

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД
«ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ К. ДУШИНСЬКОГО»**

**Факультет початкового навчання
Кафедра математики і методики її навчання**

Ольга ЗАДОРІНА

Тетяна КАЧАН

Навчальний посібник

**з дисципліни "Методика навчання математики"
(розділ "Текстові задачі та методика навчання їх
розв'язування у основній школі")**



для здобувачів освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальностей

Середня освіта (Математика. Інформатика),
Середня освіта (Математика. Англійська мова),
Середня освіта (Фізика. Математика)

Одеса

2025

УДК [37.016:51]:372.851(075.8)

Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради

*Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний
університет імені К.Д. Ушинського»*

(Протокол № 13 від 24 квітня 2025 р.)

Рецензенти:

Ігор Михайлович Мітельман, доцент кафедри методики викладання і змісту освіти КЗВО «Одеська академія неперервної освіти Одеської обласної ради», кандидат фізико-математичних наук, заслужений вчитель України.

Юрій Олексійович Захарійченко, старший викладач кафедри математики Національного університету Києво-Могилянська академія, кандидат фізико-математичних наук.

Задоріна О.М., Качан Т.В. Навчальний посібник з дисципліни "Методика навчання математики" (розділ "Текстові задачі та методика навчання їх розв'язування у основній школі") для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем спеціальностей: А4 Середня освіта (Математика. Інформатика), А4 Середня освіта (Математика. Англійська мова), А4 Середня освіта (Фізика. Математика). Одеса: Університет Ушинського, 2025. 202 с.

Навчальний посібник розроблено відповідно специфіки підготовки майбутніх учителів за спеціальностями А4. Середня освіта (Математика. Інформатика), А4. Середня освіта (Математика. Англійська мова), А4. Середня освіта (Фізика. Математика). Матеріал посібника покликаний ґрунтовно розкрити розділ методики навчання математики Текстові задачі та методика навчання їх розв'язування у основній школі. Висвітлено методологію, логіку та функціонал методики навчання здобувачів середньої освіти розв'язувати текстові задачі відповідно до чинних вимог НУШ.

© Задоріна О.М., Качан Т.В., 2025

ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ I. Теоретико-методичні основи навчання учнів розв'язуванню текстових задач з математики	7
1.1. Стан проблеми в науковій, методичній та психолого – педагогічній літературі	7
1.2. Методичні орієнтири навчання розв'язуванню текстових задач у контексті концепції Нової української школи	10
1.3. Роль і функції текстових задач в курсі алгебри основної школи	13
1.4. Психолого – педагогічні основи навчання алгебраїчному методу і його використання при розв'язуванні текстових задач	18
Розділ II. Окремі види текстових задач з математики у 5-му класі та методика їх розв'язування	24
2.1. Арифметичний спосіб розв'язування задач	24
2.2. Задачі на обчислення тривалості подій	31
2.3. Задачі на рух	35
2.4. Задачі на числові залежності	46
2.5. Задачі на використання середніх значень	49
2.6. Алгебраїчний спосіб розв'язування задач	54
2.7. Задачі на частини	62
2.8. Задачі геометричного змісту	68
2.9. Задачі на відсоткові розрахунки	72
2.10. Цікаві задачі	81
Розділ III. Окремі види текстових задач з математики у 6-му класі та методика їх розв'язування	87
3.1. Задачі на рух	87
3.2. Задачі на спільну роботу	102
3.3. Задачі на відсоткові розрахунки	107
3.4. Задачі на пропорційні величини	116
3.5. Розв'язування задач складанням рівнянь	122

3.6. Задачі підвищеного рівня складності	134
Розділ IV. Тестові задачі з математики у 7-9 класах та методика їх розв'язування	155
4.1. Методи розв'язання задач	155
4.2. Задачі з невідомими, які приймають тільки цілі значення	160
4.3. Задачі з альтернативною умовою	163
4.4. Задачі, які розв'язуються за допомогою нерівностей	169
4.5. Задачі на зустрічний рух	172
4.6. Задачі на рух в одному напрямку навздогін	176
4.7. Задачі на рух в одному напрямку із відставанням	180
4.8. Комбінований рух	183
4.9. Задачі на роботу	186
Висновки	189
Список використаних джерел	191
Додатки	193

ВСТУП

Текстові задачі з математики посідають особливе місце в шкільному курсі, адже саме вони найповніше реалізують прикладний характер предмета. На відміну від абстрактних обчислень або формальних дій з числами й виразами, текстові задачі вимагають від учня не лише знань математичних понять і алгоритмів, а й уміння застосовувати їх до розв'язування практично зорієнтованих ситуацій. Такий вид навчальної діяльності є своєрідним містком між математикою як навчальною дисципліною та реальним життям, у якому людині доводиться постійно робити обчислення, оцінки, прогнози й аналіз.

Розв'язування текстових задач формує в учнів низку ключових компетентностей, зокрема: математичну, логічну, інформаційну, комунікативну та критичне мислення. У процесі роботи над задачею учень вчиться аналізувати умову, виділяти головне, виявляти зв'язки між величинами, будувати математичну модель, вибирати оптимальний спосіб розв'язання, обґрунтовувати свої дії та перевіряти правильність отриманого результату. Усе це сприяє розвитку самостійності, послідовності мислення, відповідальності за прийняті рішення та навичок аргументації. Тому навчання розв'язуванню текстових задач є важливим чинником формування повноцінної математичної культури учнів.

Особливої актуальності проблема навчання текстових задач набуває в контексті реалізації концепції **Нової української школи (НУШ)**, яка орієнтується на компетентнісне, особистісно-орієнтоване та діяльнісне навчання. НУШ визначає розвиток умінь застосовувати знання у практичних ситуаціях як одну з ключових цілей сучасної освіти. Саме текстові задачі, що моделюють реальні життєві обставини, стають ефективним інструментом для формування в учнів не лише предметних, а й міжпредметних компетентностей, зокрема фінансової, математичної та соціальної. Методика навчання розв'язуванню таких задач має бути гнучкою, практично зорієнтованою, диференційованою та відповідати віковим і пізнавальним особливостям учнів.

Запропонований навчальний посібник присвячено методиці навчання учнів основної школи розв'язуванню текстових задач. У ньому викладено теоретико-методичні основи навчання, охарактеризовано психолого-педагогічні аспекти формування відповідних умінь, розкрито роль текстових задач у курсі алгебри. Окремі розділи присвячені аналізу методичних підходів до навчання розв'язування задач у 5–9 класах: подано класифікацію задач, розкрито специфіку їх розв'язування різними способами — арифметичним, алгебраїчним, комбінованим.

Матеріал посібника може бути корисним для студентів педагогічних закладів вищої освіти, учителів-практиків, викладачів методики математики, а також усіх, хто цікавиться проблемами навчання розв'язуванню текстових задач у шкільному курсі математики.

Розділ 1. ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ НАВЧАННЯ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЮ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

1.1. Стан проблеми в науковій, методичній та психолого – педагогічній літературі

На сучасному етапі розбудови шкільної математичної освіти розв'язування текстових задач алгебраїчним способом у навчанні математики переслідує такі цілі:

- 1) формування в учнів загального підходу, загальних умінь і здібностей розв'язання будь-яких задач;
- 2) пізнання і більш глибоке оволодіння математичними поняттями, що визначаються, і деякими загальнонауковими поняттями;
- 3) оволодіння поняттями моделі й моделювання і власне математичним моделюванням;
- 4) розвиток мислення, кмітливості учнів, їх творчого потенціалу.

Дослідженню цієї проблеми присвячені роботи М. Бантової, М.Богдановича, Г. Бевза, М. Бурди, Н. Істоміної, Ю. Колягіна, Є. Лященко, В. Мішина, С. Скворцової, Г. Саранцева, Т. Хмари та інших. Усі вчені, що розробляли проблему навчання розв'язування сюжетних задач, одностайні в тому, що кінцевою метою такого навчання має бути формування в учнів загального вміння розв'язувати задачі.

Вчені, які працювали і працюють в даному напрямку, кажуть, що методика формування загального вміння розв'язувати задачі реалізується на матеріалі простих і складених задач, задач, що містять пропорційні величини, на знаходження суми або різниці чи кратне порівняння двох добутоків або часток на розв'язування текстових задач.

Дані, необхідні для осмислення цілісності і цілеспрямованості формування вмінь розв'язувати текстові задачі в умовах диференційованого навчання, одержані в результаті аналізу психологічної і методичної літератури, де є немало цінних ідей і теоретичних узагальнень. Так, праці в

галузі педагогічної психології (Л. С. Виготський, П. Я. Гальперін, Г.С.Костюк, О. М. Леонт'єв, Н. Ф. Талізін, І. С. Якиманська) розкривають зміст поняття «вміння» і розуміння механізмів його формування у школярів основної школи. Психологічний та методичний аспект процесу розв'язування задач досліджували Г. О. Балл, Л. Л. Гурова, С. Д. Максименко, Є.І.Машбиць, Н. О. Менчинська, Н. А. Побірченко, З. І. Слєпкань, Л.М.Фрідман. Психолого-педагогічні і методичні основи диференційованого навчання розкрито в працях М. І. Бурди, Ю. З. Гільбуха, О. С. Дубинчук, С.О.Логачевської, О. Я. Савченко, І. Е. Унт та ін.

До проблеми розв'язування задач при вивченні математики тією чи іншою мірою зверталися відомі методисти. Особливу увагу розв'язуванню задач як засобу розвитку мислення, формування системи математичних понять, добору задач до підручників у середній школі приділяли Г. П. Бєвз, Ю. М. Колягін, І. Ф. Тєслєнко, А. А. Столяр, Л. М. Фрідман, у початковій школі - М. О. Бантова, Г. В. Бєльтюкова, М. В. Богданович, Г. В. Гап'юк, М.М. Левшин, М. Г. Моро, Я. А. Король, Л. П. Кочіна, А. С. Пчолко, С.О.Скорцова, Н. Уткіна та інші. [3; 5; 18].

Позитивно оцінюючи наукову і практичну значущість праць з даної проблеми, необхідно, разом з цим, відзначити, що ряд аспектів формування вмінь розв'язувати текстові задачі залишилися нерозкриті, зокрема - обсяг теоретичних знань про текстову задачу і процес її розв'язування в основній школі; визначення рівнів програмних вимог до вироблення вмінь учнів основної школи розв'язувати текстові задачі; добір різнорівневих завдань, спрямованих на формування вмінь розв'язувати задачі; способи раціонального поєднання фронтальної, групової та індивідуальної форм роботи на уроках математики при розв'язуванні задач в умовах диференційованого навчання у середній ланці школи.

Крім того, традиційна методика формування вмінь розв'язувати текстові задачі на практиці орієнтована на «середнього» учня. Вона не враховує зміст та основні ідеї проекту Державного стандарту загальної середньої освіти в

Україні, зокрема ідеї рівневої диференціації навчання та орієнтацію її результатів на навчальні можливості школярів. Не всі підручники з математики для середніх класів спрямовані на диференційоване формування вмінь розв'язувати текстові задачі. Окремі з них не мають навчального матеріалу для організації ефективної роботи різних за здібностями груп учнів. [3; 18].

Таким чином, актуальність дослідження зумовлена його значущістю для розробки методики диференційованого навчання математики у основній школі, яка враховує особливості навчальної діяльності учнів під час розв'язування текстових задач, психолого-педагогічні засади вироблення вмінь розв'язувати текстові задачі, різнорівневі вимоги до математичної підготовки школярів.

Як відомо, навчально-виховний процес повинен будуватися відповідно до потреб особистості та індивідуальних можливостей дітей, зростання їх самостійності й творчої активності. А це вимагає організації навчання відповідно до здібностей, здатності до навчання, таланту дитини.

Використання індивідуального підходу та диференційованих форм навчальної роботи зумовлюється і впливом гуманістичної тенденції у вихованні школярів. Як правило, обраний учителем середній темп діяльності є нормальним лише для певної частини учнів, для інших він швидкий чи повільний. Одна і та ж учбова задача для одних дітей є складною, майже нерозв'язною проблемою, а для інших вона – легке питання. Один і той самий текст одні діти розуміють після першого читання, іншим необхідне повторення, а третім – пояснення.

Таким чином, успішність засвоєння навчального матеріалу, темп оволодіння ним, міцність збереження та рівень осмислення знань залежать не лише від діяльності педагога, але й від пізнавальних можливостей і здібностей учнів, обумовлених багатьма чинниками: особливостями сприймання, пам'яті, мисленевої діяльності, а також фізичним розвитком і т. ін. Тому «кожен учитель має створити такі умови, за яких стало б можливим використання

фактичних і потенційних можливостей кожної дитини за класно-урочної форми навчання». Розв'язання цього практичного завдання тісно пов'язане з послідовною реалізацією диференційованого та індивідуального підходу до школярів. [18].

Теоретичною основою створення методики формування в школярів загального вміння розв'язувати задачі є вимоги до процесу формування розумових дій, які забезпечують високу ефективність навчання навичок і вмінь, що сформульовані Л.Фрідманом, а також теорія поетапного формування розумових дій і понять П.Гальперіна, яка відповідає цим вимогам.

С. Скворцова пропонує формувати загальні вміння розв'язувати задачі, взявши за основу операційний склад, за такими етапами:

- 1 етап – підготовча робота до введення поняття “задача”;
- 2 етап – ознайомлення з поняттям “задача”, його структурними елементами та етапами її розв'язання;
- 3 етап – формування загального вміння розв'язувати будь-які задачі.

Вивчення математики в основній школі має забезпечити базову математичну підготовку учнів, що спрямована на їх загальний розвиток, формування математичної грамотності та є достатньою для реалізації обраного шляху подальшого здобуття освіти. [5].

1.2. Методичні орієнтири навчання розв'язуванню текстових задач у контексті концепції Нової української школи

Реформування загальної середньої освіти в Україні відповідно до концепції **Нової української школи (НУШ)** спрямоване на створення такої системи навчання, яка формує всебічно розвинену, відповідальну та ініціативну особистість, здатну ефективно діяти в сучасному світі. У цьому контексті навчання математики має не лише забезпечити засвоєння знань і формування обчислювальних навичок, а й сприяти розвитку математичного мислення, здатності застосовувати набуті знання в реальних життєвих ситуаціях.

Одним із важливих засобів досягнення цієї мети є **текстові задачі**, що виступають засобом моделювання реальних процесів і явищ. Вони дають змогу поєднати формальні математичні знання з практичними вміннями, розвивають здатність бачити математику у повсякденному житті. Такий підхід цілком відповідає ключовим засадам НУШ: компетентнісному, діяльнісному та інтегрованому підходам до навчання.

Розв'язування текстових задач сприяє формуванню:

- **математичної компетентності** — через розвиток навичок аналізу, моделювання, обчислення, оцінки результату;
- **ініціативності та підприємливості** — при роботі з задачами фінансового, економічного чи побутового змісту;
- **уміння навчатися впродовж життя** — завдяки систематичній роботі з задачами різних типів і рівнів складності;
- **спілкування державною мовою** — через формулювання міркувань, обґрунтування дій, пояснення логіки розв'язання;
- **критичного та логічного мислення** — під час порівняння способів розв'язання, пошуку оптимального варіанту.

Згідно з Концепцією Нової української школи, сучасний учитель має не лише передавати знання, а й створювати умови для формування ключових компетентностей учнів, їхнього критичного мислення, здатності до самонавчання, творчості й ініціативності. У цьому контексті роль текстових задач у процесі вивчення математики суттєво зростає, адже вони дозволяють реалізувати як компетентнісний, так і діяльнісний підхід до навчання, що є засадничими принципами НУШ.

Для майбутнього вчителя математики важливо не лише знати типи текстових задач і способи їх розв'язування, а й розуміти, як трансформувати цей навчальний матеріал відповідно до вимог нової освітньої парадигми. Методика має бути гнучкою, орієнтованою на учня, передбачати варіативність у виборі способів розв'язання, інтеграцію з іншими освітніми галузями, а також включати елементи дослідницької, проєктної та ігрової діяльності.

Зокрема, в умовах реалізації НУШ текстові задачі використовуються:

- як **інструмент для формування предметної та міжпредметної компетентностей**, особливо математичної, інформаційної, фінансової;
- як **засіб розвитку критичного мислення**, оскільки спонукають до аналізу умов задачі, обґрунтування вибору методу розв'язання, перевірки результату;
- як **мотиваційний компонент**, коли задачі пов'язано з реальними життєвими ситуаціями учнів (покупки, подорожі, планування часу, розподіл ресурсів тощо);
- як **інструмент оцінювання компетентностей**, що дозволяє діагностувати рівень розуміння математичних понять у прикладному контексті.

В умовах НУШ важливо не лише навчити учнів стандартному алгоритму розв'язання задачі, а й створювати ситуації для дослідження, порівняння, постановки власних задач, роботи в групі, обговорення різних підходів. Учитель стає фасилітатором навчального процесу, а учень — активним учасником і творцем власної траєкторії навчання.

Важливо, щоб майбутній учитель оволодів методикою подання задач не лише як навчального матеріалу, а як ситуацій навчання, які вимагають дослідження, спільного обговорення, формулювання гіпотез, порівняння стратегій розв'язання. Такі підходи відповідають принципам партнерської взаємодії, проектування освітнього середовища та формувального оцінювання, що також є складовими НУШ.

Таким чином, включення концептуальних засад Нової української школи у методику навчання розв'язуванню текстових задач є необхідною умовою успішної професійної підготовки майбутнього вчителя. Це вимагає не лише володіння відповідним методичним інструментарієм, а й здатності критично осмислювати власну педагогічну діяльність, адаптувати її до потреб сучасного учня та викликів освіти XXI століття.

1.3. Психолого – педагогічні основи навчання алгебраїчному методу і його використання при розв’язуванні текстових задач

Успіх роботи вчителя математики залежить від багатьох взаємно пов’язаних факторів, зокрема й від того, якою мірою він враховує вікові особливості учнів, природу їх психіки та фактори, що стимулюють діяльність учнів (інтерес, усвідомлення обов’язку, близьких і далеких цілей тощо).

Ефективність навчання і виховання обумовлюється дієвістю методів навчання та активізацією пізнавальної діяльності учнів. Так, сприймання математичних фактів рельєфніше і міцніше, якщо учень має цілеспрямовану настанову на вивчення певних питань; якщо при викладанні нового матеріалу вчитель спирається на набутий вже учнівський досвід; якщо записи на дошці робляться послідовно і системно; якщо дотримуються необхідні естетичні вимоги (красиві таблиці, рисунки, записи); якщо форми роботи під час уроку урізноманітнюються. [5].

Пам’ять при вивченні математики активізується не тільки силою зовнішніх подразників і асоціацій, а значною мірою й розкриттям всіх логічних зв’язків у матеріалі.

Учнівська уява розвивається як на основі споглядання (а потім відтворення) просторових форм і відношень, так і на основі сприйнятих та осмислених символічних об’єктів (схем, формул тощо).

Одним із важливих завдань розв’язування текстових задач алгебраїчним способом є розвиток пізнавальних здібностей школярів, провідну роль при цьому відіграє розвиток мислення учнів. Завдання полягає в тому, щоб навчити дітей спостерігати і порівнювати, виділяти риси відмінності та схожості в порівнювальних об’єктах.

Прийоми розумової діяльності відіграють важливу роль у навчанні учнів і зокрема у розв’язанні проблеми “вчити – вчитися”. Розвиток розумових здібностей, в тому числі і розвиток мислення, є компонентом загальної задачі математичної освіти. Що розуміють під терміном “математичне мислення”?

(процес опосередкованого узагальненого пізнання людиною предметів і явищ об'єктивної діяльності у їх суттєвих властивостях, зв'язках і відношеннях).

