна зобразити у вигляді (10), де $g(x)$ належить до K_M, має вигляд (8) і коефіцієнти D_r полінома $Q(x)$ задовольняють систему (9).

Доведення. *Достатність.* Покажемо спочатку, що функція (10) задовольняє рівняння (1). Враховуючи комутативність операцій $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ та $\frac{\partial}{\partial \nu}$ маємо

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)\left\{g\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}\right\} = \\ = g\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=O}\right\} = \\ = g\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\Big[A_2(\nu)L\Big(\frac{d}{dt},\nu\Big)T_0(t,\nu) - \\ - A_1(\nu)L\Big(\frac{d}{dt},\nu\Big)T_1(t,\nu)\Big]\Big\}\Big|_{\nu=O} = 0.$$

Покажемо для (10) виконання першої умови (2):

$$A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(0,x) + A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = \\ = A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\,Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(0,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} + \\ + A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\,Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}(0,x,\nu)\right\}\Big|_{\nu=\alpha} = \\ = Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{A_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\big[A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\big]\right\}\Big|_{\nu=\alpha} - \\ - Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{A_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\big[A_1(\nu)e^{\nu\cdot x}\big]\right\}\Big|_{\nu=\alpha} = \\ = Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\big[A_1(\nu)A_2(\nu) - \\ - A_1(\nu)A_2(\nu)\big]\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} = 0.$$

Функція (10) задовольняє другу умову (2). Справді,

$$B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(h,x) + B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = \\ = B_1\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\,Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(h,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} + \\ + B_2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}(h,x,\nu)\right\}\Big|_{\nu=\alpha} = \\ = Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{B_1(\nu)\Phi(h,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} + \\ + Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{B_2(\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial t}(h,x,\nu)\right\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{e^{\nu\cdot x}\Delta(\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} = \\ = \sum_{0\le|r|\le n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{e^{\nu\cdot x}\Delta(\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} = \\ = \sum_{0\le|r|\le n} D_r \sum_{O\le q\le r} C_r^q x^q e^{\alpha\cdot x}\Delta^{(r-q)}(\alpha) = \\ = e^{\alpha\cdot x}\sum_{0\le|r|\le n}\ \sum_{O\le q\le r} D_r C_r^q x^q \Delta^{(r-q)}(\alpha) =$$

$$= e^{\alpha\cdot x}\sum_{0\le|q|\le n} x^q \sum_{r\ge q,\ |r|\le n} D_r C_r^q \Delta^{(r-q)}(\alpha).$$

Останній вираз дорівнюватиме нулю тоді та лише тоді, коли

$$\forall q\in\mathbb{Z}_+^s\ |q|\le n:\quad \sum_{r\ge q,\ |r|\le n} D_r C_r^q \Delta^{(r-q)}(\alpha)=0.$$

Зауважимо, якщо $|q|=n$, то $r=q$, а усі рівності $D_q\Delta(\alpha)=0$ в останній системі будуть тотожностями $0\equiv 0$ для всіх D_q. Крім того, залишаємо лише ті доданки, для яких $\Delta^{(r-q)}(\alpha)\neq 0$, тобто для $r-q\in\Omega(\alpha)$. Отже, останню систему можна записати у вигляді (9).

Покажемо, що функція (10) є ненульовою. Для цього обчислимо значення цієї функції та її похідної в точці $t=0$:

$$\begin{aligned}
U(0,x)&=\\
&=\sum_{0\le|r|\le n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=\\
&=\sum_{|r|=n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}+\\
&+\sum_{0\le|r|<n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=\\
&=\sum_{|r|=n} D_r\sum_{O\le q\le r} C_r^q x^q e^{\alpha\cdot x}A_2^{(r-q)}(\alpha)+\\
&+\sum_{0\le|r|<n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=\\
&=e^{\alpha\cdot x}A_2(\alpha)\sum_{|r|=n} D_r x^r+\\
&+e^{\alpha\cdot x}\sum_{|r|=n} D_r\sum_{O\le q\le r,\, q\neq r} C_r^q A_2^{(r-q)}(\alpha)x^q+\\
&+\sum_{0\le|r|<n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.
\end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)&=\\
&=-\sum_{0\le|r|\le n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{A_1(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}=\\
&=-e^{\alpha\cdot x}A_1(\alpha)\sum_{|r|=n} D_r x^r-\\
&-e^{\alpha\cdot x}\sum_{|r|=n} D_r\sum_{O\le q\le r,\, q\neq r} C_r^q A_1^{(r-q)}(\alpha)x^q-\\
&-\sum_{0\le|r|<n} D_r\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)^r\Big\{A_1(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.
\end{aligned}$$

З умови $\sum\limits_{|r|=n}|D_r|>0$ одержуємо, що $\sum\limits_{|r|=n} D_r x^r$ – нетривіальний поліном степеня $n\in\mathbb{Z}_+$. Оскільки $|A_1(\alpha)|^2+|A_2(\nu)|^2>0$, то нетривіальними одночленними за змінною x квазіполіномами є $U(0,x)$ або $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)$. Отже, функція вигляду (10), як розв'язок задачі Коші з ненульовими початковими даними є нетривіальною.

Доведемо *необхідність*. Нехай $U(t,x)$ – нетривіальний розв'язок задачі (1), (2), що належить до $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s}$ і має за змінною x одночленний вигляд, тобто

$$U(t,x)=F(t,x)e^{\alpha\cdot x},\quad \alpha\in\mathbb{C}^s, \tag{12}$$

де $F(t,x)=\sum\limits_{l=1}^{N}P_l(t,x)e^{\beta_l t}$, $P_1(t,x),\ldots,P_N(t,x)$ – поліноми змінних $t,x_1,\ldots,x_s$ з комплексними коефіцієнтами, $\beta_1,\ldots,\beta_N$ – попарно різні комплексні числа, $N\in\mathbb{N}$.

Позначимо $U(0,x)=g_1(x)=\varphi_1(x)e^{\alpha\cdot x}$, $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=g_2(x)=\varphi_2(x)e^{\alpha\cdot x}$, де $\varphi_1(x)=F(0,x)$, $\varphi_2(x)=\frac{\partial F}{\partial t}(0,x)$. Тоді хоча б один з поліномів $\varphi_1(x)$ або $\varphi_2(x)$ є нетривіальним. Квазіполіном $U(t,x)$ як єдиний розв'язок задачі Коші

$$L\Big(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\Big)U(t,x)=0,$$

$$U(0,x)=g_1(x),\quad \frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=g_2(x),$$

можна згідно з диференціально-символьним методом [12] записати у вигляді

$$\begin{aligned}
U(t,x)=g_1\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}&+\\
+g_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=O}&
\end{aligned}$$

або

$$U(t,x) = \varphi_1\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_0(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} +$$
$$+\varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}. \quad (13)$$

Покажемо, що функцію (13) можна подати у вигляді (10) з деяким нетривіальним поліномом $Q(x)$. Нехай спочатку обидва поліноми $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ є нетривіальними. З умови $|A_1(\alpha)|^2 + |A_2(\alpha)|^2 \neq 0$ одержуємо, що $A_1(\alpha) \neq 0$ або $A_2(\alpha) \neq 0$. Припустимо, що $A_1(\alpha) \neq 0$. Відповідно до леми 1 для полінома $\varphi_1(x)$ існує поліном $\varphi_1^{A_1}(x)$ того ж степеня такий, що

$$U(t,x) = \varphi_1^{A_1}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{\frac{T_0(t,\nu)}{A_1(\nu)}e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha} +$$
$$+\varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

З виконання для функції $U(t,x)$ першої двоточкової умови (2) одержимо тотожність

$$\varphi_1^{A_1}(x) + \varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{A_2(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} \equiv 0,$$

з урахуванням якої маємо

$$U(t,x) = -\varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Big[\frac{A_2(\nu)T_0(t,\nu)}{A_1(\nu)} -$$
$$- T_1(t,\nu)\Big]e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$
$$= -\varphi_2^{A_1^{-1}}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}.$$

Отже, розв'язок (12) задачі (1), (2) ми подали у вигляді (10), де $Q(x) = -\varphi_2^{A_1^{-1}}(x)$.

Цілком аналогічно доводиться, що за умови $A_2(\alpha) \neq 0$ розв'язок (12) задачі (1), (2) можна подати у вигляді (10), де $Q(x) = \varphi_1^{A_2^{-1}}(x)$.

Розглянемо тепер випадок, коли $\varphi_1(x) \equiv 0$, а, отже, $\varphi_2(x) \not\equiv 0$. Тоді розв'язок задачі (1), (2) можна подати у вигляді

$$U(t,x) = \varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{T_1(t,\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha}. \quad (14)$$

З виконання першої двоточкової умови одержуємо, що $\varphi_2(x)e^{\alpha\cdot x} \in \ker A_2\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)$. Звідси згідно з лемою 2 маємо, що $A_2(\alpha) = 0$, а тому $A_1(\alpha) \neq 0$. Тоді функцію (14) можна подати у вигляді

$$U(t,x) = -\varphi_2^{A_1^{-1}}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Phi(t,x,\nu)\Big\}\Big|_{\nu=\alpha},$$

оскільки за лемою 2 маємо

$$\varphi_2^{A_1^{-1}}\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\left[A_2(\nu)T_0(t,\nu)\right]e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} =$$
$$= \varphi_2\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\left\{\frac{A_2(\nu)T_0(t,\nu)}{A_1(\nu)}e^{\nu\cdot x}\right\}\Big|_{\nu=\alpha} \equiv 0.$$

Аналогічним є доведення і у випадку, коли $\varphi_2(x) \equiv 0$.

Отже, доведено, що розв'язок (12) задачі (1), (2) можна подати у вигляді (10), де $Q(x) = \sum_{0\le|r|\le n} D_r x^r$ – нетривіальний поліном степеня $n \in \mathbb{Z}_+$, тобто $\sum_{|r|=n} |D_r| > 0$.

З виконання другої умови (2) для функції (12) одержимо тотожність

$$Q\Big(\frac{\partial}{\partial\nu}\Big)\Big\{\Delta(\nu)e^{\nu\cdot x}\Big\}\Big|_{\nu=\alpha} \equiv 0,$$

з якої одержуємо

$$\sum_{|r|=n} D_r x^r \Delta(\alpha) + \ldots \equiv 0,$$

де $\ldots$ означає поліном вектор-змінної x, степеня нижчого за n. Звідси випливає, що $D_r\Delta(\alpha) \equiv 0$ для всіх $|r| = n$, тобто $\Delta(\alpha) = 0$ і $\alpha \in M$. Це означає, що квазіполіном $g(x) = Q(x)e^{\alpha\cdot x}$ належить до K_M. Коефіцієнти полінома $Q(x)$ задовольняють при цьому систему (9) (див. доведення достатності в теоремі 1). ■

Зауваження 1. *Якщо до множини $\Omega(\alpha)$ не належать мультиіндекси $r \in \mathbb{Z}_+^s$, для яких $|r| < k$, $k \in \mathbb{N}$, то в системі лінійних алгебричних рівнянь* (9) *для коефіцієнтів D_r, $|r| < k$, полінома $Q(x)$ одержуємо тотожності $0 \equiv 0$. Тому усі згадані коефіцієнти є довільними. Для побудови нетривіального розв'язку задачі* (1), (2) *за формулою* (9) *можна взяти довільний ненульовий квазіполіном* (8), *у якого* $\deg Q(x) \le k-1$.

Зауваження 2. *Якщо* $M = \mathbb{C}^s$, *тобто* $\Delta(\nu) \equiv 0$, *то рівняння в системі* (9) *для коефіцієнтів полінома* $Q(x)$ *будуть тотожностями* $0 \equiv 0$, *тому формула* (10) *визначає нетривіальні розв'язки задачі* (1), (2) *для довільного нетривіального квазіполінома* (8).

4. Приклад. Знайти в області $(t, x) \in \mathbb{R}^3$ розв'язки $U = U(t, x)$ двоточкової задачі

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\frac{\partial U}{\partial t} + \Big(1 - \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}\Big) U = 0, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &\Big(1 + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Big) U(0, x) + \frac{\partial U}{\partial t}(0, x) = 0, \\ &\Big(1 + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big) U(1, x) + \frac{\partial U}{\partial t}(1, x) = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

∇ Маємо $a(\nu) = 1$, $b(\nu) = 1 - \nu_1^2 \nu_2^2$, $D(\nu) = \nu_1^2 \nu_2^2$, $A_1(\nu) = 1 + \nu_1^2$, $A_2(\nu) = B_2(\nu) = 1$, $B_1(\nu) = 1 + \nu_2^2$, $s = 2$, $h = 1$, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, $x = (x_1, x_2)$, $\Delta(\nu) = e^{-1}\big(\nu_1^2 - \nu_2^2\big)\cosh[\nu_1 \nu_2]$,

$$M = \big\{(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{C}^2 : \quad \Delta(\nu) = 0\big\}.$$

Функція (11) для задачі (15), (16) має вигляд

$$\Phi(t, x, \nu) = \\ = \Big\{\cosh[\nu_1 \nu_2 t] - \nu_1^2 \frac{\sinh[\nu_1 \nu_2 t]}{\nu_1 \nu_2}\Big\} e^{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 - t}.$$

Розглянемо підмножини векторів, з яких складається множина M:

1) $\nu = \alpha_\pm(\mu) \equiv (\pm\mu, \mu)$, де $\mu \in \mathbb{C}$, причому $\mu \neq 0$ і $\mu \neq \mu_*$, а μ_* – корінь рівняння $\cosh[\mu^2] = 0$;

2) $\nu = \beta(\mu) \equiv \Big(\frac{\mu_*^2}{\mu}, \mu\Big)$, де $\mu \in \mathbb{C}$, причому $\mu \neq 0$ і $\mu \neq \mu_*$;

3) $\nu = O \equiv (0, 0)$;

4) $\nu = \gamma_\pm \equiv \big(\pm\mu_*, \mu_*\big)$.

Використовуючи теорему 1 побудуємо нетривіальні розв'язки задачі (15), (16), що відповідають $\nu = \alpha_\pm(\mu)$ з першої підмножини.

Обчислюємо

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Delta}{\partial \nu_1}\big(\alpha_\pm(\mu)\big) = \pm 2 e^{-1} \mu \cosh[\mu^2] \neq 0, \\ &\frac{\partial \Delta}{\partial \nu_2}\big(\alpha_\pm(\mu)\big) = -2 e^{-1} \mu \cosh[\mu^2] \neq 0, \end{aligned}$$

тому $(1, 0), (0, 1) \in \Omega(\alpha_\pm(\mu))$.

Узявши квазіполіном вигляду

$$g(x_1, x_2) = \big(D_{00} + D_{10} x_1 + D_{01} x_2\big) e^{\pm\mu x_1 + \mu x_2}, \\ D_{00}, D_{10}, D_{01} \in \mathbb{C}, \tag{17}$$

для коефіцієнтів D_{00}, D_{10}, D_{01} записуємо систему алгебричних рівнянь (9), яка є одним рівнянням вигляду

$$D_{00} \Delta\big(\alpha_\pm(\mu)\big) + D_{10} \frac{\partial \Delta}{\partial \nu_1}\big(\alpha_\pm(\mu)\big) + \\ + D_{01} \frac{\partial \Delta}{\partial \nu_2}\big(\alpha_\pm(\mu)\big) = 0. \tag{18}$$

З рівняння (18) одержуємо, що D_{00}, D_{10} – довільні сталі, а $D_{01} = \pm D_{10}$. За формулою (10)

$$U(t, x) = \\ = \Big[D_{00} + D_{10}\Big(\frac{\partial}{\partial \nu_1} \pm \frac{\partial}{\partial \nu_2}\Big)\Big] \Phi(t, x, \nu)\Big|_{\nu = \alpha_\pm(\mu)}, \\ (D_{00}, D_{10}) \neq O,$$

знаходимо нетривіальні розв'язки задачі (15), (16).

Зокрема, розв'язками задачі (15), (16) є:

$$U_{0\pm}(t, x, \mu) = \Phi(t, x, \nu)\Big|_{\nu = \alpha_\pm(\mu)} = \\ = e^{-(1+\mu^2)t \pm \mu x_1 + \mu x_2},$$

$$U_{1\pm}(t, x, \mu) = \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu_1} \pm \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_2}\Big)\Big|_{\nu = \alpha_\pm(\mu)} = \\ = e^{-(1+\mu^2)t \pm \mu x_1 + \mu x_2} \left\{-2\mu t \pm \mu x_1 + \mu x_2\right\}.$$

Зауважимо, що розв'язки $U_{1\pm}(t, x, \mu)$ можна знайти шляхом диференціювання розв'язків $U_{0\pm}(t, x, \mu)$ за параметром μ, а саме

$$U_{1\pm}(t, x, \mu) = \frac{\partial}{\partial \mu} U_{0\pm}(t, x, \mu).$$

Аналогічно, інші розв'язки задачі (15), (16), що відповідають $\nu = \alpha_\pm(\mu)$, можна отримувати за формулою

$$U_{k\pm}(t, x, \mu) = \\ = \frac{\partial^k}{\partial \mu^k} e^{-(1+\mu^2)t \pm \mu x_1 + \mu x_2}, \quad k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}.$$

Знайдемо тепер розв'язки задачі (15), (16), що відповідають $\nu=\beta(\mu)$ з другої підмножини M. Обчислюємо

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_1}\big(\beta(\mu)\big)=e^{-1}\Big(\frac{\mu_*^4}{\mu^2}-\mu^2\Big)\mu\sinh[\mu_*^2]\neq 0,$$
$$\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_2}\big(\beta(\mu)\big)=e^{-1}\Big(\frac{\mu_*^4}{\mu^2}-\mu^2\Big)\frac{\mu_*^2}{\mu}\sinh[\mu_*^2]\neq 0.$$

Маємо $(1,0)$, $(0,1)\in\Omega(\beta(\mu))$. Розглянемо квазіполіном вигляду

$$g(x_1,x_2)=\big(D_{00}+D_{10}x_1+D_{01}x_2\big)e^{\frac{\mu_*^2}{\mu}x_1+\mu x_2},\quad D_{00},D_{10},D_{01}\in\mathbb{C},$$

для коефіцієнтів якого одержуємо систему рівнянь (одне рівняння):

$$D_{10}\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_1}\big(\beta(\mu)\big)+D_{01}\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_2}\big(\beta(\mu)\big)=0. \qquad (19)$$

З рівняння (19) одержуємо, що D_{00},D_{01} – довільні сталі, а $D_{10}=-\frac{\mu_*^2}{\mu^2}D_{10}$. Згідно з теоремою 1 нетривіальні розв'язки задачі (15), (16) знаходимо за формулою

$$U(t,x)=\Big[D_{00}+ + D_{01}\Big(-\frac{\mu_*^2}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial\nu_1}+\frac{\partial}{\partial\nu_2}\Big)\Big]\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\beta(\mu)},\quad (D_{00},D_{01})\neq O.$$

Зокрема, нетривіальними розв'язками задачі (15), (16) є такі функції:

$$U_0(t,x,\mu)=\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\beta(\mu)}= =\Big\{\cosh[\mu_*^2t]-\frac{\mu_*^2}{\mu^2}\sinh[\mu_*^2t]\Big\}e^{\frac{\mu_*^2}{\mu}x_1+\mu x_2-t},$$

$$U_1(t,x,\mu)= =\Big(-\frac{\mu_*^2}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial\nu_1}+\frac{\partial}{\partial\nu_2}\Big)\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\beta(\mu)}= =\Big\{\Big(-\frac{\mu_*^2}{\mu^2}x_1+x_2\Big)\cosh[\mu_*^2t]-\Big(\frac{2\mu_*^2}{\mu^3}- -\frac{\mu_*^4}{\mu^2}\Big(-\frac{\mu_*^2}{\mu^2}x_1+x_2\Big)\Big)\sinh[\mu_*^2t]\Big\}e^{\frac{\mu_*^2}{\mu}x_1+\mu x_2-t}.$$

Знову легко перевірити, що

$$U_1(t,x,\mu)=\frac{\partial}{\partial\mu}U_0(t,x,\mu).$$

Зауважимо, що інші розв'язки задачі (15), (16), що відповідають $\nu=\beta(\mu)$, можна шукати за формулою

$$U_k(t,x,\mu)=\frac{\partial^k}{\partial\mu^k}\Big\{\Big(\cosh[\mu_*^2t]- -\frac{\mu_*^2}{\mu^2}\sinh[\mu_*^2t]\Big)e^{\frac{\mu_*^2}{\mu}x_1+\mu x_2-t}\Big\},\quad k\in\mathbb{N}\backslash\{1\}.$$

Розглянемо побудову нетривіальних розв'язків задачі (15), (16) за вектором $\nu=O$ з третьої підмножини, причому побудову виконаємо за допомогою полінома третього степеня

$$g(x_1,x_2)=\sum_{|k+j|\leq 3}D_{kj}x_1^kx_2^j.$$

Оскільки усі похідні до третього порядку включно від $\Delta(\nu)$ при $\nu=O$ дорівнюють нулеві (за виключенням $\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}(O)=2e^{-1}$, $\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}(O)=-2e^{-1}$), то для сталих коефіцієнтів $D_{00},\ldots,D_{03}$ отримуємо таку систему алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} D_{20}C_{(2,0)}^{(0,0)}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}(O)+D_{02}C_{(0,2)}^{(0,0)}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}(O)=0,\\ D_{30}C_{(3,0)}^{(1,0)}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}(O)+D_{12}C_{(1,2)}^{(1,0)}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}(O)=0,\\ D_{21}C_{(2,1)}^{(0,1)}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}(O)+D_{03}C_{(0,3)}^{(0,1)}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}(O)=0, \end{cases}$$

звідки одержуємо $D_{20}=D_{02}$, $D_{12}=3D_{30}$, $D_{21}=3D_{03}$, а $\big(D_{00},D_{01},D_{11},D_{02},D_{30},D_{03}\big)\neq O$. За теоремою 1 знаходимо такі ненульові розв'язки задачі (15), (16):

$$U_{00}(t,x)=\Phi(t,x,O)=e^{-t},$$
$$U_{10}(t,x)=\frac{\partial\Phi}{\partial\nu_1}\Big|_{\nu=O}=x_1e^{-t},$$
$$U_{01}(t,x)=\frac{\partial\Phi}{\partial\nu_2}\Big|_{\nu=O}=x_2e^{-t},$$
$$U_{11}(t,x)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\Big|_{\nu=O}=x_1x_2e^{-t},$$

$$U_{20}(t,x)=\Big(\frac{\partial^2}{\partial\nu_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}\Big)\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=O}= \\ =\big(-2t+x_1^2+x_2^2\big)e^{-t},$$

$$U_{30}(t,x)=\Big(\frac{\partial^3}{\partial\nu_1^3}+3\frac{\partial^3}{\partial\nu_1\partial\nu_2^2}\Big)\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=O}= \\ =\big(-6tx_1+x_1^3+3x_1x_2^2\big)e^{-t},$$

$$U_{03}(t,x)=\Big(3\frac{\partial^3}{\partial\nu_1^2\partial\nu_2}+\frac{\partial^3}{\partial\nu_2^3}\Big)\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=O}= \\ =\big(-6tx_2+x_2^3+3x_1^2x_2\big)e^{-t}.$$

Зауважимо, що $U_{00}(t,x)=U_{0\pm}(t,x,O)$, однак, решта знайдених розв'язків $U_{10}(t,x)$, $U_{01}(t,x)$, $U_{11}(t,x)$, $U_{20}(t,x)$, $U_{30}(t,x)$, $U_{03}(t,x)$ не можна отримати з $U_{0\pm}(t,x,\mu)$ шляхом диференціювання за μ у точці $\mu=0$.

Розглянемо нарешті четвертий випадок, коли $\gamma_\pm=(\pm\mu_*,\mu_*)$. Обчислюємо

$$\Delta(\gamma_\pm)=\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_1}(\gamma_\pm)=\frac{\partial\Delta}{\partial\nu_2}(\gamma_\pm)=0,$$
$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}(\gamma_\pm)=4e^{-1}\mu_*^2\sinh[\mu_*^2]\neq 0,$$
$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1\partial\nu_2}(\gamma_\pm)=\mp e^{-1}\mu_*^2\sinh[\mu_*^2]\neq 0;$$

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}(\gamma_\pm)=-4e^{-1}\mu_*^2\sinh[\mu_*^2]\neq 0.$$

Маємо $(2,0),(1,1),(0,2)\in\Omega(\gamma_\pm)$. Побудуємо нетривіальні розв'язки задачі (15), (16) за допомогою квазіполінома вигляду

$$g(x_1,x_2)=\Big(D_{00}+D_{10}x_1+D_{01}x_2+D_{20}x_1^2+ \\ +D_{11}x_1x_2+D_{02}x_2^2\Big)e^{\pm\mu_*x_1+\mu_*x_2}.$$

Для сталих $D_{00},\ldots,D_{02}$ запишемо систему алгебричних рівнянь (9), яка буде одним рівнянням (див. зауваження 1):

$$D_{20}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1^2}\big(\gamma_\pm(\mu)\big)+D_{11}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\big(\gamma_\pm(\mu)\big)+ \\ +D_{02}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\nu_2^2}\big(\gamma_\pm(\mu)\big)=0$$

або

$$4D_{20}\mp D_{11}-4D_{02}=0,$$

звідки одержуємо, що D_{00}, D_{10}, D_{01}, D_{20}, D_{02} – довільні сталі, причому $\big(D_{00},D_{10},D_{01},D_{20},D_{02}\big)\neq O$, а $D_{11}=\pm4\big(D_{20}-D_{02}\big)$. Відповідно до теореми 1 знаходимо нетривіальні розв'язки задачі (15), (16):

$$U_{00\pm}(t,x)=\Phi(t,x,\gamma_\pm)= \\ =\big\{\cosh[\mu_*^2t]-\sinh[\mu_*^2t]\big\}\,e^{\pm\mu_*x_1+\mu_*x_2-t}= \\ =e^{-(1+\mu_*^2)t\pm\mu_*x_1+\mu_*x_2}.$$

Як бачимо $U_{00\pm}(t,x)=U_{0\pm}(t,x,\mu_*)$. Крім того, обчислюємо

$$U_{10\pm}(t,x)=\frac{\partial\Phi}{\partial\nu_1}\Big|_{\nu=\gamma_\pm}=\Big\{\Big(x_1\mp\mu_*t\Big)e^{-\mu_*^2t}\mp \\ \mp\frac{1}{\mu_*}\sinh[\mu_*^2t]\Big\}e^{\pm\mu_*x_1+\mu_*x_2-t},$$

$$U_{01\pm}(t,x)=\frac{\partial\Phi}{\partial\nu_2}\Big|_{\nu=\gamma_\pm}=\Big\{\Big(x_2-\mu_*t\Big)e^{-\mu_*^2t}+ \\ +\frac{1}{\mu_*}\sinh[\mu_*^2t]\Big\}e^{\pm\mu_*x_1+\mu_*x_2-t}.$$

Зауважимо знову, що функції $U_{10\pm}(t,x)$, $U_{01\pm}(t,x)$ не можна отримати з $U_{0\pm}(t,x,\mu)$ та $U_0(t,x,\mu)$ шляхом диференціювання за μ у точці $\mu=\mu_*$. Крім того, за теоремою 1 знаходимо інші нетривіальні розв'язки задачі (15), (16) за формулою

$$U(t,x)=\Big[D_{20}\frac{\partial^2}{\partial\nu_1^2}\pm4\Big(D_{20}-D_{02}\Big)\frac{\partial^2}{\partial\nu_1\partial\nu_2}+ \\ +D_{02}\frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}\Big]\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\gamma_\pm}.$$

Очевидно, що окремими розв'язками задачі (15), (16) є

$$U_{20\pm}(t,x)= \\ =\Big(\frac{\partial^2}{\partial\nu_1^2}\pm4\frac{\partial^2}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\Big)\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\gamma_\pm},$$

$$U_{02\pm}(t,x)= \\ =\Big(\mp4\frac{\partial^2}{\partial\nu_1\partial\nu_2}+\frac{\partial^2}{\partial\nu_2^2}\Big)\Phi(t,x,\nu)\Big|_{\nu=\gamma_\pm}.$$

Зокрема,

$$U_{20\pm}(t,x)=\Big\{\Big(-t+x_1(x_1\mp\mu_*t)\pm$$
$$\pm4(x_1\mp\mu_*t)x_2+5\mu_*t(\mu_*t-\frac{1}{\mu_*}\mp x_1)\Big)\cosh[\mu_*^2t]\pm$$
$$\pm\Big(5(x_1\mp\mu_*t)\mu_*t+(\mu_*t-\frac{1}{\mu_*}\mp x_1)(x_1\pm4x_2)+$$
$$+\frac{x_1}{\mu_*}\pm4(t+\frac{1}{\mu_*})\Big)\sinh[\mu_*^2t]\Big\}e^{\pm\mu_*x_1+\mu_*x_2-t}.$$

Зауважимо знову, що розв'язки $U_{20\pm}(t,x)$ та $U_{02\pm}(t,x)$ не можна отримати з розв'язку $U_{0\pm}(t,x,\mu)$ за допомогою диференціювання за μ у точці $\mu=\mu_*$. $\triangle$

5. Висновки. У статті сформульовано та доведено теорему, що дає необхідні та достатні умови існування нетривіальних квазіполіномних розв'язків однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними зі сталими комплексними коефіцієнтами, що задовольняють однорідні локальні двоточкові за часом умови. Доведено, що такі розв'язки задачі існують, якщо множина нулів характеристичного визначника задачі не є порожньою. Запропоновано формули для побудови нетривіальних розв'язків задачі, які застосовано до конкретного прикладу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Пташник Б.Й.* Задача типу Валле-Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами // ДАН УРСР. – 1966. – № 10. – С. 1254–1257.

2. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

3. *Ильків В.С.* Многоточечная нелокальная задача для уравнений с частными производными // Диф. уравнения. – 1987. – **23**, № 3. – С. 487-492.

4. *Пташник Б.Й., Симотюк М.М.* Багатоточкова задача з кратними вузлами для диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 3. – С. 400–413.

5. *Борок В.М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое // ДАН СССР. – 1968. – **183**, № 5. – С. 995–998.

6. *Борок В.М., Перельман М.А.* О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29–34.

7. *Віленць І.Л.* Класи єдиності розв'язку загальної крайової задачі в шарі для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних // ДАН УРСР. – Сер. А. – 1974. – № 3. – С. 195–197.

8. *Picone M.* Sui valori eccezionali di un parametro do cui dipend un equazione differentiale lineare ordinaria del secondo ordine. – Pisa, 1909. – 176 p.

9. *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Пг., 1917. – 308 с.

10. *Vallee-Poussin de la Ch. J.* Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre n // Journ. Math. de pura et appl. – 1929. – **9**, № 8. – P. 125–144.

11. *Нитребич З.М., Маланчук О.М.* Однорідна задача з локальними крайовими умовами на границі смуги для рівняння із частинними похідними другого порядку за часом // Науковий вісник Ужгородського університету. – Серія "Математика і інформатика". – 2015. – **27**, вип. № 2. – С. 98–108.

12. *Каленюк П.І., Нитребич З.М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во НУ „Львівська політехніка", 2002. – 292 с.

УДК 517.9

©2015 р. О.Л. Півень

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ПОЧАТКОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЯВНОГО ПІВЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Встановлено теореми існування та єдиності розв'язку деяких початкових задач для неявного півлінійного абсрактного диференціального рівняння другого порядку. Результати застосовуються до рівнянь з частинними похідними не типу Ковалевської

Existence and uniqueness theorem for some initial problems for second order implicit semilinear differential-operator equation are obtained. Rezults are applied to partial differential equations, which are not equations of Kovalevskaya type.

1. Вступ Деякі задачі фізики та техніки приводять до вивчення рівняння осцилятору $\ddot{u} + 2\gamma\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$ [8, 10]. Якщо коливання вимушені, то в правій частині цього рівняння з'являється деяка нелінійна функція, що залежить від u. Коливання звукових хвиль в релаксуючому середовищі описується рівнянням типу Соболєва [1, 13], що не розв'язне відносно старшої похідної за часом – похідної другого порядку. Як зазначено в [13], виникають труднощі при дослідженні коректної розв'язності задач для цього рівняння. В абстрактній формі подібні рівняння описуються за допомоги неявного диференціально-операторного рівняння другого порядку.

У даній роботі досліджується початкова задача

$$\frac{d^2Au(t)}{dt^2} + B\frac{du(t)}{dt} + $$
$$+Cu(t) = f(t, u(t)), \quad \text{м.с.} \quad t \in [0, T]. \qquad (1)$$
$$u(0) = u_0, \quad (Au)'(0) = y_1, \qquad (2)$$

Тут A, B, C – замкнені лінійні оператори, що діють із дійсного банахова простору X у дійсний банахів простір Y з областями визначення $D(A), D(B), D(C)$ відповідно, $D = D(A) \cap D(B) \neq \{0\}$, $f(t, x) : [0, T] \times X \to Y$. Якщо $X = Y, A = E$, E–тотожній оператор, то рівняння (1) називають *явним* , а в протилежному випадку це рівняння називають *неявним.* Якщо $\mathrm{KerA} \neq \{0\}$, то неявне рівняння (1) називається *виродженим.*

Будемо використовувати наступні позначення: $\mathcal{L}(Y, X)$–простір обмежених лінійних операторів, що діють з Y в X, $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(Y, Y)$, $L_1(0, T; X)$–простір X-значних інтегрованих на $[0, T]$ функцій, $W_1^m(0, T; X)$–простір Соболєва функцій з $L_1(0, T; X)$, у яких узагальнені похідні до порядку m включно належать $L_1(0, T; X)$; $C^p([0, T], X)$, $p = 0, 1, ...$–клас X-значних функцій, p разів неперервно диференційовних на $[0, T]$, $C([0, T], X) = C^0([0, T], X)$. Будемо вважати, що функції з $W_1^m(0, T; X)$ $(m \neq 0)$ належать класу $C^{m-1}([0, T], X)$, змінівши їх значення на множині нульової міри за необхідності.

Наведемо поняття сильного та класичного розв'язку рівняння (1) з аналогією [15, п. 4.2] для явних рівнянь першого порядку. Будемо припускати, що $f(t, x)$, як функція t, належить простору $L_1(0, T; Y)$ при кожному $x \in X$. Функція $u(t) \in W_1^1(0, T; X)$ називається *сильним розв'язком* рівняння (1), якщо $Au(t) \in W_1^2(0, T; Y)$, $Bu(t) \in W_1^1(0, T; Y)$, $u(t)$ задовольняє рівняння (1) майже скрізь на $[0, T]$.

Нехай $f(t, x)$ як функція t належить простору $C([0, T], Y)$ при кожному $x \in X$. Функція $u(t) \in C^1([0, T], X)$ називається *класичним розв'язком* рівняння (1), якщо $Au(t) \in C^2([0, T], Y)$, $Bu(t) \in C^1([0, T], Y]$, $u(t)$ задовольняє рівняння (1) при будь-якому $t \in [0, T]$.

Класичним (сильним) розв'язком задачі

(1),(2) будемо називати відповідно класичний (сильний) розв'язок задачі (1),(2). Початкові умови (2) мають сенс як для класичного, так і для сильного розв'язку.

Нехай $\tilde{X},\tilde{Y}$–комплексні оболонки просторів X,Y та $\tilde{A},\tilde{B}$–комплексні розширення, операторів A,B [5, с. 475–480]. Розглянемо жмуток операторів $\lambda\tilde{A}+\tilde{B}$, визначений на $\tilde{D}=D(\tilde{A})\cap D(\tilde{B})$. Цей жмуток діє у комплексних банахових просторах $\tilde{X},\tilde{Y}$. Припускається, що для деяких сталих $C_1,C_2>0$ жмуток $\lambda\tilde{A}+\tilde{B}$ має резольвенту $\tilde{R}(\lambda)=(\lambda\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\in\mathcal{L}(\tilde{Y},\tilde{X})$ при $|\lambda|\geq C_2$ та виконано оцінку

$$||\tilde{R}(\lambda)||\leq C_1,\quad |\lambda|\geq C_2. \tag{3}$$

Тоді можна визначити оператор [12] $\tilde{Q}_1=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=C_2}\tilde{A}\tilde{R}(\lambda)d\lambda\in\mathcal{L}(Y)$, його звуження $Q_1\in\mathcal{L}(Y)$ на дійсний простір Y, та оператор $Q_2=E-Q_1\in\mathcal{L}(Y)$. Оператори Q_1,Q_2 є обмеженими взаємно доповнюючими проекторами у просторі Y. Замкнений лінійний оператор $G=A+Q_2B:D\to Y$ має обмежений обернений оператор $G^{-1}\in\mathcal{L}(Y,X)$, який володіє властивостями [2]

$$AG^{-1}Q_1=Q_1,\quad Q_2BG^{-1}=BG^{-1}Q_2=Q_2,$$
$$Q_2AG^{-1}=AG^{-1}Q_2=0 \tag{4}$$

2. Теореми існування та єдиності розв'язку Існування та єдиність класичних розв'язків явних лінійних диференціально-операторних рівнянь другого порядку ($A=E$, $f(t,x)$ не залежить від x) при обмеженнях на резольвенту оператору B досліджувалось ще в монографії [7, Розділ 3, §3]. Теореми існування та єдиності класичного розв'язку початкової задачі (1), (2) для вироджених лінійних рівнянь (1) ($f(t,x)$ не залежить від x) одержані в [14, п. 6.1]. при обмеженнях на оператор-функцію $A(\lambda A+B)^{-1}$. Також згадаємо роботу [3], де досліджувались сильні розв'язки неповного півлінійного рівняння (1) другого порядку ($B=0$), які задовольняють початкові умови $Au(0)=y_0,(Au)'(0)=y_1$. Наступна теорема містить умови розв'язності початкової задачі (1),(2) в класичному та сильному сенсі.

Теорема 1. *Нехай $D\subset D(C)$, виконано умову (3), функція $f(t,x):[0,T]\times X\to Y$ за аргументом t належить простору $L_1(0,T;Y)$ при кожному $x\in X$ та задовольняє глобальну умову Ліпшиця*

$$||f(t,x)-f(t,u)||\leq$$
$$\leq M||x-u||\quad\forall x,u\in X\quad \text{м.с. } t\in[0,T] \tag{5}$$

зі сталою $M>0$, яка не залежить від t. Тоді для будь-яких початкових векторів $u_0\in D$, $y_1\in Q_1(Y)$ в (2) існує єдиний сильний розв'язок $u(t)$ початкової задачі (1),(2).Якщо, додатково, функція $f(t,x):[0,T]\times X\to Y$ за аргументом t належить простору $C([0,T],Y)$ при кожному $x\in X$, то цей розв'язок буде класичним.

Зауваження 1. *З умови Ліпшиця (5) випливає, що $f(t,u(t))\in L_1(0,T;Y)$, якщо $u(t)\in L_1(0,T;X)$.*

Доведення Застосуємо до рівняння (1) проектори Q_1,Q_2 та скористаємось властивостями (4) оператору G^{-1}. Одержимо

$$\frac{d^2(Au(t))}{dt^2}+S\frac{d}{dt}(Au(t))=$$
$$=Q_1(f(t,u(t))-Cu(t)); \tag{6}$$
$$\frac{d(Q_2Bu(t))}{dt}=Q_2(f(t,u(t))-Cu(t)), \tag{7}$$

де $S=Q_1BG^{-1}\in\mathcal{L}(Y)$. В силу теореми 2.9 [15, п. 4.2] рівняння (6) з урахуванням другої початкової умови (2) еквівалентне наступному

$$\frac{d}{dt}(Au(t))=e^{-St}y_1+$$
$$+\int\limits_0^t e^{-S(t-\tau)}Q_1(f(\tau,u(\tau))-Cu(\tau))d\tau \tag{8}$$

Оператор-функція $W(t)=\int\limits_0^t e^{-S\tau}d\tau$ є неперервно-диференційованою на $[0,T]$ зі значеннями в $\mathcal{L}(Y)$ і є справедливою операторна тотожність $\frac{d}{dt}W(t)=e^{-St}$. Тому рівняння (8) з початковими умовами (2) записується у вигляді

$$Au(t)=Au_0+W(t)y_1+$$

$$+\int_0^t W(t-\tau)Q_1(f(\tau,u(\tau))-Cu(\tau))d\tau \quad (9)$$

Рівняння (7) з урахуванням першої початкової умови (2) еквівалентне наступному рівнянню:

$$Q_2Bu(t)=Q_2Bu_0+$$
$$+\int_0^t Q_2(f(\tau,u(\tau))-Cu(\tau))d\tau \qquad (10)$$

У результаті додавання рівнянь (9),(10) одержимо наступне інтегральне рівняння Вольтерра відносно функції $v(t)=Gu(t)$:

$$v(t)=Gu_0+W(t)y_1+$$
$$+\int_0^t W(t-s)Q_1\{f(s,G^{-1}v(s))-CG^{-1}v(s)\}ds+$$
$$+\int_0^t Q_2\{f(s,G^{-1}v(s))-CG^{-1}v(s)\}ds \quad (11)$$

Зауважимо, що в силу вкладення $D\subset D(C)$ оператор $CG^{-1}\in\mathcal{L}(Y)$. Інтегральне рівняння (11), що розглядається у банаховому просторі $L_1(0,T;Y)$, є еквівалентним початковій задачі (1),(2). Застосовуючи до цього рівняння принцип стискаючих відображень подібно міркуванням в [6, с.13], одержимо, що рівняння (11) має єдиний розв'язок $v(t)\in L_1(0,T;Y)$. Більш того, з рівняння (11) безпосередньо випливає, що $v(t)\in W_1^1(0,T;Y)$. Оскільки $AG^{-1},BG^{-1}\in\mathcal{L}(Y)$, то $Au(t),Bu(t)\in W_1^1(0,T;Y)$. Продиференціювавши рівняння (11) з урахуванням властивостей (4), маємо

$$\frac{dv}{dt}=e^{-St}y_1+$$
$$+\int_0^t e^{-S(t-\tau)}Q_1(f(\tau,G^{-1}v(\tau))-CG^{-1}v(\tau))d\tau+$$
$$+Q_2(f(t,G^{-1}v(t))-CG^{-1}v(t)). \qquad (12)$$

Звідси, скориставшись співвідношенням $u(t)=G^{-1}v(t)$, маємо

$$\frac{d}{dt}(Au(t))=AG^{-1}\frac{dv}{dt}=AG^{-1}\Bigg(e^{-St}y_1+$$
$$+\int_0^t e^{-S(t-\tau)}Q_1(f(\tau,u(\tau))-Cu(\tau))d\tau\Bigg) \quad (13)$$

Отже, функція $Au(t)\in W_1^2(0,T;Y)$. Таким, чином функція $u(t)=G^{-1}v(t)$ – єдиний сильний розв'язок задачі (1),(2).

У випадку, коли функція $f(t,x):[0,T]\times X\to Y$ за аргументом t належить банаховому простору $C([0,T],Y)$, інтегральне рівняння Вольтерра (11) слід розв'язувати у цьому просторі. Застосовуючи, як і раніше, принцип стискаючих відображень [6, с.13], одержимо єдиний розв'язок цього рівняння $v(t)\in C([0,T],Y)$, а також властивості $u(t)=G^{-1}v(t)\in C^1([0,T],X)$, $Au(t),Bu(t)\in C^1([0,T],Y)$. Продиференціювавши рівняння (11) одержимо рівняння (13), звідки випливає $Au(t)\in C^2([0,T],Y)$. Отже, вектор-функція $u(t)$ є класичним розв'язком задачі (1),(2). Теорему повністю доведено.

Розглянемо тепер задачу Коші

$$u(0)=u_0,\quad u'(0)=u_1 \qquad (14)$$

для рівняння (1). Зазначимо, що початкові умови (14), взагалі кажучи, не мають сенсу для сильних розв'язків рівняння (1), але мають сенс для класичних розв'язків. Тому будемо розглядати *розв'язок задачі Коші (1),(14) – класичний розв'язок* рівняння (1), що задовольняє початкові умови (14). Зауважимо, що в роботі [4] досліджувалось лінійне однорідне диференціально-операторне рівняння вищого порядку, для якого було введено кілька понять коректності відповідної задачі Коші та одержано різні ознаки коректності. Наведемо теорему існування та єдиності класичного розв'язку задачі Коші (1),(14).

Теорема 2. *Нехай $D\subset D(C)$, виконано обмеження (3), функция $f(t,x):[0,T]\times X\to Y$ при кожному $x\in X$ є неперервною по t та задовольняє умову Ліпшиця (5) зі сталою $M>0$, що не залежить від t. Тогда для будь-яких початкових векторів $u_0,u_1\in D$ в (14), що задовольняють умову узгодження*

$$Q_2(Bu_1+Cu_0)=Q_2f(0,u_0), \qquad (15)$$

існує єдиний розв'язок $u(t)$ задачі Коші (1),(14). Якщо додатково проекція $Q_2 f(t,x)$ є неперервно - диференційованою за сукупністю змінних на $[0,T]\times X$, то розв'язок $u(t)\in C^2([0,T],X)$ та задовольняє рівняння

$$A\frac{d^2u(t)}{dt^2}+B\frac{du(t)}{dt}+$$
$$+Cu(t)=f(t,u(t)),\ t\in[0,T]. \qquad (16)$$

Доведення цієї теореми проводиться аналогічно теоремі 1, тому вкажемо на зміни, які потрібно при цьому зробити. Як і раніше, ми одержимо рівняння (6),(7). Розв'язок задачі (6),(14) подається у вигляді (пор. з (9))

$$Au(t)=Au_0+W(t)Au_1+$$
$$+\int\limits_0^t W(t-\tau)Q_1(f(\tau,u(\tau))-Cu(\tau))d\tau \quad (17)$$

Також є справедливим рівняння (10). Умову узгодження (15) одержимо після підстановки $t=0$ у рівняння (7). Після додавання рівнянь (17),(10) одержимо наступне інтегральне рівняння Вольтерра відносно функції $v(t)=Gu(t)$ (замість рівняння (11)):

$$v(t)=Gu_0+W(t)Au_1+$$
$$+\int\limits_0^t W(t-s)Q_1\{f(s,G^{-1}v(s))-CG^{-1}v(s)\}ds+$$
$$+\int\limits_0^t Q_2\{f(s,G^{-1}v(s))-CG^{-1}v(s)\}ds \quad (18)$$

Існування та єдиність розв'язку $v(t)$ рівняння (18) у банаховому просторі $C([0,T],X)$ доводиться, як і раніше, за допомоги принципу стискаючих відображень. Після цього, як і при доведенні теореми 1 перевіряється, що функція $u(t)=G^{-1}v(t)$ є розв'язком задачі Коші (1),(14).

Нехай тепер проекція $Q_2 f(t,x)$ є неперервно - диференційованою за сукупністю змінних на $[0,T]\times X$, $u(t)$– знайдений класичний розв'язок задачі (1),(14). Продиференціювавши рівняння (18) та урахувавши заміну $u(t)=G^{-1}v(t)$, маємо

$$\frac{du}{dt}=G^{-1}\Bigg(e^{-St}Au_1+$$
$$+\int\limits_0^t e^{-S(t-\tau)}Q_1(f(\tau,u(\tau))-Cu(\tau))d\tau+$$
$$+Q_2(f(t,u(t))-Cu(t))\Bigg). \qquad (19)$$

Тоді з рівняння (19) випливає, що $u(t)\in C^2([0,T],X)$. Оскільки A–замкнений оператор, то звідси одержимо, що $u(t)$ задовольняє рівняння (16). Теорему доведено.

Зауваження 2. *Якщо рівняння (1) явне, то в умовах теорем 1,2 операторні коефіцієнти B,C будуть обмеженими. Дійсно, оцінка (3) при $A=E$ забезпечує обмеженість оператора B, а вкладення $D(B)\subset D(C)$ – обмеженість оператора C.*

Зауваження 3. *Теореми існування та єдиності ров'язку початкових задач для рівняння першого порядку $\frac{d}{dt}(Au(t))+Bu(t)=f(t,u(t))$ одержано у монографії [2, розділ 4], а для неповного рівняння другого порядку $\frac{d^2}{dt^2}(Au(t))+Bu(t)=f(t,u(t))$ в праці [3]. На відміну від цих теорем, у доведених теоремах 1,2 не вимагаються додаткові обмеження на константу Ліпшиця M. Тому теореми 1,2 не можуть бути одержані методом зниження порядку в рівнянні (1) та подальшим застосуванням результатів монографії [2] для рівняння першого порядку.*

3. Застосування Застосуємо абстрактні результати до наступної початково-крайової задачі:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u(t,x)+a\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial x^2}\right)-$$
$$-b\frac{\partial^3u(t,x)}{\partial x^2\partial t}-c\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial x^2}=f(t,x,u(t,x)), \qquad (20)$$
$$t\in[0,T],\ x\in[0,\pi];$$
$$u(t,0)=u(t,\pi)=0 \qquad (21)$$

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u(t,x) + a\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right)|_{t=0} = y_1(x) \tag{23}$$

Тут a, b, c–додатні сталі, функція $f(t,x,y) : [0,T] \times [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Рівняння (20) при $f(t,x,y) \equiv 0$ описує [1, с. 85–87] поширення звукових хвиль у релаксаційному середовищі, невідома функція $u(t,x)$ позначає щільність середовища. Фізичне обґрунтування додатності сталої a наведено в [9, с. 438].

Будь-яку функцію $v : x, t \to v(t,x)$ будемо також розглядати як функцію t зі значеннями в просторі функцій змінної x та записувати як $v(t)(x)$. Припускається, що при кожному фіксованому $y \in \mathbb{R}$ функція $f(t,x,y) = f(t,y)(x)$ як функція t приймає значення в $L_2(0,\pi)$, елемент $f(t,y)(x)$ належить простору $L_1(0,T; L_2(0,\pi))$ та функція $f(t,x,y)$ для деякої сталої $M > 0$ задовольняє глобальну умову Ліпшиця

$$|f(t,x,y) - f(t,x,z)| \le M|y - z|, \quad \forall y, z \in \mathbb{R} \tag{24}$$

$$\text{при майже всіх} \quad t \in [0,T],\ x \in [0,\pi]$$

У дійсному гільбертовому просторі $X = Y = L_2(0,\pi)$ початково-крайова задача (20)–(23) записується в абстрактній формі (1),(2) з диференціальними операторами

$$Ag(x) = g(x) + a\frac{d^2 g(x)}{dx^2},\ Bg(x) = -b\frac{d^2 g(x)}{dx^2},$$

$$Cg(x) = -c\frac{d^2 g(x)}{dx^2},\ D = D(A) = D(B) =$$

$$= D(C) = \overset{\circ}{W}{}_2^2\,(0,\pi) =$$

$$= \{g(x) \in W_2^2(0,\pi) : g(0) = g(\pi) = 0\}, \tag{25}$$

де $W_2^2(0,\pi)$ – простір Соболєва функцій з $L_2(0,\pi)$. Комплексною оболонкою простору $X = Y$ є комплексний простір $L_2(0,\pi)$. Комплексні розширення $\tilde{A}, \tilde{B}$ операторів A, B визначаються тими ж самими диференціальними виразами та крайовими умовами, що й оператори A, B (25), де $W_2^2(0,\pi)$ – комплексний простір Соболєва. Жмуток $\lambda\tilde{A} + \tilde{B}$, що визначено на $\tilde{D} = D(\tilde{A})$, має резольвенту (див. формулу (7.44) в [2]):

$$(\lambda\tilde{A} + \tilde{B})^{-1} g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n \sin nx}{\lambda(1 - an^2) + bn^2},$$

$$g_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin nx dx,$$

$$\lambda(1 - an^2) + bn^2 \ne 0,\ n = 1, 2, ...$$

Якщо $an^2 \ne 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то $\mathrm{Ker}A = \{0\}$, $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(L_2(0,\pi))$ та відповідно [12] $Q_1 = E, Q_2 = 0$. Тому умови теореми 1 виконано, якщо початкові функції в (22),(23) задовольняють вимоги $u_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2\,(0,\pi), y_1(x) \in L_2(0,\pi)$.

Розглянемо випадок, коли $a = \frac{1}{m^2}$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. Тоді оператор A є виродженим, $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Lin}\{\sin mx\}$. Обчислюємо

$$Q_2 g = g_m \sin mx,\ g \in L_2(0,\pi). \tag{26}$$

Умова $y_1(x) \in Q_1(Y)$ еквівалентна співвідношенню

$$\int_0^{\pi} y_1(x)\sin mx dx = 0 \tag{27}$$

Отже, маємо наступний результат

Твердження 1. *Нехай значення функції $f(t,y)(x)$, як функції t, при фіксованих y належать простору $L_1(0,T; L_2(0,\pi))$. Припускається, що функція $f(t,x,y)$ для деякої сталої $M > 0$ задовольняє глобальну умову Ліпшиця (24). Нехай в (22),(23) $u_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2\,(0,\pi)$, $y_1(x) \in L_2(0,\pi)$ та виконано одну з двох умов: 1^o $a \ne \frac{1}{m^2}, \forall m \in \mathbb{N}$, або 2^o $\exists m \in \mathbb{N} : a = \frac{1}{m^2}$ і для функції $y_1(x)$ є справедливим співвідношення (27). Тоді мішана задача (20)–(23) має єдиний сильний розв'язок $u(t)(x)$. Якщо додатково при кожному фіксованому $y \in \mathbb{R}$ елемент $f(t,y)(x)$ належить простору $C([0,T], L_2(0,\pi))$, то цей розв'язок є класичним.*

Замінимо початкову умову (23) на початкову умову

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x), \tag{28}$$

тобто розглянемо мішану задачу (20),(21),(22),(28). У наступному твердженні наведемо умови розв'язності цієї задачі

Твердження 2. *Нехай значення функції $f(t,y)(x)$, як функції t, при фіксованих y належать простору $C([0,T],L_2(0,\pi))$ та функція $f(t,x,y)$ для деякої сталої $M>0$ задовольняє глобальну умову Ліпшиця (24). Нехай в (22),(28) $u_0(x),u_1(x)\in \overset{\circ}{W_2^2}(0,\pi)$ та виконано одну з двох умов: 1^o $a\neq \frac{1}{m^2},\forall m\in \mathbb{N}$, або 2^o $\exists m\in\mathbb{N}: a=\frac{1}{m^2}$ та функції $u_0(x),u_1(x)$ задовольняють умову узгодження*

$$\int\limits_0^\pi f(0,x,u_0(x))\sin mx dx =$$

$$=\int\limits_0^\pi (bm^2u_1(x)+cm^2u_0(x))\sin mx dx. \quad (29)$$

Тоді мішана задача (20),(21),(22),(28) має єдиний розв'язок $u(t)(x)$.

Це твердження випливає безпосередньо з теореми 2. Достатньо лише зазначити, що у випадку $a=\frac{1}{m^2}$ для введених операторів A,B,C умова узгодження (15) з урахуванням конструкції (26) спектрального проектору Q_2 переписується у вигляді (29).

Результати статті було виголошено на міжнародній науковій конференції [11].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. — М.:Наука, 1979. — 384 с.
2. *Власенко Л.А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. — Днепропетровск: Системные технологии, 2006. — 272 с.
3. *Власенко Л.А.* Несвободные колебания бесконечномерного осциллятора при импульсных возмущениях // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, N 2. – С. 155-166.
4. *Власенко Л.А., Пивень А.Л., Руткас А.Г.* Признаки корректности задачи Коши для дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, N 11. – С. 1484-1500.
5. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.
6. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969.—456 с.
7. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т.1. Механика . — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.— 224 с.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т.6. Гидродинамика . — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.— 736 с.
10. *Мышкис А.Д.* Элементы теории математических моделей. — М.:КомКнига, 2007. — 192 с.
11. *Півень О.Л.* Глобальна розв'язність півлінійного диференціально-операторного рівняння другого порядку // Матеріали міжнародної наукової конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування", присвяченої 80-річчю від дня народження професора В.І. Фодчука (28 –30 вересня 2016 рік).— Чернівці: 2016. – С. 85–86.
12. *Руткас А.Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t)+Bx(t)=f(t)$ // Диф. уравнения. – 1975. – **11**, N 11 . – С. 1996-2010.
13. *Солдатов А.П., Шхануков М.Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // ДАН СССР. – 1987. – **297**, N 3. – С. 547–552.
14. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. — New-York-Basel-Hong-Kong: Marsel,Dekker,Inc.,1999. — 313 p.
15. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — New York, Berlin, Tokyo: Springer-Verlag, 1983 . — 279 p.

УДК 519.6:541.18

©2016 р. М.Р. Петрик , Ж. Фресар, О.Ю. Петрик, Д.М. Михалик

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ОБЕРНЕНІ КОЕФІЦІЄНТНІ ЗАДАЧІ КОМПЕТИТИВНОЇ ДИФУЗІЇ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ НАНОПОРИСТИХ ЧАСТИНОК З ВИКОРИСТАННЯМ ҐРАДІЄНТНИХ МЕТОДІВ

Розглядається обернена коефіцієнтна задача для компетитивної дифузії в неоднорідних середовищах нанопористих частинок. Здійснено постановка та обґрунтуванням прямої та спряженої крайових задач та побудовано їх розв'язки операційним методом Гевісайда. Отримано явні вирази градієнтів функціоналів-нев'язок для ідентифікації параметрів нанопористих середовищ, при допомозі яких відновлено розподіли коефіцієнтів дифузії для intercrystallytes та intracrystallytes просторів як функцій від часу для різних положень частинок в середовищі. Змодельовано розподіли концентрацій двох дифундованих компонентів в досліджуваному наносередовищі

Inverse problem for coefficients finding of competitive diffusion in heterogeneous media of nanoporous particles has been considered. Formulation and justification of direct and conjugate boundary problems has been provided. The solutions of boundary problems has been build taking advantage of Heaviside's methods . Explicit expressions for gradients functional residuals has been obtained to identify the parameters of nanoporous media in form of diffusion coefficients for intercrystallytes and intracrystallytes spaces as functions of time for different modes of particles along the catalyst layer. Distributions of concentrations for two defunded components in studied sample of nanoporous media has been visualized.

