



ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ  
**НАЦІОНАЛЬНИЙ  
ПЕДАГОГІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ**

ІМЕНІ К. Д. УШИНСЬКОГО

ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД «ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
імені К. Д. УШИНСЬКОГО»

Кафедра прикладної математики та інформатики

**Наталія ШКАТУЛЯК**  
**Людмила КОБЯКОВА**

**ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ І МОДЕЛЮВАННЯ В РІЗНИХ  
ГАЛУЗЯХ НАУКИ**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

**до дисципліни «Системний підхід та моделювання в наукових  
дослідженнях»**

для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти  
спеціальності А4.09 Середня освіта (Інформатика)

**ОДЕСА 2026**

<https://doi.org/10.24195/FractalAnalysis2026>

УДК 004.94:519.876.5:372.851

Рекомендовано до друку вченою радою Державного закладу  
«Південноукраїнський національний педагогічний університет імені  
К. Д. Ушинського» протокол № 11 від « 26 » березня 2026 року

## РЕЦЕНЗЕНТИ:

**Малаксиано М.О.** - доктор технічних наук, професор, професор кафедри прикладної математики та інформатики Університету Ушинського

**Гоцульський В.Я.** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри фізики та астрономії Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Шкатуляк Н. М., Кобякова Л. М. Фрактальний аналіз і моделювання в різних галузях науки: навчальний посібник до дисципліни «Системний підхід та моделювання в наукових дослідженнях». Одеса: Університет Ушинського, 2026. 90 с.

Розділ варіативного кластеру фундаментальної підготовки магістрів «Фрактальний аналіз і моделювання в різних галузях науки» употужнює теоретичну обізнаність майбутніх викладачів, репрезентуючи феноменологію фрактального аналізу у сучасному міждисциплінарному вимірі. Матеріал навчального посібника висвітлює сучасні координати прикладного застосування інструментів фрактального аналізу в фізико-математичних (фізика твердого тіла, матеріалознавство), соціо-економічних галузях знань, інженерії та технічної естетики (дизайну).

У межах освітнього компонента «Системний підхід та моделювання в наукових дослідженнях» теоретичні та емпіричні репрезентації механізмів фрактального аналізу та моделювання сприяють розвитку дослідницького світогляду здобувачів освіти, розширюють палітру трансдисциплінарного осмислення ними багатопанорамності методів моделювання, синтетики STEM-парадигми. Авторки систематизували багаторічний досвід викладання дисциплін природничо-математичного циклу, доповнили всі розділи видання графічними та ілюстративними матеріалами, що оптимізують засвоєння здобувачами освіти теоретичних й емпіричних аспектів методології моделювання у наукових дослідженнях, алгоритмів фрактальної аналітики,

Матеріал навчального посібника буде корисним для поглиблення теоретичних знань здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальностей А4.08 Середня освіта (Фізика), А4.04 Середня освіта (Математика).

Використання генеративних інструментів штучного інтелекту (ШІ) при доборі матеріалу для навчального посібника передбачало конструювання графіки та візуалізацій, пошуку спеціальної англійської літератури, складання табличного і формульного матеріалу.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1. СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ.....	8
2. ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ.....	10
2.1. Основні характеристики фрактальних об'єктів.....	14
2.2. Питання для самоперевірки.....	23
3. ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ В МЕДИЦИНІ.....	24
Питання для самоперевірки.....	28
4. ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ.....	28
4.1 Теорія фрактального ринку (FMT). Фрактальний аналіз.....	29
4.2. R/S-аналіз та коефіцієнт херста.....	30
4.3. Застосування теорії до ринків.....	32
4.4. Фрактальний r/s-аналіз: метод нормованого розмаху Херста.....	34
4.5. Алгоритм послідовного r/s-аналізу часових рядів.....	42
4.6. Визначення показника герста за допомогою фрактальної розмірності, обчисленої клітинковим методом на прикладі коротких часових рядів.....	43
Питання для самоперевірки.....	46
5. ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ У ФІЗИЦІ ТВЕРДОГО ТІЛА.....	47
Питання для самоперевірки.....	50
6. ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ У БУДІВНИЦТВІ.....	51
Питання для самоперевірки.....	53
7. ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ У ДИЗАЙНІ.....	54
Питання для самоперевірки.....	61
7. ПРАКТИЧНІ РОБОТИ «ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ І МОДЕЛЮВАННЯ В РІЗНИХ ГАЛУЗЯХ НАУКИ».....	61
7.1. ПРАКТИЧНА РОБОТА 1. ФРАКТАЛЬНИЙ R/S-АНАЛІЗ.....	61
7.2. ПРАКТИЧНА РОБОТА 2. ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ В МЕДИЦИНІ ...	64

7.3. ПРАКТИЧНА РОБОТА 3. ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ У ФІЗИЦІ. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ ДО ОЦІНКИ СТРУКТУРИ ТА ВЛАСТИВОСТЕЙ МЕТАЛІВ.....	66
Питання для самоперевірки.....	75
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	77

## ВСТУП

Підготовка магістрів у STEM-галузях із акцентом на моделювання спрямована на формування дослідницьких компетентностей, які дозволяють майбутнім фахівцям працювати з хаотичними, складними та міждисциплінарними системами. Основними напрямками підготовки є опанування математичних і комп'ютерних методів моделювання, включно з фрактальним та мультифрактальним аналізом, системною динамікою та машинним навчанням; розвиток навичок постановки наукових проблем, формулювання гіпотез і перевірки їх за допомогою симуляцій та експериментів; інтеграція знань із фізики, математики, інформатики, біології та інженерії для роботи над комплексними завданнями; практична орієнтація через участь у прикладних проєктах, що охоплюють біомедицину, промисловість, екологію та інформаційні технології. Така підготовка має очевидні переваги: міждисциплінарність, дослідницьку автономність, практичну цінність і відповідність міжнародним стандартам STEM-освіти, що відкриває можливості для глобальної інтеграції. Водночас вона стикається з викликами — високими вимогами до математичної підготовки, потребою у сучасних обчислювальних ресурсах та складністю адаптації результатів моделювання для прикладних користувачів. У висновку можна сказати, що підготовка магістрів у STEM із моделюванням формує нове покоління дослідників, здатних інтегрувати знання з різних галузей, застосовувати їх у практиці та забезпечувати розвиток інноваційних технологій, але потребує глибокого розуміння й ресурсної підтримки для ефективного впровадження.

Фрактальний аналіз у підготовці майбутніх фахівців магістерського рівня вищої освіти розкривається переважно в природничих і технічних спеціальностях – фізика, математика, комп'ютерні науки, інформатика. Він інтегрується у курси з комп'ютерного моделювання, аналізу даних, теорії сигналів та прикладної математики.

Звернення до інноваційних дослідницьких методів на кшталт фрактального аналізу має на меті озброєння студентів інструментами для роботи з хаотичними та самоподібними системами, набуття ними практичних навичок застосування фрактальних моделей для практичних завдань у науці, техніці та економіці.

Таким чином, фрактальний аналіз у вищій освіті є міждисциплінарним навчальним блоком, який поєднує математику, фізику, інформатику та прикладні галузі, формуючи у студентів навички сучасного моделювання складних процесів.

Фрактальний аналіз і моделювання ґрунтуються на ідеї самоподібності та здатності складних систем повторювати свої структури на різних масштабах. Це дозволяє описувати нерегулярні, хаотичні процеси, які не піддаються класичним лінійним моделям. Основна сутність методу полягає в тому, що він не спрощує складні форми до геометричних моделей, а навпаки — дає змогу працювати з їхньою природною нерегулярністю. Перевагою фрактального підходу є його універсальність: він застосовується у фізиці для моделювання матеріалів і процесів, у біології та медицині для аналізу клітинних структур і судинних систем, в економіці для прогнозування ринкових коливань, у географії та екології для опису берегових ліній і природних форм, а також у комп'ютерних науках для візуалізації та стиснення даних. Він забезпечує точність опису складних систем, має потужний прогностичний потенціал і створює міждисциплінарні зв'язки між математикою, фізикою, інформатикою, економікою та біологією. Водночас недоліками є складність математичного апарату, високі обчислювальні витрати, труднощі інтерпретації результатів для практичних користувачів і відсутність універсальної стандартизації методів. Таким чином, фрактальний аналіз виступає міждисциплінарним інструментом, що дозволяє моделювати хаос і самоподібність, але потребує значних ресурсів і спеціальної підготовки для ефективного використання.

У посібнику висвітлено актуальність впровадження фрактальної аналітики, фрактальної геометрії в освітній процес як ефективного інструменту для вдосконалення навчання природничо-математичних дисциплін.

Матеріал навчального посібника розкриває особливості підходу до розв'язання практичних задач пов'язаних з фрактальним аналізом, які можуть бути представлені як STEAM- проєкт, а також виявлення потреби в розробці нових підходів до інтеграції фрактальної геометрії в навчальний процес. У роботі розглянуто сучасні методичні напрацювання, зокрема для фрактального аналізу у різних галузях науки, які спрямовані на ознайомлення здобувачів освіти з основами фрактального аналізу та розширення їхніх професійних компетенцій.

Результати досліджень свідчать, що фрактали, завдяки своїй візуальній привабливості та доступності для вивчення, стимулюють інтерес здобувачів освіти до навчання, сприяють розвитку творчого мислення та інтуїтивного розуміння складних математичних понять, таких як самоподібність, границі та розмірність. Міждисциплінарний підхід до вивчення фракталів дозволяє інтегрувати знання з математики, фізики, біології, інформатики та комп'ютерної графіки, що сприяє формуванню системного мислення та розуміння взаємозв'язків між різними галузями науки [1].

Однак виявлено низку проблем [1], які гальмують широке впровадження фрактальної геометрії в освіту. Серед них – недостатня кількість адаптованих навчальних матеріалів для різних рівнів освіти, відсутність уніфікованих методик викладання, а також технічні обмеження, зокрема доступ до спеціального програмного забезпечення для моделювання фракталів. Незважаючи на це, фрактальна геометрія має значний потенціал для вдосконалення освітнього процесу. Вона не лише полегшує засвоєння складних математичних концепцій, але й відкриває нові можливості для використання цифрових технологій у навчанні.

Фрактали знаходять все більше і більше застосування в освіті та науці. Основна причина цього полягає в тому, що вони описують реальний мир іноді

навіть краще, ніж традиційна фізика або математика. Фрактали використовуються при аналізі і класифікації сигналів складної форми, що виникають у різних галузях, наприклад при аналізі коливань курсу валют, цін на цінні папери в економіці [2].

Практичне застосування фракталів [3]:

- комп'ютерна графіка та візуалізація: фрактали можуть бути використані для створення складних та реалістичних зображень. Особливі властивості фракталів дозволяють створювати природноподібні пейзажі, хаотичні структури та абстрактні образи;
- медичне зображення та діагностика: фрактальний аналіз може допомогти виявляти складні структури в медичних зображеннях, таких як судини або нейронні мережі. Це допомагає лікарям у ранньому виявленні захворювань та плануванні лікування;
- фінанси та економіка: фрактали застосовуються для аналізу фінансових ринків. Наприклад, рух цін на ринках може бути описаний фрактальними моделями, що допомагають передбачати тренди та ризики;
- телекомунікації: фрактальні антени можуть забезпечувати кращу широкосмугову передачу сигналу, оскільки вони мають самоподібні властивості;
- геологія та геофізика: фрактальні моделі використовуються для аналізу геологічних структур, таких як рельєф та пластичні рухи земної кори.

## СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Розділ «Фрактальний аналіз і моделювання в різних галузях науки» є складовою змістового модуля 1 робочої програми для здобувачів другого (магістерського) рівнів вищої освіти ОПП Середня освіта (Інформатика) спеціальності А4.09 Середня освіта (Інформатика). Вона може бути корисною і для здобувачів першого (бакалаврського) і другого (магістерського) рівнів вищої освіти спеціальностей А4.08 Середня освіта (Фізика) та А4.04 (Математика).

### Змістовий модуль 1. Основи системного підходу.

#### Тема 3. Принципи, основні етапи та методи системного аналізу.

Принципи системного аналізу. Етапи системного аналізу. Методи системного аналізу.

**Тема 4. Модель системи та методи моделювання.** Наукове пізнання і моделювання. Модель як метод описування системи. Класифікація моделей. Моделі складу та структури системи. Методи моделювання систем.

**Таблиця 1. Структура навчальної дисципліни**

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин											
	денна форма						Заочна форма					
	усьог о	у тому числі					усьог о	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	с.р.		л	п	лаб	інд	с.р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Змістовий модуль 1. Основи системного підходу</b>												
Тема 1 Методологічні засади системного підходу та системного аналізу	8	1	2			5		1	1			8

Тема 2. Категоріальний апарат науки та системного аналізу	8	1	2			5						8
Тема 3. Принципи, основні етапи та методи системного аналізу	9	1	2			6		1	1			8
Тема 4. Модель системи та методи моделювання	9	1	2			6						8

На практичних заняттях вирішуються завдання на тему: «Фрактальний аналіз і моделювання в різних галузях науки», яка входить до Теми 4. Модель системи та методи моделювання робочої програми.

## I. ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Теорія фракталів є одним із сучасних методів опису складних систем із самоподібною структурою. Фракталами називають об'єкти, які характеризуються повторюваністю структури на різних масштабах, що означає їхню самоподібність. Термін «фрактал» був введений Бенуа Мандельбротом у 1975 році, який використав його для опису нерегулярних, але впорядкованих структур, таких як берегові лінії, хмари або криві, що демонструють самоподібність [4].

Для фрактальних множин характерні такі особливості:

Самоподібність – структура об'єкта є подібною до самої себе при збільшенні масштабу.

Фрактальна розмірність – кількісна характеристика, яка визначає складність об'єкта, зокрема його масштабну інваріантність і нерівномірність.

Фрактальна розмірність є ключовим поняттям теорії фракталів і визначає, наскільки об'єкт заповнює простір. Це значення може бути дробовим і залежить від рівня складності структури. Розглянемо найпоширеніші методи обчислення фрактальної розмірності.

Фрактальний аналіз при вивченні теми «Сучасні інформаційні технології у наукових дослідженнях» описується в так званих технологіях м'яких обчислень (Soft Computing).

Термін «*м'які обчислення*» був введений у 1994 році професором Каліфорнійського університету Берклі Лотфі Заде. Він є також автором терміну «нечітка логіка». Основи нечіткої логіки були закладені наприкінці 60-х років у наукових працях Лотфі Заде [5]. Запропонована «нечітка логіка» була спробою пов'язати математику з інтуїтивним способом комунікації, до якого люди звертаються, керуються у спілкуванні та взаємодіють зі світом [6].

Засновник технології *м'яких обчислень* (Soft Computing (SC)) так визначав їх сутність: «Зміст м'яких обчислень полягає в тому, що на відміну від традиційних, так званих жорстких обчислень, вони націлені на пристосування

до всеосяжної неточності реального світу. Керівним принципом м'яких обчислень є: “терпимість до неточності, невизначеності та часткової істинності для досягнення зручності маніпулювання, робастності, зниження собівартості рішень і кращого узгодження з реальністю” [6].

Вихідною моделлю для м'яких обчислень служить людське мислення.” [6].

Нечітка логіка (англ. *fuzzy logic*) — розділ математики, який є узагальненням класичної логіки і теорії множин. Лотфі Заде в 1965 році ввів цей розділ, як розділ, що вивчає об'єкти з функцією належності елемента до множини, який приймає значення у інтервалі  $[0, 1]$ , а не тільки 0 або 1. На основі цього поняття вводяться логічні операції над нечіткими множинами, і формулюються поняття лінгвістичної змінної, якою виступають нечіткі множини [7].

Соціальне замовлення на дослідження подібного роду було викликано зростаючим незадоволенням експертними системами. Хвалений «штучний інтелект», що легко справлявся із задачами керування складними технічними комплексами, був безпорадним при найпростіших висловленнях повсякденного життя, типу «Якщо машиною перед тобою керує недосвідчений водій — тримайся від неї подалі». Для створення дійсно інтелектуальних систем, здатних адекватно взаємодіяти з людиною, необхідний був новий математичний апарат, що переводить невиразні і неоднозначні життєві твердження в мову чітких і формальних математичних формул.

Першим серйозним кроком у цьому напрямку і стала теорія нечітких множин, розроблена Л. Заде. Його робота заклала основи моделювання інтелектуальної діяльності людини і стала початковим поштовхом до розвитку нової математичної теорії. Він же дав і назву для нової області науки -«fuzzy logic»(fuzzy — нечіткий, розмитий, м'який).

У США розвиток нечіткої логіки йде по шляху створення систем, що потрібні великому бізнесу і військовим. Нечітка логіка застосовується при аналізі нових ринків, біржовій грі, оцінці політичних рейтингів, виборі оптимальної цінової стратегії, оцінці рівня зрілості процесів захисту інформації

і т. ін. [8-11]. З'явилися і комерційні системи масового застосування. У останні роки значення нечіткої логіки стрімко виросло у світі високих технологій. В Інтернеті можна знайти таке визначення м'яких обчислень.

М'які обчислення (Soft Computing) — це підхід у комп'ютерних науках, який використовує методи, схожі на людське мислення, для розв'язання складних задач, де точні алгоритми неефективні, пристосовуючись до нечіткості, невизначеності та часткової істини реального світу, на відміну від "жорстких обчислень", що вимагають точності. До основних складових м'яких обчислень належать нечітка логіка, нейронні мережі та еволюційні (генетичні) алгоритми, які допомагають знаходити задовільні, а не ідеальні розв'язки, що є зручними та робастними.

Основні принципи та компоненти [8-11]:

- Нечітка логіка (Fuzzy Logic): Працює з поняттями «частково істинно» або «частково хибно» (наприклад, "тепло", "холодно"), а не лише з «істинно» чи «хибно».
- Нейронні мережі: Натхненні структурою людського мозку, вони навчаються на даних і розпізнають патерни.
- Еволюційні алгоритми (наприклад, генетичні): Використовують принципи природного відбору (схрещування, мутації, селекція) для пошуку оптимальних рішень серед великої кількості варіантів.

Ключова ідея:

- Замість пошуку єдиного точного розв'язку, м'які обчислення прагнуть до «робастності», «низької вартості» та «кращої відповідності реальності», дозволяючи певну похибку чи невизначеність для досягнення прагматичних результатів.

Де застосовується:

- Розпізнавання образів та мови
- Системи прийняття рішень
- Робототехніка
- Інтелектуальні системи

- Аналіз великих даних (Data Mining).

Фрактальний аналіз — це метод дослідження складних, самоподібних структур (фракталів) та процесів, що мають масштабну інваріантність, шляхом визначення їхньої фрактальної розмірності.

Фрактальний аналіз використовується для кількісної оцінки складності об'єктів у медицині, фінансах, фізиці, дозволяючи аналізувати складні зображення, біологічні тканини та ринкові коливання.

Вперше уявлення, придатні для опису складних структур, запроваджено Мандельбротом [4].

Мандельброт звернув увагу на те, що контури, поверхні та обсяги навколишніх предметів не такі рівні, гладкі і досконалі, як здається на перший погляд. Насправді вони нерівні, шорсткі, мають безліч отворів різноманітної форми, пронизані тріщинами та порами, покриті сіткою зморшок, подряпин. За Мандельбротом фрактальним називається об'єкт, що складається з частин, які у певному сенсі подібні до цілого. Слово «фрактал» (від латинського "фрактус" - дробовий, нецілий) він ввів вперше у своїх наукових роботах. За Мандельбротом фрактал визначається як самоподібна (в сенсі зміни масштабу) множина, розмірність  $D$  якої відрізняється від розмірності топологічного простору  $d$  [4]. На практиці вперше з поняттям фракталу зіткнулися під час вимірювання довжини берегової лінії [4]. Хоча інтуїтивно, здавалося б, ясно, що її довжина  $L$  не повинна залежати від масштабу виміру  $\ell$ , коли  $\ell \rightarrow 0$ , проведені вимірювання показали, що насправді виконується співвідношення

$$L(\ell) = \alpha \ell^{1-D} \quad (1)$$

де  $\alpha$  - значення  $L$  для не фрактальної кривої;  $D > 1$  - фрактальна розмірність [4].

Для кількісної міри неідеальності об'єктів (звивистості контуру, зморшкуватості поверхні, тріщинуватості та пористості обсягу) користуються розмірністю Хаусдорфа - Безіковича, яку Мандельброт назвав фрактальною розмірністю [4]. Фрактальна розмірність здатна приймати не лише цілі, а й дробові значення. Характерною рисою фрактальних об'єктів є самоподібність

чи автомодельність. Сенс самоподібності полягає в тому, що на будь-якому масштабному рівні фрактальний об'єкт може бути отриманий тотожною побудовою.

Фрактальна розмірність (розмірність Хаусдорфа-Безиковича [4]) не збігається з топологічною розмірністю  $d$  у співвідношенні (1) та, взагалі кажучи, не є цілою величиною [4] (наприклад, для берегової лінії Англії  $D \approx 1,3$ , а для Норвегії –  $D \approx 1,5$ ). Це вказує на те, що берегова лінія є множиною, що займає проміжне положення між звичайною лінією з топологічною розмірністю  $d = 1$  і поверхнею ( $d = 2$ ), причому величина  $1 < D < 2$  тим більше, що більш порізаним є берег. Таким чином, внаслідок самоподібності властивості фрактальних об'єктів описуються степеневими законами [4]. Зі співвідношення (1) може бути знайдена фрактальна розмірність. Для цього потрібно прологарифмувати співвідношення (1.1), а потім побудувати графік залежності  $\ln L$  від  $\ln l$ , який у подвійному логарифмічному масштабі є прямою лінією. Шукана фрактальна розмірність дорівнюватиме тангенсу кута нахилу графіка до осі  $\ln l$  [4]. В даний час існує загальноприйнята класифікація різноманіття фракталів [12]: геометричні фрактали (наприклад, канторівська множина, крива і сніжинка Коха, серветка та килим Серпінського); фракції алгебри (наприклад, атрактор, безліч Мандельброта); стохастичні або випадкові фрактали (берегова лінія, траєкторії броунівського руху, фрактальні кластери, наноструктури).

## 2.1 ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФРАКТАЛЬНИХ ОБ'ЄКТІВ

Для опису властивостей фрактальних об'єктів використовують фрактальну геометрію, яка описує об'єкти, що мають властивість самоподібності, з дробовою розмірністю простору.