Часто стверджують, що уже сам процес розв'язування текстових задач розвиває мислення. Дійсно, більшість психологів, дидактів та вчителів-практиків визнають, що озброєння учнів знаннями та їх розумовий розвиток, включаючи розвиток мислення, здійснюється разом, оскільки формування і розвиток мислення проходять тільки в процесі засвоєння та застосування знань. Але С. В. Рубінштейн вказував, що не можна підпорядковувати проблему розвитку мислення проблемі засвоєння знань. Кожна із цих проблем має самостійне значення та свій шлях реалізації.

Під час навчання розв'язуванню текстових задач алгебраїчним способом в учнів формується мислення, оскільки потрібно подумати якого типу задача, як скласти рівняння чи систему рівнянь, як їх розв'язати. А всі ці операції і є те саме мислення.

Активізація мислення має багатогранний процес; суворо дотримуватися послідовності в просуванні від простого до складного; виявити спільне та відмінне; організовувати аналітико – синтетичне вивчення кожного об'єкта, пояснювати процеси абстрагування та конкретизації і природу математичних об'єктів переважно як абстракції (різних ступенів); вести учнів від окремого до загального, показуючи при цьому як процес, так і результат узагальнення; пояснювати поступово суть основних операцій розумової діяльності, застосовувати «наочно» правила і закони формальної логіки; розкривати характер зв'язку між мисленням і мовою, удосконалювати учнівську мову як фактор розвитку їх мислення; виробляти в учнів навички самоспостереження та самоаналізу явищ у процесі мислення і мовлення; змінювати доцільно співвідношення образного, практично – дійового і теоретичного мислення на уроці тощо.

Не менш важливою є уява (творча фантазія). Уява – це психічний процес, який є надзвичайно важливим для розвитку творчості, творчого мислення.

Творча уява вимальовує нові, оригінальні образи та ідеї. Саме вона доповнює творче мислення і взаємодіючи з ним, становить основу людської творчості.

Уява і фантазія розвиваються в нормі за звичайними законами розвитку вищих психічних функцій – від мимовільної уяви до довільної, від репродуктивної до творчої. Не виникає сумніву, що розвиткові творчої уяви сприяють казки, художня література, хороші фантастичні твори. Однак існують і безпосередні прийоми, вправи, виконання яких тренує уяву.

Уява і фантазія дуже важливі при розв'язуваннях задач, оскільки розв'язуючи задачу на рух, дитина вже раніше бачила, як рухається автомобіль чи велосипедист, але не кожен учень бачив як їде катер чи злітає вертоліт. Та все це він може собі уявити.

Кожна людина від народження має якісь вроджені здібності до певного виду діяльності; поза діяльністю цю властивість людини не можна розпізнати, описати і охарактеризувати. Здібною до певної галузі діяльності (технічної, наукової, математичної) називаємо ту людину, яка легко опановує цю діяльність, швидко оволодіває необхідними для неї знаннями, вміннями і навичками, успішно справляється з вимогами, які їй поставлені.

Кожна здібність людини є складовою її властивості. Являючи собою внутрішню можливість людини справитися з тими вимогами, що їх ставить певна діяльність, вона спирається на ряд інших її властивостей. До них треба віднести її життєвий досвід, надбані нею знання, вміння і навички. Але і при однакових приблизно знаннях, вміннях і навичках люди бувають неоднаковими щодо їх здібностей. Здібності є лише можливістю до набуття знань, умінь та навичок. А будуть чи не будуть здобуті ці знання та вміння залежить від таких умов:

- чи буде оточуюче середовище зацікавлене в тому, щоб дана особа володіла цими вміннями та знаннями;

- як особу будуть навчати, як буде організована трудова діяльність, в якій ці вміння і навички будуть закріплюватися.

Здібності – це індивідуально-психологічні особливості особистості, що є умовами успішного виконання даної діяльності і виявляють відмінності в динаміці оволодіння необхідними для неї знаннями, уміннями та навиками.

Здібності до математики, як і всі здібності – продукт розвитку. Вони формуються і розвиваються у процесі навчання математики.

Математичні здібності – складне структурне психологічне утворення, своєрідний синтез властивостей, індивідуальна якість розуму, яка поєднує різноманітні його сторони і розвинута в процесі математичної діяльності. Вказана сукупність являє собою єдине ціле. [1; 2; 3; 18].

При розв'язуванні текстових задач алгебраїчним способом слід урізноманітнювати форми і методи роботи, це збуджує інтерес і поживляє роботу учнів.

Задатки – обумовлені спадковими генами можливості розвитку анатомо-фізіологічних і деяких психічних властивостей, розвиток яких залежить від їх взаємодії з середовищем. Але слід пам'ятати, що задатки не виявляють у собі здібностей і не гарантують їх розвиток. Задатки – це тільки одна з умов формування здібностей.

Здібності дітей до певного виду діяльності вивчаються саме в цій діяльності. Математична діяльність учнів у процесі шкільного навчання є розв'язування різного роду задач. Щоб діяльність позитивно вплинула на розвиток здібностей, то вона повинна викликати у дитини сильні і стійкі позитивні емоції, задоволення, прагнення займатися нею; діяльність дитини повинна бути по можливості творчою, а не репродуктивною.

Найбільш природній шлях встановлення рівня здібностей – це порівняння тих, хто успішно, творчо виконує певну діяльність з тими, хто не успішно виконує цю діяльність. Основною діяльністю учнів є навчання. Отже, рівні здібностей учнів виявляються в успішності засвоєння знань, оволодіння вміннями і навичками. [2; 4].

Вчитель створює відповідний «психологічний клімат» і серед тих, хто має низький рейтинг успішності. Він переконує їх у важливості, привабливості і

можливості ґрунтовного вивчення алгебри; надихає в них віру в свої сили, в наступні успіхи.

Він дає посилені індивідуальні завдання учням, своєчасно перевіряє їх виконання, звертає увагу на конкретні успіхи, залучає батьків до спільної розумної і доброзичливої роботи по досягненню успіхів їхніми дітьми.

Не можна навіть мріяти про ефект у навчанні розв'язуванні текстових задач алгебраїчним способом не реалізуючи його науковість, тобто не забезпечуючи викладання положень шкільного курсу математики на рівні досягнень сучасної математики, в стрункій системі і послідовності.

Вимоги послідовності навчання розв'язування текстових задач диктуються як логікою психологічних явищ, так і логікою самого розв'язування текстових задач. Так, зокрема, міри абстрактності та загальності викладання обумовлені насамперед віковими особливостями учнів; рівень засвоєння наступного матеріалу залежить від рівня засвоєння попереднього тощо. Тому вчитель нагадує учням про необхідність систематичності і послідовності засвоєння знань для успішної роботи над розв'язуванням текстових задач алгебраїчним способом.

Разом з тим ніяка система понять, тверджень не буде міцно засвоєна учнями, якщо вона не буде викладена в доступній формі, що забезпечується методичним доббором фактичного матеріалу; своєчасною конкретизацією, чіткістю, ясністю мови тощо.[4].

У кожному класі можна умовно виділити три групи учнів – здібні до математики, середні і нездібні до математики учні. Виділяють ще такі-математично обдаровані, учні з підвищеними математичними здібностями, з нормальними віковими математичними здібностями, зі зниженими математичними здібностями і відстаючі.

Індивідуальність підходу в організації навчання розв'язування текстових задач алгебраїчним способом обумовлюється різноманітністю нахилів, здібностей та інших психофізіологічних якостей учнів; різним рівнем

попередньої підготовки; різними матеріально – побутовими умовами; різними поглядами на навчання.

Індивідуальний підхід може виявлятися в конкретних запитаннях, адресованих окремим учням на уроці; в додаткових поясненнях під час проведення самостійних робіт; в складанні різних за складністю задач для самостійних робіт (поточних і контрольних); рекомендації додаткової літератури для сильніших; урахуванні особливостей тих, хто відстає у навчанні, зокрема в обережному використанні методу прилюдної критики та негативних оцінок.

Одним з важливих завдань розв'язування задач є активізація мисленевої діяльності учнів, розвиток у них умінь розмірковувати, співставляти й протиставляти факти, порівнювати розв'язувану задачу з розглянутими раніше, знаходити в них спільне й відмінне. Розв'язування задач складанням рівнянь необхідно використати для формування в учнів умінь давати повноцінну аргументацію висловлених тверджень, виконуваних перетворень виразів, обчислень тощо. Воно повинно сприяти вихованню в учнів таких якостей, як умінь приймати певні незаплановані рішення на основі аналізу ситуацій. Це необхідна риса сучасного працівника будь-якої галузі народного господарства. У повсякденному житті, у виробничій діяльності людям різних професій доводиться розглядати всі можливі випадки ситуації, що склалася. Учнім слід це роз'яснювати і підкреслювати важливість такого умінь для вивчення математики. У свою чергу під час розв'язування задач вчитель повинен навчати учнів розглядати всі можливі варіанти заданої в задачі ситуації. [2; 3; 5].

Задачі широко використовуються для створення проблемної ситуації перед вивченням нових математичних фактів, понять і методів. У підручниках з алгебри 7 - 9-х класів за допомогою задач створюються проблемні ситуації для введення нових видів рівнянь і вивчення способів їх розв'язування. Проте використані з цією метою задачі не завжди можна вважати вдалимими, бо створення проблемної ситуації повинно бути пов'язане з подоланням певних

труднощів, організацією пошукової діяльності учнів. Якщо ж використовувати з цією метою відомий учням матеріал, то ніякої проблемної ситуації не виникає. Кожна розв'язувана задача повинна збагачувати знання і досвід учнів, навчати їх математичної діяльності. Для розвитку уміння розв'язувати задачі важливе значення має актуалізація набутих знань під час розв'язування нових задач. Мова йде про вибір з минулого досвіду потрібних відомостей і методів та використання їх у нових умовах. Але цей процес не відбувається автоматично, прийомам математичної діяльності під час розв'язування задач учнів треба навчати.

Основним помічником учня є підручник, де подано пояснення щодо розв'язування задач складанням рівнянь і відповідні зразки. Ці зразки за формою є своєрідними алгоритмічними приписами, де в лаконічній формі подано перелік кроків, що ведуть до одержання відповіді. [3; 4; 18].

1.4. Роль і функції текстових задач в курсі алгебри основної школи

У літературі з психології та педагогіки немає єдиного трактування поняття «задача». Залежно від підходу до зв'язку між суб'єктом і задачею автори тлумачать по-різному. Кібернетика, дидактика і методика навчання математики розглядають задачу як ситуацію зовнішньої діяльності, що запропонована окремо від суб'єкта діяльності. Тому здебільшого задачу розуміють як будь – яку вимогу обчислити, перетворити, побудувати, довести або дослідити що-небудь, що стосується просторових форм чи кількісних відношень, або запитання, рівносильне такій вимозі. Психологія розглядає задачу як мету, задану в певних умовах, як особливу характеристику діяльності суб'єкта. Задача тут тлумачиться як суб'єктивне психологічне відображення тієї зовнішньої ситуації, в якій розгортається цілеспрямована діяльність суб'єкта.

У шкільній практиці задачами у широкому розумінні вважають не лише текстові, сюжетні задачі, а й різні вправи, приклади.

Процес розв'язування задачі як розумову діяльність досліджує психологія й аналізує методика математики. Останнім часом здійснюється спроби дослідити задачі як такі, а не лише процес їх розв'язування. Звертається увага на потребу мати чітке уявлення про структуру задачі. Відомо, що кожна задача містить умову (умови) і вимогу (вимоги).

Задачі у навчанні математики є і об'єктом вивчення, і засобом навчання. Зазвичай розрізняють чотири основні їхні функції – навчальна, розвивальна, виховна і контрольна.

Навчальна функція полягає у формуванні в учнів системи математичних знань, умінь і навичок на різних етапах навчання. За допомогою системи задач учні вчаться не лише застосовувати здобуті теоретичні знання, а й на етапі мотивації переконуються у потребі здобуття нових знань; у процесі розв'язування задач дістають додаткову теоретичну інформацію і відомості про методи розв'язування.

Розвивальну функцію задач спрямовано на розвиток мислення школярів, на формування в них розумових дій і прийомів розумової діяльності, просторових уявлень і уяви, алгоритмічного мислення, вміння математизувати ситуацію тощо.

Виховну функцію задач спрямовано на формування в учнів наукового світогляду, вона сприяє екологічному, економічному, естетичному вихованню, розвиває пізнавальний інтерес, позитивні риси особистості (наполегливість, волю, відповідальність за доручену справу та ін.).

Контролююча функція задач полягає у встановленні навченості, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класом загалом.

Жодна з названих функцій не може реалізовуватися ізольовано від інших, але в кожній конкретній задачі вчитель має виокремити основну функцію і за належної цільової установки прагнути насамперед її реалізації. Кожна з основних функцій задач важлива в загальній системі навчання, але останнім часом особливу увагу приділяють розвивальній функції. Не випадково Д. Поя

(1887 – 1985), Е.Резерфорд (1871 – 1937), Н. Бор (1885 – 1962), А. Ейнштейн (1879 – 1955), П. Л. Капіца (1894 – 1984), Б. М. Кедров (1903 - 1985) та інші видатні вчені зазначали, що задачі мають не тільки і не стільки сприяти закріпленню знань, тренуванню в їх застосуванні, скільки формувати дослідницький стиль розумової діяльності, метод підходу до явища, що вивчаються.

Однією з найважливіших проблем шкільної математичної освіти є навчання учнів методам і способам розв’язування задач, самостійного пошуку розв’язку задач. Методи і способи розв’язування задач визначаються характером самих задач і тими знаннями та допоміжними засобами, якими учні володіють на певному етапі навчання.

Нині у дослідженнях психологи, дидактики і методисти переконливо показали, що вміння школярів розв’язувати задачі прямо не залежить від кількості розв’язаних задач. Якщо навіть учень розв’язав багато задач, але в нього не сформований загальний підхід до задачі, аналізу її, пошуку плану розв’язування, самостійно розв’язувати задачі він не зможе. [1].

У кожній задачі щось дано і щось треба знайти. Те, що дано в задачі, називається її умовою, а те, що треба знайти, - вимогою. Виконати поставлену в задачі вимогу – це й означає розв’язати її.

У математиці задачі відіграють важливу роль. Історія свідчить, що математика як наука виникла із задач і розвивається в основному для розв’язування задач. Найдавніші єгипетські математичні папіруси – це збірки задач. У них немає яких-небудь загальних правил, а є тільки розв’язання деяких задач на обчислення. Те саме можна сказати про російські математичні рукописи XVII – XVIII ст.

Задачі стимулювали не лише виникнення, а й подальший розвиток математичної науки. Основну роль, звичайно, відігравали задачі, поставлені життям. Вони насамперед примушували вчених розробляти нові алгоритми, виявляти нові закономірності, створювати нові методи дослідження. Згадаймо, наприклад, історію виникнення диференціального та інтегрального числення.

Ще на початку XVII ст.. математики зіткнулися з багатьма задачами на дослідження різних процесів, на знаходження площ криволінійних фігур тощо. Ці задачі цікавили багатьох, вони послужили стимулом і відправним пунктом для створення диференціального та інтегрального числення. Так само задачі про азартні ігри привели Б. Паскаля і П.Ферма до теорії ймовірностей, задача про оптимальне завантаження верстатів, яку вперше досліджував радянський математик Л. В. Канторович, привела до створення лінійного програмування і т.д. І тепер математика розвивається в основному через розв'язування задач.

У навчальному процесі математичні задачі відіграють також важливу роль. По – перше, розв'язуючи задачі, учні вчаться застосовувати набуті теоретичні знання для практичних потреб. Коли б учні на уроках математики вивчали тільки математичні поняття і теореми, а не розглядали, навіщо вони потрібні, користі від такого навчання було б небагато. Тільки розв'язуючи різні задачі, вони ознайомлюються з тим, як саме використовується математика різними спеціалістами. По – друге, розв'язування математичних задач сприяє розвитку їх мислення і просторової уяви. Адже при цьому доводиться аналізувати, зіставляти і т.д. Важко знайти інший матеріал, більш придатний для розвитку мислення і уяви, ніж розв'язування задач. По – третє, розв'язування задач, якщо його добре організувати, сприяє вихованню учнів, особливо виховання волі, наполегливості та інших корисних якостей.

Особливо корисні математичні задачі для активізації мислення учнів, для виявлення їх творчості. Саме з задач починається зацікавленість багатьох учнів математикою.

Пізніше багато відомих вчених наголошували на тому, що в математиці задачі відіграють чи не найважливішу роль. Наприклад, С. І. Шохор – Троцький запропонував навіть спеціальний метод навчання (метод доцільних задач), в якому основну роль відводив розв'язуванню задач.

Ідея навчати учнів через розв'язування задач не втратила свого значення і до теперішнього часу. Принцип навчання через розв'язування задач є

очевидним наслідком із самої природи математики, розв'язування задач – найефективніша форма не тільки для розвитку математичної діяльності учнів, а й для засвоєння знань, навичок, методів і застосувань математики. Не випадково в загальноосвітніх середніх школах приблизно половину всього відведеного навчальним планом часу на математику витрачають на розв'язування задач.

Розділ II. Окремі види текстових задач з математики у 5-му класі та методика їх розв'язування.

2.1. Арифметичний спосіб розв'язування задач.

Прості задачі. Класифікація задач за характером застосування арифметичних дій.

Надзвичайно важливу роль відіграють прості задачі. Уміння їх розв'язувати є фундаментом умінь розв'язувати складені задачі, які є ланцюгами простих. На простих задачах учні ознайомлюються з їх структурою, основними прийомами роботи з ними, формуючи різні математичні поняття, зокрема поняття про арифметичні дії.

Навчити учнів розв'язувати задачі — означає навчити їх розкривати зв'язки між даними і шуканими значеннями величин; на основі чого вибирати, а потім виконувати арифметичні дії. Від того, наскільки добре розуміють учні зміст зв'язків, залежить їхнє уміння розв'язувати прості задачі.

Залежно від цих зв'язків прості задачі поділяють на 4 групи (див. табл. 1).

Таблиця 1.

1 група	2 група	3 група	4 група
Задачі, які розкривають конкретний зміст арифметичних дій (на знаходження суми, остачі, добутку, частки)	Задачі на знаходження невідомого компонента арифметичної дії (на знаходження невідомого доданка, зменшуваного, від'ємника, множника, діленого, дільника)	Задачі на різницеве і кратне порівняння із запитаннями: «На скільки більше (менше)?», «У скільки разів більше (менше)?»	Задачі на збільшення (зменшення) числа на кілька одиниць у прямій і непрякій формі. Задачі на збільшення (зменшення) числа у кілька разів у прямій і непрякій формі

Пропонуємо таблицю простих задач та обернених до них (див. табл. 2).

Таблиця 2.

