УДК 517.925

О. О. Чепок*

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ШВИДКО ЗМІННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ШВИДКО ТА ПРАВИЛЬНО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Отримано необхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків одного класу диференціальних рівнянь другого порядку з швидко та правильно змінними нелінійностями, що є природним узагальненням попередніх досліджень В. М. Євтухова та його школи. Встановлено асимптотичні зображення таких розв'язків і їхніх похідних першого порядку.

Ключові слова: *диференціальні рівняння другого порядку, правильно змінні нелінійності, швидко змінні нелінійності, $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язки, асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$ -розв'язків.*

Вступ. Диференціальні рівняння другого порядку, що містять у правій частині і степеневі, і експоненціальні нелінійності, відіграють важливу роль у розвитку якісної теорії диференціальних рівнянь. Серед робіт, що стосуються встановлення асимптотичних зображень розв'язків, більшу частину складають дослідження рівнянь зі степеневими та з правильно змінними нелінійностями. Останнім часом розпочалися дослідження диференціальних рівнянь, які містять у правій частині експоненціальні функції і більш широкий клас функцій, ніж експоненціальні, − швидко змінні функції. Для одного класу таких рівнянь встановимо асимптотичні зображення швидко змінних розв'язків.

1. Постановка задачі. Розглядаємо диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\, \to\,]0, +\infty[$ − неперервна функція, $-\infty < a < \omega \le \le +\infty$, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to\,]0, +\infty[$, $i = 0, 1$, − неперервні функції, $\Delta_{Y_i} = [\, y_i^0, Y_i\, [$ або $\Delta_{Y_i} = \,]\, Y_i, y_i^0\, [$, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$. При $Y_i = +\infty$ ($Y_i = -\infty$) вважаємо, що $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$). Крім того, вважаємо, що функція φ_1 є правильно змінною функцією порядку σ_1 при прямуванні аргументу до Y_1 [3, с. 10−15], а функція φ_0 є двічі неперервно диференційовною та такою, що

$$\varphi_0'(y) \ne 0 \qquad \text{при} \qquad y \in \Delta_{Y_0},$$

$$\lim_{y \to Y_0,\, y \in \Delta_{Y_0}} \varphi_0(y) \in \{0, +\infty\},$$

$$\lim_{y \to Y_0,\, y \in \Delta_{Y_0}} \frac{\varphi_0(y)\varphi_0''(y)}{(\varphi_0'(y))^2} = 1. \tag{2}$$

Функцію $\varphi_1 : \Delta_{Y_1} \to\,]0, +\infty[$ називають *правильно змінною* при прямуванні аргументу до Y_1, якщо вона є вимірною на Δ_{Y_1} та існує таке число $\sigma_1 \in \mathbb{R}$, що для довільного $\lambda > 0$

$$\lim_{z \to Y_1,\, z \in \Delta_{Y_1}} \frac{\varphi_1(\lambda z)}{\varphi_1(z)} = \lambda^{\sigma_1}.$$

* olachepok@ukr.net

При цьому число σ_1 називають *порядком функції* φ_1. Якщо $\sigma_1 = 0$, то функцію φ_1 називають *повільно змінною* при прямуванні аргументу до Y_1.

Прикладами правильно змінних функцій є степенева функція, а також добуток степеневої і логарифмічної функцій.

Вимірну функцію $\varphi_0 : [s, +\infty[\to]0, +\infty[$, $s > 0$, називають швидко змінною порядку $+\infty$ при прямуванні аргументу до $+\infty$, якщо

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\varphi_0(\lambda y)}{\varphi_0(y)} = \begin{cases} 0, & 0 < \lambda < 1, \\ 1, & \lambda = 1, \\ +\infty, & \lambda > 1, \end{cases}$$

а швидко змінною порядку $-\infty$ при прямуванні аргументу до $+\infty$, якщо

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\varphi_0(\lambda y)}{\varphi_0(y)} = \begin{cases} +\infty, & 0 < \lambda < 1, \\ 1, & \lambda = 1, \\ 0, & \lambda > 1. \end{cases}$$

Наприклад, функція $\exp(y)$ є швидко змінною порядку $+\infty$, а функція $\exp(-y)$ є швидко змінною порядку $-\infty$ при $y \to +\infty$.

Функцію $\varphi_0(y)$ називають *швидко змінною в нулі* (тобто при прямуванні аргументу до нуля справа), якщо $\varphi_0(1/y)$ є швидко змінною на нескінченності. Це означення природним чином поширюється на поняття функції, швидко змінної при прямуванні аргументу до $-\infty$, а також на поняття функції, що є швидко змінною у лівому околі нуля.

З огляду на умови (2) функція φ_0 у рівнянні (1) та її похідна першого порядку є швидко змінними при прямуванні аргументу до Y_0.