Фрактальна розмірність множини. Об'єм фракталу у своєму просторі вкладення завжди дорівнює нулю. Він, однак, може бути відмінний від нуля у просторі меншої розмірності. Щоб визначити розмірність цього простору  $D$ ,

розбивають весь  $n$ -мірний простір на малі кубики з довжиною ребра і обсягом  $\varepsilon^n$  – рис. 1 [13]. Нехай  $N(\varepsilon)$  - мінімальна кількість кубиків, які в сукупності повністю покривають фрактальну множину, тоді за визначенням

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (2)$$

Цю величину зазвичай називають фрактальною розмірністю або розмірністю Хаусдорфа-Безиковича [4].

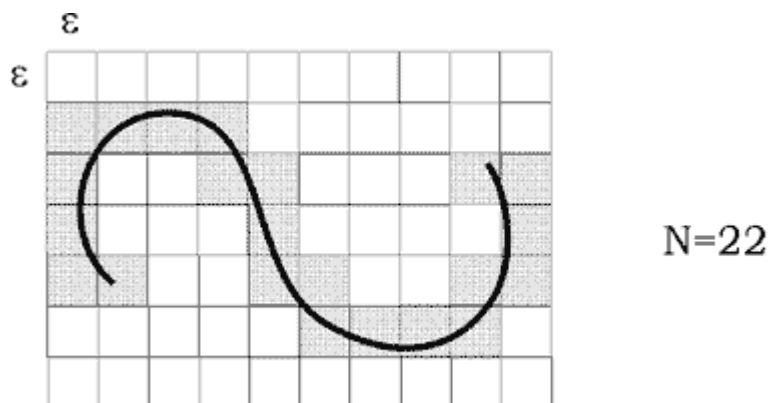


Рис. 1. До знаходження фрактальної розмірності.

Існування цієї межі означає кінцівку об'єму фракталу в  $D$ -мірному просторі: при малому  $\varepsilon$

$$N(\varepsilon) \approx V\varepsilon^{-D} \quad (3)$$

де  $V = \text{const}$ . Таким чином,  $N(\varepsilon)$  є не що інше, як число  $D$ -мірних кубиків, що покривають в  $D$ -мірному просторі об'єм  $V$ . Оскільки  $n$ -вимірні кубики, що покривають фрактал, можуть виявитися майже порожніми

$$D < n \quad (4)$$

і на відміну від звичної розмірності  $D$  може бути дробовою величиною, якою вона найчастіше і є для фрактальних множин.

Для звичайних множин це визначення призводить до добре відомих результатів. Так для безлічі  $N$  ізольованих точок  $N(\varepsilon) = N$  і тому

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = 0 \quad (5)$$

Для відрізка досить гладкої лінії довжини  $L$ :  $N(\varepsilon) = L/\varepsilon$  і тому  $D = 1$ . Для майданчика  $S$  двовимірної поверхні:  $N(\varepsilon) = S/\varepsilon^2$  та  $D = 2$  тощо.

Слід розрізняти так звані точні або регулярні фрактали (такі як канторівська множина, крива та сніжинка Коха, серветка та килим Серпінського) та випадкові фрактали типу берегової лінії, траєкторії броунівського руху чи фрактальних кластерів.

Канторівська множина. Для його побудови вибирають відрізок довжини, що дорівнює 1. Розділивши його на три рівні частини, виключають середню частину. З двома відрізками, що залишилися, роблять ту ж процедуру і в результаті отримують 4 відрізки в  $1/9$  довжини кожен і т.д. до нескінченності (рис. 2).

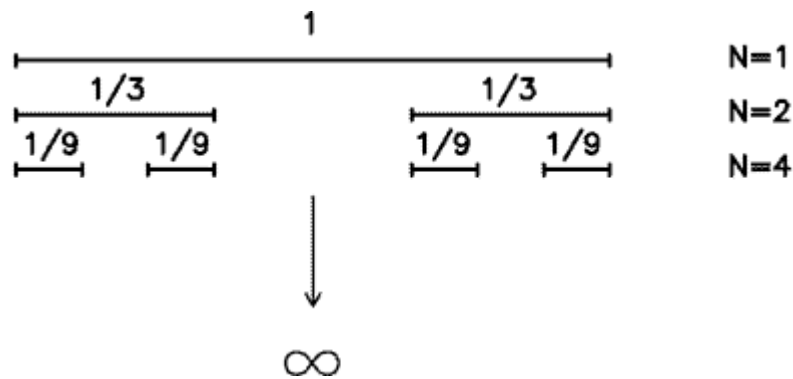


Рис. 2. Побудова канторівської множини

Множина точок, що виникла після цієї процедури, і є множина канторів. Довжина  $L$  цієї множини дорівнює нулю. Справді,

$$L = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \dots = 1 - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2/3} = 0 \quad (6)$$

Щоб знайти хаусдорфову або фрактальну розмірність канторської множини, приймають як "еталон" відрізок завдовжки

$$\varepsilon = \frac{1}{3^n} \quad (7)$$

Мінімальна кількість таких відрізків, необхідних для покриття множини, дорівнює

$$N(\varepsilon) = 2^n. \quad (8)$$

Тому його фрактальна розмірність

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309 \quad (9)$$

### Сніжинка Коха

Приклад побудови цього фракталу зображено нижче на рис. 3.

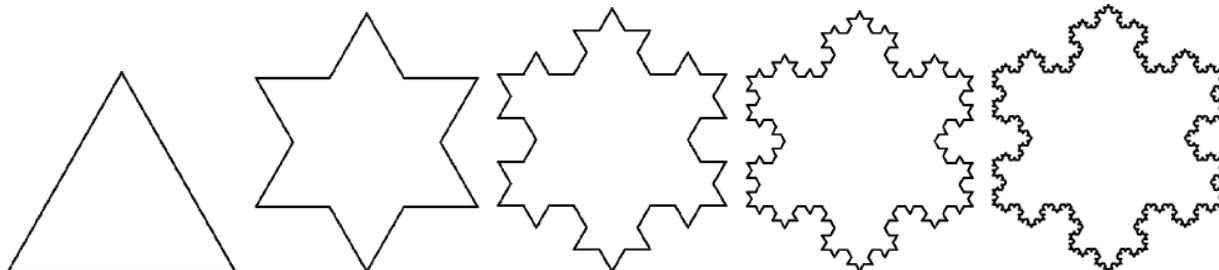


Рис. 3. Сніжинка Коха.

Сніжинка Коха є лінією нескінченної довжини. Дійсно, при кожному кроці число сторін багатокутника збільшується у 4 рази, а довжина кожної сторони зменшується лише у 3 рази. Якщо прийняти довжину сторони трикутника, що утворює, за 1, то тоді довжина сніжинки Коха

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty \quad (10)$$

У той же час, сніжинка Коха обмежує кінцеву площу. Якщо прийняти площу утворюючого трикутника за 1, то площа під кривою дорівнює

$$S = 1 + 3 \cdot \frac{1}{3^2} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9^2} + 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{27^2} + \dots \quad (11)$$

Тут враховано, що кожного разу кількість додаткових трикутників збільшується в 4 рази, а їхня сторона зменшується в 3 рази (відповідно їх площа зменшується в  $3^2 = 9$  разів). У результаті

$$S = 1 + 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{(3^{k+1})} = 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k = 1 + \frac{3}{5} = 1,6. \quad (12)$$

Таким чином, площа під сніжинкою Коха в 1,6 рази більша за площу утворює її трикутника.

Щоб знайти фрактальну розмірність сніжинки Коха, слід врахувати, що, як згадувалося, на  $n$ -кроці число сторін трикутників  $N(\varepsilon) = 3 \cdot 4^n$ , а довжина сторони  $\varepsilon = 1/3^n$ . Тому

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618 \quad (13)$$

Серветка Серпінського. Три перші кроки у побудові цього фракталу і сам фрактал представлено на рис. 4.



Рис. 4. Побудова серветки Серпінського.

Число трикутних пір все меншого і меншого масштабу в ньому нескінченне. Число чорних трикутників у цій побудові зростає як  $3^n$ , де  $n$  — номер кроку, а довжина їхньої сторони зменшується як  $2^{-n}$ . Тому фрактальна розмірність дорівнює

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5849 \quad (14)$$

Легко показати, що площа білих плям дорівнює площі вихідного трикутника.

Броунівський рух. Розглянуті вище приклади фракталів відносяться до так званих точних фракталів або детерміністичних. Всі вони побудовані за цілком певним геометричним правилом. Крім точних фракталів, існують ще так звані випадкові фрактали. До них відносяться фрактальні кластери, деякі властивості яких розглянуті вище. У розташуванні їх елементів є деяка частка випадковості. Найпростішим випадковим фрактал є траєкторія частки, що здійснює броунівський рух (рис. 5).

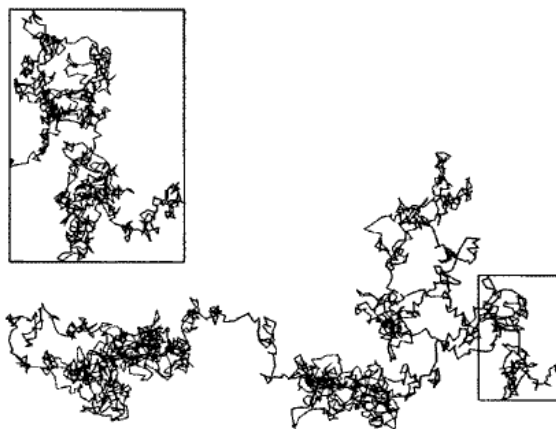


Рис. 5. Траєкторія броунівської частки

Траєкторія має дуже складний звивистий характер. Для визначення її фрактальної розмірності слід врахувати, що якщо частинка продифундувала на відстань  $R$ , то середня кількість "кроків", яку вона зробила

$$N \approx \frac{R^2}{l^2} \quad (15)$$

де  $l$  - Характерна довжина одного кроку. Тому

$$D = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln(1/l)} = 2. \quad (16)$$

Це означає, що характерний розмір дифузної траєкторії на заданій площі пропорційний величині цієї площі. Тобто траєкторія на площині досить густа. Для двовимірного броунівського руху ймовірність повернення в будь-яку, скільки завгодно малу околицю довільно обраної точки, дорівнює 1. У випадку ж дифузії в тривимірному просторі траєкторія броунівської частинки є, навпаки, дуже пухкої (її фрактальна розмірність, як і раніше, дорівнює 2). І тут ймовірність повернення виявляється менше одиниці [14].

Зазвичай під фрактальною розмірністю розуміють показник ступеня  $D$  у співвідношенні  $N \propto l^{-D}$ , де  $N$  - мінімальна кількість елементів з характерним розміром  $l$ , необхідних покриття даної фрактальної множини (або його частини). Але число  $N$  - безрозмірна величина, тому воно в принципі має виражатися у вигляді безрозмірного відношення

$$N \propto \left(\frac{R}{l}\right)^{-D} \quad (17)$$

де  $R$  - характерний розмір цієї множини. Це відбувається з тієї причини, що фрактал не має свого виділеного масштабу довжини, крім свого власного розміру. Тому фрактальна розмірність  $D$  з одного боку показує, як із зменшенням масштабу  $l$  зростає кількість елементів, необхідних для покриття даного фрактальною множини. З іншого боку, цей показник ступеня показує, як число елементів зростає зі збільшенням розмірів самого фракталу.

Самоподібність фракталів. Важливою властивістю фракталів є їхня самоподібність. Це означає, що структура фрактала в одному масштабі подібна до його структури в іншому, більшому масштабі. Іншими словами, якщо будь-який елемент фрактальної структури збільшити в якесь число разів, то вийде елемент структури того ж фракталу. Ця властивість є очевидною для точних фракталів, приклади яких описані вище. Для випадкових фракталів типу траєкторії броунівського руху, берегової лінії або фрактальних кластерів, самоподібність слід розуміти статистично: збільшення випадкового елемента фрактальної структури дає випадковий елемент структури того ж фракталу [4].

Самоподібність означає, що у структурі фракталу відсутні якісь характерні розміри, з якими можна порівняти розміри її елементів. За відсутності характерних розмірів система має мати однакові властивості у всіх масштабах, оскільки жодна область масштабів не виділено проти іншими. Тому часто самоподібність називають масштабною інваріантністю.

Самоподібність (або масштабна інваріантність) означає, що будь-яка кількісна характеристика фрактала  $Q$  при зміні розміру  $L$  у кілька разів змінюється незалежно від величини  $L$ . Математично співвідношення, що виражає цю властивість, представляють у вигляді с залежності

$$Q(L) \propto L^D \quad (18)$$

Таким чином, самоподібність фракталів призводить до того, що їхні властивості описуються ступеневими законами.

Масштабно-інваріантні фрактали застосовуються як наближення до природних структур, що підлягають розгляду [4]. На відміну від теоретичних фракталів, реальні фрактали, що спостерігаються в природі, можуть існувати лише в обмеженій області розмірів, оскільки елементи їх структури не можуть бути як нескінченно малими, так і нескінченно більшими. Наприклад, при розгляді берегової лінії йдеться про розміри значно менших розмірів самого материка або острова. У той же час ці розміри повинні бути в багато разів більшими за піщинки і камінчики, що становлять лінію узбережжя. У цьому випадку слід мати на увазі, що фрактальна структура реалізується в деякій проміжній області масштабів

$$l_{min} \ll l \ll l_{max}, \quad (19)$$

хоча практично ця область може бути дуже великою [4].

### Класифікація фракталів

Фрактали можна класифікувати за різними ознаками, такими як їхні математичні властивості, геометрична форма та основні характеристики. Фрактали можна розділити на такі основні групи класифікацій фракталів: геометричні, алгебраїчні та стохастичні фрактали.

Геометричні фрактали. Одні з найвідоміших типів фракталів. Вони базуються на ітераційних рекурсивних рівняннях та зображуються на комплексній площині. Дані фрактали отримують за допомогою ламаної, що називається генератором. За один крок алгоритму кожний із відрізків замінюється на ламану-генератор у відповідному масштабі. У результаті нескінченного повторення цієї процедури утворюється геометричний фрактал. До геометричних фракталів відноситься сніжинка Коха (рис. 6), множина Кантора, килим Серпінського, трикутник Серпінського, крива Пеано, крива дракона, Т-Квадрат та губка Менгера та інші.

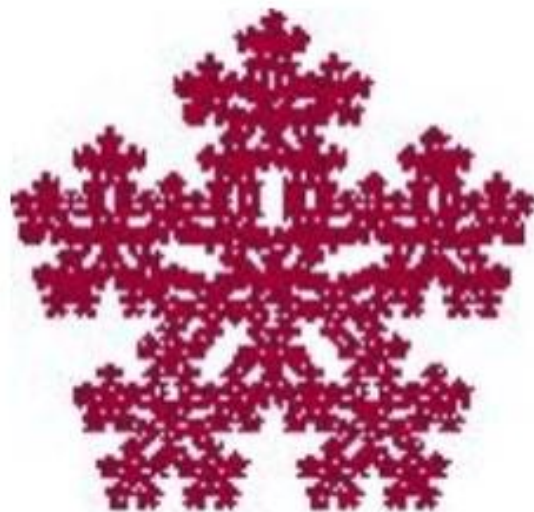


Рис. 6. Приклад геометричних фракталів. Сніжинка Коха

Алгебраїчні фрактали (рис. 7). Найбільша група фракталів. Один із методів побудови таких фракталів полягає у наступному. Береться формула, підставляєте в неї число і отримується результат. Потім підставляється в цю ж формулу результат і отримуємо наступне число. Ця процедура повторюється багато разів. У математиці це називається ітераційний процес. У результаті виходить набір чисел, які є точками фрактала.

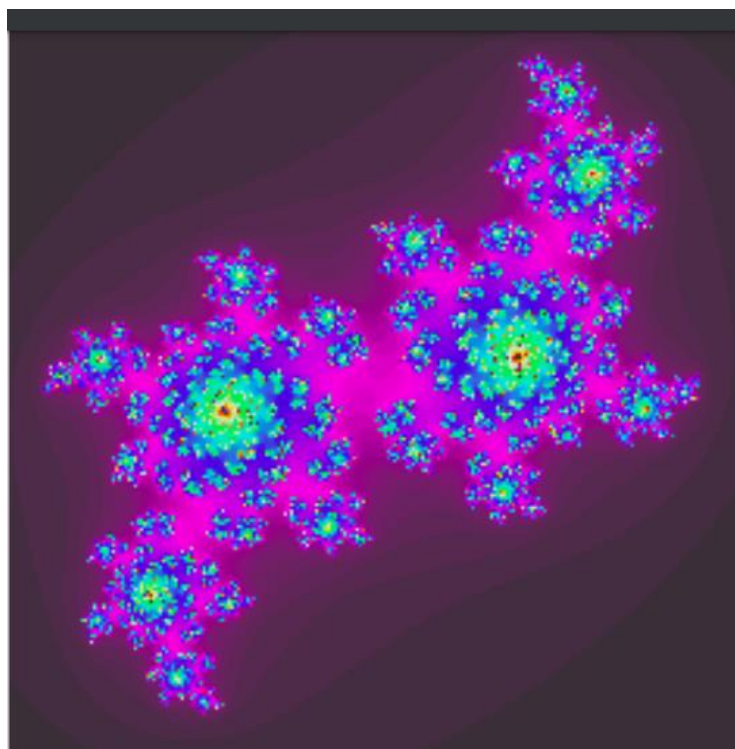


Рис. 7. Приклад алгебраїчного фракталу. Множина Жюліа

Стохастичні (випадкові) фрактали (рис 8). Ця група фракталів утворюються, якщо в ітераційному процесі хаотично змінюється будь-який його параметр. При цьому утворюються об'єкти дуже схожі на природні – не симетричні дерева, берегові лінії і т.д. Стохастичні фрактали використовуються при моделюванні рельєфів місцевості та поверхні моря.

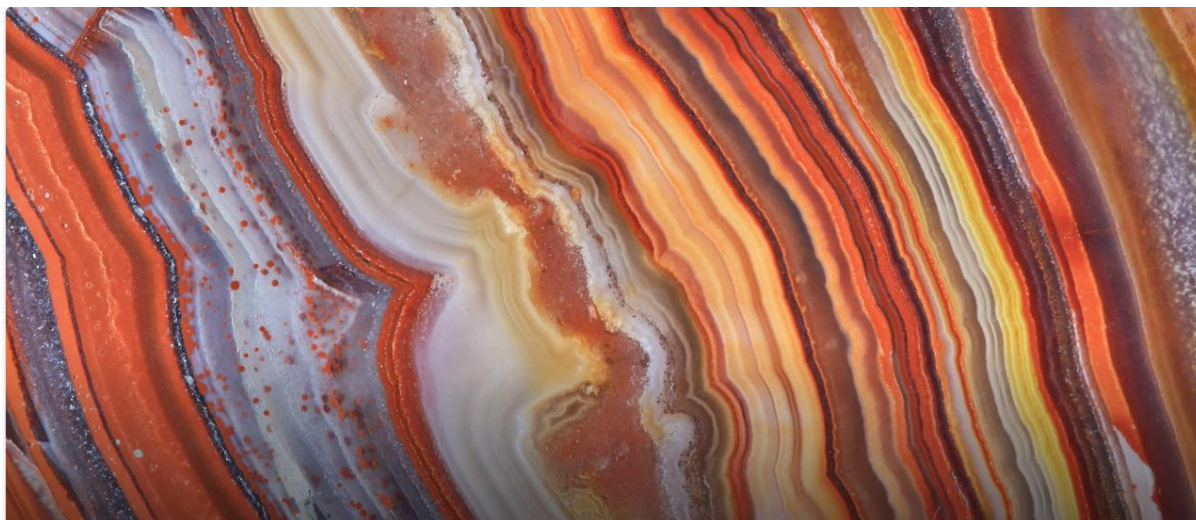


Рис. 8. Приклад стохастичного фракталу: close-up of an agate (макрозйомка агата)

### Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення поняттю «фрактал».
2. Які властивості характерні для фракталів?
3. Що є ключовим поняттям теорії фракталів?
4. Що таке фрактальна розмірність?
5. Що означає термін «м'які обчислення»?
6. Як пов'язан розділ математики «Нечітка логіка» з фрактальним аналізом?
7. Який підхід у комп'ютерних науках називають м'які обчислення (Soft Computing)?
8. Яка величина називається розмірністю Хаусдорфа-Безиковича?
9. Що представляє собою Канторівська множина? Сніжинка Коха? Серветка Серпінського?
10. Які фрактали називають випадковими? Приведіть приклад випадкового фракталу.

11. Що називають самоподібністю фракталів?
12. На які основні групи класифікують фрактали?
13. Наведіть приклади геометричних фракталів.
14. Наведіть приклади алгебраїчних фракталів.
15. Наведіть приклади стохастичних фракталів.
16. Де застосовуються фрактали?

### III. ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ У МЕДИЦИНІ

Сьогодні до сучасної медицини пред'являються високі вимоги, особливо у високотехнологічних галузях, таких як медична візуалізація, як до кваліфікації лікарів, так і до методологій.

Загальна кількість інформації про хвороби, їх візуальні прояви та лікування зростає з кожним роком. Таку кількість інформації одна людина не взмозі точно оцінити та обробити, тому на допомогу приходить математика та технології, які допомагають структурувати матеріал.

Одним із найцікавіших напрямків є застосування фракталів у медицині. Фрактальний аналіз може бути застосовано у багатьох галузях медицини та біології (насамперед – у морфологічних науках).

Про аналіз медичних даних з використанням фракталів повідомили в різних областях медицини. Так, фрактальний аналіз може бути використаним для дослідження біологічних ритмів – аналізу даних, що змінюються в часі – часових рядів, таких, як електричний сигнал.

Відомий спосіб фрактального аналізу серцевого ритму, ЕЕГ, тощо. Фрактальними органами людського організму є всі дихальні шляхи, судинна система, лімфатичні судини, печінка та жовчні протоки, а також нервова система, фрактальні розмірності яких визначаються по-різному [15].

Фрактальний аналіз у медицині – це об'єктивний математичний метод оцінювання складності біологічних структур та часових рядів (ЕКГ, ЕЕГ) за допомогою фрактальної розмірності.

Він дозволяє кількісно вимірювати нерегулярні анатомічні утворення, аналізувати зображення (МРТ, КТ) та діагностувати патології, наприклад, рак, за ступенем заповнення простору.

Фрактальний аналіз знаходить застосування в онкології, кардіології, неврології та при аналізі мікроструктур тканин.

Важливим є визначення фрактальної розмірності органів в організмі людини з фрактальною структурою, на підставі чого можна прогнозувати та лікувати різні захворювання у людини [16].

Фрактали не тільки оточують нас, вони і всередині нас, багатьох тварин і рослин, оскільки багато органів організму людини і тварин, а також рослин мають фрактальні властивості. Використовуючи властивості фрактальних структур, природа винятково ефективно конструювала людський організм. Найбільш ретельно вивчена фрактальна структура дихальних шляхів, якими повітря надходить у легені.