Вступ

Застосування математичного моделювання до дослідження процесів масопереносу в нанопористих середовищах полягає не тільки в складності побудови адекватних математичних моделей, а й в заданні їх параметрів [1-10]. Раніше в працях [11, 19-21] розглядалися питання ідентифікації параметрів задач масопереносу в нанопористих середовищах при відомих розподілах мас речовини в твердій і газоподібної фазах. В силу складності експериментального поділу цих характеристик, доцільно використовувати ефективні обчислювальні алгоритми ідентифікації параметрів при відомих сумарних масах для певних напрямків зондування досліджуваних середовищ, з використанням високошвидкісних аналітичних методів з урахуванням комплексу найсуттєвіших чинників. У цій праці розглядаються питання створення високопродуктивних методів ідентифікації шляхом побудови маловитратних аналітичних розв'язків прямих і спряжених задач і отримання на їх основі явних виразів градієнтів функціоналів-нев'язки для ідентифікації параметрів переносу в нанопористих середовищах при відомих сумарних розподілах маси в твердій і газоподібної фазах адсорбованих речовин.

Математична модель системи компетитивного переносу в неоднорідному середовищі

Розглядається складний компетитивний масоперенос двох компонент, що дифундують між собою в неоднорідному середовищі сферичних частинок мікро- та нанопористої структури. Дифузія розглядається при цьому як на макрорівні (в міжчастинковому просторі, interparticle space), так і на мікрорівні (в просторі мікро- та нанопор сферичних частинок, intraparticle space).

Математична модель такого переносу з урахуванням вказаних фізичних чинників описана у вигляді змішаної крайової задачі. В областях $\Omega_{k_T} = (0,T) \times \Omega_k, \Omega_k = l_{k-1}, l_k, k = \overline{1, n+1}, l_0 = 0 < l_1 < ... < l_{n+1} = l < \infty$ концентрації $U_{1_k}(t,z), U_{2_k}(t,z)$, з урахуванням [3, 6, 7] задовольняють системі рівнянь в частинних похідних

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} U_{1_k}(t,z) \\ U_{2_k}(t,z) \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix} D_{\text{inter}_{11_k}} & D_{\text{inter}_{12_k}} \\ D_{\text{inter}_{21_k}} & D_{\text{inter}_{22_k}} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix} U_{1_k} \\ U_{2_k} \end{bmatrix} - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\begin{bmatrix} D_{\text{intra}_{11_k}} & D_{\text{intra}_{12_k}} \\ D_{\text{intra}_{21_k}} & D_{\text{intra}_{22_k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1_k}(t,r,z) \\ q_{2_k}(t,r,z) \end{bmatrix}\Bigg|_{r=R} \quad (1)$$

де $R << \min\limits_k (l_k - l_{k-1}), R$ - радіус сферичних мікропористих частинок відповідної області Ω_k. Для кожної пористої мікрочастинки радіусу R з центром в точці $z \in \Omega_k$ при $t \in (0,T)$ концентрації $q_{1_r}(t,r,z), q_{2_r}(t,r,z)$ дифундованої двокомпонентної суміші справедлива система рівнянь дифузії

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} q_{1_k}(t,r,z) \\ q_{2_k}(t,r,z) \end{bmatrix} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\begin{bmatrix} D_{\text{intra}_{11_k}} & D_{\text{intra}_{12_k}} \\ D_{\text{intra}_{21_k}} & D_{\text{intra}_{22_k}} \end{bmatrix} r^2 \frac{\partial}{\partial r}\begin{bmatrix} q_{1_k} \\ q_{2_k} \end{bmatrix}\right) \quad (2)$$

Початкові умови

$$\begin{bmatrix} U_{1_k}(t,z) \\ U_{2_k}(t,z) \end{bmatrix}_{t=0} = 0, \begin{bmatrix} q_{1_k}(t,r,z) \\ q_{2_k}(t,r,z) \end{bmatrix}_{t=0} = 0, \quad r \in (0,R),\ z \in \Omega_k, k = \overline{1, n+1}. \quad (3)$$

Крайові умови по просторовій змінній r для $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\begin{bmatrix} D_{\text{intra}_{11_k}} & D_{\text{intra}_{12_k}} \\ D_{\text{intra}_{21_k}} & D_{\text{intra}_{22_k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1_k}(t,r,z) \\ q_{2_k}(t,r,z) \end{bmatrix}\right)_{r=0} = 0,$$
$$\begin{bmatrix} q_{1_m}(t,r,z) \\ q_{2_m}(t,r,z) \end{bmatrix}_{r=R} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{1_m}(t,z) \\ U_{2_m}(t,z) \end{bmatrix},$$
$$z \in \Omega_m, m = \overline{1, n+1}, t \in (0,T) \quad (4)$$

де друга умова є умовою рівноваги.

Крайові та інтерфейсні умови між тонкими шарами мікропористих частинок, по координаті (z) для $U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\begin{bmatrix} D_{\text{inter}_{11_1}} & D_{\text{inter}_{12_1}} \\ D_{\text{inter}_{21_1}} & D_{\text{inter}_{22_1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1_1}(t,z) \\ U_{2_1}(t,z) \end{bmatrix}\right)_{z=0} = 0,$$
$$\begin{bmatrix} U_{1_{n+1}}(t,z) \\ U_{2_{n+1}}(t,z) \end{bmatrix}_{z=l} = \begin{bmatrix} U_{l_1}(t) \\ U_{l_2}(t) \end{bmatrix}, t \in (0,T), \quad (5)$$

$$\left[U_{s_k}(t,z) - U_{s_{k+1}}(t,z)\right]\Big|_{z=l_k} = 0,\ s = 1,2$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{\text{inter k}}\begin{bmatrix} U_{1_k}(t,z) \\ U_{2_k}(t,z) \end{bmatrix}\right)\Bigg|_{z=l_k} - \frac{\partial}{\partial z}\left(D_{\text{inter k+1}}\begin{bmatrix} U_{1_{k+1}}(t,z) \\ U_{2_{k+1}}(t,z) \end{bmatrix}\right)\Bigg|_{z=l_k} = 0,$$
$$k = \overline{1, n+1}, t \in (0,T), \quad (6)$$

де $D_{\text{inter k}} = \begin{bmatrix} D_{\text{inter}_{11_\text{k}}} & D_{\text{inter}_{12_\text{k}}} \\ D_{\text{inter}_{21_\text{k}}} & D_{\text{inter}_{22_\text{k}}} \end{bmatrix}$.

Система (1) описує зовнішній (відносно частинок) компетитивний масоперенос з поточними концентраціями к-го шару U_{1_k}, U_{2_k} в interpartical space, лімітований системи впливу на поверхнях сферичних частинок радіуса R. Система (2) описує внутрішній масоперенос з поточними концентраціями в мікро- й нанопорах для к-го щару intraparticle space q_{1_k}, q_{2_k}. Зв'язок між концентраціями для к-го шару U_{1_k}, U_{2_k} та q_{1_k}, q_{2_k} визначається крайовими умовами адсорбційної рівноваги на поверхні сферичних частинок (4).

Тут D_k та $D_{\text{int}\, ra_k}$ - матриці коефіцієнтів дифузії в просторах interpartical space та intraparticle space, що в загальному випадку є функціями від поточних концентрацій $U_{j_k}, q_{j_k}; j = \overline{1,2}$.

Вважається, що коефіцієнти дифузії $D_{\text{inter}}, D_{\text{intra}}$ задачі (1)-(6) є невідомими. Однак на поверхнях областей $\gamma_k \subset \Omega_k, k =$

$\overline{1, n+1}$, неоднорідного середовища відомі сліди розв'язків (концентрацій):

$$[U_{s_k}(t,z) + q_{s_k}(t,z)]_{\gamma_k} = M_{s_k}(t,z)|_{\gamma_k}$$
$$s = \overline{1,2}, \gamma_{s_k} \in \Omega, \quad (7)$$

де $\bar{q}_{s_k}(t, R/2\ , z) = \frac{1}{R}\int\limits_0^R q_{s_k}(t,r,z)\, r dr$ є усереднене значення концентрації s-ї дифундованої компоненти речовини в мікропорах частинки, зосередженої в точці $r = R/2$ для k–го шару мікропористих частинок, $k = \overline{1, n+1}$.

Таким чином, отримуємо задачу (1)-(7), що полягає в знаходженні функцій $D_{\text{intra}_{\text{sp}},k} \in D, D_{\text{inter}_{\text{sp}},k} \in D$, де $D = \left\{\nu(t,z) : \nu|_{\Omega_{k_T}} \in C(\Omega_{k_T}), \nu > 0\right\}$.

Функціонал-нев'язку [14,22], що визначає величину відхилення шуканого розв'язку від його слідів, отриманих емпіричним шляхом на поверхнях γ_k, запишемо у вигляді

$$J_s\left(D_{\text{inter}_{\text{sp}}}, D_{\text{intra}_{\text{sp}}}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^T \left\|U_{s_k}(\tau,z) + \bar{q}_{s_k}(t,z) - M_{s_k}(t,z)\right\|^2_{\gamma_k} d\tau$$
$$\gamma_k \in \Omega_k, m = \overline{1,N} \quad (8)$$

де $\|\varphi\|^2_{L_2(\gamma_k)} = \int\limits_{\gamma_k} \varphi^2 d\gamma_k$ - квадрат норми. В даному випадку $\|\varphi\|_{L_2(\gamma_k})} = |\varphi(t,z)|_{z=\gamma_k}$.

Побудова розв'язку задачі (1)-(6)

Внутрішньочастинковий масоперенос. В припущенні, що задані та шукані функції є оригіналами за Лапласом стосовно t, зображені за Лапласом [17] для $q^*_{i_k}(p,r,z) \equiv L[q_{i_k}] = \int_0^\infty q_{i_k}(t,r,z)\, e^{-pt} dt, i = \overline{1,2}$, використовуючи заміну $q^*_{i_k} = R \cdot r^{-1} \cdot Q^*_{i_k}$ та зводячи задачу внутрішньо-частинкового переносу до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{bmatrix} D_{\text{int}\,ra11_k}\frac{d^2}{dr^2} - p & D_{\text{int}\,ra12_k} \\ D_{\text{int}\,ra21_k} & D_{\text{int}\,ra22_k}\frac{d^2}{dr^2} - p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^*_{1_k} \\ Q^*_{2_k} \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

з крайовими умовами

$$D_{\text{int}\,ras1_k}\left[\frac{1}{r^2}\left(r\frac{d}{dr}Q^*_{1k} - Q^*_{1k}\right)\right]_{r=0}$$
$$- D_{\text{int}\,ras2_k}\left[\frac{1}{r^2}\left(r\frac{d}{dr}Q^*_{2k} - Q^*_{2k}\right)\right]_{r=0} = 0,$$
$$Q^*_{sk}(p,r,z)|_{z=1} = k_k \cdot U^*_{s_k}(p,z) \quad (10)$$

Встановлюються умови параболічності системи за Петровським ($D_{\text{int}\,ra11_k} D_{\text{int}\,ra22_k} - D_{\text{int}\,ra12_k} D_{\text{int}\,ra21_k} > 0$) [15].

Обмежений розв'язок задачі (9)-(10) на $[0,R]$ отримуємо у вигляді:

$$Q^*_{1_k}(p,r,z) =$$
$$\left[\begin{matrix} \frac{E^{\text{int}\,ra}_{11_k} E^{\text{int}\,ra}_{22}}{\Delta^{\text{int}\,ra}_k}\frac{\operatorname{sh}\omega_{1_k}\sqrt{p}r}{\operatorname{sh}\omega_{1_k}\sqrt{p}R} - \\ \frac{E^{\text{int}\,ra}_{12_k} E^{\text{int}\,ra}_{21}}{\Delta^{\text{int}\,ra}_k}\frac{\operatorname{sh}\omega_{2_k}\sqrt{p}r}{\operatorname{sh}\omega_{2_k}\sqrt{p}R} \end{matrix}\right] k_{1_k} U^*_{1_k}$$
$$- \frac{E^{\text{int}\,ra}_{11_k} E^{\text{int}\,ra}_{22}}{\Delta^{\text{int}\,ra}_k}\left[\begin{matrix} \frac{\operatorname{sh}\omega_{1_k}\sqrt{p}r}{\operatorname{sh}\omega_{1_k}\sqrt{p}R} \\ -\frac{\operatorname{sh}\omega_{2_k}\sqrt{p}r}{\operatorname{sh}\omega_{2_k}\sqrt{p}R} \end{matrix}\right] k_{2_k} U^*_{2_k}, \quad (11)$$

$$Q^*_{2_k}(p,r,z) =$$
$$\frac{E^{\text{int}\,ra}_{21_k} E^{\text{int}\,ra}_{22}}{\Delta^{\text{int}\,ra}_k}\left[\begin{matrix} \frac{\operatorname{sh}\omega_{1_k}\sqrt{p}r}{\operatorname{sh}\omega_{1_k}\sqrt{p}R} - \\ \frac{\operatorname{sh}\omega_{2_k}\sqrt{p}r}{\operatorname{sh}\omega_{2_k}\sqrt{p}R} \end{matrix}\right] k_{1_k} U^*_{1_k}$$
$$- \left[\begin{matrix} \frac{E^{\text{int}\,ra}_{12_k} E^{\text{int}\,ra}_{21}}{\Delta^{\text{int}\,ra}_k}\frac{\operatorname{sh}\omega_{1_k}\sqrt{p}r}{\operatorname{sh}\omega_{1_k}\sqrt{p}R} \\ -\frac{E^{\text{int}\,ra}_{11_k} E^{\text{int}\,ra}_{22}}{\Delta^{\text{int}\,ra}_k}\frac{\operatorname{sh}\omega_{2_k}\sqrt{p}r}{\operatorname{sh}\omega_{2_k}\sqrt{p}R} \end{matrix}\right] k_{2_k} U^*_{2_k}, \quad (12)$$

З узагальненою теоремою про розвинення Гевісайда знаходимо оригінали розподілів $q_{j_k} = \frac{R}{r} Q_{j_k}, j = \overline{1,2}$ [17, 18]

$$q_{1_k}(t,r,z) =$$
$$\int\limits_0^t \left[\begin{matrix} \frac{E^{\text{int}\,ra}_{11_k} E^{\text{int}\,ra}_{22}}{\Delta^{\text{int}\,ra}_k}\Phi_{1k}(t-\tau,r) \\ -\frac{E^{\text{int}\,ra}_{12_k} E^{\text{int}\,ra}_{21}}{\Delta^{\text{int}\,ra}_k}\Phi_{2k}(t-\tau,r) \end{matrix}\right] \times$$
$$k_{1_k} U_{1_k}(\tau,z) d\tau \frac{R}{r}$$
$$- \int\limits_0^t \left[\begin{matrix} \frac{E^{\text{int}\,ra}_{11_k} E^{\text{int}\,ra}_{22}}{\Delta^{\text{int}\,ra}_k}\Phi_{1k}(t-\tau,r) \\ -\frac{E^{\text{int}\,ra}_{11_k} E^{\text{int}\,ra}_{22}}{\Delta^{\text{int}\,ra}_k}\Phi_{2k}(t-\tau,r) \end{matrix}\right] \times$$
$$k_{2_k} U_{2_k}(\tau,z)) d\tau \frac{R}{r} \quad (13)$$

$$q_{2_k}(t,r,z) = \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{E_{12_k}^{\mathrm{int}\,ra} E_{22}^{\mathrm{int}\,ra}}{\Delta_k^{\mathrm{int}\,ra}} \Phi_{1k}(t-\tau,r) \\ -\frac{E_{12_k}^{\mathrm{int}\,ra} E_{22}^{\mathrm{int}\,ra}}{\Delta_k^{\mathrm{int}\,ra}} \Phi_{2k}(t-\tau,r) \end{bmatrix} \times k_{1_k} U_{1_k}(\tau,z) d\tau \frac{R}{r} - \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{E_{12_k}^{\mathrm{int}\,ra} E_{21}^{\mathrm{int}\,ra}}{\Delta_k^{\mathrm{int}\,ra}} \Phi_{1k}(t-\tau,r) \\ -\frac{E_{11_k}^{\mathrm{int}\,ra} E_{22}^{\mathrm{int}\,ra}}{\Delta_k^{\mathrm{int}\,ra}} \Phi_{2k}(t-\tau,r) \end{bmatrix} \times k_{2_k} U_{2_k}(\tau,z)) d\tau \frac{R}{r}$$

Тут $\Phi_{j_k}(t,z)$- компоненти функцій впливу концентрацій міжчастинкового простору $U_{j_k}(t,z)$ на внутрішньочастинковий перенос; $\beta_{1,2_k}$ - корені характеристичного многочлена матриці системи:

$$(D_{\mathrm{int}\,ra11_k} D_{\mathrm{int}\,ra22_k} - D_{\mathrm{int}\,ra12_k} D_{\mathrm{int}\,ra21_k})\,\beta^4 - (D_{\mathrm{int}\,ra11_k} + D_{\mathrm{int}\,ra22_k})\,p\beta^2 + p^2 = 0 \quad (14)$$

При відомих залежностях $U_{j_k}(t,z)$ розподіли концентрацій в intraparticle space $q_{j_k}(t,r,z)$ стають відомими.

Масоперенос в міжчастинковому просторі. У зображені за Лапласом для функцій $U_{j_k}^*(p,z) \equiv L[U_{j_k}] = \int_0^\infty U_{j_k}(t,z)\,e^{-pt}dt;\, j = \overline{1,2}$ одержуємо задачу про побудову обмеженого в області розв'язку системи рівнянь [17]

$$\begin{bmatrix} D_{11_k}\frac{d^2}{dz^2} - (p + h_{11_k}^*(p)) & D_{12_k}\frac{d^2}{dz^2} - h_{12_k}^*(p) \\ D_{21_k}\frac{d^2}{dz^2} - h_{21_k}^*(p) & D_{22_k}\frac{d^2}{dz^2} - (p + h_{22_k}^*(p)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1_k}^*(p,z) \\ U_{2_k}^*(p,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

з крайовими умовами:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[D_{s1_1} U_{1_1}^*(p,z) + D_{s2_1} U_{2_1}^*(p,z)\right]_{z=0} = 0; \quad U_{s_{n+1}}^*(p,z)\big|_{z=l} = U_{l_s}^*(p); \quad (16)$$

та системою n- інтерфейсних умов

$$\left[U_{s_k}^*(p,z) - U_{s_{k+1}}^*(p,z)\right]_{z=l_k} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{\mathrm{k}}\begin{bmatrix} U_{1_k}^* \\ U_{2_k}^* \end{bmatrix} - D_{\mathrm{k+1}}\begin{bmatrix} U_{1_{k+1}}^* \\ U_{2_{k+1}}^* \end{bmatrix}\right)\Bigg|_{z=l_k} = 0,$$
$$k = \overline{1,n}; s = \overline{1,2} \quad (17)$$

Загальним розв'язком системи (15) є:

$$U_{s_1}^*(p,z) = A_{s_1}(p)\left(C_{1_1}\operatorname{ch}\lambda_{1_1}^* z + C_{3_1}\operatorname{ch}\lambda_{3_1}^* z\right)$$
$$U_{s_k}^*(p,z) = A_{s_k}(p)\left(C_{1_k}\operatorname{ch}\lambda_{1_k}^* z + C_{2_k} sh\lambda_{1_k}^* z\right) + A_{s_k}\left(C_{3_k}\operatorname{ch}\lambda_{3_k}^* z + C_{4_k} sh\lambda_{4_k}^* z\right), \quad (18)$$

Тут

$$A_{1_k}(p) = (D_{22_k} - D_{12})\lambda_{1_k}^{*^2} - (p + h_{22_k}^* - h_{12_k}^*)$$

$$A_{2_k}(p) = (D_{11_k} - D_{21_k})\lambda_{1_k}^{*^2} - (p + h_{11_k}^*(p) - h_{21_k}^*(p))$$

$\lambda_{1_k}, \lambda_{2_k}, \lambda_{3_k}, \lambda_{4_k}$ - корені характеристичного рівняння:

$$(D_{11_k} D_{22_k} - D_{12_k} D_{21_k})\lambda^4 - ((D_{11_k} + D_{22_k})p + h_{1_\mathrm{k}}^*(p))\lambda^2 + h_{2_\mathrm{k}}^*(p) = 0,$$

Крайові та інтерфейсні умови (16), (17) дають систему рівнянь $4n$ + 2-го порядку для визначення невідомих констант $C_{1_1}, C_{3_1}, C_{1_k}, C_{2_k}, C_{3_k}, C_{4_k}, k = \overline{1, n+1}$ в (18).

Використовуючи підхід щодо визначення елементів матриці впливу Коші та методику праць [8, 18], вирази для обчислення компонентів вектор-функцій $U_{s_k}^*(p,z)$ зводяться до класичного вигляду

$$\begin{bmatrix} U_{1_k}^*(p,z) \\ U_{2_k}^*(p,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{11_k}^*(p,z) & \mathcal{H}_{12_k}^*(p,z) \\ \mathcal{H}_{21_k}^*(p,z) & \mathcal{H}_{22_k}^*(p,z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{l_1}^*(p) \\ U_{l_2}^*(p) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Тут компоненти матриць впливу $\left[\mathcal{H}_{ij_k}^*(p,z)\right]$ - ієрархічної структури одержуються рекурентним способом шляхом обчислення визначників алгебраїчної системи, побудованої на основі умов (16)-(17). Згідно методики описаної в [18,22], здійснюється перехід до оригіналів за Лапласом, заміною інтеґралу по контуру Бромвіча інтеґралом по уявній вісі

$$\mathcal{H}_{ij_k}(t,z) \equiv L^{-1}\left[\mathcal{H}^*_{ij_k}(p,z)\right] = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \mathcal{R}e\left[\mathcal{H}^*_{ij_k}(is,z)e^{ist}\right]ds,$$

$$i,j=\overline{1,2};k=\overline{1,n+1} \quad (20)$$

З врахуванням одержаних головних розв'язків задачі (15)-(17) та формул (20), отримуємо єдиний розв'язок що описує масоперенос у міжчастинковому просторі:

$$\begin{bmatrix} U_{1_k}(t,z) \\ U_{2_k}(t,z) \end{bmatrix} = \int\limits_0^t \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{11_k}(t-\tau,z) & \mathcal{H}_{12_k}(t-\tau,z) \\ \mathcal{H}_{21_k}(t-\tau,z) & \mathcal{H}_{22_k}(t-\tau,z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{l_1}(\tau) \\ U_{l_2}(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (21)$$

Викладене вище дає підстави сформулювати наступну теорему.

Теорема (про розв'язність прямої крайової задачі): якщо виконується умова однозначної розв'язності неоднорідної змішаної крайової задачі, задані і шукані функції є оригіналами за Лапласом, то розв'язок змішаної крайової задачі (1)–(6) існує і єдиний та визначається формулами (13) і (21).

Пряма задача функціональної ідентифікації

З метою ідентифікації параметрів компетитивної дифузії (коефіцієнтів $D_{\mathrm{int}\,ra_{s_m}}, D_{\mathrm{int}\,er_{s_m}}$) як функцій від часу, використовуючи об'ємну базу експериментальних даних пошарового RNM-сканування [3,6], розглянемо трансформування задачі (1) - (6) у вигляді системи $N-1$ - крайових задач ідентифікації $D_{\mathrm{int}\,ra_{s_m}}, D_{\mathrm{int}\,er_{s_m}}$ в кожній точці Z для кожного фрагмента $\Omega_m, m=\overline{1,N+1}$ [3,9]:

$$\frac{\partial C_{s_m}(t,Z)}{\partial t} = \frac{D_{\mathrm{int}\,er_{s_m}}}{l^2}\frac{\partial^2{}_{s_m}}{\partial Z^2} - e_{\mathrm{inter}_m}K_{s_m}\frac{D_{\mathrm{int}\,ra_{s_m}}}{R^2}\left(\frac{1}{X}\frac{\partial N_{s_m}}{\partial X} - \frac{1}{X^2}N_{s_m}\right)_{X=1} \quad (22)$$

$$\frac{\partial N_{s_m}(t,X,Z)}{\partial t} = \frac{D_{\mathrm{int}\,ra_{s_m}}}{R^2}\frac{\partial^2 N_{s_m}}{\partial X^2} \quad (23)$$

з початковими умовами

$$C_{s_m}(t=0,Z)=0, \quad N_{s_m}(t=0,X,Z)=0, \quad X\in(0,1), Z\in\Omega_m, m=\overline{1,N+1}, \quad (24)$$

крайовими умовами для кожного m-го шару

$$C_{s_m}(t,Z=L_m)=\theta_{s_m}, \quad C_{s_{m-1}}(t,Z=L_{m-1})=\theta_{s_{m-1}}, \quad (25)$$

$$C_{s_1}(t,L_1)=\theta_{s_1}, \quad \frac{\partial C_{s_1}}{\partial Z}(t,Z=0)=0, \quad s=\overline{1,2}, m=\overline{N+1,2}, \theta_{s_{N+1}}=1. \quad (26)$$

Крайові умови для окремої частинки

$$N_{s_m}(t,X=0,Z)=0, \quad N_{s_m}(t,X=1,Z)=C_{s_m}(t,Z), \quad Z\in\Omega_m, m=\overline{1,N+1} \quad (27)$$

де $\Delta = L_m - L_{m-1}, m=\overline{1,N+1}$, θ_m - експериментальний слід, $C_{s_m}(t)$ на m-му сегменті, $\Delta\theta_m = \theta_m - 0_{m-1}, m=\overline{1,N+1}$.

Єдиний розв'язк C_{sm} і N_{sm} прямої задачі побудований операційним метод Гевісайда на основі теореми про розклад в ряд зображень за Лапласом за коренями знаменника [17, 18].

$$C_{sm}(t,Z) = 1 + \frac{2\pi}{\Delta L}\frac{R^2}{\mathrm{D_{intra}}_{sm}}\frac{D_{\mathrm{int}\,er_{sm}}}{\Delta L^2}\times \sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty \frac{\omega_{sm}(n,Z)\exp\left(-\frac{D_{\mathrm{int}\,ra_{sm}}\beta^2_{kn_m}}{\mathrm{R}^2}t\right)}{(-1)^n\beta^2_{kn_m}\Theta(\beta_{kn_m})} \quad (28)$$

$$N_{sm}(t,X,Z) = 1 + \frac{2\pi}{\Delta L}\frac{R^2}{\mathrm{D_{intra}}_{sm}}\frac{D_{\mathrm{int}\,er_{sm}}}{\Delta L^2}\times \sum_{n=1}^\infty\sum_{k=1}^\infty \frac{\omega_{sm}(n,Z)\exp(-\frac{D_{\mathrm{int}\,ra_{sm}}\beta^2_{kn_m}}{\mathrm{R}^2}t)}{(-1)^n\beta^2_{kn_m}\sin(\beta_{kn_m})\Theta(\beta_{kn_m})}$$

(29)

$$\Theta=\left(\frac{3}{\mathrm{e}_{\mathrm{inter}_m}}(\frac{1}{\sin^2(\beta_{kn_m})}-\frac{\mathrm{c}\,tg\,(\beta_{kn_m})}{\beta_{kn_m}})+2\right)$$

де β_{kn_1},$\beta_{kn_m}, m=\overline{2,\infty}$- корені відповідних трансцендентних рівнянь:

$$\gamma_{s1}^2(\beta)\equiv\frac{3}{e_{\mathrm{int}\,er_1}}\frac{\Delta L^2}{R^2}\frac{D_{\mathrm{int}\,tra_{s1}}}{D_{\mathrm{int}\,er_{s1}}}$$
$$\left(\frac{e_{\mathrm{int}\,er_1}}{3}\beta^2-\beta ctg\beta+1\right)=\frac{2n-1}{2\Delta L}\pi,$$

$$\gamma_{sm}^2(\beta)\equiv\frac{3}{e_{\mathrm{int}\,er_m}}\frac{\Delta L^2}{R^2}\frac{D_{\mathrm{int}\,tra_{sm}}}{D_{\mathrm{int}\,er_{sm}}}$$
$$\left(\frac{e_{\mathrm{int}\,er_{sm}}}{3}\beta^2-\beta ctg\beta+1\right)=\frac{n\pi}{\Delta L},$$

$$n,\overline{0,\infty},k=\overline{1,\infty},m=\overline{2,N+1}$$

$$\omega_{sm}(n,Z)=$$
$$\begin{cases}(2\mathrm{n}-1)\cos\left(\frac{2\mathrm{n}-1}{2}\pi Z\right) & m=1\\ n\begin{pmatrix}\theta_{sm}\sin\left[\frac{n\pi}{\Delta L}(Z-L_{m-1})\right]\\ +\theta_{s_{m-1}}\sin\left[\frac{n\pi}{\Delta L}(L_m-Z)\right]\end{pmatrix} & m>1\end{cases}$$

Градієнтний метод розв'язування задач коефіцієнтної ідентифікації. Розв'язок задач ідентифікації (23)-(27) зводиться до задачі оптимізації функціоналу-нев'язки поступово удосконалюючи розв'язок шляхом спеціальної процедури регуляризації з використанням високоефективних градієнтних методів. Градієнтні методи в задах ідентифікації на основі середньоквадратичного функціоналу-нев'язки знайшли своє практичне застосування в роботах Ж.-Л.Ліонса [20], пізніше цей підхід був розвинутий О.М.Аліфановим (розрахунок температурних полів літальних апаратів)[19], працях авторів (задачі гідромеханіки, фільтрації, дифузії і адсорбції та інш.) [3,10,12,13,22].