Майже всі дослідження асимптотичних зображень монотонних розв'язків рівнянь типу (1), а також рівнянь вищих порядків з аналогічним виглядом правої частини проводились для випадку $\varphi_1(y') \equiv 1$, а також для рівнянь, які у деякому сенсі є близькими до степеневих (див., наприклад, [5, 6, 8, 9]). Зокрема, у роботах P. Řehák [8, 9] досліджувалися рівняння вигляду (1), де $\varphi_0(y) \equiv 1$, а φ_1 є правильно змінною функцією порядку 1. У монографії V. Marić [7] для часткових випадків рівняння (1) при $\alpha_0 = 1$, $\varphi_1(y') \equiv 1$ отримано асимптотичні зображення для всіх додатних розв'язків, що прямують до нуля, а також їхніх похідних першого порядку. У роботах А. Г. Чернікової [2, 4] досліджувалось диференціальне рівняння вигляду (1), коли $\varphi_1(y') \equiv 1$. Для цього рівняння встановлено необхідні і достатні умови існування широкого класу правильно та швидко змінних розв'язків.

У цій роботі дослідимо асимптотичні зображення розв'язків рівняння (1) загального вигляду з використанням дещо іншої методики.

Розв'язок y рівняння (1), визначений на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, називають $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$*-розв'язком*, якщо

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_i},$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \qquad i = 0, 1,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t) y(t)} = \lambda_0. \tag{3}$$

Будемо досліджувати $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язки, для яких $\lambda_0 = 1$. Доведено (див., наприклад, [2]), що кожний з таких розв'язків є швидко змінною функцією при $t \uparrow \omega$. Звідси випливає, що випадок $\lambda_0 = 1$ потребує зміни методики досліджень порівняно з іншим особливим випадком $\lambda_0 = 0$ і неособливими випадками, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Метою цієї роботи є встановлення необхідних і достатніх умов існування $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язків рівняння (1), а також знаходження асимптотичних зображень при $t \uparrow \omega$ цих розв'язків і їхніх похідних першого порядку.

1. Основні результати. Введемо позначення

$$\Phi(y) = \operatorname{sgn} y_1^0 \cdot \int_B^y \left(\varphi_0(s)|s|\right)^{1/(\sigma_1-2)} ds,$$

$$B = \begin{cases} y_0^0, & \int_{y_0^0}^{Y_0} \left(\varphi_0(s)|s|\right)^{1/(\sigma_1-2)} ds = \pm\infty, \\ Y_0, & \int_{y_0^0}^{Y_0} \left(\varphi_0(s)|s|\right)^{1/(\sigma_1-2)} ds = \text{const}, \end{cases}$$

$$\theta_1(z) = \varphi_1(z)|z|^{-\sigma_1}, \qquad Z_0 = \lim_{y \to Y_0,\, y \in \Delta_{Y_0}} \Phi(y), \qquad \Phi_1(y) = \int_B^y \Phi(s)\, ds,$$

$$I(t) = \int_A^t (p(\tau))^{1/(2-\sigma_1)}\, d\tau, \qquad A = \begin{cases} b, & \int_b^\omega p^{1/(2-\sigma_1)}(\tau)\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \int_b^\omega p^{1/(2-\sigma_1)}(\tau)\, d\tau < +\infty, \end{cases}$$

а якщо $\lim_{t \uparrow \omega} I(t) = Z_0$, то

$$I_0(t) = \int_{A_0}^t \frac{1}{\Phi^{-1}\left(I(\tau)\right)} d\tau, \qquad A_0 = \begin{cases} b, & \int_b^\omega \frac{1}{\Phi^{-1}\left(I(\tau)\right)} d\tau = +\infty, \\ \omega, & \int_b^\omega \frac{1}{\Phi^{-1}\left(I(\tau)\right)} d\tau = \text{const}, \end{cases}$$

$$I_1(t) = -\int_{A_1}^t \frac{I(\tau)}{I_0(\tau)} d\tau, \qquad A_1 = \begin{cases} b, & \int_b^\omega \frac{I(\tau)}{I_0(\tau)} d\tau = \pm\infty, \\ \omega, & \int_b^\omega \frac{I(\tau)}{I_0(\tau)} d\tau = \text{const}, \end{cases}$$

де $b \in [a, \omega[$ вибираємо так, щоб функція $I(t)$ при $t \in [b, \omega[$ належала до області визначення функції Φ^{-1}.

Формулювання основних результатів вимагає наступних означень.

Нехай $Y \in \{0, \infty\}$, Δ_Y − деякий однобічний окіл Y. Неперервно диференційовну функцію $L : \Delta_Y \to]0, +\infty[$ називають *нормалізованою повільно змінною функцією* при $y \to Y$, $y \in \Delta_Y$ (див., наприклад, [3, с. 2-3]), якщо

$$\lim_{y \to Y,\, y \in \Delta_Y} \frac{yL'(y)}{L(y)} = 0. \tag{4}$$

Говорять, що повільно змінна при $y \to Y$, $y \in \Delta_Y$, функція $\theta : \Delta_Y \to$ $\to]0, +\infty[$ *задовольняє умову* S, якщо при $y \to Y$, $y \in \Delta_Y$, для будь-якої нормалізованої повільно змінної функції $L : \Delta_Y \to]0, +\infty[$ виконується співвідношення

$$\theta\left(yL(y)\right) = \theta(y)\left(1 + o(1)\right) \qquad \text{при} \qquad y \to Y, \qquad y \in \Delta_Y.$$

