ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД
«ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ К.Д. УШИНСЬКОГО»

Ольга ЧЕПОК

ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Конспект лекцій

Одеса
2026

УДК 514

С 38

Рекомендовано до друку ученою радою Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» (протокол № 13 від 30.04.2026 р.)

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Курбатова І. М. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

Болдарєва О. М. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського».

С 38 **Чепок Ольга Олегівна** Елементи диференціальної геометрії: конспект лекцій / Ольга Чепок. Одеса: Університет Ушинського, 2026. 89 с.

Конспект лекцій «Елементи диференціальної геометрії» представляє собою методичне забезпечення частини курсу аналітичної геометрії, опанування якого у Державному закладі «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» передбачено освітньо-професійними програмами «Середня освіта (Математика. Інформатика)» та «Середня освіта (Математика. Англійська мова)» для першого (бакалаврського) рівня вищої освіти. Змістове наповнення запропонованого конспекту лекцій спрямовано на формування фахових компетентностей у майбутніх викладачів математики. Представлений навчальний матеріал може бути також корисним для студентів будь-яких фізико-математичних спеціальностей закладів вищої освіти, а також для майбутніх учителів математиків.

УДК 514

ЗМІСТ

ВСТУП

Конспект лекцій «Елементи диференціальної геометрії» представляє собою методичне забезпечення частини курсу аналітичної геометрії, опанування якого у Державному закладі «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» передбачено освітньо-професійними програмами «Середня освіта (Математика. Інформатика)» та «Середня освіта (Математика. Англійська мова)» для першого (бакалаврського) рівня вищої освіти. Представлений матеріал складається з 4 лекцій, спрямований на комплексне вивчення геометричних образів евклідової площини та тривимірного простору, базуючись на методологічній спадкоємності між класичною аналітичною геометрією та методами математичного аналізу.

Змістове наповнення лекцій ґрунтується на поєднанні методу координат і векторного методу з апаратом диференціального та інтегрального числення. На відміну від традиційної аналітичної геометрії, де переважають алгебраїчні підходи, у пропонованому курсі акцент зміщено на використання теорії диференціальних рівнянь та спеціальної теорії диференціювання вектор-функцій. Це дозволяє суттєво розширити коло дослідницьких завдань, переходячи від статичного аналізу фігур до динамічного опису ліній та поверхонь. Важливою теоретичною базою виступає теорія вектор-функції однієї скалярної змінної, що є необхідною передумовою для опанування класичної теорії кривих, а також елементи тензорного числення, які стають невід'ємною частиною вивчення геометрії поверхонь.

У конспекті лекцій детально розглядаються означення кривої через поняття годографа, аналізуються способи аналітичного задання ліній у просторі та властивості репера Френе як природної системи координат, пов'язаної з гладкою кривою. Особлива увага приділяється вивченню внутрішньої та зовнішньої геометрії поверхонь, їх основних квадратичних форм та фундаментальних теорем, що визначають однозначність відновлення об'єктів за їх диференціальними характеристиками.

Як результат опанування **запропонованого матерілу** здобувач вищої освіти має **знати:** означення вектор-функції однієї та двох скалярних змінних, їх основні диференціальні характеристики; означення кривої у диференціальній геометрії тривимірного евклідового простору, складових прямокутної декартової системи координат, природним чином пов'язаної з кожною точкою елементарної гладкої кривої тривимірного евклідового простору; основну теорему теорії кривих тривимірного евклідового простору; означення поверхні у диференціальній геометрії тривимірного евклідового простору, кривих на поверхні, зокрема координатних ліній поверхні; основні положення внутрішньої та зовнішньої геометрії поверхонь тривимірного евклідового простору; основну теорему теорії поверхонь тривимірного евклідового простору;

уміти: наводити приклади основних понять диференціальної геометрії тривимірного евклідового простору; проводити дослідження гладких кривих та поверхонь тривимірного евклідового простору за допомогою методів диференціальної геометрії, які базуються на методі координат, методах векторного і тензорного числення, математичного аналізу та теорії диференціальних рівнянь.

Представлений лекційний матеріал є корисними не лише для здобувачів педагогічних спеціальностей, а й для студентів будь-яких фізико-математичних напрямів закладів вищої освіти, а також викладачів фахової передвищої освіти, які прагнуть поглибити знання в галузі сучасних методів диференціальної геометрії. Вивчення запропонованого матеріалу забезпечує цілісність сприйняття геометричних фігур та їх властивостей у тривимірному евклідовому просторі.

Лекція 1.

Тема: Поняття про вектор-функцію однієї скалярної змінної.

Мета: сформувати у студентів фундаментальні знання про вектор-функцію скалярного аргументу як математичну основу для вивчення диференціальної геометрії. Навчальна мета передбачає засвоєння понять границі, неперервності, диференційовності та інтегровності вектор-функцій, а також оволодіння технікою виконання аналітичних операцій над ними. Розвивальна мета спрямована на вдосконалення абстрактного мислення та вміння переносити методи класичного аналізу на векторні об'єкти, що дозволяє моделювати траєкторії руху в просторі. Виховна мета полягає у формуванні наукового світогляду через розуміння єдності геометричних та аналітичних методів, готуючи майбутнього вчителя до точного та методично грамотного викладу складних математичних концепцій.

План

1. Поняття про вектор-функцію однієї скалярної змінної.
2. Поняття про границю та нерепервність вектор-функції в точці та на проміжку. Основні властивості.
3. Диференційовність вектор-функцій.
4. Інтегровність вектор-функцій.

1. Поняття про вектор-функцію однієї скалярної змінної.

Означення 1.1. Функція $\bar{r} = \bar{r}(t)$ називається **вектор-функцією одного скалярного аргументу** якщо кожному значенню $t \in (a,b)$ ставиться у відповідність вектор $\bar{r}(t)$ двовимірного E^2 або тривимірного E^3 евклідового простору [1].

Позначимо, $D(\bar{r})$ – область визначення $\bar{r}(t)$, $E(\bar{r})$ – область значень $\bar{r}(t)$.

Означення 1.2. Нехай у евклідовому просторі E^3 задано вектор-функцією $\vec{r}$ з областю визначення $D(\vec{r})$, і законом відповідності $\vec{r}=\vec{r}(t)$. Виберемо у E^3 довільну точку O. Для кожного значення параметра t, $t\in D(\vec{r})$, існує єдиний напрямлений відрізок $\overrightarrow{OM}$, що є представником вектору $\vec{r}(t)$. Сукупність усіх таких точок M називають **годографом** вектор-функції $\vec{r}$ відносно початку відліку O (рис. 1.) [4].

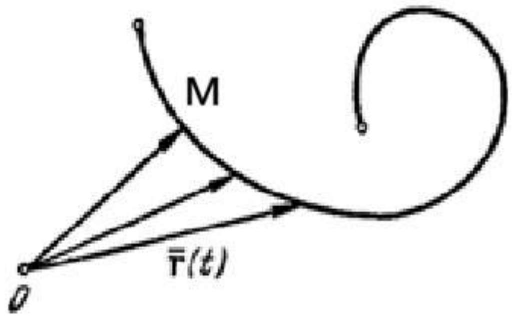

Рис. 1.

Розглянемо у просторі V^3 довільний базис $E: \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ Для кожного числа $t_0 \in D(\vec{r})$ вектор $\vec{r}=\vec{r}(t_0)$ можна однозначно представити у вигляді лінійної комбінації базисних векторів: існують такі однозначно визначені числа $x(t_0)$, $y(t_0)$, $z(t_0)$, що $\vec{r}(t_0)=x(t_0)\cdot\vec{e_1}+ y(t_0)\cdot\vec{e_2}+ z(t_0)\cdot\vec{e_3}$. Останнє означає, що у випадку фіксованого базису простору V^3 одночасно з вектор-функцією $\vec{r}$ заданими є три скалярні функції $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$, які мають однакову область визначення, що співпадає з областю визначення $D(\vec{r})$ вектор-функції $\vec{r}$, для кожного числа t, $t\in D(\vec{r})$, правильною є рівність

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{e_1}+y(t)\vec{e_2}+z(t)\vec{e_3} \tag{1.1}$$

Функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ називають **координатними функціями вектор-функції $\vec{r}$ відносно базису E**. Зрозуміло, що при фіксованому базисі E відповідні координатні функції вектор-функції $\vec{r}$ є визначеними однозначно.

Зрозуміло, що при зміні базису E у просторі V^3 координатні функції вектор-функції $\vec{r}$ також змінюються. Вектор-функція $\vec{r}$ при цьому, зрозуміло, не змінюється, вона не залежить від обрання базису простору V^3. З (1.1) випливає, що при фіксованому базисі E вектор-функція $\vec{r}$ своїми координатними функціями відносно цього базису є визначеною однозначно. Звідси випливає зручний для практичних застосувань спосіб задання вектор-функцій у евклідовому просторі E^3. Достатньо у просторі V^3 обрати довільний базис $E: \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ і задати скалярні функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ з однаковою областю визначення D, $D \subset R$, $D \neq \varnothing$.

2. Поняття про границю та нерепервність вектор-функції в точці та на проміжку. Основні властивості.

Нехай у евклідовому просторі E^3 задано вектор-функцію $\vec{r}$ із законом відображення $\vec{r} = \vec{r}(t)$, визначену на певному проміжку $\left\langle \alpha; \beta \right\rangle$, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, за виключенням, можливо, певної точки t_0, $t_0 \in \left\langle \alpha; \beta \right\rangle$.

Під проміжком $\left\langle \alpha; \beta \right\rangle$ при цьому, як завжди, розуміють будь-яку з підмножин $(\alpha; \beta)$, $[\alpha; \beta)$, $[\alpha; \beta]$ чи $(\alpha; \beta]$ множини R усіх дійсних чисел.

Означення 1.3. Вектор $\vec{a}$ називають границею вектор-функції $\vec{r}$ у точці t_0, якщо для $t\in\langle\alpha;\beta\rangle$ існує $\lim_{t\to t_0}|\vec{r}\,(t)-\vec{a}|$. При цьому пишуть: $\lim_{t\to t_0}\vec{r}\,(t)=\vec{a}$.

Відповідно до означення границі функції на мові $\varepsilon-\delta$, вектор $\vec{a}$ є границею вектор-функції $\vec{r}$ у точці t_0 тоді та тільки тоді, коли для довільного дійсного числа ε, $\varepsilon>0$, існує таке дійсне число δ, $\delta>0$, що для усіх значень змінної t з проміжку $\langle\alpha;\beta\rangle$, для яких $0<|t-t_0|<\delta$, є правильною нерівність $|\vec{r}\,(t)-\vec{a}|<\varepsilon$.

Теорема 1. 1. (властивості границь вектор-функцій) Якщо границі вектор-функцій $\bar{r}_1(t),\bar{r}_2(t),\bar{r}_3(t)$ і скалярної функції $f(t)$ існують, то

1. $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\bar{r}_1(t)\pm\bar{r}_2(t)\right)=\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_1(t)\pm\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_2(t)$;

2. $\lim\limits_{t\to t_0}f(t)\bar{r}_1(t)=\lim\limits_{t\to t_0}f(t)\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_1(t)$;

3. $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\bar{r}_1(t),\bar{r}_2(t)\right)=\left(\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_1(t),\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_2(t)\right)$;

4. $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\bar{r}_1(t),\bar{r}_2(t)\right]=\left[\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_1(t),\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_2(t)\right]$;

5. $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\bar{r}_1(t),\bar{r}_2(t),\bar{r}_3(t)\right)=\left(\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_1(t),\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_2(t),\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_3(t)\right)$;

6. $\lim\limits_{t\to t_0}\bar{a}=\bar{a}\quad\left(\bar{a}=\mathrm{const}\right)$;

7. $\lim\limits_{t\to t_0}\lambda\bar{r}_1(t)=\lambda\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_1(t)\quad\left(\lambda=\mathrm{const}\right)$.□ Доведемо, наприклад, властивість 4.

Згідно з умовою теореми й означенням границі вектор-функції маємо:

$\bar{r}_1(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_1(t)+\bar{\alpha}_1(t)$, $\bar{r}_2(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\bar{r}_2(t)+\bar{\alpha}_2(t)$.

Тоді

$$\lim_{t\to t_0}\left[\bar r_1(t),\bar r_2(t)\right]=\left[\lim_{t\to t_0}\bar r_1(t)+\bar\alpha_1(t),\lim_{t\to t_0}\bar r_2(t)+\bar\alpha_2(t)\right]=\left[\lim_{t\to t_0}\bar r_1(t),\lim_{t\to t_0}\bar r_2(t)\right]+$$

$$+\left[\lim_{t\to t_0}\bar r_1(t),\bar\alpha_2(t)\right]+\left[\lim_{t\to t_0}\bar\alpha_1(t),\lim_{t\to t_0}\bar r_2(t)\right]+\left[\bar\alpha_1(t),\bar\alpha_2(t)\right]=\left[\lim_{t\to t_0}\bar r_1(t),\lim_{t\to t_0}\bar r_2(t)\right]\blacksquare$$

Як і для скалярної функції, можна дати декілька означень неперервної вектор-функції.

Означення 1.4. Вектор-функція $\bar r(t)$ називається **неперервною** в точці $t_0\in D(\bar r)$, якщо існує її границя при $t\to t_0$, яка дорівнює значенню векторної функції в цій

точці: $\lim\limits_{t\to t_0}\bar r(t)=\bar r(t_0)=\bar r\left(\lim\limits_{t\to t_0}t\right)$, тобто

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall t:\ |t-t_0|<\delta\Rightarrow|\bar r(t)-\bar r(t_0)|<\varepsilon.$

Означення 1.5. Вектор-функція $\bar r(t)$ називається **неперервною** в точці $t_0\in D(\bar r)$, якщо нескінченно малому приросту аргументу Δt відповідає нескінченно малий приріст вектор-функції $\Delta\bar r(t_0)$, де

$\Delta\bar r(t_0)=\bar r(t)-\bar r(t_0)=\bar r(t_0+\Delta t)-\bar r(t_0).$

Наведемо властивості неперервних вектор-функцій у наступних теоремах.

Теорема 1.2. (Про властивості неперервних вектор-функцій однієї скалярної змінної). Якщо у евклідовому просторі E^3 на певному проміжку $\langle\alpha;\beta\rangle$, $\alpha,\beta\in R$, $\alpha<\beta$ задано неперервні у точці t_0, $t_0\in\langle\alpha;\beta\rangle$, вектор-функції $\vec r=\vec r(t)$, $\vec g=\vec g(t)$, $\vec q=\vec q(t)$ і скалярну функцію $\lambda=\lambda(t)$, то неперервними у точці t_0 будуть і скалярні функції $|\vec r(t)|$, $\vec r(t)\cdot\vec g(t)$, $\vec r(t)\cdot\vec g(t)\cdot\vec q(t)$ та вектор-функції $\vec r(t)\pm\vec g(t)$, $\lambda(t)\cdot\vec r(t)$, $\vec r(t)\times\vec g(t)$.

Теорема 1.3. (Про зв'язок існування границі вектор-функції з існуванням границь у її координатних функцій). Нехай у евклідовому просторі E^3 вектор-функцію $\vec{r}=\vec{r}(t)$ задано на певному проміжку $\langle\alpha;\beta\rangle$, $\alpha,\beta\in R$, $\alpha<\beta$, за виключенням, можливо, точки t_0, $t_0\in\langle\alpha;\beta\rangle$, функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ є координатними функціями даної вектор-функції відносно довільного базису $E:\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ приєднаного простору вільних векторів V^3. Наявність границі вектор-функції $\vec{r}=\vec{r}(t)$ у точці t_0 є рівносильною до наявності у точці t_0 границь кожної з координатних функцій $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. При цьому, у разі наявності такої границі правильною є рівність

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=(\lim_{t\to t_0}x(t))\cdot\vec{e_1}+(\lim_{t\to t_0}y(t))\cdot\vec{e_2}+(\lim_{t\to t_0}z(t))\cdot\vec{e_3}.$$

Теорема 1. 4. (Про зв'язок неперервності вектор-функції з неперервністю її координатних функцій). У евклідовому просторі E^3 для вектор-функції $\vec{r}=\vec{r}(t)$, заданої на проміжку $\langle\alpha;\beta\rangle$, $\alpha,\beta\in R$, $\alpha<\beta$, неперервність у точці t_0, $t_0\in\langle\alpha;\beta\rangle$, є рівносильною до неперервності у цій точці кожної з її координатних функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ відносно довільного фіксованого базису $E:\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ приєднаного векторного простору V^3.

3. Диференційовність вектор-функцій.

Означення 1.6. Нехай вектор-функція $\bar{r}(t)$ визначена в деякому околі точки t_0. **Похідною вектор-функції** $\bar{r}=\bar{r}(t)$ у точці $t_0\in D(\bar{r})$ називається границя відношення приросту функції до відповідного приросту аргументу, коли приріст аргументу наближається до 0:

$$\bar{r}'(t_0)=\frac{d\bar{r}(t_0)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\bar{r}(t_0+\Delta t)-\bar{r}(t_0)}{\Delta t},$$

якщо ця границя існує і скінченна за модулем [4].

Означення 1.7. Вектор-функція $\bar{r}(t)$, яка має похідну в точці $t_0 \in D(\bar{r})$, називається *диференційовною* в точці t_0.

З означення границі вектор-функції випливає, що

$$\frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t} = \bar{r}'(t) + \bar{\alpha}(t), \text{ де } \bar{\alpha}(t) \to 0, \quad \Delta t \to 0.$$

Отже, приріст диференційовної в точці $t \in D(\bar{r})$ вектор-функції можна подати у виді: $\Delta\bar{r}(t) = \bar{r}'(t)\Delta t + \bar{\alpha}(t)\Delta t$.

Звідси випливає, що диференційовна в точці $t_0 \in D(\bar{r})$ вектор-функція $\bar{r}(t)$ є неперервною в цій точці.

Обернене твердження, взагалі кажучи, не є правильним.

Означення 1.8. Диференціалом вектор-функції $d\bar{r}(t)$ називається головна частина приросту векторної функції: $d\bar{r}(t) = \bar{r}'(t)\Delta t = \bar{r}'(t)dt$.

Теорема 1. 5. [1]. **(Властивості диференційовних вектор-функцій)** Нехай векторні функції $\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t), \bar{r}_3(t)$ та скалярна функція *f(t)* визначені на $(a,b) \subset \mathbb{R}$ та диференційовні в точці $t \in (a,b)$. Тоді в цій точці диференційовні сума та всі можливі добутки їх, причому:

1. $\left(\bar{r}_1(t) \pm \bar{r}_2(t)\right)' = \bar{r}_1'(t) \pm \bar{r}_2'(t)$;

2. $\left(f(t)\bar{r}(t)\right)' = f'(t)\bar{r}(t) + f(t)\bar{r}'(t)$;

3. $\left(\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t)\right)' = \left(\bar{r}_1'(t), \bar{r}_2(t)\right) + \left(\bar{r}_1(t), \bar{r}_2'(t)\right)$;

4. $\left[\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t)\right]' = \left[\bar{r}_1'(t), \bar{r}_2(t)\right] + \left[\bar{r}_1(t), \bar{r}_2'(t)\right]$;

5. $\left(\bar{r}_1(t)\bar{r}_2(t)\bar{r}_3(t)\right)' = \bar{r}_1'(t)\bar{r}_2(t)\bar{r}_3(t) + \bar{r}_1(t)\bar{r}_2'(t)\bar{r}_3(t) + \bar{r}_1(t)\bar{r}_2(t)\bar{r}_3'(t)$;

6. $\left(\tilde{N}\bar{r}(t)\right)' = \tilde{N}\bar{r}'(t), \quad (C = \text{const})$;

7. $\tilde{N}' = 0, \quad (C = \text{const})$;

Доведення. Для прикладу наведемо доведення твердження 4.

Позначимо $\bar{r}(t)=\left[\bar{r}_1(t),\bar{r}_2(t)\right]$, тоді

$$\Delta\bar{r}(t)=\bar{r}(t+\Delta t)-\bar{r}(t)=\left[\bar{r}_1(t+\Delta t),\bar{r}_2(t+\Delta t)\right]-\left[\bar{r}_1(t),\bar{r}_2(t)\right];$$

$$\frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\bar{r}(t+\Delta t)-\bar{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\left[\bar{r}_1(t+\Delta t),\bar{r}_2(t+\Delta t)\right]-\left[\bar{r}_1(t),\bar{r}_2(t)\right]}{\Delta t}=$$

$$=\frac{\left[\bar{r}_1(t+\Delta t),\bar{r}_2(t+\Delta t)\right]-\left[\bar{r}_1(t),\bar{r}_2(t+\Delta t)\right]}{\Delta t}+\frac{\left[\bar{r}_1(t),\bar{r}_2(t+\Delta t)\right]-\left[\bar{r}_1(t),\bar{r}_2(t)\right]}{\Delta t}=$$

$$=\left[\frac{\bar{r}_1(t+\Delta t)-\bar{r}_1(t)}{\Delta t},\bar{r}_2(t+\Delta t)\right]+\left[\bar{r}_1(t),\frac{\bar{r}_2(t+\Delta t)-\bar{r}_2(t)}{\Delta t}\right].$$

Скориставшись неперервністю вектор-функції $\bar{r}_2(t)$, умовою диференційовності вектор-функцій $\bar{r}_1(t)$, $\bar{r}_2(t)$ та теоремою 1, перейдемо до границі при $\Delta t\to 0$ в одержаному співвідношенні. В результаті матимемо:

$$\left[\bar{r}_1(t),\bar{r}_2(t)\right]'=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}(t)}{\Delta t}=\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}_1(t)}{\Delta t},\bar{r}_2(t)\right]+\left[\bar{r}_1(t),\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}_2(t)}{\Delta t}\right]=$$

$$=\left[\bar{r}_1'(t),\bar{r}_2(t)\right]+\left[\bar{r}_1(t),\bar{r}_2'(t)\right].\ \blacksquare$$

З теореми 1. 5. випливають відповідні властивості диференціалів вектор-функцій. Наприклад: $d\left(\bar{r}_1(t),\bar{r}_2(t)\right)=\left(d\bar{r}_1(t),\bar{r}_2(t)\right)+\left(\bar{r}_1(t),d\bar{r}_2(t)\right)$.