Використовуючи градієнтний метод мінімізації похибок для ідентифікації розподілів коефіцієнтів дифузії в intracrystallite space $D_{\mathrm{intra}_{\mathrm{sm}}}$ і intercrystallite space $D_{\mathrm{inter}_{\mathrm{sm}}}$ як функції від часу для s-ї дифундованої компоненти, отримуємо регуляризаційні вирази $n+1$-го кроку ідентифікації [9,21]:

$$D_{\mathrm{intra}_{\mathrm{sm}}}^{n+1}(t)=D_{\mathrm{intra}_{\mathrm{sm}}}^{n}-\nabla J_{D_{\mathrm{intra}_{\mathrm{sm}}}}^{n}(t)\times$$
$$\frac{\left[C_{s_m}+\left(\frac{1}{X}\right)_{X=\frac12}N_{s_m}-M_{s_m}\right]^2}{\left\|\nabla J_{D_{\mathrm{int}\,ra_{sm}}^n}^n(t)\right\|^2+\left\|\nabla J_{D_{\mathrm{int}\,er_{sm}}^n}^n(t)\right\|^2}$$
$$D_{\mathrm{inter}_{\mathrm{sm}}}^{n+1}(t)=D_{\mathrm{inter}_{\mathrm{sm}}}^{n}-\nabla J_{D_{\mathrm{inter}_{\mathrm{sm}}}}^{n}(t)\times$$
$$\frac{\left[C_{s_m}+\left(\frac{1}{X}\right)_{X=\frac12}N_{s_m}-M_{s_m}\right]^2}{\left\|\nabla J_{D_{\mathrm{intra}_{\mathrm{sm}}}^n}^n(t)\right\|^2+\left\|\nabla J_{D_{\mathrm{inter}_{\mathrm{sm}}}^n}^n(t)\right\|^2}\quad(30)$$

де $J_s\left(D_{\mathrm{inter}_{\mathrm{sm}}},D_{\mathrm{intra}_{\mathrm{sm}}}\right)$ модифікований функціонал-нев'язки на поверхні $\gamma_s\in\Omega_m$:

$$J_s\left(D_{\mathrm{inter}_{\mathrm{sm}}},D_{\mathrm{intra}_{\mathrm{sm}}}\right)=$$
$$\frac12\int_0^T\left[C_{s_m}+\overline{Q}_{s_m}-M_{s_m}\right]^2d\tau\quad(31)$$

$\nabla J_{D_{\mathrm{inter}_{\mathrm{sm}}}^n}^n(t)$, $\nabla J_{D_{\mathrm{intra}_{\mathrm{sm}}}^n}^n(t)$ - компоненти градієнту функціоналу-нев'язки $J_s\left(D_{\mathrm{inter}_{\mathrm{sm}}},D_{\mathrm{intra}_{\mathrm{sm}}}\right))$ по функціях $D_{\mathrm{inter}_{sm}}^n\in\Omega_T$, $D_{\mathrm{intra}_{sm}}^n\in\Omega_T$. $\left\|\nabla J_{D_u}^n(t)\right\|^2=\int_0^T\left[\nabla J_{D_{\mathrm{int}\,ra_{sm}}^n}^n(t)\right]^2dt$ - квадрат норми градієнту функціоналу-нев'язки $\overline{Q}_{s_m}(t,z)=\int_0^1 Q_{s_m}(t,X,Z)dX$.

Побудова розширеного функціоналу. Перейдемо до безумовної екстремальної форми розглядуваної задачі ідентифікації, вводячи розширений функціонал [19,20]

$$\Phi\left(D_{\mathrm{inter}_{\mathrm{sm}}},D_{\mathrm{intra}_{\mathrm{sm}}}\right)=J_s+I_{s_1}+I_{s_2},\quad(32)$$

в якому I_{s_1},I_{s_2} - складові, що враховують специфіку основних рівнянь балансу (22) і (23) відповідно для вихідної задачі ідентифікації (22)-(27):

$$I_{s_1}=\int_0^T\int_{L_{m-1}}^{L_m}\phi_{sm}(t,Z)\times$$

$$\left(\begin{array}{c}\frac{\partial C_{s_m}}{\partial t}-\frac{D_{\text{int}\,er_{sm}}}{l^2}\frac{\partial^2 C_{s_m}}{\partial Z^2}+\\ e_{\text{inter}_m}K_{s_m}\frac{D_{\text{int}\,ra_{sm}}}{R}\left(\frac{\partial Q_{s_m}}{\partial X}\right)_{X=1}\end{array}\right)dZdt \quad (33)$$

$$I_{s_2}=\int\limits_0^T\int\limits_0^1\int\limits_{L_{m-1}}^{L_m}\psi_{s_m}(t,Z)\times$$
$$\left(\begin{array}{c}\frac{\partial Q_{s_m}}{\partial t}-\frac{D_{\text{int}\,ra_{sm}}}{R^2}Q_{s_m}\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{2}{X}\frac{\partial}{\partial X}\right)\end{array}\right)XdXdZdt \quad (34)$$

де J_s - функціонал-нев'язки, $\phi_{s_m},\psi_{s_m},_{s,=\overline{1,2}}$ – невідомі множники Лагранжа, що підлягають визначенню, з умови стаціонарності функціоналу $\Phi\left(D_{\text{inter}_{\text{sm}}},D_{\text{intra}_{\text{sm}}}\right)$:

$$\Delta\Phi\left(D_{\text{inter}_{\text{sm}}},D_{\text{intra}_{\text{sm}}}\right)\equiv \Delta J_s+\Delta I_{s_1}+\Delta I_{s_2}=0, \quad (35)$$

Постановка спряженої крайової задачі. У відповідності з вихідною початково-крайовою задачею для кожного наближення $D^n_{\text{intra}_{\text{sm}}}$,$D^n_{\text{inter}_{\text{sm}}}$ розв'язок $D_{\text{intra}_{\text{sm}}}$,$D_{\text{inter}_{\text{sm}}}$ отримуємо спряжену крайову задачу в операторній формі [9,22]:

$$\mathcal{L}^*\Psi_{s_m}(t,X,Z)=E_{s_m}(t)\delta\left(Z-\gamma_m\right),$$
$$\Psi_{s_m}\in(0,1)\bigcup\Omega_{mT},m=\overline{1,n+1}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\psi_{s_m}(t,X,Z)_{|X=0}=0; \quad (37)$$
$$\frac{\partial}{\partial X}\psi_{s_m}(t,X,Z)_{|X=0}=0; \quad (38)$$

$$\psi_{s_m}(t,X,Z)_{|X=1}=\varphi_{s_m}(t,Z) \quad (39)$$

$$\phi_{s_m}\left(t,Z=L_m\right)=0,\phi_{s_{m-1}}\left(t,Z=L_{m-1}\right)=0;$$
$$\phi_{s_1}\left(t,L_1\right)=0,\frac{\partial\phi_{s_1}}{\partial Z}\left(t,Z=0\right)=0$$
$$s=\overline{1,2},m=\overline{N+1,2} \quad (40)$$

$$\psi_{s_m}(t,X,Z)_{|X=1}=\varphi_{s_m}(t,Z) \quad (41)$$

$$\phi_{s_m}\left(t,Z=L_m\right)=0,\phi_{s_{m-1}}\left(t,Z=L_{m-1}\right)=0;$$
$$\phi_{s_1}\left(t,L_1\right)=0,\frac{\partial\phi_{s_1}}{\partial Z}\left(t,Z=0\right)=0$$
$$s=\overline{1,2},m=\overline{N+1,2}$$
$$(42)$$

Єдиний розв'язок ϕ_{sm}, ψ_{sm} спряженої крайової задачі побудовано операційним методом Гевісайда [17,18].

Технологія отримання аналітичних виразів компонентів ґрадиента функціоналу-нев'язки. Розглядаючи $\mathcal{L}$ як оператор, що відображає Ω_{mT} в просторі L_2, для елементів $\mathcal{L}w,\Psi\in L_2$ визначимо скалярний добуток

$$\left(\mathcal{L}w_{s_m}\left(t,X,Z\right),\Psi_{s_m}\left(t,X,Z\right)\right)=\left[\begin{array}{c}\iint\limits_{\Omega_{mT}}\mathcal{L}\Delta C_{s_m}\phi_{s_m}XdXdZdt\\ \iiint\limits_{(0,R)\bigcup\Omega_{mT}}\mathcal{L}\Delta Q_{s_m}\psi_{s_m}XdXdZdt\end{array}\right] \quad (43)$$

де $\phi_{s_m}\left(t,Z\right)$ і $\psi_{s_m}\left(t,X,Z\right)$ належить $\bar\Omega_{mT}$ і $[0,R]\bigcup\bar\Omega_{mT}$ відповідно.

Для скалярного добутку має місце тотожність Лагранжа [19,21]:

$$\left(\mathcal{L}w_{s_m}\left(t,X,Z\right),\Psi_{s_m}\left(t,X,Z\right)\right)=\left(w_{s_m}\left(t,X,Z\right),\mathcal{L}^*\Psi_{s_m}\left(t,X,Z\right)\right) \quad (44)$$

Записавши приріст функціоналу-нев'язки $\Delta J_s\left(D_{\text{inter}_{\text{sm}}},D_{\text{intra}_{\text{sm}}}\right)$ в скалярній формі, використовуючи заміну $w_{s_m}=\mathcal{L}^{-1}\xi_{s_m}$, де $\mathcal{L}^{-1}$ - обернений оператор до оператора $\mathcal{L}$, отримаємо

$$\Delta J_s\left(D_{\text{intra}_{\text{sm}}},D_{\text{inter}_{\text{sm}}}\right)\equiv\left(w_{s_m}(t,X,Z),E_{s_m}(t)\right)=$$
$$\int\limits_0^T\int\limits_{L_{m-1}}^{L_m}\mathcal{L}^{-1}X_{s_{m,1}}\cdot E_{s_m}(t)\delta\left(Z-\gamma_m\right)dZd\tau+$$
$$\int\limits_0^T\int\limits_{L_{m-1}}^{L_m}\int\limits_0^1\mathcal{L}^{-1}X_{s_{m,2}}\cdot E_{s_m}(t)\delta\left(Z-\gamma_m\right)dXdZd\tau$$
$$+O(\max|\Delta C_{s_m},\Delta Q_{sm}|) \quad (45)$$

Нехтуючи нескінченно малими другого порядку, з врахуванням

$\mathcal{L}^{-1*}\left[E_{s_m}(t)\delta\left(Z-\gamma_m\right)\right] = \Psi_{s_m}$, отримаємо прирости функціоналу-нев'язки, вираженого через розв'язок спряженої задачі:

$$\Delta J_s\left(D_{\text{inter}_{\text{sm}}}, D_{\text{intra}_{\text{sm}}}\right) = \left(\xi_{s_m}(t,Z), \mathcal{L}^{-1*}\left[E_{s_m}(t)\delta\left(Z-\gamma_m\right)\right]\right) = \left(\Psi_{s_m}(t,X,Z), \xi_{s_m}(t,X,Z)\right) \quad (46)$$

де $\mathcal{L}^{-1*}$ - оператор спряжений з оберненим оператором $\mathcal{L}^{-1}$, Ψ_{s_m} - вектор розв'язку спряженої задачі.

Формула взаємозв'язку між прямою і спряженою задачами. Розкриваючи в рівнянні (44) компоненти $X_{s_m}(t,X,Z)$, отримуємо важливу формулу для встановлення взаємозв'язку між прямою і спряженою задачами, що в кінцевому рахунку дає можливість отримати явні аналітичні вирази компонентів градієнту функціоналу-нев'язки:

$$\Delta J_s(D_{\text{intra}_{\text{sm}}}, D_{\text{inter}_{\text{sm}}}) = \left(\begin{array}{c} \phi_{s_m}(t,Z), \frac{\partial}{\partial Z}\left(\Delta D_{\text{inter}_{\text{sm}}}\frac{\partial}{\partial Z}C_{s_m}\right) - \\ e_{\text{int}\,er_m}\frac{\Delta D_{\text{intra}_{\text{sm}}}}{R}\frac{\partial}{\partial X}Q_{s_m}(t,X,Z_{X=1} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} \psi_{s_m}(t,X,Z)\frac{D_{\text{intra}_{\text{sm}}}}{R^2}\times \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{2}{X}\frac{\partial}{\partial X}\right)Q_{s_m}(t,X,Z) \end{array}\right) \quad (47)$$

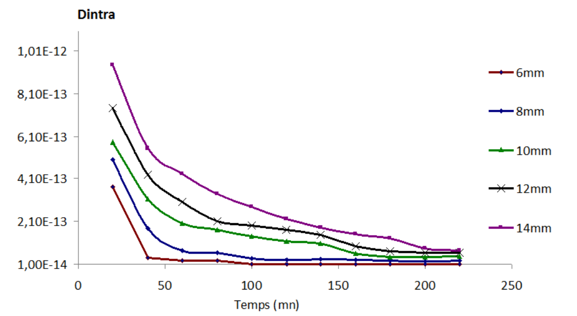
Вирази градієнтів функціоналу-нев'язки. Продиференціювавши вирази приростів (45) відповідно по $\Delta D_{\text{intra}_{\text{sm}}}$ і $\Delta D_{\text{inter}_{\text{sm}}}$ і розкриваючи скалярні добутки, отримаємо шукані аналітичні вирази градієнтів функціоналу-нев'язки за необхідними компонентами коефіцієнтів компетитивної дифузії, як функції від часу в intraparticle space та interparticle space відповідно:

$$\nabla J_{D_{\text{intra}_{\text{sm}}}}(t) = -\frac{e_{\text{int}\,er_m}}{R}\int\limits_{L_{m-1}}^{L_m}\frac{\partial}{\partial X}Q_{s_m}(t,1,Z)\phi_{s_m}dZ + \frac{1}{R^2}\int\limits_{L_{m-1}}^{L_m}\int\limits_0^1\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{2}{X}\frac{\partial}{\partial X}\right)Q_{s_m}\psi_{s_m}XdXdZ \quad (48)$$

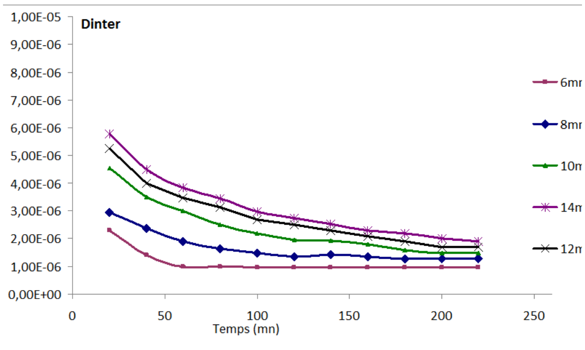
$$\nabla J_{D_{\text{inter}_{\text{sm}}}}(t) = \int\limits_{L_{m-1}}^{L_m}\frac{\partial^2 C_{s_m}}{\partial Z^2}\phi_{s_m}(t,Z)dZ \quad (49)$$

Ідентифікація параметрів, числове моделювання та аналіз

Відновлення профілів коефіцієнтів дифузії. На рис. 1 та 2 подані ідентифіковані згідно регуляризаційних формул ідентифікації за даними RNM-спектроскопії [6] розподіли коефіцієнтів компетитивної дифузії бензолу та гексану, як функції від часу для різних положень координати товщини шару: 6, 8, 10, 12, 14 мм. Криві коефіцієнтів дифузії мають псевдоекспоненційний характер і змінюються в діапазоні від 7,0 до 5,0 E-12 E-13. Для часу дифузії більше 125-150 хв. спостерігається відносно стабільна картина масообміну, що супроводжується плавним наближенням профілів коефіцієнтів дифузії $D_{\text{int}\,ra_{1,k}}$ до значень, відповідних положенням їх рівноваги.

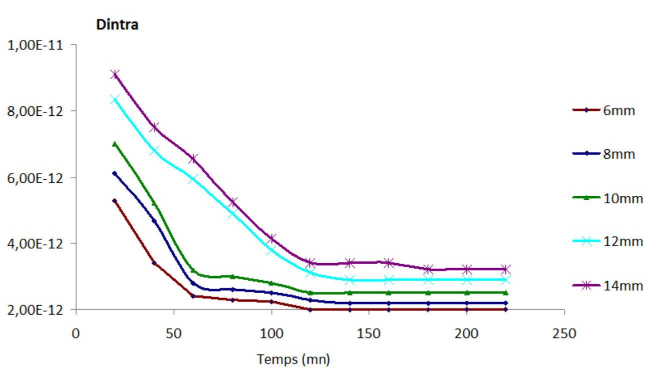


(a) intraparticlle space (бензол)

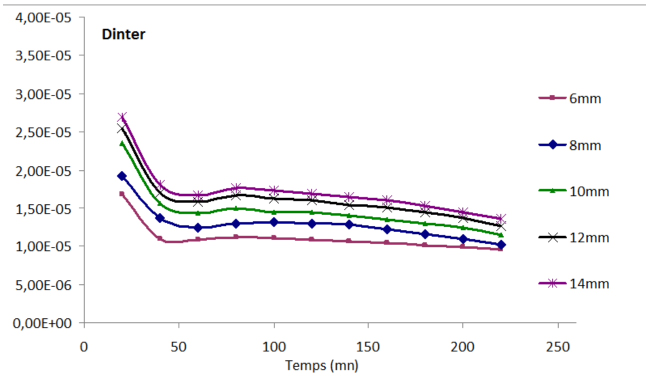


(b) interparticlles space (бензол)

Рис. 1: Профілі коефіцієнтів дифузії бензолу

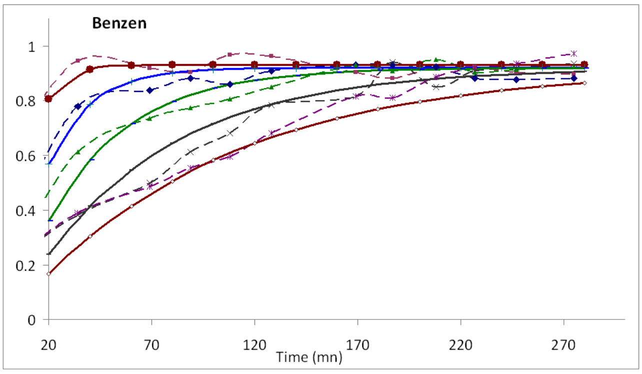


(a) intraparticle space (гексан)

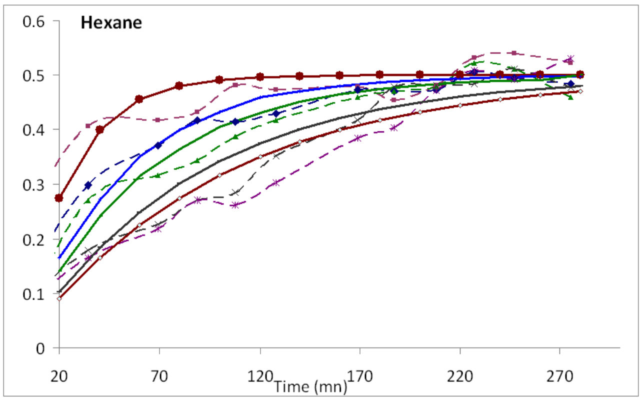


(b) interparticlles space (гексан)

Рис. 2: Профілі коефіцієнтів дифузії гексану



(a) бензол



(b) гексан

Рис. 3: Розподіли концентрацій дифузії в просторі intercrystallites від часу і різних положень каталітичного шару

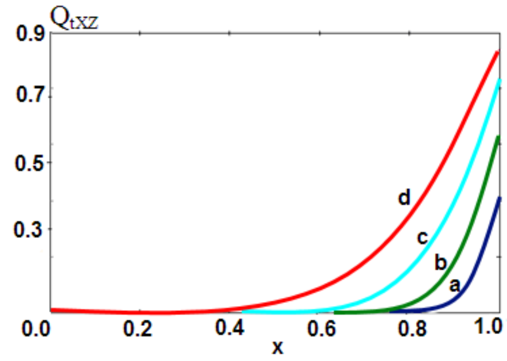
Розподіли коефіцієнтів дифузії $D_{\text{int}\,er_{1,k}}$ мають більш пологий вигляд і змінюються в діапазоні від 6.0 Е-6 до 1.0 Е-6.

Концентрації і градієнти концентрацій в мікро- і нанопорах частинок. Рис. 3 демонструє результати моделювання концентраційних кривих бензолу і гексану в intercrystallites space, за результатами ідентифікації коефіцієнтів дифузії (рис. 1 та рис. 2).

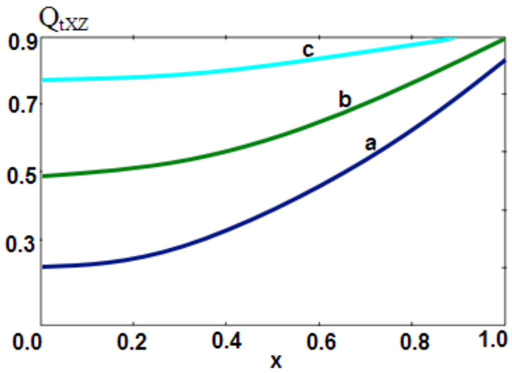
Графіки на рис. 4 та рис. 5 демонструють зміну градієнтів концентрації поглинутих компонентів адсорбату (бензолу і гексану) в мікро- і нанопорах intracrystallites space уздовж радіуса частинки (кристаліта). Рис. 4 показує зміну градієнтів концентрації уздовж радіуса кристаліта для бензолу в intracrystallites space для двох координати товщини: 8 і 14 мм при дифузійних періодах в a – t= 25 mn, b – t= 50 mn, c – t=100 mn, d – t=200, а рис. 5 - для гексану. Як видно з графіків, значні градієнти концентрацій мають місце для частинок, розміщених в вихідних шарах (8 мм), значення яких на фінальній стадії дифузії досягають в центрі кристаліту 0,8-0,9 одиниць. Для гексану (рис.5), спостерігається менша ступінь поглинання. Так для частинок вихідного шару (8 мм) значення концентрації на фінальній стадії дифузії досягає 0,3 - 0,1 одиниці (в центрі кристаліту).

Висновки

Реалізовано моделі ідентифікації параметрів компетитивної дифузії в неоднорідних середовищах нанопористих частинок з обґрунтуванням постановок та розв'язання прямої та спряженої крайових задач. Операційним методом Гевісайда отримані їх точні аналітичні розв'язки. На підставі теорії оптимального управління станом багатокомпонентних систем і зазначених висо-

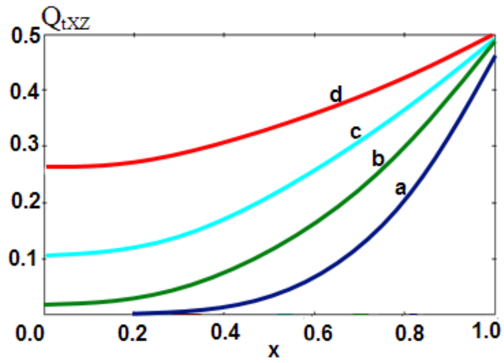


(a) бензол (14мм)

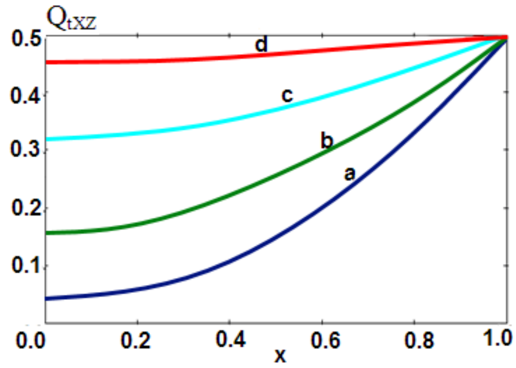


(b) бензол(8мм)

Рис. 4: Розподіли градієнтів концентрації дифузії уздовж радіусу частинки для бензолу



(a) гексан(14мм)



(b) гексан(8мм)

Рис. 5: Розподіли градієнтів концентрації дифузії уздовж радіусу частинки для гексану

кошвидкісних аналітичних розв'язків прямих і спряжених задач отримано явні вирази градієнтів функціоналів-нев'язок для ідентифікації параметрів нанопористих середовищ, при допомозі яких відновлено розподіли коефіцієнтів дифузії в просторах intercrystallytes space і intracrystallytes space як функцій від часу для різних положень частинок вздовж шару каталізатора та побудовано розподіли концентрацій дифундованих компонент.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Fernandez M., Karger J., Freude D., Freude, D., Pampel, , Van Baten J.M. and Krishna R* Mixture diffusion in zeolites studied by MAS PFG NMR and molecular simulation. Microporous and Mesoporous Materials. - 2007. - 105. - P.124-131.

2. *Karger J., Grinberg F., Heitjans P.* Diffusion fundamentals. Leipziger Unviersite, Leipzig, 2005. – 615 p.

3. *Petryk M., Leclerc S., Canet D., Sergienko I., Deineka V., Fraissard J.* Competitive Diffusion of Gases in a Zeolite Bed: NMR and Slice Selection Procedure, Modelling and Parameter Identification. The Journal of Physical Chem. C. ACS (USA). – 2015. – Vol. 119. – Issue 47. – P. 26519–26525

4. *Petryk M., Vorobiev E.* Numerical and Analytical Modeling of Solid-Liquid Expression from Soft Plant Materials. AIChE Journal. Wiley (USA). - 2013. - Volume 59, Issue 12. - P. 4762–4771

5. *Petryk M., Leclerc S., Canet D., Fraissard J.* Modeling of gas transport in a microporous solid using a slice selection procedure: Application to the diffusion of benzene in ZSM5 // Catalysis Today, Elsevier. – 2008 – 139(3). – P. 234–240.

6. *Lecler S., Petryk M., Canet D., Fraissard J.* Competitive Diffusion of Gases in a Zeolite Using Proton NMR and Sclice Selection Procedure // Catalysis Today, Elsevier B.V. - 2012. – Vol. 187, Issue 1. – P. 104-107.

7. *Petryk M., Leclerc S., Canet D., Fraissard J.* Mathematical modeling and visualization of gas transport in a zeolite bed using a slice selection procedure // Diffusion Fundamentals. – 2007. – 4. – P. 11.1–11.23.

8. *Петрик М.Р.* Математическое моделирование масопереноса в симметрических неоднородных и нанопористых средах с системой n-интерфейсных взаимодействий // Кибернетика и систем. анализ. – 2007. – № 1. – С. 114–134.

9. *Sergienko. I.V., Petryk M.R, Leclerc S., Fraissard J.* Highly Efficient Methods of the Identification of Competitive Diffusion Parameters in Inhomogeneous Media of Nanoporous Particles. Cybernetics and Systems Analysis. Springer (USA). - 2015 - Volume 51, Issue 4, P.529-546

10. *Дейнека В.С., Петрик М.Р., Фрессард Ж.* Идентификация кинетических праметров массопереноса в многокомпонетных системах компетитивной диффузии в неоднородных нанопористых середах // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 5. – С. 46–64.

11. *Дейнека В.С.* Идентификация параметров задач масопереноса в нанопористых средах при извесных суммарных распределениях массы //Доп. НАН України.- 2013.- № 4.- С. 26-32.

12. *Дейнека В.С., Петрик М.Р., Михалик Д.М.* Идентификация кинетических параметров однокомпонентного адсорбционного массопереноса в микропористых каталитических средах // Пробл. управления и информатики. - 2011. - №12. - С.12-25.

13. *Петрик М.Р., Ж. Фрессард.* Математическое моделирование нелинейной компетитивной двухкомпонентной диффузии в среде нанопористых частиц // Проблемы управления и информатики. - 2009.-№2.-С.48-65.