Зауваження 1. З умов (2) на функцію φ_0 випливає, що $Z_0 \in \{0, +\infty\}$ та

$$\lim_{y \to Y_0,\, y \in \Delta_{Y_0}} \Phi_1(y) = Z_0,$$

$$\lim_{y \to Y_0,\, y \in \Delta_{Y_0}} \frac{\Phi''(y)\Phi(y)}{(\Phi'(y))^2} = 1,$$

$$\lim_{y \to Y_0,\, y \in \Delta_{Y_0}} \frac{\Phi_1''(y)\Phi_1(y)}{(\Phi_1'(y))^2} = 1. \tag{5}$$

Сформулюємо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай* $\sigma_1 \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, *функції* θ_1 *та* Φ_1^{-1} *задовольняють умову* S, *існує скінченна границя*

$$\lim_{y \to Y_0,\, y \in \Delta_{Y_0}} \frac{y\left(\dfrac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1(y)}\right)'}{\dfrac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1(y)}} = \gamma \tag{6}$$

та існує скінченна або нескінченна границя

$$\lim_{t \uparrow \omega} \Phi_1^{-1}(I_1(t)) \frac{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}{I_1(t)} \cdot \left(\frac{I_1(t)}{I_1'(t)}\right)'. \tag{7}$$

Тоді для існування $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$ *-розв'язків рівняння* (1) *необхідно, а якщо*

$$(\sigma_1 - 2) y_0^0 I(t) I_1(t) > 0 \qquad \text{при} \qquad t \in [a, \omega[\,, \tag{8}$$

то й достатньо виконання умов

$$y_0^0 \alpha_0 > 0, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \Phi_1^{-1}(I_1(t)) = Y_0, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} I_1(t) = Z_0, \tag{9}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}{I_0(t) I_1'(t)} = -1, \tag{10}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \Phi_1^{-1}(I_1(t)) \frac{\Phi_1'(\Phi^{-1}(I_1(t)))}{I_1(t)} \cdot \left(\frac{I_1(t)}{I_1'(t)}\right)' = -1 - \gamma, \tag{11}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{-1}{I_0(t)} = Y_1 \qquad y_1^0 \cdot I_0(t) < 0 \qquad \text{при} \qquad t \in [b, \omega[\,, \tag{12}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_1(t) I'(t) \left|\theta_1\left(-\dfrac{1}{I_0(t)}\right)\right|^{1/(2-\sigma_1)}}{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I_1(t))) I_1'(t)} = 1. \tag{13}$$

Більш того, у випадку виконання умов (9)–(13) *існує однопараметрична сім'я таких розв'язків, і для кожного такого розв'язку справджуються такі асимптотичні зображення при* $t \uparrow \omega$:

$$\Phi_1(y(t)) = I_1(t)[1 + o(1)], \qquad y'(t)\Phi_1'(y(t)) = I_1'(t)[1 + o(1)]. \tag{14}$$

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай $y : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_0}$ є $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язком рівняння (1). Тоді внаслідок (3) маємо

$$y''(t) = \frac{(y'(t))^2}{y(t)}[1 + o(1)], \qquad t \uparrow \omega. \tag{15}$$

Звідси, з урахуванням (1), отримаємо виконання першої з умов (9), а також співвідношення

$$\frac{|y'(t)|^{2-\sigma_1}}{\varphi_0(y(t))y(t)\theta_1(y'(t))} = \alpha_0 p(t)[1+o(1)], \qquad t \uparrow \omega. \tag{16}$$

Зауважимо, що функція $y'(t(y))$, де $t(y)$ − обернена функція до функції $y(t)$, є правильно змінною порядку 1 при $y \to Y_0$, $y \in \Delta_{Y_0}$. Дійсно, з урахуванням (3) маємо

$$\lim_{y\to Y_0} \frac{y(y'(t(y)))'}{y'(t(y))} = \lim_{y\to Y_0} \frac{yy''(t(y))}{(y'(t(y)))^2} = 1. \tag{17}$$

Таким чином, функція $\theta_1(y'(t(y)))$ є повільно змінною функцією при $y \to Y_0$, $y \in \Delta_{Y_0}$, як композиція правильно та повільно змінних функцій.

З урахуванням першої з умов (3) перепишемо (16) у вигляді

$$\frac{y'(t)\operatorname{sgn} y_1^0}{\left(\varphi_0(y(t))|y(t)|\theta_1(y'(t))\right)^{1/(2-\sigma_1)}} = (p(t))^{1/(2-\sigma_1)}[1+o(1)], \qquad t \uparrow \omega. \tag{18}$$

Звідси маємо

$$\tilde{\Phi}(y(t)) = I(t)[1+o(1)], \qquad t \uparrow \omega, \tag{19}$$

де

$$\tilde{\Phi}(y) = \operatorname{sgn} y_1^0 \cdot \int_B^y \left(\varphi_0(s)|s|\theta_1(y'(t(s)))\right)^{1/(\sigma_1-2)} ds.$$