Теорема 1.6. (Про зв'язок диференційовності вектор-функції з диференційовністю її координатних функцій). У евклідовому просторі E^3 для вектор-функції $\vec{r}=\vec{r}(t)$, заданої на інтервалі $(\alpha;\beta)$, $\alpha,\beta\in R$, $\alpha<\beta$, диференційовність у точці t_0, $t_0\in(\alpha;\beta)$, тобто, наявність похідної $\vec{r}'(t_0)$, є рівносильною до диференційовності у цій точці кожної з її координатних функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ відносно довільного фіксованого базису $E:\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ асоційованого з E^3 векторного простору V^3, тобто, наявності похідних $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$. При цьому, у разі існування зазначених похідних, правильною є рівність

$$\vec{r'}(t_0) = x'(t_0)\cdot\vec{e_1} + y'(t_0)\cdot\vec{e_2} + z'(t_0)\cdot\vec{e_3}.$$

Приклад 1.1. Нехай задано вектор-функцію

$\bar{r}(t) = (a\cos t)\,\bar{i} + (a\sin t)\,\bar{j} + (bt)\,\bar{k},$ де a, b – const. Знайти $\bar{r}'(t)$.

Розв'язання. Згідно з твердженнм теореми 1.6. координатами вектора $\bar{r}(t)$ є числові функції

$$x(t) = acost,\ y(t) = asint,\ z(t) = bt.$$

Тоді $\bar{r}'(t) = -(a\sin t)\bar{i} + (a\cos t)\,\bar{j} + b\bar{k}$. ■

Наведемо теореми про геометричний зміст диференційовності вектор-функції однієї скалярної змінної

Теорема 1.7. У евклідовому просторі E^3 вектор-функція $\vec{r} = \vec{r}(t)$, задана на інтервалі $(\alpha;\ \beta)$, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, є сталою на даному інтервалі тоді та тільки тоді, коли у кожній точці цього інтервалу вона має похідну, що дорівнює нульовому вектору.

Теорема 1.8. У евклідовому просторі E^3 вектор-функція $\vec{r} = \vec{r}(t)$, диференційовна на інтервалі $(\alpha;\ \beta)$, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha < \beta$, має на цьому інтервалі постійну довжину тоді та тільки тоді, коли у кожній точці t_0, $t_0 \in (\alpha; \beta)$, вектори $\vec{r}(t_0)$ і $\vec{r'}(t_0)$ є ортогональними.

Доведення. I. **Дано:** вектор-функція $\vec{r} = \vec{r}(t)$ є заданою та диференційовною на інтервалі $(\alpha;\ \beta)$, $(\alpha;\ \beta) \in R$, $\alpha < \beta$, має на цьому інтервалі постійну довжину (існує таке дійсне число p ($p \geq 0$), що для кожного числа t_0, $t_0 \in (\alpha; \beta)$, $|\vec{r}(t_0)| = p$).

Довести: $\vec{r}(t_0) \perp \vec{r'}(t_0)$ у кожній точці t_0 інтервалу $(\alpha;\ \beta)$.

Доведення. Розглянемо скалярну функцію $f(t)=\vec{r}^{\,2}(t)$. Згідно теореми 6, ця функція є диференційовною на інтервалі $(\alpha;\,\beta)$, для кожного значення змінної t із інтервалу $(\alpha;\,\beta)$ правильною є рівність $f'(t)=2\cdot\vec{r}(t)\cdot\vec{r'}(t)$. З іншого боку, $\vec{r}^{\,2}(t)=|\vec{r}(t)|^2$ і тому, згідно умови даної теореми, $f(t)\equiv p^2$ на інтервалі $(\alpha;\,\beta)$, де p - стала. Отже, $f'(t)\equiv 0$, $\vec{r}(t)\cdot\vec{r'}(t)\equiv 0$ на інтервалі $(\alpha;\,\beta)$. Як обгрунтовано у курсі аналітичної геометрії, остання тотожність і означає, що $\vec{r}(t_0)\perp\vec{r'}(t_0)$ у кожній точці t_0 інтервалу $(\alpha;\,\beta)$. (Зрозуміло, що при цьому мається на увазі, що нульовий
вектор є перпендикулярним будь-якому вектору).

ІІ. Дано: вектор-функція $\vec{r}=\vec{r}(t)$ є заданою та диференційовною на інтервалі $(\alpha;\,\beta)$, $(\alpha;\,\beta)\in R$, $\alpha<\beta$, $\vec{r}(t_0)\perp\vec{r'}(t_0)$ у кожній точці t_0 інтервалу $(\alpha;\,\beta)$.

Довести: вектор-функція $\vec{r}=\vec{r}(t)$ має на інтервалі $(\alpha;\,\beta)$ постійну довжину (існує таке дійсне число p ($p\geq 0$), що для кожного числа t_0, $t_0\in(\alpha;\beta)$, $|\vec{r}(t_0)|=p$).

Доведення. Із того, що $\vec{r}(t_0)\perp\vec{r'}(t_0)$ у кожній точці t_0 інтервалу $(\alpha;\,\beta)$, випливає, що $\vec{r}(t)\cdot\vec{r'}(t)\equiv 0$ на інтервалі $(\alpha;\,\beta)$. З іншого боку, згідно умови даної теореми, відповідно до теореми 6, скалярна функція $f(t)=|\vec{r}(t)|^2=\vec{r}^{\,2}(t)$ є диференційовною на інтервалі $(\alpha;\,\beta)$, у кожній точці t_0 цього інтервалу $(\alpha;\,\beta)$ правильною є рівність

$f'(t_0)=2\cdot\vec{r}(t_0)\cdot\vec{r}'(t_0)$. Звідси випливає, що $f'(t)\equiv 0$ на інтервалі $(\alpha;\ \beta)$, скалярна функція $f(t)$ на інтервалі $(\alpha;\ \beta)$ є сталою, тобто, існує таке дійсне число q, що для кожного числа t_0, $t_0\in(\alpha;\beta)$, $f(t)=q$. З того, що $f(t)=|\vec{r}(t)|^2$, випливає, що $q\geq 0$. Отже, визначеним є дійсне число $p=\sqrt{q}$, для кожного числа t_0, $t_0\in(\alpha;\beta)$, $|\vec{r}(t_0)|=p$, що й треба було довести.

Теорема 1.9. У евклідовому просторі E^3 вектор-функція $\vec{r}=\vec{r}(t)$, яка є неперервно диференційовною на інтервалі $(\alpha;\ \beta)$, $\alpha,\beta\in R$, $\alpha<\beta$, і не приймає на цьому інтервалі нульових значень, має на цьому інтервалі постійний напрямок тоді та тільки тоді, коли $\vec{r}'(t_0)\parallel\vec{r}(t_0)$ у кожній точці t_0, $t_0\in(\alpha;\beta)$.

Означення 1.9. Похідною другого порядку $r''(t)$ вектор-функції $\bar{r}(t)$ називається похідна вектор-функції $\bar{r}'(t)$: $\bar{r}''(t)=\dfrac{d\bar{r}'(t)}{dt}=\dfrac{d^2\bar{r}(t)}{dt^2}$.

Аналогічно визначаються похідні вектор-функції вищих порядків.

Означення 1.10. Регулярною (гладкою) вектор-функцією класу C^k називається вектор-функція, яка на області визначення має неперервні похідні до k-го порядку включно.

Позначення: $C^k_{(a,b)}$ – множина всіх векторних та скалярних функцій, які в кожній точці $t\in(a,b)$ мають неперервні похідні до k-го порядку включно.

В просторі E^3 візьмемо ортонормований базис $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, і розкладемо за ним вектор-функцію $\bar{r}(t)$: $\bar{r}(t)=x(t)\bar{i}+y(t)\bar{j}+z(t)\bar{k}$.

Нехай функції $\bar{r}(t), x(t), y(t), z(t)$ в околі точки t_0 , $t_0 \in (a,b)$ мають скінченні похідні до k-го порядку включно. Для кожної скалярної функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ запишемо формулу Тейлора в околі точки t_0 зі своїм залишковим членом $R_k{}^i(\xi_i)$ та своєю проміжною точкою ξ_i (i = 1,2,3):

$$x(t) = x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \frac{x'(t_0)}{1!}\Delta t + \frac{x''(t_0)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{x'''(t_0)}{3!}(\Delta t)^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^{(k-1)}(t_0)}{(k-1)!}(\Delta t)^{k-1} + R_k^1(\xi_1), \qquad \xi_1 = t_0 + \theta_1 \Delta t, \qquad 0 \le \theta_1 \le 1;$$

$$y(t) = y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \frac{y'(t_0)}{1!}\Delta t + \frac{y''(t_0)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{y'''(t_0)}{3!}(\Delta t)^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{y^{(k-1)}(t_0)}{(k-1)!}(\Delta t)^{k-1} + R_k^2(\xi_2), \qquad \xi_2 = t_0 + \theta_2 \Delta t, \qquad 0 \le \theta_2 \le 1;$$

$$z(t) = z(t_0 + \Delta t) = z(t_0) + \frac{z'(t_0)}{1!}\Delta t + \frac{z''(t_0)}{2!}(\Delta t)^2 + \frac{z'''(t_0)}{3!}(\Delta t)^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{z^{(k-1)}(t_0)}{(k-1)!}(\Delta t)^{k-1} + R_k^3(\xi_3), \qquad \xi_3 = t_0 + \theta_3 \Delta t, \qquad 0 \le \theta_3 \le 1.$$

Помножимо рівності для $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ відповідно на $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ та додамо:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \bar{r}'(t_0)\Delta t + \bar{r}''(t_0)(\Delta t)^2 + \ldots + \frac{\bar{r}^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}(\Delta t)^{n-1} + \bar{R}_n(\xi),$$
$$\xi = t_0 + \theta \Delta t, \; 0 \le \theta \le 1.$$

Якщо $\bar{r}(t)$ має похідні довільного порядку, для неї можна скласти формальний ряд Тейлора в околі точки t_0:

$$\bar{r}(t_0) + \bar{r}'(t_0)\Delta t + \bar{r}''(t_0)(\Delta t)^2 + \ldots + \frac{\bar{r}^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}(\Delta t)^{n-1} + \ldots$$

Не кожний формальний ряд Тейлора збігається.

Означення 1.11. Аналітичною вектор-функцією $\bar{r}(t)$ у точці $t_0 \in (a,b)$ називається функція, яка має в цій точці похідні будь-якого порядку та існує окіл точки t_0, в якому ряд Тейлора збігається до функції $\bar{r}(t)$. Позначення: C^{∞} – клас аналітичних функцій.

5. Інтегровність вектор-функцій

Означення 1.12. Вектор-функцію $\vec{r}=\vec{F}(t)$ називають **первісною для вектор-функції** $\vec{r}=\vec{r}(t)$ на проміжку $\left\langle \alpha;\beta \right\rangle$, якщо вона є диференційовною на цьому проміжку і для кожного значення змінної t, $t\in\left\langle \alpha;\beta \right\rangle$, правильною є рівність $\vec{F'}(t)=\vec{r}(t)$.

Сукупність усіх первісних вектор-функції $\vec{r}=\vec{r}(t)$ на проміжку $\left\langle \alpha;\beta \right\rangle$ (а, як було показано вище, якщо існує принаймні одна первісна, то їх безліч) називають **невизначеним інтегралом від** даної **вектор-функції** на цьому проміжку і позначають як $\int\vec{r}(t)\,dt$. При цьому, якщо зрозуміло, про який проміжок йде мова, його не вказують.

Нехай функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ і $f_x(t)$, $f_y(t)$, $f_z(t)$ є, відповідно, координатними функціями вектор-функцій $\vec{r}=\vec{r}(t)$ і $\vec{r}=\vec{F}(t)$ відносно певного базису $E:\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ простору вільних векторів V^3 асоційованого з евклідовим простором E^3. Якщо для кожного значення змінної t із проміжку $\left\langle \alpha;\beta \right\rangle$ правильною є рівність $\vec{F'}(t)=\vec{r}(t)$, то, згідно теореми 7, аналогічні твердження на $\left\langle \alpha;\beta \right\rangle$ мають місце й для відповідних координатних функцій даних вектор-функцій: $f_x'(t)=x(t)$, $f_y'(t)=y(t)$, $f_z'(t)=z(t)$. Виходячи з цього, можна легко обгрунтувати, що різниця будь-яких двох первісних для вектор-функції $\vec{r}=\vec{r}(t)$ дорівнює сталому вектору. Отже, якщо вектор-функція $\vec{r}=\vec{F}(t)$ є певною первісною для вектор-функції $\vec{r}=\vec{r}(t)$ на проміжку $\langle\alpha;\beta\rangle$, то на даному проміжку $\int\vec{r}(t)\,dt=\vec{F}(t)+\vec{a}$, де $\vec{a}$ - довільний сталий вектор. Так само, можна стверджувати, що існування на відповідному проміжку невизначених інтегралів $\int x(t)dt$, $\int y(t)dt$, $\int z(t)dt$ тягне за собою існування невизначеного інтегралу $\int\vec{r}(t)dt$ і навпаки. Правильною можна вважати рівність

$$\int\vec{r}(t)dt=(\int x(t)dt)\cdot\vec{e_1}+(\int y(t)dt)\cdot\vec{e_2}+(\int z(t)dt)\cdot\vec{e_3}.$$

Спираючись на це твердження, можна обгрунтувати правильність відповідної, найбільш вживаної у класичній диференціальній геометрії по відношенню до інтегровності вектор-функцій, теореми.

Теорема 1.10. Якщо у евклідовому просторі E^3 вектор-функція $\vec{r}=\vec{r}(t)$ є неперервною на проміжку $\langle\alpha;\beta\rangle$, $\alpha,\beta\in R$, $\alpha<\beta$, то на цьому проміжку у неї існують первісні, для неї існує невизначений інтеграл $\int\vec{r}(t)dt$.

Основні правила знаходження невизначених інтегралів від вектор-функцій характеризує наступна теорема.

Теорема 1.12. Якщо у евклідовому просторі E^3 задано інтегровні на певному проміжку $\langle\alpha;\beta\rangle$, $\alpha,\beta\in R$, $\alpha<\beta$, вектор-функції $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $\vec{g}=\vec{g}(t)$ і скалярну функцію $\lambda=\lambda(t)$, то інтегровними на цьому проміжку будуть і скалярна функція $\vec{a}\cdot\vec{r}(t)$ та вектор-функції $\vec{r}(t)\pm\vec{g}(t)$, $\lambda_0\cdot\vec{r}(t)$, $\lambda(t)\cdot\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{r}(t)$, де $\vec{a}$ - довільний сталий вектор, λ_0 - довільне дійсне число. При цьому правильними будуть наступні рівності: $\int(\vec{a}\cdot\vec{r}(t))dt=\vec{a}\cdot\int\vec{r}(t)dt$, $\int(\vec{r}(t)\pm\vec{g}(t))dt=\int\vec{r}(t)dt\pm\int\vec{g}(t)dt$,

$$\int(\lambda_0\cdot\vec{r}(t))dt=\lambda_0\cdot\int\vec{r}(t)dt,\qquad \int(\lambda(t)\cdot\vec{a})dt=(\int\lambda(t)dt)\cdot\vec{a},$$

$$\int(\vec{a}\times\vec{r}(t))dt=\vec{a}\times\int\vec{r}(t)dt.$$

Для вектор-функції $\vec{r}=\vec{r}(t)$ однієї скалярної змінної поняття про **визначений інтеграл**, визначений інтеграл Рімана, **на сегменті** $[a;b]$, $a,b\in R$, $a<b$, вводиться, фактично, так само, як аналогічне поняття вводиться для скалярних функцій (дійсних функцій одного дійсного аргументу). Позначають такий інтеграл традиційно - $\int_a^b\vec{r}(t)\,dt$. Принаймні для неперервних на сегменті $[a;b]$ вектор-функцій, а саме такі, найчастіше, використовують у класичній диференціальній геометрії, існування на сегменті $[a;b]$, $a,b\in R$, $a<b$, визначеного інтегралу Рімана неважко обгрунтувати за допомогою їх координатних функцій відносно довільного базису простору вільних векторів V^3 асоційованого з евклідовим простором E^3. Принципово важливим тут є той факт, що для таких вектор-функцій правильною є відповідна формула Ньютона-Лейбніца.

Теорема 1.13. ***У евклідовому просторі*** E^3 ***для неперервної на сегменті*** $[a;b]$, $a,b\in R$, $a<b$, ***вектор-функції*** $\vec{r}=\vec{r}(t)$ ***визначений інтеграл*** $\int_a^b\vec{r}(t)\,dt$ ***існує,*** $\int_a^b\vec{r}(t)\,dt=\vec{F}(b)-\vec{F}(a)$, ***де вектор-функція*** $\vec{r}=\vec{F}(t)$ ***є первісною для вектор-функції*** $\vec{r}=\vec{r}(t)$ ***на сегменті*** $[a;b]$.

Теорема 1.14. Якщо у евклідовому просторі E^3 на певному сегменті $[a;b]$, $a,b\in R$, $a<b$, для вектор-функцій $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $\vec{g}=\vec{g}(t)$ і скалярної функції $\lambda=\lambda(t)$ існують визначені інтеграли $\int_a^b\vec{r}(t)\,dt$, $\int_a^b\vec{g}(t)\,dt$, $\int_a^b\lambda(t)\,dt$, то на цьому сегменті існують і визначені інтеграли від

скалярної функції $\vec{c}\cdot\vec{r}(t)$ та вектор-функції $\vec{r}(t)\pm\vec{g}(t)$, $\lambda_0\cdot\vec{r}(t)$, $\lambda(t)\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\times\vec{r}(t)$, де $\vec{c}$ - довільний сталий вектор, λ_0 - довільне дійсне число. При цьому правильними є наступні рівності:

1. $\int_a^b(\vec{c}\cdot\vec{r}(t))\,dt=\vec{c}\cdot\int_a^b\vec{r}(t)\,dt$,
2. $\int_a^b(\vec{r}(t)\pm\vec{g}(t))\,dt=\int_a^b\vec{r}(t)\,dt\pm\int_a^b\vec{g}(t)\,dt$,
3. $\int_a^b(\lambda_0\cdot\vec{r}(t))\,dt=\lambda_0\cdot\int_a^b\vec{r}(t)\,dt$,
4. $\int_a^b(\lambda(t)\cdot\vec{c})\,dt=\left(\int_a^b\lambda(t)\,dt\right)\cdot\vec{c}$,
5. $\int_a^b(\vec{c}\times\vec{r}(t))\,dt=\vec{c}\times\int_a^b\vec{r}(t)\,dt$.

Наслідок. Якщо у евклідовому просторі E^3 вектор-функція $\vec{r}=\vec{r}(t)$ є неперервною на сегменті $[a;b]$, $a,b\in R$, $a<b$, скалярні функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ є її координатними функціями відносно довільного базису $E:\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ простору вільних векторів V^3 асоційованого з евклідовим простором E^3, то

$$\int_a^b\vec{r}(t)\,dt=\left(\int_a^b x(t)\,dt\right)\cdot\vec{e_1}+\left(\int_a^b y(t)\,dt\right)\cdot\vec{e_2}+\left(\int_a^b z(t)\,dt\right)\cdot\vec{e_3}.$$

Приклад 1.2. Вектор-функцію $\vec{r}=\vec{r}(t)$ на сегменті $[0;1]$ задано за допомогою координатних функцій $x(t)=3\cdot\sqrt{1+t}$, $y(t)=\dfrac{27}{\sqrt{t+9}-\sqrt{t}}$, $z(t)=(e^t-1)^4\cdot e^t$ відносно певного базису $E:\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ простору вільних векторів V^3 асоційованого з евклідовим простором E^3. Перевірте, що ця вектор-функція на даному сегменті є неперервною, знайдіть відповідний визначений інтеграл.

Розв'язання. Функція $x(t)$ є неперервною на проміжку $[-1;+\infty)$, функція $y(t)$ - на проміжку $[0;+\infty)$, фунуція $z(t)$ - на усій множині R дійсних чисел. Отже, на сегменті $[0;1]$ усі три функції є неперервними. Згідно теореми 4, це означає, що непернрвною на сегменті $[0;1]$ буде й вектор-функція $\vec{r}=\vec{r}(t)$, зазначений визначений інтеграл існує.

$\int_0^1 x(t)\,dt = 2\cdot((t+1)\cdot\sqrt{t+1})\Big|_0^1 = 2\cdot(2\cdot\sqrt{2}-1)$,

$\int_0^1 y(t)\,dt = 3\cdot(\int_0^1(\sqrt{t+9}+\sqrt{t})\,dt = 2\cdot((t+9)\cdot\sqrt{t+9}) = t\cdot\sqrt{t})\Big|_0^1 = 2\cdot(10\cdot\sqrt{10} -$

$-26)$, $\int_0^1 z(t)\,dt = \dfrac{(e^t-1)^5}{5}\Big|_0^1 = \dfrac{(e-1)^5}{5}$. Остаточно маємо,

$$\int_0^1 \vec{r}(t)\,dt = 2\cdot(2\cdot\sqrt{2}-1)\cdot\vec{e_1} + 2\cdot(10\cdot\sqrt{10}-26)\cdot\vec{e_2} + \frac{(e-1)^5}{5}\cdot\vec{e_3}.\blacksquare$$

6. Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 1

1. Наведіть означення вектор-функції однієї скалярної змінної на евклідовій прямій, на евклідовій площині, у тривимірному евклідовому просторі.

2. Наведіть означення годографа вектор-функції однієї скалярної змінної на евклідовій прямій, на евклідовій площині, у тривимірному евклідовому просторі.

3. Наведіть означення координатних функцій вектор-функції однієї скалярної змінної на евклідовій прямій, на евклідовій площині, у тривимірному евклідовому просторі по відношенню до обраного базису відповідного простору векторів. Поясніть однозначну изначеність таких функцій, дослідить закономірності їх зміни при зміні відповідного базису.

4. Вкажіть формули, які дозволяють у явному вигляді виразити координатні функції вектор-функції через вектор-функцію і відповідні

базисні вектори 1) у випадку довільного базису, 2) у випадку ортонормованого базису, обгрунтуйте їх правильність.

5. Поясніть сутність задання вектор-функції за допомогою її координатних функцій.

6. Наведіть означення границі вектор-функції у точці. Сфорулюйте основні властивості границь вектор-функцій.