Вибір дії. 1) Якщо у лінійку було 4 зошити, а в клітинку на 2 зошити більше, то в клітинку було стільки, скільки і в лінійку, та ще 2. Отже, треба до числа 4 додати 2, буде 6. 2) У клітинку зошитів було більше, а більше число знаходимо дією додавання. 3) Щоб збільшити число на кілька одиниць, треба виконати дію додавання	Вибір дії. 1) Задачу розв'язуємо дією віднімання, тому що треба порівняти 2 числа. А для цього треба від більшого числа відняти менше число. 2) Щоб дізнатися, на скільки одне число більше (менше), ніж друге, треба від більшого числа "-" відняти менше, тобто від числа 6 - 4, буде 2	У лінійку - ? У клітинку - 6 з., на 2 з. більше. Вибір дії. 1) Якщо у клітинку 6 зошитів і їх на 2 зошити більше, ніж у лінійку, то в лінійку на 2 зошити менше. А якщо на 2 зошити менше, то їх стільки, скільки і в клітинку, але без 2. Отже, треба від числа 6 - 2, буде 4
Вид задачі. Задача на зменшення числа на кілька одиниць. Лип - 9 д. Дубів - ?, на 3 д. менше. Вибір дії. 1) Якщо лип - 9, а дубів на 3 дерева менше, то дубів стільки, скільки і лип, але без 3. Треба від числа 9 - 3, буде 6. 2) Треба виконати дію віднімання, бо знаходимо число менше від 9 на 3. А це означає, що дубів стільки, скільки і лип, але без 3	Вид задачі. Непряма задача на додавання (знаходження числа за меншим і різницею, що показує, на скільки одиниць дане число менше за шукане). Лип - ? Дубів - 6 д., на 3 д. менше. Вибір дії. 1) Якщо дубів - 6 і це на 3 дерева менше, ніж лип, то лип відповідно буде на 3 дерева більше. А якщо їх на 3 дерева більше, то лип стільки, скільки і дубів, та ще 3. Отже, треба до числа 6 + 3, буде 9	Вид задачі. Задача на різницеве порівняння чисел із запитанням "На скільки менше?" Лип - 9 д. Дубів - 6 д. На скільки менше? Щоб дізнатися, на скільки одне число більше (менше), ніж друге, треба від більшого числа "-" відняти менше, тобто від числа 6 - 4, буде 2

У наведеній таблиці класифікації простих задач за вихідну задачу певної групи бралася найпростіша з них, а потім складалися дві нові задачі, взаємнообернені до неї.

Задача. На льотному полі було 12 літаків. У політ вирушило 2 літаки, а потім ще 3. Скільки літаків залишилося на полі?

Розв'язання

Поясни розв'язання кожним способом:

I спосіб

1) $2+3=5$ (л)

2) $12-5=7$ (л)

II спосіб

1) $12-2=10$ (л)

2) $10-3=7$ (л)

Завдання для самостійного розв'язання

1. 20 кг лимонів розклали в пакети, по 4 кг у кожний. Скільки таких пакетів потрібно взяти? (5 пакетів)

2. Учні їхали на екскурсію двома автобусами. У першому автобусі було 27 учнів, а в другому — на 5 учнів більше. Скільки учнів їхало на екскурсію?
(59 учнів)

3. Після того як Олег купив зошит за 85 к. і ручку за 45 к., у нього залишилося 70 к. Скільки грошей було в Олега спочатку? (2 грн)

4. Тарас і Сергій в саду збирали яблука. Тарас у свій кошик назбирав 37 яблук, а Сергій у свій — 42 яблука. Прийшовши додому, вони висипали яблука до великого кошика, який був порожнім. Скільки яблук у великому кошику?
(79 яблук)

5. За зошит і ручку учень заплатив 1 грн 20 к. Зошит коштує 40 к. Скільки коштує ручка? (80 к.)

6. Пшениці зібрали 285 453 т, що на 9876 т більше, ніж жита. Скільки тонн пшениці та жита зібрали разом? (561030 т)

7. У дівчинки в гардеробі є 6 вишиванок, що на 2 вишиванки більше, ніж у її подружки. Скільки вишиванок у подружки дівчинки? (4 вишиванки)

Задачі на знаходження невідомих компонентів.

Щоб не допустити вироблення в учнів певних штампів у міркуваннях під час розв'язування одного виду задач протягом тривалого часу, необхідно, щоб у процесі роботи над задачами одного виду учні опрацьовували задачі й інших видів, які були розглянуті раніше (див. табл. 3).

Таблиця 3.

Вид задачі. Задача на знаходження остачі (решти). Було — 9 ябл. Віддала — 4 ябл. Залишилось — ? Запам'ятайте, при читанні слів: <i>відтало, вивезли, відлили, відчепили, відрізали, вилили, видали, подарували, з'ли</i> виконуємо дію віднімання. Вибір дії. Якщо 4 яблука віддали, то їх стало менше, а менше число знаходимо дією віднімання	Вид задачі. Задача на знаходження зменшуваного. Було — ? Віддала — 4 ябл. $\square - 4 = 5$ Залишилось — 5 ябл. Вибір дії. 1) За правилом знаходження невідомого зменшуваного. Щоб знайти невідоме зменшуване, треба до різниці $5 +$ від'ємник 4. 2) Знаходження більшого числа за змістом. 3) З чого складається "було"? 4) Треба до числа яблук, що залишилися, повернути ("$+$") ті, що віддала. До числа $5 + 4$, буде 9	Вид задачі. Задача на знаходження від'ємника. Було — 9 ябл. Віддала — ? $9 - \square = 5$ Залишилось — 5 ябл. Вибір дії. 1) За правилом знаходження невідомого від'ємника. Щоб знайти невідомий від'ємник, треба від зменшуваного відняти різницю. 2) Треба від числа яблук, що були у кошику відняти число тих яблук, що залишилися. Отже, від числа $9 - 5$, буде 4
--	---	---

Задача. Школярі зібрали з одного поля 1540 кг. Картоплі, причому 12 школярів зібрали по 75 кг кожний, а всі інші по 80 кг кожний. Скільки всього школярів збирали картоплю?

Розв'язання (з попереднім міркуванням)

I спосіб

1) $75 \cdot 12 = 900$ (кг) – скільки картоплі зібрали 12 школярів;

2) $1540 - 900 = 640$ (кг) – скільки картоплі зібрали ті, хто збирав по 80 кг кожний;

3) $12 + 8 = 20$ (шт) – скільки всього школярів збирали картоплю.

Відповідь: 20 школярів.

II спосіб

Припустимо, що всі школярі збирали по 80 кг картоплі.

1) $80 - 75 = 5$ (кг) – на скільки більше збирав би кожний із школярів;

2) $5 \cdot 12 = 60$ (кг) – на скільки більше картоплі зібрали б усі 12 школярів;

3) $1540 + 60 = 1600$ (кг) – скільки б усього зібрали б картоплі за припущенням;

4) $1600 : 80 = 20$ (шк.) – скільки всього школярів збирали картоплю.

Відповідь: 20 школярів.

III спосіб

Припустимо, що школярів, котрі збирали по 80 кг картоплі кожний було стільки ж, скільки й тих, кожний з яких збирав по 75 кг, тобто 12.

Скільки б усього зібрали б картоплі за припущенням?

1) $(75 + 80) \cdot 12 = 1860$ (кг) – скільки б усього зібрали б картоплі за припущенням;

2) $1860 - 1540 = 320$ (кг) – на скільки більше картоплі зібрали б за припущенням, ніж насправді;

3) $320 : 80 = 4$ (шк.) – скільки школярів зібрали б ці 320 кг;

4) $12 - 4 = 8$ (шк.) – скільки школярів насправді збирали по 80 кг картоплі;

5) $12 + 8 = 20$ (шк.) – скільки всього школярів збирали картоплю.

Відповідь: 20 школярів.

IV спосіб

Припустимо, що картоплю збирали 25 чоловік.

- 1) $25 - 12 = 13$ (шк.) – скільки було б тих, хто збирав по 80 кг картоплі;
- 2) $80 \cdot 13 = 1040$ (кг) – скільки картоплі зібрали б ці 13 школярів;
- 3) $75 \cdot 12 = 900$ (кг) – скільки картоплі зібрали 12 школярів;
- 4) $900 + 1040 = 1940$ (кг) – скільки за припущенням зібрали б картоплі всі учні;
- 5) $1940 - 1540 = 400$ (кг) – на скільки більше картоплі зібрали всі школярі за припущенням, ніж насправді;
- 6) $400 : 80 = 5$ (шк.) – скільки школярів, збираючи по 80 кг, спроможні заготовити таку кількість картоплі;
- 7) $13 - 5 = 8$ (шк.) – скільки школярів насправді збирало по 80 кг картоплі;
- 8) $8 + 12 = 20$ (шк.) – скільки всього школярів збирали картоплю.

Відповідь: 20 школярів.

Розв'язування задач різними способами активізує різні аспекти математичної діяльності учнів.

Завдання для самостійного розв'язання

1. У трьох п'ятих класах навчається 89 учнів. Відомо, що у 5-А і 5-Б класах разом 58 учнів, а у 5-В класі на 3 учні більше, ніж у 5-А. Скільки учнів навчається в кожному класі? (28, 30 і 31 учень)
2. У трьох автопарках усього 427 автомобілів. У першому та другому автопарках разом 311 автомобілів, а в першому та третьому 262 автомобілі. Скільки автомобілів у кожному автопарку? (146 автомобілів)
3. Три білки запаслися на зиму грибами. Перша з них насушила 29 грибів, друга на 3 гриби більше, ніж перша, а третя на 2 гриби більше, ніж друга. Скільки всього грибів насушили білки? (95 грибів)
4. Карлсон впустив з даху багатоповерхового будинку м'ячик, який впав на землю через 3 секунди. За першу секунду м'ячик пролетів 5 м, за другу на 10 м більше, ніж за першу, а за третю на 5 м більше, ніж за дві перші разом. Яка висота будинку? (40 метрів)

5. Карета маркіза Карабаса проїхала бруківкою 38 км, а ґрунтовою дорогою на 19 км менше. Чому дорівнює весь шлях, який проїхав маркіз Карабас? (57 км)

6. На залізничній станції стояло три товарних потяги. У першому потязі було 30 вагонів, у другому на 5 вагонів більше, ніж у першому. Скільки всього вагонів було у трьох потягах, якщо у першому було на 10 вагонів менше, ніж у третьому? (105 вагонів)

7. Телеграфні стовпи розміщені на відстані 40 м один від одного. Яка відстань між п'ятим і сороковим стовпами? (1400 м)

Задачі на знаходження суми та різниці.

Розв'язування арифметичних задач є не тільки важливим засобом формування в учнів математичних понять, запобігання формалізму у їх засвоєнні, а й посилює розвивальний ефект вивчення математики, впливаючи на розвиток математичного мислення учнів і їхнє оволодіння загальними прийомами міркування (див. табл. 4).

Таблиця 4.

<u>Вид задачі. Задача на знаходження суми.</u> Білих – 3 кр. } Чорних – 5 кр. } ? <u>Вибір дії.</u> 1) Усього буде кроликів більше, ніж окремо білих і чорних, тому задача розв'язується дією додавання. 2) Якщо білих було 3 кролики, а чорних – 5 кроликів, то число кроликів дорівнює сумі чисел 3 і 5. Треба до числа 3 + 5, буде 8. 3) Усього кроликів було 3 і 5, а 3 і 5 разом знаходимо дією додавання	<u>Вид задачі. Задача на знаходження I доданка.</u> Білих – ? } Чорних – 5 кр. } 8 кр. □ + 5 = 8 <u>Вибір дії.</u> 1) За правилом знаходження невідомого доданка. 2) 8 кроликів – це кількість білих і чорних кроликів. Якщо чорних – 5 кроликів, то, щоб дізнатися, скільки білих, треба від числа всіх кроликів відняти число чорних кроликів. Від числа 8 – 5, буде 3. 3) 8 кроликів – це кількість білих і чорних кроликів, якщо чорних було 5 кроликів, то решта білі кролики. А щоб знайти решту, треба виконати дію віднімання.	<u>Вид задачі. Задача на знаходження II доданка.</u> Білих – 3 кр. } Чорних – ? } 8 кр. (аналогічно) 3 + □ = 8
--	--	---

Задача № 1. Полунична цукерка коштує 10 к., а сливова на 5 к. дешевше. Скільки коштує сливова цукерка?

Розв'язання

$$10 - 5 = 5 \text{ (к.)}$$

Відповідь: 5 к. коштує сливова цукерка.

Задача № 2. Полунична цукерка коштує 10 к., а бублик на 5 к. дорожчий. Скільки коштує бублик?

Розв'язання

$$10 + 5 = 15 \text{ (к.)}$$

Відповідь: 15 к. коштує бублик.

Висновок: перша задача на зменшення числа на кілька одиниць, а друга — на збільшення числа на кілька одиниць.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Маса слона дорівнює 7 т 230 кг, що на 6 т 560 кг більше від маси жирафи, а маса жирафи на 2 т 900 кг менша від маси носорога. Яка маса жирафи і яка маса носорога? (3 т 570 кг)

2. Маса кроля 4 кг 400 г, а маса зайця 3 кг 850 г. На скільки грамів маса кроля більша від маси зайця? (на 1050 г)

3. Учень мав 4 грн. Першого дня він витратив 1 грн. 60 к., другого — 90 к. Скільки грошей залишилося в учня? (1 грн 50 к.)

4. Мама купила 56 пташенят. Серед них були курчата, каченята і гусенята. Курчат і гусенят разом було 42, а каченят на 4 менше, ніж гусенят. Скільки було курчат, каченят і гусенят окремо? (32; 14; 10)

5. Земельну ділянку трикутної форми потрібно обгородити дротом. Скільки потрібно дроту, якщо одна сторона ділянки дорівнює 45 м, друга на 12 м довша за першу, а третя на 7 м коротша за другу? (1522 м)

6. У місті А проживає 359 126 жителів, що на 15 139 жителів більше, ніж у місті Н. Скільки людей проживає в обох містах разом? (703 113 людей)

7. У Михайлика 6 зошитів у клітинку зеленого кольору і 4 зошити в лінійку синього кольору. На скільки більше зошитів у клітинку, ніж у лінійку у хлопчика? (на 2 зош.)

8. На одній полиці є 32 книжки, а на іншій — на 14 книжок менше. Скільки книжок на обох полицях? (50 кн.)

9. На першому винограднику росте 4120 кущів винограду, що на 430 кущів більше, ніж на другому. Скільки кущів винограду росте на другому винограднику? (4550 кущів)

2.2. Задачі на обчислення тривалості подій

Задачі на обчислення часу в межах доби.

Час – одна з найважливіших для вивчення величин. Часові уявлення розвиваються повільно, в процесі тривалих спостережень, нагромадження життєвого досвіду, вивчення інших величин. Доба – проміжок часу, протягом якого Земля робить повний оберт навколо своєї осі. Доба ділиться на 24 рівні частини – години. Доба містить 24 години. Підрахунок доби починається опівночі.

Формуючи уявлення про добу спираємося на близькі дітям спостереження: від початку занять сьогодні до початку занять завтра пройде одна доба. Доба – це ранок, день, вечір, ніч.

При цьому важливо уточнити уявлення, які пов'язані з термінами “вчора”, “позавчора”, “завтра”, “сьогодні”, “післязавтра”. Пропонуємо дітям розповісти, що вони робили вчора, сьогодні, що збираються робити завтра, який сьогодні день тижня, яке число, яке число буде завтра, яке було вчора.

Якщо в задачі числове значення подається з вказівкою про частину доби, то обчислення варто практикувати двома способами.

Задача № 1. На шкільному городі учні почали копати картоплю об 11 год 25 хв, а закінчили працювати о 1 год 40 хв дня. Скільки часу учні копали картоплю?

I спосіб

$$12 \text{ год} - 11 \text{ год } 25 \text{ хв} = 35 \text{ хв}; \quad 35 \text{ хв} + 1 \text{ год } 40 \text{ хв} = 2 \text{ год } 15 \text{ хв}$$

II спосіб

$$1 \text{ год } 40 \text{ хв} \text{ дня} \text{ — це } 13 \text{ год } 40 \text{ хв};$$

$$13 \text{ год } 40 \text{ хв} - 11 \text{ год } 25 \text{ хв} = 2 \text{ год } 15 \text{ хв}$$

Задача № 2. Перерва розпочалася о 10 год 10 хв і закінчилась о 10 год 30 хв. Скільки часу тривала перерва?

$$10 \text{ год } 30 \text{ хв} - 10 \text{ год } 10 \text{ хв} = 20 \text{ хв}$$

Задача № 3. Перерва розпочалась о 9 год 15 хв і тривала 10 хв. Коли закінчилась перерва?

$$9 \text{ год } 15 \text{ хв} + 10 \text{ хв} = 9 \text{ год } 25 \text{ хв}$$

Задача № 4. Перерва тривала 30 хв і закінчилась о 10 год 35 хв. Коли розпочалась перерва?

$$10 \text{ год } 35 \text{ хв} - 30 \text{ хв} = 10 \text{ год } 5 \text{ хв}$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Перерва розпочалася о 9 год 15 хв і тривала 10 хв. Коли закінчилась перерва? (9 год 25 хв)

2. Перерва тривала 30 хв і закінчилась о 10 год 35 хв. Коли розпочалась перерва? (10 год 5 хв)

3. Перерва розпочалася о 10 год 10 хв, а закінчилась о 10 год 30 хв. Скільки часу тривала перерва? (20 хв)

4. Сонце зійшло о 7 год 55 хв ранку, зайшло о 4 год 16 хв вечора. Визнач тривалість дня. (8 год 21 хв)

5. Сонце зійшло о 6 год 35 хв. Тривалість дня 11 год 10 хв. Визнач час заходу Сонця. (17 год 45 хв)

6. Тривалість дня 16 год 17 хв. Сонце зайшло о 9 год 5 хв вечора. Визнач час сходу Сонця. (4 год 48 хв)

7. Магазин відкривається о 8 год ранку, а закривається о 9 год вечора. Скільки годин працює магазин, якщо обідня перерва триває одну годину? (12 год)

Задачі на обчислення в межах доби, місяця, року.

Століття – це проміжок часу, який містить 100 років.

Рік – це проміжок часу, протягом якого Земля робить повний оберт навколо Сонця. Рік містить 365 та $\frac{1}{4}$ доби. Тому домовилися вважати 3 роки по 365 діб кожний, а четвертий – по 366 діб і його називати високосним. За час, який Земля робить повний оберт навколо Сонця, Місяць робить 12 повних обертів навколо Землі. Тому рік поділяють на 12 проміжків – місяців. Рік містить 12 місяців.

Місяць – це проміжок часу, протягом якого Місяць робить повний оберт навколо Землі та навколо своєї осі. Період руху Місяця навколо своєї осі та період руху Місяця навколо Землі співпадають, тому ми бачимо Місяць весь час з однієї сторони. Місяць приблизно дорівнює 30,4 діб. Тому місяць містить від 28 до 31 доби.

Працюючи з табель-календарем звертаємо увагу на число днів в кожному місяці, виписуємо та запам'ятовуємо місяці, в яких 30 днів (таких місяців всього чотири: квітень, червень, вересень, листопад).

Крім того, формуючи уявлення про рік, спираємося на близькі дітям спостереження: від святкування дня народження до наступного святкування пройде один рік, від святкування Нового року до наступного святкування пройде один рік.

Високосні роки: 2012, 2016, 2020, 2024, ... Високосні роки повторюються через кожні три роки, кожний четвертий рік – високосний. Зазначимо, що число, яке відповідає високосному року ділиться на 4 без остачі. У високосному році лютий містить 29 діб; в простому році – 28 діб.

Розв'язування задач у межах року здійснюється на основі табеля-календаря, а також див. табл. 5.

Таблиця 5.

Одиниці часу				
• 12	• 28(29);30;31	• 24	• 60	• 60
1 рік -----	1 міс -----	1 доба -----	1 год -----	1 хв -----
: 12	: 28(29);30;31	: 24	: 60	: 60
	: 365; 366			

Задача № 1. Яра пшениця досягає за 90 днів. Пшеницю посіяли на полі 12 травня. Коли треба буде збирати врожай з цього поля?

Розв'язання

У травні: $31 - 12 = 19$ (днів);

У червні і в липні: $30 + 31 = 61$ (день);

Усього за травень – липень минуло: $61 + 19 = 80$ (днів). Залишилося у серпні 10 днів.

Відповідь: збирати врожай можна починати 11 серпня.

Задача № 2. Учні виїхали на екскурсію до Харкова 7 вересня о 10 год ранку, а повернулися 15 вересня о 8 год вечора. Скільки часу вони пробули на екскурсії?