14. *Sergienko I.V., Deineka V.S.* Optimal Control of Distributed Systems with Conjugation Conditions. New York: Kluwer Academic Publishers (2005). 400p.

15. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений –М.: Физматгиз, 1959 – 468 с.

16. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач, –. М.:Наука,1979.– 288с.

17. *Лаврентьев М. А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

18. *Ленюк М.П., Петрик М.Р.* Інтегральні перетворення Фур'є, Бесселя із спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних і нанопористих середовищах. К. Наукова думка. - 2000. - 372с.

19. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.

20. *Lions J.-L.* Perturbations Singulieres dans les Problenus aux Linutes et en Controle Optimal // New York: Springer. Lecture Notes in Math. Ser., 2008.

21. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. – Киев, Наукова думка, 2009. – 638 с.

22. *Дейнека В.С., Петрик М.Р., Кане Д., Фресар Ж.* Математичне моделювання та ідентифікація параметрів масопереносу в неоднорідному, нанопористому середовищі (адсорбція, компетитивна дифузія) К.: Національна академія наук України, Інститут Кібернетики ім.В.М.Глушкова. - 2014. - 166с.

23 *Сергієнко І.В. , Петрик М.Р. , Хіміч О.М., Кане Д., Михалик Д.М., Леклерк С., Фресар Ж.* Математичне моделювання масопереносу в середовищах частинок нанопористої структури / Національна академія наук України, Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова – 2014 –209с.

УДК 501

©2016 р. Б.Й. Пташник

ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України

ОСНОВОПОЛОЖНИК УКРАЇНСЬКОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ КУЛЬТУРИ В ГАЛИЧИНІ

У статті висвітлено життєвий та творчий шлях видатного українського математика першої половини XX сторіччя Володимира Левицького — автора першої наукової статті з математики українською мовою.

The article tells about the life and work of the famous Ukrainian mathematician of the first half of the twentieth century, Volodymyr Levytskyi — the author of the first article in mathematics in Ukrainian.

14 липня 2016 року минуло 60 років від дня переходу у вічність видатного українського математика Володимира Йосиповича Левицького, чиє життя і творчість були тісно пов'язані з Галичиною, з Науковим товариством ім. Шевченка (НТШ).

Володимир Левицький прожив довге та змістовне життя, впродовж якого невтомно і щиро трудився на ниві української науки та освіти. Працюючи в Галичині, він вперше піднімав небосхил математичної культури на українському грунті. Був автором першої наукової статті з математики українською мовою, незмінним редактором першого україномовного наукового часопису з природничих наук, першим підготував і опублікував матеріали до української термінології з математики, фізики та хімії, серед перших був автором українських підручників з математики та фізики для середніх шкіл, фундатором Товариства наукових викладів імені Петра Могили, а також фундатором і викладачем вищої математики Українського таємного університету у Львові.

Рис. 1: Володимир Левицький, 1954 р.

Народився Володимир Левицький 31 грудня 1872 р. у Тернополі в сім'ї суддійського службовця, дід і прадід були священиками. Навчався в гімназіях Золочева, Тернополя та Львова, де 1890 року склав з відзнакою іспит зрілості. З 1890 р. по 1894 р. Володимир Левицький навчається на філософському факультеті Львівського університету, де слухає лекції з математики та фізики професорів Ю. Пузини, О. Фабіана, Б. Радзішевського. Провідним математиком університету на той час був Юзеф Пузина (1856-1919), — відомий учений у галузі аналітичних функцій. Він походив із давнього українського ополяченого князівського роду; народився у селі Новий Мартинів на Івано-Франківщині, навчався у Львівському університеті, був учнем геніального німецького математика К. Т. Вайєрштрасса. Ю. Пузина вперше читав у Львові спеціальні математичні курси, заснував математичний семінар, до роботи в якому залучав і студентів, пропонуючи їм нову літературу та різні теми для наукової роботи. У своїх мемуарах В. Левицький писав про Ю. Пузину: „Йому завдячую те знання математики, яке маю дотепер: завдяки йому пізнав я усі модерні теорії і методи, завдяки йому набрав я замилування до праці та охоти до самостійних дослідів".

Під керівництвом Ю. Пузини, ще будучи студентом, В. Левицький пише свою першу наукову працю „Про симетричні вираження з вартостей функції mod m", яку опублікував українською мовою в „Записках НТШ", 1894. – Т.4. – С. 125–139. Це була перша в історії фахова стаття з математики, надрукована українською мовою.

11 травня 1893 р. відбулися загальні збори НТШ, де було створено математично-природописну-лікарську секцію, директором якої обрано біолога Івана Верхратського. До складу секції увійшло 54 чоловіки, серед них троє математиків: Петро Огоновський, Володимир Левицький і Клим Глібовицький. Уже на п'ятому засіданні секції молодому випускникові університету В. Левицькому доручили укласти українську фізичну та математичну термінологію.

Після закінчення університету, у вересні 1894 р., В. Левицький отримує місце помічника вчителя математики в академічній українській гімназії у Львові. У травні 1895 р. він складає учительський іспит з фізики і математики та отримує повну учительську кваліфікацію з правом викладання в тодішніх українських і польських гімназіях. У жовтні цього ж року В. Левицький добровільно йде на рік до війська, а по закінченні служби отримує звання лейтенанта польової артилерії. З 1896 до 1903 року В. Левицький — дійсний учитель гімназії в Тернополі (в 1899 р. іменований професором гімназії). Тут він багато часу приділяє науковій праці, публікує ряд наукових статей українською, польською та німецькою мовами. У 1899 р. одружується зі своєю родичкою Софією з Левицьких.

На десятому засіданні математично-природописно-лікарської секції, що відбулося в лютому 1897 р., за пропозицією М. Грушевського (який був головою НТШ з 1897 р. по 1913 р.) було прийнято рішення видавати окремий друкований орган секції „Збірник", редакторами якого стали І. Верхратський та В. Левицький. У „Збірнику" В. Левицький редагує статті з математики, фізики та хімії, продовжуючи працювати над укладанням української термінології з цих наук.

У додатку до своєї праці "Еліптичні функції модулові" (Записки НТШ, т. 7, 1895 р.) В. Левицький помістив українсько-німецький словничок із 69 термінів — першу збірку українських математичних термінів, а вже у VIII томі, вип. 2 „Збірника" (1902 р.) друкує обширні (33 стор.) „Матеріали до математичної термінології" (з елементарної та вищої математики), які стали основою для створення наступних термінологічних словників і полегшили написання нових українських підручників та фахових статей. Пізніше він публікує „Матеріали до фізичної термінології" (у чотирьох частинах) та „Начерк хемічної термінології". Разом із цим плідно працює над створенням українських підручників. Серед них — „Алгебра для вищих кляс шкіл середніх" (ч. I, 1906 р., ч. II, 1908 р.) у співавторстві з П. Огоновським та „Фізика для вищих кляс" (1912 р.). Останній, що налічував 672 с., тривалий час був одним із найкращих підручників з фізики і в 1924 р. його перевидали у двох частинах.

У навчальному році 1899/1900 р. В. Левицький склав з відзнакою докторські іспити з математики, фізики та філософії у Львівському університеті, а 10 жовтня 1901 р. захистив тут докторську дисертацію.

У 1899 р. у Львові була створена національно-демократична партія, одним із завдань якої було відкриття у Львові українського університету. Завдяки стараннням Олександра Барвінського для потреб майбутнього університету кільком українцям було призначено державну стипендію та відпустку для наукових студій у наукових центрах Європи. Серед них був і В. Левицький.

У літнім семестрі 1901 р. він відбув (разом із дружиною) піврічну наукову подорож до Німеччини, де перші 3 місяці слухав курси лекцій професорів Ф. Кляйна з проективної геометрії та Д. Гільберта з інтегрального числення в Ґеттінґені, приймав участь у семінарі Ф. Кляйна; а в наступні 3 місяці відвідував виклади професорів Г. Шварца, І. Фукса, Й. Кнобляуха, Ф. Фробеніуса в Берліні. Другий раз відбув наукову подорож до Берліна у шкільному році 1902/03, де слухав лекції професорів Ф. Шотки, Р. Лемана, Ю. Баушінґера, Г. Шварца та інших. Багато працював у наукових бібліотеках, де була література зі всього світу; відвідував лекції знаменитого історика стародавнього світу Е. Мейєра та філософа Ф. Паульсена.

Усі намагання В. Левицького у тім часі дістати доцентуру на політехніці чи університеті у Львові не увінчались успіхом, оскільки він був українцем. На той час В. Левицький уже був автором близько 30 наукових статей, головним чином з теорії аналітичних функцій. Після закордонного стажування В. Левицький у вересні 1903 р. займає посаду вчителя 5-ї державної гімназії у Львові та включається в активне громадське життя. У 1903-1914 рр. наукова діяльність В. Левицького головним чином була спрямована на популяризацію наукових знань. Він друкує багато своїх статтей у журналах „Учитель", „Наша школа", „Економіст", перекладає ряд наукових праць, головно, з німецької. У 1909 р. В. Левицького обирають дійсним членом іноземних математичних товариств „Circolo matematico di Palermo" (Італія, Палермо) та „Deutsche Matematiker-Vereinung" (Німеччина, Ляйпціг). Упродовж багатьох років він був співробітником амстердамського бібліографічного журналу з математики „Revue semestrielle des publikations masematiques", де реферував усі математичні видання, що виходили українською мовою, чим у значній мірі спричинився до популяризації за кордоном досягнень українських математиків.

У 1914 р. В. Левицького запрошують працювати у міністерстві освіти у Відні. Але з початком першої світової війни він, як офіцер, був покликаний до австрійської армії; зимову кампанію перебував у Карпатах, де 31 грудня 1914 р. попав у російський полон. У полоні перебував до кінця березня 1918 р. у Курській, Нижньогородській та Пензенській губерніях і, нарешті, в Москві. Після повернення з полону залишався ще в австрійській армії до 1 листопада 1918 року.

В 1919–1924 рр. В. Левицький працював інспектором середніх шкіл, а в 1924-1930 рр. — фаховим інструктором математики та фізики в гімназіях, що належали до Львівського шкільного округу. Поряд із цим у 1920-1923 рр. він читає лекції з вищої математики, а також вступ до космографії в Українському таємному університеті у Львові. У червні 1921 р. В. Левицького обирають продеканом філософського відділу цього університету. Університет проіснував з 1920 по 1925 рік. Це був унікальний університет "без вивіски"організований прогресивною українською громадськістю у відповідь на заборону польського уряду приймати українців до державного університету. У 1923 р. польська влада наказала розпочати дисциплінарне слідство проти всіх урядовців-українців, що викладали в таємному університеті. Щоб не позбутися державної посади, В. Левицький в 1923 р. припинив роботу в цьому університеті.

21 серпня 1918 р. за пропозицією Київської Термінологічної комісії у Львові при математично-природописно-лікарської секції НТШ була організована Термінологічна комісія на чолі з Володимиром Левицьким. Однак через окупацію Львова поляками у 1919 р. співпраця цих двох комісій припинилася і поновилася лише в 1926 р. За подвійною редакцією (київської та львівської комісій) вийшла 2-га та 3-тя частина "Математичного словника" , а також 3-тя частина "Зоологічної номенклатури".

28 березня 1921 р. після восьмирічної перерви відбулися збори членів НТШ, на яких В. Левицького обирають до керівництва НТШ; крім того, він входить у видавничу, друкарську та фізіографічну комісії. В 1926–1932 рр. Володимир Левицький був заступником голови НТШ, а в 1932–1934 рр. — головою НТШ. Пост голови він залишив через погіршення стану здоров'я, але далі продовжує очолювати математично-природописно-лікарську секцію та редагувати „Збірник" цієї секції. В. Левицький був редактором „Збірника" від першого (1897 р.) і до останнього 32-го тому (1939 р.). З 1924 р. секція почала видавати журнал „Sitzungberichte" (німецькою мовою), де друкува-

лись повідомлення про діяльність секції, а також короткі математичні та природознавчі статті. Це видання розсилалося в обмін до бібліотек багатьох країн світу.

Рис. 2: Голова НТШ В. Левицький (четвертий зліва) у колі членів НТШ під час відвідин Товариства О. Брюкнером (другий зліва) – відомим польським філологом та істориком культури, Львів, 1933 р.

У квітні 1927 року відбулося ювілейне засідання математично-природописно-лікарської секції НТШ з нагоди діяльності секції та її директора й редактора перших 25 томів "Збірника" Володимира Левицького за 30 років (1897–1927). Виступаючи на цьому засіданні, Микола Чайковський сказав: " Появу 25-го тому нашого "Збірника" треба назвати нашим великим культурним святом. Щоби зрозуміти вагу того свята треба нам кинути оком на 30 років узад, до того часу, коли малий гурток людей, відчуваючи велику вагу стислих наук для кожного народу, мав відвагу приступити до видання свого окремого органу. Оцей непосильний тягар взяли на свої плечі головно два вчені: відомий уже тоді науковий працівник і педагог Іван Верхратський та молодий, бо ледве 25-літній математик, Володимир Левицький. Особливо цьому другому припало важке завдання, приходилось йому працювати в ділянці, якої до того часу ніхто не рушив. На перешкоді його праці стояли: брак традиції для тої праці, брак організації, яка давала би співробітників, а головно — невиробленість нашої наукової мови та повна недостача математичної термінології. До того часу в ділянці математично-природничих наук, крім шкільних підручників та кількох популярно-наукових розвідок, не було в нас нічого, отже треба було класти підвалини до власної наукової літератури, до наукової праці на рідній мові."

Наведемо ще витяг із доповіді Володимира Левицького на цьому ювілейному святі під назвою "Вартість математики": "... Коли я в 1893 році, як молодий студент, приніс мою першу роботу з математики, першу взагалі написану на українській мові, до тодішньої редакції "Записок НТШ", то редакція довго не знала, що робити з нею, а поки, нарешті, через рік роботу було надруковано, то редакція, бажаючи перед чужими закрити факт, шо й у нас в цій царині наук був до тепер застій, викинула вступ, де я зазначив, що це перша робота з математики на українській мові, і виказав надію, що наша мова до математичних студій цілком надається. "

У 1925 р. налагоджується тісний зв'язок НТШ з Всеукраїнською академією наук. Дійсними членами НТШ були обрані київські математики Д. Граве, М. Кравчук, М. Крилов, М. Куренський. Особливо велика дружба поєднувала Володимира Левицького з Михайлом Кравчуком. За рекомендацією академіка М. Крилова 1927 р. В. Левицький був обраний членом французького математичного товариства в Парижі „Societe mathematigue de France", а 1929 р. за поданням М. Кравчука його обирають почесним членом щойно створеного Київського математичного товариства. М. Кравчук неодноразово запрошував В. Левицького на роботу до Києва, але він відмовлявся. І цим уникнув гіркої долі своїх товаришів математика М. Чайковського (дійсного члена НТШ з 1913 р.) та географа академіка С. Рудницького, які в кінці 20-х рр. минулого століття переїхали з Галичини до Східної України і були репресовані. Така ж доля спіткала у 1938 р. і академіка М. Кравчука, який загинув 9 березня 1942 р. на Колимі.

У 20-х — 30-х роках XX-го століття В. Левицький приймає активну участь у створенні різних педагогічних товариств (зокрема, в організованому в 1927 р. Товаристві прихильників освіти у Львові він був головою фізико-математичної секції), у проведенні шістьох з'їздів українських природослідників, інженерів та лікарів; редагує математичні та фізичні матеріали для української загальної енциклопедії, видає популярні брошурки, присвячені історії науки, астрономії, фізиці.

Зі жовтня 1939 р. В. Левицький працює в новоствореному Львівському педагогічному інституті, а в 1940–1953 рр. – у Львівському державному університеті імені Івана Франка, де в 1941 р. йому було присвоєно звання професора. Тут він читав курси диференціальних рівнянь, спецкурси з теорії функцій комплексної змінної, еліптичних та автоморфних функцій.

Відійшов із життя Володимир Левицький 14 липня 1956 р. Його поховали на Личаківському цвинтарі у Львові (поле № 71).

Рис. 3: Гробівець, у якому захоронено В. Левицького

В газетах некролог не з'явився.

Вперше після смерті В. Левицького математична громада Львова почула широко про нього в кінці грудня 1972 року на засіданні Клубу творчих математиків (під керівництвом професора В. Я. Скоробогатька), присвяченому 100-річчю від дня народження В. Левицького, де Богдан Пташник виголосив доповідь на тему: „Життєвий і творчий шлях видатного українського математика Володимира Левицького". 18 грудня 1997 р. на фасаді Тернопільської ЗОШ №16 ім.В.Левицького було відкрито меморіальну таблицю Володимиру Левицькому. В цьому будинку колись розміщувалась гімназія, в якій учився Володимир Левицький. Згодом, 15 січня 1998 р., у Львові було відкрито художньо-меморіальну таблицю видатним українським математикам, просвітникам, членам Наукового товариства ім. Т. Шевченка, професорам Львівського університету Володимирові Йосиповичу Левицькому (31.12.1872 – 14.07.1956), Миронові Онуфрійовичу Зарицькому (21.05.1889 – 19.08.1961) та Миколі Андрійовичу Чайковському (02.01.1887 – 07.10.1970), встановлену на будинку головного корпусу Львівського державного університету імені Івана Франка. В. Левицький був очільником цієї славетної Української математичної трійці, яка прославила у світі українську науку та Наукове товариство ім. Шевченка — першу українську академічну інституцію.

Рис. 4: Українська математична трійця

Перу В. Левицького належать біля 150-ти наукових, науково-методичних і термінологічних праць та наукових перекладів. Основним напрямком наукової діяльності В. Левицького була теорія аналітичних функцій (автоморфні та еліптичні функції). Він дослідив властивості еліптичних модулярних форм, модулярну еліптичну функцію та її обернення, знайшов диференціальне рівняння, розв'язком якого є ця функція; застосував модулярні групи для обчислення деяких видів ланцюгових дробів; встановив зв'язок між функцією Вайєрштрасса — основною функцією з теорії еліптичних функцій — і функціями групи Фукса. Ряд робіт В. Левицького стосується окремих питань аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, проективної та диференціальної геометрій, історії математики й астрономії, теоретичної фізики.

Другий цикл наукового доробку В. Левицького — наукові огляди з актуальних фізико-математичних проблем, які він публікував у "Збірнику" у 1897-1905 рр. Відзначимо найголовніші з них:

1. „Докази існування інтегралів рівнянь ріжничкових" (огляд доведень теорем існування розв'язків задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і систем рівнянь);

2. „Класифікація наук математичних" (подано основні точки зору різних матем. шкіл на класифікацію математичних наук);

3. „Найновіші праці з теорії функцій аналітичних" (огляд праць Бореля і Міттаг-Леффлера, зокрема, робіт Бореля, які стосуються розбіжних рядів та їх застосувань);

4. „Теорія перстеня Сатурна" (огляд теорій Лапласа, Максвела, Пуанкаре, Ковалевської стосовно кілець Сатурна);

5. „Геометрія метова в геометричній оптиці після теорії Ф. Клейна" (викладає оптичні теорії Кляйна, які слухав на його лекціях);

6. „Д. Гільберта основи геометрії";

7. „Нове угрунтування геометрії Bolyai – Лобачевського".

Оглядові праці В. Левицького, для яких характерний надзвичайно чіткий виклад із глибоким осмисленням названих проблем, свідчать про його широку обізнаність із різними галузями математичної науки. Ці роботи давали добрий поштовх для розвитку математичних досліджень в Україні, зокрема, в Галичині. Очевидно, що цю мету і ставив собі їх автор, беручи на себе цю непросту ношу. Багато робіт В. Левицького спрямовано на допомогу середній школі. Це – згадані вище підручники з алгебри і фізики, методичні та науково-популярні статті: „Деякі інтересні числа", „Деякі практичні правила подільності", „Дещо про симетрію, після Е. Маха", „Інший світ, або четвертий розмір простору" („Учитель",1903–1905 рр.), „До реформи науки математики в середніх школах", „Твердження Чеви", „Інтересні таблиці чисел" („Наша школа",1909, 1912 рр.), „Фелікс Кляйн. Наука геометрії". – Львів: Наша школа, 1940 – 34с. [Переклад з нім.].

Серед науково-популярних статей В. Левицького є й такі, де він за допомогою математичних методів обґрунтовує певні суспільні явища: „Льотерея чисельна і її математична мораль", „Як заступити чисельну льотерею?", „Про рільничу артилерію" („Економіст", 1904 р.). Поряд із тим внеском, який зробив В. Левицький у скарбницю науки, велика його культурна і національна заслуга як невтомного організатора математичних сил для популяризації математики серед українців та підготовки молодих кадрів українських математиків у тяжкі часи панування панської Польщі в Галичині. Він був щирим дорадником молоді, учителем західноукраїнської математичної зміни. Будучи закоханим у свою улюблену справу, В. Левицький не задовольнявся своїм особистим інтересом до математики, але старався якомога більше розповсюджувати цю цікавість серед інших. Наведемо ще слова зі згаданої вище його доповіді "Вартість математики"[2] на ювілейному святі математично-прородописно-лікарської секції НТШ: "... Скаже дехто, що математика є суха, але так може сказати тільки той, хто утотожнює математику з її азбукою і формами – так якби хто ідентифікував столярський знаряд зі самим столярством. Хто поборе математичну символіку і вдумається в глибокі царини математичного світа, той відкриє в ній такий ідеальний світ і таку величаву поезію, і стільки естетики і краси, як в ніякій іншій науці. І тому-то усі великі математики з захопленням висказуються про свої ма-

[2]Ця доповідь разом із доповідями М.Зарицького та І.Свєнціцкого була опублікована у книзі: Математика серед наук. Статті В. Левицького, М. Зарицького, І. Свєнціцкого. – Львів : Вид. сп. "Діло", 1927. – 59 с.

тематичні досліди, а багато споміж математиків і астрономів були рівночасно ніжними поетами; тому-то не диво, що Дедекінд вищі комплекси чисел назвав ідеалами. Але й нематематики, що стрінулися з математичними дослідами, з ентузіазмом говорять про цю науку. Великий Кант, великий Ґете є ентузіастами математики, Шіллер у вірші про Архімеда зве її божеською, а поет німецької романтичної школи Новаліс каже: "Das Leben der Götter ist Mathematik. Reine Mathematik ist Religion. Die Mathematiker sind die einzig Glücklichen. Der Mathematiker ist entusiast per se. Ohne Entusiasmus keine Mathematik" (Життя богів є математика. Чиста математика є релігія. Математики є єдино щасливими. Математик є ентузіастом перш за все. Без ентузіазму немає математики — *Б.Й.П.*)".

Упродовж усього життя В. Левицький усі свої знання, всю силу клав на вівтар розвитку української науки, освіти та культури, побудови майбутньої незалежної Української держави. Він завжди стояв на державницьких позиціях, ненавидів усі окупаційні режими, які пригноблювали український народ. Йому все життя прийшлося, говорячи словами Івана Франка,

“ Против рожна перти,
против хвиль плисти,
сміло аж до смерти
хрест важкий нести. ”

Праця виконана у рамках проекту "Дослідження матеріалів про життєвий шлях та наукову діяльність видатних вчених-природодослідників, членів Наукового товариства ім.Шевченка" Державного фонду фундаментальних досліджень України (договір № Ф 65/13-2016 від 28.03 2016 р.).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Автобіографія др. Володимира Левицького. ЦДІА України у Львові. – Ф. 309, оп. 1, спр. 388.

2. Біографія В. Левицького / Біографії письменників, вчених і політичних діячів з прізвищами на букви "Д-О". ЦДІА України у Львові. – Ф. 328, оп. 1, спр. 103. Аркуш 93.

3. *Левицький Володимир.* Автобіографічний нарис за період 1903-1914 рр. ЦДІА України у Львові. – Ф. 771, оп. 1, спр. 1.

4. *Левицький Володимир.* Спогади з життя (датовано листопадом 1933 р.). ЦДІА України у Львові. – Ф. 771, оп. 1, спр. 2.

5. Книга протоколів Виділу (правління) НТШ (1893-1902 рр.). ЦДІА України у Львові. – Ф. 309, оп. 1, спр. 33.

6. Книга протоколів Виділу (правління) НТШ (1902-1912 рр.). ЦДІА України у Львові. – Ф. 309, оп. 1, спр. 34.

7. Книга протоколів Виділу (правління) НТШ (квітень 1912 – червень 1936 рр.). ЦДІА України у Львові. – Ф. 309, оп. 1, спр. 35.

8. *Хобзей П.К.* Основоположник математичної культури нашого народу// Аксіоми для нащадків: Українські імена у світовій науці. Зб. нарисів. – Львів: “Меморіал”, 1992. – С.110–126.

9. *Пташник Богдан.* Піонер української математичної науки // Вісник НТШ. – 1997. – Число 18. – С. 1 – 5.

10. *Сулим Г.* Володимир Йосипович Левицький (до 125-річчя від дня народження) // Машинознавство. – 1997. – № 3. – С. 36–43.

11. *Мудрий Василь.* Змагання за українські університети в Галичині. – Львів - Нью-Йорк: Наукове товариство ім. Шевченка, 1999. – 192 с.

12. *Бобик Омелян, Притула Микола, Пташник Богдан, Хобзей Павло.* Видатний український математик і просвітник Володимир Левицький (до 135-річчя від дня народження) // Математ. вісник НТШ. – 2007. – Т.4. – С.440-450.

13. *Сулим Георгій.* Володимир Левицький в історії становлення і розвитку Наукового товариства ім. Шевченка та української культури в галузі точних наук // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.- мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 7 – 37.

14. *Пташник Богдан.* Володимир Левицький — видатний український математик і просвітник рідної землі // Вісник НТШ. – 2013. – Число 50. – С. 32 – 35.

УДК УДК 517.929

©2016 р. В.Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

ДО ОЗНАЧЕНЬ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ

Розглянуто клас майже періодичних операторів, елементи якого можуть не бути майже періодичними за Бохнером.

Considered class of almost periodic operators, elements of which may not be for Bochner almost periodic.

Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{K}$ – поле $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ дійсних або комплексних чисел відповідно і E – довільний банаховий простір над полем $\mathbb{K}$ з нормою $\|\cdot\|_E$. Позначимо через C^0 банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в E з нормою

$$\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E,$$

а через C^n, де $n \in \mathbb{N}$, – банаховий простір функцій $x \in C^0$, для кожної з яких $\frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n} \in C^0$, з нормою

$$\|x\|_{C^n} = \\ = \max\left\{ \|x\|_{C^0}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0}, \ldots, \left\|\frac{d^n x}{dt^n}\right\|_{C^0} \right\}.$$

У просторах C^0, $C^1, \ldots, C^n$ визначимо оператор зсуву S_h, $h \in \mathbb{R}$, за допомогою співвідношення

$$(S_h x)(t) = x(t+h), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Означення 1. Елемент $y \in C^k$, $k \geq 0$, називається *майже періодичним* (за Бохнером [1]–[3]), якщо замикання множини $\{S_h y : h \in \mathbb{R}\}$ у просторі C^k є компактною підмножиною цього простору, тобто з кожної послідовності $(S_{h_n} y)_{n\geq 1}$ можна виділити збіжну в C^k підпослідовність.

Множини майже періодичних елементів просторів C^0, $C^1, \ldots, C^n$ є підпросторами цих просторів відповідно з нормами $\|\cdot\|_{C^0}$, $\|\cdot\|_{C^1}, \ldots, \|\cdot\|_{C^n}$. Ці підпростори будемо позначати через B^0, $B^1, \ldots, B^n$ відповідно.

Нехай $B_{C^n}[a,r]$ – замкнута куля в C^n з центром у точці $a \in C^n$ і радіусом r, тобто множина $\{x \in C^n : \|x - a\|_{C^n} \leq r\}$.

Означення 2. Оператор $H : C^n \to C^m$, де $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, називається *майже періодичним*, якщо для кожних елемента $a \in C^n$, числа $r \in (0, +\infty)$ і послідовності $(h_k)_{k\geq 1}$ дійсних чисел існує така підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geq 1}$, що

$$\lim_{l_1\to\infty,\, l_2\to\infty} \sup_{x\in B_{C^n}[a,r]} \Big\| S_{h_{l_1}} H S_{-h_{l_1}} x - \\ - S_{h_{l_2}} H S_{-h_{l_2}} x \Big\|_{C^m} = 0.$$

Це означення у випадку лінійного майже періодичного оператора H рівносильне означенню, що використовувалося Е. Мухамадієвим [4,5] при дослідженні оборотності лінійних функціональних операторів у просторі C^0.

Означення 3. Оператор $H : C^n \to C^m$, де $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, називається *автономним*, якщо $S_h H S_{-h} = H$ для всіх $h \in \mathbb{R}$.