7. Сформулюйте означення неперервної вектор-функції у певній точці її області визначення. Сфорулюйте основні властивості неперервних вектор–функцій.

8. Сформулюйте означення похідної вектор-функції $\vec{r}=\vec{r}\,(t)$ у точці t_0. У якому випадку вектор-функцію $\vec{r}=\vec{r}\,(t)$ називають диференційовною у точці t_0?

9. Сфорулюйте основні властивості диференційовних вектор–функцій.

10. Поясніть, як диференційовність вектор-функції пов’язана з диференційовністю її координатних функцій відносно довільного базису векторного простору V^3, асоційованого з евклідовим простором E^3. Відповідь обгрунтуйте.

11. Сформулюйте і доведіть критерій того, що вектор-функція $\vec{r}=\vec{r}\,(t)$ є сталою на певному інтервалі $(\alpha;\ \beta)$, $\alpha,\beta\in R$, $\alpha<\beta$.

12. Наведіть означення у евклідовому просторі E^3 первісної вектор-функції для вектор-функції $\vec{r}=\vec{r}\,(t)$ на проміжку $\left\langle\alpha;\beta\right\rangle$, $\alpha,\beta\in R$, $\alpha<\beta$.

13. Наведіть означення у евклідовому просторі E^3 невизначеного інтегралу від вектор-функції $\vec{r}=\vec{r}\,(t)$ на проміжку $\left\langle\alpha;\beta\right\rangle$, $\alpha,\beta\in R$, $\alpha<\beta$.

14. Поясніть зв'язок у евклідовому просторі E^3 між існуванням невизначеного інтегралу від вектор-функції $\vec{r}=\vec{r}(t)$ на певному проміжку з існуванням на цьому проміжку невизначених інтегралів від її координатних функцій відносно довільного базису простору векторів V^3 асоційованого з простором E^3.

15. Сформулюйте достатню умову існування у евклідовому просторі E^3 невизначеного інтегралу від вектор-функції, пов’язану з її неперервністю.

16. Сформулюйте основні правила знаходження у евклідовому просторі E^3 невизначених інтегралів від вектор-функцій.

Лекція 2.

Тема: Загальне поняття про криву у диференціальній геометрії тривимірного евклідового простору. Основні локальні диференціальні характеристики гладкої кривої

Мета: полягає у формуванні цілісної системи знань про локальну теорію кривих у тривимірному евклідовому просторі, що охоплює вивчення способів їхнього аналітичного задання, опанування техніки натуральної параметризації та обчислення довжини дуги. Навчальний процес спрямований на детальне вивчення геометричної структури кривої через побудову дотичної прямої, нормалі та системи площин (нормальної та стичної), що разом утворюють супровідний репер Френе — фундаментальну декартову систему координат у точці. Ключовим завданням є розкриття геометричного та фізичного змісту головних інваріантів кривої — кривини та скруту, а також виведення формул Серре-Френе, які описують динаміку руху вздовж траєкторії. Розвиток просторової уяви та аналітичного мислення в ході вивчення теми сприяє формуванню наукового світогляду майбутнього вчителя, забезпечуючи його інструментарієм для математичного моделювання реальних процесів у фізиці та техніці.

План

1. Загальне поняття про криву у диференціальній геометрії тривимірного евклідового простору
2. Способи аналітичного задання просторової кривої
3. Дотична пряма, нормаль та нормальна площина до кривої у даній точці.
4. Співдотична площина до кривої у даній точці.
5. Прямокутна декартова система координат, пов’язана з елементарною кривою у даній точці
6. Довжина дуги кривої . Натуральна параметризація.
7. Кривина кривої у даній точці
8. Скрут кривої у даній точці

9. Формули Серре-Френе.

1. ЗАГАЛЬНЕ ПОНЯТТЯ ПРО КРИВУ У ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ГЕОМЕТРІЇ ТРИВИМІРНОГО ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

Поняття кривої еволюціонувало від наочного уявлення Евкліда про «довжину без ширини» до складних математичних моделей. З появою методу Р. Декарта криву почали описувати рівняннями, а згодом - параметрично, як траєкторію руху точки (означення Жордана). Однак виявлення «кривих Пеано», що здатні заповнити цілий квадрат, змусило математиків шукати точніші критерії, що відокремили б лінію від поверхні.

Наприкінці XIX століття Г. Кантор запропонував теоретико-множинний підхід, визначивши плоску криву як компактну та зв'язну множину точок (континуум), що не містить внутрішніх точок.

Сучасне ж універсальне означення кривої дозволило досліджувати лінії в будь-яких просторах, зокрема через поняття елементарної кривої «в малому».

Означення 2.1([1]). Нехай φ – відображення інтервалу (a,b) в евклідів простір E^n *(n=2,3)*: $\varphi:(a,b)\to E^n$. При цьому множина $\varphi((a,b))=\gamma$, яка складається з образів усіх точок інтервалу (a,b) при відображенні $\varphi:(a,b)\to E^n$, називається образом інтервалу (a,b), являє собою деяку геометричну фігуру γ.

Означення 2.2 ([1]). Відображення φ називається **топологічним відображенням**, якщо воно неперервне; взаємно однозначне; обернене відображення φ^{-1} для якого є неперервним.

Нагадаємо означення використаних вище понять.

Означення 2.3 ([1]). Відображення φ називається **неперервним в точці** $X\in(a,b)$, якщо

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall Y\in(a,b):\ |X-Y|<\delta\Rightarrow|\varphi(X)-\varphi(Y)|<\varepsilon\ ,$$

тобто близькі точки з (a,b) відображаються в близькі точки з $\varphi\big((a,b)\big)=\gamma$.

Відображення φ називається **неперервним на інтеравалі** (a,b), якщо воно неперервне в кожній точці інтервалу (a,b).

Означення 2.4 ([1]). Відображення φ називається **взаємно однозначним,** якщо в кожну точку $\varphi\big((a,b)\big)$ відображається тільки одна точка з інтервалу (a,b).

Означення 2.5 ([1]). **Оберненим відображенням** до відображення φ: $(a,b)\to\gamma$ називається відображення φ^{-1} таке, що якщо $X\in(a,b)$ і $\varphi(X)=M$, то $\varphi^{-1}(M)$=X.

Означення 2.6 ([1]). **Найпростішою кривою** у диференціальній геометрії називається будь-яка з наступних підмножин прямої, асоційованої з множиною дійсних чисел:

$$
\begin{aligned}
&[a;b], (a;b), [a;b), (a;b], a<b\\
&(-\infty;b], (-\infty;b), (-\infty;+\infty),\\
&(a;+\infty), [a;+\infty)
\end{aligned}
$$

Означення 2.7 ([1]). **Простою кривою** у диференціальній геометрії називається топологічний образ або відкритого відрізка прямої, або кола. Топологічний образ кола називається **замкненою кривою**.

Означення 2.8 ([1]). **Елементарною кривою** називається образ найпростішої кривої при її топологічному відображенні у множину точок площини або простору.

Приклад 2.1. Елементарною кривою є частина прямої $y=x$ або частина параболи $y=x^2$ як образи інтервалу $(-1;1)$ при відповідних відображеннях. Коло, задане рівнянням $x^2+y^2=1$, не є елементарною кривою.

Означення 2.9 ([1]). Відображення множини в простір називається **локально топологічним,** якщо кожна точка цієї множини має окіл, в якому відображення є топологічним.

Означення 2.10 ([1]). **Загальною кривою** називається множина точок простору, яка є образом простої кривої при локально топологічному відображенні її в простір.

Приклад 2.2. Прикладом загальної кривої будь-яка замкнена крива, неперервна крива з самоперетинами тощо.

2. Способи аналітичного задання просторової кривої

2.1. Параметричні рівняння кривої в скалярній формі

Введемо в просторі прямокутну декартову систему координат. Нехай кожній точці $X \in (a,b)$ відповідає число t. Цій точці на (a,b) відповідає точка P в просторі, $P = \varphi(X)$. Тоді кожному $t \in (a,b)$ відповідає точка P, а їй відповідають три просторові координати x, y, z – функції від t:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{2.1}$$

Рівняння (2.1) називаються параметричними рівняннями кривої γ (в скалярній формі).

Окремі криві, які однозначно проектуються на деякий відрізок осі OX, можна задати особливо просто: $\begin{cases} x = t, \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ або $\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x). \end{cases}$.

2.2.Параметричне рівняння кривої у векторній формі

При певному виборі декартової системи координат у просторі трійка функцій (1) однозначно визначає вектор-функцію

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = \{x(t); y(t); z(t)\}. \tag{2.2}$$

Рівняння (2.2) називається **параметричним рівнянням кривої у векторній формі**. Крива визначається як годограф вектор-функції $\bar{r}(t)$.

Параметричне задання кривої називається параметризацією.

Параметризація називається природною, якщо за параметр t прийнято довжину дуги s, причому $\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right|=1$.

Крива називається регулярною класу C^k ($k\ge 1$), якщо існує така її параметризація $\bar{r}=\bar{r}(t)$, що $\bar{r}(t)\in C^k$ і $\bar{r}'(t)\ne\bar{0}$.

Регулярну криву класу $k=1$ називають гладкою кривою.

Якщо $\bar{r}(t)\in C^\infty$, то криву називають аналітичною.

Зауваження 2.1. Вимога існування в означенні регулярної кривої э суттєвою.

Приклад 2.3. Розглянемо криву γ на площині, задану параметричним рівняннями: $\gamma:\begin{cases} x=t^3; \\ y=t^6. \end{cases}$

Тоді вектор функція має вид $\bar{r}'(t)=\left\{3t^2;6t^5\right\}$, та $\bar{r}'(0)=\bar{0}$ при $t=0$. Але це не означає, що крива γ не регулярна. Може статися, що існує краща параметризація цієї кривої.

Справді, візьмемо іншу параметризацію: $\tau=t^3$.

$\bar{r}(\tau):\begin{cases} x=\tau, \\ y=\tau^2. \end{cases}$ $\bar{r}'(\tau)=\{1;2\tau\}\ne 0$ для будь-якого $\tau\in\mathbb{R}$. Отже, крива γ регулярна. ■

Приклад 2.4. Скласти параметричне рівняння гвинтової лінії – траєкторії руху точки, яка обертається навколо прямої з постійною кутовою швидкістю ω і одночасно переміщується в напрямі осі обертання зі сталою швидкістю υ.

Розв'язання. Приймемо вісь обертання за Oz і будемо вважати, що початкове положення рухомої точки M_0 знаходиться на осі Ox.

В довільний момент часу відстань точки M від осі обертання стала, отже M рухається по прямому круговому циліндру (рис.2).

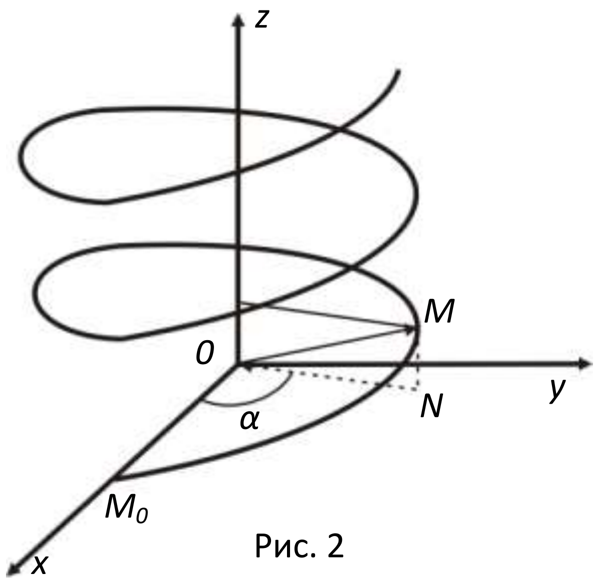

Рис. 2

Нехай радіус циліндра a. Якщо t – час, то для кожної точки $M(x,y,z)$: $\begin{cases} z=\upsilon t \\ \alpha=\omega t \end{cases}$.

Отже: $\begin{cases} x(t)=a\cos\alpha, \\ y(t)=a\sin\alpha, \\ z(t)=\upsilon t; \end{cases}$ або

$$\begin{cases} x(t)=a\cos\omega t, \\ y(t)=a\sin\omega t, \\ z(t)=\upsilon t. \end{cases}$$

Відповідь: $\bar{r}(t)=\{a\cos\omega t; a\sin\omega t; \upsilon t\}$.

2.3. Неявно задана просторова крива (як перетин двох поверхонь):

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ \Phi(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Застосовуючи теореми про неявні функції, можна показати, що рівняння (3) визначають регулярну елементарну криву в деякому околі її точки $P_0(x_0,y_0,z_0)$, якщо функції $F(x,y,z),\Phi(x,y,z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними в околі цієї точки і ранг матриці $\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ \Phi'_x & \Phi'_y & \Phi'_z \end{pmatrix}$ в цій точці дорівнює 2.

Вважатимемо, що всі точки кривої γ належать деякій площині, наприклад, Oxy , для якої $z=0$. Тоді маємо такі способи аналітичного задання плоскої кривої.

а) Параметричні рівняння плоскої кривої в скалярній формі :

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t); \end{cases} \tag{2.1′}$$

б) Параметричне рівняння у векторній формі

$$\bar{r}=\bar{r}(t); \tag{2.2′}$$

в) Явно задана плоска крива $(x=t)$:

$$y = y(x); \qquad (2.3')$$

г) Неявно задана плоска крива:

$$F(x, y) = 0. \qquad (2.4')$$

Рівняння (2.4′) визначають регулярну елементарну криву в деякому околі її точки $P_0(x_0, y_0)$, якщо функція $F(x, y)$ неперервна разом зі своїми частинними похідними в околі цієї точки і в цій точці $F_x'^2 + F_y'^2 \neq 0$.

3. Дотична пряма, нормаль, нормальна площина до кривої у даній точці

Означення 2.11. Дотичною прямою до кривої в її даній точці називається граничне положення січної, яка проходить через дану точку та іншу точку кривої, яка необмежено наближається вздовж кривої до даної точки [1].

В диференціальній геометрії використовується ще одне означення дотичної до кривої, еквівалентне наведеному вище (рис.3).

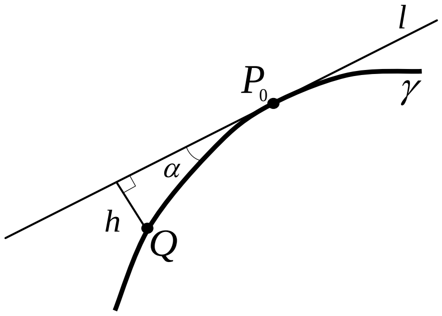

Рис.3

Нехай γ – дана крива, $P_0 \in \gamma$; l – пряма, $P_0 \in l$.

Розглянемо точку $Q \in \gamma$ і позначимо її відстані: d – відстань Q від P_0 ($d = P_0Q$), h – відстань Q від l.

Якщо $Q \to P_0$ і α – кут між прямими l і P_0Q, то $\frac{h}{d} = \sin\alpha$ – показник співпадання січної P_0Q з l.

Граничне положення січної P_0Q при $Q \to P_0$ є дотичною до γ в точці P_0, при цьому $\frac{h}{d} \to 0$.

Означення 2.12. Пряма l називається **дотичною** до кривої γ в точці P_0, якщо $\lim\limits_{Q \to P_0} \frac{h}{d} = 0$.

Теорема 2.1([1]). Гладка крива, задана рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $t \in (a,b)$, у кожній своїй точці $P_0(t_0)$ має єдину дотичну, яка паралельна вектору $\bar{r}'(t_0)$

Доведення.□ 1) **Єдиність дотичної.** Припустимо, що крива γ в точці $P_0 \leftrightarrow t_0$ має дотичну *l*.

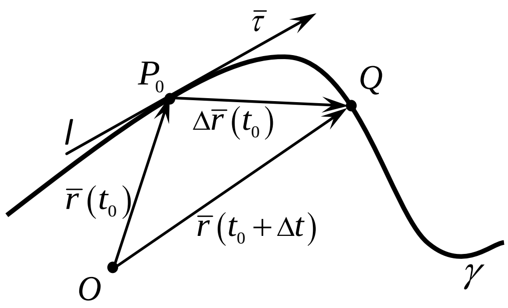

Рис.4

Нехай $\bar{\tau}$ – одиничний вектор дотичної в точці P_0, точкам P_0 і Q кривої відповідають значення $\bar{r}(t_0)$ і $\bar{r}(t_0+\Delta t)$:

$P_0 \leftrightarrow \bar{r}(t_0)$, $Q \leftrightarrow \bar{r}(t_0+\Delta t)$.

$d = \left|\overline{PQ}\right| = \left|\bar{r}(t_0+\Delta t) - \bar{r}(t)\right| = \left|\Delta\bar{r}(t_0)\right|$.

$h = \dfrac{S_\#}{|\bar{\tau}|} = \left|\left[\Delta\bar{r}(t_0), \bar{\tau}\right]\right|$, де $S_\#$ – площа паралелограма, побудованого на векторах $\Delta\bar{r}(t_0)$ і $\bar{\tau}$.

За означенням дотичної: $\dfrac{h}{d} = \dfrac{\left|\left[\Delta\bar{r}(t_0), \bar{\tau}\right]\right|}{\Delta\bar{r}(t_0)} \to 0$. (2.5)

Потрібно перейти до границі при $\Delta t \to 0$. Але у виразі для $\dfrac{h}{d}$ немає Δt.

Поділимо чисельник і знаменник на Δt:

$$\lim_{Q \to P_0} \frac{h}{d} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left|\left[\dfrac{\Delta\bar{r}(t_0)}{\Delta t}, \bar{\tau}\right]\right|}{\left|\dfrac{\Delta\bar{r}(t_0)}{\Delta t}\right|} = \frac{\left|\left[\bar{r}'(t_0), \bar{\tau}\right]\right|}{\left|\bar{r}'(t_0)\right|} = 0.$$

Звідси $\left[\bar{r}'(t_0), \bar{\tau}\right] = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{\tau} \parallel \bar{r}'(t_0)$, оскільки $\bar{r}'(t_0) \neq \bar{0}, \bar{\tau} \neq \bar{0}$.

Таким чином, якщо дотична *l* існує, то вона має напрям вектора $\bar{r}'(t_0)$. Точка P_0 і вектор $\bar{r}'(t_0)$ визначають єдину дотичну.

2) **Існування дотичної.** Дотична визначається точкою P_0 і напрямним вектором. З попередніх записів видно, що таким вектором може бути

одиничний вектор, колінеарний вектору $\bar{r}'\left(t_0\right)$. Справді, розглянемо вектор $\dfrac{\bar{r}'(t_0)}{\left|\bar{r}'(t_0)\right|}$ і запишемо $\dfrac{h}{d}$ для прямої з таким напрямним вектором:

$$\frac{h}{d}=\frac{\left|\left[\Delta\bar{r}(t_0),\dfrac{\bar{r}'(t_0)}{\left|\bar{r}'(t_0)\right|}\right]\right|}{\left|\Delta\bar{r}(t_0)\right|};\ \lim_{Q\to P_0}\frac{h}{d}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\left[\dfrac{\Delta\bar{r}(t_0)}{\Delta t},\dfrac{\bar{r}'(t_0)}{\left|\bar{r}'(t_0)\right|}\right]\right|}{\left|\dfrac{\Delta\bar{r}(t_0)}{\Delta t}\right|}=\frac{\left|\left[\bar{r}'(t_0),\bar{r}'(t_0)\right]\right|}{\left|\bar{r}'(t_0)\right|^2}=0\,.$$

Це і означає, що пряма, яка визначається точкою P_0 і напрямом $\dfrac{\bar{r}'(t_0)}{\left|\bar{r}'(t_0)\right|}$, є дотичною. ■

Зауваження 2.2. Тепер зрозумілий зміст обмеження $\bar{r}'\left(t_0\right)\neq\bar{0}$ в означенні регулярної кривої. Це обмеження еквівалентне вимозі існування дотичної до кривої (напрям нульового вектора невизначений).

Знайдемо рівняння дотичної прямої для різних способів задання регулярної просторової кривої в точці P_0.

а) Крива задана параметричним рівнянням у векторній формі: $\bar{r}=\bar{r}(t)$ (рис. 5).

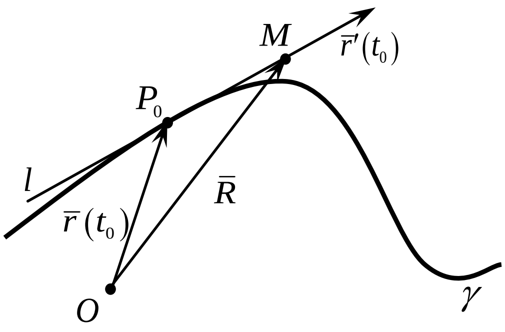

Рис.5

$$\left(\forall M\in l\right):\ \bar{r}\left(t_0\right)+\overline{P_0M}=\bar{R}\,,$$

$$\overline{P_0M}=\lambda\bar{r}'\left(t_0\right),\ \ \bar{R}-\bar{r}\left(t_0\right)\,||\,\bar{r}'\left(t_0\right),$$

$$\boxed{\bar{R}-\bar{r}\left(t_0\right)=\lambda\bar{r}'\left(t_0\right)} \tag{2.6}$$

б) Крива задана параметричними рівняннями в скалярній формі

$$\begin{cases} x=x\left(t\right),\\ y=y\left(t\right),\\ z=z\left(t\right).\end{cases}$$

Позначимо координати точок P_0 і M: $P_0\left(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\right)$, $M\left(X, Y, Z\right)$ та скористаємось пропорційністю відповідних координат колінеарних векторів:

$$\boxed{\frac{X - x\left(t_0\right)}{x'\left(t_0\right)} = \frac{Y - y\left(t_0\right)}{y'\left(t_0\right)} = \frac{Z - z\left(t_0\right)}{z'\left(t_0\right)}} \qquad (2.6')$$

в) Криву задано як перетин двох поверхонь: $\begin{cases} F\left(x, y, z\right) = 0, \\ \Phi\left(x, y, z\right) = 0, \end{cases}$

де функції $F\left(x, y, z\right), \Phi\left(x, y, z\right)$ неперервні разом з їх частинними похідними в деякому околі точки $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$.

Припустимо, що в точці $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ кривої γ ранг матриці $\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ \Phi'_x & \Phi'_y & \Phi'_z \end{pmatrix}$ дорівнює 2. Це умова того, що в точці P_0 існує окіл, усі точки якого утворюють регулярну елементарну криву.