Розв'язання

Екскурсія розпочалася, коли минуло 6 діб 10 год від початку вересня.

Екскурсія закінчилася, коли минуло 14 діб 20 год від початку вересня.

$14 \text{ діб } 20 \text{ год} - 6 \text{ діб } 10 \text{ год} = 8 \text{ діб } 10 \text{ год}$

Відповідь: 8 діб 10 год

Завдання для самостійного розв'язання

1. З пункту А поїзд вийшов 22 травня о 6 год вечора і прибув у пункт В 25 травня о 9 год ранку. Скільки часу поїзд був у дорозі? (2 доби 15 год)

2. Теплохід ішов від Миколаєва до Одеси. Коли він пробув у дорозі 2 год 45 хв, йому залишилося йти на 13 год 10 хв більше, ніж він ішов. За який час теплохід має пройти шлях від Миколаєва до Одеси? (15 год 55 хв)

3. Урок розпочався о 8.30, тривав 45 хв. Коли закінчився урок? (9 год 15 хв)

4. Запиши у секундах 5 хв. (Попереднє міркування: у одній хвилині міститься 60 секунд, а в 5 хвилинах у 5 разів більше, тобто $60 \cdot 5 = 300$ (с))

5. Запиши у хвилинах 180 с. (Попереднє міркування: 60 с – це 1 хвилина, а у 180 с – стільки хвилин, скільки разів по 60 вміститься у числі 180, тобто $180:60 = 3$ (хв))

6. Запиши у секундах 3 хв 50 с. (*Попереднє міркування*: 3 хвилини, це $60 \cdot 3 = 180$ с, та йде 50 с, маємо $180 + 50 = 230$ (с))

2.3. Задачі на рух

Задачі на одночасний рух в різних напрямках

Особливий тип задач, які містять опис процесу руху двох тіл, які переміщуються в одному або в різних напрямках, називають задачами на рух.

Задачі на рух містять пропорційні величини: відстань, швидкість та час. Кожна з цих задач має три види в залежності від даних та шуканого:

I вид – задачі на знаходження відстані: дано швидкості обох тіл та час їх спільного руху, треба знайти відстань;

II вид – задачі на знаходження швидкості: дано відстані, які подолані обома тілами, відомий час їх спільного руху та швидкість одного з тіл, треба знайти швидкість другого тіла;

III вид – задачі на знаходження часу: дано значення відстані та швидкостей обох тіл, треба визначити час їх спільного руху.

Рух в різних напрямках включає два види руху: рух назустріч та рух в протилежних напрямках.

Актуалізація знань учнів про пропорційні величини: відстань, швидкість та час здійснюється під час розв'язування простих та складених задач.

Задача. Машина їхала 3 год зі швидкістю $100 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, і 4 год зі швидкістю $120 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яку відстань подолала машина? (Це задача на знаходження суми двох добутків.)

Розв'язання

Короткий запис складаємо (як звичайно) у формі схеми (див. схему 1):

Схема 1.

	S(км)	V(км/год)	t (год)
I	?	$100 \frac{\text{км}}{\text{год}}$	3 год
II	?	$120 \frac{\text{км}}{\text{год}}$	4 год

Крім того до цієї задачі корисно зробити креслення (див. рис.1):

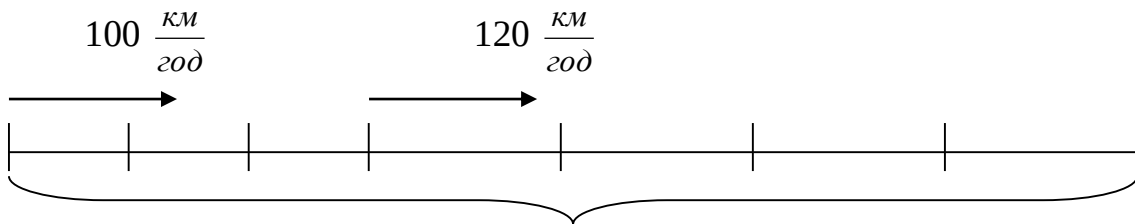


Рис. 1.

Запитання для учнів

- Що означає число 100? (Число 100 означає швидкість автомобіля першого разу. $100 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ означає, що автомобіль за кожну годину проїздив по 100 км)

- Що означає число 3? (Число 3 означає час руху автомобіля)

Отже, автомобіль за першу годину подолав 100 км (покажемо це відрізком), за другу годину подолав 100 км, за третю годину – 100 км.

- Що означає число 120? (Число 120 означає швидкість автомобіля другого разу. $120 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ означає, що автомобіль за кожну годину проїздив по 120 км)

- Що означає число 4? (Число 4 означає час руху автомобіля другого разу)

Отже, автомобіль за першу (з 4-х годин) проїхав 120 км (покажемо це відрізком), за другу годину – 120 км, за третю годину – 120 км, за четверту годину – 120 км.

- Яке число є шуканим? (Шуканою є загальна відстань, яку подолав автомобіль за весь час руху)

- Як це показати на кресленні? (Фігурною дужкою)

Завдання для самостійного розв'язання

1. Літак за 3 години пролетів 2700 км. Яку відстань він пролетить за 6 годин, якщо летітиме з такою самою швидкістю? (Це задача на знаходження четвертого пропорційного, яка розв'язується двома способами: I – способом наведення до одиниці, II – способом відношень).

2. Слон пробігає 360 м за 30 с, а швидкість лева на $28 \frac{м}{с}$ більша за швидкість слона. Яку відстань пробіжить лев за 9 с? (Це ускладнена задача на знаходження четвертого пропорційного – задача, пов'язана з одиничною нормою.)

3. З одного міста одночасно виїхали два автомобілі. Швидкість одного 90 км/год, а другого 75 км /год. Яка відстань буде між ними через 5 годин, якщо вони рухалися:

- а) в різних напрямках (825 км);
- б) в одному напрямку? (75 км)

Одночасний рух назустріч та в протилежних напрямках

Таблиця 6.

	<u>назустріч</u>
При одночасному русі	<u>в...протилежних...напрямах :</u>
	<u>зменшується</u>
1. Відстань між тілами весь час	<u>збільшується</u>
2. Весь шлях складається зі шляху, який подолано першим тілом та шляху, який подолало друге тіло.	
3. Кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно і закінчили рухатися одночасно.	

Завдання для самостійного розв'язання (див. табл. 6)

1. Із двох міст одночасно назустріч вийшли два пішоходи і зустрілися через 3 години. Скільки часу рухався кожний пішохід? (3 години)

2. З села в місто вийшов пішохід і в цей же час із міста назустріч йому виїхав мотоцикліст, який зустрів пішохода через 40 хвилин. Скільки часу рухався до зустрічі пішохід? (40 хвилин)

3. Два пішохода вийшли одночасно в протилежних напрямках і закінчили свій рух через 2 години. Скільки часу рухався кожний пішохід? (2 год)

4. З двох міст вирушили на зустріч один одному два потяги і через 18 год зустрілися. Визначити їх швидкість, якщо швидкість одного з них на 10 км/год більша, ніж швидкість другого, а відстань між містами 1620 км. (90 км/год; 100 км/год).

5. Дві черепахи одночасно виринули назустріч одна одній. Швидкість першої черепахи $9 \frac{\text{дм}}{\text{хв}}$, а швидкість другої черепахи $5 \frac{\text{дм}}{\text{хв}}$. Як змінюється відстань між черепахами? На скільки дм зменшується відстань між черепахами за кожну секунду? (на 0,06 дм)

6. Два катера відійшли від пристані одночасно в протилежних напрямках. Швидкість першого катера $25 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а другого – $34 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Як змінюється відстань між катерами. На скільки кілометрів збільшується відстань між катерами за кожну годину? (59 км)

7. Два лижники вийшли з одного селища одночасно в протилежних напрямках. Знайди швидкість другого лижника, якщо відома швидкість першого лижника $5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ і відомо, що вони віддаляються за кожну годину на 12 км. (7 км)

8. З двох міст, відстань між якими 500 км, виїхали назустріч один одному автомобіль і мотоцикл, які зустрілися через 5 годин. Швидкість руху автомобіля у 3 рази більша, ніж швидкість руху мотоцикла. Яка швидкість руху автомобіля і мотоцикла? (300 км/год; 100 км/год).

Задачі на знаходження відстані та швидкості

Таблиця 7.

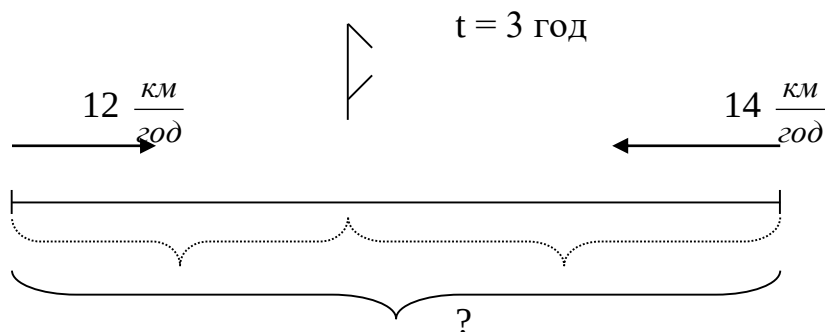
Якщо два тіла рухаються одночасно на зустріч одне одному або в протилежних напрямках, то **відстань** між ними весь час **змінюється на одне й те саме число одиниць**, яке дорівнює **сумі відстаней**, що долає кожне тіло за одиницю часу

Задача. Два лижника вийшли одночасно назустріч один одному з двох селищ і зустрілися через 3 год. Перший лижник йшов зі швидкістю $12 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а інший – $14 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яка відстань між селищами? (див. схему 2, корист. табл. 7)

Запитання для учнів

- Про що йде мова в задачі? (В задачі йде мова про рух двох лижників. Тому короткий запис задачі буде в формі креслення)
- Що відомо про час початку руху? (Лижники почали рухатися одночасно)
- Як рухаються лижники? (Лижники рухаються назустріч один одному)
- Зробіть висновки (відстань між тілами весь час зменшується; весь шлях складається зі шляху, який подолано першим тілом та шляху, який подолало друге тіло; кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно і закінчили рухатися одночасно)

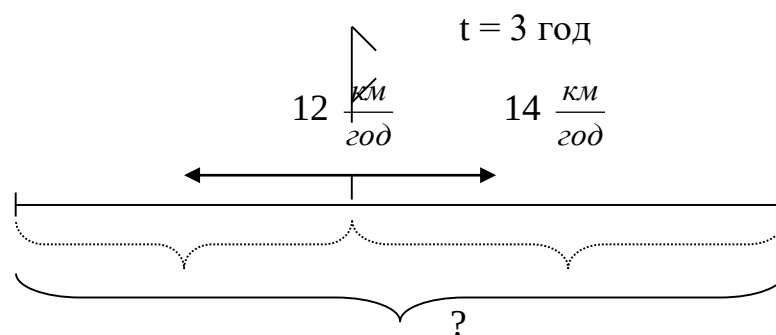
Схема 2.



- За коротким записом поясніть числа задачі. (Число 12 позначає швидкість першого лижника. $12 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ означає, що перший лижник за кожную годину проходив по 12 км. Число 14 означає швидкість другого лижника. $14 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ означає, що за кожную годину другий лижник пробігає по 14 км. Число 3 означає час, який рухався кожний лижник)
- Яке запитання задачі? Що можна сказати про шукану величину?
- Як шукана величина пов'язана з іншими величинами?
- Яке запитання задачі? (Яка відстань між селами?)

- Як ми його пере формулювали? (Яку відстань пройшли обидва лижники разом?)
- Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі?
- Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі?
- Чи можна відразу відповісти на запитання задачі?
- Що треба знати, щоб дізнатися про відстань, яку пройшов перший лижник?
- Якою арифметичною дією відповімо на це запитання?
- Чи можна тепер відповісти на запитання задачі?
- Що треба знати, щоб про це дізнатися?
- Зробіть відповідні зміни у кресленні, якщо рух лижників буде в протилежних напрямках (див. схему 3)

Схема 3.



Запитання для учнів

- Що відомо про час початку руху? (Лижники почали рухатися одночасно)
- Як рухаються лижники? (Лижники рухаються в протилежних напрямках)
- Зробіть висновки (відстань між тілами весь час збільшується; весь шлях складається зі шляху, який подолано першим тілом та шляху, який подолало друге тіло; кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно і закінчили рухатися одночасно?)

Далі робота йде аналогічно попередній задачі:

- Складіть план розв'язування задачі. (Першою дією дізнаємося про відстань, яку пройшов перший лижник. Другою дією дізнаємося про відстань,

яку пройшов другий лижник. Третьою дією дізнаємося про відстань, яку пройшли разом обидва лижники і відповімо на запитання задачі)

- Запишіть розв'язання по діях з поясненням.

Розв'язання

1) $12 \cdot 3 = 36$ (км) – відстань, яку пройшов перший лижник;

2) $14 \cdot 3 = 42$ (км) – відстань, яку пройшов другий лижник;

3) $36 + 42 = 78$ (км) – відстань, яку пройшли обидва лижники разом;
відстань між лижниками через 3 год.

Відповідь: 78 км – відстань між лижниками через 3 год після початку руху.

- Порівняйте обидві задачі. Що в них спільного? (Діючи особи – лижники. Однакові значення величин: швидкостей та часу. В обох задачах вимагається знайти відстань)

- Чим відрізняються ці задачі? (В першій задачі лижники вирушили одночасно назустріч один одному, а в другий – одночасно в протилежних напрямках)

- Порівняйте розв'язання обох задач. Що цікавого ви помітили? (Обидві задачі мають однакові розв'язання.)

- Узагальніть план розв'язування таких задач.

Якщо в задачі треба знайти швидкість при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямках, то її розв'язують за планом (див. табл. 8):

Таблиця 8.

Першою дією дізнаються про відстань, яку пройшов перший об'єкт.
Другою дією дізнаються про відстань, яку пройшов другий об'єкт.
Третьою дією дізнаються про швидкість.

Завдання для самостійного розв'язання (див. табл. 8)

1. Два літаки вилетіли одночасно назустріч один одному з двох міст, відстань між якими 240 км, і зустрілися на проміжному аеродромі через 4

години. Яка швидкість другого літака, якщо швидкість першого була 350 км/год? (60 км/год)

2. Штучний супутник Землі пролітає за 12 с відстань 96 км. З якою швидкістю летить супутник? (8 км/год)

3. Першу ділянку шляху автомашина пройшла за 2 год, а другу за 3 год. Довжина двох ділянок шляху разом 310 км. З якою швидкістю їхала автомашина на кожній з цих ділянок шляху, якщо відомо, що швидкість на другій ділянці шляху на 20 км/год більша за швидкість на першій ділянці? (175 км/год)

Формула шляху

Якщо в задачі треба знайти відстань при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямках, то її розв'язують за планом (див. табл. 9):

Таблиця 9.

Першою дією дізнаються про відстань, яку пройшов перший об'єкт.
Другою дією дізнаються про відстань, яку пройшов другий об'єкт.
Третьою дією дізнаються про відстань, яку пройшли обидва об'єкти.

Задача. З двох селищ одночасно назустріч один одному вирушили хлопчик і дівчинка. Швидкість хлопчика $5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість дівчинки $4 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яка відстань між селищами, якщо вони зустрілися через 3 години після початку руху?

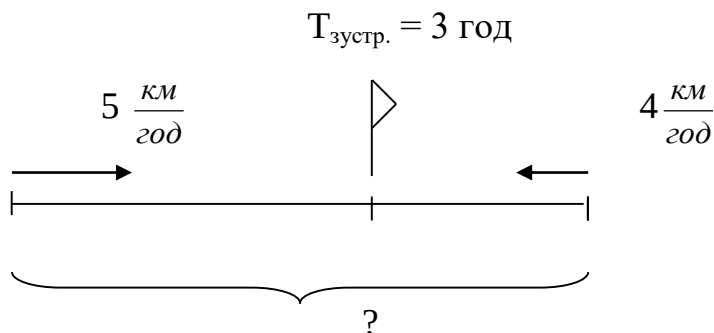
Працюємо над задачею за пам'яткою:

- Про що йде мова в задачі? (Про рух хлопчика і дівчинки)
- Що відомо про час початку руху? (Вони почали рухатися одночасно)
- Як рухаються тіла? (Хлопчик і дівчинка рухаються назустріч один одному).

Покажемо це стрілочками на кресленні) (див. схему 4)

- Зробіть висновки (відстань між тілами весь час зменшується; весь шлях складається зі шляху, який подолано першим тілом та шляху, який подолало друге тіло; кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно і закінчили рухатися одночасно)

Схема 4.



- За коротким записом поясніть числа задачі. (Число 5 означає швидкість хлопчика. $5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ — це означає, що хлопчик за кожну годину проходить 5 км.

Число 4 означає швидкість дівчинки. $4 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ — це означає, що дівчинка за кожну годину проходила по 4 км. Число 3 означає час зустрічі дітей, а також число 3 означає час руху хлопчика і число 3 означає час руху дівчинки. В задачі треба дізнатися про відстань між селищами. Відстань між селищами дорівнює усій відстані, яку пройшли діти. Вся відстань складається з відстані, яку пройшов хлопчик та відстані, яку пройшла дівчинка.)

- Складіть план розв'язування задачі. (Першою дією дізнаються про відстань, яку пройшов хлопчик. Другою дією дізнаються про відстань, яку пройшла дівчинка. Третьою дією знайдемо відстань, яку пройшли хлопчик і дівчинка разом, тобто знайдемо відстань між селищами.)

- Запишіть розв'язання по діях з поясненням.

Розв'язання

- 1) $5 \cdot 3 = 15$ (км) — відстань, яку подолав хлопчик;
- 2) $4 \cdot 3 = 12$ (км) — відстань, яку подолала дівчинка;
- 3) $15 + 12 = 27$ (км) — відстань, яку подолали разом хлопчик і дівчинка.

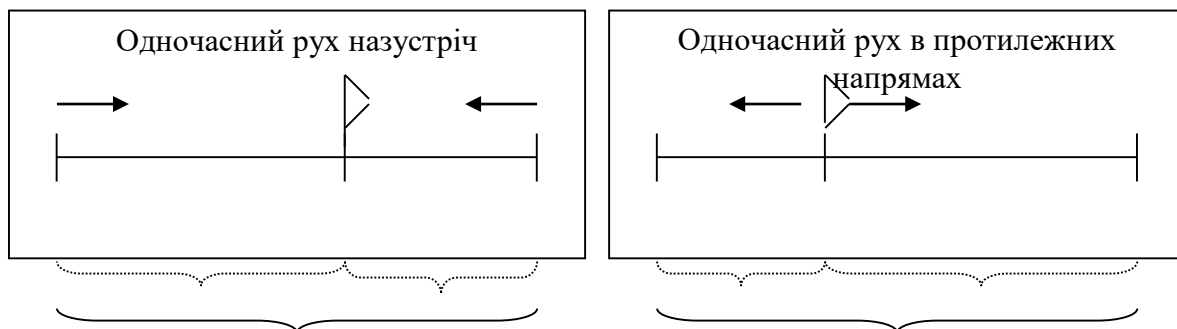
Відповідь: 27 км відстань між селищами.