Очевидно, що автономний оператор є майже періодичним у сенсі означення 2.

Розглянемо *майже періодичні оператори, що можуть не бути майже періодичними в сенсі означення 2.*

Нехай $\mathcal{K}$ – множина всіх непорожніх компактних підмножин $K \subset E$ і $R(x)$ – множина значень функції $x = x(t)$, тобто множина $\{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Для компактних множин $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$ позначимо через

$\mathfrak{D}_{K_0,K_1,\dots,K_n}$ множину всіх елементів $x \in C^n$, для кожного з яких

$$R(x) \subset K_0,$$

$$R\left(\frac{dx}{dt}\right) \subset K_1, \dots,$$

$$R\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right) \subset K_n.$$

Використаємо множину

$$\mathfrak{S}_n = \bigcup_{K_0,K_1,\dots,K_n \in \mathcal{K}} \mathfrak{D}_{K_0,K_1,\dots,K_n}.$$

Ця множина є підпростором простору C^n.

Справді, якщо $x, y \in \mathfrak{S}_n$ і $\alpha \in \mathbb{K}$, то, очевидно, $x+y, \alpha x \in \mathfrak{S}_n$. Тому $\mathfrak{S}_n$ – векторний простір. Цей простір, очевидно, також є нормованим простором з нормою $\|\cdot\|_{C^n}$.

Покажемо, що простір $\mathfrak{S}_n$ повний, тобто для кожного елемента $x \in \overline{\mathfrak{S}_n}$ множини $\overline{R(x)}$, $\overline{R\left(\frac{dx}{dt}\right)}, \dots, \overline{R\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right)}$ є компактними множинами.

Нехай $z \in \overline{\mathfrak{S}_n}$ і ε – довільне додатне число. Існує елемент $w \in \mathfrak{S}_n$, для якого

$$\|z-w\|_{C^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

і тому

$$\inf\left\{\|a-b\|_E : a \in \overline{R(z)}, b \in \overline{R(w)}\right\} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\inf\left\{\|a-b\|_E : a \in \overline{R\left(\frac{dz}{dt}\right)},\ b \in \overline{R\left(\frac{dw}{dt}\right)}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}, \dots,$$

$$\inf\left\{\|a-b\|_E : a \in \overline{R\left(\frac{d^n z}{dt^n}\right)},\ b \in \overline{R\left(\frac{d^n w}{dt^n}\right)}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нехай M_0, $M_1, \dots,$ M_n – скінчені $\frac{\varepsilon}{2}$-сітки для компактних множин $\overline{R(w)}$, $\overline{R\left(\frac{dw}{dt}\right)}, \dots, \overline{R\left(\frac{d^n w}{dt^n}\right)}$ відповідно. Тоді на підставі попередніх нерівностей множини M_0, $M_1, \dots,$ M_n будуть скінченими ε-сітками для множин $\overline{R(z)}$, $\overline{R\left(\frac{dz}{dt}\right)}, \dots, \overline{R\left(\frac{d^n z}{dt^n}\right)}$ відповідно.

Отже, завдяки довільності вибору числа $\varepsilon > 0$ множини $\overline{R(z)}$, $\overline{R\left(\frac{dz}{dt}\right)}, \dots, \overline{R\left(\frac{d^n z}{dt^n}\right)}$ компактні, і $\mathfrak{S}_n$ – підпростір банахового простору C^n.

Зручними для дослідження майже періодичних розв'язків функціональних, функціонально-диференціальних та диференціальних рівнянь є наступні означення майже періодичних операторів, що використовують властивість майже періодичності операторів лише на підпросторі $\mathfrak{S}_n$ простору C^n або на множинах $\mathfrak{D}_{K_0,K_1,\dots,K_n} \subset \mathfrak{S}_n$, де $K_0, K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}$.

Означення 4. Оператор $H : C^n \to C^m$, де $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, називається *майже періодичним*, якщо для кожних елемента $a \in C^n$, числа $r \in (0, +\infty)$ і послідовності $(h_k)_{k\geq 1}$ дійсних чисел існує така підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geq 1}$, що

$$\lim_{l_1\to\infty,\ l_2\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{S}_n,\ x\in B_{C^n}[a,r]} \Big\|S_{h_{l_1}} H S_{-h_{l_1}} x - - S_{h_{l_2}} H S_{-h_{l_2}} x\Big\|_{C^m} = 0.$$

Означення 5. Оператор $H : C^n \to C^m$, де $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, називається *майже періодичним*, якщо для кожних компактних множин $K_0, K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}$ і послідовності $(h_k)_{k\geq 1}$ дійсних чисел існує підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geq 1}$, для якої

$$\lim_{l_1\to\infty,\ l_2\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{D}_{K_0,K_1,\dots,K_n}} \Big\|S_{h_{k_{l_1}}} H S_{-h_{k_{l_1}}} x - S_{h_{k_{l_2}}} H S_{-h_{k_{l_2}}} x\Big\|_{C^m} = 0.$$

Зазначимо, що майже періодичні оператори в сенсі означення 5 уведено в розгляд автором у [6] у випадку дискретних рівнянь.

Майже періодичні в сенсі означення 4 або 5 оператори можуть не бути майже періодичними в сенсі означення 2.

Приклад 1. Нехай $\dim E = \infty$. Завдяки некомпактності кулі $\{x \in E : \|x\|_E \le 1\}$ (див., наприклад, [7]) існує елемент $\omega = \omega(t)$ простору C^n, послідовність $(h_m)_{m\ge1}$ дійсних чисел і число $\mu > 0$, для яких

$$\inf_{m_1,m_2\in\mathbb{N},\, m_1\ne m_2} \|\omega(h_{m_1}) - \omega(h_{m_2})\|_E \ge \mu.$$

Зафіксуємо довільний вектор $a \in E$ і розглянемо елемент $b = b(t)$ простору C^0, для якого $b(t) = a$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Визначимо оператор $H : C^n \to C^0$ рівністю

$$Hx = \begin{cases} b, & \text{якщо } x \in \mathfrak{S}_n, \\ \omega, & \text{якщо } x \in C^n \setminus \mathfrak{S}_n. \end{cases}$$

Очевидно, що цей оператор не є неперервним на C^n.

Також очевидно, що

$$\{S_h H S_{-h} x : h \in \mathbb{R}, x \in \mathfrak{D}_{K_0,K_1,\ldots,K_n}\} =$$

$$= \{S_h H S_{-h} x : h \in \mathbb{R}, x \in \mathfrak{S}_n\} = \{b\}$$

для всіх $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$. Тому *оператор H є майже періодичним як у сенсі означення 4, так і в сенсі означення 5*. Однак, цей оператор не є майже періодичним у сенсі означення 2. Справді, зафіксуємо довільний елемент $z \in C^0 \setminus \mathfrak{S}_n$. Очевидно, що

$$S_h H S_{-h} z = S_h \omega \qquad (1)$$

для кожного $h \in \mathbb{R}$. Тому

$$\left\|S_{h_{m_1}}\omega - S_{h_{m_2}}\omega\right\|_{C^0} =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\omega(t + h_{m_1}) - \omega(t + h_{m_2})\|_E \ge$$

$$\ge \|\omega(h_{m_1}) - \omega(h_{m_2})\|_E \ge \mu,$$

якщо $m_1 \ne m_2$.

Отже, якщо $\{S_h z : h \in \mathbb{R}\} \subset B_{C^n}[b, r]$, де $r > \|z - \omega\|_{C^n}$, то

$$\sup_{x\in B_{C^n}[b,r]} \left\|S_{h_{m_1}} H S_{-h_{m_1}} x -\right.$$

$$\left. - S_{h_{m_2}} H S_{-h_{m_2}} x\right\|_{C^0} \ge \mu > 0,$$

для всіх $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ $(m_1 \ne m_2)$. Звідси, із співвідношення (1) і означення 2 випливає, що *оператор H не є майже періодичним у сенсі означення 2.*

Приклад 2. Будемо вважати, що $E = l_1$, де l_1 – банаховий простір обмежених числових послідовностей $z = \langle z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots\rangle$, для кожної з яких $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |z_m| < \infty$, з нормою

$$\|z\|_{l_1} = \sum_{m=1}^{\infty} |z_m|.$$

Розглянемо неперервну та обмежену на $\mathbb{R}$ функцію $A(t)$ зі значеннями в $L(l_1, l_1)$, що визначається співвідношенням

$$A(t)z = \left\langle e^{it} z_1, e^{it/2} z_2, \ldots, e^{it/m} z_m, \ldots \right\rangle. \qquad (2)$$

Тут $t \in \mathbb{R}$ і $z \in l_1$.

Легко перевірити, що функція $A(t)$ має наступні властивості:

1) $\|A(t)\|_{L(l_1,l_1)} = 1$ для всіх $t \in \mathbb{R}$;

2) для кожного $z \in l_1$ функція $A(t)z$ є елементом простору B^0;

3) для кожних компактної множини $K \subset l_1$ і послідовності $(h_m)_{m\ge1}$ дійсних чисел існує підпослідовність $(h_{m_l})_{l\ge1}$, для яких

$$\lim_{k,l\to\infty} \sup_{z\in K} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t + h_{m_k}) z -$$

$$- A(t + h_{m_l}) z\|_{l_1} = 0.$$

4) функція $A(t)$ зі значеннями в $L(l_1, l_1)$ не є майже періодичною в сенсі означення 1.

Розглянемо лінійний неперервний оператор $\mathcal{A} : C^0 \to C^0$, що визначається співвідношенням

$$(\mathcal{A}x)(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

Цей *оператор не є майже періодичним у сенсі означення 2 і є майже періодичним у сенсі означення 5.*

Справді, для довільних $h \in \mathbb{R}$ і $x \in C^0$

$$(S_h \mathcal{A} S_{-h} x)(t) = A(t + h)x(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Звідси на підставі третьої властивості функції $A(t)$ отримуємо, що для кожних послідовноті $(h_m)_{m\ge1}$ дійсних чисел і компактної множини $K \subset l_1$ існує підпослідовність $(h_{m_l})_{l\geq 1} \subset (h_m)_{m\geq 1}$, для яких

$$\lim_{k,l\to\infty} \sup_{z\in C^0,\ R(z)\subset K} \sup_{t\in\mathbb{R}} \| A\left(t+h_{m_k}\right) z(t) -$$
$$- A\left(t+h_{m_l}\right) z(t) \|_{l_1} = 0.$$

Це означає, що оператор $\mathcal{A} : C^0 \to C^0$ *є майже періодичним у сенсі означення 5.*

Однак оператор $\mathcal{A}$ не є майже періодичним у сенсі означення 2. Справді, для функції $\omega \in C^0$, для якої

$$\|\omega\|_{C^0} = 1, \tag{3}$$

і

$$\omega(l) = e_l, \quad l \geq 1, \tag{4}$$

і кожної пари (k,l) натуральних чисел, для яких $k > l$, виконуються співвідношення

$$\|S_k\mathcal{A}S_{-k} - S_l\mathcal{A}S_{-l}\|_{L(C^0,C^0)} \geq$$
$$\geq \|S_k\mathcal{A}S_{-k}\omega - S_l\mathcal{A}S_{-l}\omega\|_{l_1} =$$
$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \|A(t+k)\omega(t) - A(t+l)\omega(t)\|_{l_1} \geq$$
$$\geq \|A(k-l+k)\omega(k-l) - A(k-l+l)\omega(k-l)\|_{l_1} =$$
$$= \|A(2k-l)e_{k-l} - A(k)e_{k-l}\|_{l_1} =$$
$$= \left|e^{i(2k-l)/(k-l)} - e^{ik/(k-l)}\right| = \left|e^{i} - 1\right| =$$
$$= 2\sin\frac{1}{2} > 0.$$

Звідси випливає, що *оператор $\mathcal{A}$ не є майже періодичним у сенсі означення 2.*

Із використанням означення 5 можна з'ясовувати умови існування майже періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, функціонально-диференціальних рівнянь загаювального, нейтрального і випереджального типів (див. класифікацію рівнянь, наприклад, у [8]), а також рівнянь загального типу з відхильним аргументом, що залежить як від часу, так і від розв'язку. Усі ці рівняння є окремими випадками загального функціонального рівняння

$$\mathcal{F}x = y, \tag{5}$$

де $\mathcal{F} : C^n \to C^0$ – майже періодичний у сенсі означення 5 оператор і $y \in B^0$.

Використаємо один функціонал, визначений на множині розв'язків цього рівняння, що є елементами простору $\mathfrak{S}_n$.

Зафіксуємо множини $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$. Позначимо через $N(\mathcal{F}, K_0, K_1, \ldots, K_n)$ множину всіх розв'язків рівняння (5), для кожного з яких

$$R(x) \subset K_0,$$
$$R\left(\frac{dx}{dt}\right) \subset K_1, \ldots,$$
$$R\left(\frac{d^n x}{dt^n}\right) \subset K_n.$$

Припустимо, що

$$N(\mathcal{F}, K_0, K_1, \ldots, K_n) \neq \varnothing.$$

Нехай $x^* \in N(\mathcal{F}, K_0, K_1, \ldots, K_n)$ і діаметр $\operatorname{diam} R(x^*)$ множини $R(x^*)$, тобто число $\sup\{\|x_1 - x_2\|_E : x_1, x_2 \in R(x^*)\}$, не дорівнює 0. Розглянемо додатне число

$$r(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n) =$$
$$= \max_{l\in\{0,1,\ldots,n\}} \sup\left\{\|x_l - y_l\|_E : x_l \in R\left(\frac{d^l x^*}{dt^l}\right),\right.$$
$$\left. y_l \in K_l\right\},$$

де $\dfrac{d^0 x^*}{dt^0} = x^*$. Зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in (0, r(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n)]$.

Позначимо через $\Omega(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon)$ множину всіх елементів $z \in C^n$, для кожного з яких

$$R(z) \subset K_0,$$
$$R\left(\frac{dz}{dt}\right) \subset K_1, \ldots,$$
$$R\left(\frac{d^n z}{dt^n}\right) \subset K_n$$

і

$$\|z - x^*\|_{C^n} \geq \varepsilon.$$

Розглянемо функціонал

$$\delta(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon) =$$
$$= \inf_{z\in\Omega(x^*,K_0,K_1,\ldots,K_n,\varepsilon)} \|\mathcal{F}z - \mathcal{F}x^*\|_{C^0}.$$

Справджується наступне твердження.

Теорема. *Якщо оператор* $\mathcal{F} : C^n \to C^0$ *є майже періодичним у сенсі означення 5,* $y \in B^0$, $K_0, K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$, $x^* \in N(\mathcal{F}, K_0, K_1, \ldots, K_n)$, $\operatorname{diam} R(x^*) \neq 0$ *і*

$$\delta(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n, \varepsilon) > 0$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(x^*, K_0, K_1, \ldots, K_n))$, *то* $x^* \in B^n$.

Доводиться теорема аналогічним чином, як і відповідні твердження статей [9]–[22].

Зазначимо, що наведені умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (5) на відміну від теореми Амеріо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь [3,23] не використовують $\mathcal{H}$-клас рівняння (5) та умову відокремленості розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу цього рівняння.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen // Math. Ann. – 1927. – **96**. – I Teil. – P. 119–147. II Teil. – P. 383–409.

2. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.

3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

4. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Матем. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269–274.

5. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений диффереципальных уравнений // Матем. заметки. – 1981. – **30**, № 3. – С. 443–460.

6. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки нелінійних дискретних систем, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером // Нелінійні коливання. – 2014. – **17**, № 3. – С. 407–418.

7. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – Київ: Вища школа, 1974. – 456 с.

8. *Эльгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.

9. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання – 2013. – **16**, № 1. – С. 118–124.

10. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 307–312.

11. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелінійні коливання – 2013. – **16**, № 3. – С. 416–425.

12. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків не розв'язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 384–393.

13. *Slyusarchuk V. Yu.* Almost periodic solutions of difference equations with discrete argument on metric space // Miskolc Mathematical Notes. – 2014. – **15**, № 1. – P. 211–215.

14. *Слюсарчук В. Е.* Исследование нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений, не использующее $\mathcal{H}$-классы этих уравнений // Мат. сб. – 2014. – **205**, № 6. – С. 139–160.

15. *Слюсарчук В. Е.* Условия почти периодичности ограниченных решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. – 2014. – **78**, № 6. – С. 179–192.

16. *Слюсарчук В. Е.* Условия существования почти периодичности решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве // Мат. заметки. – 2015. – **97**, № 2. – С. 277–285.

17. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні та періодичні розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 1. – С. 112–119.

18. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки нелінійних рівнянь, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 2. – С. 230–244.

19. *Слюсарчук В. Ю.* Критерій існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 6. – С. 838–848.

20. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні та стійкі за Пуассоном розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 12. – С. 1707–1714.

21. *Слюсарчук В. Ю.* Майже періодичні розв'язки функціональних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2016. – **19**, № 1. – С. 142–148.

22. *Слюсарчук В. Е.* Почти периодические решения дискретных уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. – 2016. – **80**, № 2. – С. 125–138.

23. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**. – P. 97–119.

УДК 517.911

©2016 year A. O. Tsukanova

National Technical University of Ukraine “Kiev Polytechnic Institute”

ON EXISTENCE AND UNIQUENESS OF MILD SOLUTION TO THE CAUCHY PROBLEM FOR ONE NEUTRAL STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION OF REACTION-DIFFUSION TYPE IN HILBERT SPACE

Доведено теорему існування та єдиності м'якого роз'вязку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння нейтрального типу в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}^d)$.

The theorem on existence and uniqueness of mild solution to the Cauchy problem for one neutral stochastic differential equation in Hilbert space $L_2(\mathbb{R}^d)$ has been proved.

1. Introduction. Questions on existence and uniqueness of solution to stochastic differential equations (SDEs from now on) under some given initial-boundary conditions in various functional spaces, in particularly, in Hilbert spaces, have been extensively studied by a variety of authors. There exists especial interest around ***neutral SDEs***. An essential feature of such equations is the phenomena of delay within so-called “derivative”. In [1] its authors have considered an initial-value problem for an abstract SDE of such type in Hilbert space and have proved the theorem on existence and uniqueness of its ***mild solution***. But conditions of this theorem are formulated in a general form. Therefore it is rather complicated to check them directly while solving specific applied problems. Hence it is important to find conditions, convenient to check, that are expressed in terms of coefficients of the equation under investigation. If such conditions are found, it will be possible to check them immediately while solving concrete problems. But it is only possible to do in some particular cases, one of which will be studied in the paper. It consists of five sections and is organized as follows. The second section concerns with formulation of the problem. After it, in the third section, some already known results from the theory of partial differential equations and one fact from the heat semi-group theory are gathered. The fourth section contains formulation of the main result. The last, fifth, section is devoted to it's proof.

2. Formulation of the problem. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ be a complete probability space. The following initial-value problem for nonlinear neutral stochastic integro-differential equation of reaction-diffusion type is considered

$$d\left(u(t,x) + \int_{\mathbb{R}^d} b(t,x,\xi)u(t-h,\xi)d\xi\right) =$$
$$= \big(\Delta_x u(t,x) + f(t,u(t-h),x)\big)dt +$$
$$+ \sigma(t,u(t-h),x)dW(t,x),\ 0 < t \le T,\ x \in \mathbb{R}^d,$$
$$u(t,x) = \phi(t,x),\ -h \le t \le 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \qquad (1)$$

where $T > 0$ is a fixed real number, $h > 0$ — an arbitrary real number, $\Delta_x \equiv \sum_{i=1}^{d} \partial^2_{x_i}$ — d-measurable operator of Laplace, $\partial^2_{x_i} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $i \in \{1, \ldots, d\}$, $W(t,x)$ — $L_2(\mathbb{R}^d)$-valued Q-Wiener process, $\{f, \sigma\} : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ and $b\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ are some given functions to be specified later, $\phi\colon [-h,0] \times \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}$ is an initial-datum function. The theorem on existence and uniqueness of ***mild solution*** to the problem (1) will be proved.

3. Preliminaries. In what follows, in order to prove the main result, lemmas 1 — 4 from [4] will be needed and the following fact from the theory of heat semi-group.

Lemma [2; 3, c. 188]**.** *Operators* $S(t)\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ *generate the solution of homogeneous Cauchy problem for heat-equation* (see lemma 1 from [4] for details) *by the rule*

$$u(t,x) = (S(t)g(\,\cdot\,))(x) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(t, x-\xi) g(\,\cdot\,) d\xi,$$

and form (C_0-)*semi-group of operators, an infinitesimal generator of which is Laplacian* Δ_x*. Moreover, this semi-group is contractive, i.e.*

$$\|(S(t)g(\,\cdot\,))(x)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \|g(x)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \\ g(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{R}^d). \tag{2}$$

A couple of notations, given below, will be used hereinafter. Let filtration of σ-algebras $\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ is generated by $L_2(\mathbb{R}^d)$-valued Q-Wiener process $W(t,x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e_n(x) \times \beta_n(t)$, where $\{\beta_n(t), n \in \{1,2,\dots\}\}$ are independent standard one-dimensional real-valued Brownian motions, sequence $\{\lambda_n, n \in \{1,2,\dots\}\}$ of positive real numbers is such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty, \tag{3}$$

and system of vectors $\{e_n(x), n \in \{1,2,\dots\}\}$ forms an orthonormal basis in $L_2(\mathbb{R}^d)$ such that

$$\sup_{n \in \{1,2,\dots\}} \; ess\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |e_n(x)| \le 1. \tag{4}$$

Let $\mathfrak{B}_{2,T}$ denotes Banach space of all $L_2(\mathbb{R}^d)$-valued $\mathcal{F}_t$-measurable for almost all $0 \le t \le T$ random processes $\Phi\colon [0,T] \times \Omega \to L_2(\mathbb{R}^d)$, that are continious in t for almost all $\omega \in \Omega$, with the norm $\|\Phi\|_{\mathfrak{B}_{2,T}} = \sqrt{\sup\limits_{0 \le t \le T} \mathbf{E}\|\Phi(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}}$. The further result guarantees existence and uniqueness for $0 \le t \le T$ of ***mild solution*** to (1) in $\mathfrak{B}_{2,T}$.

4. Main result. The following assumptions are the main, presumed to be true in the paper:

4.1) functions $\{f, \sigma\}\colon [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $b\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ are measurable with respect to their arguments;

4.2) an initial-datum function $\phi\colon [-h, 0] \times \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}$ is $\mathcal{F}_0$-measurable, independent from $W(t,x)$, $t \ge 0$, and such that

$$\sup_{-h \le t \le 0} \mathbf{E}\|\phi(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} < \infty. \tag{5}$$

Definition. *Continuous random process*

$$u\colon [-h, T] \times \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}$$

is called ***mild solution*** *of problem* (1)*, if it*

1) *is* $\mathcal{F}_t$*-measurable for almost all* $-h \le t \le T$*;*

2) *satisfies the following integral equation*

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(t, x-\xi) \Bigg(\phi(0) + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^d} b(0, \xi, \zeta) \phi(-h, \zeta) d\zeta\Bigg) d\xi - \\ - \int\limits_{\mathbb{R}^d} b(t, x, \xi) u(t-h, \xi) d\xi - \\ - \int\limits_0^t \Bigg(\Delta_x \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(t-s, x-\xi) \times \\ \times \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(s, \xi, \zeta) u(s-h, \zeta) d\zeta\Bigg) d\xi\Bigg) ds + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(t-s, x-\xi) f(s, u(s-h), \xi) d\xi ds + \\ + \int\limits_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(t-s, x-\xi) \times \\ \times \sigma(s, u(s-h), \xi) e_n(\xi) d\xi\Bigg) d\beta_n(s),$$

$0 \le t \le T$, $x \in \mathbb{R}^d$,

$u(t,x) = \phi(t,x)$, $-h \le t \le 0$, $x \in \mathbb{R}^d$*;*

3) *satisfies the following condition*

$$\mathbf{E} \int\limits_0^T \|u(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} dt < \infty.$$

The following theorem is valid.

Theorem (existence and uniqueness of mild solution in $\mathfrak{B}_{2,T}$). *Let's suppose*

assumptions **4.1**, **4.2** *to hold true, and besides the following conditions to be valid:*
1) *functions $\{f, \sigma\}$ satisfy linear-growth and Lipschitz conditions by their second argument, i.e. there exists $L > 0$ such that*

$$|f(t,u,x)| \le \chi(t,x) + L|u|, \quad 0 \le t \le T,\ u \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{6}$$
$$|f(t,u,x) - f(t,v,x)| \le L|u-v|, \quad 0 \le t \le T,\ \{u,v\} \subset \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d,$$
$$|\sigma(t,u,x)| \le L\big(1 + |u|\big), \quad 0 \le t \le T,\ u \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{7}$$
$$|\sigma(t,u,x) - \sigma(t,v,x)| \le L|u-v|, \quad 0 \le t \le T,\ \{u,v\} \subset \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d,$$

where function $\chi\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ is such that

$$\sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^d} \chi^2(t,x)dx < \infty; \tag{8}$$

2) *function b satisfies the conditions*

$$\sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} b^2(t,x,\zeta)d\zeta}\, dx < \infty, \tag{9}$$

$$\sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} b^2(t,x,\zeta)d\zeta dx < \infty; \tag{10}$$

3) *for each point $x \in \mathbb{R}^d$ there exist partial derivatives $\partial_{x_i} b$, $\partial_{x_i x_j} b$, $\{i,j\} \subset \{1,\dots,d\}$, and gradient-vector $\nabla_x b$ and Hesse-matrix $D_x^2 b$ satisfy the condition*

$$|\nabla_x b(t,x,\xi)| + \|D_x^2 b(t,x,\xi)\| \le \psi(t,x,\xi), \quad 0 \le t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^d, \tag{11}$$

where function $\psi\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ is such that the following condition

$$\sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \psi^2(t,x,\zeta)d\zeta dx < \infty, \tag{12}$$

comes true, and besides for each point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ there exists its vicinity $B_\delta(x_0)$ and nonnegative function $\varphi(t,x,x_0,\delta)$ such that

$$\sup_{0\le t\le T} \varphi(t,\cdot,x_0,\delta) \in L_2(\mathbb{R}^d),\ \delta \in \mathbb{R}^+, \tag{13}$$

$$|\psi(t,x,\zeta) - \psi(t,x_0,\zeta)| \le \varphi(t,\zeta,x_0,\delta)|x-x_0|, \quad 0 \le t \le T,\ |x-x_0| < \delta,\ \zeta \in \mathbb{R}^d. \tag{14}$$

Then the problem (1) *will have unique for $0 \le t \le T$ mild solution $u \in \mathfrak{B}_{2,T}$, if*

$$\sup_{0\le t\le T} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} b^2(t,x,\xi)d\xi dx < \frac{1}{4}. \tag{15}$$

5. Proof of the theorem. The proof is based on the classical theorem from functional analysis — Banach theorem on a fixed point. According to it, let's consider an operator $\Psi\colon \mathfrak{B}_{2,T} \to \mathfrak{B}_{2,T}$ with an action

$$\big(\Psi u\big)(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(t, x-\xi)\Bigg(\phi(0) + \int_{\mathbb{R}^d} b(0,\xi,\zeta)\phi(-h,\zeta)d\zeta\Bigg)d\xi - \int_{\mathbb{R}^d} b(t,x,\xi)u(t-h,\xi)d\xi -$$
$$- \int_0^t \Bigg(\Delta_x \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(t-s, x-\xi) \times \Bigg(\int_{\mathbb{R}^d} b(s,\xi,\zeta)u(s-h,\zeta)d\zeta\Bigg)d\xi\Bigg)ds + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(t-s,x-\xi)f(s,u(s-h),\xi)d\xi ds +$$
$$+ \int_0^t \sum_{n=1}^\infty \sqrt{\lambda_n}\Bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(t-s,x-\xi) \times \sigma(s,u(s-h),\xi)e_n(\xi)d\xi\Bigg)d\beta_n(s) = \sum_{j=0}^4 I_j(t),$$

$0 \le t \le T$, $x \in \mathbb{R}^d$,
$u(t,x) = \phi(t,x)$, $-h \le t \le 0$, $x \in \mathbb{R}^d$,

and prove that this operator is contractive. In order to do it, firstly let's show that $\Psi u \in \mathfrak{B}_{2,T}$ for each $u \in \mathfrak{B}_{2,T}$. For this purpose five norms $\|I_j(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} = \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E}\|I_j(s)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, $j \in \{0,\dots,4\}$, must be estimated.