Нехай $\begin{cases} x = x\left(t\right), \\ y = y\left(t\right), \\ z = z\left(t\right), \end{cases}$ – регулярна параметризація цієї ж кривої в околі точки P_0.

Підставивши ці функції в ліві частини рівнянь $\begin{cases} F\left(x, y, z\right) = 0, \\ \Phi\left(x, y, z\right) = 0, \end{cases}$

одержимо тотожності $\begin{cases} F\left(x(t), y(t), z(t)\right) \equiv 0, \\ \Phi\left(x(t), y(t), z(t)\right) \equiv 0. \end{cases}$

Продиференціюємо ці рівності по t, застосовуючи правило диференціювання складеної функції від трьох змінних:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{dz}{dt} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\dfrac{dz}{dt} = 0. \end{cases}$$

Ліві частини рівностей містять дві групи величин:

x'_t, y'_t, z'_t – похідні від координат в точці $P_0 \in \gamma$;

$F'_x, F'_y, F'_z,\ \Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z$ – частинні похідні від функцій, які визначають поверхні і обчислюються в точці P_0.

Складемо матрицю з елементів другої групи: $\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ \Phi'_x & \Phi'_y & \Phi'_z \end{pmatrix} = A$.

Оскільки її ранг дорівнює 2, то розв'язки однорідної системи можна подати через відношення визначників $2^{\text{го}}$ порядку, складених з елементів матриці *A*:

$$\frac{x'_t(t_0)}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ \Phi'_y & \Phi'_z \end{vmatrix}} = \frac{y'_t(t_0)}{-\begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ \Phi'_x & \Phi'_z \end{vmatrix}} = \frac{z'_t(t_0)}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ \Phi'_x & \Phi'_y \end{vmatrix}}.$$

Підставимо в рівняння (2. 6') замість $x'_t(t_0),\ y'_t(t_0), z'_t(t_0)$ величини, їм пропорційні:

$$\boxed{\frac{X - x_0}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ \Phi'_y & \Phi'_z \end{vmatrix}} = \frac{Y - y_0}{-\begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ \Phi'_x & \Phi'_z \end{vmatrix}} = \frac{Z - z_0}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ \Phi'_x & \Phi'_y \end{vmatrix}}}. \qquad (2.6'')$$

Приклад 2.5. Знайти рівняння дотичної в точці *(a,0,0)* до гвинтової лінії $\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, \\ z = \upsilon t. \end{cases}$

Розв'язання. Даній точці відповідає значення *t=0.*

$\bar{r} = \{a\cos\omega t, a\sin\omega t, \upsilon t\}$; $\bar{r}'_t = \{-\omega a\sin\omega t, a\omega\cos\omega t, \upsilon\}$; $\bar{r}'(0) = \{0, a\omega, \upsilon\}$.

У відповідності з (6') запишемо рівняння дотичної: $\dfrac{X - a}{0} = \dfrac{Y}{a\omega} = \dfrac{Z}{\upsilon}$.

Відповідь: $\dfrac{X - a}{0} = \dfrac{Y}{a\omega} = \dfrac{Z}{\upsilon}$.

Означення 2.13 ([1]). **Нормаллю кривої** в даній її точці називається пряма, яка проходить через цю точку і перпендикулярна до дотичної, проведеної до кривої у цій точці.

Просторова крива має нескінченну множину нормалей. Усі вони лежать в одній площині, яка називається нормальною площиною.

Означення 2.14([1]). **Нормальною площиною** кривої в даній її точці називається площина, яка проходить через дану точку і перпендикулярна до дотичної, проведеної до кривої у цій точці

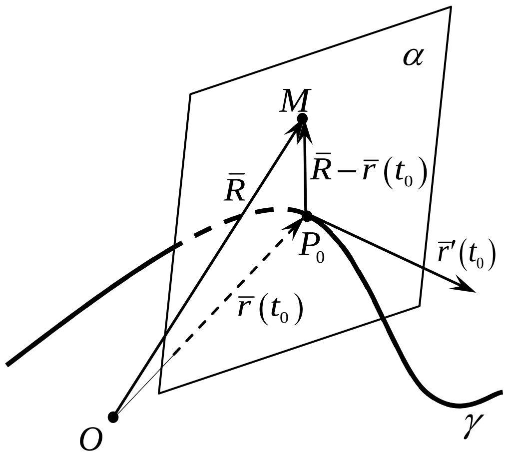

Рис. 6

Нехай $\bar{R}$ – радіус-вектор довільної точки M нормальної площини α в точці P_0.

Тоді вектор $\bar{r}'(t_0)$ є нормальним вектором площини α:

$$(\forall M \in \alpha): \bar{R}-\bar{r}(t_0) \perp \bar{r}'(t_0).$$

Відповідно до способу задання кривої маємо такі рівняння нормальної площини в точці P_0:

$$\boxed{\left(\bar{R}-\bar{r}(t_0)\right)\cdot \bar{r}'(t_0)=0}; \qquad (2.7)$$

$$\boxed{x'(t_0)\left(X-x(t_0)\right)+y'(t_0)\left(Y-y(t_0)\right)+z'(t_0)\left(Z-z(t_0)\right)=0}; \qquad (2.7')$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ \Phi'_y & \Phi'_z \end{vmatrix}(X-x_0)-\begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ \Phi'_x & \Phi'_z \end{vmatrix}(Y-y_0)+\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ \Phi'_x & \Phi'_y \end{vmatrix}(Z-z_0)=0}. \qquad (2.7'')$$

Приклад 2.6. Скласти рівняння дотичної прямої та нормальної площини до кривої $\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2-47=0, \\ x^2+2y^2-z=0; \end{cases}$ в точці $M_0(-2;1;6)$.

Розв'язання.

$F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-47=0$ – рівняння еліпсоїда;

$\Phi(x,y,z)=x^2+2y^2-z=0$ – рівняння параболоїда.

$F'_x = 4x;\ F'_y = 6y;\ F'_z = 2z.$

$\Phi'_x = 2x;\ \Phi'_y = 4y;\ \Phi'_z = -1.$

При $x_0 = -2$; $y_0 = 1$; $z_0 = 6$ маємо: $F'_x = -8$; $F'_y = 6$; $F'_z = 12$;

$\Phi'_x = -4$; $\Phi'_y = 4$; $\Phi'_z = -1$.

Отже: $\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ \Phi'_x & \Phi'_y & \Phi'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 6 & 12 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$

Рівняння дотичної прямої:

$$\frac{X+2}{\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{Y-1}{\begin{vmatrix} 12 & -8 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{Z-6}{\begin{vmatrix} -8 & 6 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}};\quad \frac{X+2}{-54} = \frac{Y-1}{-56} = \frac{Z-6}{-8};\quad \frac{X+2}{27} = \frac{Y-1}{28} = \frac{Z-6}{4}.$$

Рівняння нормальної площини:

$$27(X+2) + 28(Y-1) + 4(Z-6) = 0;\quad 27X + 28Y + 4Z + 2 = 0.$$

Відповідь: $\dfrac{X+2}{27} = \dfrac{Y-1}{28} = \dfrac{Z-6}{4}$; $27X + 28Y + 4Z + 2 = 0$. ■

Якщо крива плоска і розміщена в координатній площині Oxy ($z = 0$), легко отримати результати, подані нижче в таблиці 2.1 ([1]).

Таблиця 2.1.

Рівняння кривої	Рівняння дотичної прямої	Рівняння нормальної прямої
$\bar{r} = \bar{r}(t)$	$\bar{R} - \bar{r}(t_0) = \lambda \bar{r}'(t_0)$	$(\bar{R} - \bar{r}(t_0)) \cdot \bar{r}'(t_0) = 0$
$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$	$\dfrac{X - x(t_0)}{x'(t_0)} = \dfrac{Y - y(t_0)}{y'(t_0)}$	$Y - y(t_0) = -\dfrac{x'(t_0)}{y'(t_0)}(X - x(t_0))$
$y = y(x)$	$Y - y(x_0) = y'(x_0)(X - x_0)$	$Y - y(x_0) = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(X - x_0)$
$F(x, y) = 0$	$Y - y_0 = -\dfrac{F'_x}{F'_y}(X - x_0)$	$Y - y_0 = \dfrac{F'_y}{F'_x}(X - x_0)$

4. Співдотична площина до даної кривої у даній точці

Порівняємо радіус-вектор довільної точки дотичної прямої $\bar{R}=\bar{r}\left(t_0\right)+\lambda\bar{r}'\left(t_0\right)$ з розкладом радіус-вектора кривої в околі точки P_0 $\bar{r}\left(t_0+\Delta t\right)=\bar{r}\left(t_0\right)+\bar{r}'\left(t_0\right)\Delta t+\bar{\theta}\left(\Delta t\right)$.

Якщо покласти $\lambda=\Delta t$, то ці радіус-вектори відрізняються на нескінченно малу $\bar{\theta}\left(\Delta t\right)$: $\bar{r}\left(t_0+\Delta t\right)-\bar{R}=\bar{\theta}\left(\Delta t\right)$ Тому при досить малому Δt криву γ можна наближено замінити на дотичну пряму. Іншими словами, дотична пряма є першим наближенням кривої. Це означає, що властивості кривої можна вивчати («в малому») за допомогою простішого геометричного образу – прямої (а саме: дотичної прямої).

Узагальненням цієї задачі є задача про знаходження площини, яка була б найтісніше пов’язана з кривою в даній її точці. Це так звана стична площина.

Означення 2.15 ([1]). **Співдотичною площиною** кривої γ в даній її точці P_0 називається граничне положення площини, яка проходить через дотичну пряму до кривої в точці P_0 та іншу точку P_1 кривої γ , що необмежено наближається вздовж γ до P_0.

Площина, яка проходить через дотичну до кривої γ , називається дотичною площиною γ. Дотична площина до кривої γ проходить через дві точки γ, що необмежено зближуються (до P_0). Стична площина – та з дотичних площин, яка проходить через три точки кривої γ , що необмежено зближуються.

Якщо γ – плоска крива, то її стична площина співпадає з площиною, в якій лежить ця крива.

Виведемо рівняння стичної площини. Нехай крива γ задана рівнянням у векторній формі $\bar{r}=\bar{r}(t)$. Візьмемо на γ точку P_0 , якій відповідає радіус-вектор $\bar{r}(t_0): P_0 \leftrightarrow \bar{r}(t_0)$. Проведемо в цій точці дотичну до γ, напрям дотичної визначається вектором $\bar{r}'(t_0)$.

Нехай P_1 – точка γ , близька до P_0, і точці P_1 відповідає радіус-вектор $\bar{r}(t_0+\Delta t)$: $P_1 \leftrightarrow \bar{r}(t_0+\Delta t)$. Через дотичну і точку P_1 проведемо площину α . Довільній точці M площини α поставимо у відповідність радіус-вектор $\bar{R}$: $M \leftrightarrow \bar{R}$.

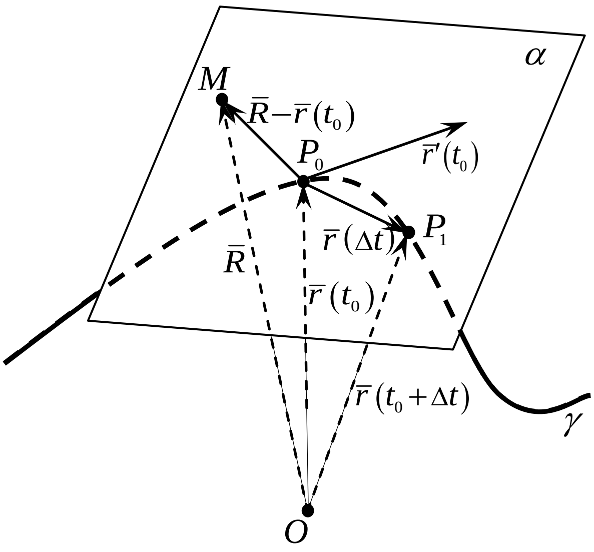

Рис.7

Оскільки вектори $\overline{P_0M}$, $\bar{r}'(t_0)$ і $\overline{P_0P_1}$ лежать в одній площині α , то їх мішаний добуток дорівнює нулю: $\left(\overline{P_0M}\ \bar{r}'(t_0)\ \overline{P_0P_1}\right)=0$.

Але $\overline{P_0M}=\bar{R}-\bar{r}(t_0)$; $\overline{P_0P_1}=\bar{r}(t_0+\Delta t)-\bar{r}(t_0)=\Delta\bar{r}(t_0)$.

Звідси

$$\left(\bar{R}-\bar{r}(t_0)\right)\bar{r}'(t_0)\Delta\bar{r}(t_0)=0. \tag{2.8}$$

Знайдемо розклад Тейлора для функції $\Delta\bar{r}(t_0)$. Для цього запишемо розклад для радіуса-вектора кривої $\bar{r}(t)$ в околі точки P_0 за степенями Δt:

$$\bar{r}(t_0+\Delta t)=\bar{r}(t_0)+\Delta\bar{r}(t_0)=r(t_0)+\Delta t\bar{r}'(t_0)+\frac{\Delta t^2}{2!}\bar{r}''(t_0)+\frac{\Delta t^3}{3!}\bar{r}'''(t_0)+\ldots\ .$$

Звідси $\Delta\bar{r}(t_0)=\Delta t\bar{r}'(t_0)+\dfrac{\Delta t^2}{2!}\bar{r}''(t_0)+\dfrac{\Delta t^3}{3!}\bar{r}'''(t_0)+\ldots$.

Підставимо $\Delta\bar{r}(t_0)$ в (8). Одержимо:

$$\left(\bar{R}-\bar{r}(t_0)\right)\left[\bar{r}',\left(\Delta t\bar{r}'(t_0)+\frac{\Delta t^2}{2!}\bar{r}''(t_0)+\frac{\Delta t^3}{3!}\bar{r}'''(t_0)+\ldots\right)\right]=0;$$

$$\left(\bar{R}-\bar{r}\left(t_0\right)\right)\left(\left[\bar{r}'\bar{r}'\right]\Delta t+\frac{\Delta t^2}{2!}\left(\left[\bar{r}'\bar{r}''\right]+\frac{\left[\bar{r}'\bar{r}'''\right]}{3}\Delta t+\ldots\right)\right)=0.$$

Врахуємо, що $\left[\bar{r}'\bar{r}'\right]=\bar{0}$, і поділимо обидві частини останньої рівності на $\frac{\Delta t^2}{2!}$.

Одержимо $\left(\bar{R}-\bar{r}\left(t_0\right)\right)\bar{r}'\left(t_0\right)\bar{r}''\left(t_0\right)+\frac{\Delta t}{3}\left(\bar{R}-\bar{r}_{t_0}\right)\bar{r}'\bar{r}''+\ldots=0.$ (2.9)

Для стичної площини $P_1\to P_0$ (за означенням) , тому $\Delta t\to 0$.

Тоді з (9) одержимо рівняння стичної площини у векторній формі :

$$\boxed{\left(\left(\bar{R}-\bar{r}\left(t_0\right)\right)\bar{r}'\left(t_0\right)\bar{r}''\left(t_0\right)\right)=0}. \tag{2.10}$$

Теорема 2.2. В будь-якій точці регулярної кривої класу C^2 (у всякому разі двічі неперервно диференційовної) існує стична площина, причому:

1) якщо $\bar{r}'\left(t_0\right)\nparallel\bar{r}''\left(t_0\right)$, то стична площина єдина і її нормальний вектор $\bar{n}=\left[\bar{r}'\left(t_0\right)\bar{r}''\left(t_0\right)\right]$;

2) якщо $\bar{r}'\left(t_0\right)\parallel\bar{r}''\left(t_0\right)$, то будь-яка площина, яка проходить через дотичну кривої, є стичною.

Враховуючи, що

$$\bar{R}-\bar{r}\left(t_0\right)=\left(X-x\left(t_0\right)\right)\bar{i}+\left(Y-y\left(t_0\right)\right)\bar{j}+\left(Z-z\left(t_0\right)\right)\bar{k},$$
$$\bar{r}'\left(t_0\right)=x'\left(t_0\right)\bar{i}+y'\left(t_0\right)\bar{j}+z'\left(t_0\right)\bar{k},$$
$$\bar{r}''\left(t_0\right)=x''\left(t_0\right)\bar{i}+y''\left(t_0\right)\bar{j}+z''\left(t_0\right)\bar{k},$$

можемо записати (2.10) в скалярній формі:

$$\boxed{\begin{vmatrix} X-x\left(t_0\right) & Y-y\left(t_0\right) & Z-z\left(t_0\right) \\ x'\left(t_0\right) & y'\left(t_0\right) & z'\left(t_0\right) \\ x''\left(t_0\right) & y''\left(t_0\right) & z''\left(t_0\right) \end{vmatrix}=0}. \tag{2.10'}$$

Основні властивості співдотичної площини [1]:

1°. Співдотична площина кривої є граничним положенням площини, яка проходить через три нескінченно близькі точки кривої.

Прийнявши цю властивість за означення співдотичної площини, можна отримати її рівняння.

2°.Дотичною площиною кривої називається будь-яка площина, що проходить через дотичну пряму. Площини, що дотикаються до кривої в даній точці, утворюють пучок. Співдотична площина належить цьому пучку і є однією з дотичних площин. Можна з'ясувати відмінність ссшвдотичної площини від інших дотичних площин, які називатимемо звичайними дотичними площинами.

Якщо точка кривої наближається до точки дотику, то:

1) відстань її від звичайної дотичної площини є нескінченно мала другого порядку відносно приросту параметра;

2) відстань точки від співдотичної площини є нескінченно мала, принаймні, третього порядку відносно того ж приросту параметра.

3°. Співдотична площина має дотикання другого порядку з кривою, тобто: $\frac{h}{d^2} \to 0$, якщо $P_1 \to P_0$, де d – відстань P_1 від P_0, h – відстань P_1 від стичної площини.

Зауважимо, що дотична пряма з кривою має дотикання 1-го порядку.

4°. При будь-якій параметризації кривої вектор другої похідної радіуса-вектора кривої розміщений в її стичній площині.

Якщо t – час, а $\bar{r} = \bar{r}(t)$ – рівняння руху, то вектор $\bar{r}''$ називається вектором прискорення рухомої точки ($\bar{r}'$ – вектор швидкості).

Вектор прискорення завжди розміщений в співдотичній площині траєкторії рухомої точки.

Приклад 2.7. Скласти рівняння співдотичної площини конічної гвинтової лінії

$$\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \\ z = at \end{cases} \quad \text{в початку координат.}$$

Розв'язання. Початок координат відповідає значенню $t = 0$. Знайдемо перші та другі похідні по *t*:

$$x' = \cos t - t\sin t; \quad x'' = -\sin t - \sin t - t\cos t = -2\sin - t\cos t;$$
$$y' = \sin t + t\cos t; \quad y'' = \cos t + \cos t - t\sin t = 2\cos t - t\sin t;$$
$$z' = a; \qquad z'' = 0.$$

При $t = 0$ маємо: $\begin{matrix} x'(0) = 1, & y'(0) = 0, & z'(0) = a; \\ x''(0) = 0, & y''(0) = 2, & z''(0) = 0; \end{matrix}$

Підставляємо ці значення в рівняння (2.10'):

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ звідки } \quad -2ax + 2z = 0, \text{ тобто } \quad ax - z = 0.$$

Відповідь. $ax - z = 0.$

5. ПРЯМОКУТНА ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ, ЯКА ПОВ'ЯЗАНА З ЕЛЕМЕНТАРНОЮ КРИВОЮ У ДАНІЙ ТОЧЦІ

Оскільки при вивченні кривих використовують їх рівняння, то вибір системи координат впливає на вид рівняння.

Існує просторова система координат, яка пов'язана з кривою та її геометричними властивостями і яка зручна для побудови її локальної диференціальної геометрії.

Гладка крива γ у кожній своїй точці P_0 має єдину дотичну. Якщо γ є годографом векторної функції $\bar{r} = \bar{r}(t)$, то напрямним вектором дотичної є вектор $\bar{r}'(t)$.

Якщо γ – двічі неперервно диференційовна крива, то за умови $\bar{r}'(t_0) \nparallel \bar{r}''(t_0)$ у кожній своїй точці P_0 вона має єдину співдотичну площину, яка визначається точкою P_0 і векторами $\bar{r}'(t)$ і $\bar{r}''(t)$. За означенням співдотична площина кривої у точці P_0 містить дотичну, проведену до кривої у точці P_0.

Нормаллю просторової кривої називається будь-яка пряма, яка перпендикулярна до дотичної і проходить через точку дотику. Таким чином, у будь-якій своїй точці гладка крива має нескінченну множину нормалей. Всі вони розміщені в одній площині, перпендикулярній до дотичної прямої – нормальній площині кривої.

Серед нормалей виділяють дві:

1) **головну нормаль** $\overline{N}$, яка розміщена у співдотичній площині;

2) **бінормаль** $\overline{B}$, яка перпендикулярна до співотичної площини.

Дотична, головна нормаль і бінормаль визначають у будь-якій точці кривої тригранник з трьома прямими кутами при вершині, яка збігається з точкою кривої. Цей тригранник називають **супровідним, рухомим, основним або натуральним тригранником** кривої у точці P_0 (рис. 8).

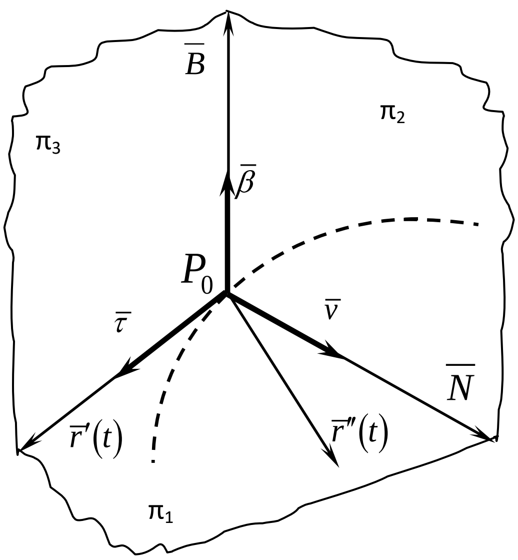

Рис.8

Гранями супровідного тригранника є три взаємно перпендикулярні площини:

π_1 – *співдотична площина*, яка містить дотичну $\overline{r}'(t)$ і головну нормаль $\bar{N}$;

π_2 – *нормальна площина*, яка містить головну нормаль $\bar{N}$ і бінормаль $\bar{B}$;

π_3 – *спрямна площина,* яка містить бінормаль $\overline{B}$ і дотичну $\overline{r}'(t)$.