Легені – життєво важливі органи, відповідальні за обмін кисню і вуглекислого газу в організмі людини і виконують дихальну функцію. Система легень включає три найважливіші структурні елементи: бронхи, бронхіоли і легеневі альвеоли (рис. 9).

Найважливішими структурними елементами легень є альвеоли, від яких залежить нормальний обмін кисню і вуглекислого газу в організмі. Легеневі альвеоли є невеликими бульбашками з дуже тонкими стінками, обплетені тонкою мережею капілярів. Завдяки мікроскопічним альвеолам, середній діаметр яких не перевищує 0,2 – 0,3 мм, площа дихальної поверхні легень збільшується до 80 – 85 квадратних метрів. Вони забезпечують велику площу для газообміну і безперервно постачають кровоносні судини киснем.



Рис. 9. Будова дихальних шляхів

Кількісний аналіз системи дихальних шляхів показав, що вони мають фрактальну структуру [17].

Оцінку за фрактальною шкалою можна використовувати для характеристики сітківки ока людини, різних пухлинних утворень, а також для аналізу тривимірного артеріального дерева легень людини, отриманого за даними комп'ютерної томографії. Легенева артеріальна система складається, як мінімум, з комбінації двох компонентів: капілярної мережі, що рівномірно заповнює порожнину, та розсіяної фрактальної структури великих судин (рис. 10).



Рис. 10. Фрактальна структура великих судин легень

Фрактальна розмірність судинної системи легень людини дорівнює 1,5626.

Крім того, фрактальні виміри легеневої системи пацієнтів були виміряні в декількох дослідженнях і широко використовуються для опису судинної системи при різних захворюваннях [18].

Було показано, що фрактальна розмірність бронхіального дерева не залежить від розміру тіла і змінюється в межах 1,57-1,58.

Фрактальна розмірність судин сітківки ока становить 1,7 та знижується при старінні людини та при ускладненнях цукрового діабету. Фрактальна розмірність кровоносної системи людини варіюється в межах значень від 2,5 до 2,6.

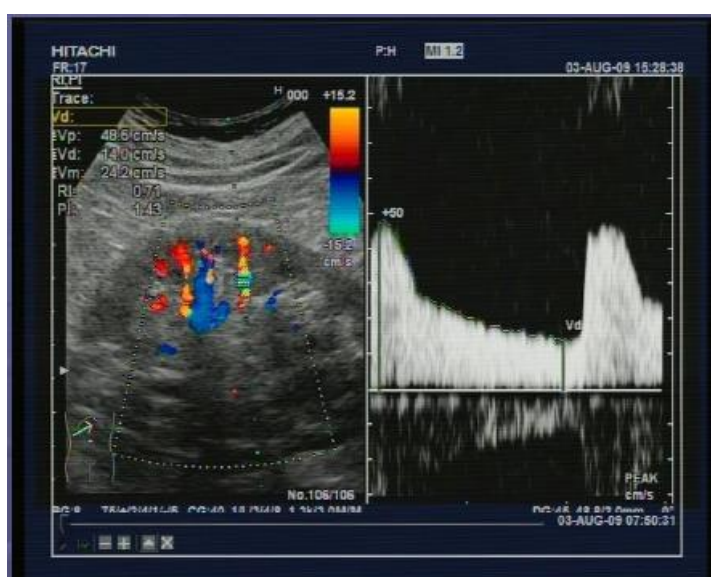


Рис. 11. Дослідження часових рядів в медицині. Спектр ниркових артерій [19]

Основними напрямками застосування фрактального аналізу у медицині є такі:

1. Аналіз медичних зображень. Цей аналіз використовується для кількісної оцінки морфології (структури) тканини, зокрема оцінка складності меж пухлин.
2. Діагностика: Методи підрахунку квадратів (box-counting) та інші алгоритми допомагають виявляти зміни в структурі тканин на знімках МРТ, КТ, гістологічних препаратів.

3. Фрактальний аналіз часових рядів: Аналіз серцевого ритму, ЕЕГ та інших фізіологічних сигналів для оцінки їх фрактальної природи та стабільності.

4. Моделювання: Фрактальна графіка допомагає моделювати біологічні процеси та структури (наприклад, судинні сітки).

У сучасних дослідженнях підкреслюються переваги методу фрактального аналізу, такі як:

1. Висока інформативність та об'єктивність у порівнянні з традиційними методами морфометрії.

2. Можливість комплексної оцінки нерегулярних об'єктів.

3. Інтеграція з методами машинного навчання для кращої діагностики.

Фрактальний аналіз знаходить застосування в онкології, кардіології, неврології та при аналізі мікроструктур тканин.

### **Питання для самоконтролю**

1. В яких галузях медицини може бути застосовано фрактальний аналіз?

2. Наведіть приклади фрактальних об'єктів в медицині, біології.

3. Назвіть основні напрямки застосування фрактального аналізу у медицині.

4. Назвіть переваги методу фрактального аналізу у сучасних дослідженнях.

## **IV. ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ**

Сучасний етап розвитку світової економіки характеризується стрімким зростанням інноваційної складової у діяльності промислових підприємств, які є найбільш активним чинником науково-технічного прогресу.

Тому особливо актуальним є використання методів їх передпрогнозного оцінювання, що може бути реалізоване на базі фрактального аналізу.

Фрактали застосовуються для аналізу фінансових ринків. Наприклад, рух цін на ринках може бути описаний фрактальними моделями, що допомагають передбачати тренди та ризики.

Комплексним вирішенням багатьох проблем у галузі оцінки стану ринку може стати фрактальний аналіз. Фрактальний аналіз часових рядів допомагає ефективно оцінити наявність та стійкість тренду на ринку. Коефіцієнт Херста – одна з базових величин фрактального аналізу.

#### 4.1 ТЕОРІЯ ФРАКТАЛЬНОГО РИНКУ (Fractal Market Theory-FMT).

##### ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ.

Як було сказано вище, фрактал – математична множина, що має властивість самоподібності. Іншими словами, це об'єкт, який точно або приблизно збігається з частиною себе самого – тобто, ціле має ту саму форму, що й одна або більше частин. Найпоказовіший приклад фрактальної структури – «фрактальне дерево» (рис. 12):

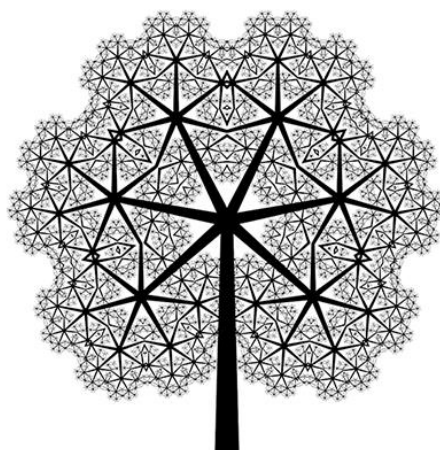


Рис. 12. Фрактальне дерево

Поняття самоподібності можна дати глибше визначення: об'єкт, який має цю «якість», є статистично подібним у різних масштабах – просторових чи тимчасових.

У контексті ринку значення слова "фрактальний" означає "повторюваний" або "циклічний".

Фрактальна розмірність – характеристика того, яким чином предмет чи процес заповнює простір. Вона визначає, як змінюється структура предмета за зміни масштабу. Проеціюючи це визначення на фінансові (у нашому випадку – валютні) ринки, можна постулювати, що фрактальна розмірність визначає ступінь «порізаності» чи мінливості часового ряду. Відповідно, пряма лінія має розмірність  $d$ , що дорівнює одиниці, випадкове блукання -  $d=1.5$ , а для фрактального часового ряду  $1 < d < 1.5$  або  $1.5 < d < 1$ .

## 4.2 R/S-АНАЛІЗ ТА КОЕФІЦІЄНТ ХЕРСТА

### 4.2.1 ПОЯВА R/S-АНАЛІЗУ

Ключовий параметр фрактального аналізу в економічних дослідженнях є показник Херста. Це міра, яку використовують під час аналізу тимчасових рядів. Чим більша затримка між двома однаковими парами значень у часовому ряду, тим менший коефіцієнт Херста [20].

На рис. 13 представлено приклад часового ряду

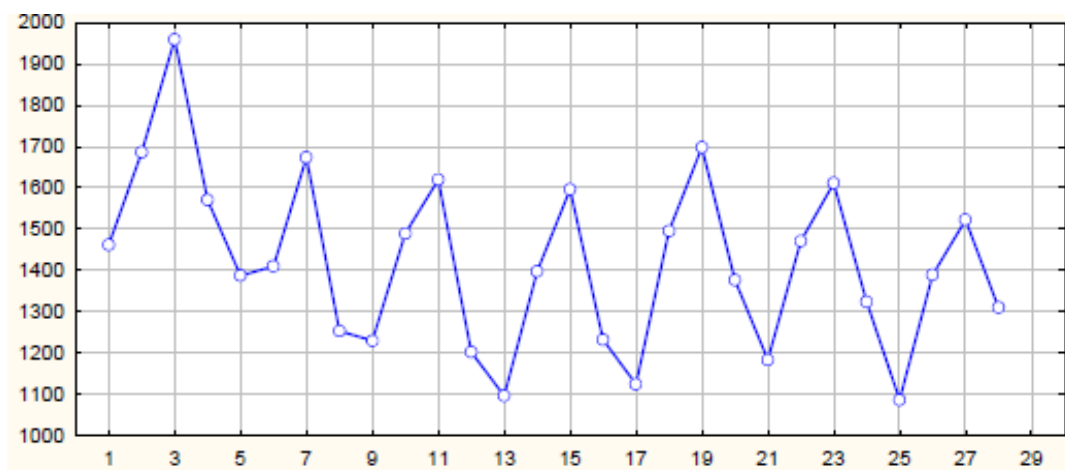


Рис. 13. Графік часового ряду обсягів продаж

Цей важливий показник (коефіцієнт Херста) запровадив Гарольд Едвін Херст – визначний британський гідролог, який займався проектом греблі на Нілі у Єгипті. Для будівництва потрібно оцінити приплив води і, відповідно, потреби у відтоку. Спочатку вважалося, що приплив води – величина

випадкова, стохастичний процес. Однак Херст вивчив записи про розливи Нілу за дев'ять століть і знайшов у цьому закономірності. Це стало відправною точкою у дослідженні.

Виявили, що розливи більше середнього змінювалися ще більшими розливами. Після цього процес змінював свій напрямок, і розливи за рівнем менше середнього змінювалися ще менші. В наявності цикли з неперіодичною тривалістю.

Основою статистичної моделі Херста стала робота Альберта Ейнштейна про броунівський рух, яка по суті є моделлю випадкових блукань броунівської частинки. Сутність теорії в тому, що відстань  $R$ , яку проходить частинка, збільшується пропорційно квадратному кореню з часу  $\sqrt{T}$ .

Тобто розмах варіації,  $R$  при великій кількості випробувань дорівнює кореню з кількості випробувань,  $T$ . Саме цю формулу Херст взяв за основу при доказі того, що розливи Нілу – не випадковість.

Для формування свого методу гідролог використовував часовий ряд  $X_1 \dots X_n$  значень розливу річки. Далі проводився наступний алгоритм, названий у подальшому методом нормованого розмаху або  $R/S$ -аналізом [21]:

1. Розрахунок середнього значення,  $X_m$ , ряду  $X_1$ .
2. Розрахунок стандартного відхилення ряду,  $S$ .
3. Нормалізація ряду, шляхом віднімання кожного значення середнього значення,  $Z_r$ , де  $r=1..n$
4. Створення кумулятивного часового ряду  $Y_1=Z_1+Z_r$ , де  $r=2..n$
5. Розрахунок розмаху кумулятивного часового ряду  $R=\max(Y_1..Y_n)-\min(Y_1..Y_n)$
6. Розподіл розмаху кумулятивного часового ряду на стандартне відхилення  $S$ .

Херст розширив рівняння Ейнштейна та привів його до більш загальної форми:

$$(R/S)_n = c \times n^H$$

де  $c$  - константа.

У загальному випадку значення  $R/S$  змінює масштаб у міру збільшення приросту часу, відповідно до значення ступеня залежності, що дорівнює  $H$ , яка зазвичай і називається показником Херста.

Гідролог прийняв показник  $H$  за 0,5, якби процес розливу був випадковим. У процесі спостережень виявив, що  $H=0.91$ ! Виходить, що нормований розмах змінюється швидше, ніж квадратний корінь з часу, тобто система проходить більшу відстань, ніж ймовірнісний процес. Цей факт був передумовою моменту, коли можна стверджувати, що події минулого істотно впливають на сучасне і майбутнє.

### 4.3 ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ДО РИНКІВ

Метод фрактального аналізу є потужним інструментом для дослідження хаосу та нелінійних систем. Він дозволяє аналізувати та виявляти нерегулярні та складні структури, які характеризують хаотичні системи, які не підлягають класичним лінійним аналітичним методам. Основною ідеєю фрактального аналізу є використання поняття фракталів для опису та вивчення нелінійності, динамічної складності та хаосу в системах.

Припустимо, маємо часовий ряд  $x_1, x_2, \dots, x_T$ , рівнями якого є економічний показник, динаміка якого нагадує хаос. Необхідно дати відповідь на питання – чи існує якась внутрішня закономірність системи, що може використовуватися при прогнозуванні даного явища? Часові ряди такого вигляду можуть бути дійсно хаотичними, тобто внутрішня закономірність в їхньому поведженні може бути відсутня. У цьому випадку їх не можна використовувати для прогнозу. Якщо ж ці ряди описують процеси, що побудовані на основі деякої внутрішньої самоорганізації, то на їхній основі може бути отриманий прогноз.

Фрактальна структура об'єкту передбачає незмінність ступеня складності структури об'єкту за збільшенням масштабу розгляду. Для характеристики фрактальної структури використовуються показник Херста ( $H$ ) та показник

фрактальної розмірності ( $D$ ). Існує як мінімум дві варіації фрактальної розмірності (табл. 1) –  $D$  і  $A$ . Так, фрактальну розмірність Хаусдорфова  $D$  визначають за такою формулою:  $D=2- H$ .

Бенуа Мандельброт зазначає, що фрактальна розмірність є зворотною величиною від  $H$ . Наприклад, при  $H = 0,5$  фрактальна розмірність дорівнює 2 ( $1/0,5$ ), а при  $H = 0,8$  фрактальна розмірність дорівнює 1,25 ( $1/0,8$ ). Отже, фрактальну розмірність за Мандельбротом [4]. А розраховують за формулою:

$$A = \frac{1}{H} \text{ (табл. 1)}$$

Таблиця 1.

## Фрактальна розмірність

Показник	Значення		
Показник Херста $H$	$H \approx 0$	$H = 0,5$	$H = 1$
Фрактальна розмірність за Хаусдорфом $D$	$D \approx 2$	$D = 1,5$	$D = 1$
Фрактальна розмірність за Мандельбротом $A$	$A \rightarrow \infty$	$A = 2$	$A = 1$
	Пряма лінія	Випадковий ряд	Нескінченний лінійний ряд

Інтерпретація коефіцієнту Херста на ринках [22]:

1. Якщо показник Херста знаходиться в проміжку між 0,5 і 1 і відрізняється від очікуваного значення на два і більше стандартних відхилень, процес характеризується довготривалою пам'яттю. Інакше кажучи, має місце персистентність.

Це означає, що в межах певного періоду часу наступні показники залежать від попередніх.

2. Показник Херста, який відрізняється від очікуваного значення за абсолютною величиною на два і більше стандартних відхилень і приймає значення проміжку від 0 до 0,5, характеризує антиперсистентний часовий ряд.

3. Якщо показник Херста дорівнює 0.5 або його величина відрізняється від очікуваного значення менш ніж на два стандартні відхилення, то процес вважається випадковим блуканням і ймовірність наявності короткочасних або

довготривалих циклічних залежностей мінімальна. Фактично це означає, що у торгівлі не варто спиратися на технічний аналіз, тому що минулі значення слабо впливають на сьогоднішній день. Тут найкращим рішенням буде фундаментальний аналіз.

Таким чином, значення показника Херста знаходиться в межах від 0 до 1 і залежно від того якого значення він набуває формується висновок, щодо випадковості чи персистентності досліджуваного ряду (табл. 2).

Таблиця 2.

Характеристика часових рядів відносно значення показника Херста [23]

Значення показника Херста ( $H$ )	Значення фрактальної розмірності	Характеристика ряду
$0 < H < 0,5$	$1,5 < D < 2$	Досліджуваний часовий ряд є антиперсистентний, тобто нестійкий. Спостерігається схильність економічної системи до постійної зміни тенденції (зростання змінюється спаданням, та навпаки). Стійкість подібної антиперсистентної поведінки залежить від того, наскільки $H$ близький до нуля. Чим ближче його значення до нуля, тим ряд більш мінливий або волатильний.
$H = 0,5$	$D = 1,5$	Часовий ряд абсолютно випадковий або стохастичний, відсутність довготривалої статистичної залежності (випадкова поведінка економічного показника), тобто події не залежать одна від одної.
$0,5 < H < 1$	$1 < D < 1,5$	Досліджуваний часовий ряд є персистентним, спостерігається тренд, збереження тенденції до зростання чи спадання показника як у минулому, так і в майбутньому. При цьому чим ближче значення $H$ до 1, тим тренд сильніший і частіше за все за його підйомом слідує підйом, а за спадом – спад.

#### 4.4. ВИЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКА ХЕРСТА ЗА ДОПОМОГОЮ ФРАКТАЛЬНОЇ РОЗМІРНОСТІ, ОБЧИСЛЕНОЇ КЛІТИНКОВИМ МЕТОДОМ

Фрактальна розмірність характеризує заповнюваність досліджуваним об'єктом простору свого вкладення.

За [4], множина  $X$  називається фрактальною (як було сказано вище), якщо її розмірність Хаусдорфа  $D(X)$  не є цілим числом.

Розмірність Хаусдорфа за означенням показує, яку кількість  $n$  «куль» діаметром  $\varepsilon$  потрібно для того, щоб в кожній такій кулі знаходився хоча б один елемент множини  $X$ , тобто кількість таких куль відповідає співвідношенню

$$n(\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon^D}, \text{ при умові, що } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Звідки значення фрактальної розмірності обчислюється за формулою:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(n(\varepsilon))}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (20)$$

Оскільки часовий ряд  $y(t)$  подається графіком на площині, то простором його вкладення є поверхня – декартова система координат. Точки, що відповідають рівням ряду  $y(t)$ , для кращої його візуалізації послідовно з'єднують відрізками. Фрактальну розмірність  $D$  графіка такого ряду можна визначити за допомогою клітинкового методу, суть якого полягає в тому, що в ньому використовують набір прямокутних сіток з різними розмірами клітинок переважно у формі квадрата. Для кожної сітки підраховують кількість клітинок, що покривають хоча б одну точку ламаної лінії графіка. Використовуючи формулу (1) для кожного значення кількості клітинок за даного їхнього розміру, будують у логарифмічному масштабі графік залежності кількості  $n(\varepsilon_i)$  від  $\varepsilon_i$ , де  $i = 1, 2, \dots$  відповідає характеру сітки в даному наборі.

Далі, для цієї залежності будують графік функції  $\log(n(\varepsilon_i)) = f(\log(\varepsilon_i))$ , тобто в логарифмічному масштабі.

Відзначені на графіку точки апроксимують прямою лінією методом найменших квадратів.

Отримане рівняння прямої має такий вигляд:

$$\log y = -k \log x + b$$

де  $x$  та  $y$  є логарифмічними координатами, а додатне значення параметра  $k$  відповідає значенню фрактальної розмірності  $D$  даного часового ряду  $y(t)$ .

Суть алгоритму клітинкової розмірності полягає в тому, що на графік часового ряду накладають набір сіток з клітинками розміром  $x$  у  $\varepsilon \times \varepsilon$ , причому візуально варто забезпечити для них квадратну форму, тобто  $\varepsilon_x \cong \varepsilon_y$ , як зображено на рис. 14.

У цьому сенсі, необхідно забезпечити вимогу: розмір клітинок  $\varepsilon$  не повинен бути меншим за найменшу відстань між двома сусідніми рівнями часового ряду, а тому шкала значень номерів вертикальних ліній сітки на осі абсцис для включення двох значень рівнів має позначки 1, 3, 5, ..., для трьох значень – 1, 4, 7, ... , для чотирьох відповідно, 1, 5, 9, ... і т.д.

Розміри клітинок підбираємо так, щоб вони виглядали квадратами і вкладалися між поділками шкали ординат і, таким чином приводимо розмір клітинки до одиниць значень рівнів часового ряду.

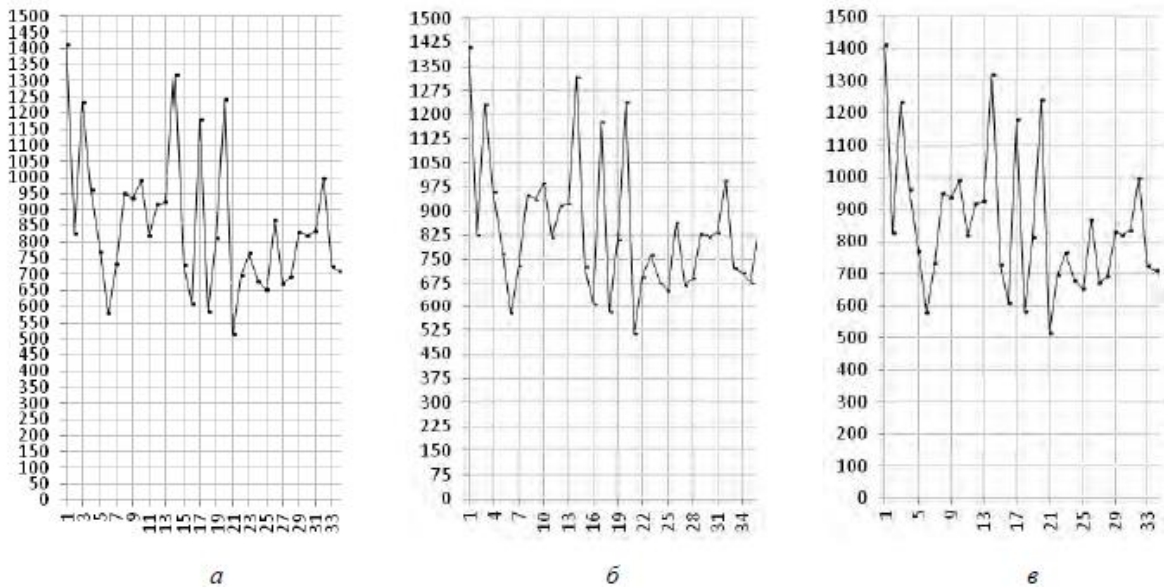


Рис. 14. Набір сіток, накладених на графічні зображення часового ряду. Розмір клітинок: а – 50 ms (об'єднує два рівні); б – 75 ms (об'єднує три рівні); в – 100 ms (об'єднує 4 рівні)

Підраховують кількість клітинок так. Оскільки розмір клітинок  $\varepsilon$  по осі ординат є відомий і відповідає відстані між двома сусідніми номерами по осі абсцис, а шкала ординат починається з нуля, то значення кількості цілих клітинок на інтервалі абсциси, що дорівнює також  $\varepsilon$ , дорівнюватиме значенню  $k_{max} = \frac{y_{max}}{\varepsilon}$ , заокругленому до найближчого більшого цілого. Натомість, кількість цілих клітинок, що знаходяться нижче від клітинки зі значенням  $y_{min}$ ,

визначається значенням  $k_{min} = \frac{y_{min}}{\varepsilon}$ , заокругленим до найближчого найменшого цілого.