З (18) і (19) отримуємо

$$\frac{y'(t)\tilde{\Phi}'(y(t))}{\tilde{\Phi}(y(t))} = \frac{I'(t)}{I(t)}[1+o(1)]. \tag{20}$$

Оскільки з умов (2) випливає, що функція $\tilde{\Phi}(y)$ є швидко змінною при $y \to Y_0$, $y \in \Delta_{Y_0}$, а внаслідок монотонності функції $\tilde{\Phi}(y)$ існує функція $\tilde{\Phi}^{-1}(y)$, яка, наразі, є повільно змінною функцією, то з (19) отримаємо

$$y(t) = \tilde{\Phi}^{-1}(I(t))[1+o(1)], \qquad t \uparrow \omega. \tag{21}$$

З огляду на властивості правильно та швидко змінних функцій і враховуючи умови (3), запишемо рівність

$$\lim_{s\to Y_0,\, s\in\Delta_{Y_0}} \frac{\Phi(s)\left|\theta_1(y'(t(s)))\right|^{1/(\sigma_1-2)}}{\tilde{\Phi}(s)} =$$

$$= \lim_{s\to Y_0,\, s\in\Delta_{Y_0}} \left(1 + \frac{\Phi(s)}{s\Phi'(s)} \cdot \frac{y'(t(s))\theta_1'(y'(t(s)))}{(\sigma_1-2)\theta_1(y'(t(s)))} \cdot \frac{s\cdot y''(t(s))}{(y'(t(s)))^2}\right) = 1.$$

Таким чином, перепишемо (19) у вигляді

$$\Phi(y(t)) = I(t)\left|\theta_1(y'(t))\right|^{1/(\sigma_1-2)}[1+o(1)], \qquad t \uparrow \omega. \tag{22}$$

Розглянемо функцію $\theta_1(y'(I^{-1}(z)))$, де $I^{-1}(z)$ − функція, обернена до функції $I(t)$, і доведемо, що $\theta_1(y'(I^{-1}(z)))$ є повільно змінною при $z \to Z_0$.

Дійсно, з урахуванням властивостей повільно змінних функцій, співвідношень (3), зауваження 1 та формули (20) маємо

$$\lim_{z\to Z_0}\frac{z\big(\theta_1\big(y'(I^{-1}(z))\big)\big)'}{\theta_1\big(y'(I^{-1}(z))\big)}=\lim_{z\to Z_0}\left(\frac{z\theta_1'\big(y'(I^{-1}(z))\big)}{\theta_1\big(y'(I^{-1}(z))\big)}\cdot\frac{y''(I^{-1}(z))}{I'(I^{-1}(z))}\right)=$$

$$=\lim_{z\to Z_0}\left(\frac{y'(I^{-1}(z))\cdot\theta_1'\big(y'(I^{-1}(z))\big)}{\theta_1\big(y'(I^{-1}(z))\big)}\cdot\frac{y(I^{-1}(z))\cdot y''(I^{-1}(z))}{\big(y'(I^{-1}(z))\big)^2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\tilde{\Phi}\big(y(I^{-1}(z))\big)}{y(I^{-1}(z))\cdot\tilde{\Phi}'\big(y(I^{-1}(z))\big)}\cdot\frac{z\cdot y'(I^{-1}(z))\cdot\tilde{\Phi}'\big(y(I^{-1}(z))\big)}{I'(I^{-1}(z))\cdot\tilde{\Phi}\big(y(I^{-1}(z))\big)}\right)=0\,.$$

З огляду на це співвідношення і оскільки функція Φ^{-1} задовольняє умову S, з (22) отримуємо

$$y(t)=\Phi^{-1}(I(t))[1+o(1)],\qquad t\uparrow\omega. \tag{23}$$

Звідси з урахуванням (3) маємо

$$\frac{y''(t)}{(y'(t))^2}=\frac{1}{\Phi^{-1}(I(t))}[1+o(1)],\qquad t\uparrow\omega. \tag{24}$$

З (24) випливає, що

$$y'(t)=-\frac{1}{I_0(t)}[1+o(1)],\qquad t\uparrow\omega, \tag{25}$$

звідки отримуємо виконання умови (12).

З (22) та (25) маємо

$$y'(t)\Phi\big(y(t)\big)=-\frac{I(t)}{I_0(t)}[1+o(1)],\qquad t\uparrow\omega. \tag{26}$$

З цього співвідношення отримаємо

$$\Phi_1\big(y(t)\big)=I_1(t)[1+o(1)],\qquad t\uparrow\omega, \tag{27}$$

звідки випливає, що виконується третя з умов (9) і справджується перше з асимптотичних зображень (14).

Крім того, (26) можна переписати у вигляді

$$y'(t)\Phi_1'\big(y(t)\big)=I_1'(t)[1+o(1)],\qquad t\uparrow\omega, \tag{28}$$

тобто справджується друге із зображень (14).

Зауважимо, що з умов (2) і зауваження 1 випливає, що функція Φ_1 є швидко змінною при $y\to Y_0$, $y\in\Delta_{Y_0}$. Тоді функція Φ_1^{-1} є повільно змінною при $z\to Z_0$ як обернена до швидко змінної. З урахуванням цього та формули (27) отримаємо

$$y(t)=\Phi_1^{-1}\big(I(t)\big)[1+o(1)],\qquad t\uparrow\omega, \tag{29}$$

звідки випливає друга з умов (9).