Напрям ребер супровідного тригранника визначається векторами $\bar{r}'(t)$, $\bar{N}$, $\bar{B}$. Часто зручно користуватися їх одиничними векторами $\bar{\tau},\bar{\nu},\bar{\beta}$ відповідно, причому $\bar{\tau}^2=\bar{\nu}^2=\bar{\beta}^2=1$; $\bar{\tau}\bar{\nu}=\bar{\tau}\bar{\beta}=\bar{\nu}\bar{\beta}=0$; $\left(\bar{\tau}\bar{\nu}\bar{\beta}\right)=+1$; трійка $\bar{\tau},\bar{\nu},\bar{\beta}$ – права.

Якщо співдотична площина єдина, то супровідний тригранник у будь-якій $P_0\in\gamma$ однозначно визначається точкою P_0 і ортонормованим базисом векторів $\bar{\tau},\bar{\nu},\bar{\beta}$.

Якщо точка P_0 описує криву γ, то супровідний тригранник, рухаючись, змінює своє положення в просторі.

Система координат, напрям осей якої визначається векторами $\bar{\tau},\bar{\nu},\bar{\beta}$ називається **природною**. Вона широко використовується в механіці. З трьох площин супровідного тригранника найважливіше значення для кривої має стпівдотична площина.

Для складання рівнянь елементів супровідного тригранника треба вміти обчислювати напрямні вектори його ребер: $\bar{r}'(t)$, $\bar{N}$, $\bar{B}$.

Зауважимо, що $\bar{B}=\left[\bar{r}'\bar{r}''\right]$, $\bar{N}=\left[\bar{B}\bar{r}'\right]=\left[\left[\bar{r}'\bar{r}''\right]\bar{r}'\right]$.

Тому послідовність знаходження векторів $\bar{\tau},\bar{\nu},\bar{\beta}$ може бути такою:

1) знайти $\bar{r}'$, $\bar{\tau}=\dfrac{\bar{r}'}{\left|\bar{r}'\right|}$;

2) знайти $\bar{B}=\left[\bar{r}'\times\bar{r}''\right]$, $\bar{\beta}=\dfrac{\bar{B}}{\left|\bar{B}\right|}$;

3) знайти $\bar{\nu}=\left[\bar{\beta}\times\bar{\tau}\right]$ або $\bar{N}=\left[\bar{B}\times\bar{r}'\right]$, $\bar{\nu}=\dfrac{\bar{N}}{\left|\bar{N}\right|}$.

6. Довжина дуги кривої. Натуральна параметризація

Нехай просторову елементарну криву γ дано параметричним рівнянням $\bar{r}=\bar{r}(t)$ і $t\in\left[a;b\right]$. Впишемо в криву γ ламану (рис. 9).

Означення 2.16 ([1]). Ламана називається **правильно вписаною** в криву γ, якщо її вершини на кривій слідують в тому ж порядку (тобто без зворотів), що і їх прообрази на відрізку $\left[a;b\right]$.

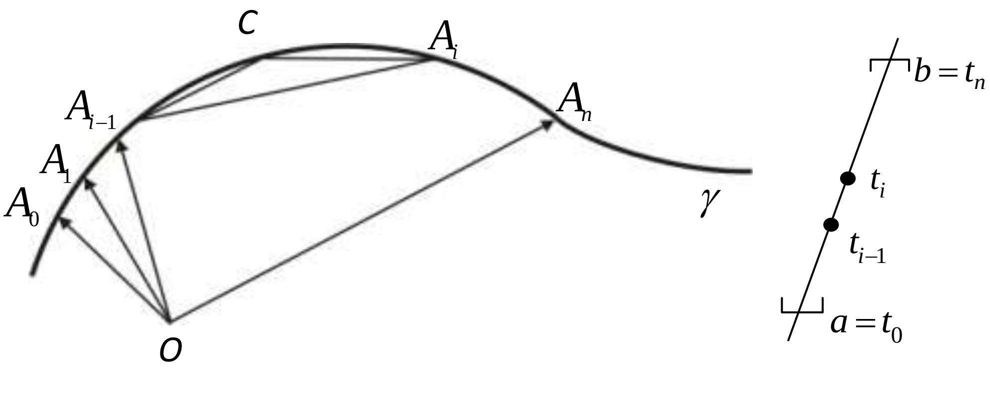

Рис. 9

На відрізку $\left[a;b\right]$ візьмемо точки $a=t_0,t_1,...,t_{i-1},t_i,...,t_n=b$. На кривій γ їм відповідають точки $A_0,A_1,...,A_{i-1},A_i,...,A_n$. Сполучаючи послідовно ці точки, одержимо ламану $A_0A_1...A_{i-1}A_i...A_n$, вписану в криву γ.

Розглянемо довжину цієї ламаної. Якщо кількість вершин ламаної збільшується, то її довжина збільшується. Справді, якщо на дузі кривої γ з кінцями A_{i-1} і A_i взято нову вершину C, то сума прямолінійних відрізків $A_{i-1}C$ і CA_i більша довжини прямолінійного відрізка $A_{i-1}A_i$. Тому довжина нової вписаної ламаної $A_0A_1...A_{i-1}CA_i...A_n$ більша довжини ламаної $A_0A_1...A_{i-1}A_i...A_n$.

Крива γ називається *спрямною,* якщо довжини всіх правильно вписаних в неї ламаних обмежені зверху.

Верхня границя довжин усіх таких ламаних називається **довжиною** кривої γ і позначається $s(\gamma)$.

Теорема 4.3 ([1]). Гладка крива є спрямною. Довжина $s(\gamma)$ гладкої кривої $\bar{r}=\bar{r}(t)$ ($t\in[a;b]$) дорівнює визначеному інтегралу від модуля похідної $\bar{r}'(t)$:

$$\boxed{s(\gamma)=\int_a^b |\bar{r}_t'|dt}. \qquad \textbf{(2.11)}$$

В скалярній формі формула (11) має вид:

$$\boxed{s(\gamma)=\int_a^b \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt}. \qquad (2.12)$$

Якщо криву задано рівняннями $\begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$, то

$$s(\gamma)=\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}dx.$$

Для плоских кривих, розміщених у координатній площині Oxy, в цих формулах слід покласти $z'(x)=0$.

Приклад 2. 8. Знайти довжину кола, заданого рівнянням $x^2+y^2=a^2$**.**

Розв'язання. Векторне рівняння кола $\bar{r}(t)=(a\cos t, a\sin t), t\in[0,2\pi)$. Знайдемо $\bar{r}'(t)=(-a\sin t, a\cos t)$, $|\bar{r}'(t)|=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}=|a|$. Довжина кола $s=\int_0^{2\pi}|\bar{r}'(t)|dt=\int_0^{2\pi}|a|dt=2\pi|a|$.

Відповідь: $2\pi|a|$.

Поняття довжини кривої дозволяє визначити на кривій параметр, який найбільш природнім способом пов'язаний з кривою. Таким параметром є довжина дуги. Дійсно, виберемо на кривій точку A_0 і який-небудь напрямок на ній. Положення точки B на кривій визначається її відстанню від точки A_0. Приймемо за параметр на кривій довжину s дуги A_0B, взяту зі знаком

+, якщо дуга A_0B має додатній напрямок, і зі знаком – , якщо дуга A_0B має від'ємний напрямок.

Якщо до цього на прямій була інша параметризація t і точці A_0 відповідало значення t_0, а точці B – значення t, то довжина $s(A_0B)$ обчислюється за формулою:

$s(A_0B)=s(t)=\int\limits_{t_0}^{t}|\bar{r}'(t)|dt$, а отже $\dfrac{ds}{dt}=|\bar{r}'(t)|>0$, тобто $s(A_0B)$ є монотонною функцією від параметра t і може бути прийнята за параметр. Цей параметр особливо зручний для вивчення кривої за її рівнянням і називається **натуральним параметром** кривої. Така *параметризація* називається *натуральною* і позначається $\bar{r}=\bar{r}(s)$.

Для натуральної параметризації дотичний вектор кривої $\bar{r}'(s)$ є одиничним вектором, тобто $|\bar{r}'(s)|=1$. Дійсно: $\left|\dfrac{d\bar{r}}{ds}\right|=\left|\dfrac{d\bar{r}}{dt}\cdot\dfrac{dt}{ds}\right|=\left|\dfrac{\bar{r}'}{s'}\right|=\dfrac{|\bar{r}'|}{|\bar{r}'|}=1$.

Визначна властивість натуральної параметризації:

Якщо $\bar{r}(s)$ – натуральна параметризація , то $|\bar{r}'(s)|=1$.

Навпаки, якщо для деякого параметра t $|\bar{r}_t'|=1$, то t – довжина дуги.

Приклад 2.9. Перейти до натуральної параметризації прямої, заданої векторним рівнянням $\bar{r}(t)=(t+1,2t-3,3t)$.

Розв'язання. Знайдемо $\bar{r}'(t)=(1,2,3)$, $|\bar{r}'(t)|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$,

$s(t)=\int\limits_0^t|\bar{r}'(t)|dt=\int\limits_0^t\sqrt{14}dt=\sqrt{14}t$. Звідси $t=s/\sqrt{14}$. Підставивши знайдене $t=t(s)$ в рівняння прямої, одержимо шукану натуральну параметризацію

$$\bar{r}(s)=\left(\frac{s}{\sqrt{14}}+1,\frac{2s}{\sqrt{14}}-3,\frac{3s}{\sqrt{14}}\right).\blacksquare$$

7. КРИВИНА КРИВОЇ У ДАНІЙ ТОЧЦІ

Напрям дотичної змінюється, якщо точка рухається по кривій. Щоб виміряти швидкість цієї зміни, візьмемо на кривій γ будь-яку точку P і точку Q, близьку до P. Проведемо дотичні в точках P і Q, знайдемо кут між ними і поділимо цей кут на довжину дуги PQ.

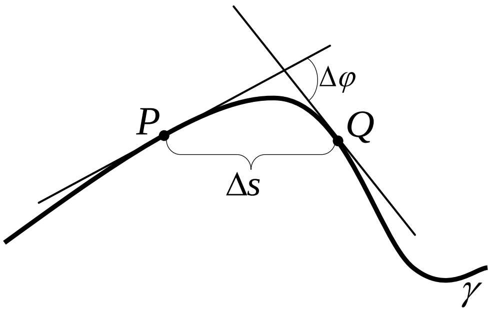

Рис.10

Позначимо:

$\Delta\varphi$ – кут між дотичними до γ в точках P і Q, Δs – довжина дуги PQ кривої γ.

Означення 2.17 ([1]). **Кривиною** k кривої γ в точці P називається границя відношення кута повороту дотичної на дузі, що стягується до даної точки, до довжини цієї дуги, тобто

$$k=\lim_{Q\to P}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

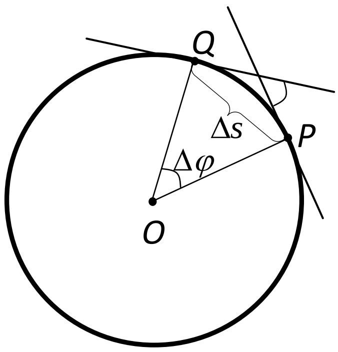

Рис. 11

Вимірюючи швидкість зміни напряму дотичної, кривина показує, наскільки крива за своєю формою відхиляється від форми прямої лінії. Чим більша кривина, тим сильніше це відхилення. Очевидно, що для прямої лінії кривина дорівнює нулю в усіх її точках, бо напрямний вектор прямої не змінює свого напряму.

Для кола радіуса R: $\Delta s=R\Delta\varphi$. Тому $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\dfrac{\Delta\varphi}{R\Delta\varphi}=\dfrac{1}{R}$ незалежно від Q.

Отже, кривина кола є сталою і дорівнює $\dfrac{1}{R}$, де R – радіус кола.

Означенн 2.18 ([1]). Вектор $\bar{r}''_{ss}$ називається **вектором кривини** кривої. Його довжина дорівнює кривині k кривої, заданої в натуральній параметризації.

Теорема 2.4 ([1]). Регулярна крива класу C^2 (двічі неперервно диференційовна) має в кожній точці єдину кривину. Якщо $\bar{r}=\bar{r}(s)$ – натуральна параметризація кривої, то кривина дорівнює модулю другої похідної функції $\bar{r}(s)$: $k=\left|\bar{r}''_{ss}(s)\right|$.

Доведення. Нехай точкам *P* і *Q* відповідають значення натурального параметра s і $s+\Delta s$ відповідно. Нехай $\bar{\tau}(s)=\bar{r}'(s)$ і $\bar{\tau}(s+\Delta s)=\bar{r}'(s+\Delta s)$ – одиничні дотичні вектори кривої в цих точках. Вектор $\bar{\tau}(s+\Delta s)$ перенесемо паралельно так, щоб його початок співпадав з точкою *P*. Кінці векторів $\bar{\tau}(s)$ і $\bar{\tau}(s+\Delta s)$ позначимо *M* і *N*. ΔPMN – рівнобедрений, бо вектори $\overline{PM}$ і $\overline{PN}$ – одиничні.

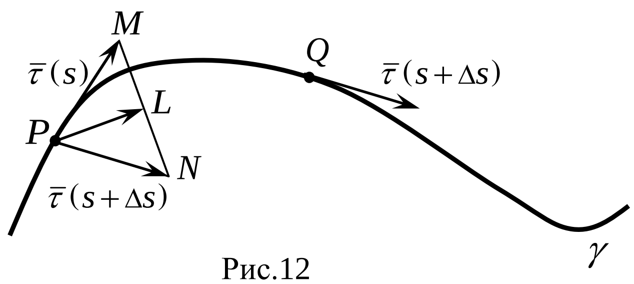

Рис.12

$\bar{\tau}(s+\Delta s)-\bar{\tau}(s)=\overline{MN}=2\overline{ML}$, де *L* – середина відрізка *MN*.

З прямокутного трикутника *PML*, де $\angle LPN=\dfrac{\Delta\varphi}{2}$: $\left|\bar{\tau}(s+\Delta s)-\bar{\tau}(s)\right|=2\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}$.

Поділимо обидві частини цієї рівності на Δs і перейдемо до границі при $\Delta s\to 0$.

Оскільки γ – двічі неперервно диференційовна крива і $\bar{\tau}(s)=\bar{r}'(s)$, то існує

$$\left|\bar{r}''_{ss}(s)\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left|\bar{r}'(s+\Delta s)-\bar{r}'(s)\right|}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta s}{2}}=$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\frac{\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta s}{2}}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=k,$$

бо $\Delta\varphi\to 0$ при $\Delta s\to 0$ і границя першого множника дорівнює 1 (перша чудова границя). ■

Нехай в даній точці кривина $k\neq 0$. Розглянемо *властивості вектора* $\bar{r}''_{ss}$ $\left(\bar{r}'_s=\bar{\tau},\ \bar{r}''_{ss}=\dfrac{d\bar{\tau}}{ds}=\bar{\tau}'\right)$:

1) $\bar{r}''_{ss}\perp\bar{\tau}$ (оскільки $\bar{\tau}$ – одиничний вектор і $\bar{\tau}^2=1$, отже $2\bar{\tau}\cdot\bar{\tau}'=0$);

2) $\bar{r}''_{ss}$ належить стичній площині;

3) $\bar{r}''_{ss}$ напрямлений за головною нормаллю і $\bar{r}''_{ss}=k\bar{v}$ де $\bar{v}$ – одиничний вектор головної нормалі. Останню рівність можна подати у виді:

$$\boxed{\frac{d\bar{\tau}}{ds}=k\bar{v}} \text{ (перша формула Френе).} \tag{2.13}$$

Нехай криву задано векторним рівнянням $\bar{r}=\bar{r}(t)$. Довжина дуги s є функцією параметра t: $s=s(t)$, отже $\bar{r}$ є складеною функцією $\bar{r}=\bar{r}\big(s(t)\big)$. Знайдемо другу похідну від $\bar{r}$ по s через похідні по t.

Для зручності домовимося похідні вектор-функції по натуральному параметру s позначати з крапкою ($\dot{\bar{r}}$, $\ddot{\bar{r}}$ і т.д.), а похідні по довільному параметру t – зі штрихом ($\bar{r}'$, $\bar{r}''$ і т.д.).

$\bar{r}'_t=\dot{\bar{r}}_s s'_t$; (14)

$$\bar{r}''_t=\frac{d\dot{\bar{r}}}{ds}\cdot s'_t\cdot s'_t+\dot{\bar{r}}_s\cdot s''_t=\ddot{\bar{r}}s'^2+\dot{\bar{r}}s''\text{, звідки } \ddot{\bar{r}}=\frac{\bar{r}''-\dot{\bar{r}}s''}{s'^2}. \tag{2. 15}$$

З (14) маємо: $\dot{\bar{r}}=\dfrac{\bar{r}'}{s'}=\dfrac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|}$, причому $|\dot{\bar{r}}|=1$.

Враховуючи, що $s'=s'_t=|\bar{r}'(t)|$, одержимо

$$s''=\frac{d}{dt}s'_t=\frac{d}{dt}\sqrt{\bar{r}'\cdot\bar{r}'}=\frac{2(\bar{r}'\cdot\bar{r}'')}{2\sqrt{\bar{r}'\cdot\bar{r}'}}=\frac{\bar{r}'\cdot\bar{r}''}{|\bar{r}'|}.$$

Підставимо одержані вирази для $\dot{\bar{r}}$, s', s'' в (15):

$$\ddot{\bar{r}}=\frac{1}{|\bar{r}'|^2}\left(\bar{r}''-\frac{\bar{r}'\big(\bar{r}'\cdot\bar{r}''\big)}{|\bar{r}'|^2}\right)=\frac{\bar{r}''}{|\bar{r}'|^2}-\frac{\bar{r}'\cdot\bar{r}''}{|\bar{r}'|^4}\cdot\bar{r}'.$$

Для обчислення кривини k знайдемо $|\ddot{\bar r}|$.

Оскільки $\dot{\bar r}$ – одиничний вектор і його похідна $\ddot{\bar r}$ ортогональна $\dot{\bar r}$, то $|\ddot{\bar r}|$ можна знайти як модуль векторного добутку $[\dot{\bar r}\ \ddot{\bar r}]$: $k=|\ddot{\bar r}|=|[\dot{\bar r}\ \ddot{\bar r}]|$.

$$[\dot{\bar r}\ \ddot{\bar r}]=\left[\frac{\bar r'}{|\bar r'|},\frac{\bar r''}{|\bar r'|^2}-\frac{\bar r'\cdot\bar r''}{|\bar r'|^4}\cdot\bar r'\right]=\frac{[\bar r'\bar r'']}{|\bar r'|^3}-\frac{[\bar r'\bar r'](\bar r'\bar r'')}{|\bar r'|^5}=\frac{[\bar r'\bar r'']}{|\bar r'|^3}.$$

$$\boxed{k=\frac{|[\bar r'\bar r'']|}{|\bar r'|^3}} \qquad (2.\ 16)$$

В скалярній формі маємо:

$[\bar r'\bar r'']=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\end{vmatrix}=A\bar i+B\bar j+C\bar k$, де *A, B, C* – координати вектора $[\bar r'\bar r'']$, тобто

$$k=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)^{3/2}} \qquad (2.16')$$

Приклад 2.10. Знайти кривину гвинтової лінії $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t,\\ z=bt.\end{cases}$

Розв’язання.

$$\begin{matrix}x'=-a\sin t; & y'=a\cos t; & z'=b;\\ x''=-a\cos t; & y''=-a\sin t; & z''=0.\end{matrix}$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=\left(a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t\right)+b^2=a^2+b^2.$$

$$[\bar r'\bar r'']=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ -a\sin t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\end{vmatrix}.$$

Отже $A=ab\sin t$; $B=-ab\cos t$; $C=a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t=a^2$;

$A^2+B^2+C^2=a^2b^2+a^4$.

$$k=\frac{\sqrt{a^2b^2+a^4}}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}=\frac{a\left(a^2+b^2\right)^{1/2}}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

Таким чином, кривина гвинтової лінії є сталою величиною.

Відповідь: $k=\dfrac{a}{a^2+b^2}$.

З формул (2.16) і (2.16') легко одержати формули для обчислення кривини плоскої кривої:

1) $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=0 \end{cases}$: $\quad [\bar{r}'\bar{r}'']=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix}=\bar{k}(x'y''-y'x'');\quad \boxed{k=\dfrac{|x'y''-y'x''|}{\left(x'^2+y'^2\right)}}.\quad (2.17)$

2) $y=y(x)$: $\quad \begin{cases} x=t, & x'=1, & y'=y'_x, \\ y=y(t); & x''=0, & y''=y''_x. \end{cases}\quad \boxed{k=\dfrac{|y''_x|}{\left(1+y'^2_x\right)^{3/2}}}.(2.17')$

3) $f(x;y)=0$: вважаємо що y є функцією від x, диференціюємо дане рівняння по x , звідки $f'_x+f'_y\cdot y'_x=0$ і $y'_x=-\dfrac{f'_x}{f'_y}$; далі знаходимо y''_x і підставляємо у формулу (2. 17').

8. Скрут кривої у даній точці

Кривина кривої є кількісною мірою відхилення кривої від прямої, а саме: від дотичної прямої.

Скрут – це кількісна міра відхилення кривої від площини, а саме: від стичної площини. Таким чином, скрут вказує наскільки крива відрізняється від форми плоскої кривої.

Положення стичної площини визначається нормальним вектором бінормалі $\bar{\beta}$. Швидкість зміни положення $\bar{\beta}$ характеризує скрут кривої аналогічно до того, як швидкість зміни вектора дотичної характеризує кривину.

Нехай P – довільна точка кривої γ, Q – точка γ, близька до P.