Наприклад, якщо  $k = 7.23$  чи  $k = 7.68$ , то для  $k_{max}$  кількість клітинок як ціле число має бути  $k = 8$ , а для  $k_{min}$  відповідно  $k = 7$ . Отже, кількість клітинок у даному стовпці дорівнює різниці заокруглених значень  $k_{max} - k_{min}$ . У такий спосіб загальна кількість клітинок  $n(\varepsilon_i)$  кожної сітки, в яких локалізоване графічне зображення часового ряду

$$n(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n/\varepsilon_i} (k_{i_{max}} - k_{i_{min}}).$$

Якщо в такому стовпці більше ніж два значення, то розглядається лише їх розмах, тобто максимальне і мінімальне значення. Така процедура не порушує принципу або змісту клітинкової розмірності, оскільки не порушує регулярність сітки вздовж абсцис та не змінює розміру самих клітинок, лише уточнює їхню кількість.

Алгоритм обчислення фрактальної розмірності та критерію Херста в середовищі Excel.

Вибір саме Ms Excel обґрунтований тим, що:

1. Табличний процесор Ms Excel дає можливість безпосередня і наочна працювати з даними «номер – значення»;
2. Великий вибір математичних та статистичних функцій та формул;
3. Можливість складання спеціальних формул та швидка побудова графіків і діаграм.
4. Табличний процесор Ms Excel доступний практично в будь-якій комп'ютерній системі з офісним пакетом.

Обчислення фрактальної розмірності проілюструємо на такому прикладі. Часовий ряд  $y = f(x)$  є еквідистантний, де  $y$  – час опрацювання людиною-оператором зображення з об'єктом уваги, наданого на моніторі, вимірюваний у мілісекундах, а  $x$  – значення моментів реального часу, в які людина-оператор приймає рішення про те, що виявлений, на зображенні наданому на моніторі, об'єкт відповідає заданому класу. Значення  $y$  змінюються в діапазоні 431 – 1413

мілісекунд. Вони є випадковими величинами з асиметричним, одномодальним розподілом, зрізаним в області малих значень.

Для обчислення фрактальної розмірності в середовищі Excel вводимо дані.

1. Відкриваємо нову Книгу і з файла вводимо дані часового ряду: номер значення і саме значення, починаючи з стовпців відповідно **A3** і **B3**. Перших два рядки для зручності залишаємо для заголовків.

2. Вибираємо параметри сітки. Будуємо графік даного часового ряду разом з основними лініями сітки по обох координатах. Мінімальне значення розміру клітинки вздовж абсцис  $\varepsilon = 2$ , тобто шкала основних ліній сітки вздовж абсциси є такою: 1, 3, 5, ... .

Вибираємо шкалу для основних ліній сітки вздовж ординати так, щоб клітинки мали форму квадрата. Для прикладу на рис. 1 наведені графіки з кроками шкали ординат  $\varepsilon = 50$ ,  $\varepsilon = 75$  і  $\varepsilon = 100$ , тобто  $y_{i+1} - y_i = 50$ , 75 та 100.

Значення кроку вздовж абсцис варто вибирати за кількістю рівнів, що охоплюються клітинками сіток, причому необхідно забезпечити вздовж абсцис збіжність відстаней між рівнями в клітинці і розмірами клітинки.

Очевидно, що для досягнення клітинками форми квадрата можна незначно маніпулювати, розтягуючи чи стискаючи в обох напрямках сам графік.

Важливим є те, щоб була збережена відповідність між розмірами клітинки та кроками шкали, що своєю чергою забезпечить візуальну перевірку обчислення фрактальної розмірності.

3. Вводимо в клітинку **C3** формулу:

$$=ROUNDUP(MAX(B3:B4)/50;0)-INT(MIN(B3:B4)/50) \quad (21)$$

4. Після введення формули натискаємо **Enter** і далі, шляхом *автозаповнення* заповнюємо значеннями стовпець **C** до кінця часового ряду. У цьому стовпці кожне друге значення є невідповідним, оскільки стосується значень, розділених лінією сітки (нас цікавить лише результат, обчислений для значень ряду, що лежать між вертикальними лініями сітки). Тому очищуємо кожну другу клітинку як показано на рис. 15.

Інакше кажучи, в результаті автозаповнення ми отримуємо усі можливі комбінації обчислення значень: **(B3:B4)**, **(B4:B5)**, **(B5:B6)** і т.д., а нам потрібні лише результати для таких інтервалів: **(B3:B4)**, **(B5:B6)**, **(B7:B8)** тощо, бо ці значення знаходяться між двома сусідніми лініями шкали осі абсцис. Для значень, що знаходяться в інтервалах **(B4:B5)**, **(B6:B7)** і т.д., одне значення від другого буде відокремлене лінією осі абсцис.

Далі підсумовуємо значення стовпця **C**.

На рис. 15 у рядку № 20 показані результати підрахунку кількості клітинок. Цифри 50, 75, 100, 125 і 150 визначають розміри сіток за ординатами.

Для стовпця **C** таблиці кожна друга клітинка є порожньою, оскільки формула охоплює лише два рівні, для яких значення кількості клітинок становить 13, і саме в клітинках **C3**, **C5**, **C7** і т.д. ця формула вказує їх правдиву кількість. Для стовпця **D** формула враховує три значення – **B3:B5**, з яких лише перше є правильним, а тому очищаються клітинки **D4** і **D5**, тобто залишається лише перше значення з інтервалу, вказаного у формулі, а решта стирається, оскільки в цьому випадку легко знайти суму клітинок сітки, зображену на рис. 2 у клітинці **D105**.

5. Цей крок аналогічний крокам 2 – 4, але за інших параметрів. Копіюємо графік (рис. 14, *a*) і змінюємо значення шкал координат: для абсциси  $\varepsilon_x = 3$  і для ординати  $\varepsilon_y = 75$ , в результаті графік матиме вигляд як на рис. 14, *б*.

6. Копіюємо формулу (1) з клітинки **C3** в клітинку **D3**, активізуємо її і змінюємо інтервал **B3:B4** на **B3:B5**, параметр 50 на 75, тобто:

$=\text{ROUNDUP}(\text{MAX}(\mathbf{B3:B5})/75;0)-\text{INT}((\text{MIN}(\mathbf{B3:B5})/75)$ .

Потім натискаємо **Enter** і, далі, за допомогою автозаповнення заповнюємо стовпець **D** до кінця ряду. Оскільки між вертикальними лініями осей має бути три значення ряду **(B3:B5)**, тому кожне друге і третє значення треба відкинути, бо в них входять значення, розділені вертикальною лінією осі, тобто істинними результатами є кожне перше з трьох значень, що й зображено на рис. 15 у стовпці **D**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			50	75	100	125	150		
3	1	13	13	8	7	6	7		
4	2	828							
5	3	1235	6						
6	4	961		6					
7	5	769	5		5				
8	6	578				4			
9	7	732	6	4				3	
10	8	951							
11	97	618	1	4	3				5
12	98	647							
13	99	846	4						
14	100	698		9					
15	101	494	13		7	7			
16	102	1078							
17	103	431	11	11					8
18	104	903							
19	105	1128	1		11				
20			229	166	116	78	68		
21	MAX	1413							

Рис. 15. До визначення фрактальної розмірності клітинковим методом

7. Визначаємо суму клітинок за даними стовпця **D**.

8. Аналогічно здійснюємо кроки 2 – 4 для інтервалів значень (**B3:B6**), (**B3:B7**), (**B3:B8**), змінюючи відповідно значення шкал графіків  $\varepsilon_x = 4, 5, 6$  і  $\varepsilon_y = 100, 125, 150$  та редагуючи відповідно формулу (1).

9. Після введення формули натискаємо **Enter** і за допомогою *автозаповнення* заповнюємо значеннями відповідний наступний стовпець до кінця часового ряду і очищаємо для кожного інтервалу значень всі  $\varepsilon - 1$  клітинок крім першої.

10. Формуємо за отриманими даними таблицю результатів (рис. 16), в яку записуємо такі дані:  $\varepsilon$ ,  $N(\varepsilon)$ ,  $\ln(\varepsilon)$ ,  $\ln N(\varepsilon)$ . В якості розміру клітинки  $\varepsilon$  можна вводити як 2, 3, ..., 6, так і 50, 75, ..., 150, оскільки кожна з цих послідовностей є лінійною, а самі значення – незалежними аргументами.

11. Будуємо графік, зображений на рис. 17, у подвійних логарифмічних координатах, значення яких наведені в четвертому і п'ятому стовпцях таблиці (рис. 16.).

Апроксимація прямою лінією послідовності точок методом найменших квадратів подає таке рівняння для апроксимованої лінії:

$$\ln(y) = -1,1588 \ln(x) + 6,2998$$

1 Допоміжні результати визначення фрактальної розмірності					
	№ з/п	Розмір клітинки, $\epsilon$	Кількість клітинок, $N(\epsilon)$	$\ln(\epsilon)$	$\ln(N(\epsilon))$
2					
3	1	2	229	0,693	5,434
4	2	3	166	1,099	5,112
5	3	4	116	1,386	4,754
6	4	5	78	1,609	4,357
7	5	6	68	1,792	4,220

Рис. 16. Допоміжні результати визначення фрактальної розмірності

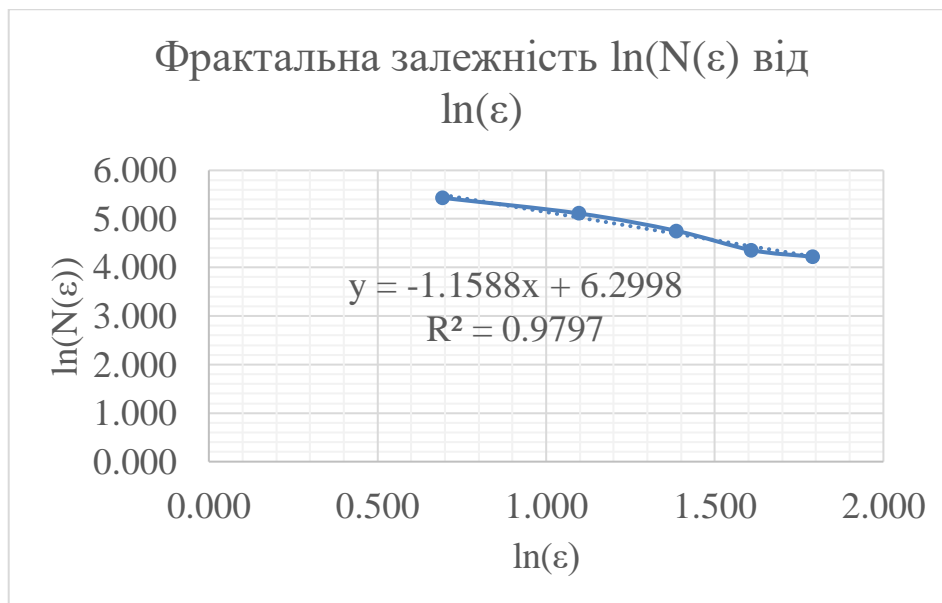


Рис. 17. Фрактальна залежність часового ряду

Висока якість апроксимації підтверджується близьким до одиниці коефіцієнтом детермінації  $R^2 = 0,9797$ .

#### 4.5. ФРАКТАЛЬНИЙ R/S-АНАЛІЗ: МЕТОД НОРМОВАНОГО РОЗМАХУ ХЕРСТА

Фрактальний аналіз, як новий напрямок в аналізі динаміки фінансових показників, сформувався на базі теорії фрактальних ринків, стверджує, що розвиток ринкових процесів у майбутньому, як і майбутні значення часових рядів, які відображають ці процеси, залежать від ретроспективних змін. Основні кроки фрактального R/S-аналізу (рис. 18).

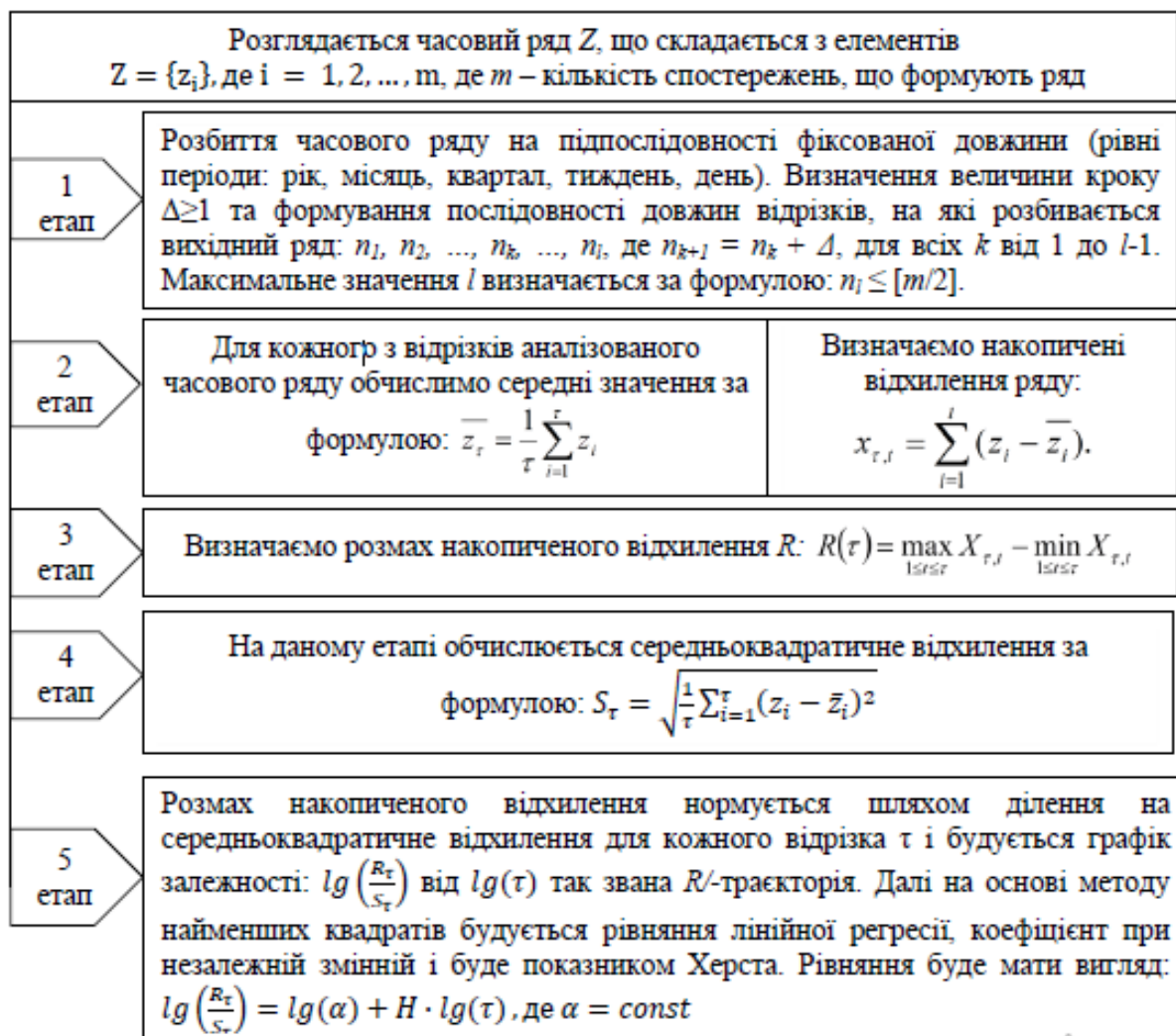


Рис. 18. Етапи розрахунку нормованого розмаху Херста

4.6 АЛГОРИТМ ПОСЛІДОВНОГО  $R/S$ -АНАЛІЗУ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Перевага цього алгоритму полягає в його здатності виявлення циклів (квазіциклів) у досліджуваному часовому ряді, а також обчислення нижньої оцінки глибини пам'яті (про початок цього часового ряду).

Розглянемо алгоритм послідовного  $R/S$ -аналізу (рис. 19) [23]. Нехай розглядається деякий часовий ряд:  $Z=(z_i)$ ,  $i=1,2,\dots,m$ , де  $m$  – кількість спостережень, що складають часовий ряд.

Рис. 19. Алгоритм послідовного  $R/S$ -аналізу

Суть алгоритму послідовного  $R/S$ -аналізу полягає в послідовному нарощуванні  $H$ -траєкторії та  $R/S$ -траєкторії аналізованого часового ряду, що й визначило його назву

### Алгоритм обчислення фрактальної розмірності та критерію Херста в середовищі Excel

Для обчислення фрактальної розмірності в середовищі Ms Excel вводимо дані.

Для прикладу розрахунку показника Херста використаємо статистичні дані щодо ціни на акції за двадцять періодів [23]. Визначення основних критеріїв проводиться відповідно до наведених на рис. 19 етапів розрахунку показника Херста.

1. Відкриваємо нову Книгу Excel і з файлу вводимо дані часового ряду: номер значення і саме значення, починаючи з стовпців відповідно **A2** і **B2**. Перший рядок для зручності залишаємо для заголовків.

2. Відповідно до наведених на рис. 19 етапів розрахунку показника Херста першочергово визначимо середнє значення ціни акцій  $z_{сер}$  (рис. 20).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	дата	ціна акцій, зі	$(z_i - z_{сер})$	накопичене відхилення			номер періоду	Макс	мін	Размах R	Стандотклон S	Нормований розмах R/S	Log(R/S)	
2	1	36,2377	-1,3075	-1,3075			1	-1,3075	-1,3075	0,0000	-			
3	2	36,3474	-1,1978	-2,5054			2	-1,3075	-2,5054	1,1978	0,0776	15,4420	1,1887	
4	3	36,2194	-1,3258	-3,8312			3	-1,3075	-3,8312	2,5237	0,0692	36,4558	1,5618	
5	4	35,6288	-1,9164	-5,7476			4	-1,3075	-5,7476	4,4401	0,3246	13,6769	1,1360	
6	5	35,9817	-1,5635	-7,3112			5	-1,3075	-7,3112	6,0036	0,2868	20,9336	1,3208	
7	6	36,5083	-1,0369	-8,3481			6	-1,3075	-8,3481	7,0406	0,3098	22,7296	1,3566	
8	7	36,5375	-1,0077	-9,3558			7	-1,3075	-9,3558	8,0483	0,3178	25,3272	1,4036	
9	8	36,7496	-0,7956	-10,1515			8	-1,3075	-10,1515	8,8439	0,3509	25,2039	1,4015	
10	9	36,3821	-1,1631	-11,3146			9	-1,3075	-11,3146	10,0071	0,3301	30,3133	1,4240	
11	10	37,7022	0,1570	-11,1576			10	-1,3075	-11,3146	10,0071	0,3301	18,3670	1,2640	
12	11	37,7626	0,2174	-10,9403			11	-1,3075	-11,3146	10,0071	0,3301	15,2832	1,1842	
13	12	38,0588	0,5136	-10,4267			12	-1,3075	-11,3146	10,0071	0,7611	13,1479	1,1189	
14	13	38,0935	0,5483	-9,8784			13	-1,3075	-11,3146	10,0071	0,8280	12,0865	1,0823	
15	14	37,7681	0,2229	-9,6556			14	-1,3075	-11,3146	10,0071	0,8280	11,9457	1,0772	
16	15	37,8906	0,3454	-9,3102			15	-1,3075	-11,3146	10,0071	0,8280	11,7685	1,0707	
17	16	37,4481	-0,0971	-9,4073			16	-1,3075	-11,3146	10,0071	0,8319	12,0298	1,0803	
18	17	37,5541	0,0089	-9,3985			17	-1,3075	-11,3146	10,0071	0,8183	12,2284	1,0874	
19	18	37,7461	0,2009	-9,1976			18	-1,3075	-11,3146	10,0071	0,8135	12,3006	1,0899	

Рис. 20. Проведення фрактального аналізу в середовищі Ms Excel

3. В колонці C знайдемо відхилення кожного значення від середнього за формулою

$$= z_i - z_{сер}$$

4. Розрахуємо накопичене відхилення.

1). Для цього в комірку **D2** вводимо значення = **C2**.

2). В комірку **D3** вводимо формулу = **C3- D2**.

3) Заповнюємо рядок (**D2: D20**) за допомогою маркера *Автозаповнення*.

5. Для визначення розмаху накопиченого відхилення  $R$  спочатку обчислимо мінімальне та максимальне значення.

Для цього скористаємось вбудованими функціями в середовищі Ms Excel. В бібліотеці функцій натискаємо на *Інші функції*, далі *Статистичні* і вибираємо необхідну функцію.

1). В комірку **H2** вводимо функцію = **D2**.

2). В комірку **H3** вводимо функцію =**MAX(\$D\$2:D3)**.

3). Заповнюємо рядок (**H2:H20**) за допомогою маркера *Автозаповнення*.

6. Виконуючи аналогічні дії, знаходимо мінімальні значення за формулою =**MIN(\$I\$2:I20)**.

7. Для визначення розмаху  $R$  в комірку **J3** введемо формулу:

= **H3- J3**. Заповнюємо рядок (**J3: J20**) за допомогою маркера *Автозаповнення*.

8. Далі визначаємо середньоквадратичне відхилення  $S$  ціни акцій.

Для цього в комірку **K3** вводимо формулу

$$=STDEV.P(\$B\$2:B3).$$

Заповнюємо рядок (**K3: K20**) за допомогою маркера *Автозаповнення*.

9. На основі отриманих значень  $R$  та  $S$  розрахуємо нормований розмах за формулою =  $R/S$ .

10. Знаходимо знаходимо логарифм  $R/S$ .