Taking into account property (2), Cauchy-Schwartz inequality and assumptions (5), (10), one obtains for $\|I_0(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}$

$$\|I_0(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} = \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\|I_0(s)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s,x-\xi)\Bigg(\phi(0)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(0,\xi,\zeta)\phi(-h,\zeta)d\zeta\Bigg)d\xi\Bigg\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le$$

$$\le 2\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s,x-\xi)\phi(0)d\xi\Bigg\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} +$$

$$+2\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s,x-\xi)\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(0,\xi,\zeta)\phi(-h,\zeta)d\zeta\Bigg)d\xi\Bigg\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le$$

$$\le 2\mathbf{E}\,\|\phi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 2\mathbf{E}\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(0,x,\zeta)\times$$

$$\times\phi(-h,\zeta)d\zeta\Bigg\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 2\mathbf{E}\,\|\phi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} +$$

$$+2\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(0,x,\zeta)\phi(-h,\zeta)d\zeta\Bigg)^2 dx \le$$

$$\le 2\mathbf{E}\,\|\phi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 2\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} b^2(0,x,\zeta)d\zeta dx\Bigg)\times$$

$$\times\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\phi^2(-h,\zeta)d\zeta = 2\mathbf{E}\,\|\phi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} +$$

$$+2\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} b^2(0,x,\zeta)d\zeta dx\Bigg)\mathbf{E}\,\|\phi(-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} <$$

$$< \infty.$$

By using Cauchy-Schwartz inequality and assumptions (5), (10), one obtains for $\|I_1(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}$

$$\|I_1(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} = \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\|I_1(s)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(s,x,\xi)u(s-h)d\xi\Bigg\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(s,x,\xi)u(s-h,\xi)d\xi\Bigg)^2 dx \le$$

$$\le \sup_{0\le s\le t}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} b^2(s,x,\xi)d\xi dx\Bigg)\times$$

$$\times\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d} u^2(s-h,\xi)d\xi =$$

$$= \sup_{0\le s\le t}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} b^2(s,x,\xi)d\xi dx\Bigg)\times$$

$$\times\mathbf{E}\|u(s-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le$$

$$\le\Bigg(\sup_{0\le s\le t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} b^2(s,x,\xi)d\xi dx\Bigg)\times$$

$$\times\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\|u(s-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le$$

$$\le\Bigg(\sup_{0\le s\le t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} b^2(s,x,\xi)d\xi dx\Bigg)\times$$

$$\times\Bigg(\sup_{0\le s\le h}\mathbf{E}\|u(s-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+$$

$$+\sup_{h\le s\le t}\mathbf{E}\|u(s-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Bigg) =$$

$$=\Bigg(\sup_{0\le s\le t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} b^2(s,x,\xi)d\xi dx\Bigg)\times$$

$$\times\Bigg(\sup_{-h\le s-h\le 0}\mathbf{E}\|u(s-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+$$

$$+\sup_{0\le s-h\le t-h}\mathbf{E}\|u(s-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Bigg) =$$

$$=\Bigg(\sup_{0\le s\le t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} b^2(s,x,\xi)d\xi dx\Bigg)\times$$

$$\times\Bigg(\sup_{-h\le s\le 0}\mathbf{E}\|u(s)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+$$

$$+\sup_{0\le s\le t-h}\mathbf{E}\|u(s)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Bigg) =$$

$$=\Bigg(\sup_{0\le s\le t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} b^2(s,x,\xi)d\xi dx\Bigg)\times$$

$$\times\Bigg(\sup_{-h\le s\le 0}\mathbf{E}\|\phi(s)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+$$

$$+\sup_{0\le s\le t-h}\mathbf{E}\|u(s)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Bigg) \le$$

$$\leq \left(\sup_{0\leq s\leq t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} b^2(s,x,\xi)d\xi dx\right)\times$$
$$\times\left(\sup_{-h\leq s\leq 0}\mathbf{E}\|\phi(s)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\right.$$
$$\left.+\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\|u(s)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)<\infty.$$

While estimating $\|I_2(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}$, by using Cauchy-Schwartz inequality and Fubini theorem, one concludes

$$\|I_2(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}=\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\|I_2(s)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=$$
$$=\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\Bigg\|\int\limits_0^s\Bigg(\Delta_x\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s-\tau,x-\xi)\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,\xi,\zeta)u(\tau-h,\zeta)d\zeta\right)d\xi\Bigg)d\tau\Bigg\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=$$
$$=\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Bigg(\int\limits_0^s\Bigg(\Delta_x\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s-\tau,x-\xi)\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,\xi,\zeta)u(\tau-h,\zeta)d\zeta\right)d\xi\Bigg)d\tau\Bigg)^2dx\leq$$
$$\leq\sup_{0\leq s\leq t}s\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_0^s\Bigg(\Delta_x\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s-\tau,x-\xi)\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,\xi,\zeta)u(\tau-h,\zeta)d\zeta\right)d\xi\Bigg)^2d\tau dx\leq$$
$$\leq t\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_0^s\Bigg(\Delta_x\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s-\tau,x-\xi)\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,\xi,\zeta)u(\tau-h,\zeta)d\zeta\right)d\xi\Bigg)^2d\tau dx=$$
$$=t\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Bigg(\Delta_x\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s-\tau,x-\xi)\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,\xi,\zeta)u(\tau-h,\zeta)d\zeta\right)d\xi\Bigg)^2dxd\tau\leq$$
$$\leq Ct\sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Bigg\|D_x^2\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,x,\zeta)\times$$
$$\times u(\tau-h,\zeta)d\zeta\Bigg\|^2dxd\tau=Ct\times$$
$$\times\mathbf{E}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Bigg\|D_x^2\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,x,\zeta)\times$$
$$\times u(\tau-h,\zeta)d\zeta\Bigg\|^2dxd\tau, \tag{16}$$

if conditions of lemma 4 from [4] are valid, where

$$u(\tau,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s-\tau,x-\xi)\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,\xi,\zeta)\times$$
$$\times u(\tau-h,\zeta)d\zeta\Bigg)d\xi,$$
$$g(\tau,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,x,\zeta)u(\tau-h,\zeta)d\zeta. \tag{17}$$

Here $\nabla_x\equiv(\partial_{x_1}\dots\partial_{x_d})^{\mathrm{T}}$, $D_x^2\equiv$
$\equiv\begin{pmatrix}\partial^2_{x_1} & \dots & \partial_{x_1x_d}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_{x_dx_1} & \dots & \partial^2_{x_d}\end{pmatrix}$, $\|\cdot\|$ is the corresponding matrix norm. Thus the aim is to verify that conditions of lemma 4 from [4] are executed for our function g, defined by (17). In order to do it, it is necessary to prove that

1) with probability one for each $0\leq\tau\leq t$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,\cdot,\zeta)u(\tau-h,\zeta)d\zeta\in L_1(\mathbb{R}^d); \tag{18}$$

2) $|\nabla_x g|\in L_2(\mathbb{R}^d)$, $\|D_x^2g\|\in L_2(\mathbb{R}^d)$. (19)

1. While proving (18), one obtains via using Cauchy-Schwartz inequality and conditions (9), (5)

$$\mathbf{E}\int_{\mathbb{R}^d}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,x,\zeta)u(\tau-h,\zeta)d\zeta\Bigg|dx\leq$$
$$\leq\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d}b^2(\tau,x,\zeta)d\zeta dx}\right)\times$$

$$\times\sqrt{\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}u^2(\tau-h,\zeta)d\zeta}\le$$

$$\le\left(\sup_{0\le\tau\le t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d}b^2(\tau,x,\zeta)d\zeta dx}\right)\times$$

$$\times\sqrt{\sup_{0\le\tau\le t}\mathbf{E}\|u(\tau-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}}\le$$

$$\le\left(\sup_{0\le\tau\le t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d}b^2(\tau,x,\zeta)d\zeta dx}\right)\times$$

$$\times\left(\sup_{-h\le\tau\le 0}\mathbf{E}\|\phi(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\right.$$

$$\left.+\sup_{0\le\tau\le t}\mathbf{E}\|u(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

therefore with probability one

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,x,\zeta)u(\tau-h,\zeta)d\zeta\right|dx<\infty.$$

2. Condition (19) will be proved for $|\nabla_x g|$, since for $\|D_x^2 g\|$ it is similar.

Firstly it is necessary to show differentiability of (17) at the point $x=x_0$ — an arbitrary point from $\mathbb{R}^d$.

Let $B_\delta(x_0)$ be the vicinity from p. 3 of the theorem. One obtains through the use of conditions (11) and (14)

$$|\nabla_x b(\tau,x,\zeta)u(\tau-h,\zeta)|\le\psi(\tau,x,\zeta)\times$$
$$\times|u(\tau-h,\zeta)|=\big(\psi(\tau,x,\zeta)-\psi(\tau,x_0,\zeta)+$$
$$+\psi(\tau,x_0,\zeta)\big)|u(\tau-h,\zeta)|\le\big(|\psi(\tau,x,\zeta)-$$
$$-\psi(\tau,x_0,\zeta)|+\psi(\tau,x_0,\zeta)\big)|u(\tau-h,\zeta)|\le$$
$$\le\big(\varphi(\tau,\zeta,x_0,\delta)|x-x_0|+\psi(\tau,x_0,\zeta)\big)\times$$
$$\times|u(\tau-h,\zeta)|\le\big(\delta\varphi(\tau,\zeta,x_0,\delta)+$$
$$+\psi(\tau,x_0,\zeta)\big)|u(\tau-h,\zeta)|.$$

Let's verify that

$$\big(\delta\varphi(\tau,\cdot,x_0,\delta)+\psi(\tau,x_0,\cdot)\big)\times$$
$$\times|u(\tau-h,\cdot)|\in L_1(\mathbb{R}^d). \qquad (20)$$

Using Cauchy-Schwartz inequality and assumptions (13), (12), (5) yields

$$\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\big(\delta\varphi(\tau,\zeta,x_0,\delta)+\psi(\tau,x_0,\zeta)\big)\times$$

$$\times|u(\tau-h,\zeta)|d\zeta=\delta\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi(\tau,\zeta,x_0,\delta)\times$$

$$\times|u(\tau-h,\zeta)|d\zeta+\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi(\tau,x_0,\zeta)\times$$

$$\times|u(\tau-h,\zeta)|d\zeta\le$$

$$\le\left(\delta\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi^2(\tau,\zeta,x_0,\delta)d\zeta}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi^2(\tau,x_0,\zeta)d\zeta}\right)\times$$

$$\times\sqrt{\sup_{0\le\tau\le t}\mathbf{E}\|u(\tau-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}}\le$$

$$\le\left(\delta\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi^2(\tau,\zeta,x_0,\delta)d\zeta}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi^2(\tau,x_0,\zeta)d\zeta}\right)\times$$

$$\times\left(\sup_{-h\le\tau\le 0}\mathbf{E}\|\phi(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\right.$$

$$\left.+\sup_{0\le\tau\le t}\mathbf{E}\|u(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

hence with probability one

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\big(\delta\varphi(\tau,\zeta,x_0,\delta)+\psi(\tau,x_0,\zeta)\big)|u(\tau-h,\zeta)|d\zeta<\infty.$$

Thus, according to local theorem on differentiability of an integral by parameter, for function (17) there exists its gradient $\nabla_x g$ and

$$\nabla_x\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(\tau,x,\zeta)u(\tau-h,\zeta)d\zeta=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\nabla_x b(\tau,x,\zeta)u(\tau-h,\zeta)d\zeta. \qquad (21)$$

It remains to prove that

$$\nabla_x \int\limits_{\mathbb{R}^d} b(\tau, \cdot, \zeta)u(\tau-h,\zeta)d\zeta \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Since, according to (21), (11), Cauchy-Schwartz inequality, conditions (12) and (5),

$$\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left|\nabla_x \int\limits_{\mathbb{R}^d} b(\tau,x,\zeta)u(\tau-h,\zeta)d\zeta\right|^2 dx =$$

$$= \mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \nabla_x b(\tau,x,\zeta)u(\tau-h,\zeta)d\zeta\right)^2 dx \le$$

$$\le \mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x b(\tau,x,\zeta)u(\tau-h,\zeta)|d\zeta\right)^2 dx \le$$

$$\le \mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(\tau,x,\zeta)|u(\tau-h,\zeta)|\big)d\zeta\right)^2 dx \le$$

$$\le \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi^2(\tau,x,\zeta)d\zeta dx\right)\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d} u^2(\tau-h)d\zeta =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi^2(\tau,x,\zeta)d\zeta dx\right)\mathbf{E}\|u(\tau-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le$$

$$\le \sup_{0\le\tau\le t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi^2(\tau,x,\zeta)d\zeta dx\right)\times$$

$$\times \mathbf{E}\|u(\tau-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le$$

$$\le \sup_{0\le\tau\le t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi^2(\tau,x,\zeta)d\zeta dx\right)\times$$

$$\times \sup_{0\le\tau\le t}\mathbf{E}\|u(\tau-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le$$

$$\le \sup_{0\le\tau\le t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi^2(\tau,x,\zeta)d\zeta dx\right)\times$$

$$\times\left(\sup_{-h\le\tau\le 0}\mathbf{E}\|\phi(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\right.$$

$$\left.+\sup_{0\le\tau\le t}\mathbf{E}\|u(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right) < \infty,$$

one concludes that

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left|\nabla_x \int\limits_{\mathbb{R}^d} b(\tau,x,\zeta)u(\tau-h,\zeta)d\zeta\right|^2 dx < \infty.$$

Thus conditions of lemma 4 from [4] are valid, hence in (16)

$$\|I_2(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \le Ct\mathbf{E}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left\|D_x^2\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(\tau,x,\zeta)\times\right.$$

$$\left.\times u(\tau-h,\zeta)d\zeta\right\|^2 dxd\tau \le$$

$$\le Ct\mathbf{E}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\|D_x^2 b(\tau,x,\zeta)\|\times\right.$$

$$\left.\times|u(\tau-h,\zeta)|d\zeta\right)^2 dxd\tau \le$$

$$\le Ct\int\limits_0^t\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi^2(\tau,x,\zeta)d\zeta dx\right)\times$$

$$\times\mathbf{E}\|u(\tau-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}d\tau \le$$

$$\le Ct^2\sup_{0\le\tau\le t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi^2(\tau,x,\zeta)d\zeta dx\right)\times$$

$$\times\left(\sup_{-h\le\tau\le 0}\mathbf{E}\|\phi(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\right.$$

$$\left.+\sup_{0\le\tau\le t}\mathbf{E}\|u(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right) < \infty.$$

Cauchy-Schwartz inequality, Fubini theorem and conditions (6), (2), (8), (5) yield for $\|I_3(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}$

$$\|I_3(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} = \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\|I_3(s)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left\|\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s-\tau,x-\xi)\times\right.$$

$$\left.\times f(\tau,u(\tau-h),\xi)d\xi d\tau\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s-\tau,x-\xi)\times\right.$$

$$\left.\times f(\tau,u(\tau-h,\xi),\xi)d\xi d\tau\right)^2 dx \le$$

$$\le \sup_{0\le s\le t} s\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_0^s\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s-\tau,x-\xi)\times\right.$$

$$\times f(\tau, u(\tau-h,\xi),\xi)d\xi\Big)^2 d\tau dx \leq$$

$$\leq t \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E} \int_0^s \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(s-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times |f(\tau, u(\tau-h,\xi),\xi)| d\xi \Big)^2 dx d\tau \leq$$

$$\leq t \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E} \int_0^s \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(s-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times \big(\chi(\tau,\xi) + L|u(\tau-h,\xi)|\big) d\xi \Big)^2 dx d\tau \leq$$

$$\leq 2t \sup_{0\leq s\leq t} \int_0^s \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(s-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times \chi(\tau,\xi) d\xi \Big)^2 dx d\tau +$$

$$+ 2L^2 t \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E} \int_0^s \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(s-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times |u(\tau-h,\xi)| d\xi \Big)^2 dx d\tau = 2t \times$$

$$\times \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E} \int_0^s \Big\| \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(s-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times \chi(\tau) d\xi \Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau +$$

$$+ 2L^2 t \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E} \int_0^s \Big\| \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(s-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times |u(\tau-h)| d\xi \Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau \leq$$

$$\leq 2t \sup_{0\leq s\leq t} \int_0^s \|\chi(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau +$$

$$+ 2L^2 t \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E} \int_0^s \|u(\tau-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau \leq$$

$$\leq 2t \int_0^t \|\chi(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau +$$

$$+ 2L^2 t \mathbf{E} \int_0^t \|u(\tau-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau =$$

$$= 2t \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \chi^2(\tau,x) dx d\tau +$$

$$+ 2L^2 t \mathbf{E} \int_{-h}^{t-h} \|u(\tau-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d(\tau-h) =$$

$$= 2t \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \chi^2(\tau,x) dx d\tau +$$

$$+ 2L^2 t \mathbf{E} \int_{-h}^{0} \|\phi(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau +$$

$$+ 2L^2 t \mathbf{E} \int_0^{t-h} \|u(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau \leq$$

$$\leq 2t^2 \sup_{0\leq \tau\leq t} \int_{\mathbb{R}^d} \chi^2(\tau,x) dx +$$

$$+ 2hL^2 t \sup_{-h\leq \tau\leq 0} \mathbf{E} \|\phi(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} +$$

$$+ 2L^2 t \mathbf{E} \int_0^t \|u(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau < \infty.$$

Using Cauchy-Schwartz inequality, Fubini theorem and conditions (7), (2), (3), (4), (5), one obtains

$$\|I_4(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} = \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E} \|I_4(s)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E} \Big\| \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(t-s, x-\xi) \times$$

$$\times \sigma(s, u(s-h),\xi) e_n(\xi) d\xi \Big) d\beta_n(s) \Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_0^s \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(s-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times \sigma(\tau, u(\tau-h,\xi),\xi) e_n(\xi) d\xi \Big) d\beta_n(\tau) \Big)^2 dx =$$

$$= \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^s \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(s-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times\, \sigma(\tau, u(\tau-h,\xi),\xi) e_n(\xi) d\xi \Big)^2 d\tau dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \int_0^s \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(s-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times\, |\sigma(\tau, u(\tau-h,\xi),\xi)| e_n(\xi) d\xi \Big)^2 dx d\tau \le L^2 \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \int_0^s \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(s-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times \big(1 + |u(\tau-h,\xi)|\big) e_n(\xi) d\xi \Big)^2 dx d\tau = L^2 \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \int_0^s \Big\| \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(s-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times \big(1 + |u(\tau-h)|\big) e_n d\xi \Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau \le L^2 \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \int_0^s \big\| \big(1 + |u(\tau-h)|\big) \times$$

$$\times\, e_n \big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau \le 2L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathbf{E} \int_0^t \big(\|e_n\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} +$$

$$+ \|u(\tau-h) e_n\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \big) d\tau = 2L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \times$$

$$\times\, \mathbf{E} \int_0^t \Big(1 + \int_{\mathbb{R}^d} u^2(\tau-h,x) e_n^2(x) dx \Big) d\tau \le$$

$$\le 2L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Big(t + \mathbf{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} u^2(\tau-h,x) dx d\tau \Big) =$$

$$= 2L^2 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Big) \Big(t +$$

$$+ \mathbf{E} \int_0^t \|u(\tau-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau \Big) =$$

$$= 2L^2 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Big) \Big(t +$$

$$+ \mathbf{E} \int_{-h}^{t-h} \|u(\tau-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d(\tau-h) \Big) =$$

$$= 2L^2 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Big) \Big(t + \mathbf{E} \int_{-h}^{0} \|\phi(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau +$$

$$+ \mathbf{E} \int_0^{t-h} \|u(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau \Big) \le 2L^2 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Big) \times$$

$$\times \Big(t + h \sup_{-h\le\tau\le 0} \mathbf{E} \|\phi(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} +$$

$$+ \mathbf{E} \int_0^t \|u(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} d\tau \Big) < \infty.$$

Thus the above five estimates together imply that for $u \in \mathfrak{B}_{2,T}$

$$\|\Psi u\|^2_{\mathfrak{B}_{2,T}} = \sup_{0\le t\le T} \mathbf{E} \Big\| \sum_{j=0}^{4} I_j(t) \Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le$$

$$\le 5 \sup_{0\le t\le T} \mathbf{E} \sum_{j=0}^{4} \|I_j(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= 5 \sup_{0\le t\le T} \sum_{j=0}^{4} \mathbf{E} \|I_j(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le$$

$$\le 5 \sum_{j=0}^{4} \sup_{0\le t\le T} \mathbf{E} \|I_j(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= 5 \sum_{j=0}^{4} \|I_j(t)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,T}} < \infty.$$

Since $\mathcal{F}_t$-measurability of $(\Psi u)(t)$ is easily verified, one concludes that Ψ is well defined.

Next, it is necessary to prove that operator Ψ has a unique fixed point. Indeed, taking into account the above five inequalities and the property of linearity of integral, one obtains

$$\|I_1(s)(u) - I_1(s)(v)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} =$$

$$= \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \|I_1(s)(u) - I_1(s)(v)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \Big\| \int_{\mathbb{R}^d} b(s,x,\xi) \times$$

$$\times \big(u(s-h) - v(s-h) \big) d\xi \Big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le$$

$$\leq \left(\sup_{0\leq s\leq t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} b^2(s,x,\xi)d\xi dx\right)\times$$
$$\times \|u-v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}, \tag{22}$$
$$\|I_2(s)(u)-I_2(s)(v)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} =$$
$$= \sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\|I_2(s)(u)-I_2(s)(v)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$
$$= \sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\left\|\int\limits_0^s\left(\Delta_x\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s-\tau,x-\xi)\times\right.\right.$$
$$\left.\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(\tau,\xi,\zeta)u(\tau-h)d\zeta\right)d\xi\right)d\tau-$$
$$-\int\limits_0^s\left(\Delta_x\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s-\tau,x-\xi)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(\tau,\xi,\zeta)v(\tau-h)d\zeta\right)d\xi\right)d\tau\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$
$$= \sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\left\|\int\limits_0^s\left(\Delta_x\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s-\tau,x-\xi)\times\right.\right.$$
$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(\tau,\xi,\zeta)u(\tau-h)d\zeta-\right.$$
$$\left.\left.-\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(\tau,\xi,\zeta)v(\tau-h)d\zeta\right)d\xi\right)d\tau\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$
$$= \sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\left\|\int\limits_0^s\left(\Delta_x\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s-\tau,x-\xi)\times\right.\right.$$
$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(\tau,\xi,\zeta)\big(u(\tau-h,\zeta)-\right.$$
$$\left.\left.\left.-v(\tau-h,\zeta)\big)d\zeta\right)d\xi\right)d\tau\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq$$
$$\leq Ct\mathbf{E}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left\|D_x^2\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(\tau,x,\zeta)\times\right.$$
$$\left.\times\big(u(\tau-h,\zeta)-v(\tau-h,\zeta)\big)d\zeta\right\|^2 dxd\tau \leq$$
$$\leq Ct\mathbf{E}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\|D_x^2 b(\tau,x,\zeta)\|\times\right.$$
$$\left.\times|u(\tau-h,\zeta)-v(\tau-h,\zeta)|d\zeta\right)^2 dxd\tau \leq$$
$$\leq Ct\int\limits_0^t\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi^2(\tau,x,\zeta)d\zeta dx\right)\times$$
$$\times\mathbf{E}\|u(\tau-h)-v(\tau-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}d\tau \leq$$
$$\leq Ct^2\sup_{0\leq\tau\leq t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi^2(\tau,x,\zeta)d\zeta dx\right)\times$$
$$\times\sup_{0\leq\tau\leq t}\mathbf{E}\|u(\tau-h)-v(\tau-h)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq$$
$$\leq Ct^2\sup_{0\leq\tau\leq t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi^2(\tau,x,\zeta)d\zeta dx\right)\times$$
$$\times\left(\sup_{-h\leq\tau\leq 0}\mathbf{E}\|\phi(\tau)-\phi(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\right.$$
$$\left.+\sup_{0\leq\tau\leq t-h}\mathbf{E}\|u(\tau)-v(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right) \leq$$
$$\leq Ct^2\sup_{0\leq\tau\leq t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi^2(\tau,x,\zeta)d\zeta dx\right)\times$$
$$\times\sup_{0\leq\tau\leq t}\mathbf{E}\|u(\tau)-v(\tau)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{23}$$
$$\|I_3(s)(u)-I_3(s)(v)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} =$$
$$= \sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\|I_3(s)(u)-I_3(s)(v)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$
$$= \sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\left\|\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s-\tau,x-\xi)\times\right.$$
$$\times f(\tau,u(\tau-h),\xi)d\xi d\tau-$$
$$-\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s-\tau,x-\xi)\times$$
$$\left.\times f(\tau,v(\tau-h),\xi)d\xi d\tau\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$
$$= \sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\left\|\int\limits_0^s\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathscr{K}(s-\tau,x-\xi)\times\right.$$
$$\times\big(f(\tau,u(\tau-h),\xi)-$$

$$- f(\tau, v(\tau-h), \xi)\big) d\xi d\tau \Bigg\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\leq L^2 ct^2 \|u-v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}, \qquad (24)$$

$$\|I_4(s)(u) - I_4(s)(v)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} =$$

$$= \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E}\|I_4(s)(u) - I_4(s)(v)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E}\Bigg\| \int\limits_0^s \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(s-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times \sigma(\tau, u(\tau-h), \xi) e_n(\xi) d\xi \Bigg) d\beta_n(\tau) -$$

$$- \int\limits_0^s \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(s-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times \sigma(\tau, v(\tau-h), \xi) e_n(\xi) d\xi \Bigg) d\beta_n(\tau) \Bigg\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E}\Bigg\| \int\limits_0^s \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \times$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathscr{K}(s-\tau, x-\xi) \big(\sigma(\tau, u(\tau-h), \xi) -$$

$$- \sigma(\tau, v(\tau-h), \xi)\big) e_n(\xi) d\xi \Bigg) d\beta_n(\tau) \Bigg\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\leq L^2 c \Bigg(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Bigg) t \|u-v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}. \qquad (25)$$

Estimates (22) — (25) yield

$$\|\Psi u - \Psi v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} = \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E}\Bigg\| \sum_{j=1}^{4} \big(I_j(s)(u) -$$

$$- I_j(s)(v)\big) \Bigg\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\leq 4 \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E} \sum_{j=1}^{4} \|I_j(s)(u) - I_j(s)(v)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= 4 \sup_{0\leq s\leq t} \sum_{j=1}^{4} \mathbf{E}\|I_j(s)(u) - I_j(s)(v)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\leq 4 \sum_{j=1}^{4} \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E}\|I_j(s)(u) - I_j(s)(v)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} =$$

$$= 4 \sum_{j=1}^{4} \|I_j(s)(u) - I_j(s)(v)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \leq$$

$$\leq 4 \Bigg(\sup_{0\leq s\leq t} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} b^2(s, x, \xi) d\xi dx +$$

$$+ Ct^2 \sup_{0\leq \tau\leq t} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi^2(\tau, x, \zeta) d\zeta dx +$$

$$+ L^2 ct^2 + L^2 c \Bigg(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Bigg) t \Bigg) \|u-v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} =$$

$$= \gamma(t) \|u-v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}, \{u, v\} \subset \mathfrak{B}_{2,t}.$$

Due to (15), the first term of γ is less, than one. Therefore, by choosing small $0 \leq t_1 \leq \leq T$, one concludes that $0 \leq \gamma(t_1) \leq 1$. It means that operator Ψ, defined in Banach space $\mathfrak{B}_{2,t_1}$, is contractive, and, according to Banach theorem on a contractive mapping, has a unique fixed point — mild solution $u \in \mathfrak{B}_{2,t_1}$ of (1) on the interval $[0, t_1]$. This procedure can be repeated finitely many steps on other sufficiently small intervals $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, $\ldots$, $[t_{n-2}, t_{n-1}]$, $[t_{n-1}, T]$, — components of the entire interval $[0, T]$, — and, as a result, the solution is obtained as union of solutions on these small intervals. Thus, the theorem is proved.

REFERENCES

1. *Mahmudov N. I.* Existence, Uniqueness and Controllability Results for Neutral FSDEs in Hilbert Spaces // Dynamic Systems and Applications. – 2008. – **17**. – P. 53 – 70.

2. *Tessitore G., Zabczyk J.* Invariant Measures for Stochastic Heat Equations // Probability and Mathematical Statistics. – 1998. – **18**. – P. 271 – 287.

3. *Zabczyk J., Da Prato G.* Ergodicity for Infinite Dimensional Systems // Dynamic Systems and Applications. – Cambridge University Press. – 1996. – 449 p.

4. *Станжицкий А. Н., Цуканова А. О.* Существование и единственность решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения реакции-диффузии нейтрального типа // Нелінійні коливання. – 2016. – **3**, № 3. – С. 408 – 430.

УДК 517.925

©2016 р. О.О. Чепок

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ПОВІЛЬНО ЗМІННИХ РОЗ'ЯЗКІВ ДВОЧЛЕННИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З НЕЛІНІЙНОСТЯМИ РІЗНИХ ТИПІВ

Роботу присвячено дослідженню достатньо широкого класу повільно змінних розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з правильно та швидко змінними нелінійностями. Отримано необхідні і достатні умови існування, а також асимптотичні зображення таких розв'язків та їх похідних першого порядку при прямуванні аргументу до особливої точки.