Завдання для самостійного розв'язання

1. З одного селища одночасно в протилежних напрямках вирушили хлопчик і дівчинка. Швидкість хлопчика $5 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, а швидкість дівчинки $4 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Яка відстань буде між дітьми через 3 години після початку руху? (27 км/год)
2. З одного селища одночасно в протилежних напрямках вирушили хлопчик і дівчинка. Через 3 години відстань між ними складала 27 км. Яка швидкість хлопчика, якщо швидкість дівчинки $4 \frac{\text{км}}{\text{год}}$? (5 км/год)
3. З двох селищ, відстань між якими 27 км, одночасно назустріч один одному вирушили хлопчик і дівчинка і зустрілися через 3 години. Яка швидкість хлопчика, якщо швидкість дівчинки $4 \frac{\text{км}}{\text{год}}$? (5 км/год)
4. Два автомобілі виїхали одночасно назустріч один одному з двох міст, відстань між якими 628 км. Через скільки годин вони зустрілися, якщо швидкість першого автомобіля 72 км/год, а другого – 85 км/год? (4 год)
5. Поїзд пройшов відстань 336 км за 4 год, автобус 126 км – за 3 год. У скільки разів швидкість автобуса менша від швидкості поїзда? (у 2 рази)
6. З двох селищ, відстань між яким 28 км, одночасно назустріч один одному вийшли два хлопчики і зустрілися через 4 год. Швидкість першого хлопчика 4 км/год. Яка швидкість другого хлопчика? (3 км/год)

Рух з одночасним виходом. Рух у водоймах.

Схема 5.



У завданнях «на рух у водоймах» присутні швидкості: власна швидкість (V_B), швидкість за течією ($V_{\text{за теч.}}$), швидкість проти течії ($V_{\text{пр. теч.}}$), Швидкість течії ($V_{\text{теч.}}$). Необхідно відзначити, що власна швидкість — це швидкість в стоячій воді. Щоб знайти швидкість за течією, треба до швидкості течії додати власну. Для того щоб знайти швидкість проти течії, треба від власної швидкості відняти швидкість течії.

Задача. Швидкість човна за течією 21,8 км/год, а проти течії 17,2 км/год. Знайти власну швидкість човна і швидкість течії річки.

Розв'язання

$$V_{\text{теч}} = (21,8 - 17,2) : 2 = 4,6 : 2 = 2,3 \text{ (км/год);}$$

$$V_B = V_{\text{пр. теч.}} + V_{\text{теч}} = 17,2 + 2,3 = 19,5 \text{ (км/год).}$$

$$\text{Відповідь: } V_B = 19,5 \text{ (км / ч), } V_{\text{теч}} = 2,3 \text{ (км/год).}$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Відстань між двома портами 700 км. Одночасно назустріч один одному з них вийшли два теплоходи і зустрілися через 5 год. Яка швидкість кожного теплохода, якщо швидкість одного на 6 км/год більша за іншого? (140 км/год; 146 км/год)

2. Відстань між двома містами автомобіль подолав за 3 години зі швидкістю 65 км/год. За скільки годин подолає цю відстань мотоцикліст, який їхатиме зі швидкістю 39 км/год? (5 год)

3. З двох міст, відстань між якими 1000 км, вирушили товарний і пасажирський потяги, які зустрілися через 5 годин. Швидкість пасажирського потяга у 3 рази більша, ніж товарного. З якою швидкістю рухався кожний потяг? (200 км/год; 600 км/год)

4. Швидкість течії річки 2,2 км/год. Власна швидкість катера 15,3 км/год. Який шлях пройшов катер, якщо за течією він ішов 3 год, а проти течії 4 год? (104,9 км)

5. Власна швидкість теплохода (в стоячій воді) 21,6 км/год. Швидкість течії річки 4,9 км/год. Яка швидкість теплохода за течією і проти течії річки? (26,5 км/год; 16,7 км/год)

6. Теплохід ішов по озеру 3 год зі швидкістю 27 км/год потім 4 години по річці, яка впадає в це озеро. Знайдіть відстань, яку пройшов теплохід за ці 7 год. Якщо швидкість течії річки 3 км/год? (93 км)

7. Швидкість катера проти течії 16,5 км/год. Знайдіть швидкість катера за течією і його власну швидкість. Якщо швидкість течії річки 4,7 км/год. (21,2 км/год; 25,9 км/год).

2.4. Задачі на числові залежності

Задачі на знаходження чисел за їх сумою та різницею

Таблиця 10.

Вид задачі. Задача на знаходження добутку як суми однакових доданків. 1 к. — 8 ол. 5 к. — ? Вибір дії. 1) По 8 олівців треба взяти множитком (доданком) стільки разів, скільки було коробок. Отже, виконуємо дію множення. 2) По 8 олівців взяти 5 разів ($8 \cdot 5 = 40$ ол.)	Вид задачі. Задача на знаходження першого множника, або задача на ділення на рівні частини. 1 к. — ? 5 к. — 40 ол. Якщо невідоме число помножити на 5, буде 40. $\square \cdot 5 = 40$. Знаходимо невідомий перший множник. Вибір дії. 1) За правилом знаходження невідомого множника. Щоб знайти невідомий множник, треба добуток поділити на відомий множник. 2) 40 олівців треба поділити на 5 рівних частин, бо було п'ять однакових коробок. В одній коробці буде 8 олівців	Вид задачі. Задача на знаходження другого множника, або задача на ділення на вміщення. 1 к. — 8 ол. ? — 40 ол. Якщо 8 помножити на невідоме число, то буде 40. ($8 \cdot \square = 40$) Знаходимо невідомий другий множник. Вибір дії. 1) За правилом знаходження невідомого множника. Щоб знайти невідомий множник, треба добуток поділити на відомий множник. 2) Скільки треба коробок, щоб 40 олівців розкласти по 8 олівців у кожну. Скільки разів по 8 олівців вміститься в числі 40, стільки і буде коробок. Треба виконати дію ділення
Вид задачі. Задача на ділення на рівні частини (на знаходження частки). У 9 в. — 27 м В 1 в. — ? Вибір дії. 27 м треба поділити на стільки рівних частин, скільки було однакових відрізків, або це частка від ділення одного числа на друге	Вид задачі. Задача на знаходження невідомого діленого. У 9 в. — ? В 1 в. — 3 м $\square : 9 = 3$ Вибір дії. 1) За правилом знаходження невідомого діленого, щоб знайти невідоме ділене, треба частку помножити на дільник. 2) По 3 м треба взяти стільки разів, скільки було однакових відрізків, тобто по 3 м взяти 9 разів	Вид задачі. Задача на знаходження невідомого дільника (на ділення на вміщення). ? — 27 м $27 : \square = 3$ 1 в. — 3 м Вибір дії. Як 3 м, так і відрізок, ще 3 м — ще відрізок. Відрізків буде стільки, скільки разів по 3 м міститься у числі 27, а для цього треба виконати дію ділення

Завдання для самостійного розв'язання (див. табл. 10)

1. Сума двох чисел дорівнює 548. Знайти ці числа, якщо друге число більше від першого на 6. Знайти добуток і дві частки цих чисел. Порівняйте ці дві частки. ($271 \cdot 276 = 74796$; $0,981 < 1,018$)

2. Різниця двох чисел дорівнює 792. Знайти ці числа, якщо друге число у 2 рази більше, ніж перше. Знайти добуток і дві частки цих чисел. Порівняйте ці дві частки. ($1584 \cdot 792 = 1254528$; $0,5 < 2$)

3. Різниця двох чисел дорівнює 972. Знайти ці числа, якщо їх відношення 1:2.(972 і 1944)

4. 4 кг м'яса коштують 312 грн. Чи вистачить 450 грн для 5,25 кг м'яса? (так)

5. Сума двох чисел дорівнює 80. Різниця цих чисел 40. Знайти добуток і дві частки цих чисел. Знайти суму двох часток та різницю між двома частками цих чисел. (3,333; 2,667)

6. Сума двох чисел дорівнює 808. Знайти ці числа, якщо друге число більше від першого на 9. Знайти добуток і дві частки цих чисел. Порівняйте ці дві частки. ($399,5 \cdot 408,5 = 163195,75$; $0,977 < 1$)

7. Різниця двох чисел дорівнює 594. Знайти ці числа, якщо друге число у 2 рази більше, ніж перше. Знайти добуток і дві частки цих чисел. Порівняйте ці дві частки. ($1188 \cdot 594 = 705672$; $1188:594=2$; $594:1188=0,5$; $0,5 < 2$)

8. Різниця двох чисел дорівнює 909. Знайти ці числа, якщо їх відношення 4:5. (3636; 4545)

9. 4 кг м'яса коштують 308 грн. Чи вистачить 440 грн для 5,35 кг м'яса? (так)

10. Сума двох чисел дорівнює 90. Різниця цих чисел 50. Знайти добуток і дві частки цих чисел. Знайти суму двох часток та різницю між двома частками цих чисел. (добуток – 1200; $0,3 < 3$; сума – 3,3; різниця – 2,7)

11. Сума двох чисел дорівнює 198. Знайти ці числа, якщо друге число більше від першого на 3. Знайти добуток і дві частки цих чисел. Порівняйте ці дві частки. ($0,97 < 1$; добуток – 9798,75).

Задачі на числові залежності

Таблиця 11.

Вид задачі. Задача на збільшення числа у кілька разів. Оля – 5 сн. Таня – ?, у 3 р. більше Вибір дії. Треба знайти більше число, ніж 5 у 3 рази, а більше число у кілька разів знаходимо дією множення	Вид задачі. Задача на кратне порівняння із запитанням "У скільки разів більше?" Оля – 5 сн. Таня – 15 сн. У скільки разів більше? Вибір дії. Щоб дізнатися, у скільки разів одне число більше (менше) за інше, треба більше число поділити на менше	Вид задачі. Непряма задача на ділення (знаходження меншого числа за більшим і відношенням, що показує, у скільки разів дане число більше шуканого). Оля – ? Таня – 15 сн., у 3 рази більше Вибір дії. Якщо Таня вирізала 15 сніжинок і це у 3 рази більше, ніж Оля, то Оля вирізала їх у 3 рази менше, ніж Таня. Треба знайти число, менше у 3 рази, тому виконуємо дію ділення
Вид задачі. Задача на зменшення числа у кілька разів. Юля – 27 ст. Юра – ?, у 3 рази менше Вибір дії. Щоб знайти число, менше в кілька разів, треба виконати дію ділення	Вид задачі. Непряма задача на множення (задача на знаходження більшого числа за меншим і відношенням, яке показує, у скільки разів дане число менше шуканого). Юля – ? Юра – 9 ст., у 3 рази менше Вибір дії. Це задача на збільшення числа у кілька разів у непрямої формі. Якщо Юра прочитав 9 сторінок і це у 3 рази менше, ніж Юля, то Юля прочитала у 3 рази більше, а більше число в кілька разів знаходимо дією множенням	Вид задачі. Задача на кратне порівняння із запитанням: "У скільки разів менше?" Юля – 27 ст. Юра – 9 ст. У скільки разів менше? Вибір дії. Щоб дізнатися, у скільки разів одне число більше (менше) за інше, треба більше число поділити на менше
Вид задачі. Задача на знаходження частини числа. Відмінників – ?, $\frac{1}{3}$ усіх учнів. Всього – 27 учн. Вибір дії. Щоб знайти частину числа, треба число поділити на кількість рівних частин	Вид задачі. Задача на знаходження числа за його частиною. Відмінників – 9 учн., це $\frac{1}{3}$ усіх учнів. Всього – ? Вибір дії. Щоб знайти число за його частиною, треба число помножити на кількість рівних частин	Вид задачі. Задача на знаходження відношень двох чисел. Відмінників – 9 учн. Всього – 27 учн. Яку частину учнів становлять відмінники? Вибір дії. Виконуємо дію ділення

Завдання для самостійного розв'язання (див. табл. 11)

- Сума двох чисел дорівнює 416. Знайти ці числа, якщо друге число більше від першого на 2. Знайти добуток і дві частки цих чисел. Порівняйте ці дві частки. ($207 \cdot 209 = 43263$; $0,99 < 1$)
- Різниця двох чисел дорівнює 297. Знайти ці числа, якщо друге число у 2 рази більше, ніж перше. Знайти добуток і дві частки цих чисел. Порівняйте ці дві частки. (добуток – 176418; $0,5 < 2$)
- Різниця двох чисел дорівнює 189. Знайти ці числа, якщо їх відношення 5:4. (945 і 756)
- 4 кг м'яса коштують 332 грн. Чи вистачить 454 грн для 5,75 кг м'яса? (ні)

5. Сума двох чисел дорівнює 536. Знайти ці числа, якщо друге число більше від першого на 4. Знайти добуток і дві частки цих чисел. Порівняйте ці дві частки. ($266 \cdot 270 = 71820$; $0,985 < 1,015$)

6. Різниця двох чисел дорівнює 306. Знайти ці числа, якщо друге число у 2 рази більше, ніж перше. Знайти добуток і дві частки цих чисел. Порівняйте ці дві частки. ($306 \cdot 612 = 187272$; $0,5 < 2$)

7. Різниця двох чисел дорівнює 505. Знайти ці числа, якщо їх відношення 7:2. (707 і 202)

8. 4 кг м'яса коштують 328 грн. Чи вистачить 458 грн для 5,65 кг м'яса? (ні)

9. Сума двох чисел дорівнює 40. Різниця цих чисел 10. Знайти добуток і дві частки цих чисел. Знайти суму двох часток та різницю між двома частками цих чисел. (добуток – 375; $1,6 > 0,6$)

10. Сума двох чисел дорівнює 108. Знайти ці числа, якщо друге число більше від першого на 3. Знайти добуток і дві частки цих чисел. Порівняйте ці дві частки. ($52,5$ і $55,5$; $2913,75$; $1,05 > 0,95$)

2.5. Задачі на використання середніх значень

Задачі на знаходження та застосування середнього арифметичного кількох чисел

Середнє арифметичне кількох чисел - це сума цих чисел, поділена на їх кількість. Якщо пройдений шлях поділити на час руху, то отримаємо значення середньої швидкості руху.

Сума температур за певну кількість днів, поділена на цю кількість днів, дає середню температуру повітря протягом цих днів.

Зверніть увагу!

Для обчислення значення середньої величини необхідно додавати величини, що вимірюються в однакових одиницях.

Якщо суму кількох чисел ділять на кількість цих чисел, то знайдену частку називають середнім арифметичним даних чисел.

Задача 1. Вася зірвав з дерева 4 груші, Катя — 2 груші, а Маша — 6. Діти склали фрукти разом і поділили порівну. Скільки груш дісталось кожному з них?

Розв'язання

Знайдемо середнє арифметичне:

$$\frac{4 + 2 + 6}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Відповідь: кожному дісталось по 4 груші.

Задача № 2. Нехай температура повітря опівдні у п'ятницю була $23,2^{\circ}\text{C}$, у суботу вона дорівнювала $21,5^{\circ}\text{C}$, а в неділю становила $20,7^{\circ}\text{C}$. Потрібно знайти середню температуру опівдні протягом цих трьох днів. Щоб знайти середню температуру повітря потрібно додати три дані значення температури і одержану суму поділити на три.

Розв'язання

$$\frac{23,2^0 + 21,5^0 + 20,7^0}{3}$$

Відповідь: $21,8^0$ – середнє значення температури.

Задача № 3. Автомобіль за перші дві години проїхав 117 км, а за три наступні – 204 км. Скільки кілометрів в середньому він проїжджав за одну годину?

Розв'язання

$(117 + 204) : 5 = 64,2$ (км/год) – середня швидкість;

Відповідь: 64,2 км/год.

Задача № 4. Господарство на площі 150 га зібрало по 32,7 ц пшениці з одного га, а на площі 97 га – по 35,8 ц. Яка середня урожайність з 1 га в цьому господарстві?

Розв'язання

1) $32,7 \cdot 150 = 4905$ (ц) – зібрали з 150 га;

2) $35,8 \cdot 97 = 3472,6$ (ц) – зібрали з 97 га;

- 3) $150 + 97 = 247(\text{га})$ – площа під пшеницею;
4) $4905 + 3472,6 = 8377,6 (\text{ц})$ – зібрали з площі 247 га;
5) $8377,6 : 247 \approx 33,9 (\text{ц})$ – середня урожайність з 1 га.

Відповідь: $\approx 33,9 \text{ ц}$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Рибалка піймав 20 коропів. П'ять коропів важило по 0,85 кг, чотири – по 0,36 кг, три – по 0,94 кг і решта – по 0,62 кг. Знайдіть середню масу коропів. Результат округліть до сотих. (0,67 кг)
2. Автобус їхав 2,3 год зі швидкістю 58 км/год і 2,7 год зі швидкістю 61 км/год. Знайдіть середню швидкість автобуса на всьому шляху. (23,8 км/год)
3. Вантажний автомобіль їхав 1,4 год зі швидкістю 59 км/год і 3,6 год зі швидкістю 56 км/год. Знайдіть середню швидкість вантажного автомобіля на всьому шляху. (23 км/год)
4. За перший день роботи шкільного ярмарку продали 34 зошитів, а наступних три дні продавали по 180 зошитів щодня. Скільки зошитів у середньому продавали за один день? (220 зош.)
5. Виконавши зважування 10 тістечок, які випускає кондитерська фабрика, одержали наступний ряд даних: 106 г, 104 г, 104 г, 104 г, 98 г, 98 г, 102 г, 102 г, 102 г, 102 г. Знайдіть середню масу тістечок. (102,2 г)
6. Протягом першої години автомобіль рухався зі швидкістю 64,8 км/год, а протягом другої – 76,2 км/год. Знайдіть середню швидкість автомобіля за 2 год руху. (70,5 км/год)
7. З поля площею 3 га зібрали врожай пшениці 94,5 ц, а з поля площею 9 га зібрали 310,5 ц пшениці. Обчисліть середній урожай пшениці з 1 га. (33га)
8. З ділянки площею 20 а зібрали 39,2 ц картоплі, а з ділянки площею 10 а зібрали 19 ц картоплі. Обчисліть середній урожай картоплі з 1 га. (1,93 ц)
9. З баштану принесли 20 динь. Дві дині важили по 2,4 кг, чотири – по 2,8 кг, шість – по 2,2 кг і решта – по 2,3 кг. Знайдіть середню масу динь. Результат округліть до десятих. (2,4 кг)

10. У фермера 5 корів. За 30 днів від них надоїли 4650 л молока. Скільки літрів молока в середньому дає у цього фермера одна корова за день? (155 літрів)

11. Знайдіть температуру повітря вранці, якщо вдень було $33,2^{\circ}\text{C}$, ввечері – $26,6^{\circ}\text{C}$, а середня температура за день становила $30,4^{\circ}\text{C}$. ($31,4^{\circ}\text{C}$)

12. Маса одного з трьох злитків золота дорівнює 2,7 кг, маса другого – 5,3 кг, маса третього – 4 кг. Знайдіть середню масу злитка золота. (4 кг)

13. Автобус за першу годину проїхав 60 км, за другу – 66 км, за третю – 56 км, а за четверту – 70 км. Скільки кілометрів у середньому за годину долав автобус? (63 км)

. У фермера 5 корів. За 30 днів від них надоїли 4725 л молока. Скільки літрів молока в середньому дає в цього фермера одна корова на день? (31,5 літрів)

15. У теплиці площею 144 м^2 зібрали 3060 кг овочів. Скільки кілограмів овочів зібрали з теплиці з 1 м^2 ? ($21,25\text{ м}^2$)

16. Зріст волейболістів, які грали на майданчику, такий: 2; 1,87; 1,96; 1,98; 2,03 і 1,86 м. Обчислити середній зріст цих волейболістів. (1,97)

Задачі на використання середніх значень

Означення. Середнє арифметичне декількох чисел — це відношення суми всіх чисел до їх кількості.

$$\text{Середнє арифметичне} = \frac{\text{сума чисел}}{\text{кількість чисел}}$$

Наприклад: для двох чисел a і b середнє арифметичне дорівнює

$$\frac{a + b}{2}$$

Задача № 1. Гонщик їхав на автомобілі до Харкова дві години зі швидкістю 120 км/год і годину зі швидкістю 90 км/год. Знайдіть середню швидкість автомобіля під час гонки.