На підставі (25), (28) і (29) запишемо рівність

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\Phi_1'\big(\Phi_1^{-1}(I_1(t))\big)}{I_0(t)I_1'(t)}=-1\,,$$

тобто маємо виконання умови (10).

З (18) маємо

$$\frac{y'(t)\Phi_1'(y(t))}{\theta_1^{1/(2-\sigma_1)}(y'(t))}=I_1'(t)[1+o(1)],\qquad t\uparrow\omega. \tag{30}$$

З (28) та (30) отримаємо

$$\frac{\Phi_1'(y(t))}{\Phi'(y(t))} = \frac{I_1'(t)}{I'(t)\theta_1^{1/(2-\sigma_1)}(y'(t))}[1+o(1)], \qquad t \uparrow \omega. \tag{31}$$

З урахуванням зауваження 1 і формули (31) запишемо таке співвідношення:

$$\frac{\Phi_1(y(t))}{\Phi_1'(y(t))} = \frac{I_1'(t)}{I'(t)\theta_1^{1/(2-\sigma_1)}(y'(t))}[1+o(1)], \qquad t \uparrow \omega. \tag{32}$$

Зауважимо, що

$$\lim_{z\to Z_0} \frac{z\Phi_1''(\Phi_1^{-1}(z))}{(\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(z)))^2} = \lim_{y\to \mathrm{Y}_0,\, y\in\Delta_{\mathrm{Y}_0}} \frac{\Phi_1''(y)\Phi_1(y)}{(\Phi_1'(y))^2} = 1.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{z\to Z_0} \frac{z\left(\dfrac{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(z))}{z}\right)'}{\dfrac{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(z))}{z}} = \lim_{z\to Z_0} \frac{z\Phi_1''(\Phi_1^{-1}(z))}{(\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(z)))^2} - 1 = 0.$$

Отже, функція $\dfrac{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(z))}{z}$ є повільно змінною при прямуванні аргументу до Z_0, а внаслідок (24) справджується рівність

$$\frac{I_1(t)}{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))} = \frac{I_1'(t)}{I'(t)\theta_1^{1/(2-\sigma_1)}\left(\dfrac{1}{-I_0(t)}\right)}[1+o(1)], \qquad t \uparrow \omega, \tag{33}$$

тобто виконується умова (13) теореми.

Доведемо, що виконується умова (11).

З (27), (28) та (29) випливає, що

$$\frac{y(t)I_1'(t)}{I_1(t)} = \Phi_1^{-1}(I_1(t)) \cdot \frac{y'(t)\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}{I_1(t)}[1+o(1)], \qquad t \uparrow \omega. \tag{34}$$

Згідно з умовою (7) теореми існує скінченна або нескінченна границя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \Phi_1^{-1}(I_1(t)) \cdot \frac{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}{I_1(t)} \cdot \left(\frac{I_1(t)}{I_1'(t)}\right)'.$$

Перепишемо (34) у вигляді

$$\frac{y(t)}{y'(t)} \cdot \frac{\left(\dfrac{I_1(t)}{I_1'(t)}\right)'}{\dfrac{I_1(t)}{I_1'(t)}} = \Phi_1^{-1}(I_1(t)) \cdot \frac{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}{I_1(t)} \cdot \left(\frac{I_1(t)}{I_1'(t)}\right)'[1+o(1)], \qquad t \uparrow \omega.$$

Отже, існує наступна границя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y(t)}{y'(t)} \cdot \frac{\left(\dfrac{I_1(t)}{I_1'(t)}\right)'}{\dfrac{I_1(t)}{I_1'(t)}}.$$

Оскільки з умови (6) теореми випливає, що функція $\dfrac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1(y)}$ є правильно змінною порядку γ при $y \to \mathrm{Y}_0$, $y \in \Delta_{\mathrm{Y}_0}$, а функція $y'(t(y))$, де $t(y)$ –

обернена функція до $y(t)$, є правильно змінною порядку 1 при $y \to Y_0$, $y \in \Delta_{Y_0}$, то з (30) маємо, що функція $\dfrac{I_1'(t(y))}{I_1(t(y))}$ є правильно змінною порядку $1+\gamma$ при $y \to Y_0$, $y \in \Delta_{Y_0}$. Тому, з огляду на існування границі, маємо

$$\lim_{y \to Y_0,\, y \in \Delta_{Y_0}} \frac{y}{y'(t(y))} \cdot \frac{\left(\dfrac{I_1(t(y))}{I_1'(t(y))}\right)'}{\dfrac{I_1(t(y))}{I_1'(t(y))}} = -1-\gamma\,,$$

звідки, з урахуванням (34), випливає (11).

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай разом з умовами (9)–(13) виконуються умови (6)–(8) теореми.