The work is devoted to researching of the sufficiently wide class of slowly varying solutions of the second order differential equations with regularly and rapidly varying nonlinearities. We have The necessary and sufficient conditions of the existence of such solutions were obtained. The representations for such solutions and their derivatives of the first order as the argument tends to the singulary point were also found.

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \qquad (1)$$

у якому $\alpha_0 \in \{-1;1\}, p : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$ — неперервно диференційовна функція, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ – неперервні функції $(i \in \{0,1\})$, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} – або проміжок $[y_i^0, Y_i[$, або – $]Y_i, y_i^0]$. При $Y_i = +\infty$ $(Y_i = -\infty)$ вважаємо, що $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно.

Крім того, будемо вважати, що функція φ_1 є правильно змінною (див.,напрклад, [1,2]) при $z \to Y_1 (z \in \Delta_{Y_1})$ порядку σ_1, а функція φ_0 двічи неперервно диференційовна, монотонна на Δ_{Y_0} і така, що:

$$\lim_{\substack{z\to Y_0\\ z\in\Delta_{Y_0}}} \varphi_0(z) \in \{0, +\infty\} \qquad (2)$$

та

$$\lim_{\substack{z\to Y_0\\ z\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(z)\varphi_0''(z)}{(\varphi_0'(z))^2} = 1. \qquad (3)$$

Розв'язок y рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язком $(-\infty \le \lambda_0 \le +\infty)$, якщо він визначений на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ та при кожному $i \in \{0,1\}$ виконуються умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \qquad (4)$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \qquad (5)$$

У даній роботі рогладаються особливі розв'язки, для яких $\lambda_0 = 0$. За властивостями таких розв'язків (див., наприклад, [3]) маємо, що кожен з них є повільно змінною функцією при $t \uparrow \omega$. За рахунок цього випадок $\lambda_0 = 0$ є одним з найскладніших для вивчення. Наразі задача дослідження $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків для рівнянь з швидко змінною нелінійністю ускладнена тим, що композиція швидко та повільно змінних функцій може бути швидко, правильно, або повільно змінною при прямуванні аргументу до особливої точки.

Введемо необхідні надалі означення.

Нехай $Y \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_Y — деякий однобічний окіл Y. Неперервно диференційовна функція $L : \Delta_Y \to]0;+\infty[$ називаеться нормалізованою повільно змінною функцією (див., наприклад,[2]) при $z \to Y \quad (z \in \Delta_Y)$, якщо

$$\lim_{\substack{z\to Y_1\\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0.$$

Говорять, що повільно змінна при $z \to Y$ $(z \in \Delta_Y)$ функція $\theta : \Delta_Y \to]0;+\infty[$ задовільняє умову S, якщо для будь-якої нормалізованої повільно змінної при $z \to Y \quad (z \in \Delta_Y)$ функції $L : \Delta_Y \to]0;+\infty[$ має місце співвідношення при $z \to Y \quad (z \in \Delta_Y)$:

$$\theta(zL(z)) = \theta(z)[1 + o(1)].$$

Введемо наступні позначення:

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

$$\theta_1(z) = \varphi_1(z)|z|^{-\sigma_1},$$

$$I(t) = \operatorname{sign}(y_1^0) \times$$

$$\times \int_{B_\omega^0}^{t} \left| \pi_\omega(\tau) p(\tau) \theta_1 \left(\frac{\operatorname{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(\tau)|} \right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau,$$

$B_\omega^0 = b$, якщо

$$\int_b^\omega \left| \pi_\omega(\tau) p(\tau) \theta_1 \left(\frac{\operatorname{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(\tau)|} \right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau = +\infty,$$

та $B_\omega^0 = \omega$, якщо

$$\int_b^\omega \left| \pi_\omega(\tau) p(\tau) \theta_1 \left(\frac{\operatorname{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(\tau)|} \right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau < +\infty,$$

$$\Phi_0(z) = \int_{A_\omega^0}^{z} |\varphi_0(y)|^{\frac{1}{\sigma_1 - 1}} dy,$$

$$A_\omega^0 = \begin{cases} y_0^0, & \text{якщо } \int_{y_0^0}^{Y_0} |\varphi_0(y)|^{\frac{1}{\sigma_1-1}} dy = +\infty, \\ Y_0, & \text{якщо } \int_{y_0^0}^{Y_0} |\varphi_0(y)|^{\frac{1}{\sigma_1-1}} dy < +\infty, \end{cases}$$

$$q_1 = \lim_{\substack{z \to Y_0 \\ z \in \Delta_{Y_0}}} \Phi(z).$$

Зауваження 1. Справедливим є твердження

$$\Phi(z) = (\sigma_1 - 1) \frac{\varphi_0^{\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - 1}}(y)}{\varphi_0'(y)} [1 + o(1)]$$

при $z \to Y_0 \quad (z \in \Delta_{Y_0})$, звідки, при $z \in \Delta_{Y_0}$

$$\operatorname{sign}(\varphi_0'(z) \Phi(z)) = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - 1}.$$

Зауваження 2. З умов (2) та (3) на функцію φ_0 випливає, що $q_1 \in \{0, +\infty\}$ та

$$\lim_{\substack{z \to Y_0 \\ z \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\Phi''(z) \cdot \Phi(z)}{(\Phi'(z))^2} = 1.$$

Отримана наступна теорема.

Теорема. *Нехай $\sigma_1 \neq 1$, константа γ_0 така, що $(\gamma_0 + 1) < 0$, при $Y_0 = 0$, та $(\gamma_0 + 1) > 0$ у іншому випадку, функція θ_1 задовольняє умову S та існує скінченна чи нескінченна границя $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I'(t)}{I(t)}$. Тоді для існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків таких, що існує скінченна чи нескінченна границя $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)}$, необхідно виконання умов*

$$\alpha_0 \pi_\omega(t) y_1^0 < 0 \quad \text{при } t \in [a; \omega[, \tag{6}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{y_1^0}{|\pi_\omega(t)|} = Y_1, \tag{7}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} I(t) = q_1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \Phi^{-1}(I(t)) = Y_0, \tag{8}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{I'(t) \pi_\omega(t)}{\Phi'\left(\Phi^{-1}(I(t))\right) \Phi^{-1}(I(t))} = 0. \tag{9}$$

Якщо функція $\frac{\pi_\omega(t) \cdot I'(t)}{I(t)}$ є нормалізованою повільно змінною функцією при $t \uparrow \omega$ функція $\left(\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right)$ є правильно змінною порядку γ_0 при $z \to Y_0$ $(z \in \Delta_{Y_0})$ та або

$$\lim_{t \uparrow \omega} \left| \frac{\pi_\omega(t) I'(t)}{I(t)} \right| < +\infty, \tag{10}$$

або має місце наступна умова при $t \in [a, \omega[$

$$\pi_\omega(t) \cdot I(t) \cdot I'(t)(1 - \sigma_1) > 0, \tag{11}$$

то (6) — (9) є достатніми умовами для існування у рівняння (1) таких розв'язків. Більше того, для кожного $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\Phi(y(t)) = I(t)[1 + o(1)], \tag{12}$$

$$\frac{y'(t) \Phi'(y(t))}{\Phi(y(t))} = \frac{I'(t)}{I(t)} [1 + o(1)]. \tag{13}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $y : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_0}$ є $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язком рівняння (1), для якого існує скінченна чи нескінченна границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$. За властивостями таких розв'язків (див., наприклад, [4], лема 1.4), маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 0, \tag{14}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = -1, \tag{15}$$

звідки випливає умова (6).

З (15) також маємо, що функція $y'(t)$ є правильно змінною функцією порядку (-1) при $t \uparrow \omega$, тобто, може бути подана у вигляді $y'(t) = |\pi_\omega(t)|^{-1} L_1(t)$ ([2]), де $L_1(t)$ — повільно змінна при $t \uparrow \omega$ функція. Звідси, з урахуванням властивостей повільно змінних функцій [2], отримуємо справедливість умови (7).

З (1) та (15) випливає при $t \uparrow \omega$

$$\frac{\alpha_0 \pi_\omega(t) p(t) \varphi_0(y(t)) \varphi_1(y'(t))}{y'(t)} = -[1+o(1)]. \tag{16}$$

Оскільки функція L_1 є повільно змінною, то й функція $L_1(Z(t))$, де функція Z є оберненою до функції $\dfrac{\mathrm{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(t)|}$, є повільно змінною при $t \uparrow \omega$ як композиція повільно та правильно змінної функції [1] , а тому в силу умови S, якій задовольняє функція θ_1, можемо переписати (16) у наступному вигляді при $t \uparrow \omega$:

$$\frac{y'(t)}{|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \mathrm{sign}(y_1^0) \times$$
$$\times \left|\pi_\omega(t) \theta_1\left(\frac{\mathrm{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(t)|}\right) p(t)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} [1 + o(1)]. \tag{17}$$

З (17) у випадку, коли

$$\int_{B_\omega^0}^{\omega} |\pi_\omega(\tau) \theta_1\left(\frac{\mathrm{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(t)|}\right) p(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \, d\tau = +\infty,$$

маємо при $t \uparrow \omega$

$$\Phi(y(t)) = I(t)[1 + o(1)]. \tag{18}$$

Якщо

$$\int_{B_\omega^0}^{\omega} \left|\pi_\omega(\tau) \theta_1\left(\frac{\mathrm{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(t)|}\right) p(\tau)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \, d\tau < +\infty,$$

отримаємо або (18), або

$$\lim_{t\uparrow\omega} \Phi(y(t)) = const \neq 0,$$

що не може мати місце, бо з урахуванням зауваження 2:

$$\lim_{t\uparrow\omega} \Phi_0(y(t)) \in \{0; +\infty\}.$$

Таким чином, (18) має місце в обох випадках, а отже, має місце (12) та перша з умов (8).

З (17) та (18) маємо

$$\frac{y'(t)\Phi'(y(t))}{\Phi(y(t))} = \frac{I'(t)}{I(t)}[1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega,$$

тобто справедливе асимптотичне зображення (13).

Зауважимо, що функція $\Phi^{-1}(z)$ є повільно змінною $z \to q_1$, як обернена до швидко змінної функції $\Phi(y)$ при $y \to Y_0$ ($Y_0 \in \Delta_{Y_0}$). З урахуванням цього та (17), використовуючи властивості повільно змінних функцій, отримаємо при $t \uparrow \omega$

$$y(t) = \Phi^{-1}(I(t))[1 + o(1)],$$

звідки випливає друга з умов (8).

Розглянемо рівність

$$\lim_{z\to q_1} \frac{\Phi''(\Phi^{-1}(z))z}{(\Phi'(\Phi^{-1}(z)))^2} =$$

$$= \lim_{\substack{z\to q_1 \\ \Phi_1(r)=z}} \frac{\Phi''(\Phi^{-1}(\Phi_1(r)))\Phi_1(r)}{(\Phi'(\Phi^{-1}(\Phi_1(r))))^2} =$$

$$= \lim_{\substack{z\to q_1 \\ \Phi_1(r)=z}} \frac{\Phi''(r)\Phi_1(r)}{\Phi'(r)} = 1.$$

З урахуванням цієї рівності, позначивши

$$\psi(y) = \frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)},$$

маємо

$$\lim_{z\to q_1} \frac{z \cdot (\psi(\Phi^{-1}(z)))'}{\psi(\Phi^{-1}(z))} =$$

$$= \lim_{z\to q_1} \frac{z\cdot\left(\dfrac{\Phi'(\Phi^{-1}(z))}{\Phi(\Phi^{-1}(z))}\right)'}{\dfrac{\Phi'(\Phi^{-1}(z))}{\Phi(\Phi^{-1}(z))}} =$$

$$= \lim_{z\to q_1} \frac{z\cdot\left(\dfrac{\Phi'(\Phi^{-1}(z))}{z}\right)'}{\dfrac{\Phi'(\Phi^{-1}(z))}{z}} =$$

$$= \lim_{z\to q_1} \frac{\Phi''(\Phi^{-1}(z))z}{(\Phi'(\Phi^{-1}(z)))^2} - 1 = 0.$$

З останнього випливає, що функція $\psi(\Phi_1^{-1})$ є повільно змінною $z\to q_1$.

З урахуванням (13) та (14), отримаємо при $t\uparrow\omega$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}\cdot\frac{I'(t)\Phi(y(t))}{y'(t)I(t)\Phi'(y(t))} = 0.$$

З цього співвідношення (13), (18) та того, що функція $\psi(\Phi_1^{-1})$ є повільно змінною $z\to q_1$ маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{\Phi^{-1}(I(t))\Phi'(\Phi^{-1}(I(t)))} = 0.$$

Таким чином доведено виконання умови (9).

Достатність. Нехай функція $\dfrac{\pi_\omega(t)\cdot I'(t)}{I(t)}$ є нормалізованою повільно змінною функцією при $t\uparrow\omega$, функція $\left(\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right)$ є правильно змінною порядку γ_0 при $z\to Y_0$ ($z\in\Delta_{Y_0}$), та виконуються умови (6) — (9) та (10) або (11).

До рівняння (1) застосуємо перетворення

$$\Phi(y(t)) = I(t)[1+z_1(x)], \qquad (19)$$

$$\frac{y'(t)\Phi'(y(t))}{\Phi(y(t))} = \frac{I'(t)}{I(t)}[1+z_2(x)], \qquad (20)$$

де

$$x = \beta\ln|I_0(t)|,\ \beta = \begin{cases} 1, \lim\limits_{t\uparrow\omega} I_0(t) = \infty, \\ -1, \lim\limits_{t\uparrow\omega} I_0(t) = 0, \end{cases} \qquad (21)$$

$$I_0(t) = \begin{cases} I(t), & \text{при } \lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} = \infty, \\ \pi_\omega(t), & \text{при } \lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} < \infty, \end{cases}$$

Приведемо систему (19)-(21) до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} z_1' = \beta G_1(t(x))\,[z_2 + z_1z_2]\,; \\ z_2' = \beta G_2(t(x))\cdot[1+z_2](N(t(x),z_1,z_2)\times \\ \times(1+z_1)^{\sigma_1-1}\cdot(1+z_2)^{\sigma_1-1} + M(t(x),z_1)\times \\ \times\cdot\frac{(1+z_2)\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I(t(x))))\Phi_1^{-1}(I(t(x)))} + Q(t(x))), \end{cases} \qquad (22)$$

у якій

$$G_1(t) = $$
$$= \begin{cases} 1, & \text{при } \lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} = \infty, \\ \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)}, & \text{при } \lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} < \infty, \end{cases}$$

$$G_2(t) = $$
$$= \begin{cases} \frac{I(t)}{\pi_\omega(t)I'(t)}, & \text{при } \lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} = \infty, \\ 1, & \text{при } \lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} < \infty, \end{cases}$$

$$Q(t(x)) = \frac{\pi_\omega(t(x))\cdot\left(\dfrac{I(t(x))}{I'(t(x))}\right)'}{\dfrac{I(t(x))}{I'(t(x))}},$$

$$N(t,z_1,z_2) = $$
$$= -\frac{\theta_1\left(\dfrac{I'(t(x))\Phi\left(Y(t,z_1)\right)(1+z_2)}{I(t)\Phi'\left(Y(t,z_1)\right)}\right)}{\theta_1\left(|\pi_\omega(t)|^{-1}\mathrm{sign}(y_1^0)\right)},$$

$$Y(t(x),z_1) = \Phi^{-1}(I(t(x))[1+z_1]),$$

$$\psi(z) = \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)},$$

$$M(t(x),z_1) = \frac{\psi(Y(t,z_1))}{\psi(\Phi^{-1}(I(t(x))))}\times$$
$$\times\frac{\Phi^{-1}(I(t(x))}{\Phi^{-1}(Y(t,z_1))}.$$

Оскільки функція $\dfrac{\pi_\omega(t)\cdot I'(t)}{I(t)}$ є нормалізованою повільно змінною функцією при $t\uparrow\omega$, то

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{\pi_\omega(t)\cdot I'(t)}{I(t)}\right)'}{\dfrac{\pi_\omega(t)\cdot I'(t)}{I(t)}} = 0. \qquad (23)$$

З іншого боку,

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{\pi_\omega(t)\cdot I'(t)}{I(t)}\right)'}{\dfrac{\pi_\omega(t)\cdot I'(t)}{I(t)}}=$$

$$=1+\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{I'(t)}{I(t)}\right)'}{\dfrac{I'(t)}{I(t)}}.$$

З цієї рівності враховуючи (23) маємо:

$$\lim_{t\uparrow\omega}Q(t)=1. \tag{24}$$

За рахунок того, що функція Φ_1^{-1} є повільно змінною при $z\to q_1$, з урахуванням другої з умов (8) маємо $\lim\limits_{t\uparrow\omega}Y(t,z_1)=Y_0$ рівномірно по $|z_1|<\frac12$, $|z_2|<\frac12$.

Оскільки $\psi(z)$ — правильно змінна функція порядку γ_0 при $z\to Y_0$ ($z\in\Delta_{Y_0}$), а $\Phi^{-1}(z)$ — повільно змінна при $z\to Y_0$ ($z\in\Delta_{Y_0}$), то функція $\psi(\Phi^{-1}(z))$ є повільно змінною при $z\to q_1$, а тому, і функція $\Phi^{-1}(z)\psi(\Phi^{-1}(z))$ є повільно змінною при $z\to q_1$ як добуток повільно змінних функцій. Таким чином,

$$\lim_{t\uparrow\omega}M(t,z_1)=1 \tag{25}$$

рівномірно по $z_1:|z_1|<\dfrac12$.

Для дослідження поведінки функції $N(t,z_1,z_2)$ вивчимо відношення аргументів функції θ_1. Позначимо

$$N_1(t,z_1,z_2)=$$

$$=\frac{I'(t)\Phi\left(Y(t,z_1)\right)\cdot|\pi_\omega(t)|\mathrm{sign}(y_1^0)}{I(t)\Phi'\left(Y(t,z_1)\right)}(1+z_2).$$

Розглянемо рівність

$$\frac{\pi_\omega(t)\left(N_1(t,z_1,z_2)\right)'_t}{N_1(t,z_1,z_2)}=$$

$$=\frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{I'(t)|\pi_\omega(t)|}{I(t)\mathrm{sign}(y_1^0)}\psi\left(\Phi^{-1}(I(t)[1+z_1])\right)\right)'_t}{\dfrac{I'(t)|\pi_\omega(t)|}{I(t)}\psi(\Phi^{-1}(I(t)[1+z_1])\mathrm{sign}(y_1^0)}=$$

$$=\frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{I'(t)\cdot|\pi_\omega(t)|}{I(t)}\right)'}{\dfrac{I'(t)\cdot|\pi_\omega(t)|}{I(t)}}+$$

$$+\frac{\Phi^{-1}(I(t)[1+z_1])\psi'(\Phi^{-1}(I(t)[1+z_1]))}{\psi(\Phi^{-1}(I(t)[1+z_1]))}\times$$

$$\times\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{\Phi^{-1}(I(t)[1+z_1])\Phi'(\Phi^{-1}(I(t)[1+z_1]))}.$$

З цієї рівності з урахуванням (23), (25), умови (9) та повільної зміни та інших властивостей функції ψ випливає, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(N_1(t,z_1,z_2)\right)'_t}{N_1(t,z_1,z_2)}=0$$

рівномірно по $|z_1|<\frac12$. Звідси маємо, що функція $N_1(t,z_1,z_2)$ є нормалізованою повільно змінною функцією при $t\uparrow\omega$ рівномірно по $|z_1|<\frac12$, $|z_2|<\frac12$. Тому, оскільки функція θ_1 задовольняє умову S, маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}N(t,z_1,z_2)=-1 \tag{26}$$

рівномірно по $|z_1|<\frac12$, $|z_2|<\frac12$.

У силу другої з умов (8) з урахуванням того, що функція Φ^{-1} є повільно змінною, існує $t_0\in[a,\omega[$ таке, що

$$\Phi^{-1}(I(t)(1+z_1))\in\Delta_{Y_0}$$

$$\text{при } t\in[t_0,\omega[,|z_1|\le\frac12.$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (22) на множині

$$\Omega=[x_0,+\infty[\times D,\quad \text{где}\quad x_0=\beta\ln|\pi_\omega(t_0)|,$$

$$D=\left\{(z_1,z_2):|z_i|\le\frac12,\ i=1,2\right\}.$$

Перепишемо систему (22) у виді

$$z_1'=\beta G_1(t(x))\left[z_2+z_1z_2\right], \tag{28}$$

$$z_2'=\beta G_2(t(x))[A_{21}z_1+A_{22}(x)z_2+$$
$$+R_1(x,z_1,z_2)+R_2(x,z_1,z_2)], \tag{29}$$

в якій

$$A_{21}=1-\sigma_1,\quad A_{22}=1-\sigma_1;$$

$$R_1(x,z_1,z_2)=(1+z_2)\Bigg[N(t(x),z_1,z_2)+Q(t)+$$
$$+M(t(x),z_1)\cdot\frac{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}{\Phi_1'(\Phi^{-1}(I(t(x))))\Phi^{-1}(I(t(x)))}\Bigg]+$$
$$+(N(t(x),z_1,z_2)+1)\cdot(\sigma_1-1)(z_1+z_2)+$$
$$+z_2\cdot M(t(x),z_1)\cdot\frac{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}{\Phi'(\Phi^{-1}(I(t(x))))\Phi^{-1}(I(t(x)))};$$
$$R_2(x,z_1,z_2)=N(t(x),z_1,z_2)\cdot(\sigma_1-1)\times$$
$$\times(z_1\cdot z_2+z_2^2)+M(t(x),z_1)\cdot z_2^2\times$$
$$\times\frac{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}{\Phi'(\Phi^{-1}(I(t(x))))\Phi^{-1}(I(t(x)))}+$$
$$+(1+z_2)\cdot N(t(x),z_1,z_2)\cdot(((1+z_2)^{\sigma_1-1}-1$$
$$-(\sigma_1-1)\cdot z_2)+(\sigma_1-1)^2\cdot z_1\cdot z_2+(\sigma_1-1)\times$$
$$\times z_1\cdot((1+z_2)^{\sigma_1-1}-1-(\sigma_1-1)\cdot z_2)+$$
$$+(1+z_2)^{\sigma_1-1}\cdot((1+z_1)^{\sigma_1-1}-1-(\sigma_1-1)\cdot z_1));$$

З (24) — (27) випливає, що

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0}\frac{R_2(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|}=0 \qquad (30)$$

$$\text{рівномірно по}\quad x\in[x_0,+\infty[,$$

$$\lim_{x\to+\infty}R_1(x,z_1,z_2)=0 \qquad (31)$$

$$\text{рівномірно по}\quad z_1,z_2:\ (z_1,z_2)\in D.$$

Оскільки $\sigma_1\neq 1$ з виду системи (28)-(29) випливає, що у випадку, коли $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)}=0$ виконано умови теореми 2.6 з [4]. Відповідно до цієї теореми система (28)-(29) має хоча б один розв'язок $\{z_i\}_{i=1}^2:[x_1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $(x_1\geq x_0)$, який прямує до нуля при $x\to+\infty$, причому таких розв'язків існує принаймні однопараметричне сімейство.

У випадку, коли

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)}=c\in R\setminus\{0\}$$

перепишемо систему (28)-(29) у вигляді

$$z_1'=\beta\left[z_2+z_1z_2+(G_1(t(x))-c)(z_2+z_1z_2)\right],$$

$$z_2'=\beta[A_{21}z_1+A_{22}(x)z_2+$$
$$+R_1(x,z_1,z_2)+R_2(x,z_1,z_2)].$$

Оскільки в цьому випадку

$$\lim_{x\to\infty}G_1(t(x))=c,$$

то з виду системи (27)-(28) випливає, що для неї виконано умови теореми 2.2 з [4]. Дійсно, наразі матриця коефійієнтів лінійної частини системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & c\\ 1-\sigma_1 & 1-\sigma_1\end{pmatrix},$$

характеристичне рівняння

$$\mu^2-(1-\sigma_1)\mu-c(1-\sigma_1)=0$$

не має коренів з нульовою дійсною частиною, за рахунок того, що $\sigma_1\neq 1$, а також виконуються умови (30) та (31). Відповідно до теореми 2.2 з [4] система (28)-(29) має хоча б один розв'язок $\{z_i\}_{i=1}^2:[x_1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $(x_1\geq x_0)$, який прямує до нуля при $x\to+\infty$, причому таких розв'язків існує принаймні однопараметричне сімейство.

У випадку, коли $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)}=\infty$, застосуємо до системи (28)-(29) перетворення

$$z_1=w_1,\quad z_2=\sqrt{|G_2(x)|}w_2.$$

Отримаємо систему

$$w_1'=\beta\sqrt{|G_2(t(x))|}\left[w_2+V_1(x;w_1;|G_2(x)|w_2)\right], \qquad (32)$$

$$w_2'=\beta\operatorname{sign}(G_2(t(x)))\sqrt{|G_2(t(x))|}(A_{21}(x)w_1+$$
$$+R_1(x,w_1,\sqrt{|G_2(x)|}w_2)+$$
$$+V_2(x,w_1,\sqrt{|G_2(x)|}w_2)); \qquad (33)$$

де

$$V_1(x;w_1;w_2)=w_1\cdot w_2;$$

$$V_2(x,w_1,w_2)=\sqrt{|G_2(x)|}(A_{22}-$$
$$-\widetilde{N}(x)\sqrt{|G_2(x)|})w_2+R_2(x,w_1,\sqrt{|G_2(x)|}w_2),$$

$$\lim_{|w_1|+|w_2|\to 0}\frac{V_i(x,w_1,w_2)}{|w_1|+|w_2|}=0,\quad i=1,2$$

$$\text{рівномірно по}\quad x\in[x_0,+\infty[,$$

$$\lim_{x\to+\infty}R_1(x,w_1,w_2)=0$$

$$\text{рівномірно по}\quad w_1,w_2:\ (w_1,w_2)\in D.$$

Зауважимо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} \widetilde{N}(t) =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\operatorname{sign}(G_2(x(t)))G_2'(x(t))I(x(t))}{2G_2^2(x(t))I'(x(t))} =$$

$$= k\frac{\Big(\dfrac{I(t)}{\pi_\omega(t)I'(t)}\Big)'\pi_\omega(t)}{2\Big(\dfrac{I(t)}{\pi_\omega(t)I'(t)}\Big)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sign}(G_2(x(t)))}{2}\left(\frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{1}{\pi_\omega(t)}\right)'\dfrac{I(t)}{I'(t)}}{\dfrac{I(t)}{\pi_\omega(t)I'(t)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{I(t(x))}{I'(t(x))}\right)'}{\dfrac{I(t(x))}{I'(t(x))}}\right) =$$

$$= \operatorname{sign}(G_2(x(t)))\lim_{t\uparrow\omega}\frac{1}{2}(-1+Q(t)) = 0.$$

Розглянемо інтеграл $\int\limits_{x_0}^{\infty} G_2(x)dx$. З урахуванням зображення $G_2(x) = \dfrac{I(t(x))}{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}$ маємо

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} G_2(x)dx = \int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{I(t(x))}{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}dx =$$

$$= \int\limits_{t(x_0)}^{\infty} \frac{I(t)}{\pi_\omega(t)I'(t)}\frac{I'(t)}{I(t)}dt = \infty.$$

Оскільки у околі нуля виконується $\int\limits_{x_0}^{\infty} \sqrt{|G_2(x)|}dx \geq \int\limits_{x_0}^{\infty} |G_2(x)|dx$. Таким чином, $\int\limits_{x_0}^{\infty} \sqrt{|G_2(x)|}dx \to \infty$.

Крім того, матриця коефіцієнтів лінійної частини системи (32)-(33) має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \operatorname{sign}(G_2(x))(1-\sigma_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу (11) характеристичного рівняння

$$\mu^2 - \operatorname{sign}(G_2(x))(1-\sigma_1) = 0.$$

немає коренів з нульовою дійсною частиною.

Отримуємо, що для системи диференціальних рівнянь (34)-(35) виконані всі умови теореми 2.2 з [4]. Відповідно до цієї теореми система (34)-(35) має хоча б один розв'язок $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(x_1 \geq x_0)$, який прямує до нуля при $x \to +\infty$, причому таких розв'язків існує принаймні однопараметричне сімейство. Отже, такі розв'язки існують в будь-якому випадку, коли існує скінченна чи нескінченна границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)}$. Їм у силу замін відповідають розв'язки y рівняння (1), що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (12)-(13).

З вигляду цих зображень випливає, що отримані розв'язки y є $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$- розв'язками. Теорему повністю доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.* Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge university press,Cambridge, 1987.

2. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции [текст] – М.: Наука, 1985. – 141с.

3. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 — Киев, 1998. — 295 с.

4. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономних систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, №1. – С. 52-80.