Розв'язання

Знайдемо середнє арифметичне швидкостей автомобіля за кожну годину шляху:

$$\frac{120 + 120 + 90}{3} = \frac{330}{3} = 110$$

Відповідь: середня швидкістю автомобіля під час гонки була 110 км/год.

Задача № 2. Змішали 4 сорти цукерок за ціною 7,5 грн., 8,4 грн., 9,5 грн., 10,6 грн. Скільки коштує 1 кг суміші, якщо взяли:

- 1) кожного сорту цукерок по 1 кг;
- 2) цукерок I і III сорту — по 2 кг; цукерок II і IV сорту — по 1 кг?

Розв'язання

Нехай x — менше число, тоді $4x$ — більше число, їх середнє арифметичне $\frac{x + 4x}{2}$ дорівнює 10.

Складемо рівняння: $\frac{x + 4x}{2} = 10$, $\frac{5x}{2} = 10$, $5x = 20$, $x = 4$.

Менше число 4, а більше $4 \cdot 4 = 16$.

Відповідь: 4 і 16.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Човен плыв 2 год зі швидкістю 12,3 км/год і 4 год зі швидкістю 13,2 км/год. Знайдіть середню швидкість човна упродовж усього шляху. (12,9 км/год)

2. Автомобіль їхав 3 год зі швидкістю 62,6 км/год і 2 год зі швидкістю 65 км/год. Знайдіть середню швидкість автомобіля упродовж всього шляху. (63,56 км/год)

3. Середній зріст 10 баскетболістів – 192 см, а середній зріст шести з них – 190 см. Який середній зріст решти чотирьох баскетболістів? (192,5 см)

4. У бригаді було 5 робітників, середній вік яких становив 35 років. Після того як бригада поповнилась одним робітником, середній вік робітників бригади став 34 роки. Скільки років робітнику, який поповнив бригаду? (29)

5. Середній вік одинадцяти футболістів команди становить 22 роки. Під час гри один із гравців залишив поле, після чого середній вік футболістів, які залишилися, дорівнював 21 рік. Скільки років футболістові, який залишив поле? (32 роки)

6. На футбольних змаганнях команда за виграш отримує 2 бали, за поразку – 0 балів, за нічию – 1 бал. Команда «Чемпіон» 5 матчів виграла, один програла і 2 зіграла в нічию. Який середній бал у команди «Чемпіон»?

7. У літній табір дітей відправляли на 5 однакових автобусах, у яких розмістилось 29, 32, 36, 35, 31 чоловік. Чи можна було б розмістити дітей по автобусах порівну? (ні)

2.6. Алгебраїчний спосіб розв'язування задач

Загальні підходи до розв'язування задач за допомогою рівнянь. Етапи алгебраїчного методу розв'язування текстової задачі. Складання математичної моделі.

Термін «модель» широко використовується в різних сферах людської діяльності і має безліч значеннєвих значень. Модельований об'єкт називається оригіналом, що моделює – моделлю. Поняття «модель» виникло в процесі дослідного вивчення світу, а саме слово «модель» походить від латинських слів «modus», «modulus», що означають міру, образ, спосіб. Майже у всіх європейських мовах воно вживалося для позначення способу або прообразу, або речі, подібною в якомусь відношенні з іншою річчю.

Іноді під моделлю розуміють таке матеріальний чи подумки представлений об'єкт, який у процесі пізнання (вивчення) заміщає об'єкт-оригінал, зберігаючи деякі важливі для даного дослідження типові риси.

Ось деякі приклади моделей:

1. Архітектор готується побудувати будівлю небаченого досі типу. Але перш ніж спорудити його, він споруджує цю будівлю з кубиків на столі, щоб подивитися, як вона буде виглядати. Це модель.
2. На стіні висить картина, що зображає розбурхане море. Це модель.

Математичне моделювання – окремий випадок моделювання. Є найважливішим видом знакового моделювання і здійснюється засобами мови математики. Знакові освіти та їх елементи завжди розглядаються разом з певними перетвореннями, операціями над ними, які виконує людина або машина (перетворення математичних, логічних, хімічних формул тощо).

Математичною моделлю називають опис якого-небудь реального процесу або деякої досліджуваної ситуації на мові математичних понять, формул і відношень. Математична модель – це спрощений варіант дійсності, використовуваний для вивчення її ключових властивостей.

Математичне моделювання знаходить застосування при вирішенні багатьох сюжетних завдань. Вже рівняння, що складається за умовами задачі, є її алгебраїчною моделлю.

Задача № 1. Турист проїхав 2200 км, причому на теплоході проїхав вдвічі більше, ніж на автомобілі, а на поїзді в 4 рази більше, ніж на теплоході. Скільки кілометрів проїхав турист окремо на кожному виді транспорту?

Розв'язання

Прийmemo відстань, яку проїхав турист на автомобілі за x км. Відомо, що на теплоході проїхав вдвічі більше, ніж на автомобілі, тобто $2x$ км. На поїзді проїхав у 4 рази більше, ніж на теплоході, тобто $4 \cdot 2x$.

Весь шлях – це сума відстаней, які проїхав турист на кожному з видів транспорту і він дорівнює 2200 км. Отримаємо наступне рівняння:

$x + 2x + 8x = 2200$ – це і є математична модель даної задачі.

Задача № 2. Турист йшов 2 год пішки з пункту А в пункт В, потім у В він сів на катер, швидкість якого в 4 рази більше швидкості туриста як пішохода, і їхав на катері 1,5 год до пункту С. В С він сів на автобус, швидкість якого в 2 рази більше швидкості катери, і їхав на ньому 2 год до пункту D. З якою швидкістю їхав турист на автобусі якщо відомо, що весь його шлях від А до D склав 120 км?

Розв'язання

Нехай x км/год – швидкість пішохода. За 2 год він пройде $2x$ км. З умови випливає, що швидкість катера $4x$ км/ч. За 1,5 год катер пройде шлях $4x \cdot 1,5 = 6x$ км. З умови випливає, що швидкість автобуса дорівнює $2 \cdot 4x = 8x$ км/год. За 2 год автобус пройде $8x \cdot 2 = 16x$ км. Весь шлях від А до D дорівнює: $2x + 6x + 16x$, що становить, за умовою, 120 км. Таким чином, $2x + 6x + 16x = 120$.

Задача № 3. Задумане двозначне число, яке на 66 більше добутку своїх цифр. Яке число задумане?

Розв'язання

Після складання моделі отримуємо таку задачу:

Для цифр x і y двозначного числа виконується рівність $10x+y=xy+66$. Знайти це число.

Повний перебір можна провести, розглядаючи послідовно всі значення x від 1 до 9 і підбираючи в кожному випадку відповідне значення y від 0 до 9. Однак цей перебір можна скоротити, якщо зауважити, що права частина рівності більше 66. Значить, і ліва його частина, тобто задумане число більше 66. Тому невідоме число x не менше 6, і можна розглядати тільки чотири значення x – від 6 до 9.

При $x=6$ наше рівність має вигляд $60+y=6y+66$, а цього бути не може, тому що ліва частина вийшла менше правою за будь-яких значеннях y від 0 до 9. При $x=7$ маємо $70+y=7y+66$. Якщо ми від кожної частини цієї рівності віднімемо одне і те ж число y , то отримаємо $70=6y+66$, звідки $6y=4$, що для натурального числа неможливо.

При $x=8$ маємо рівність $80+y=8y+66$. Знову, віднімаючи з кожної частини y , отримаємо, $80=7y+66$, $7y=14$, $y=2$. Таким чином, для чисел $x=8$ і $y=2$ рівність виконується, і число 82 задовольняє умові завдання:

$$82=8 \cdot 2+66.$$

Слід звернути увагу учнів, що не можна вважати завдання повністю вирішеною, оскільки перебір ще не закінчений, і серед не розглянутих випадків можуть знайтися рішення.

Виконуючи аналогічні перетворення, маємо при $x=9$:

$$90+y=9y+66;$$

$$90=8y+66;$$

$$8y=24;$$

$$y=3.$$

Показуючи учням, що вийшло ще одне рішення, число 93, яке задовольняє $93=9 \cdot 3+66$, ми підкреслюємо важливість повного перебору.

Можна проводити перебір за допомогою таблиці (див. табл. 12).

Таблиця 12.

<i>X</i>	<i>Рівняння</i>	<i>Спрощене рівняння</i>	<i>Y</i>
6	$60 + y = 6y + 66$		неможливо
7	$70 + y = 7y + 66$	$6y = 4$	неможливо
8	$80 + y = 8y + 66$	$7y = 14$	$y = 2$
9	$90 + y = 9y + 66$	$8y = 24$	$y = 3$

Після того, як проведено повний перебір, важливо навчити школярів формулювати відповідь у відповідності питання початкового завдання. У цьому випадку відповідь буде така: задумано або число 82, або 93.

Завдання для самостійного розв'язання

1. У Сашка було в 5 разів більше солдатиків, ніж у Андрійка. Після того, як Сашко подарував друзям 36 солдатиків, а Андрійко купив 32 солдатика, то в обох хлопчиків солдатиків стало порівну. Скільки солдатиків було в кожного хлопчика спочатку? (17)

2. У двох коробках було порівну цукерок. Після того, як з першої коробки взяли 10 цукерок, а з другої — 28 цукерок, у першій коробці стало цукерок у 4 рази більше, ніж у другій. Скільки цукерок було в кожній коробці спочатку? (34)

3. У першій вазі було в 6 разів більше квіток, ніж у другій. Після того, як з першої вази взяли 28 квіток, а з другої — 9 квіток, у другій вазі стало на 41 квітку менше, ніж у першій. Скільки квіток було в кожній вазі спочатку? (12)

4. В автопарку вантажних машин у 7 разів більше, ніж легкових. Скільки легкових машин в автопарку, якщо їх на 162 менше, ніж вантажних? (27)

5. У першому резервуарі в 5 разів більше рідини, ніж у другому. Скільки рідини в першому резервуарі, якщо в другому її на 120 л менше, ніж у першому? (150)

Формули зв'язку між різними величинами

Ефективність застосування рівнянь до розв'язування задач значною мірою залежить від уміння учнів розв'язувати задачі на складання виразів із змінною.

Цю ідею легко реалізувати, бо формування поняття про вираз із змінною і рівняння відбувається у нерозривному зв'язку. Завдання полягає в тому, щоб частим звертанням до виразів із змінною продовжити формування навичок їх складання за різноманітними умовами і підготувати базу для складання відповідного виду рівнянь.

Розглянемо один із прийомів навчання розв'язування задач з допомогою рівнянь. Виділимо три етапи:

- розпізнавання величин, що використані в задачі.
- встановлення залежності між величинами.
- запис однієї величини через іншу.

На початковому етапі роботи над задачами корисно дати учням алгоритмічну вказівку:

- вибрати меншу із невідомих величин і позначити її через x .
- решту невідомих величин виразити через меншу, тобто x .
- з'ясувати, порівнюються чи додаються величини.
- скласти схему рівняння (див. табл. 13)

Таблиця 13.

Одна величина	+	Друга величина	=	Сума величин	Якщо величини додаються
Більша величина	-	Менша величина	=	Різниця величин	Якщо величини порівнюються

У схемі рівняння замість кожної величини записати її вираз через змінну. Схема рівняння дозволяє учням побачити закономірність між величинами.

Задача. У магазин завезли 1650 кг картоплі, причому до обіду завезли удвічі більше, ніж після обіду. Скільки кілограм картоплі завезли в магазин після обіду?

Розв'язання з попереднім міркуванням

Учні, читаючи умову задачі, встановлюють, що маса картоплі, завезеної після обіду, менша. Її приймаємо за x кг. Тоді маса картоплі, завезеної до обіду, - $2x$ кг. 1650 кг - сума величин, оскільки в першому реченні сказано, що в магазин завезли 1650 кг картоплі.

Складається схема рівняння:

$$\underline{\text{До обіду}} + \underline{\text{Після обіду}} = \underline{1650}$$

$$\text{Далі складаємо рівняння: } 2x + x = 1650.$$

Можна запропонувати учням інші варіанти рівнянь, що можна скласти до задачі: $2x = 1650 - x$, $1650 - 2x = x$, з'ясовуючи щоразу, які величини прирівнюються.

Завдання для самостійного розв'язання

1. У магазин завезли 156 кг кавунів і динь, причому динь було в 5 разів менше, ніж кавунів. Скільки було кілограмів динь? (26)

2. В автопарку були автобуси і вантажні машини, причому вантажних машин було в 4 рази більше, ніж автобусів. Скільки в автопарку автобусів, якщо їх було на 114 менше, ніж вантажівок? (38)

3. У Василька в 6 разів менше марок, ніж у Михайлика. Скільки марок у Михайлика, якщо їх у нього на 105 більше, ніж у Василька? (21)

4. Між трьома школами розподілили 509 кг бананів, причому в одну школу відправили бананів у 7 разів більше, ніж у другу, а в третю - на 158 кг більше, ніж у другу. Скільки бананів відправили в кожен школу? (39, 197, 273)

5. Одна сторона трикутника в 5 разів менша від другої і на 28 дм менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 84 дм. (8, 40, 36)

6. Периметр прямокутника дорівнює 15,6 дм, одна з його сторін на 2,8 дм більша за другу. Знайдіть площу прямокутника. (2,5 і 5,3)

7. Пачка паперу дорожча за набір олівців на 3,6 грн. Скільки коштує одна пачка паперу і скільки - один набір олівців, якщо за 4 пачки паперу заплатили стільки ж, скільки за 10 наборів олівців? (2,4 і 6)

8. За 5 шоколадних цукерок і 6 льодяників заплатили 5 грн 65 к. Скільки коштує одна цукерка і скільки - один льодяник, якщо цукерка дорожча за льодяник на 25 к.? (40 і 65)

9. Купили 12 поштових марок по 70 к. і по 1 грн 20 к., заплативши всього 10 грн 90 к. Скільки купили марок кожного виду? (7 і 5)

10. Відстань між двома містами поїзд подолав за 7 год, а легкова машина - за 3 год. Знайдіть швидкість поїзда і швидкість легкової машини, якщо швидкість поїзда менша від швидкості легкової машини на 36 км/год. (63 і 27)

Задачі з абстрактними числовими даними. Задачі з однойменними та різнойменними значеннями величин.

Розв'язати завдання алгебраїчним методом – це знайти відповідь на вимогу завдання, склавши і розв'язавши рівняння. Одну і ту ж задачу можна також розв'язати різними алгебраїчними способами, якщо для її вирішення складені різні рівняння або системи рівнянь, в основі складання яких лежать різні співвідношення між даними і шуканими (див. табл. 2, 3, 4, 10, 11).

Завдання для самостійного розв'язання

1. Від числа 47 відняли деяке число. Знайдену різницю помножили на 2 і від результату відняли 15, дістали 45. Яке число відняли від 47? (17)
2. Задумане число зменшили в 2 рази і результат додали до числа 19. Дістали 37. Визначити задумане число. (36)
3. Микола на 2 роки старший від Володі, а Оленка молодша від Миколи на 3 роки. Вік Миколи, Володі й Оленки разом становить 37 років. Скільки років Володі? (36)
4. Вік батька, дочки й сина разом становить 47 років. Батько старший від сина в 5 раз, а сестра молодша від брата на 2 роки. Скільки років синові? (9)
5. Сашко пішов до озера. Відстань від дому до озера становила 4,2 км. Спочатку x год він ішов із швидкістю 3 км/год, а потім ще x год із швидкістю 4 км/год. Який час Сашко був у дорозі? (1,2)
6. Бабуся підрахувала, що коли вона дасть кожному внуку по 6 пряників, то не вистачить 8, а якщо по 4, то залишиться 6. Скільки внуків у бабусі? Скільки пряників? (7 онуків і 42 пряника)
7. Діти ділили яблука. Коли почали роздавати по 5 яблук, то останній одержав 3 яблука, коли роздали по 4 яблука, то залишилося 11. Скільки було яблук і дітей? (16 дітей і 83 яблука)
8. На одному складі було в 3 рази більше телевізорів, ніж на другому. Після того, як з першого складу взяли 20 телевізорів, а на другий привезли 14, телевізорів на обох складах стало порівну. Скільки телевізорів було на кожному складі спочатку? (17 і 51)
9. Катер подолав відстань між двома портами за 3 год, а теплохід ту саму відстань - за 5 год. Знайдіть швидкість катера і швидкість теплохода, якщо швидкість катера на 16 км/год більша за швидкість теплохода. (24 і 40)
10. У книжковій шафі було в 6 разів більше книжок, ніж на етажерці. Після того, як з шафи взяли 46 книжок, а з етажерки - 18, на етажерці залишилось на 97 книжок менше, ніж у шафі. Скільки книжок було спочатку в шафі та скільки на етажерці? (25 і 120)

2.7. Задачі на частини

Задачі на знаходження дробу від числа

Щоб знайти дріб від числа, треба дане число поділити на знаменник дробу і помножити на його чисельник.

Щоб знайти дріб від числа треба число помножити на цей дріб.

Правило знаходження відсотку від числа.

Щоб знайти відсоток від числа потрібно:

- 1) записати відсотки у вигляді звичайного дробу;
- 2) знайти дріб від числа.

Задача № 1. Від 12 м дроту відрізали четверту частину. Скільки метрів дроту відрізали?

Розв'язання

$$12 : 4 = 3 \text{ (м)}$$

Задача № 2. Іванко прочитав 140 сторінок, що становить $\frac{7}{15}$ від усієї книжки. Скільки сторінок у ній?

Попереднє міркування

Ця задача відноситься до типу задач на знаходження числа за значенням його дробу. Щоб знайти число за значенням його дробу треба значення дробу поділити на цей дріб.

Розв'язання

Нехай у книжці x сторінок. Тоді $x \cdot \frac{7}{15} = 140$; $x = 140 : \frac{7}{15}$;

$$x = \frac{140 \cdot 15}{7} = 20 \cdot 15 = 300$$

Відповідь: у книжці 300 сторінок.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Розчистили від снігу $\frac{2}{5}$ ковзанки, що становить 800 м^2 . Знайдіть площу ковзанки. (2000 м^2)
2. Житом засіяно 2 400 га, що становить 0,8 усього поля. Знайдіть площу поля. (1920 га)
3. Сосна росте 450 років. Вік верби становить $\frac{2}{15}$ від віку сосни. Скільки років росте верба? (60 років)
4. Учні посадили 120 кущів. $\frac{1}{4}$ яких становить смородина. Скільки кущів смородини посадили учні? (30)
5. Висота Говерли (Карпати) 2060 м, а висота Ай-Петрі (Крим) становить $\frac{3}{5}$ висоти Говерли. Яка висота Ай-Петрі? (1237,2 м)
6. Комбайнер зібрав пшеницю з поля площею 360 га. Першого дня він зібрав $\frac{1}{6}$ всієї площі, другого дня $\frac{2}{5}$ решти. З якої площі він зібрав третього дня? (180 га)
7. Протягом доби надоїли 1 т молока. Скільки можна одержати масла, якщо вихід вершків становить $\frac{4}{25}$ маси молока, вихід масла – $\frac{2}{8}$ маси вершків? (40 кг)
8. Робітник повинен за зміну виготовити 126 деталей, але він перевиконав завдання на $\frac{2}{7}$. Скільки деталей виготовив робітник? (162 деталі)
9. У саду росли яблуні і груші, яблунь – 120, а груш на $\frac{1}{4}$ менше. Скільки фруктових дерев росло в саду? (210)
10. Висота польоту ластівки 2 км, висота польоту лелеки становить $\frac{1}{2}$ висоти польоту ластівки, а качки – $\frac{4}{5}$ висоти польоту лелеки. Яка висота польоту лелеки і качки? (800 м)
11. Число років сина становить $\frac{2}{11}$ числа років батька, а число років дочки – $\frac{5}{11}$ числа років батька. Скільки років батькові, якщо синові й дочці разом 28 років? (44 роки)

12. Довжина однієї сторони чотирикутника становить $\frac{3}{11}$ його периметра, а довжина другої сторони $\frac{4}{11}$ периметра. Знайти периметр чотирикутника, якщо сума довжин цих сторін 28 см. (44см)

13. Для школи придбали 240 квіток у цирк та 420 квіток у театр. Четверту частину квіток у цирк і шосту частину квіток у театр віддали учням початкових класів. Скільки всього квіток віддали учням початкових класів? (130)

14. Учні потрібно обкопати 240 дерев. Вони першого дня обкопали $\frac{1}{2}$ всіх дерев, другого дня - $\frac{1}{3}$ того, що залишилось, а третього дня $\frac{1}{5}$ тієї кількості дерев, що обкопали першого і другого дня разом. Скільки дерев обкопали учні третього дня? (32 дерева)

Задачі на знаходження числа за його дробом

Щоб знайти число за його дробом, потрібно дану величину його дробу поділити на цей дріб.