За проведеними розрахунками будуємо графік залежності:  $lg\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right)$  від  $lg(\tau)$  так звану  $R/S$ -траєкторію (рис. 21).

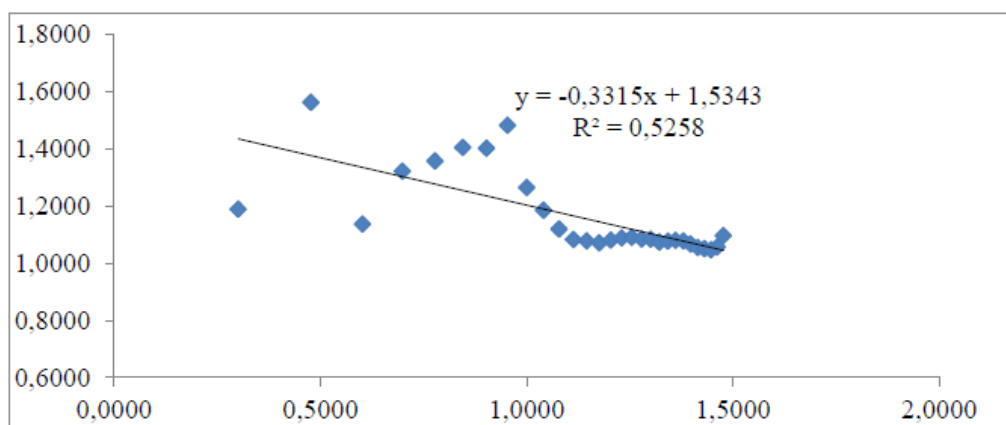


Рис. 21. *R/S*-траєкторія аналізованого ряду

У результаті проведених розрахунків значення показника Херста становить 0,53, а це свідчить що аналізований ряд є персистентним та спостерігається тренд. Аналізований ряд буде зберігати наявну тенденцію ще деякий час у майбутньому.

#### 4.7. Питання для самоконтролю

1. Що таке часовий ряд?
2. Назвіть етапи фрактального *R/S*-аналізу.
3. Дайте визначення показника Херста.
4. Охарактеризуйте часові ряди відносно значення показника Херста.
5. Охарактеризуйте фрактальну розмірність за Хаусдорфом.
6. Охарактеризуйте фрактальну розмірність за Мандельбродом.
7. Як інтерпретується коефіцієнт Херста на ринках?
8. Які значення може приймати коефіцієнт Херста?
9. Як характеризують часові ряди відносно значення показника Херста?
10. Який ряд називають персистентним? Випадковим?
11. Як визначити показник Херста за допомогою фрактальної розмірності, обчисленої клітинковим методом?
12. Опишіть алгоритм обчислення фрактальної розмірності та критерію Херста в середовищі Excel.
13. Назвіть основні кроки фрактального *R/S*-аналізу.

## 5. ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ У ФІЗИЦІ ТВЕРДОГО ТІЛА

Як було сказано вище фрактальний аналіз застосовують і в природничих науках, зокрема у фізиці твердого тіла. Як фізичний приклад фрактальних систем можна навести фрактальну структуру поверхні руйнування [24]. На рис. 22 наведено модель ямкової поверхні руйнування нікелевого сплаву. Цю поверхню моделювали випадковим набором кіл різного діаметра. Виявилось, що кількість кіл  $N(d)$ , діаметр яких перевищував деякий мінімальний заданий діаметр  $d$ , визначається залежністю, аналогічною  $N(l) = \alpha l^{-D}$ . У цьому фрактальний розмір дорівнює  $D = 1,5$  [25]. Можна використати іншу фрактальну модель самоподібної множини поверхні ямкового руйнування, яка представлена на рис. 23. У цьому виявилось, що фрактальна розмірність такого утворення  $D=1,431$  [25].

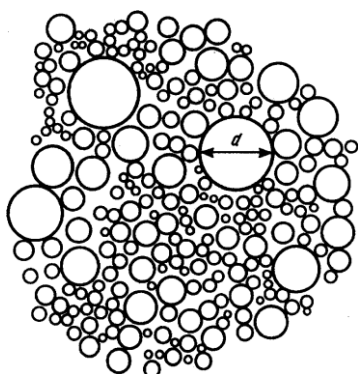


Рис. 22. Модель ямочної фрактальної структури [24].

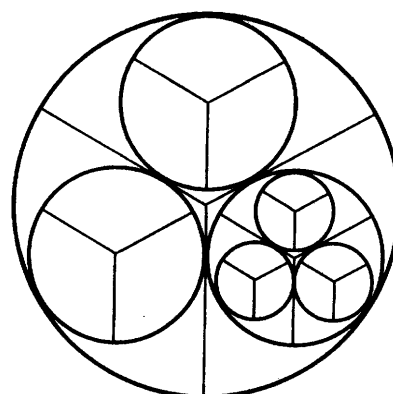


Рис. 13. Апроксимація поверхні руйнування [24].

У твердому тілі фрактальні структури дефектів виникають, наприклад, при інтенсивному зовнішньому навантаженні, що призводить до виникнення дефектів значної густини. Виходячи із сучасної точки зору, процеси структуроутворення при розвиненій пластичній деформації, що визначають фізико-механічні властивості деформованого матеріалу, є процесами кооперативного переміщення дефектів кристалічної будови. Внаслідок

колективної поведінки сильно взаємодіючих дислокаційних ансамблів виникають ротаційні моди пластичності, носіями яких є часткові дисклінації. Рух останніх призводить до розбиття кристала на розорієнтовані області [25].

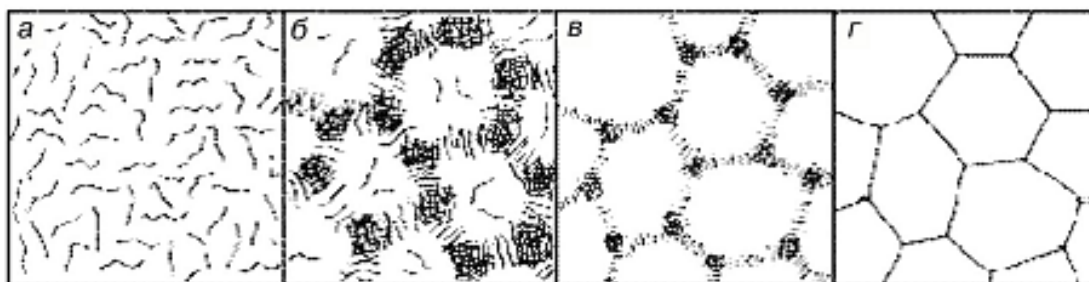


Рис. 24. Схематичне подання перебудови однорідної дислокаційної структури на пористу: а – хаотичний розподіл дислокацій; б, в – утворення дислокаційних клубків та рихлих стінок; г - комірчаста структура [25]

Спочатку розподіл дефектів є однорідним, потім утворюються скупчення з клубків і рихлих стінок осередків і, на завершення, формується чітко виражена пориста структура. Скупчення дислокацій, що формують стінки осередків, є фракталами, розмірність яких спочатку збільшується від  $d = 1$  (рівномірний розподіл дислокацій) до  $1 < D < 2$  (пухкі скупчення) і потім досягає  $d = 2$  (геометрична стінка осередку).

Фрактальні об'єкти мають незвичайні властивості порівняно з нефрактальними. Наприклад, якщо утворюється конденсована система зі звичайною компактною структурою, то  $N$  структурних елементів (атомів, молекул або інших частинок), що містяться в зародку нової фази розміром  $R$ , визначається співвідношенням (19) [25]

Експериментальні методи визначення фрактальної розмірності досить докладно описані, наприклад, у [25].

$$N \propto R^d \quad (22)$$

де  $d$  – розмірність простору ( $d = 1, 2$  або  $3$ , для звичайних евклідових прямих, площин або звичайних тривимірних об'єктів, взагалі кажучи, цілочисленна).

Для об'єму утворення справедливе співвідношення

$$V = A_d R^d \quad (23)$$

Де  $R$  – геометричний чинник, що враховує форму виділення. Якщо утворення має рівноосну ну форму, то за розмірності  $d = 1, 2, 3$  величина  $R = 2, \pi, 4\pi/3$  відповідно. Тоді щільність компактного утворення  $\rho = N/V$  залежить від розміру.

Якщо ж утворюється фрактальна система, то кількість частинок у фрактальному агрегаті розміром  $R$  визначається співвідношенням

$$N \propto R^D \quad (24)$$

де  $D$  - фрактальна розмірність (розмірність Хаусдорфа-Безиковича [4]), яка не збігається з топологічною розмірністю  $d$  у співвідношенні (1.1) для щільного утворення і, взагалі кажучи, не є цілою чисельною величиною, причому  $d > D$  [4]. Тому щільність виражається як

$$\rho \propto R^{-(d-D)} \quad (25)$$

В результаті щільність  $\rho$  є спадною функцією розміру  $R$  утворення. Таким чином, чим більше різняться топологічна розмірність  $d$  і фрактальна розмірність  $D$ , тим більш рихлою є фрактальна система.

Прикладами таких фрактальних утворень є фрактальні кластери, що виникають внаслідок агрегації, обмеженої дифузії, при утворенні гелів та аерогелів [26], колоїдних частинок [27], полімерів [28] та ін. Фрактальні кластери виникають при утворенні ближнього розшарування твердого розчину заміщення у бінарній металевій системі Cu-Ni [29]

Дослідження фрактографічних особливостей зламів показало, що рельєф зламу визначається такими параметрами, як амплітуда навантаження, швидкість поширення втомної тріщини в період стабільного зростання та тривалість інкубаційного періоду зародження втомної тріщини [30] (рис. 25).

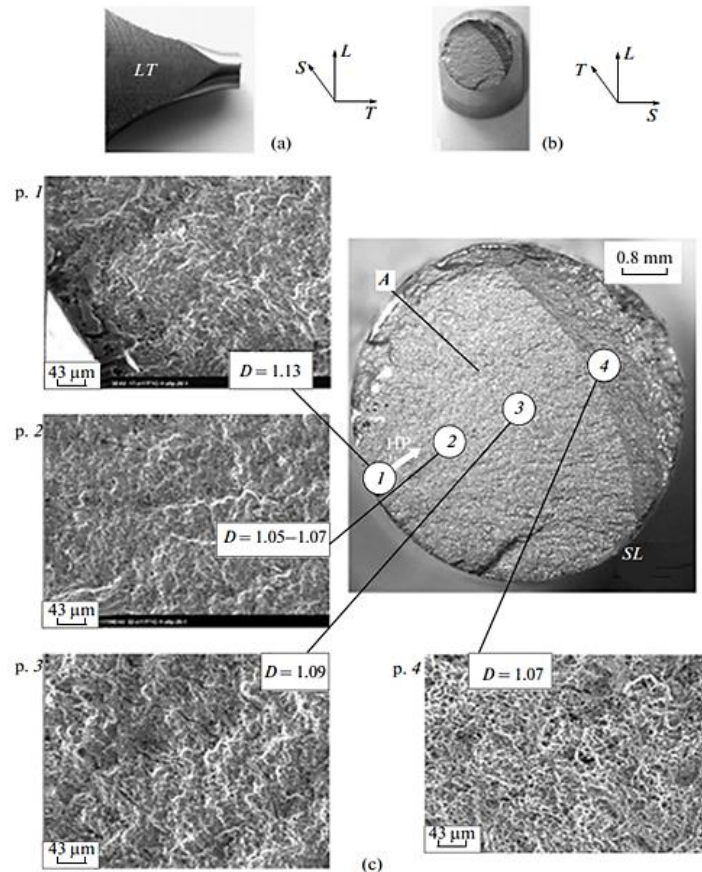


Рис. 25. Поверхня зламу зразка зі сталі 17Г1С після випробувань на малоциклову утомленість: (а, б) зображення фрагментів зразка в площинах LT та LS відповідно; (с) поверхня зламу з типовими макро (А) та мікрорельєсами зламу (точки 1–4).

Кількісний фрактальний аналіз зламів показав, що середня фрактальна розмірність збільшується від  $1,08 \pm 0,01$  для в'язкого руйнування зварного з'єднання металу до  $1,10 \pm 0,01$  для основного металу та  $1,11 \pm 0,01$  для металу зони термічного впливу при квазікрихкому руйнуванні [31].

### Питання для самоперевірки

1. Наведіть приклади прикладів фракталів у фізиці.
2. Наведіть приклади застосування фрактального аналізу у фізиці.
3. Які фрактальні моделі самоподібної множини використовують для аналізу поверхні ямкового руйнування?

4. Які характеристики руйнування впливають на фрактальну розмірність поверхні руйнування металу?

5. Як пов'язана фрактальна розмірність з характером руйнування?

## VI. ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ У БУДІВНИЦТВІ

Фрактали в будівництві – це використання самоподібних геометричних структур для створення міцних, енергоефективних та естетично складних форм. Вони дозволяють оптимізувати матеріаломісткість, імітувати природні структури (дерева, кристали) та покращувати акустику й фасади, застосовуючи багаторазове повторення елементів у різних масштабах.

У будівництві навіть існує поняття «фрактальна» архітектура. Вона може бути створена штучно або виникає природно. Наприклад, протягом тисячоліть вітер і дощ поступово руйнували шари вулканічного попелу, щоб створити неповторні ландшафти природної архітектури (рис. 26-28).

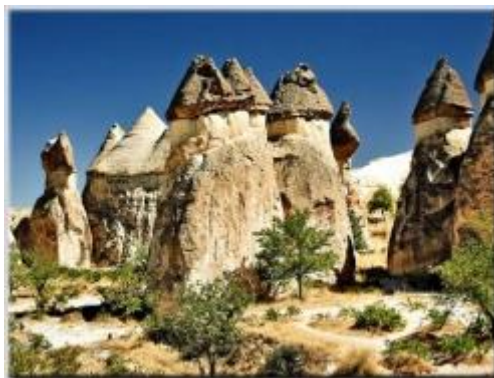


Рис. 26. Ландшафт природної архітектури



Рис. 27. Каміни Фей. Каппадокія. Туреччина



Рис. 28 Памуккале. Туреччина.

У багатьох шедеврах світової архітектури минулого фрактальність використовувалася інтуїтивно

Б. Мандельброт першим написав про фрактальність архітектури, для порівняння посилаючись на форму Паризької опери [4] (рис. 29).



Рис. 29. Паризька опера

Приклади фрактальних форм в архітектурі можна знайти у Вікіпедії (рис. 30, 31). Це, насамперед, самоподібність форм в архітектурі будови.

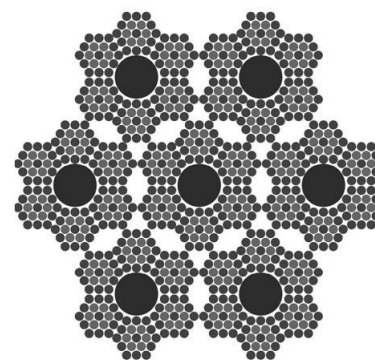


Рис. 30. Міланський собор. Італія

Яскравим прикладом застосування фракталів у будівництві є висячий міст Золоті ворота через однойменну протоку, що з'єднує місто Сан-Франциско на півночі півострова Сан-Франциско і південну частину округу Марін, поруч з передмістям Сосаліто у США. Для побудови цього мосту інженери використовували високоміцні кабелі, що були сплетені за фрактальним принципом, тобто із пучків менших проводів, що створені зі більш дрібних пучків проводів (рис. 31).



а



б

Рис. 31. Приклад застосування фракталів у будівництві:

а -фрактальний міст Золоті ворота, б - кабель мосту Золоті ворота у розрізі, що сплетений за фрактальним принципом

### Питання для самоперевірки

1. Що таке «фрактальна» архітектура?
2. Як ви уявляєте, що таке фрактали в будівництві?

3. Наведіть приклади штучних фракталів.
4. Наведіть приклади рукотворних фракталів в будівництві.
5. Які властивості в будівництві можуть залежати від значення фрактальної розмірності?

## ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ У ДИЗАЙНІ

У дизайні інтерес до фракталів зростає завдяки їх здатності знижувати стрес, покращувати когнітивний комфорт та підвищувати естетичну привабливість середовищ і продуктів. Сучасні дослідження у психології та дизайні підтверджують, що фрактальна складність візерунку впливає на сприйняття користувача та його емоційний стан. Так, у роботах Роблз та ін. (2021) показано, що фрактальні композиції у людських середовищах системно корелюють зі зниженням стресу та підвищенням рівня залучення [31]

Крім того, сучасні психологічні дослідження (2024–2025) підтверджують фундаментальну роль сприйняття людини у візуальних оцінках навколишнього середовища, що зумовлена еволюційною адаптацією зору до природних фракталів [32]. Недавні експериментальні дослідження показують, що фрактальні зображення низької розмірності ( $D$  приблизно від 1,1 до 2) сприяють стабільності та візуально успокоюють, але не підвищують когнітивну активність [32]. Середня складність ( $D$  приблизно від 1,3 до 1,5) найкраще пов'язана з меншим фізичним стресом і відчуттям легкості та комфортом, тобто людське око найкраще сприймає зображення з фрактальною розмірністю  $D$  від 1.3 до 1.5 [33]. Вища складність ( $D$  приблизно від 1,6 до 1,8) збільшує розумові здібності, загострює здатність мислення та візуального аналізу [34]. Супер складні фрактали ( $D$  більше  $>1,9$ ) можуть викликати перенапруження завдяки візуального перевантаження. [35].

Фрактальний аналіз допомагає оцінити ритмічність дизайну на різних рівнях масштабу. Це дозволяє зрозуміти, чи зберігається цікавість глядача при наближенні до деталей або при погляді здалеку (ефект «нескінченного

розгляда»). При цьому знижується когнітивне навантаження, оскільки фрактальні зображення сприймаються оком людини суттєво сприятливо, ніж геометричні риси. Використання фракталів у дизайні полегшує створення продуктів, які заспокоюють увагу та сприймаються позитивно. Експерименти 2020 року показали, що смак фрактальних зображень формуються з дитинства та є універсальними у різних культурах [36].

Фрактали використовують:

- у дизайні одягу (розробка силуетів одягу за принципом ітерацій - повторення елемента зі зміною масштабу), що додає ритмічності та динаміки образу;
- у текстильному дизайні застосовують нескінчені безшовні візерунки (патерни), які не втрачають якості при масштабуванні;
- у композиційному аналізі замість класичного «золотого перетину» використовують фрактальну сітку для нелінійної побудови ескізу;
- у декоруванні генерують складні форм для вишивки, лазерної перфорації або 3D-деталей (гудзики, пряжки).

На рис. 32 представлено наочні ілюстрації використання у певних сферах фрактального дизайну зображень, згенерованих за допомогою Copilot.

У fashion-дизайні фрактальні візерунки дуже популярний тренд завдяки “природній складності” та унікальному ритму форм (рис. 32, а).

У текстильному дизайні (рис. 32, б) сучасні текстильні бренди використовують фрактали для біофільного дизайну (тобто наближеному до життя і природи), який підсилює психологічний комфорт [37].

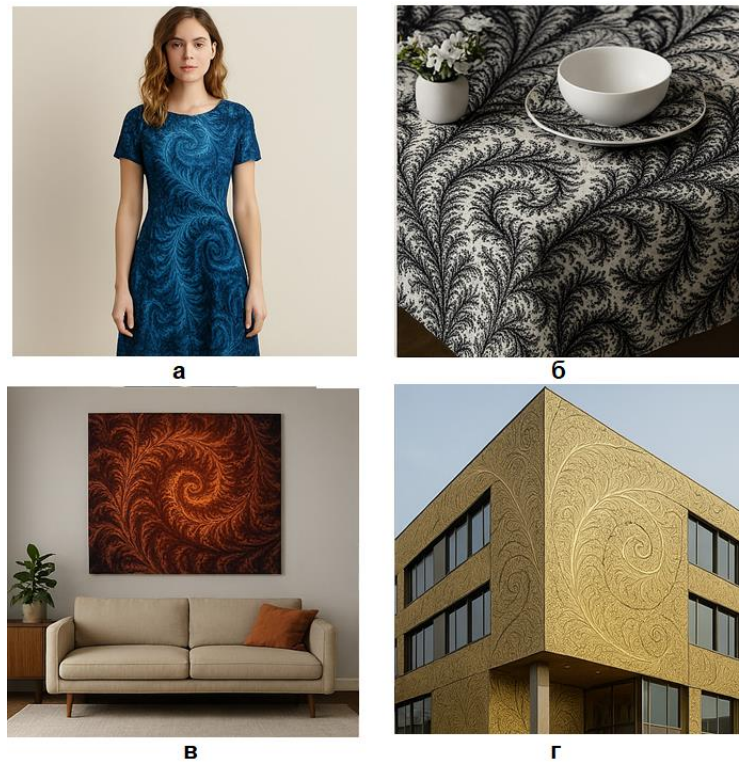


Рис. 32. Використання фракталів у дизайні: а – у fashion-дизайні одягу (фрактальний текстильний принт); б – у тканині (скатертина з фрактальним орнаментом); в – у дизайні інтер'єру – фрактальне арт-панно; г – архітектура з фрактальним фасадом

У дизайні інтер'єру (рис. 32, в) фрактальні зображення застосовуються як елементи біофільного середовища, що знижують стрес у корпоративних і житлових просторах [32].

Архітектори активно інтегрують фрактали у фасади (рис. 1, г) та системи панелей, що сприяють оживленню поверхні [37-39].

З практичної точки зору є важливим використання неліцензійних безкоштовних програмних засобів з відкритим кодом (Open-Source Software, OSS) для генерації фрактальних образів (табл. 3). Характеристики таких безкоштовних програмних засобів з відкритим кодом представлено нижче.

Порівняльна характеристика англомовних безкоштовних програмних засобів фрактального моделювання у дизайні

Програмний засіб	Рівень складності	Тип фракталів	Сфера застосування	Формат виводу (Output)
JWildfire	Середній	Fractal Flames (2D/3D)	Проектування авторських принтів, складних паттернів для шовку, текстуровання тканин.	PNG, JPG (висока роздільна здатність)
Mandelbulb 3D	Високий	Об'ємні (3D) фрактали	Моделювання футуристичних силуетів, декорів для 3D-друку, концептуальних аксесуарів.	OBJ (для 3D-моделей), High-res Render
Arpophysis 7X	Базовий	Ітераційні системи (IFS)	Створення лінійних графічних структур, ескізів для вишивки та лазерної перфорації.	BMP, JPG, експорт скриптів
Inkscape	Базовий	Векторна графіка (L-системи)	Векторизація растрових фракталів, підготовка файлів для плотерної порізки та створення лекал.	SVG, PDF, DX

Вищезазначені програмні засоби розуміють тільки англійську мову оскільки працюють виключно з математичними параметрами (числами, формулами та ітераціями). Звичайно, для навчання, можна скористуватись перекладом, але запити потрібно робити англійською мовою.