До рівняння (1) застосуємо перетворення

$$\Phi_1(y(t)) = I_1(t)[1+v_1],$$

$$\frac{y'(t)\Phi_1'(y(t))}{\Phi_1(y(t))} = \frac{I_1'(t)}{I_1(t)}[1+v_2], \tag{35}$$

де

$$x = \beta \ln|I_1(t)|, \qquad \beta = \begin{cases} 1, & \lim\limits_{t\uparrow\omega} I_1(t) = \infty, \\ -1, & \lim\limits_{t\uparrow\omega} I_1(t) = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Зведемо систему (35) до системи диференціальних рівнянь

$$v_1' = \beta[v_2 + v_1 v_2],$$

$$v_2' = \beta G(t(x))\cdot[1+v_2]\Big([1+v_2]^{\sigma_1-1}\cdot[1+v_1]^{\sigma_1-2} N(x,v_1)F_0(x,v_1,v_2) +$$

$$+ [1+v_2]N(x,v_1)F_1(x,v_1) + Q(t(x))\Big), \tag{37}$$

в якій

$$F_0(x,v_1,v_2) = N_1(x,v_1,v_2)\cdot\left(\frac{\Phi_1'\left(\Phi_1^{-1}\left(I_1(t(x))\right)\right)\cdot I_1'(t(x))}{I_1(t(x))I_1'(t(x))\theta_1^{1/(2-\sigma_1)}\left(\dfrac{1}{-I_0(t)}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\Phi_1''(Y(t(x),v_1))\Phi_1(Y(t(x),v_1))}{(\Phi_1'(Y(t(x),v_1)))^2}\cdot\frac{\psi\left(\Phi_1^{-1}\left(Y(t(x),v_1)\right)\right)}{\psi\left(\Phi_1^{-1}\left(I_1(t(x))\right)\right)}\right)^{\sigma_1-2},$$

$$F_1(x,v_1) = \frac{\Phi_1^{-1}(Y(t(x),v_1))\psi'(Y(t(x),v_1))}{\psi\left(\Phi_1^{-1}(Y(t(x),v_1))\right)},$$

$$Q(t) = \Phi_1^{-1}(I_1(t))\cdot\psi\left(\Phi_1^{-1}(I_1(t))\right)\cdot\left(\frac{I_1(t)}{I_1'(t)}\right)',$$

$$N(x,v_1) = \frac{Y(t(x),v_1)\psi(Y(t(x),v_1))}{\Phi_1^{-1}(I_1(t(x)))\psi(\Phi_1^{-1}(I_1(t(x))))},$$

$$Y(t,v_1) = \Phi_1^{-1}\left(I_1(t)\cdot(1+v_1)\right),$$

$$\psi(y)=\frac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1(y)},\qquad G(t)=\frac{1}{\Phi_1^{-1}(I_1(t))\psi(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))},$$

$$N_1(x,v_1,v_2)=\frac{\theta_1\left(\dfrac{I_1'(t(x))[1+v_1]}{\Phi_1'(Y(t(x),v_1))}[1+v_2]\right)}{\theta_1\left(-\dfrac{1}{I_0(t(x))}\right)}.$$

Оскільки функція Φ_1 є швидко змінною при прямуванні аргументу до Y_0, то

$$\lim_{t\uparrow\omega}G(t)=0. \tag{38}$$

У той же час, оскільки $\Phi_1^{-1}(z)$ − повільно змінна функція при $z\to Z_0$, а функція $\psi(\Phi_1^{-1}(z))$ є повільно змінною функцією при $z\to Z_0$ як композиція правильно та повільно змінних функцій при $z\to Z_0$, то й функція $\Phi_1^{-1}(z)\cdot\psi(\Phi_1^{-1}(z))$ є повільно змінною при $z\to Z_0$ як добуток повільно змінних функцій. Отже, з урахуванням властивостей повільно змінних функцій і другої з умов (9), маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}Y(t,v_1)=Y_0 \quad \text{рівномірно за} \quad v_1:|v_1|<\frac{1}{2}, \tag{39}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}N(t,v_1)=1 \quad \text{рівномірно за} \quad v_1:|v_1|<\frac{1}{2}, \tag{40}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\psi\left(\Phi_1^{-1}(Y(t,v_1))\right)}{\psi\left(\Phi_1^{-1}(I_1(t))\right)}=1 \quad \text{рівномірно за} \quad v_1:|v_1|<\frac{1}{2}. \tag{41}$$

Виберемо $t_0\in[a,\omega[$ так, щоб $Y(t,v_1)$ належала області визначення функції Φ_1^{-1} при $t\in[t_0,\omega[$, $|v_1|<\frac{1}{2}$.