Задача. Першого дня турист пройшов 24 км, що становило $\frac{1}{4}$ всього шляху. Який увесь шлях?

Розв'язання

$$24 \cdot 4 = 96 \text{ (км).}$$

Відповідь: увесь шлях становить 96 км.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Учень прочитав книгу за три дні. В перший день він прочитав 0,2 всієї книги і ще 16 сторінок, на другий день 0,3 залишку і ще 20 сторінок. В третій день 0,75 залишку і останні 30 сторінок книги? Скільки сторінок у книзі? (у книзі 270 сторінок)

2. На запитання, скільки важить рибина, рибалка відповів: «Хвіст важить 150 г, голова стільки, скільки хвіст і половина тулуба, а тулуб – скільки голова і хвіст разом. Скільки важить ціла рибина? (1 кг 200 г)

3. Дівчинка прочитала $\frac{3}{10}$ сторінок усієї книжки. Усього вона прочитала $\frac{7}{10}$ книжки. Скільки сторінок в книжці? (50 сторінок)

4. Робітник виконав $\frac{3}{5}$ завдання, виготовивши 15 деталей. Скільки деталей повинен виготовити робітник? (25 деталей)

5. Робітник виконав $\frac{5}{3}$ завдання, виготовивши 15 деталей. Скільки деталей понад план виготовив робітник? (9 деталей)

6. Робітник виконав $\frac{3}{5}$ всього завдання. А учень решту – 150 деталей. Скільки деталей виготовив учень і робітник? (300 деталей)

7. Площа кухні 8 м^2 , що становить $\frac{1}{5}$ всієї квартири. Яка площа квартири? (40)

8. $\frac{3}{5}$ поля засіли житом, а решту – пшеницею. Яку площу засіли пшеницею і яку житом, якщо відомо, що пшеницею засіяли на 114 га менше, ніж житом? (228га)

9. У магазин привезли 1260 кг картоплі. Першого дня подали $\frac{2}{3}$ усієї картоплі, другого $\frac{5}{7}$ решти. Скільки картоплі залишилося продати? (60кг)

10. У залі кінотеатру 16 рядів по 24 місця в кожному ряді. Скільки грошей вторгує кінотеатр за три сеанси, якщо ціна квитка 15 грн і на перший сеанс було продано $\frac{10}{12}$ усіх білетів, на другий – $\frac{9}{32}$, а на третій – $\frac{21}{24}$? (13680 грн)

Задачі на частини, які становить одне число від іншого.

Комбіновані задачі.

Задачі з частинами – це тренувальна вправа для розв’язування простих задач на знаходження частини числа і числа за його частиною. Йдучи від простого до складнішого, ми досягаємо успіху в розв’язуванні складених задач тільки після того, як діти зрозуміють і навчатися розв’язувати прості задачі. Цілий відрізок поділений на певну кількість рівних частин –це закріплює поняття про половину, третину, четверту частину цілого та інші дробі.

Задача. Четверо дітей вирішили поділити 3 шоколадки порівну. Як це можна зробити? Яку частину шоколадки отримає кожний?

Дію виконуємо практично (див. рис 2):

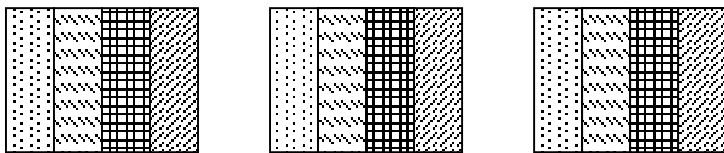


Рис.2.

Отже, кожна дитина отримає по $\frac{3}{4}$ шоколадки. При діленні 3 шоколадок на чотирьох дітей кожний отримає 3 кусочки, які рівні $\frac{1}{4}$ шоколадки, або $\frac{1}{4} 3 = \frac{3}{4}$. Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією ділення.)

Тому: $3 : 4 = \frac{3}{4}$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Від будиночка папи Карло до школи 5 км. Буратіно пройшов 2 км. Яку частину шляху він пройшов? (третину)
2. Василю треба було забити 8 цвяхів. З них 6 цвяхів він забив правильно, а решта в нього погнулися. Яку частину цвяхів Вася погнув? (четверту)
3. Тривалість уроку 45 хвилин. На розв'язання задачі пішло 5 хвилин. Яку частину уроку пішла на розв'язання задачі? ($\frac{1}{9}$)
4. Випекли хлібину, маса якого 2 кг. Від неї відрізали 200 г. Яку частину хлібини відрізали? (десяту)
5. На випікання хліба витратили 224 кг борошна. Скільки кілограмів хліба повинно вийти, якщо маса борошна становить $\frac{7}{10}$ маси хліба? (320 кг)
6. Пшеницею засіяли $\frac{3}{5}$ поля, житом – $\frac{1}{5}$ поля, а решту 70 га засіяли вівсом. Яка площа поля засіяна житом? (70 га)
7. Турист подолав $\frac{2}{19}$ шляху пішки, $\frac{4}{19}$ шляху – на велосипеді, $\frac{6}{19}$ автомобілем, а решту 28 км – теплоходом. Який шлях подолав турист автомобілем? (24км)

8. У покупця було 584 грн. За першу покупку він заплатив $\frac{1}{4}$ всіх грошей, за другу покупку – $\frac{2}{3}$ решти, а за третю – $\frac{1}{2}$ грошей, що залишилося після двох покупок. Скільки грошей витратив покупець? (511 грн)

9. Кріль за день з'їдає 3 кг 500 г продуктів, з них трава становить $\frac{7}{10}$, а зерно – $\frac{7}{100}$ всіх продуктів. Скільки разом трави и зерна з'їдає кріль за день? (2695 г)

10. Урок триває $\frac{3}{4}$ години, перерва $\frac{1}{6}$ години. Скільки хвилин тривають разом три уроки і дві перерви? (2 год 35 хв)

11. Найменша в світі пташка-колібри. Вона важить всього близько 2 г. Її довжина не більше 60 мм. $\frac{1}{2}$ довжини колібри становлять дзьоб і хвіст. Яка довжина тулуба колібри? (30 мм)

12. Прийнято вважати, що орхідея найкрасивіша квітка на Землі. У світі існує біля 30000 видів орхідей, що становить $\frac{2}{5}$ усіх видів квіткових рослин у світі. Скільки видів квіткових рослин існує на Землі? (50000)

13. В жабиному дитячому садку 42 жабеняти. $\frac{2}{3}$ усіх жабенят загорають на пляжі. Скільки жабенят не пішло загорати? (14 жабенят)

14. Відстань між двома пунктами 1456 км. Із цих пунктів одночасно назустріч один одному виїхали два автобуси. Яка відстань буде між автобусами на той час, коли перший проїде $\frac{3}{8}$, а другий – $\frac{2}{7}$ всієї відстані? (494 км)

15. Розмелювали 3 т 600 кг пшениці. $\frac{4}{5}$ усієї пшениці становило борошно, манки було у 40 разів менше, решта – висівки. Скільки одержали манних крупів? (72 кг)

16. Іа-Іа випік до дня народження 46 пиріжків. $\frac{3}{23}$ усіх пиріжків він з'їв сам, а решту розклав порівну на 4 тарілки. Скільки пиріжків на кожній тарілці? (10)

17. У сувої було 10 м 80 см тканини. $\frac{5}{6}$ всієї тканини витратили на пошиття трьох однакових суконь. Скільки тканини пішло на одну сукню? (3м)

18. У швейній майстерні було 4068 м сукна, $\frac{5}{6}$ цього сукна взяли на пошиття жіночих пальт, а з решти пошили чоловічі пальта, витративши по 3 м сукна на кожне. Скільки пошили чоловічих пальт? (226)

19. У трьох цехах заводу працює 2940 робітників. $\frac{3}{7}$ всіх робітників працює в першому цеху, а решта – у другому та третьому, порівну в кожному. Скільки робітників працює в третьому цеху? (840)

20. На складі було 39 т 600 кг картоплі. Першого дня для їдалень видали $\frac{9}{100}$ цієї кількості, другого дня $\frac{1}{9}$ від остачі. Скільки кілограмів видали другого дня? (4004 кг)

2.8. Задачі геометричного змісту

Формули периметра, площі та об'єму

Площа геометричної фігури – числова характеристика геометричної фігури, яка показує розміри цієї фігури (частини поверхні, обмеженої замкнутим контуром даної фігури). Об'єм геометричної фігури – кількісна характеристика простору, яке займає тіло або речовина. Об'єм тіла або його місткість визначається формою та лінійними розмірами цього тіла.

Формули площі квадрата

Площа квадрата дорівнює квадрату довжини його сторони.

$$S=a^2$$

де S – площа квадрата, a – довжина сторін квадрата

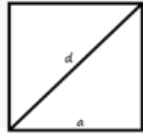
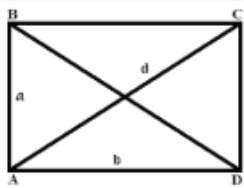


Рис. 3

Формула площі прямокутника

Площа прямокутника дорівнює добутку довжин двох його суміжних сторін

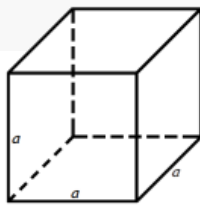


$S = a b$, де S – площа прямокутника, a , b – довжини сторін прямокутника.

Рис. 4

Об'єм куба

Об'єм куба рівний кубу довжини його ребра.

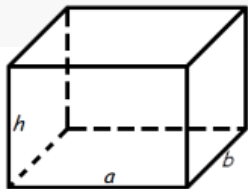


Формула об'єму куба $V = a^3$, де V – об'єм куба, a – довжина ребра куба.

Рис. 5

Об'єм прямокутного паралелепіпеда

Об'єм прямокутного паралелепіпеда рівний добутку його довжини, ширини і висоти.



Формула об'єму прямокутного паралелепіпеда

$V = a b h$, де V – об'єм прямокутного паралелепіпеда, a – довжина, b – ширина, h – висота.

Рис. 6

Завдання для самостійного розв'язання (див. рис. 3-6)

1. Обчисліть периметр прямокутника, якщо одна з його сторін дорівнює 4,3 см, а площа – $9,03 \text{ см}^2$. (12,8 см)

2. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 5,2 см, а основа в 1,3 раза менша від бічної сторони. Обчисліть периметр трикутника. (13,2 см)
3. Периметр трикутника дорівнює 47,8 см. Довжина однієї сторони дорівнює 15,6 см, що на 4,7 см більше за довжину другої сторони. Чому дорівнює довжина третьої сторони трикутника? (21,3 см)
4. Обчисліть об'єм куба, сума довжин усіх ребер якого дорівнює 18 см. (3,375 см³)
5. Обчисліть площу квадрата, периметр якого дорівнює периметру прямокутника зі сторонами 2,8 см і 3,6 см. (10,24 см²)
6. Висота прямокутного паралелепіпеда дорівнює 9,6 см, ширина в 6 разів менша від висоти, а довжина на 2,5 см більша за ширину. Обчисліть об'єм прямокутного паралелепіпеда. (62,976 см³)
7. Площа прямокутника дорівнює 5,92 см², а одна з його сторін – 3,7 см. Знайдіть периметр прямокутника. (10,6 см)
8. Обчисліть площу квадрата, периметр якого дорівнює 16,2 см. (16,4025 см²)
9. Два виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 3,2 дм і 2,06 дм. Чому дорівнює третій вимір прямокутного паралелепіпеда, якщо його об'єм дорівнює 9,888 дм³? (1,5 см)
10. Сума двох сторін трикутника дорівнює 85 см, а довжина третьої сторони становить 0,8 цієї суми. Обчисліть периметр трикутника. (153 см)

Використання формул периметра квадрата та прямокутника для розв'язування задач

Периметром квадрата називається сума довжин всіх сторін квадрата.

$$P = 4a$$

Периметром прямокутника називається сума довжин всіх сторін прямокутника.

$$P = 2(a+b)$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Периметр прямокутника дорівнює 144 см і він у 6 разів більший від довжини однієї зі сторін прямокутника. Знайдіть площу прямокутника. (1152 см²)
2. Довжина прямокутного паралелепіпеда дорівнює 24 см, ширина утричі менша від довжини, а висота – на 6 см менша від ширини. Обчисліть об'єм паралелепіпеда. (384см³)
3. Довжина прямокутника утричі більша від ширини. Обчисліть площу цього прямокутника, якщо його периметр дорівнює 288 см. (3888см²)
4. Довжина кімнати дорівнює 14 м, ширина на 5 м менша від довжини, а висота – утричі менша від ширини. Обчисліть об'єм повітря у кімнаті. (378 см³)
5. Сторона квадрата дорівнює 32 см. Обчисліть сторону іншого квадрата, площа якого у 64 рази менша від площі даного. (4 см)
6. Школярі вирішили засіяти дослідну ділянку прямокутної форми соняшником. Ширина ділянки становить 50 м, а її довжина – 80 м. Скільки насіння соняшника потрібно заготувати, якщо норма висіву становить 15 кг на 1 га? (6 кг)
7. Щоб збудувати стіну завдовжки 35 м, заввишки 12 м і завтовшки 80 см, витратили 168 000 цеглин. Скільки таких цеглин потрібно витратити на будівництво стіни завдовжки 32 м, заввишки 14 м і завтовшки 50 см? (112000)
8. Площа квадрата дорівнює 625 см². Обчисліть сторону іншого квадрата, площа якого у 25 разів менша від площі даного. (5см)
9. Чи вистачить 10 т гороху для засівання ним земельної ділянки прямокутної форми завдовжки 800 м і завширшки 500 м, якщо норма висіву становить 260 кг на 1 га? (ні)

10. Скільки потрібно автомобілів вантажністю 3 т, щоб перевезти штабель дров завдовжки 12 м, завширшки 4 м і заввишки 3 м, якщо 2 м^3 дров мають масу 1 т? (24 машини)

2.9. Задачі на відсоткові розрахунки

Задачі на знаходження відсотка від даного числа

Процентні розрахунки виникли ще в давнину ще в давнину зв'язку з потребами комерційних операцій (визначення процентних грошей капіталу або часу, за яким капітал дає певний прибуток). Пізніше процентами почали послуговуватися, обчислюючи інші величини, які змінюються (зміна населення, родючості землі та ін.). У XIX ст. проценти вже широко вживалися у статистиці та в інших науках, техніці, економіці, хімії, метеорології, сільському господарстві, у виробництві. Наприклад, за допомогою процентів позначають різні допуски під час виготовлення продукції, коефіцієнти корисної дії механізмів, втрати енергії, витрати на експлуатацію, амортизацію, частка виконання завдання, процентний склад в суспільстві різних категорій населення, вологість повітря, схожість насіння.

Оскільки спочатку використання процентів стосувалось комерційних розрахунків, то і означення процента прив'язувалось до цього. Наприклад, у підручнику Фербера “Арифметика” наводилось таке означення: під процентом розуміють ту винагороду, яку видають на користування грошовою сумою, позичкою, взятою на певний строк.

У сучасній навчально-методичній літературі є різні означення процента:

1) процентом називається одна сота частина (тут використовується аналогія з тим, що одну другу називають половиною, одну третю – третиною, одну четверту – четвертиною);

2) процентом називають дріб із знаменником 100;

3) процентом числа називають одну соту частину цього числа.

Щоб десятковий дріб записати у відсотках, потрібно помножити його на сто і дописати знак відсотків.

Щоб записати відсотки у вигляді десяткового дробу або натурального числа, необхідно число відсотків поділити на сто. Наприклад, сто тридцять відсотків дорівнюють одній цілій трьом десятим; сорок шість відсотків дорівнюють нуль цілим сорока шести сотим.

Ціле позначають як 100 відсотків.

Щоб знайти певну кількість відсотків від числа, потрібно поділити його на сто і помножити на кількість відсотків.

Знайти певну кількість відсотків від числа можна й іншим способом: задане число помножити на десятковий дріб, що відповідає кількості відсотків.

Задача. Квіти липи під час висушування втрачають 74 % своєї маси. Скільки сухих квітів можна дістати з 50 кг свіжих квітів?

Розв'язання

Якщо квіти липи втрачають 74 % своєї маси, то залишається 26 % (100 % - 74 % = 26 %).

$$\text{Знайдемо 26 \% від 50 кг: } \frac{50 \cdot 26}{100} = 13 \text{ (кг)}$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Чебурашка повинен був привезти на будівництво Будинку Дружби 620 цеглин, але він привіз 65% – цієї кількості цеглин. Скільки цеглин привіз Чебурашка на будівництво? (403)

2. Ціна автомобіля спочатку підвищилась на 20%, а потім знизилась на 20%. Як змінилася ціна на автомобіль після цих двох переоцінок? (Ціна знизилась на 4%.)

3. Ліси Карпат складаються з таких порід дерев: ялина – 41,2 %, бук – 34 %, дуб – 10,7 %, сосна – 6,6 % та інші породи, серед яких явір, клен, ясен. Скільки відсотків займають інші листяні породи? (16,5)

4. За приблизними підрахунками відомо, що в Україні є 44 800 видів тварин. У Червону книгу України включено такі види тварин: 36 видів ссавців, 57 видів птахів, 8 видів плазунів, 5 видів земноводних, 32 види риб, 69 видів

безхребетних. Скільки відсотків від загальної кількості становлять тварини, занесені в Червону книгу? (0,46)

5. Позавчора лисичка купила в лісовій крамниці згущеного молока за 4 грн. Учора ціна молока піднялася на 5%, а сьогодні знизилася на 5%. За яку ціну сьогодні лисичка купила те саме молоко? (3,99 грн.)

Задачі на знаходження числа за його відсотком

Щоб знайти число за його відсотками, потрібно відому частину числа помножити на сто і розділити на число відсотків.

Знайти число за його відсотками можна й іншим способом: задану частину числа поділити на десятковий дріб, що відповідає кількості відсотків

Задача № 1. Басейн об'ємом 4000 м^3 заповнено на 35%. Скільки води наливо в басейн?

Розв'язання

1) $4000 : 1000 = 40 (\text{м}^3) - 1\%$;

2) $40 \cdot 35 = 1400 (\text{м}^3) - 35\% \text{ басейну}$;

Відповідь: в басейн наливо 1400 м^3 води.

Задача № 2. В басейн налили 1400 м^3 води, що складає 35% об'єму всього басейна. Який об'єм всього басейну?

Розв'язання

1) $1400 : 35 = 40 (\text{м}^3) - 1\%$;

2) $40 \cdot 100 = 4000 (\text{м}^3) - \text{об'єм басейну}$;

Відповідь: об'єм всього басейну 4000 м^3 .