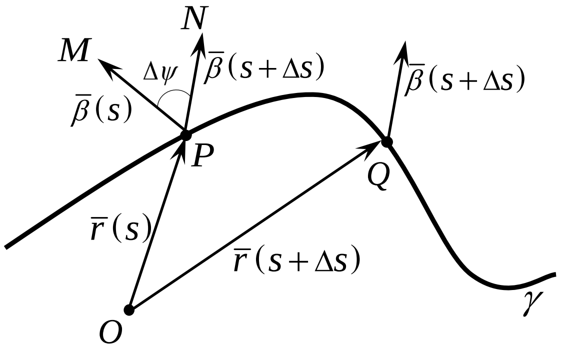

Рис.13

Очевидно, що величина двогранного кута між стичними площинами в точках P і Q дорівнює величині кута між бінормалями в цих точках.

Позначимо:

$\Delta\psi$ – кут між бінормалями в точках P і Q;

Δs – довжина дуги PQ кривої γ.

Означення 2.19 ([1]**). Абсолютним скрутом** $|\chi|$ в точці P називається границя відношення кута повороту бінормалі на дузі, що стягується до даної точки, до довжини цієї дуги, тобто

$$|\chi| = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta\psi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta s}.$$

Теорема 2.5 ([1]). Регулярна крива класу C^3 (тричі неперервно диференційовна) в кожній точці з відмінною від нуля кривиною k має єдиний абсолютний скрут. Якщо $\bar{r} = \bar{r}(s)$ – натуральна параметризація кривої, то абсолютний скрут дорівнює модулю похідної від одиничного вектора бінормалі по s:

$$|\chi| = \left|\frac{d\bar{\beta}}{ds}\right| = \frac{\left|\left(\dot{\bar{r}}_s \ddot{\bar{r}}_s \dddot{\bar{r}}_s\right)\right|}{k^2}, \qquad (2.18)$$

де k – кривина кривої.

Доведення. Розглянемо *властивості вектора* $\bar{\beta}$:

1) $\dot{\bar{\beta}} \perp \bar{\beta}$ (бо $\bar{\beta}$ – одиничний вектор, отже $\bar{\beta}^2 = \text{const}$, $2\bar{\beta}\dot{\bar{\beta}} = 0$);

2) $\dot{\bar{\beta}} \perp \bar{\tau}$ (оскільки $\bar{\beta} = [\bar{\tau}\bar{\nu}]$, з першої формули Френе (13): $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = k\bar{\nu}$ і

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = \left[\frac{d\bar{\tau}}{ds}\bar{\nu}\right] + \left[\bar{\tau}\frac{d\bar{\nu}}{ds}\right] = \left[\bar{\tau}\dot{\bar{\nu}}\right]\text{);} \qquad (2.19)$$

3) отже $\dot{\bar{\beta}} \| \bar{\nu}$, тому $\dot{\bar{\beta}} = \pm\chi\bar{\nu}$. Візьмемо в цій рівності знак мінус: $\dot{\bar{\beta}} = -\chi\bar{\nu}$.

$$\boxed{\frac{d\bar{\beta}}{ds} = -\chi\bar{\nu}} \text{ (третя формула Френе).} \qquad (2.20)$$

Таким чином $|\chi| = \left|\frac{d\bar{\beta}}{ds}\right|$.

Знайдемо тепер $\left|\frac{d\bar{\beta}}{ds}\right|$. $\dot{\bar{\beta}} = -k_1\bar{\nu}$, $\dot{\bar{\beta}} \cdot \bar{\nu} = -k_1\bar{\nu}^2$ або $k_1 = -\dot{\bar{\beta}} \cdot \bar{\nu}$.

Враховуючи (19), (13) і розглядаючи кривину k як функцію s, маємо:

$$\chi=-[\bar{\tau}\dot{\bar{v}}]\cdot\bar{v}=-\left[\dot{\bar{r}},\left(\frac{1}{k}\ddot{\bar{r}}\right)'\right]\cdot\frac{1}{k}\ddot{\bar{r}}=-\frac{1}{k^3}\left[\dot{\bar{r}},\dddot{\bar{r}}k-\ddot{\bar{r}}\dot{k}\right]\ddot{\bar{r}}=\frac{1}{k^3}\left(\left[\dot{\bar{r}}\ \ddot{\bar{r}}\right]k\dddot{\bar{r}}-\left[\dot{\bar{r}}\ \ddot{\bar{r}}\right]\ddot{\bar{r}}\dot{k}\right)=\frac{(\dot{\bar{r}}\ \ddot{\bar{r}}\ \dddot{\bar{r}})}{k^2}.$$

Отже, $|\chi|=\dfrac{\left|\left(\dot{\bar{r}}_s\ddot{\bar{r}}_s\dddot{\bar{r}}_s\right)\right|}{k^2}$.■

Нехай $\bar{r}=\bar{r}(t)$. Будемо вважати, що $s=s(t)$ і $\bar{r}=\bar{r}\left(s(t)\right)$. Як і в знаходженні кривини, похідні вектор-функції по натуральному параметру *s* будемо позначати з крапкою ($\dot{\bar{r}}$, $\ddot{\bar{r}}$ і т.д.), а похідні по довільному параметру *t* зі штрихом ($\bar{r}'$, $\bar{r}''$ і т.д.).

Для натуральної параметризації маємо: $|\chi|=\dfrac{\left|\left(\dot{\bar{r}}_s\ddot{\bar{r}}_s\dddot{\bar{r}}_s\right)\right|}{k^2}$.

Виразимо похідні $\dot{\bar{r}}$, $\ddot{\bar{r}}$, $\dddot{\bar{r}}$ по s через похідні $\bar{r}'$, $\bar{r}''$, $\bar{r}'''$ по параметру t.

Раніше було показано, що $\dot{\bar{r}}=\dfrac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|}$; $\ddot{\bar{r}}=\dfrac{\bar{r}''}{|\bar{r}'|^2}-\dfrac{\bar{r}'\bar{r}''}{|\bar{r}'|^4}\bar{r}'$.

Для знаходження $\dddot{\bar{r}}$ використаємо отриману вище в пункті 4.3 формулу: $\bar{r}''=\ddot{\bar{r}}s'^2+\dot{\bar{r}}s''$. Тоді $\bar{r}_t'''=\dfrac{d\ddot{\bar{r}}}{ds}\cdot s'\cdot s'^2+2s's''\cdot\ddot{\bar{r}}+\dfrac{d\dot{\bar{r}}}{ds}s's''+\dot{\bar{r}}s'''=\dddot{\bar{r}}s'^3+3s's''\ddot{\bar{r}}+\dot{\bar{r}}s'''$, звідки $\dddot{\bar{r}}=\dfrac{1}{s'^3}\left(\bar{r}'''-3s's''\ddot{\bar{r}}-\dot{\bar{r}}s'''\right)$.

Нагадаємо, що для довільної параметризації $k=\dfrac{|[\bar{r}'\bar{r}'']|}{|\bar{r}'|^3}$, $s'=|\bar{r}'|$, $[\dot{\bar{r}}\ \ddot{\bar{r}}]=\dfrac{[\bar{r}'\bar{r}'']}{|\bar{r}'|^3}$, тому $\left(\dot{\bar{r}}\ \ddot{\bar{r}}\ \dddot{\bar{r}}\right)=\dfrac{1}{|\bar{r}'|^3}\left[\bar{r}'\bar{r}''\right]\cdot\left(\bar{r}'''-3s's''\left(\dfrac{\bar{r}''}{|\bar{r}'|^2}-\dfrac{\bar{r}'\bar{r}''}{|\bar{r}'|^4}\cdot\bar{r}'\right)-\dfrac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|}s'''\right)\dfrac{1}{|\bar{r}'|^3}=\dfrac{\left(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}'''\right)}{|\bar{r}'|^6}$.

Таким чином, $\chi=\dfrac{\left|\left(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}'''\right)\right|}{\left|\left[\bar{r}'\bar{r}''\right]\right|^2}$ – абсолютний скрут в довільній параметризації.

Скрутом кривої називається величина χ , яка обчислюється за формулою:

$$\boxed{\chi=\frac{\left(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}'''\right)}{\left|\left[\bar{r}'\bar{r}''\right]\right|^{2}}}\ . \qquad (2.21)$$

В скалярній формі:

$$\boxed{\chi=\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{A^2+B^2+C^2}} \qquad (2.21')$$

Зауваження 2.4. Плоскі криві – це криві нульового скруту.

Приклад 2.11. Знайти скрут гвинтової лінії $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=bt. \end{cases}$

Розв'язання.

$$\begin{array}{lll} x'=-a\sin t; & y'=a\cos t; & z'=b; \\ x''=-a\cos t; & y''=-a\sin t; & z''=0; \\ x'''=a\sin t; & y'''=-a\cos t; & z'''=0. \end{array}$$

$$[\bar{r}'\bar{r}'']=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}=ab\sin t\,\bar{i}-ab\cos t\,\bar{j}+a^2\bar{k}\ .$$

$$\left|[\bar{r}'\bar{r}'']\right|=\sqrt{a^2b^2+a^4}=a\sqrt{b^2+a^2}\ .$$

Мішаний добуток $\left(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}'''\right)$ обчислимо як скалярний добуток $[\bar{r}'\bar{r}'']$ і $\bar{r}'''$:

$$\left(\bar{r}'\bar{r}''\bar{r}'''\right)=a^2b\sin^2 t+a^2b\cos^2 t=a^2b\ .$$

Тоді $\chi=\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

Таким чином, скрут гвинтової лінії є сталою величиною. Якщо $b>0$ – «правогвинтова нарізка»; якщо $b<0$ – «лівогвинтова».

Відповідь: $\chi=\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

9. Основна теорема теорії кривих. Формули Серре- Френе

Формулами Серре-Френе називають наступну трійку формул:

1. $\boxed{\dfrac{d\bar{\tau}}{ds}=k\bar{\nu}}$; 2. $\boxed{\dfrac{d\bar{\nu}}{ds}=-k\bar{\tau}+\chi\bar{\beta}}$; 3. $\boxed{\dfrac{d\bar{\beta}}{ds}=-\chi\bar{\nu}}$.

Перша формула Френе була отримана в розгляді кривини кривої (2.13), третя формула – в розгляді скруту (2.20).

Доведемо формулу 2, використовуючи наведені вище формули 1 і 3 та правило диференціювання векторного добутку:

$\bar{v}=\left[\bar{\beta}\bar{\tau}\right]$;

$\dfrac{d\bar{v}}{ds}=\left[\dfrac{d\bar{\beta}}{ds}\bar{\tau}\right]+\left[\bar{\beta}\dfrac{d\bar{\tau}}{ds}\right]=\left[-\chi\bar{v},\bar{\tau}\right]+\left[\bar{\beta},k\bar{v}\right].$

Оскільки $\left[\bar{v}\bar{\tau}\right]=-\bar{\beta}$, $\left[\bar{\beta}\bar{v}\right]=-\bar{\tau}$, маємо: $\dfrac{d\bar{v}}{ds}=-k\bar{\tau}+\chi\bar{\beta}$.

Формули Френе мають фундаментальне значення в теорії кривих. Фактично, формули Френе демонструють, як швидкість зміни цих векторів визначається двома основними скалярними характеристиками кривої: кривиною, що мірує відхилення кривої від прямої, та скрутом, який визначає ступінь виходу кривої з площини. Завдяки цьому апарату будь-яка гладка крива може бути відновлена з точністю до положення у просторі, що робить ці формули незамінним інструментом для аналізу траєкторій у фізиці, механіці та комп'ютерному моделюванні.

Приклад 2.12. Знайти координати векторів базису Френе кривої $\bar{r}(t)=\left(t^2-1,t+3,\sin(2t)\right)$ у точці M, що відповідає значенню параметра $t=0$.

Розв'язання. Знайдемо похідні $\bar{r}'(t)=\left(2t,1,2\cos(2t)\right)$, $\bar{r}''(t)=\left(2,0,-4\sin(2t)\right)$. Підставивши значення параметра, одержимо

$$\bar{r}'(0)=(0,1,2),\bar{r}''(0)=(2,0,0).$$

Далі обчислимо

$$\left[\bar{r}'(0),\bar{r}''(0)\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0\bar{i}+4\bar{j}-2\bar{k}=(0,4,-2),$$

$$[[\bar r'(0),\bar r''(0)],\bar r'(0)]=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ 0 & 4 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\bar i\begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}-\bar j\begin{vmatrix}0 & -2\\ 0 & 2\end{vmatrix}+\bar k\begin{vmatrix}0 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=10\bar i+0\bar j+0\bar k=(10,0,0).$$

Знаходимо координати векторів базису Френе

$$\bar m_1=\frac{\bar r'(0)}{|\bar r'(0)|}=\frac{1}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}}(0,1,2)=\left(0,\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5}\right),$$

$$\bar m_3=\frac{[\bar r'(0),\bar r''(0)]}{|[\bar r'(0),\bar r''(0)]|}=\frac{1}{\sqrt{0^2+4^2+(-2)^2}}(0,4,-2)=\left(0,\frac{2}{\sqrt5},\frac{-1}{\sqrt5}\right),$$

$$\bar m_2=[\bar m_3,\bar m_1]=\frac{1}{\sqrt5\sqrt5}\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\bar i=(1,0,0).\blacksquare$$

Теорема2.6. (основна теорема теорії кривих). Нехай на деякому інтервалі $(\sigma;\mu),\sigma<\mu$, визначені функції $k(s)$, $\chi(s)$, які є неперервними на $(\sigma;\mu)$, $k(s)$ має неперервну похідну на $(\sigma;\mu)$ та $k(s)>0$ на $(\sigma;\mu)$. Тоді для кожної точки $s_0\in(\sigma;\mu)$ існує $\varepsilon>0$, зо існує функція $\vec r=\vec r(s)$, $s\in(s_0-\varepsilon;s_0+\varepsilon)$, яка задає у просторі елементарну криву γ, віднесену до натурального параметру, для якої $k(s)$, $\chi(s)$ для $s\in(s_0-\varepsilon;s_0+\varepsilon)$ є кривиною та скрутом, відповідно. При цьому така крива γ єдина з точністю до її руху як твердого тіла у просторі.

10. Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 2

1. Дайте означення топологічного відображення. Поясніть зміст понять, які вживаються в цьому означенні.

2. Дайте означення елементарної кривої; регулярної кривої, гладкої, загальної кривої. Наведіть приклади.

3. Перелічіть способи аналітичного задання просторової кривої. Запишіть відповідні рівняння. Які умови є достатніми для того, щоб ці рівняння визначали регулярну криву?

4. Перелічіть способи аналітичного задання плоскої кривої. Запишіть відповідні рівняння. Які умови є достатніми для того, щоб ці рівняння визначали регулярну криву?

5. Дайте означення дотичної до кривої в даній точці кривої.

6. Сформулюйте та доведіть теорему про існування та єдиність дотичної до кривої.

7. Запишіть рівняння дотичної для різних способів аналітичного задання просторової кривої.

8. Дайте означення нормалі до кривої в даній точці кривої.

9. Дайте означення нормальної площини до просторової кривої в даній точці кривої.

10. Запишіть рівняння нормальної площини для різних способів задання просторової кривої.

11. Запишіть рівняння дотичної та нормалі для різних способів аналітичного задання плоскої кривої. Поясніть спосіб їх отримання та зв'язок між ними.

12. Дайте означення стичної площини кривої в даній точці кривої.

13. Сформулюйте та доведіть теорему про існування стичної площини регулярної кривої. Запишіть рівняння стичної площини.

14. Яка площина є стичною, якщо крива плоска?

15. Наведіть властивості стичної площини.

16. Поясніть будову супровідного тригранника кривої: що є його ребрами і гранями.

17. Як знайти напрямні вектори ребер супровідного тригранника?

18. Як знайти нормальні вектори граней супровідного тригранника?

19. Опишіть процес знаходження довжини дуги кривої. Яка крива називається спрямною? Що називається довжиною дуги кривої?

20. Запишіть формулу обчислення довжини дуги гладкої кривої.

21. Яка параметризація називається натуральною? Сформулюйте її визначну властивість.

22. Порівняйте, що і як саме характеризують кривина і скрут просторової кривої. Дайте їх означення. Якими векторами визначаються кривина і скрут?

23. Сформулюйте і доведіть теореми про кривину і скрут регулярної кривої, заданої натуральною параметризацією.

24. Поясніть спосіб отримання формул для обчислення кривини і скруту кривої в довільній параметризації.

25. Запишіть формули обчислення кривини і скруту кривої в довільній параметризації.

26. Запишіть формулу обчислення кривини плоскої кривої в довільній параметризації. Чому дорівнює скрут плоскої кривої?

27. Виведіть формули Серре- Френе.

Лекція 3

Тема. Поняття про вектор-функцію двох скалярних змінних. Загальне поняття про поверхню у диференціальній геометрії тривимірного евклідового простору.

Мета: формування цілісного уявлення про теорію поверхонь через апарат вектор-функцій двох скалярних змінних, що передбачає вивчення їхніх аналітичних властивостей (границі, неперервності та диференційованості) як основи для геометричного моделювання. У ході заняття планується розкрити сутність елементарних і регулярних поверхонь, ввести систему внутрішніх координат та дослідити властивості кривих на поверхні. Особлива увага приділяється опануванню методів побудови дотичної площини та нормалі в заданій точці, що дозволяє студентам засвоїти фундаментальні принципи диференціальної геометрії та підготуватися до розв'язання практичних завдань самоконтролю.

План

1. Поняття про вектор-функцію двох скалярних змінних. Границя та неперервність вектор-функцію двох скалярних змінних в точці
2. Похідна векторної функції двох скалярних аргументів
3. Поняття про елементарну поверхню
4. Координати на поверхні
5. Регулярна поверхня
6. Криві на поверхні
7. Дотична площина та нормаль до поверхні у даній точці
8. Питаня та завдання для самоконтролю за змістом лекції 3

1. Поняття про вектор-функцію двох скалярних змінних. Границя та неперервність вектор-функцію двох скалярних змінних в точці

Означення 3.1. Розглянемо в просторі деяку двохвимірну область: $[a,b]*[c,d]=D.$ Кожна точка цієї області характеризується парою дійсних чисел u та v. Векторною функцією двох скалярних аргументів u та v

називається відображення, при якому кожній точці області D ставиться у відповідність вектор $\vec{r}(u, v)$ трьохвимірного евклідового простору [4].

Означення 3.2. Сталий вектор $\vec{a}$ називається границею векторної функції $\vec{r}(U,V)$ при $(U,V) \to (U_0,V_0)$, якщо виконується умова $|\vec{r}(U,V) - \vec{a}| \to 0.$ Пишуть, що

$$\lim_{(U,V)\to(U_0,V_0)} \vec{r}(U,V) = \vec{a}$$

Теорема 3.1 : Якщо існують границі

$$\lim_{(U,V)\to(U_0,V_0)} \vec{r}_1(U,V) = \vec{a} \quad , \quad \lim_{(U,V)\to(U_0,V_0)} \vec{r}_2(U,V) = \vec{b}\,, \quad \lim_{(U,V)\to(U_0,V_0)} \vec{r}_3(U,V) = \vec{c} \quad ,$$

то мають місце рівності:

1) $\lim\limits_{(U,V)\to(U_0,V_0)} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \vec{a} + \vec{b}$

2) $\lim\limits_{(U,V)\to(U_0,V_0)} (\vec{r}_1 * \vec{r}_2) = \vec{a} * \vec{b}$

3) $\lim\limits_{(U,V)\to(U_0,V_0)} [\vec{r}_1, \vec{r}_2] = [\vec{a}, \vec{b}]$

4) $\lim\limits_{(U,V)\to(U_0,V_0)} (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Означення 3.3. Векторна функція двох змінних $\vec{r}(U,V)$ називається неперервною в точці (U_0,V_0), якщо границя функції дорівнює значенню функції в даній точці $\lim\limits_{(U,V)\to(U_0,V_0)} \vec{r}(U,V) = \vec{r}(U_0,V_0)$

Векторна функція $\vec{r}(U,V)$ називається неперервною в області D, якщо вона непевна в кожній точці цієї області.

Векторна функція $\vec{r}(U,V)$ називається неперервною, якщо вона є непевною на всій області визначення.

Розглянемо вектор функцію $\vec{r}(U,V)$ в базисі $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ тривимірного евклідового простору. Тоді цю функцію можна розкласти по базисних векторах: $\vec{r} = x(U,V)\vec{i} + y(U,V)\vec{j} + z(U,V)\vec{k}$, тому $\vec{r} = (x(U,V), y(U,V), z(U,V))$. При цьому функції $x(U,V), y(U,V), z(U,V)$ називають координатними функціями вектор-функції $\vec{r}$.

Теорема 3.2 [4]. Для того, щоб сталий вектор $\vec{a}$ з координатами (a_1, a_2, a_3) був границею векторної функції $\vec{r}(U,V)$ необхідно і достатньо, щоб виконувались співвідношення:

$$\lim_{(U,V)\to(U_0,V_0)} x(U,V) = a_1$$

$$\lim_{(U,V)\to(U_0,V_0)} y(U,V) = a_2$$

$$\lim_{(U,V)\to(U_0,V_0)} z(U,V) = a_3$$

Приклад 3. 1. Нехай

$$\vec{r}(u,\ v) = (u+v)\vec{i} + \frac{sin(uv)}{u}\cdot\vec{j} + e^{u-v}\cdot\vec{k}.$$

Знайдемо границю при $u \to 1,\ v \to 0$:

$$\lim_{\substack{u \to 1,\\ v \to 0}} x(u;v) = \lim_{\substack{u \to 1,\\ v \to 0}} (u+v) = 1,$$

$$\lim_{\substack{u \to 1,\\ v \to 0}} y(u;v) = \lim_{\substack{u \to 1,\\ v \to 0}} \frac{sin(uv)}{u} = \frac{sin(0)}{1} = 0,$$

$$\lim_{\substack{u \to 1,\\ v \to 0}} z(u;v) = \lim_{\substack{u \to 1,\\ v \to 0}} e^{u-v} = e^{1-0} = e,$$

Отже, $\lim\limits_{\substack{u \to 1,\\ v \to 0}} \vec{r}(u,\ v) = \overrightarrow{(1;0;e)}$.

Відповідь: $\overrightarrow{(1;0;e)}$.

2. Похідна векторної функції двох скалярних аргументів

Означення 3.4. Нехай дано векторну функцію двох скалярних аргументів $\vec{r} = \vec{r}(U,V)$, зафіксуємо в ній змінну $V = V_0$,

$$\vec{r} = \vec{r}(U,V_0)$$

Похідна векторної функції $\vec{r} = \vec{r}(U,V_0)$ по параметру U називається частинною похідною векторної функції $\vec{r}(U,V)$ по параметру U ; $\vec{r}_U; \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}$.