З умови (13) теореми випливає, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\Phi_1'\left(\Phi_1^{-1}(I_1(t))\right)\cdot I_1'(t)}{I_1(t)I_1'(t)\theta_1^{1/(2-\sigma_1)}\left(\dfrac{1}{-I_0(t)}\right)}=1. \tag{42}$$

Оскільки виконується умова (10), а функція θ_1 є повільно змінною, то

$$\lim_{t\uparrow\omega}N_1(t,v_1,v_2)=1 \quad \text{рівномірно за} \quad (v_1,v_2):|v_1|<\frac{1}{2},|v_2|<\frac{1}{2}. \tag{43}$$

Відповідно до зауваження 1, враховуючи (39), отримуємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\Phi_1''(Y(t,v_1))\Phi_1(Y(t,v_1))}{(\Phi_1'(Y(t,v_1)))^2}=1 \quad \text{рівномірно за} \quad v_1:|v_1|<\frac{1}{2}. \tag{44}$$

З урахуванням умови (7) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}F_1(t,v_1)=\gamma \quad \text{рівномірно за} \quad v_1:|v_1|<\frac{1}{2}. \tag{45}$$

З умови (11) теореми

$$\lim_{t\uparrow\omega}Q(t)=-1-\gamma. \tag{46}$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (37) на множині

$$\Omega = [x_0, +\infty[\times D,$$

$$x_0 = \beta \ln|\pi_\omega(t_0)|, \qquad D = \left\{ (v_1, v_2) : |v_1| < \frac{1}{2}, |v_2| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Перепишемо систему (37) у вигляді

$$\begin{aligned} v_1' &= \beta[v_2 + v_1 v_2], \\ v_2' &= \beta G(t(x))[A_{21} v_1 + A_{22} v_2 + R_1(x, v_1, v_2) + R_2(x, v_1, v_2)], \end{aligned} \tag{47}$$

де

$$A_{21} = \sigma_1 - 2, \qquad A_{22} = \sigma_1 - 1 + \gamma,$$

$$\begin{aligned} R_1(x, v_1, v_2) = {} & \left(F_0(x, v_1, v_2) \cdot N(x, v_1) - 1\right) \cdot \left(\sigma_1 v_2 + (\sigma_1 - 1) v_1\right) + \\ & + 2N(x, v_1) \cdot \left(F_1(x, v_1) - \gamma\right) + \left(Q(t(x)) + 1 + \gamma\right) v_2 + Q(t(x)) + \\ & + N(x, v_1) \cdot \left(F_0(x, v_1, v_2) + F_1(x, v_1)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2(x, v_1, v_2) = {} & F_0(x, v_1, v_2) \cdot N(x, v_1) \times \\ & \times \Big((1 + v_2)^{\sigma_1 - 2} - 1 - (\sigma_1 - 2) v_1 + \sigma_1(\sigma_1 - 2) v_1 v_2 + \\ & + \sigma_1 v_2 \cdot \left((1 + v_1)^{\sigma_1 - 2} - 1 - (\sigma_1 - 2) v_1\right) + \\ & + \left((1 + v_2)^{\sigma_1} - 1 - \sigma_1 v_1\right) \cdot (1 + v_1)^{\sigma_1 - 2} \Big) + F_1(x, v_1) \cdot N(x, v_1) \cdot v_2^2. \end{aligned}$$

З (38)–(46) маємо

$$\lim_{|v_1| + |v_2| \to 0} \frac{R_2(x, v_1, v_2)}{|v_1| + |v_2|} = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad x \in [x_0, +\infty[, \tag{48}$$

$$\lim_{x \to +\infty} R_1(x, v_1, v_2) = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad v_1, v_2 : (v_1, v_2) \in D. \tag{49}$$

Застосувавши до системи (47) перетворення

$$\begin{aligned} z_1 &= w_1, \\ z_2 &= \sqrt{|G(t(x))|}\, w_2, \end{aligned} \tag{50}$$

з урахуванням (8) отримуємо систему

$$\begin{aligned} w_1' &= \beta \sqrt{|G(t(x))|} \cdot [w_2 + V_1(x, w_1, w_2)], \\ w_2' &= \beta \sqrt{|G(t(x))|} \cdot [C_{21} w_1 + V_2(x, w_1, w_2) + V_3(x, w_1, w_2)], \end{aligned} \tag{51}$$

де

$$C_{21} = A_{21} \operatorname{sgn} G(t(x)), \qquad V_1(x, w_1, w_2) = w_1 w_2,$$

$$\begin{aligned} V_2(x, w_1, w_2) = {} & \sqrt{|G(t(x))|} \cdot \operatorname{sgn} G(t(x)) \cdot \left(A_{22}(x) - \tilde{N}(x)\right) w_2 + \\ & + R_1\left(x, w_1, \sqrt{|G(t(x))|} \cdot w_2\right), \end{aligned}$$

$$V_3(x, w_1, w_2) = R_1\left(x, w_1, \sqrt{|G(t(x))|} \cdot w_2\right) \cdot \operatorname{sgn} G(t(x)),$$

де

$$\tilde{N}(x) = \frac{\operatorname{sgn} G(t(x)) G'(t(x)) I_1(t)}{2G^2(t(x))}.$$

Зауважимо, що

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{N}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sgn} G(t(x)) G'(t(x)) I_1(t)}{2G^2(t(x))} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\operatorname{sgn} G(t(x))\big(F_1(x, v_1) + 1\big)}{2} = \frac{-\operatorname{sgn} G(t(x))(\gamma+1)}{2}.$$

Характеристичне рівняння матриці

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta \operatorname{sgn} G(t(x))(\sigma_1 - 2) & 0 \end{pmatrix} \tag{52}$$