Для побудови фрактальних зображень можна використовувати безкоштовні ШІ-генератори, які можуть опрацювати текстові запити, зокрема, українською мовою. Це, наприклад, Bing Image Creator – DALL-E 3, Microsoft Designer – веб-інструмент на базі DALL-E, інструменти Copilot у Microsoft Office 365, GPT, тощо.

Нижче представлені порівняльні характеристики фрактальних інструментів ШІ для запитів українською мовою (табл. 4).

Таблиця 4.

Порівняльні характеристики інструментів ШІ, спроможних генерувати фрактали за запитом українською мовою

Назва	Тип інструменту	Як працює з фракталами	Складність
Microsoft Copilot	Універсальний ШІ	Генерує картинки (DALL-E) або пише код для побудови моделей.	Низька
ChatGPT (GPT-4o)	ШІ-асистент	Пише код (Python/JS) для точних математичних фракталів.	Низька/Середня
Claude.ai	ШІ-асистент	Створює інтерактивні візуалізації прямо в чаті (Artifacts).	Низька/Середня
Wolfram Alpha	Математичний рушій	Будує фрактал за математичною назвою чи	Середня

		формулою.	
Bing Image Creator	ШІ-генератор	Тільки художні зображення за текстовим описом.	Дуже низька

Слід звернути увагу на безкоштовний онлайн генератор-дослідник фракталів Visnos (рис. 33) [40].

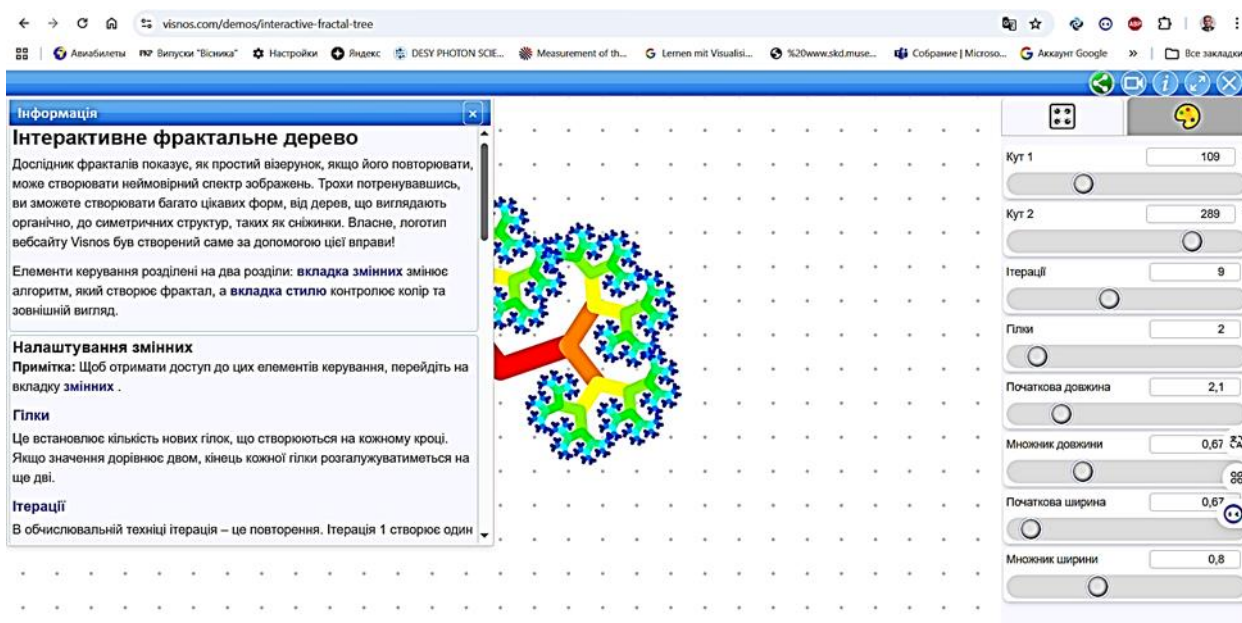


Рис. 33. Головна сторінка генератора-дослідника фракталів Visnos

Він може створювати онлайн фрактали Серпинського, деревоподібні та сніжинко подібні фрактали. Цей програмний засіб англійськомовний, містить відео-коментатор (англійською мовою), інструкцію користувача (теж англійською, але можна скористатися онлайн перекладачем на українську мову), має легко доступний інтуїтивно-зрозумілий інтерфейс для експериментування з побудови фракталів. Цей онлайн генератор фракталів може бути корисним для навчання з побудови та використання фрактальної геометрії і не тільки у дизайні.

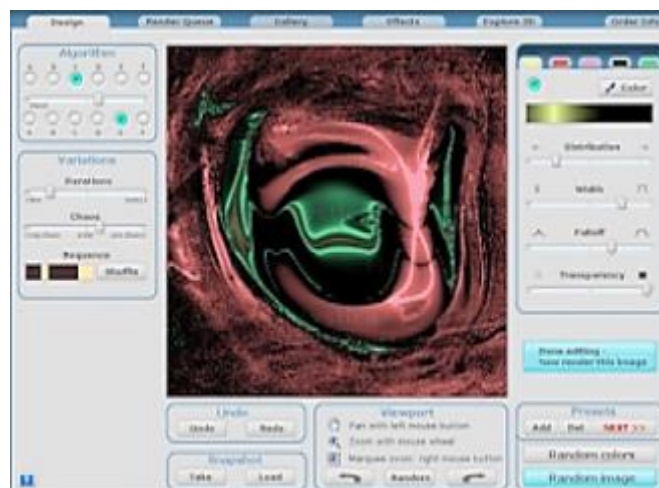
Програми фрактальної графіки автоматично генерують зображення (візерунки) шляхом математичних розрахунків. Для генерації фрактальних

зображень використовуються програмні засоби (Art Dabbler, Ultra Fractal, Fractal Explorer, ChaosPro, Apophysis, Mystica).

Apophysis – програма для генерації фракталів на основі базових фрактальних формул. Створені за готовими формулами фрактали можна редагувати і змінювати, регулюючи різноманітні параметри.



Earth Watch призначений для моделювання та демонстрації тривимірного зображення метеоумов над Землею, будувати топологічні поверхні на основі космічних знімків.



Таким чином, показано, що фрактальний дизайн – потужний інструмент, який дозволяє дизайнеру впливати на сприйняття, емоційний стан та поведінку користувача.

Сучасні наукові джерела [32-39] доводять, що фрактали здатні створювати біофільні (тобто створені з урахуванням природних закономірностей) та

комфортні середовища, які мозок людини швидко розпізнає та сприймає без напруження.

Середня фрактальна розмірність ( $D \approx 1.3-1.5$ ) є найбільш ефективною для інтер'єрів та графічних застосувань.

Фрактальні інструменти доступні як україномовним дизайнерам, так і широкому колу користувачів.

#### **Питання для самоперевірки:**

1. Як застосування фрактального аналізу у дизайні полегшує візуальному сприйняттю привабливості створеного?

2. Яким чином генеративні фрактальні комп'ютерні інструменти можуть полегшити створювати привабливі але складні зображення та продукти дизайну?

3. Що таке ітерації і як вони застосовуються в дизайні?

4. Назвіть приклади відомих фрактальних архітектурних споруд чи графічних зображень і поясніть їх фрактальність.

7. Охарактеризуйте основні риси фрактального зображення в дизайні.

8. З якої причини фрактальні зображення привабливі для людини?

## **VII. ПРАКТИЧНІ РОБОТИ «ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ І МОДЕЛЮВАННЯ В РІЗНИХ ГАЛУЗЯХ НАУКИ»**

### **7.1 ПРАКТИЧНА РОБОТА 1. ФРАКТАЛЬНИЙ R/S-АНАЛІЗ**

Завдання. Розрахувати критерій Херста та проаналізувати часовий ряд статистичних даних що до ціни на акції Tesla за 30 періодів:



Рис. 33. Інфографіка акцій Tesla за 8 місяців

**Розв'язання.** Виберемо часовий ряд статистичних даних що до ціни на акції Tesla за 30 періодів і проведемо фрактальний аналіз в середовищі MS Excel.

Виконаємо розрахунки за наступними етапами:

1. В стовпці А вставимо дати спостереження за цінами акцій Tesla за 30 періодів. Вихідні дані для проведення розрахунків можна взяти з офіційних джерел офіційної інформації (рис. 33).

2. У стовпці В – часовий ряд статистичних даних.

3. Визначимо середнє значення ціни акцій за допомогою вбудованих статистичних даних за формулою  $=AVERAGE(B2:B31)$ .

4. Знайдемо відхилення кожного значення від середнього (комірка – C2) за формулою  $=B2-\$B\$3$  і за допомогою маркера *Автозаповнення* отримаємо всі значення в діапазоні C2: C31 (рис. 34).

5. Розрахуємо накопичене відхилення (стовпчик – D) за допомогою формули  $=C3+C2$ .

H4											
=STDEV.P(\$B\$2:B4)											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Дата	Ціна акцій, $Z_i$	$(Z_i - Z_{\text{сєр.}})$	Накопичене відхилення	max	min	R	Стандартне відхилення, S	R/S	log(R/S)	log( $\tau$ )
2	1	410,04	-26,7913	-26,7913333	-26,7913	-26,7913	0				
3	2	426,07	-10,7613	-37,5526667	-26,7913	-37,5527	10,76133	8,015	1,342649	0,127963	0,30103
4	3	423,39	-13,4413	-50,994	-26,7913	-50,994	24,257	7,010831303	3,452182	0,538094	0,477121
5	4	444,72	7,888667	-43,1053333	-26,7913	-50,994	24,20267	12,36896216	1,956726	0,29153	0,60206
6	5	453,25	16,41867	-26,6866667	-26,6867	-50,994	24,30733	15,51527841	1,566671	0,194978	0,69897
7	6	413,49	-23,3413	-50,028	-26,6867	-50,994	24,30733	15,6723713	1,550967	0,190603	0,778151
8	7	435,15	-1,68133	-51,7093333	-26,6867	-51,7093	25,02267	14,69557937	1,702734	0,231147	0,845098
9	8	447,43	10,59867	-41,1106667	-26,6867	-51,7093	25,02267	14,97819478	1,670606	0,222874	0,90309
10	9	433,72	-3,11133	-44,222	-26,6867	-51,7093	25,02267	14,13594534	1,770145	0,248009	0,954243
11	10	440,1	3,268667	-40,9533333	-26,6867	-51,7093	25,02267	13,63333576	1,835403	0,263731	1
12	11	462,07	25,23867	-15,7146667	-15,7147	-51,7093	35,99467	15,49468008	2,323034	0,366056	1,041393
13	12	445,23	8,398667	-7,316	-7,316	-51,7093	44,39333	15,08162117	2,943539	0,46887	1,079181
14	13	404,35	-32,4813	-39,7973333	-7,316	-51,7093	44,39333	16,79543894	2,643178	0,422126	1,113943
15	14	395,23	-41,6013	-81,3986667	-7,316	-81,3987	74,08267	18,9856421	3,902036	0,591291	1,146128
16	15	419,4	-17,4313	-98,83	-7,316	-98,83	91,514	18,56937496	4,928222	0,69269	1,176091
17	16	430,14	-6,69133	-105,521333	-7,316	-105,521	98,20533	17,97973716	5,462	0,737352	1,20412
18	17	455	18,16867	-87,3526667	-7,316	-105,521	98,20533	18,39038328	5,340037	0,727544	1,230449
19	18	451,45	14,61867	-72,734	-7,316	-105,521	98,20533	18,43631847	5,326732	0,726461	1,255273

Рис. 34. Проведення фрактального аналізу за допомогою MS Excel.

6. Для визначення розмаху накопиченого відхилення обчислимо максимальне та мінімальне значення, скористувавшись формулами вбудованих статистичних функцій  $=\text{MAX}(\$B\$2:B3)$  та  $=\text{MIN}(\$B\$2:B3)$  і далі за допомогою маркера *Автозаповнення* отримаємо всі значення в діапазоні E2: E31 і F2:F31.

7. Далі за формулою  $= E2 - F2$  знаходимо розмах накопиченого відхилення.

8. Визначаємо середньоквадратичне відхилення S ціни акцій Tesla за 30 періодів за допомогою вбудованих статистичних функцій за формулою:  $=\text{STDEV.P}(\$B\$2:B3)$  і за допомогою маркера *Автозаповнення* отримаємо всі значення в діапазоні H3: H31.

9. На основі отриманих значень R та S розрахуємо нормований розмах у стовбці I3:I31.

10 Знайдемо логарифм відношення R/S (совпець J3:J31).

11. Побудуємо графік залежності  $\log(R/S)$  від  $\log(\tau)$  (вид діаграми **Точкова діаграма**). Для цього необхідно виділити область значень функції і аргументу, перейти на вкладку **Вставлення – Діаграми – Точкова** (рис. 35).

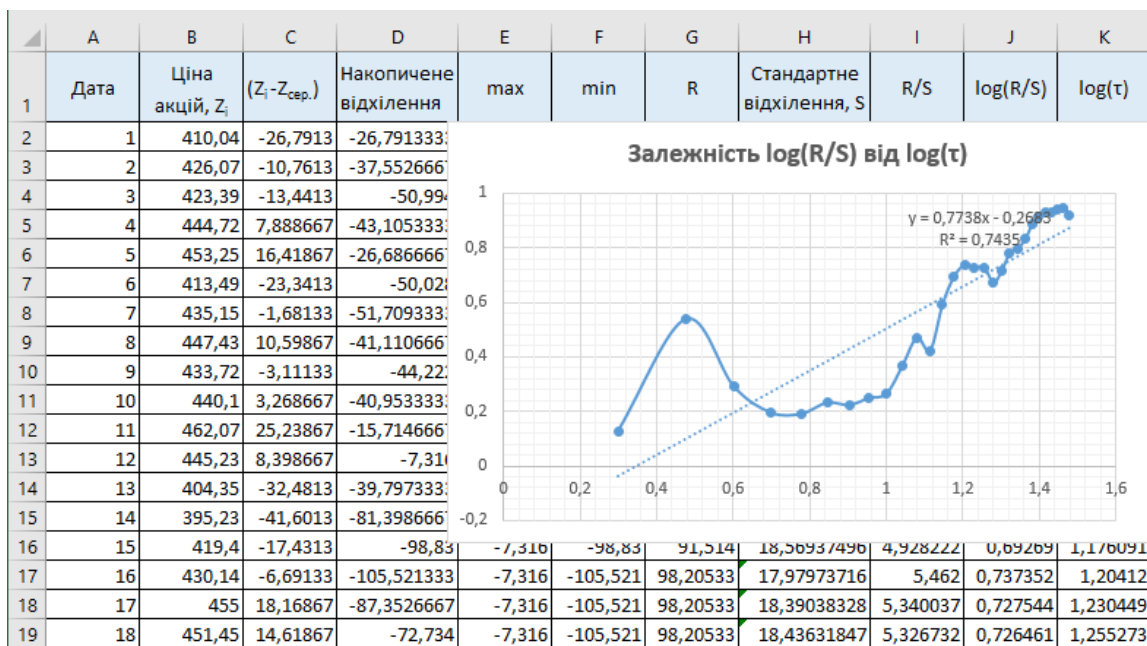


Рис. 35. R/S-траєкторія аналізованого ряду

У результаті фрактального аналізу, проведених розрахунків значення критерію Херста становить  $H=0,77$ . Це свідчить про те, що даний часовий ряд має високу персистентність ( $H>0,5$ ). Існує висока ймовірність того, що поточний тренд збережеться в найближчому майбутньому.

### 7.3 ПРАКТИЧНА РОБОТА 2.

#### ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ В МЕДИЦИНІ

**Завдання.** Знайти фрактальну розмірність  $D$  за допомогою способу підрахунку квадратів (box method) при проведенні фрактального аналізу білої речовини мозочка (рис. 36).

#### Розв'язання.

Як було сказано вище за допомогою способу підрахунку квадратів використовують морфометричні сітки. Для цього спочатку калібрували цифрові зображення та «вирізали» із них ділянку квадратної форми, що містить досліджувану структуру. Далі на квадрат із зображенням накладаємо сітку, що ділить сторону квадрата на 2. Підраховуємо кількість квадратів ( $N$ ), що містять фрагменти досліджуваної структури.

На рис. 36 представлено етапи проведення фрактального аналізу досліджуваної структури. Послідовно накладаємо сітки, що ділять сторону квадрата на 4, 8, 16 та 32 і т.д. частини. Тобто, на кожному етапі у 2 рази зменшують розмір сторони квадратів морфометричної сітки. На кожному етапі підраховуємо кількість квадратів, що містять фрагменти досліджуваної структури.

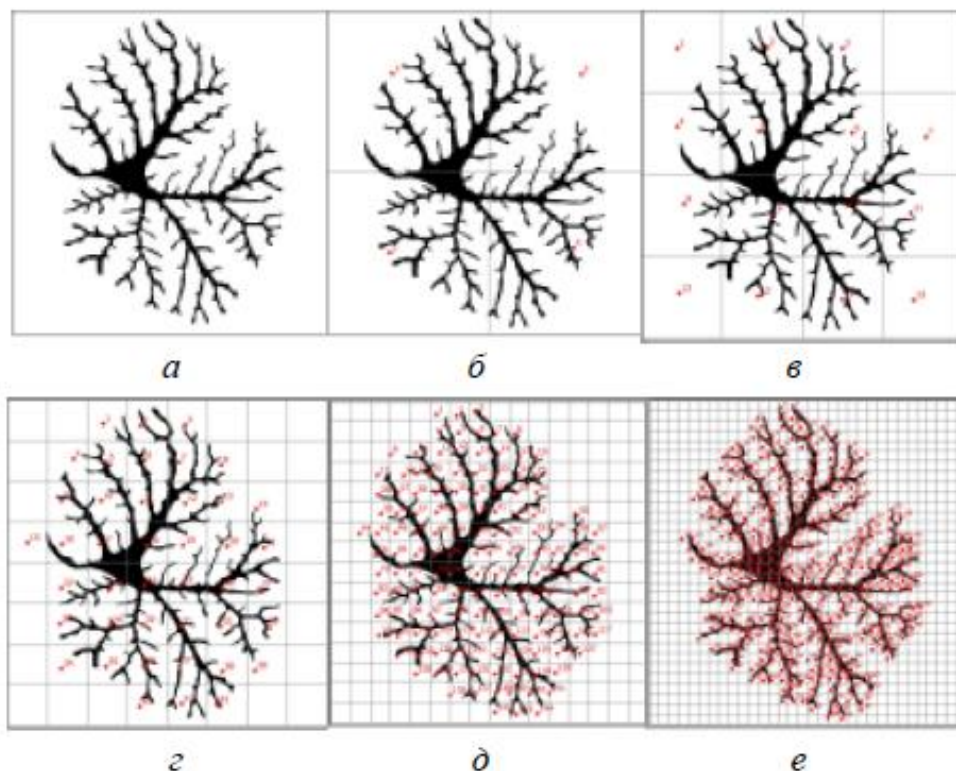


Рис. 36. Морфологічне дослідження при проведенні фрактального аналізу білої речовини мозочка способом підрахунку квадратів

Побудуємо графік залежності  $\ln(N)$  від  $\ln(1/a)$  (вид діаграми **Точкова діаграма**). Для цього необхідно виділити область значень функції і аргументу, перейти на вкладку **Вставлення – Діаграми – Точкова** (рис. 37).

D2					
=LN(1/B2)					
	A	B	C	D	E
1	Етапи дослідження	Розмір комірки, $a$	Кількість заповнених квадратів (N)	$\ln(1/a)$	$\ln(N)$
2	1	1/2	4	0,6931	1,3863
3	2	1/4	15	1,3863	2,7081
4	3	1/8	42	2,0794	3,7377
5	4	1/16	144	2,7726	4,9698
6	5	1/32	412	3,4657	6,0210

Рис. 37. Етапи підрахунку фрактальної розмірності досліджуваної структури способом підрахунку квадратів

За результатами підрахунку фрактальної розмірності отримано рівняння лінійної регресії  $y=1,6636x+0,3052$  з вірогідністю апроксимації  $R^2=0,9985$ . Отже, значення фрактальної розмірності дорівнює  $D=1,6636$  (рис. 38).

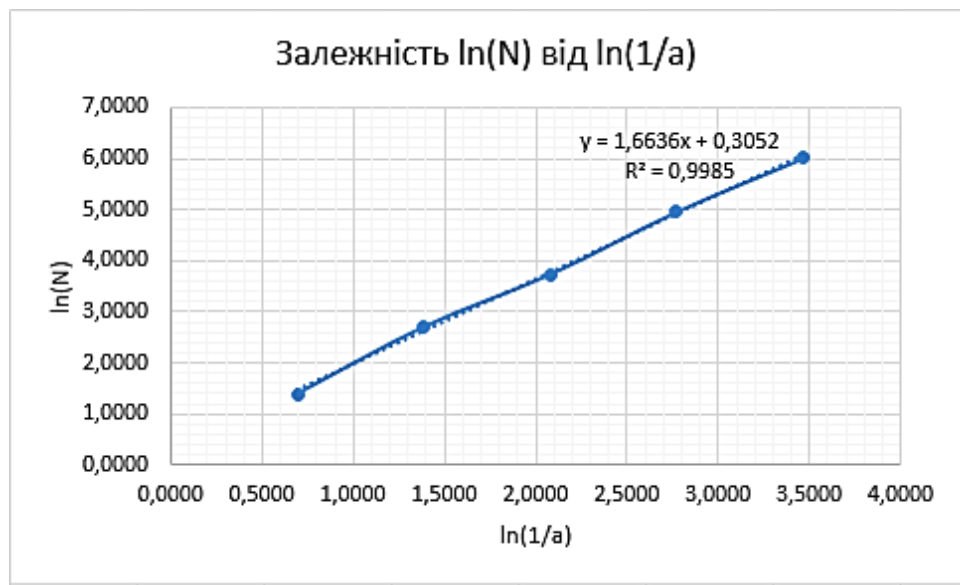


Рис. 38. Визначення фрактальної розмірності досліджуваної структури

### 7.3. ПРАКТИЧНА РОБОТА 3.

#### ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ У ФІЗИЦІ. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ ДО ОЦІНКИ СТРУКТУРИ ТА ВЛАСТИВОСТЕЙ МЕТАЛІВ

Завдання 1. Знайти фрактальну розмірність  $D$  за допомогою способу підрахунку квадратів (box method) при проведенні фрактального аналізу

двовимірного зображення зламу (D) при випробуваннях на ударний вигін зразків сплаву Ст20К (рис. 39).