Похідна векторної функції $\vec{r} = \vec{r}(U_0,V)$ по параметру V називається частинною похідною векторної функції $\vec{r}(U,V)$ по параметру V ; $\vec{r}_V; \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}$.

Теорема 3.3: Для того щоб функція $\vec{r}=(x(U,V),y(U,V),z(U,V))$ була диференційованою необхідно та достатньо, щоб існували диференціали функцій $x(U,V),y(U,V),z(U,V)$, тоді

$$\vec{r}_U=(x_U,y_U,z_U)$$
$$\vec{r}_V=(x_V,y_V,z_V)$$

Приклад 3. 2. Якщо векторна функція $\vec{r}(u,\ v)$ розкладена за в базисі $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ тривимірного евклідового простору:

$$\vec{r}(u,\ v)\ =\ (u+v)\vec{i}+\ \frac{sin(uv)}{u}\ \cdot\vec{j}+\ e^{u-v}\cdot\vec{k}.$$

то обчислення частинних похідних зводиться до диференціювання її скалярних компонент:

$$\vec{r}_U=\vec{i}+\ \frac{uv\cos(uv)-\sin(uv)}{u^2}\ \cdot\vec{j}+\ e^{u-v}\cdot\vec{k}=\left(1;\frac{uv\cos(uv)-\sin(uv)}{u^2};e^{u-v}\right).$$

$$\vec{r}_V=\vec{i}+\ \cos(uv)\ \cdot\vec{j}-\ e^{u-v}\cdot\vec{k}=\left(1;\cos(uv);-\ e^{u-v}\right).$$

У точці $(1;2)$ похідні мають вид :

$$\vec{r}_U(1;2)=\vec{i}+\ \left(2\cos(2)-\sin(2)\right)\ \cdot\vec{j}+\ e^{-1}\cdot\vec{k}=\overrightarrow{\left(1;2\cos(2)-\sin(2);e^{-1}\right)}.$$

$$\vec{r}_V(1;2)=\vec{i}+\ \cos(2)\ \cdot\vec{j}-\ e^{-1}\cdot\vec{k}=\overrightarrow{\left(1;\cos(2);-\ e^{-1}\right)}.$$

3. Поняття про елементарну поверхню

Означення 3.5. Область на площині називається елементарною областю, якщо вона є образом відкритого круга при гомеоморфізмі (тобто при взаємно однозначному та неперервному відображенні) [4,5].

Наприклад, внутрішня частина квадрата, прямокутника, еліпса є елементарними областями.

Означення 3.6. Елементаррною поверхнею називається множина точок простору Ф , яка є образом деякої елементарної області *G* на площині при гомеоморфізмі [4,5].

Прикладами елементарних поверхонь є півсфера, половина конуса тощо.

Означення 3.7. Загальною поверхнею F у просторі називається множина точок простору, яку можна покрити скінченною або зліченною множиною елементарних поверхонь.

З означення 3.7. випливає, що для довільної точки M загальної поверхні F існує елементарна поверхня Φ, що $M \in \Phi \subset F$, тобто у кожної точки поверхні існує окіл, що є елементарним.

4. КООРДИНАТИ НА ПОВЕРХНІ

Введемо поняття координат на поверхні. Нехай на деякій поверхні F задано **однопараметричну сім'ю ліній**, тобто кожна лінія цієї сім'ї характеризується певним значенням деякого параметра. Назвемо цю сім'ю **правильною**, якщо через кожну точку поверхні проходить одна і тільки одна лінія з цієї сім'ї [4,5].

Якщо на поверхні дано дві правильні сім'ї, такі, що кожна з ліній першої сім'ї перетинається без дотику з кожною лінією другої сім'ї не більше ніж в одній точці, то кажуть, що на поверхні задано **координатну сітку**.

Нехай лінії першої з сімей, що утворюють координатну сітку, визначаються значеннями деякого параметра u, а лінії другої сім'ї – значеннями деякого параметра v. Оскільки за умовою через кожну точку поверхні проходить єдина крива з першої сім'ї та єдина крива з другої сім'ї, то положення точки на поверхні однозначно визначається значеннями параметрів u та v, які відповідають цим лініям (рис. 14).

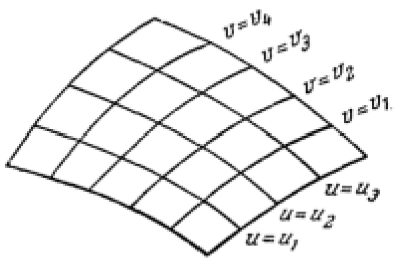

Рис. 14

Параметри u та v, значеннями яких визначаються лінії, що складають координатну сітку, називаються **координатами на даній поверхні**.

Якщо на поверхні будь-яким чином введено координати $(u;v)$, то кажуть, що ця поверхня **параметризована** параметрами u та v. Кожна точка такої поверхні може бути задана значеннями параметрів u та v. Але ця сама точка може бути задана і своїми декартовими координатами. Отже, декартові координати точок параметризованої поверхні є **функціями координат на поверхні** [4,5].

Нехай $(u;v)$– декартові координати довільної точки, що належить G, а $(x,\ y,\ z)$– координати відповідної точки поверхні Φ. Тоді координати $(x,\ y,\ z)$є функціями координат $(u;v)$при відображенні f, тобто:

$$x = f_1(u,v),\ y = f_2(u,v),\ z = f_3(u,v)\ . \tag{3.1}$$

Систему рівностей (6.1), що задають відображення f області G у простір, називають **рівняннями поверхні в параметричній формі**. При цьому, $(u;v)$називаються **криволінійними координатами** на поверхні.

Параметричні рівняння (3.1) при фіксованих значеннях u,v задають криву, що лежить на поверхні. Також користуватимемося векторним записом рівняння поверхні

$$\bar{r} = \bar{r}(u,v) \text{ або } \bar{r} = f_1(u,v)\vec{i} + f_2(u,v)\vec{j} + f_3(u,v)\vec{k}\,. \tag{3.2}$$

Запис (6.2) називається векторною функцією двох скалярних аргументів u,v.

Приклад 3. 1. Найпростішим прикладом поверхні є площина, що проходить через точку з радіус-вектором $\vec{r}_0$ паралельно неколінеарним векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$ та задається вектор-функцією:

$$\vec{r}(u,\ v)\ =\ \vec{r}_0 + u\cdot\vec{a}\ +\ v\cdot\vec{b}$$

Тут параметри $u,\ v$ можуть набувати будь-яких дійсних значень, область визначення $D\ =\ \mathbb{R}^2$.

Приклад 3.2. Для прямого кругового циліндра радіуса R, вісь якого збігається з віссю Oz задається вектор-функцією:

$$\vec{r}(u, v) = R\cos u\,\vec{i} + R\sin u\,\vec{j} + v\cdot\vec{k}$$

Тут параметр $u \in [0;\ 2\pi)$ відповідає за «обхід» по колу, а $v \in \mathbb{R}$ – за висоту точки.

Приклад 3.3. Наведемо приклад параметричних рівнянь гелікоїда – поверхні, яку описує пряма лінія, що одночасно обертається навколо нерухомої осі та рівномірно рухається вздовж неї.

Параметричні рівняння мають вид:

$$\begin{cases} x = u\cdot\cos v, \\ y = u\cdot\sin v, \\ z = hv. \end{cases}$$

Тут $u > 0$ – це параметр вздовж твірної (прямої лінії). Він визначає відстань від осі Oz, $v \in [0;\ 2\pi)$ – це кут повороту, h – це крок гвинта (параметр, що визначає «швидкість» підйому).

Особливість гелікоїда полягає у тому, що це єдина мінімальна поверхня (окрім площини), яка одночасно є лінійчастою. Ви можете бачити таку форму в архітектурі гвинтових сходів.■

Зауваження 3.1. Рівняння $z = f(x, y)$ можна розглядати як частиний випадок параметричного рівняння, якщо прийняти x та y за параметри и покласти $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + f(x, y)\bar{k}$.

<u>5. Регулярна поверхня</u>

Нехай Φ – елементарна поверхня, задана векторно-парамтеричним рівнянням

$$\bar{r} = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k,\ (u,v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Означення 3.8. Поверхня Ф називається регулярною (k разів диференційованою), якщо функції x, y, z мають неперервні частинні похідні до порядку k включно, причому в кожній точці $M(u,v)\in G$ ранг

матриці $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$ рівний двом [4,5].

При $k = 1$ поверхня називається **гладкою**.

Зауваження 3.2. Частинні похідні $\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{\partial x(u,v)}{\partial u}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}$,… функцій x, y, z будемо позначати через $x_u, y_u, \ldots$. Отже, $\dfrac{\partial x}{\partial u} = x_u$, $\dfrac{\partial x}{\partial v} = x_v$.

Знайдемо частинні похідні радіус-вектора $\bar{r}$ за змінними u та v:

$$\bar{r}_u = x_u i + y_u j + z_u k, \qquad \bar{r}_v = x_v i + y_v j + z_v k .$$

Тоді матриця A приймає вид $A = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ ита складається з координат векторів $\bar{r}_u$ та $\bar{r}_v$. Умова того, що ранг матриці A дорівнює 2 означає, що $\bar{r}_u$ та $\bar{r}_v$ не є колінеарними. У подальшому будемо розглядати тільки такі вектори.

З курсу математичного аналізу відомо, що якщо для функцій *x(u, v)* та *y(u, v)* виконується умова $\begin{vmatrix} x_u\, y_u \\ x_v\, y_v \end{vmatrix} \neq 0$, то у околі *u, v* та відповідних їм значень *x* та *y* рівняння *x=x(u, v)* та *y=y(u, v)* можуть бути розв'язані відносно *u, v*. Отже, *u=u(x, y), v=v(x, y)* та отримаємо $z = z\{u(x,y), v(x,y)\}$ або $z = f(x,y)$, тобто рівняння поверхні у явному виді.

Приклад 3.4. Прикладом регулярної поверхні є сфера.

Нехай сферу Φ задано векторно-параметричним рівнянням

$$\vec{r}(u;v) = \overrightarrow{(R\cos u \cdot \cos v, R\sin u \cdot \cos v, R\sin v)}$$

де $u \in (0;2\pi)$ - довгота, $v \in (-\pi/2;\pi/2)$ - широта, $R > 0$ - радіус сфери.

Зауважимо, що векторні функції

$$x(u;v) = R\cos u \cdot \cos v,$$
$$y(u;v) = R\sin u \cdot \cos v,$$
$$z(u;v) = R\sin v$$

є неперервними, мають неперервні частинні похідні до будь-якого порядку,

$$\vec{r}'_u = \frac{\partial r}{\partial u} = \overrightarrow{(-R\sin u \cdot \cos v, R\cos u \cdot \cos v, 0)},$$

$$\vec{r}'_v = \frac{\partial r}{\partial v} = \overrightarrow{(-R\cos u \cdot \sin v, -R\sin u \cdot \sin v, R\cos v)}$$

Обчислимо при $v \in (-\pi/2; \pi/2)$ - широта, $R > 0$.

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\sin u \cdot \cos v & -R\cos u \cdot \sin v \\ R\cos u \cdot \cos v & -R\sin u \cdot \sin v \end{vmatrix} =$$
$$= R^2 \sin^2 u \cdot \sin v \cdot \cos v + R^2 \cos^2 u \cdot \sin v \cdot \cos v =$$
$$= R^2 \sin v \cdot \cos v = \frac{1}{2} \cdot R^2 \sin 2v \neq 0$$

Отже, поверхня є регулярною. ■

5. Криві на поверхні

Розглянемо поверхню F множини точок, криволінійні координати яких визначаються рівняннями: $u = u(t)$, $v = v(t)$, де t – незалежна змінна. Тоді векторна функція кожної точки поверхні може бути записана у вигляді: $\bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t))$. При зміні параметра t, вектор $\bar{r}$ описує своїм кінцем деяку криву γ у просторі, а тому – криву γ на поверхні F.

Приклад 3.5 (гвинтова лінія на конусі). Нехай поверхня задано поверхню – конус, заданий векторно-параметричним рівнянням:

$$\vec{r}(u;v) = (\ u\ cos\ v,\ u\ sin\ v,\ u),$$

Тут $u \in [0;\ +\infty)$ (відстань від осі), $v\ \in\ [0;\ 2\cdot\pi]$ (кут).

Якщо ми задамо закон руху параметрів від часу $t \in \mathbb{R}$:

$$u(t)\ =\ t,$$
$$v(t)\ =\ t,$$

то ми отримаємо криву на поверхні:

$$\vec{r}(t) = (u(t); v(t)) = (\ t\cos t,\ t\sin t,\ t).$$

Це конічна гвинтова лінія. Вона одночасно піднімається вгору і закручується навколо осі конуса.

6. ДОТИЧНА ПЛОЩИНА ТА НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ У ДАНІЙ ТОЧЦІ

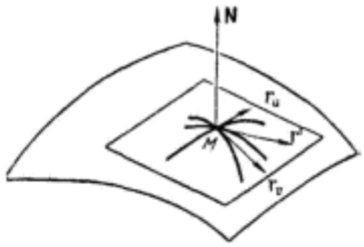

Рис.15

Означення 3.9. Розглянемо всі можливі криві на поверхні, що проходять через дану точку М, і дотичні вектори до них у цій точці (рис. 15). Кожен із цих векторів є лінійною комбінацією векторів $\overline{r}_u$ и $\overline{r}_v$, тобто лежить у площині, що визначається цими векторами. Ця площина називається **дотичною площиною до даної поверхні у точці** М.

Напишемо рівняння дотичної площини. Оскільки вектори $\overline{r}_u$ и $\overline{r}_v$ лежать у дотичній площині, то вектор $\overline{N} = [\overline{r}_u, \overline{r}_v]$ є її нормальним вектором, тоді рівняння дотичної площини можна задати як:

$$(\overline{\rho} - \overline{r}, \overline{N}) = 0, \tag{3.3}$$

де $\overline{r}$ – радіус-вектор точки дотику, $\overline{\rho}$ – радиус-вектор даної точки дотичної площини.

Нехай поверхню задано рівнянням $z = f(x, y)$, або у векторній формі, $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + f(x, y)\overline{k}$. Напишемо рівняння дотичної поверхні для такої поверхні. Маємо

$$\overline{r}_x = \overline{i} + f_x'\overline{k}, \quad \overline{r}_y = \overline{j} + f_y'\overline{k},$$

а тому

$$\overline{N} = [\overline{r}_x, \overline{r}_y] = -f_x\overline{i} - f_y\overline{j} + \overline{k}. \tag{3.4}$$

З (3.3) та (3.4) при підстановці замість $\bar{\rho}-\bar{r}$ вектора $(x-x_0)\bar{i}+(y-y_0)\bar{j}+(z-z_0)\bar{k}$, а замість нормального вектора $\bar{N}$ його вираз з (6.4), отримаємо рівняння дотичної площини до поверхні $z=f(x,y)$ у точці (x_0,y_0,z_0):

$$z-z_0 = f_x'(x-x_0)+f_y'(y-y_0). \tag{3.5}$$

Де значення частинних похідних f_x' и f_y' беруться у точці дотику (x_0,y_0).

Якщо поверхню задано неявним рівнянням $F(x,y,z)=0$, яке визначає функцію z як диференційовну від змінних x та y, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{3.6}$$

Після підстановки (6.6) у (6.5), маємо рівняння площини, дотичної до поверхні $F(x,y,z)=0$ у наступному виді:

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0. \tag{3.7}$$

У рівнянні (6.7) F_x', F_y' та F_z' обчислюють у точці дотику (x_0,y_0,z_0).

Означення 3.10. Нехай *F (x, y, z)* = 0 – неявне рівняння поверхні. **Нормаллю до поверхні** називається перпендикулярна пряма до дотичної площини в точці дотику, її рівняння має вигляд:

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}.$$

Обчислимо напрямні косинуси вектора $\bar{N}=[\bar{r}_u,\bar{r}_v]$, нормального до поверхні, заданої рівнянням $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$. Оскільки

$$\bar{r}_u=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right) \quad \text{та} \quad \bar{r}_v=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

то вектор $[\bar{r}_u,\bar{r}_v]$ має координати

$$A=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u}\\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}, \tag{3.8}$$

а його напрямні косинуси відповідно рівні

$$\cos(N,x)=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\qquad \cos(N,y)=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos(N,z)=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Приклад 3.6 Знайти рівняння нормалі й дотичної площини до поверхні $\bar{r}(u,v)=\left(uv,u^2-v^2,2u^3v\right)$ в точці $M(u=1,v=2)$.

Розв'язання. Знайдемо координати точки *M*, підставивши значення параметрів у рівняння поверхні: $M(2,-3,4)$. Обчислимо частинні похідні $\bar{r}_u=\left(v,2u,6u^2v\right)$, $\bar{r}_v=\left(u,-2v,2u^3\right)$ і знайдемо їх у точці M:

$$\bar{r}_u(M)=(2,2,6), \bar{r}_v(M)=(1,-4,2).$$

Вектор нормалі у цій точці має вигляд:

$$\bar{n}(M)=[\bar{r}_u(M),\bar{r}_v(M)]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 2 & 6\\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}=(28,2,-10).$$

Тоді рівняннями нормалі є $\dfrac{x-2}{28}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-4}{-10}$, а рівняння дотичної площини:

$$28(x-2)+2(y+3)-10(z-4)=0.\blacksquare$$

Приклад 3.7. Знайти рівняння нормалі й дотичної площини до неявно заданої поверхні $4x^2-y^2+z^3=8$ в точці $M(2,3,1)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння поверхні у вигляді $F(x,y,z)=0$, тобто $4x^2-y^2+z^3-8=0$.

Знайдемо нормальний вектор $\bar{n}=\left(F_x,F_y,F_z\right)=\left(8x,-2y,3z^2\right)$.

У точці M маємо $\bar{n} = (16,-6,3)$.

Отже, рівняння нормалі

$$\frac{x-2}{16} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-1}{3},$$

а рівняння дотичної площини

$$16(x-2) - 6(y-3) + 3(z-1) = 0. \blacksquare$$

7. Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 3

1. Дайте означення векторної функції двох скалярних аргументів. Яка область її визначення?

2. Наведіть приклади векторних функцій, що описують площину, сферу та циліндр. Запишіть їхні параметричні рівняння.

3. Сформулюйте означення границі вектор-функції двох змінних. Який зв'язок існує між границею вектора та границями його координатних функцій?

4. Сформулюйте та поясніть теореми про границі суми, різниці, скалярного та векторного добутків вектор-функцій.

5. Дайте означення неперервності вектор-функції в точці та в області.

6. Що називається частинною похідною векторної функції по параметру u та параметру v?

7. Розкрийте геометричний зміст частинних похідних $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ та $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ для точки на поверхні.

8. Сформулюйте умову диференційовності вектор-функції двох змінних. Що таке повний диференціал?

9. Як обчислити частинні похідні вектор-функції, якщо вона задана своїми скалярними компонентами $x(u;v)$, $y(u;v)$, $z(u;v)$?

10. Поясніть роль вектор-функцій двох змінних у теорії поверхонь: чим відрізняється опис кривої від опису поверхні через вектор-функцію?

11. Дайте означення елементарної області на площині. Чому важливою є умова гомеоморфізму?

12. Що таке «елементарна поверхня» і чим вона відрізняється від «загальної поверхні» у просторі?

13. Поясніть сутність координатної сітки на поверхні. Яка сім'я ліній називається правильною?

14. Сформулюйте означення регулярної поверхні.

15. Яку поверхню називають гладкою?

16. Як за допомогою параметричних рівнянь поверхні задати криву, що лежить на цій поверхні?

17. Дайте геометричне та аналітичне означення дотичної площини до поверхні в точці М.

18. Як виглядає вектор нормалі до поверхні, заданої векторно-параметричним рівнянням

19. Запишіть рівняння дотичної площини для поверхні, заданої неявно рівнянням $F(x, y, z) = 0$.

20. Що називається нормаллю до поверхні? Запишіть її канонічні рівняння.

Лекція 4.

Тема. Внутрішня та зовнішня геометрії поверхонь тривимірного евклідового простору

Мета: поглиблене вивчення метричних та кривинних властивостей поверхонь через аналіз їхніх основних квадратичних форм. Студенти мають опанувати поняття першої квадратичної форми як інструменту для обчислення довжин дуг, кутів та площ безпосередньо на поверхні, а також другої квадратичної форми, що визначає характер її викривлення у просторі. Важливою складовою є дослідження кривини кривих, що лежать на поверхні, визначення головних напрямів та обчислення головних кривин, що дозволяє сформувати фундаментальні знання про внутрішню та зовнішню геометрію регулярних поверхонь.

План

1. Перша квадратична форма поверхні
2. Площа поверхні
3. Друга квадратична форма поверхні
4. Кривина кривої на поверхні
5. Головні напрями та кривина поверхні

1. Перша квадратична форма

Для розв’язання багатьох фізичних, технічних та геометричних завдань потрібно вміти обчислювати довжини дуг, що лежать на поверхні, кути між такими дугами, площі тих чи інших частин поверхні.

Перейдемо до вивчення поверхні в нескінченно малому околі деякої точки M(x, y). Обчислимо диференціал вектора $\bar{r}$ вздовж кривої. Тоді $d\bar{r} = \overline{r_u}du + \overline{r_v}dv$, де $du = u'(t)dt, dv = v'(t)dt$.

Знайдемо скалярні квадрати правої та лівої частин цієї рівності:

$$(d\bar{r})^2 = (\overline{r_u}du + \overline{r_v}dv)^2$$

або

$$(d\bar{r})^2 = (\overline{r_u})^2 du^2 + 2\overline{r_u}\,\overline{r_v} du\, dv + (\overline{r_v})^2 dv^2 \tag{4.1.}$$

Введемо позначення

$$\begin{cases} \overline{r_u} \cdot \overline{r_u} = E; \\ \overline{r_u} \cdot \overline{r_v} = F; \\ \overline{r_v} \cdot \overline{r_v} = G; \end{cases}$$

або у координатах

$$\begin{cases} E = (x_u)^2 + (y_u)^2 + (z_u);^2 \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v; \\ G = (x_v)^2 + (y_v)^2 + (z_v)^2. \end{cases}$$

З (7.1) маємо:

$$(d\bar{r})^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \equiv I\,. \tag{4.2}$$

Означення 4.1. Вираз (7.2) називається **першою квадратичною формою на поверхні.**

Перша квадратична форма слугує, насамперед, для виміру нескінченно малих дуг лежить на поверхні. Далі за допомогою інтегрування, неважко перейти до точного обчислення довжин на поверхні.