має вигляд

$$\mu^2 - \operatorname{sgn} G(t(x))(\sigma_1 - 2) = 0. \tag{53}$$

Внаслідок (8) це рівняння не має коренів з нульовою дійсною частиною. Розглянемо $\int_d^\infty G(t(x))\,dx$. З урахуванням вигляду $G(x)$ маємо

$$\int_d^\infty G(t(x))\,dx = \int_d^\infty \frac{I_1(t(x))}{\Phi_1^{-1}\big(I_1(t(x))\big)\Phi_1'\big(\Phi_1^{-1}\big(I_1(t(x))\big)\big)}\,dx =$$

$$= \int_{d_1}^\infty \frac{I_1'(t)}{\Phi_1^{-1}\big(I_1(t)\big)\Phi_1'\big(\Phi_1^{-1}\big(I_1(t)\big)\big)}\,dt =$$

$$= \ln\left|\Phi_1^{-1}\big(I_1(t)\big)\right|\Big|_{d_1}^{\omega} \to \infty \qquad \text{при} \qquad t \uparrow \omega.$$

Оскільки в околі нескінченності справджується нерівність

$$\int_d^\infty \sqrt{|G(t(x))|}\,dx \ge \operatorname{sgn} G(t(x)) \int_d^\infty G(t(x))\,dx,$$

то $\int_d^\infty \sqrt{|G(t(x))|}\,dx \to \infty$.

Отримуємо, що для системи диференціальних рівнянь (51) виконано всі умови теореми 2.2 з [1]. Відповідно до цієї теореми система (51) має однопараметричну сім'ю розв'язків $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty[\to \mathbb{R}^2$, $x_1 \ge x_0$, які прямують до нуля при $x \to +\infty$ Цим розв'язкам внаслідок замін (35), (36) відповідають розв'язки рівняння (1), що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (14). З огляду на ці зображення та умову (8) робимо висновок, що отримані розв'язки є $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язками. Теорему повністю доведено.♦

1. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 52–80.
   То же: *Evtukhov V. M., Samoilenko A. M.* Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, No. 1. – P. 56–86. – https://doi.org/10.1007/s11253-010-0333-7.
2. *Евтухов В. М. Черникова А. Г.* Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 10. – С. 1345–1363.
   То же: *Evtukhov V. M., Chernikova A. G.* Asymptotic behavior of the solutions of ordinary second-order differential equations with rapidly varying nonlinearities // Ukr. Math. J. – 2018. – **69**, No. 10. – P. 1561–1582. – https://doi.org/10.1007/s11253-018-1455-6.

3. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.
   То же: *Seneta E.* Regularly varying functions // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer-Verlag, 1976. – **508**. – viii+116 p.
4. *Черникова А. Г.* Асимптотика быстро изменяющихся решений дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью // Дослідження в математиці і механіці. – 2015. – **20**, вип. 2(26). – С. 52–68.
5. *Jaroš J., Kusano T., Tanigawa T.* Asymptotic analysis of positive solutions of a class of third order nonlinear differential equations in the framework of regular variation // Math. Nachr. – 2013. – **286**, No. 2-3. – P. 205–223.
   – https://doi.org/10.1002/mana.201100296.
6. *Kamo K., Usami H.* Characterization of slowly decaying positive solutions of second-order quasilinear ordinary differential equations with subhomogeneity // Bull. Lond. Math. Soc. – 2010. – **42**, No. 3. – P. 420–428.
   – https://doi.org/10.1112/blms/bdq004.
7. *Marić V.* Regular variation and differential equations // Lect. Notes Math. – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. – **1726**. – 128 p.
8. *Řehák P.* Asymptotic formulae for solutions of half-linear differential equations // Appl. Math. Comput. – 2017. – **292**. – P. 165–177.
   – https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.07.020.
9. *Řehák P.* Methods in half-linear asymptotic theory // Electron. J. Differ. Equat. – 2016. – **2016**. – No. 267. – P. 1–27.
   – https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2016/267/rehak.pdf.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БЫСТРО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БЫСТРО И ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Получены необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ *-решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка с быстро и правильно меняющимися нелинейностями, что является естественным обобщением предыдущих исследований В. М. Евтухова и его школы. Установлены асимптотические представления таких решений и их производных первого порядка.*

***Ключевые слова**: дифференциальные уравнения второго порядка, правильно меняющиеся нелинейности, быстро меняющиеся нелинейности,* $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ *-решения, асимптотические представления* $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$ *-решений.*

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF RAPIDLY VARYING SOLUTIONS OF THE SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RAPIDLY AND REGULARLY VARYING NONLINEARITIES

The necessary and sufficient conditions for existence of $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ *-solutions for one class of the second-order differential equations with rapidly and regularly varying nonlinearities are obtained. It is a natural generalization of previous studies of V. M. Evtukhov and his school. The asymptotic representations of such solutions and their first-order derivatives are established.*

***Key words:** the second order differential equations, regularly varying nonlinearities, rapidly varying nonlinearities,* $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ *-solutions, asymptotic representations of* $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$ *-solutions.*

Одеськ. нац. ун-т ім. І. Мечникова, Одеса

Одержано
11.01.18