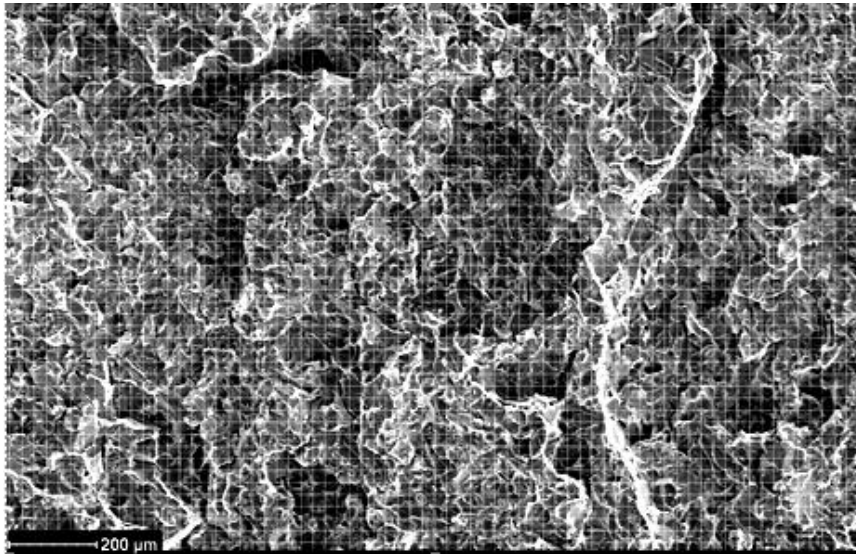


Рис. 39. Застосування методу комірок (box method) для визначення фрактальної розмірності поверхонь зламів (D) при випробуваннях на ударний вигін зразків сплаву Ст20К

Розв'язання. На рис. 40 представлено етапи підрахунку фрактальної розмірності досліджуваної структури способом підрахунку квадратів.

D2					
=LN(1/B2)					
	A	B	C	D	E
	Етапи дослідження	Розмір комірки, a	Кількість заповнених квадратів (N)	$\ln(1/a)$	$\ln(N)$
1					
2	1	2	4200	-0,69315	8,34284
3	2	4	1250	-1,38629	7,130899
4	3	8	410	-2,07944	6,016157
5	4	16	135	-2,77259	4,905275
6	5	32	44	-3,46574	3,78419

Рис. 40. Етапи підрахунку фрактальної розмірності досліджуваної структури поверхонь зламів (D) при випробуваннях на ударний вигін зразків сплаву Ст20К

На рис. 41 представлен графік залежності  $\ln(N)$  від  $\ln(1/a)$ .

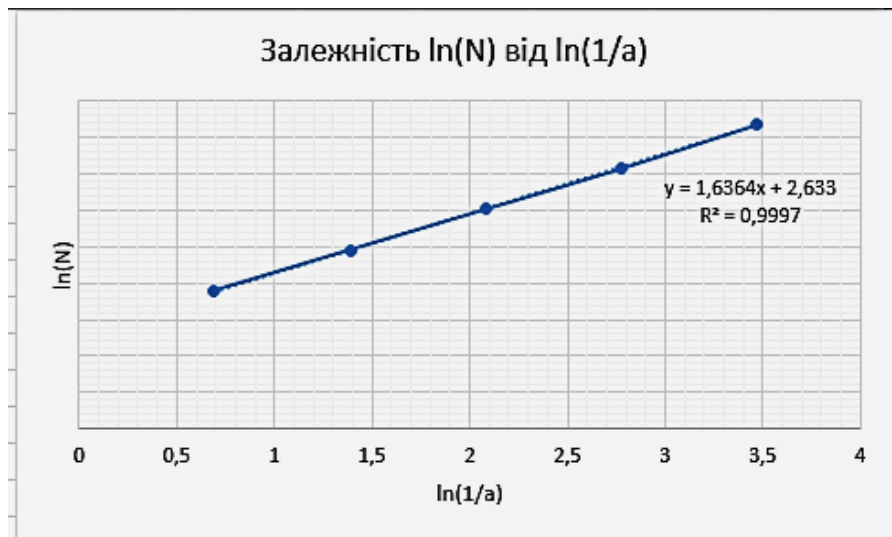
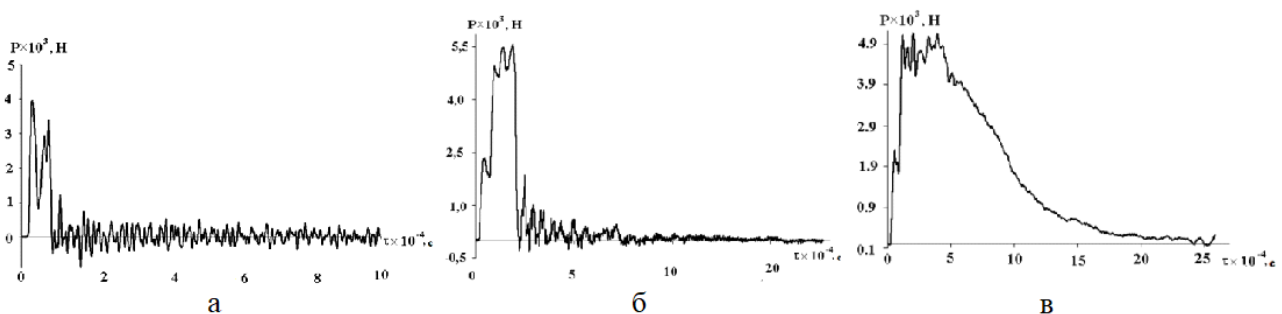


Рис. 41. Визначення фрактальної розмірності

За результатами підрахунку фрактальної розмірності отримано рівняння лінійної регресії  $y=1,63x+2,63$  з вірогідністю апроксимації  $R^2=0,9997$  (рис. 41). Отже, значення фрактальної розмірності дорівнює  $D=1,63$ .

У науковій літературі показано, що застосування фрактального підходу при аналізі особливостей втомного руйнування показує, що фрактальна розмірність як кількісний параметр будови поверхні ізлому взаємозв'язаний з параметрами опору втомному руйнуванню [41]. Цей висновок дає можливість використовувати фрактальний аналіз при аналізі причин втомного руйнування.

Як приклад розглянемо профілі кривих «навантаження – час»  $P(\tau)$  при випробуванні на ударний вигин зразків, вирізаних зі сплаву Ст20К при температурах випробування  $-50^\circ\text{C}$  (а) (відповідає крихкому руйнуванню),  $+20^\circ\text{C}$  (б) (відповідає змішаному характеру руйнування) та  $+50^\circ\text{C}$  (в) (відповідає в'язкому характеру руйнування) (рис. 42).

Рис. 42. Профілі кривих «навантаження – час»  $P(\tau)$

Для визначення фрактальної розмірності можна використати метод підрахунку квадратів різного розміру, що покривають криву (як це було раніше показано на рис. 39). Приклад покриття кривої (рис. 39, а) показаний на рис. 43.

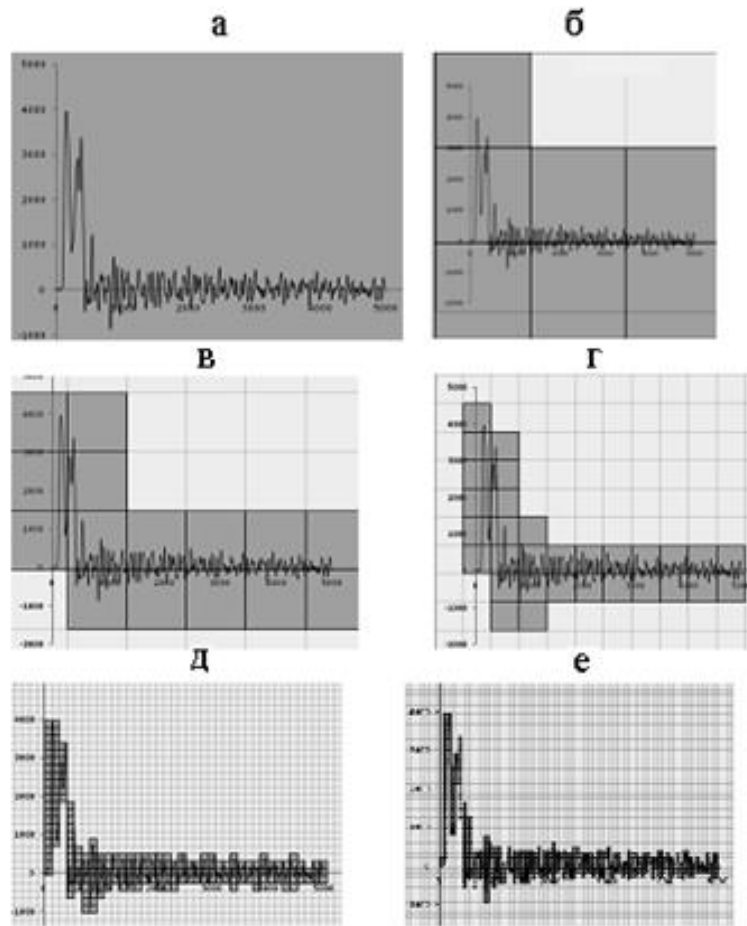


Рис. 43. До визначення фрактальної розмірності діаграми руйнування, відображаючої залежність навантаження від часу методом підрахунку комірок – (box-counting method)

За експериментальними даними розв'яжіть завдання.

Завдання 2. Після застосування методу комірок (box method) для визначення фрактальної розмірності діаграми руйнування при випробуванні на ударний вигин зразків, вирізаних зі сплаву Ст20К при температурах випробування  $-50^{\circ}\text{C}$ , отримали такі дані (рис. 44). Визначити значення фрактальної розмірності  $D$ .

	Розмір комірки,а	Кількість заповнених квадратів (N)
17		
18	1/3	7
19	1/6	15
20	1/12	33
21	1/24	146
22	1/48	272

Рис. 44. Таблиця в Excel з вихідними параметрами завдання 1

Розв'язок.

1. Сформуємо таблицю в Excel з вихідними параметрами.
2. Розрахуємо значення  $\ln(N)$  від  $\ln(1/a)$  за допомогою інструментів MS Excel і занесемо в таблицю (рис. 45).

	Розмір комірки,а	Кількість заповнених квадратів (N)	$\ln(1/a)$	$\ln(N)$
17				
18	1/3	7	1,098612	1,94591
19	1/6	15	1,791759	2,70805
20	1/12	33	2,484907	3,496508
21	1/24	146	3,178054	4,983607
22	1/48	272	3,871201	5,605802

Рис. 45. Етапи підрахунку фрактальної розмірності діаграми руйнування при випробуваннях на ударний вигін зразків сплаву Ст20К при температурах випробування  $-50^{\circ}\text{C}$

3. Виділимо два останні стовпчика в таблиці і побудуємо діаграму залежності  $\ln(N)$  від  $\ln(1/a)$  (рис. 46). З рис. 46 видно, що фрактальна розмірність дорівнює  $D= 1,38$ .

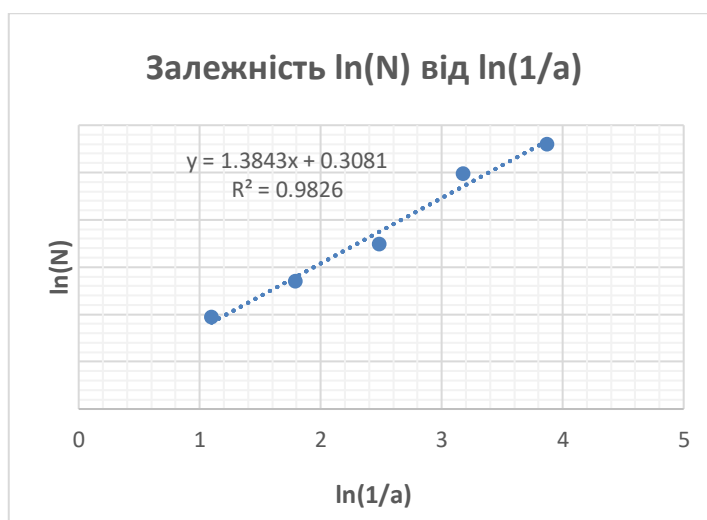


Рис. 46. Визначення фрактальної розмірності діаграми руйнування при випробуваннях на ударний вигін зразків сплаву Ст20К при температурах випробування  $-50^{\circ}\text{C}$

Аналогічно можна провести фрактальний аналіз для підрахунку фрактальної розмірності діаграм руйнування при випробуваннях на ударний вигін зразків сплаву Ст20К при температурах випробування  $+20^{\circ}$  і  $+50^{\circ}\text{C}$ .

Проведений аналіз показав, що фрактальна розмірність ( $D$ ) кривої, отриманої при  $-50^{\circ}\text{C}$   $D_{-50} = 1,38$ ; при  $+20^{\circ}\text{C}$   $D_{+20} = 1,33$ ; а при  $+50^{\circ}\text{C}$   $D_{+50} = 1,28$ .

Процес визначення фрактальної розмірності можна автоматизувати за допомогою комп'ютерних програмних засобів. Наприклад, можна застосувати інструменти HarFA (Harmonic and Fractal Image Analyzer) [42]. Унікальною характеристикою HarFA є те, що вона дає кількість точок, що потрапили на лінію, відповідну даним графіка в подвійному логарифмічному масштабі [43]. Приклад використання комп'ютерної програми HarFA представлений на рис. 47. Програма спочатку перетворює знімок зламу у чорно-біле зображення, а потім, використовуючи накладання сіток різного масштабу на зображення, будує графік  $\lg N(\ell) = f(\lg \ell_i)$  і визначає відповіді рівняння регресії. Причому показує окремо рівняння, знайдені для чорно-білих контурів, для суми чорних і чорно-білих, а також для суми білих і чорно-білих контурів.

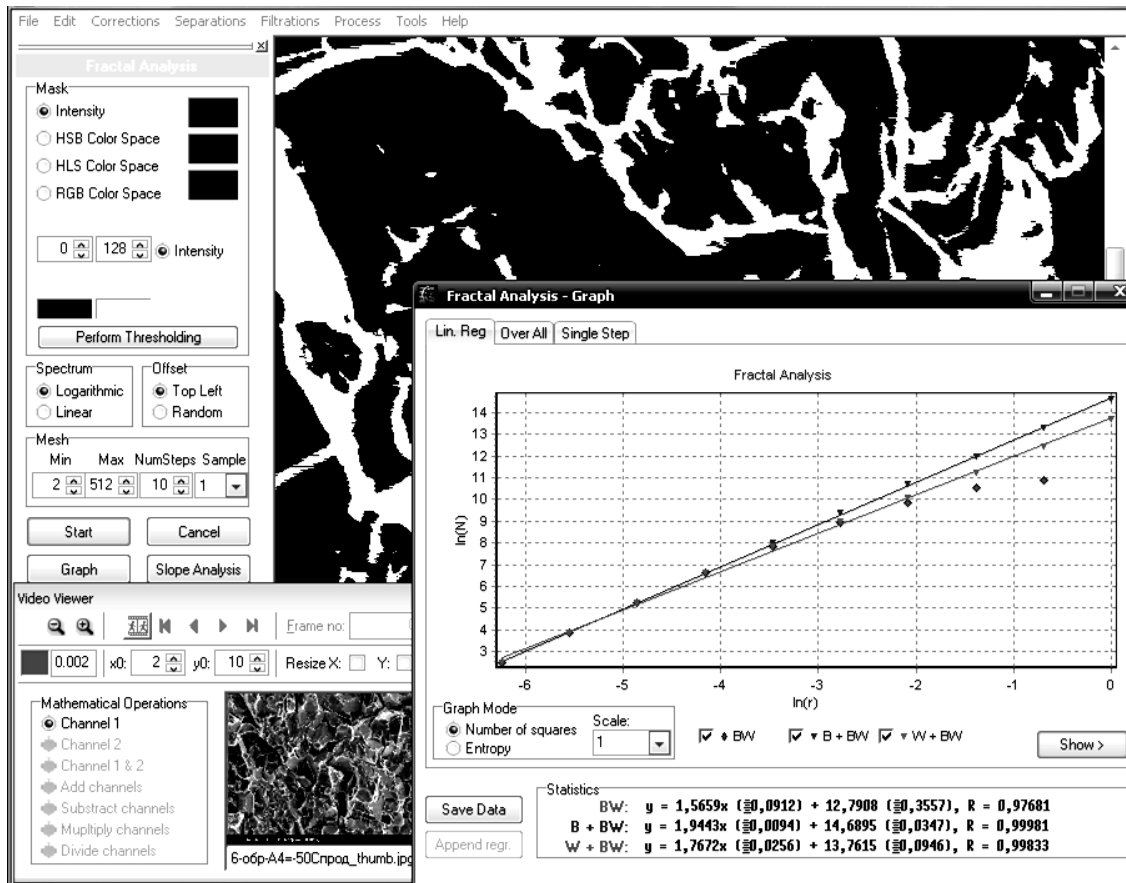


Рис. 47. Приклад використання комп'ютерної програми HarFA

Іншим прикладом є комп'ютерний програмний інструмент для визначення фрактальної розмірності двовірного зображення «Fractal Dimension Estimator» (рис. 48) [44]. Цей інструмент значно простіший у користуванні. Достатньо скопіювати фрактальне зображення та вставити його у програму, яка автоматично побудує відповідний графік та покаже величину фрактальної розмірності, а також коефіцієнт достовірності її встановлення.

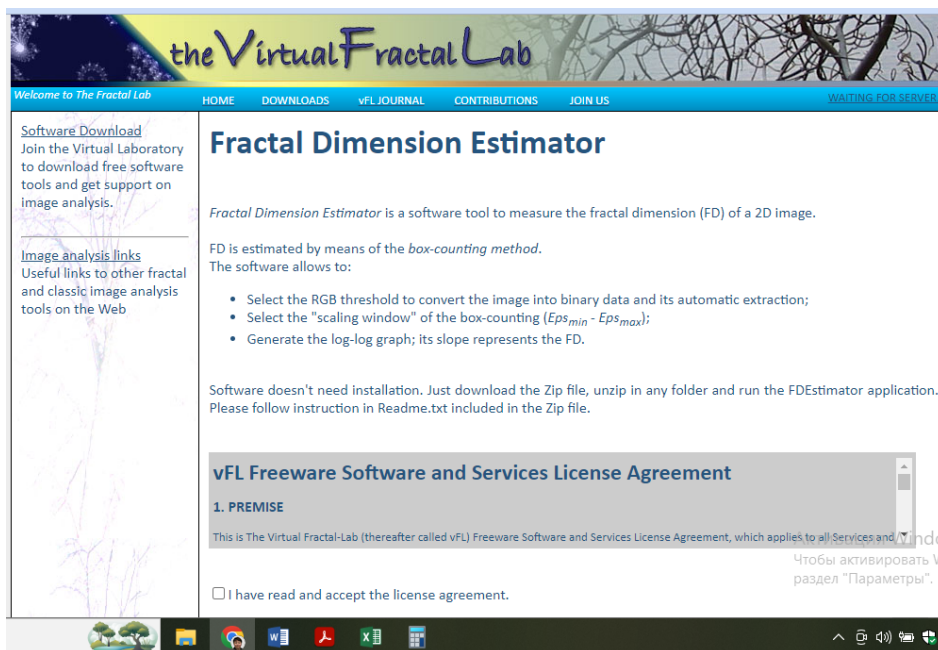


Рис. 47. Комп'ютерний інструмент для визначення фрактальної розмірності двомірного зображення «Fractal Dimension Estimator»

Завдання 3. Знайти фрактальну розмірність кривих на рис. 42, використовуючи програму «Fractal Dimension Estimator»

Розв'язання. Встановимо програму «Fractal Dimension Estimator» на комп'ютер. Скопіюємо кожне з кривих на рис. 42 та вставимо по черзі у відповідне поле програмного засобу (рис. 48).

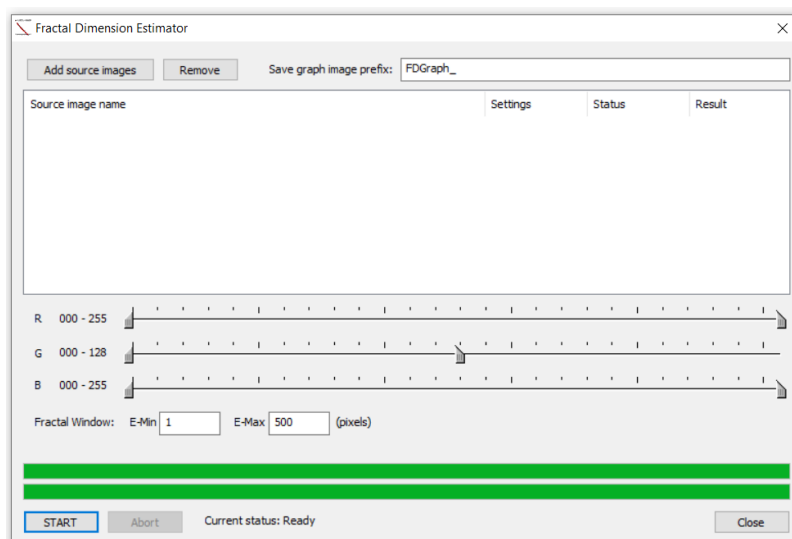


Рис. 48. Поле для вставлення фрактального об'єту

Результат аналізу представлений на рис. 49.

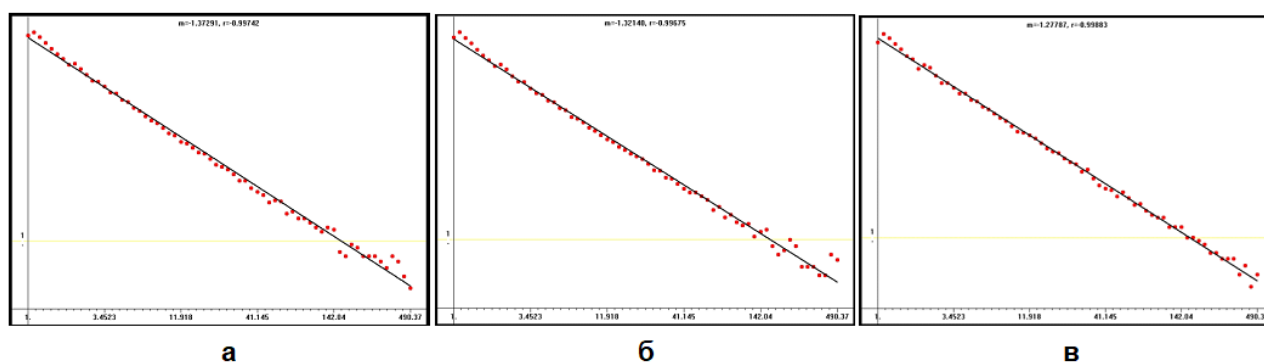


Рис. 49. Результат аналізу фрактальної розмірності кривих показаних на рис. 42.