Нахай задано частину кривої на поверхні: *u=u(t), v=v(t),* где $t_1 \le t \le t_2$.

Тоді довжина частини кривої на поверхні має вид:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(u,v)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F(u,v)\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(u,v)\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt\,. \tag{4.3.}$$

Приклад 4.1. Знайти першу квадратичну форму поверхні $\bar{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 2v)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні вектор-функції $\bar{r}(u,v)$:

$\bar{r}_u = (\cos v, \sin v, 0), \bar{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, 2).$

Коефіцієнти першої квадратичної форми обчислимо за формулами

$$g_{11}=\left(\bar{r}_u,\bar{r}_u\right)=\cos^2 v+\sin^2 v=1,\;\; g_{12}=\left(\bar{r}_u,\bar{r}_v\right)=-u\cos v\sin v+u\cos v\sin v=0,$$

$$g_{22}=\left(\bar{r}_v,\bar{r}_v\right)=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+4=4+u^2.$$

Перша квадратична форма має вигляд

$$I=ds^2=1du^2+2\cdot 0\cdot dudv+\left(4+u^2\right)dv^2=du^2+\left(4+u^2\right)dv^2.\blacksquare$$

За допомогою першої квадартичної форми можна знаходити кути між кривими на поверхні.

Означення 4.2. *Кутом між кривими* γ_1 *та* γ_2 *називається кут між дотичними до цих ліній у їхній спільній точці М.*

Нехай $d\bar{r}_1$ та $d\bar{r}_2$ – вектор дотичних до кривиї γ_1 та γ_2 у певній точці *M*. Тоді $\cos\varphi=\dfrac{d\bar{r}_1 d\bar{r}_2}{\left|d\bar{r}_1\right|\left|d\bar{r}_2\right|}$, або, з урахуванням $\left|\bar{x}\right|=\sqrt{(\bar{x},\bar{x})}$ для довільного ветора $\bar{x}$, маємо

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{r}_u)^2(du)_1(du)_2+\bar{r}_u\bar{v}_v((du)_1(dv)_2+(dv)_1(du)_2)+(\bar{r}_v)^2(dv)_1(dv)_2}{\sqrt{(\bar{r}_u)^2du^2+2\bar{r}_u\bar{r}_v du\,dv+(r_v)^2dv^2}\sqrt{(\bar{r}_u)^2\overline{du}^2+2\bar{r}_u\bar{r}_v\bar{d}_u\bar{d}_v+(\bar{r}_v)^2\bar{d}_v}}$$

або, з використанням позначень

$$\cos\varphi=\frac{E\,du\overline{du}+F(du\,d\bar{v}+dv\,d\bar{u})+G\,dv\overline{dv}}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}\sqrt{E\overline{du}^2+2F\overline{du}\overline{dv}+G\overline{dv}^2}}. \quad (4.4.)$$

2. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ

За допомогою першоїквадартичної форми можна визначити площі будь-яких ділянок поверхні. Нехай f – гладка поверхня, задана рівняннями

$$x=x\,(u,\,v),\; y=y\,(u,\,v),\; z=z\,(u,\,v)$$

і D - область на ній, обмежена кінцевим числом шматково-гладких кривих.

Тоді площа поверхні обчислюється за такою формулою:

$$\sigma=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \quad (4.5)$$

Зауважимо, що для вектор-функції $\bar{r} = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k$ у довільній точці $M(u,v)$ поверхні маємо

$$\sqrt{EG - F^2} = \left[\bar{r}_u, \bar{r}_v\right].$$

Тоді площу поверхні можна обчислити за формулою

$$\sigma = \iint_D \left[\bar{r}_u, \bar{r}_v\right] du\, dv. \tag{4.6}$$

Перша квадратична форма є фундаментальним інструментом диференціальної геометрії, оскільки вона задає метрику поверхні та визначає її локальні властивості в першому наближенні через апроксимацію малої ділянки дотичною площиною. Саме тому її часто називають лінійним елементом поверхні, адже вона становить розрахункову базу для розв'язання метричних задач, зокрема обчислення довжин кривих, кутів між ними та площ областей. Усі геометричні факти та закономірності, які можуть бути встановлені шляхом вимірювань безпосередньо на поверхні за допомогою першої квадратичної форми, складають зміст внутрішньої геометрії. Таким чином, ця форма повністю описує внутрішні метричні властивості об'єкта, що не залежать від способу його вкладення у зовнішній тривимірний простір.

3. ДРУГА КВАДАРТИЧНА ФОРМА ПОВЕРХНІ

Друга квадратична форма визначає поверхню у другому наближенні. Вона показує, як поверхня відхиляється від дотичної площини і повністю визначає кривизну поверхні.

Нехай f – регулярна поверхня, задана рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$, а

γ – крива на цій поверхні. Тоді $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$. Введемо вектор нормалі до поверхні $\overline{N} = \left[\bar{r}_u, \bar{r}_v\right]$, тоді одиничний вектор нормалі до поверхні у точці M має вид $\bar{n} = \dfrac{\overline{N}}{\left|\overline{N}\right|} = \dfrac{\left[\bar{r}_u, \bar{r}_v\right]}{\left|\left[\bar{r}_u, \bar{r}_v\right]\right|}$. Знайдемо квадартичні форму $d\bar{r} \cdot d\bar{n} = \bar{r}_u \cdot \bar{n}_u\, du^2 + (\bar{r}_u \cdot \bar{n}_v + \bar{r}_v \cdot \bar{n}_u) du\, dv + \bar{r}_v \cdot \bar{n}_v dv^2$. Оскільки

$d\overline{r} \perp \overline{n}$, то скалярний добуток $d\overline{r} \cdot \overline{n} = 0$ а тому $d(d\overline{r} \cdot \overline{n}) = d^2\overline{r} \cdot \overline{n} + d\overline{r} \cdot d\overline{n} = 0$.

Звідси маємо:

$$\begin{aligned} d^2\overline{r} \cdot \overline{n} = \overline{n} \cdot (\overline{r}_{uu} du^2 + 2\overline{r}_{uv} du\, dv + \overline{r}_{vv} dv^2) = \\ + \overline{n} \cdot \overline{r}_{uu} du^2 + 2\overline{n} \cdot \overline{r}_{uv} du\, dv + \overline{n} \cdot \overline{r}_{vv} dv^2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Зауважимо, що $\overline{n} \cdot \overline{r}_u = 0$, $\overline{n} \cdot \overline{r_v} = 0$.

Введемо позначення :

$$\begin{cases} \overline{n} \cdot \overline{r}_{uu} = L; \\ \overline{n} \cdot \overline{r}_{uv} = M; \\ \overline{n} \cdot \overline{r}_{vv} = N. \end{cases}$$

або у координатах відносно прямокутної декартової системи координат у просторі

$$L = \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

Аналогічно, маємо:

$$M = \frac{\overline{r}_u \overline{r}_v \overline{r}_{uv}}{\left| \left[\overline{r}_u, \overline{r}_v \right] \right|} = \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}, \qquad N = \frac{\overline{r}_u \overline{r}_v \overline{r}_{vv}}{\left| \left[\overline{r}_u, \overline{r}_v \right] \right|} \Rightarrow \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Зауважимо, що d^2u – дифференциал другого порядку та $du^2 = (du)^2 = du\, du$ – квадрат диференціалу.

Тоді рівність (4.7) приймає вид:

$$d^2\overline{r} \cdot \overline{n} = L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2 \equiv II\ . \tag{4.8}$$

Означення 4.3. Права чатина у формулі (7.8) називається другою квадратичною формою поверхні

Зауваження 4.1. Якщо поверхню задано явним рівнянням $z = z(x, y)$, то

$$L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + z^2{}_x + z^2{}_y}},\ M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z^2{}_x + z^2{}_y}},\ N = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + z^2{}_x + z^2{}_y}}.$$

Приклад 4.2. Знайти другу квадратичну форму поверхні

$$\bar{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, 2v).$$

Розв'язання. Із задачі 2.3 нам відомо, що перша квадратична форма цієї поверхні має вигляд

$$I = ds^2 = du^2 + \left(4 + u^2\right)dv^2.$$

Тоді $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{4 + u^2}$. Перші похідні мають вигляд:

$$\bar{r}_u = (\cos v, \sin v, 0), \bar{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, 2).$$

Знайдемо другі похідні

$$\bar{r}_{uu} = (0,0,0), \bar{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \bar{r}_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0).$$

Обчислимо мішані добутки похідних:

$$(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uu}) = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uv}) = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 2 \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -\sin v & \cos v \end{vmatrix} = -2,$$

$$(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{vv}) = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 2 \\ -u\cos v & -u\sin v & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -u\cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = 0.$$

Знайдемо коефіцієнти другої квадратичної форми:

$$h_{11} = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uu})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = 0,\ h_{12} = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uv})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = -\frac{2}{\sqrt{4 + u^2}},$$

$$h_{22} = \frac{(\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{vv})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = 0.$$

Отже, друга квадратична форма має вигляд

$$II = h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2 = -\frac{4}{\sqrt{4+u^2}}dudv. \blacksquare$$

4. Кривина кривої на поверхні

Нехай f – регулярна поверхня, γ – регілярна крива на поверхні f, яка містить точку M.

Припустимо, що вздовж цієї кривої за параметр прийнята довжина дуги s, тому поточні координати u і v виражаються як функції від s (природна параметризація кривої): $u = u(s)$, $v = v(s)$, і, отже, крива може бути представлена у вигляді $\gamma : \bar{r} = \bar{r}(u(s), v(s))$.

Розглянемо скалярні добутки $\bar{r}''\cdot\bar{n}$, де $\bar{r}'' = \dfrac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ та $\bar{n}$ - одиничний вектор номалі до поверхні. Тоді $\bar{r}''\cdot\bar{n} = |\bar{r}''||\bar{n}|\cos\theta$, де θ - кут між головною нормаллю $\bar{v}$ кривої та нормаллю $\bar{n}$ до поверхні .

Оскільки $|\bar{r}''| = k$, де k – кривина кривої, то маємо $\bar{r}''\cdot\bar{n} = k\cos\theta$. З іншого боку, враховуючи що $\bar{r}' = \bar{r}_u \cdot u' + \bar{r}_v \cdot v'$, маємо:

$$\bar{r}''\cdot n = (\bar{r}uuu'^2 + \bar{r}uu'' + \bar{r}uvv'u' + (r_{vu}u' + r_{vv}v')v' + \bar{r}vv'')\cdot\bar{n} =$$
$$= (\bar{r}uuu'^2 + 2\bar{r}uvu'v' + v'^2 + \bar{r}uu'' + r_v v'')\cdot\bar{n} =$$
$$= (\bar{r}uu\cdot\bar{n})u'^2 + 2(\bar{r}uv\cdot\bar{n})u'v' + (\bar{r}vv\cdot\bar{n})v'^2 + (\bar{r}u\cdot\bar{n})u'' + (\bar{r}v\cdot\bar{n})v'' =$$
$$Lu'^2 + 2M\,u'v' + N\,v'^2 = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{ds^2}$$

З того, що $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G dv^2$, маємо

$$k\cos\theta = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{II}{I}.$$

Права частина цієї рівності залежить лише від напрямку кривої в точці M(u, v). Таким чином, $k\cos\theta = k_n = \text{const}$ в точці $M(u, v)$ для всіх кривих γ, що проходять через цю точку і має в ній ту саму дотичну площину.

Величину k_n називають **нормальною кривиною кривої** γ в точці M. Якщо γ – нормальний переріз поверхні, тобто, переріз поверхні площиною, що проходить через нормаль до поверхні в точці М, тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 4.1. *Нормальна кривина будь-якої кривої поверхні, що проходить через точку М, з точністю до знака дорівнює кривині нормального перерізу, що має з даної лінії загальну дотичну (знак залежить від напрямку векторів* $\bar{n}$ *та* $\bar{v}$ *).*

Приклад 4.3. На поверхні $\bar{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 2v)$ знайти нормальну кривину кривої $u = v^2$ в точці $(u = 4, v = 2)$.

Розв'язання. Скористаємося результатами прикладів 7.1 та 7.2, маємо

$$I = du^2 + \left(4 + u^2\right)dv^2,\ II = -\frac{4}{\sqrt{4+u^2}}dudv.$$

Узявши диференціали від обох частин рівняння кривої, одержимо $du = 2vdv$. Підставимо у формулу для нормальної кривини

$$k_н = \frac{II}{I} = \frac{-\frac{4}{\sqrt{4+u^2}}dudv}{du^2 + \left(4+u^2\right)dv^2} = \frac{-\frac{4}{\sqrt{4+u^2}}2vdvdv}{4v^2dv^2 + \left(4+u^2\right)dv^2} = \frac{-\frac{8v}{\sqrt{4+u^2}}}{4v^2 + 4 + u^2}.$$

В заданій точці маємо:

$$k_н = \frac{-\left(\frac{16}{\sqrt{4+16}}\right)}{16+4+16} = -\frac{16}{36\sqrt{20}} = -\frac{2}{9\sqrt{5}}.\blacksquare$$

5. Головні напрями та кривина поверхні

Досліджуємо тепер питання, як змінюється нормальна кривизна залежно від напряму вектора швидкості. Як і для будь-якої квадратичної форми, для другої квадратичної форми знайдеться ортонормований базис у дотичній площині, в якому форма має діагональний вигляд

$$II(du, dv) = \lambda_1 du^2 + \lambda_2 dv^2.$$

Означення 4.4. Напрями, що задаються векторами цього базису, називаються головними напрямками, а числа λ_1, λ_2 – *головними кривинами*

Означення 4.5. Добуток $K = \lambda_1 \lambda_2$ називається **гаусовою або повною кривиною поверхні** в даній точці, напівсума $(\lambda_1 + \lambda_2)/2$ – середньою кривиною.

Знання головних кривизн та головних напрямків дозволяє знайти нормальну кривизну у довільному напрямку за формулою

$$k_n = \lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi,$$

де φ – кут між цим напрямком та напрямком першого базисного вектора (формула Ейлера).

З формули Ейлера випливає екстремальна властивість основних напрямів: це напрями, де нормальна кривизна приймає найбільше чи найменше значення. Ця властивість допомагає знаходити головні напрямки: вектор із координатами du, dv задає головний напрямок, якщо виконано умову:

$$(E\,du + F\,dv)(M\,du + N\,dv) - (L\,du + M\,dv)(M\,du + N\,dv) = 0.$$

Головні кривини можна знайти з умов $\det(II - \lambda I) = 0$, тобто, з рівняння $(L - \lambda E)(N - \lambda G) - (M - \lambda F)^2 = 0$.

Приклад 4.4. На поверхні $\bar{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2v)$ в точці $A(u = 4, v = 2)$ знайти головні напрямки, головні кривини, повну і середню кривини.

Розв'язання. Скористаємося результатами задач 2.3 та 2.4. Матимемо в довільній точці

$$g_{11} = 1,\ g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{22} = u^2 + 4,\ h_{11} = h_{22} = 0,\ h_{12} = h_{21} = -2\Big/\sqrt{u^2 + 4}.$$

В точці A знаходимо

$$g_{11} = 1,\ g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{22} = 20,\ h_{11} = h_{22} = 0,\ h_{12} = h_{21} = -1\big/\sqrt{5}.$$

Для обчислення головних кривин скористаємося рівнянням

$$\begin{vmatrix} h_{11}-kg_{11} & h_{12}-kg_{12} \\ h_{12}-kg_{12} & h_{22}-kg_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k & -1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & -20k \end{vmatrix} = 20k^2 - \frac{1}{5} = 0.$$

Звідси $k_{1,2} = \pm 0{,}1$.

Отже, головні кривини дорівнюють 0,1 і –0,1. Для знаходження головних напрямків використовуємо рівняння (2.13)

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1 & 0 & 20 \\ 0 & -1/\sqrt{5} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} dv^2 & du^2 \\ 1 & 20 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси $20dv^2 - du^2 = 0$, $\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = 20$, $\frac{du}{dv} = \pm 2\sqrt{5}$.

Таким чином, головні напрямки визначаються співвідношеннями

$\frac{du}{dv} = 2\sqrt{5}$ і $\frac{du}{dv} = -2\sqrt{5}$.

Для знаходження повної і середньої кривин скористаємося формулами:

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^{\;2}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^{\;2}} = \frac{0 - 1/5}{20 - 0} = -0{,}01 \qquad ,$$

$$H = \frac{g_{11}h_{22} + h_{11}g_{22} - 2g_{12}h_{12}}{2\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)} = \frac{0}{20} = 0.$$

Зауваження 4.2. Оскільки ми вже знайшли головні кривини, простіше було б скористатися формулами, наведеними в означеннях повної та середньої кривин.

Лема 4.1. Дві поверхні є згинаються одна в іншу, якщо в деяких параметризаціях їх перші квадратичні форми збігаються.

Сукупність тих властивостей поверхні, які не змінюються при її ізометричному згинанні, називається **внутрішньою геометрією поверхні**. Дві поверхні згинаються одна в одну тоді й тільки тоді, коли на них можна ввести однакову першу квадратичну форму, що свідчить про ідентичність їхніх внутрішніх метричних характеристик. Прикладом поверхонь з однаковою внутрішньою геометрією є площина та параболічний циліндр, оскільки циліндр можна отримати з площини без розтягнень чи розривів. Отже, до внутрішньої геометрії належать лише ті властивості, що виражаються через коефіцієнти першої квадратичної форми, зокрема: довжини ліній на поверхні, кути між ними, площа областей та повна (гаусова) кривизна K, яка, згідно з «чудовою теоремою» Гаусса, залишається незмінною при згинанні. Наприклад, внутрішня геометрія площини відповідає шкільній планіметрії, і її теореми залишаються справедливими для будь-якої поверхні, що накладається на площину. Водночас внутрішня геометрія сфери принципово інша: сума кутів трикутника на ній завжди більша за π.

Зовнішня геометрія поверхні вивчає властивості поверхні, що характеризують її форму та розташування відносно тривимірного евклідового простору, в який вона занурена. Основним математичним інструментом тут виступає друга квадратична форма, яка описує відхилення поверхні від її дотичної площини. До об'єктів зовнішньої геометрії належать головні кривини та середня кривина H, які, на відміну від повної кривини, суттєво змінюються під час згинання. Якщо внутрішня геометрія не розрізняє плоский аркуш і згорнутий у трубку циліндр, то зовнішня геометрія фіксує появу кривини у просторі. Отже, зовнішня геометрія дає повне уявлення про зовнішній вигляд та просторову конфігурацію поверхні, тоді як внутрішня описує лише метричні зв'язки всередині самої поверхні.

6. ПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ЗА ЗМІСТОМ ЛЕКЦІЇ 4

1. Сформулюйте означення першої квадратичної форми поверхні? Який її геометричний зміст та які величини можна обчислити з її допомогою?

2. У чому полягає відмінність між внутрішньою та зовнішньою геометрією поверхні? Наведіть приклади характеристик, що належать до кожної з них.

3. Як обчислити кут між двома кривими на поверхні, що перетинаються?

4. Сформулюйте означення другої квадратичної форми поверхні. Що вона характеризує і як її коефіцієнти L, M, N пов'язані з вектором нормалі?

5. Сформулюйте означення нормальної кривини кривої на поверхні? Сформулюйте теорему про зв'язок кривини кривої та її нормального перерізу.

6. Які напрями на поверхні називаються головними? Яку властивість нормальної кривини вони виражають згідно з формулою Ейлера?

7. У чому різниця між повною Гаусовою кривиною K та середньою кривиною ? Яка з них є об'єктом внутрішньої геометрії?

8. Поясніть основні риси внутрішньої та звіншньої геометрій поверхні.

Предметний покажчик

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ І РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Зоря В. Д., Коржова О. В., Горзій Т. О. Поверхні в евклідовому просторі: курс лекцій: навч. посібник. Харків: ХНПУ імені Г. С. Сковороди, 2012. 92 с.
2. Горькавий В.О. Елементарна диференціальна геометрія. Навчальний посібник. Харків: ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України, 2024. 1193 с.
3. Ілляшенко В. Я., Антонюк О. П. Диференціальна геометрія [Текст] : навч.-метод. посіб. Луцьк: Вежа-Друк, 2020. 171 с.
4. Курбатова І. М. Методичний посібник з диференціальної геометрії. Частина ІІ: Теорія поверхонь. Одеса : ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2021. 145 с.
5. Міхлін Ю. В., Кирилова Н. О. Елементи диференціальної геометрії та теорії поверхонь : навч. посіб. Харків : НТУ «ХПІ», 2020. 52 с.
6. Міхлін Ю. В., Кирилова Н. О., Морачковська І. О. Елементи диференціальної геометрії : навч. посіб. Харків : НТУ «ХПІ», 2020. 44 с.
7. Стеблянко П. О., Коломієць О. М. Основи диференціальної геометрії (застосування сучасних комп'ютерних технологій, зокрема системи MatLab): навч. посіб. Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2011. 203 с.
8. Стєганцева П. Г., Величко І. Г. Диференціальна геометрія: курс лекцій: для студентів ВНЗ. Запоріжжя: ЗНУ, 2014. 143 с.
9. Франовський А. Ц., Карплюк С. О. Диференціальна геометрія: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів. Житомир: Видво ЖДУ ім. І. Франка, 2013. 188 с., іл. ISBN 978-966-485-152-4
10. Abate M., Tovena F. Curves and Surfaces. Springer Berlin Heidelberg, 2012. 390 p.
11. Do Carmo M. P. Differential Geometry of Curves and Surfaces. 2nd ed. Mineola, NY : Dover Publications, 2016. 512 p.

12. Lee J. M. Introduction to Smooth Manifolds. 2nd ed. New York: Springer, 2013. 708 p.

13. Pressley A. Elementary Differential Geometry. 2nd ed. London: Springer, 2010. 416 p.

14. Tapp K. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Cham: Springer, 2016. 352 p.

15. Tu L. W. Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes. Cham: Springer, 2017. 358 p.