Проведений аналіз показав, що фрактальна розмірність ( $D$ ) кривої, отриманої при  $-50^{\circ}\text{C}$   $D_{-50} = 1,37$ ; при  $+20^{\circ}\text{C}$   $D_{+20} = 1,32$ ; а при  $+50^{\circ}\text{C}$   $D_{+50} = 1,28$ .

Таким чином, показано, що крихкому руйнуванню при випробуваннях на ударний вигин відповідає більша величина фрактальної розмірності, а в'язкому – менша.

Завдання 4. За даними рис. 50 запишіть функцію залежності  $\ln(N)$  від  $\ln(L)$ . Перевірте значення фрактальної розмірності  $D$  за даними завдання.

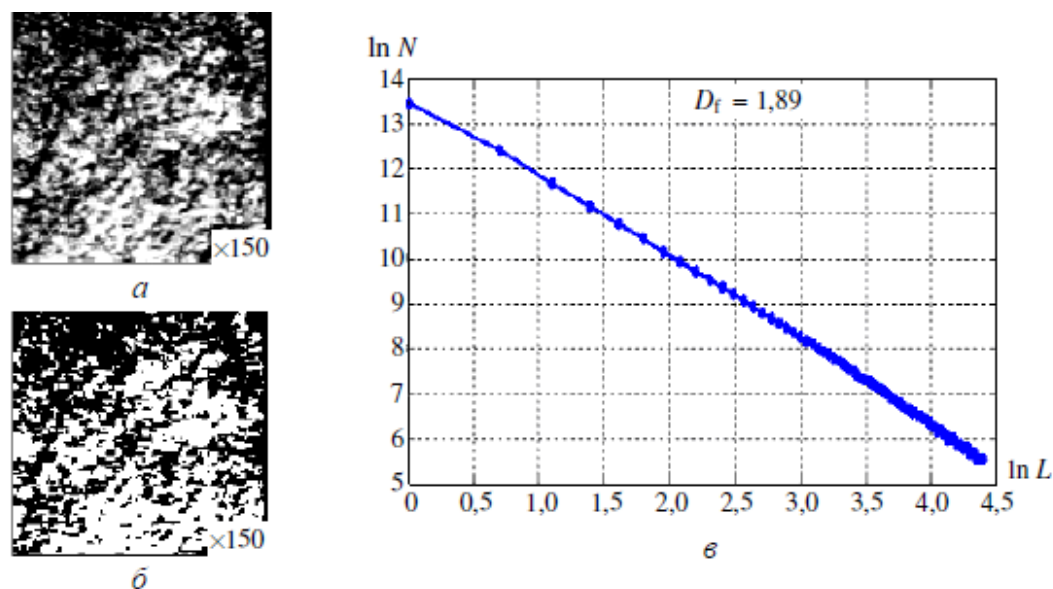


Рис. 50. До розв'язання завдання 4

Відповідь:  $\text{tg}(\alpha) = 2,5/1,5 = 1,67$   $y = -1,67x + 13,5$

### Питання для самоперевірки

1. Який метод називають метод підрахунку квадратів (box method) при проведенні фрактального аналізу?
2. Які вбудовані статистичні функції ви знаєте?
3. Які статистичні функції потрібно знати для виконання роботи «Фрактальний R/S-аналіз»?
4. Визначте основні поняття необхідні для виконання практичних робіт.
5. Повторіть основні етапи роботи з табличним процесором Ms Excel.
6. Повторіть алгоритм обчислення фрактальної розмірності та критерію Херста в середовищі Excel.
- 7 Яку формулу треба ввести для знаходження середньоквадратичного відхилення  $S$ ?
8. Як побудувати графік залежності  $lg\left(\frac{R_\tau}{S_\tau}\right)$  від  $lg(\tau)$  ( $R/S$ -траєкторію)?
9. Як знайти рівняння апроксимації?
10. Що означає, що даний часовий ряд має високу персистентність?
11. Як знайти коефіцієнт надійності апроксимації?
13. Як фрактальна розмірність пов'язана з фізичними властивостями досліджуваного матеріалу? Наведіть приклади.
14. Які висновки можна зробити після фрактального аналізу поверхонь після крихкого руйнування при випробуваннях на ударний вигин сплаву Ст20К?
15. Які програми фрактальної графіки Вам знайомі?
16. На рисунках представлені два алгоритми фрактального аналізу: за допомогою класичного способу (рис. 51) підрахунку квадратів і визначення розмірності Гаусдорфа (рис. 52). Визначте фрактальну розмірність. Порівняйте результат.

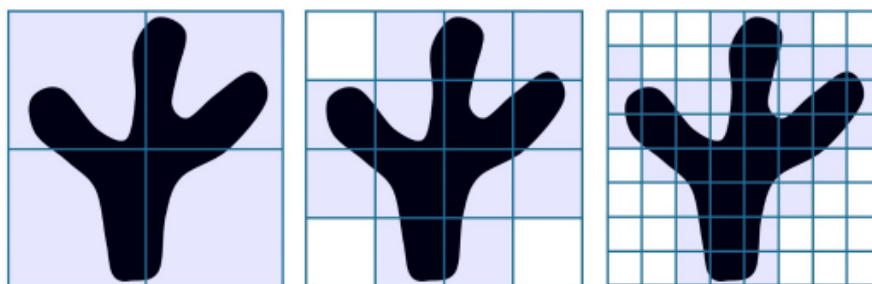


Рис. 51. Фрактальний аналіз за допомогою способу підрахунку квадратів

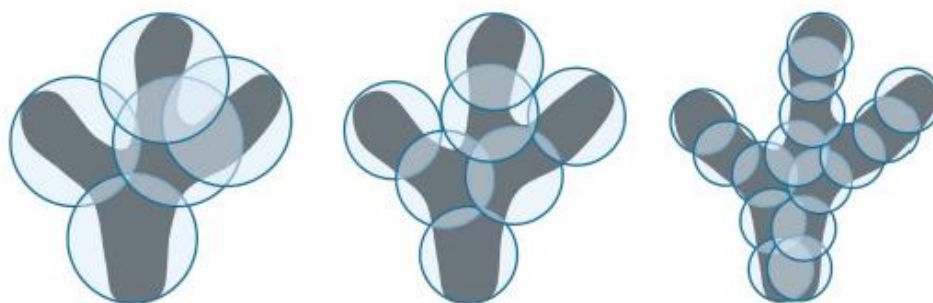


Рис. 52. Фрактальний аналіз. Визначення розмірності Гаусдорфа

## ПІСЛЯМОВА

Фрактальний аналіз і моделювання є потужним інструментом для опису складних систем, які мають властивість самоподібності та нерегулярності. Його головна суть полягає в тому, що він дозволяє працювати з хаотичними процесами без спрощення їхньої природи, надаючи більш точний і реалістичний опис. Перевагою є універсальність застосування — від фізики та матеріалознавства до біології, медицини, економіки, екології та комп'ютерних наук. Він забезпечує точність моделювання, відкриває можливості для прогнозування нестабільних процесів і створює міждисциплінарні зв'язки, об'єднуючи математику, природничі та соціальні науки. Водночас недоліками залишаються складність математичного апарату, високі обчислювальні витрати та труднощі інтерпретації результатів для практичних користувачів, що обмежує його масове застосування.

Отже, фрактальний аналіз є міждисциплінарним методом, який дозволяє моделювати хаос і самоподібність у природних та соціальних системах, але потребує значних ресурсів і спеціальної підготовки для ефективного використання. Він відкриває нові горизонти для науки, проте вимагає обережності й глибокого розуміння при практичному впровадженні.

ДЛЯ ПОТАТКІВ

ДЛЯ НОТАТКІВ

ДЛЯ НОТАТКІВ

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Лаврик В.В., Алексеева Г. М., Шакірова Л. Т., Овсянніков О. С. Методи впровадження фрактальної геометрії в навчальний процес і створення методичних матеріалів. *Суспільство та національні інтереси : електронний науковий журнал*. 2025. № 4(12). С. 229–237. URL: <https://perspectives.pp.ua/index.php/sni/article/view/22185/22158>
2. Фрактали. URL: <https://fractals-math.blogspot.com/>
3. Грушова Є.Р., Походошук К.В., Ковальчук М.Б. Практичне застосування фракталів. URL: <https://ir.lib.vntu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/48051/24565.pdf?sequence=3&isAllowed=y>
4. Mandelbrot B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco, 1982. 468 p. URL: <https://lab.semi.ac.cn/library/upload/files/2019/1/412557940.pdf>
5. Лотфи Заде и его нечёткая логика. URL: <https://skillbox.ru/media/code/lotfi-zade-i-ego-nechyetkaya-logika/#:>
6. Lofti A. Zadeh. Fuzzy Logic. *Computer*. 1988. Vol. 21, No. 4. P. 83-93. URL: [https://www.scss.tcd.ie/Khurshid.Ahmad/Teaching/Lectures\\_on\\_Fuzzy\\_Logic/00000\\_053.pdf](https://www.scss.tcd.ie/Khurshid.Ahmad/Teaching/Lectures_on_Fuzzy_Logic/00000_053.pdf)
7. Zadeh, L. Fuzzy sets. *Information and Control*. 1965. 8(3). P. 338-353. URL: [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
8. Sanchez-Roger, M., Oliver-Alfonso, M. D., & Sanchís-Pedregosa, C. Fuzzy Logic and Its Uses in Finance: A Systematic Review Exploring Its Potential to Deal with Banking Crises. *Mathematics*, 2019. Vol. 7, No. 11. P. 1091. URL: <https://doi.org/10.3390/math7111091>
9. Rosário, A. T., Dias, J. C., & Ferreira, H. Bibliometric Analysis on the Application of Fuzzy Logic into Marketing Strategy. *Businesses*. 2023. Vol. 3, No. 3. P. 402-423. URL: <https://doi.org/10.3390/businesses3030025>

10. Aliyev E., Habibov I., Veliyev V., Hasanova T. The use of fuzzy logic for risk assessment in the Construction projects. *Economics and Region*. 2021. Vol. 3, No. 82. P. 133-137. URL: [https://eir.nupp.edu.ua/files/2021/3\\_82\\_2021.pdf](https://eir.nupp.edu.ua/files/2021/3_82_2021.pdf)

11. Зінов'єва О. Використання нечіткої логіки в системах прийняття рішень. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2025. Т. 2, № 1(92). С. 71-75. URL: [https://journals.kntu.kherson.ua/index.php/visnyk\\_kntu/article/view/855/820](https://journals.kntu.kherson.ua/index.php/visnyk_kntu/article/view/855/820)

12. Струк К. О., Кавецька А. В., Сачанюк-Кавецька Н. В. Варіант класифікації фракталів. *Матеріали Всеукраїнської науково-практичної інтернет-конференції «Молодь в науці: дослідження, проблеми, перспективи (МН-2023)»*, Вінниця, 22 червня 2023 р. URL: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/mn/mn2023/paper/view/17079>

13. Wu, J., Jin, X., Mi, S., & Tang, J. An effective method to compute the box-counting dimension based on the mathematical definition and intervals. *Results in Engineering*. 2020, 6, 100106. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2020.100106>

14. Pólya, G. Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz. *Math. Ann.* 1921. Vol. 84. P. 149–160. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01458701>.

15. Masters, B. R. Fractal Analysis of the Vascular Tree in the Human Retina. *Annual Review of Biomedical Engineering*. 2004. Vol. 6. P. 427-452. URL: <https://doi.org/10.1146/annurev.bioeng.6.040803.140100>

16. Jabbarov, J. (2020). Fractal Structure and Fractal Measurement of Pulmonary Vascular Systems. *RA Journal of Applied Research*. 2021. Vol. 7, No. 12. P. 2706–2711. URL: <https://doi.org/10.47191/rajar/v7i12.03>

17. Anarova, S.A., Ibrohimova, Z.E., Narzulloyev, O.M., Qayumova, G.A. Mathematical Modeling of Pascal Triangular Fractal Patterns and Its Practical Application. In: Singh, M., Kang, DK., Lee, JH., Tiwary, U.S., Singh, D., Chung, WY. (eds) Intelligent Human Computer Interaction. IHCI 2020. *Lecture Notes in Computer Science*. 2021. Vol. 12615. Springer, Cham. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-68449-5\\_39](https://doi.org/10.1007/978-3-030-68449-5_39)

18. Bubnov R. V., Melnyk I. M. The methods of fractal analysis of diagnostic images. Initial clinical experience. *Лікарська справа*. 2011. № 3-4. С. 108-113. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/LiSp\\_2011\\_3-4\\_18](http://nbuv.gov.ua/UJRN/LiSp_2011_3-4_18)

19. Можливості фрактального аналізу медичних діагностичних зображень. Первинний клінічний досвід. URL: [https://www.imath.kiev.ua/~eumls/mlsseminar/abstracts/file\\_2011\\_05\\_20\\_Bubnov\\_1.pdf](https://www.imath.kiev.ua/~eumls/mlsseminar/abstracts/file_2011_05_20_Bubnov_1.pdf)

20. Берзлев О.Ю. Методика передпрогнозного фрактального аналізу часових рядів. *Збірник наукових праць «Управління розвитком складних систем»*. 2013, № 16. С 76-81. URL: <https://urss.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-16/17.pdf>

21. Hurst H.E., Black R.P., Simaika Y.M. Storage. An experimental study. London: Constable & Co Ltd, 1965. 144 p. URL: <https://depts.washington.edu/sjbx/Burges/Long-Term%20Storage-Hurst-Black-Simaika-1965.pdf>

22. García, Maria & Ramos Requena, José Pedro. Different methodologies and uses of the hurst exponent in econophysics. *Econophysics: Applications in the Field of Economics*. 2019. Vol. 37, No. 2. 10.25115/eea.v37i2.2603. URL: <https://ojs.ual.es/ojs/index.php/eea/article/view/2603>

23. Максишко Н. К. Моделювання економіки методами дискретної нелінійної динаміки : монографія. Запоріжжя: Поліграф, 2009. 416 с. URL: <https://www.scribd.com/document/732484955/>

24. Усов В. В. Фрактальна природа анізотропії фізичних властивостей деформованих металевих систем з кубічними ґратами. Одеса: ТЕС, 2001. 130 с. URL: [http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis\\_nbuv/cgiirbis\\_64.exe?Z21ID=&I21DBN=EC&P21DBN=EC&S21STN=1&S21REF=10&S21FMT=JwU\\_B&C21COM=S&S21CNR=20&S21P01=0&S21P02=0&S21P03=U=&S21COLORTERMS=0&S21STR=%D0%92378.2,021\\$](http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?Z21ID=&I21DBN=EC&P21DBN=EC&S21STN=1&S21REF=10&S21FMT=JwU_B&C21COM=S&S21CNR=20&S21P01=0&S21P02=0&S21P03=U=&S21COLORTERMS=0&S21STR=%D0%92378.2,021$)

25. Kashtanov, Arseny & Petrov, Yu. Fractal models in fracture mechanics. *International Journal of Fracture*. 2004. Vol. 128. P. 271-276. URL:

[https://www.researchgate.net/publication/226355711\\_Fractal\\_models\\_in\\_fracture\\_mechanics](https://www.researchgate.net/publication/226355711_Fractal_models_in_fracture_mechanics)

26. Наноматеріали, нанотехнології, нанопристрої. Боровий М.О., Куницький Ю.А., Каленик О.О., Овсієнко І.В., Цареградська Т.Л. Київ: «Інтерсервіс», 2015. 350 с. URL: [https://gen.phys.knu.ua/files/nanomaterials\\_nanotech.pdf](https://gen.phys.knu.ua/files/nanomaterials_nanotech.pdf)

27. Lazzari, S., Nicoud, L., Jaquet, B., Lattuada, M., & Morbidelli, M. Fractal-like structures in colloid science. *Advances in Colloid and Interface Science*. 2016. Vol. 235. P. 1-13. <https://doi.org/10.1016/j.cis.2016.05.002>

28. Artyukov, I., Bellucci, S., Kolesov, V., Levin, V., Morokov, E., Polikarpov, M., & Petronyuk, Y. (). Studies of Fractal Microstructure in Nanocarbon Polymer Composites. *Polymers* 2024, 16(10), 1354. <https://doi.org/10.3390/polym16101354>

29. Usov, V.V., Shkatulyak, N.M. & Titenkov, A.N. Nature of the short-range decomposition of a Cu-10 at % Ni alloy upon annealing. *Metally*. 2010, 418–424. <https://doi.org/10.1134/S0036029510050113>

30. Usov, V.V., Gopkalo, E.E., Shkatulyak, N.M. et al. Texture, microstructure, and fractal features of the low-cycle fatigue failure of the metal in pipeline welded joints. *Metally*. 2015. Vol. 2015. P. 759–770. <https://doi.org/10.1134/S0036029515090128>

31. Robles, K. E., Roberts, M., Viengkham, C., Smith, J. H., Rowland, C., Moslehi, S., Stadlober, S., Lesjak, A., Lesjak, M., Taylor, R. P., Spehar, B., & Sereno, M. E. (. Aesthetics and Psychological Effects of Fractal Based Design. *Frontiers in Psychology*, 2021. 12, 699962. URL: <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.699962>

32. Fractals: Nature's Healing Patterns in Design. URL: <https://metropolismag.com/viewpoints/fractals-natures-healing-patterns-in-design/>

33. Metropolis. <https://metropolismag.com/viewpoints/fractals-natures-healing-patterns-in-design/>

34. Martins, M.J.D. From Fractal Geometry to Fractal Cognition: Experimental Tools and Future Directions for Studying Recursive Hierarchical Embedding. *Fractal Fract.* 2025, 9. P. 654. URL: <https://doi.org/10.3390/fractalfract9100654>
35. Smith J., Rowland C., Moslehi S., Taylor R., Lesjak A., Lesjak M., Stadlober S., Lee L., Dettmar J., Page M., Himes J. Relaxing floors: fractal fluency in the built environment. *Nonlin. Dyn. Psychol. Life Sci.* 2020, 24 (1). P. 127-141. URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/31855554>
36. Robles, K.E., Liaw, N.A., Taylor, R.P. *et al.* A shared fractal aesthetic across development. *Humanit Soc Sci Commun.* 2020. 7, 158 URL: <https://doi.org/10.1057/s41599-020-00648-y>
37. Owen E., Rowland C., Philliber S., Sereno M. E., and Taylor R. P. Using Fractal Iconography to Emulate Nature's Aesthetics. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences.* 2024. Vol. 28, No. 1. P. 111-120. URL: <https://bpb-us-e1.wpmucdn.com/blogs.uoregon.edu/dist/e/12535/files/2024/02/art2801-5LITE-d7af36d9f9251a39.pdf>
38. The Architect Diary. URL: <https://thearchitectsdiary.com/fractal-in-architecture-harmony-in-nature/>
39. Fractal in Architecture: Harmony in Nature. URL: <https://thearchitectsdiary.com/fractal-in-architecture-harmony-in-nature/>
40. Visnos: online Fractal Creat (Sierpinski, Threes, Snowflakes. URL: <https://www.visnos.com/demos/interactive-fractal-tree>
41. Usov, V. V., Rabkina, M., Shkatulyak, N., Savchuk, E., & Shtofel, O. (2019). Anisotropy of Fractal Dimensions of Fractures and Loading Curves of Steel Samples During Impact Bending. *Iranian Journal of Materials Science and Engineering.* 2020. Vol. 17, No. 4. P. 142–151. <https://doi.org/10.22068/IJMSE.17.4.142>
42. Harfa: download. URL: [http://www.fch.vut.cz/lectures/imagesci/includes/harfa\\_download.inc.php](http://www.fch.vut.cz/lectures/imagesci/includes/harfa_download.inc.php)
43. Hadzieva E., Bogatinoska D.C., Gjergjeska L.et. all. Review of the Software Packages for Estimation of the Fractal Dimension. ICT Innovations 2015

<http://proceedings.ictinnovations.org/attachment/paper/376/review-of-the-software-packages-for-estimation-of-the-fractal-dimension.pdf>

44. Fractal Dimension Estimator <http://www.fractal-lab.org/Downloads/FDEstimator.html>

45. Kupczynski, M. (2024). Mathematical modeling of physical reality: From numbers to fractals, quantum mechanics and the standard model. *Entropy*, 26(2), 123. <https://doi.org/10.3390/e26020123>

46. Banerjee, S., & Dutta, P. (Eds.). (2023). *Interplay of fractals and complexity in mathematical modelling and physical patterns: Proceedings of ISMAFDS 2023*. Springer. (doi.org in Bing)

47. Mandelbrot, B. B. (1982). *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman.

48. Feder, J. (1988). *Fractals*. Springer.

49. Peitgen, H.-O., Jürgens, H., & Saupe, D. (2004). *Chaos and fractals: New frontiers of science* (2nd ed.). Springer.

**NATALIIA SHKATULIAK**

**LIUDMYLA KOBIAKOVA**

**FRACTAL ANALYSIS AND MODELING IN INTERDISCIPLINARY  
SCIENTIFIC DOMAINS**

The section of the variable cluster of fundamental training for Master's students entitled "*Fractal Analysis and Modeling in Various Fields of Science*" enhances the theoretical awareness of future educators by representing the phenomenology of fractal analysis within the contemporary interdisciplinary dimension. The material of the textbook highlights the current coordinates of applied use of fractal analysis tools in the physico-mathematical sciences (solid-state physics, materials science), socio-economic domains of knowledge, engineering, and technical aesthetics (design). Within the educational component "*Systemic Approach and Modeling in Scientific Research*", both theoretical and empirical representations of the mechanisms of fractal analysis and modeling contribute to the development of a research-oriented worldview among students, expanding the palette of their transdisciplinary comprehension of the multifaceted panorama of modeling methods and the synthetic nature of the STEM paradigm. The authors have systematized many years of teaching experience in the natural and mathematical cycle of disciplines, supplementing all sections of the publication with graphical and illustrative materials that optimize students' assimilation of theoretical and empirical aspects of research methodology, algorithms of fractal analytics, and modeling practices. The material of the textbook will be useful for deepening the theoretical knowledge of students at the second (Master's) level of higher education in the specialties A4.08 (Physics) and A4.04 (Mathematics).



ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ  
**НАЦІОНАЛЬНИЙ  
ПЕДАГОГІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ**

ІМЕНІ К. Д. УШІНСЬКОГО