Завдання для самостійного розв'язання

1. Листоноша Печкін поклав у поштові скриньки в березні 48 листів. Це становить 24 % кількості листів, які він приніс у лютому. Скільки листів поклав у поштові скриньки листоноша Печкін за ці два місяці? (200)

2. Для гарного врожаю в ґрунті необхідно внести азот, фосфор і калій. Ці речовини є в таких мінеральних добривах: аміачна селітра (35 % азоту), суперфосфат (15 % фосфору), калійна сіль (30 % калію). Визначте дозу

внесення цих добрив, якщо кожної діючої речовини потрібно 50 кг на 1 га.
(142,86кг, 333,33кг і 166,67 кг)

3. Жителі диво-острова харчуються бананами і кокосами. Денний раціон: кокоси – 40% (8 шт.) та банани. Які питання можна скласти за даною умовою? (12 бананів)

4. На екскурсію пішло 60% учнів класу, в кінотеатр – 30%. 3 учні залишились вдома. Скільки учнів в класі?(в класі 30 учнів)

5. Лікар Айболить зі своїми друзями плыв на кораблі по річці Лімпопо, щоб вилікувати хворих звірів. Коли вони проплили 60% шляху, на них напали пірати. Але друзі перехитрили піратів, і 80км шляху, що залишилися, пропливли на піратському кораблі. Скільки кілометрів складає весь шлях лікаря? (весь шлях складає 200 км)

6. Маса гуски 3кг 200г, що складає 40% від маси лебедя, а маса чайки 9% маси лебедя і 60% маси качки крякви. Визначити масу цих птахів (маса лебедя – 8 кг, маса чайки – 0,72 кг, маса качки крякви – 1,2 кг)

7. На галявині гралися 18 зайчиків і білченят. Скільки зайченят і скільки білченят гралося на галявині, якщо зайченята складають 80%? (На галявині бавилося 10 білченят і 8 зайчат)

Задачі на знаходження відсоткового відношення двох чисел

Відношення чисел або величин можна виражати у відсотках. Щоб знайти, скільки відсотків перше число становить від другого, потрібно ці числа поділити перше на друге і частку помножити на 100 відсотків.

Щоб визначити, на скільки відсотків збільшилась або зменшилась задана величина, необхідно:

- знайти, на скільки одиниць збільшилась або зменшилась задана величина;
- знайти, скільки відсотків становить знайдена різниця від заданого значення величини.

Задача № 1. У 5-му класі навчаються 30 учнів, з яких математику знають на достатньому рівні 12 учнів. Яку частину становлять ці учні від усіх учнів класу?

Розв'язання

Зрозуміло, що шукане число — відношення 12 до 30:

$$12:30 = \frac{12}{30} = \frac{4}{10} = 0,4.$$

Відповідь. 0,4.

Задача № 2. У 5-му класі навчаються 30 учнів, з яких математику знають на достатньому рівні 12 учнів. Скільки відсотків усіх учнів класу становлять ті, що знають математику на достатньому рівні?

Розв'язання

Із першої задачі маємо:

12 від 30 становить 0,4, але ж $0,4 = 40\%$.

Відповідь. 40 %.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Із 150 найменувань товару, що виготовляє фабрика, 30 нової моделі. Скільки відсотків товару нової моделі випускає фабрика? (20)
2. У вашому класі 22 учні. Дівчаток - 12. Скільки відсотків становлять дівчатка, а скільки хлопчики від усіх учнів 5-Б класу? (54%, 46%)
3. Розшукували 80 старовинних рукописів, поки що відновили 30. Скільки відсотків плану виконано? (Виконано 37,5% плану)
4. До 8 кг 70-відсоткового розчину кислоти долили 2 кг води. Визначте відсоткову концентрацію нового розчину. (відсоткова концентрація розчину 56%)
5. Скільки золота 375-ї проби треба сплавити з 30 г золота 750-ї проби, щоб одержати сплав золота 500-ї проби? (потрібно 60 г золота.)

***Розв'язування задач методом зведення до одиниці та методом
зведення до відповідних задач на дробі.***

Знаходження процентів даного числа

Задача. До овочевого магазину завезли 800 кг яблук, причому 62 % з них першого сорту. Скільки кілограмів яблук першого сорту завезли до магазину?

Розв'язання

I спосіб (зведення до одиниці). Знайдемо спочатку, скільки кілограмів відповідає одному процентові, тобто соту частину всіх яблук: $800: 100=8$ кг. Щоб знайти 62%, треба виконати множення: $8 \cdot 62=496$ (кг).

II спосіб (зведення дробів). Подамо спочатку проценти у вигляді десяткового або звичайного дробу і знайдемо дріб від числа 800 дією множення цього числа на дріб: $62\% = \frac{62}{100} = 0,62$; $800 \cdot 0,62 = 496$ (кг).

Знаходження числа за даним числом його процентів

Задача. При виготовленні вершкового морозива витрачено 35 кг цукру, що становить 14% всієї маси морозива. Скільки кілограмів морозива виготовлено?

Розв'язання

I спосіб (зведення до одиниці). Спочатку визначимо, скільки кілограмів морозива припадає на 1%: $35:14=\frac{35}{14}=2,5$ (кг).

Оскільки вся маса морозива становить 100%, то $2,5 \cdot 100=250$ (кг).

Отже, виготовлено 250 кг морозива.

II спосіб (зведення дробів). За умовою задачі, 35 кг становлять 14%, тобто 0,14 всієї маси морозива. Щоб визначити, скільки кілограмів морозива виготовлено, треба знайти число за відомим його дробом, тобто виконати ділення: $35:0,14=250$ (кг).

Знаходження процентного відношення двох чисел

Задача. Учні 6 класу домовились за два дні зібрати 220 кг макулатури. Першого дня вони зібрали 88 кг. Який процент завдання виконано протягом першого дня?

Розв'язання

I спосіб (зведення до одиниці). На 1% припадає $220:100=2,2$ (кг). Тому 88 кг становлять $88:2,2=40(\%)$.

II спосіб (зведення до дробів). Знайдемо відношення даних чисел (дріб) і запишемо його у процентах: $\frac{88}{220}=0,4=40\%$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти 55% від 200 центнер і 60% від 180 центнер і порівняти знайдені величини. (110 ц і 108 ц)
2. 840 км становить 25% від усього туристичного маршруту. Скільки становить весь туристичний маршрут? (3360 км)
3. 660 км становить 75% від усього туристичного маршруту. Скільки становить весь туристичний маршрут? (880 км)
4. У кожній з двох купок лежить по 90 цукерок. З першої купки взяли 10% цукерок, і поклали у другу купку. Після цього із другої купки взяли 20% цукерок і поклали у першу купку. Скільки цукерок стало у кожній купці (81 цукерка)
5. У кожній з двох купок лежить по 88 цукерок. З першої купки взяли 25% цукерок, і поклали у другу купку. Після цього із другої купки взяли 50% цукерок і поклали у першу купку. Скільки цукерок стало у кожній купці? (121 цукерка)
6. Турист планував подолати 80 км за три дні. За перший день він подолав 35 % запланованої відстані, а за другий – 55 % решти. Скільки кілометрів треба подолати туристу за третій день? (23,4 км)

7. З 5000 осіб дорослого населення селища 40 % працюють в районному центрі, а 20 % решти – на підприємствах селища. Скільки осіб працює на підприємствах селища? (600 осіб)

8. Банк виплачує 18 % річних. Вкладник поклав до банку 5000 грн. Скільки грошей буде в нього на рахунку через два роки? (6962 грн)

Розв'язування складніших задач на відсотки

У випадку кредитів та депозитів використовують формули для обчислення відсотків на період в роках, місяцях і днях.. На практиці відсотки використовують в банківській сфері, хімії, медицині, господарстві.

Формула простих відсотків
$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$$

A_0 – щомісячна плата, $p\%$ – пеня, n – кількість років.

Задача № 1. Вкладник розмістив суму розміром 2400 грн в банк. Визначте, яку суму отримає вкладник через 3 роки, якщо відсоткова ставка складає 19% в рік.

Розв'язання

Дані з умови підставляємо в формулу простих відсотків
 $2400 \cdot (1 + 19 \cdot 3 / 100) = 3768$ (грн)

Таким чином, за 3 роки вкладник отримає 3768 грн.

Оберненою задачею на відсотки називають таку, в якій за невідомі виступають кількість років або відсоткова ставка.

Задача № 2. Вкладник взяв у кредит 3000 грн і повинен повернути через п'ять років. Знайти відсоткову ставку кредиту, якщо відомо, що потрібно віддати банку 8100 грн.

Розв'язання

$n = (8100 / 3000 - 1) / 5 \cdot 100 = 1,7 / 5 \cdot 100 = 34$ (%). Отже, відсоткова ставка кредиту складає 34 %.

Задача № 3. На овочевій базі мали 200кг винограду, вологість якого становила 99%. Під час зберігання його вологість зменшилася на 1% (стала 98%). На скільки відсотків зменшилася маса винограду?

Розв'язання

$200 \cdot 0,99 = 198$ (кг) — води у винограді при початку зберігання;

$200 - 198 = 2$ (кг) — сухої маси, що становить 1%;

$100 - 98 = 2$ (%) — становить суха маса у винограді після зберігання;

$2 \text{ кг} : 0,002 = 100$ (кг) — маса винограду після зберігання;

$100 : 200 = 0,5 = 50\%$ — становить маса винограду після зберігання;

$100\% - 50\% = 50\%$ — зменшення маси після зберігання.

Відповідь: 50%.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Вкладник розмістив суму розміром 1600 грн. В банк один рік, однак йому прийшлося забрати гроші через сім місяців. Відсоткова ставка при достроковому знятті депозиту становить 9 % на рік. Знайти суму, яку отримає вкладник. (1684 грн)

2. Позичальник отримав кредит на суму 20000 грн. під 32 % річних. Через 240 днів кредит було повністю погашено. Розрахуйте, яку суму позичальник віддав банку? На скільки різниться ця сума від позиченої? (24208,22 грн)

3. У клас закупили 3 енергозберігаючі вікна, які на 20% дорожчі за прості. Скільки витратили грошей, якщо за звичайні вікна потрібно заплатити 1400 грн? (5040 грн)

4. У бочці об'ємом 200 літрів перевозили олію. На станції надібрали 60 літрів. Скільки відсотків від об'єму залишилося? (70 %)

5. При несвоєчасній сплаті боргів нараховують 2% пені за кожний день прострочення. Яку суму потрібно заплатити через 12 днів після строку погашення 500 грн боргу? (620 грн)

6. Сторона початкового квадрата 4 см. Кожну сторону квадрата зменшили на 50%, після цього знайшли площу та периметр нового квадрата. У скільки разів змінилася площа квадрата? (у 2,25 рази)

7. Ціна телефону 1600 грн. Спочатку її знизили на 20%, а потім її підвищили на 15%. Якою стала ціна телефону після зниження? Якою стала ціна телефону після підвищення? (1472 грн)

8. Ціна велосипеда 1080 грн. Спочатку її знизили на 25%, а потім її підвищили на 20%. Якою стала ціна велосипеда після зниження? Якою стала ціна телефону після підвищення? (972 грн)

9. Бак має форму прямокутного паралелепіпеда, виміри якого 15 дм, 20 дм і 10 дм. Водою заповнено 80 % його об'єму. Скільки літрів води в баці? (2400 л)

10. Промінь, проведений з вершини розгорнутого кута, ділить його на два кути. Один з кутів становить 55 % розгорнутого кута. Обчисли градусні міри обох кутів. (99° і 81°)

2.10. Цікаві задачі

Задачі на кмітливість (загадки), задачі-жарти, задачі-головоломки

Загадки

Загадки розвивають кмітливість, інтригують дітей та стимулюють їхню фантазію. Відгадування загадок розвиває уміння зіставляти, порівнювати предмети та явища, дають багато можливостей для мовного розвитку дітей, прилучення їх до словесної мовної творчості, збагачують уявлення про навколишній світ.

- Не старіє, не вмирає, а все нищить, забирає. (Час)
- Ніг не маю, а ходжу,
Рота не маю, а скажу,
Коли обідати, а коли спати,
Коли роботу починати. (Годинник)
- Що то за гість,
Що темряву їсть? (День)
- Прийшла чорна корова.
Весь світ зборола. (Ніч)

- Чорне сукно лізе у вікно. (Ніч)
- Що було вчора і буде завтра? (День)
- Сіла дівчина спочити
 На краю села,
 Розчесала довгі коси,
 Чорні, мов смола –
 В них засяяли Зорини.
 Як же звати цю дівчину?
 Он підказує нам сич:
 - Чорні коси чеше ... (Ніч)
- Встане – в метр висотою,
 Сяде – в метр шириною;
 Я уже розгадку дав,
 Та ніхто не відгадав. (Метр)
- Дві сестри ідуть-ідуть
 І ніколи не зійдуться. (Стрілки годинника)
- Триста шістдесят п'ять чайок,
 П'ятдесят два орли,
 Дванадцять голубів
 Одне яйце знесли. (Дні тижня)
- Три сестри й три брати
 З праці йдуть до хати.
 Їх сестриця сьома
 Зустрічає вдома.
 Кличе до світлиці
 Їсти паляниці. (Дні тижня)

Задачі- жарти

Це цікаві ігрові задачі з математичним змістом. Для їх розв'язання потрібно більше винахідливості, кмітливості, почуття гумору, ніж вміння виконувати обчислювальні дії (тобто певні знання математики), хоча в

більшості з них повністю витримана зовнішня форма арифметичних задач: дано умову, є числові дані й запитання. Побудова, зміст, запитання в цих задачах незвичні. Вони лише побічно нагадують математичну задачу. Суть задачі, тобто основне, завдяки чому можна здогадатися про розв'язок, дати відповідь, замасковано зовнішніми, другорядними умовами. Для правильного їх розв'язання не вимагається виконати арифметичні дії, вони базуються на здогадці, кмітливості. Дітям шкільного віку доступні задачі-жарти як один з видів математичних розваг. Вони є корисним засобом розвитку у дітей логічного мислення, вміння проводити аналіз і синтез, узагальнювати, абстрагувати, порівнювати, зіставляти і конкретизувати, розкриваючи зв'язки, що існують між явищами. Це питання нерозривно пов'язане з розвитком пізнавальних здібностей та інтересів, з певним емоційним ставленням до пізнаваного об'єкту, явища. У процесі роботи над цим видом задач відбувається розвиток правильної, точної, лаконічної математичної мови, а це також одне з важливих завдань формування елементарних математичних уявлень у дітей шкільного віку.

Задачі-головоломки

Задачі-головоломки корисні для виховання кмітливості, активізації пізнавальної діяльності учнів. Розв'язуючи їх, діти вчаться критично сприймати умову задачі, ілюструвати її.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Коли гусак стоїть на двох лапках, його маса 4 кг. Яка маса гусака, якщо він стане на одну лапку? (4 кг)
2. Пара коней пробігла 20 км. Скільки км пробіг один кінь? (20 км)
3. Щоб зварити 1 кілограм м'яса, потрібна 1 година. За який час звариться півкілограма м'яса? (за 1 год)
4. Одна сторона квадрата 5 см, а друга – на 2 см більша. Обчислити площу квадрата. (У квадрата всі сторони рівні)

5. Двоє хлопчиків грали в шахи 1 год 20 хв. Скільки хвилин грав кожен із суперників? (1 год 20 хв)
6. Ціна книжки 31 грн. Книжка дорожча за обкладинку на 11 грн. Визначити ціну книжки. (31 грн.)
7. Два хлопчики разом йшли до школи і по дорозі знайшли 10 копійок. Скільки грошей знайдуть 4 хлопчики? (10 коп.)
8. Кріль важить 2 кг та ще стільки. Скільки важить його половина? Скільки важить кріль? (2 кг, 4 кг)
9. Який годинник показує точну годину двічі за добу? (Зупинений)
10. Який рік тягнеться один день? (Новий рік)
11. Що буде сороці на сьомому році? (Наступить восьмий)
12. Який годинник не має стрілок? (Сонячний)
13. Термометр показує 15 градусів. Яку температуру покажуть два таких термометри? (15 градусів)
15. Сашко витрачає на дорогу до школи 10 хвилин. Скільки часу він витратить, якщо піде разом з другом? (10 хв)
16. Маса мішка цукру на 50 кг більша, ніж половина мішка з цукром. Яка маса мішка з цукром? (100 кг)
17. Один насос за одну хвилину викачує 1 т води. За скільки хвилин 5 таких насосів викачають 5 т води? (1хв)
18. Мама з сином їхали в електриці. Мама запитала сина: «В якому по порядку вагоні ми їдемо?» Син відповів: «У шостому. Якщо лічити з голови поїзда або у третьому, якщо лічити з хвоста.» Скільки вагонів у електриці? (8)
19. Довжина однієї сторони шкільного саду дорівнює 32 м. Цю сторону загородили парканом з дошок. Причому кожні 4 м закопували стовп. Скільки всього стовпів знадобилось на паркан? (9 стовпів)
20. Є 5 квадратів зі сторонами по 4 см. З усіх квадратів склеїли прямокутник.

21. Ширина місця склеювання становить 1 см. Яка довжина прямокутника? (16 см)
22. Є два пакети. Один вміщує 300 г цукрового піску, а другий – 650 г. Як за допомогою цих пакетів відсипати 1 кг цукру? ($650 \cdot 2 - 300$)
23. Батькові 37 років, а сину 12. Скільки років доньці, якщо через 15 років вік доньки й сина дорівнюватиме віку батька? (10 р.)
24. Скільки разів треба розпиляти семиметрову колоду на частини, завдовжки 1 м? (6)
25. У кімнаті є годинник. Він відбиває цілі години. Скільки ударів на добу робить цей годинник? (180 ударів).
26. У двох баках було однакове число літрів води. Коли з першого взяли $\frac{1}{4}$ води, а з другого 240 л, то в обох баках залишилась однакова кількість води. Скільки літрів води було в баках разом? (1920 л)
27. Як ви гадаєте, за який проміжок часу можна вдвох з'їсти пуд солі? (Приблизно 2 роки, якщо кожен день з'їдати 10 г солі кожному)
28. Сто курей за сто днів з'їдають 100 пудів зерна. Скільки пудів зерна з'їдять 10 курей за 10 днів? (1 пуд)
29. У мішку 100 кг зерна. Як поділити це зерно на дві частини, щоб у одній було на 20 кг більше, ніж у другій? (40 кг і 60 кг)

Задачі з логічним навантаженням

Задачі з логічним навантаженням сприяють розвитку творчих здібностей учнів, готують їх до навчання в старших класах, корисні для використання і на уроках, і під час проведення математичних змагань, олімпіад, і для організації диференційованої домашньої роботи школярів.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Дідові 64 роки, його синові 40 років, а онукові – 12. Через скільки років вік діда дорівнюватиме сумі років сина й онука? (через 12 років)

2. Периметр земельної ділянки прямокутної форми дорівнює 900м, а ширина її на 44 м менша, ніж довжина. Знайти ширину і довжину ділянки. (203 м, 247 м)

3. Є 50 монет по 10 к. і 25 к. загальною вартістю 9 грн 50 к. Скільки окремо монет по 10 к. і 25 к.? (20м, 30м)

4. Сергій на запитання, скільки йому років, відповів, що йому разом з Петриком тепер 36 років, а 6 років тому він був старший за Петрика утричі. Скільки років Сергієві тепер? (24 р.)

5. Батькові 46 років, а синові – 10. Через скільки років батько буде втричі старший за сина? (через 8 років)

6. Галині і Олені разом 26 років, а 3 роки тому Олена була старша від Галини в 4 рази. Скільки років Галині тепер? (19 р.)

7. Марії і Олені разом 16 років, а через 4 роки Олена буде втричі старша за Марію. Скільки років кожній дівчині тепер? (2р., 14 р.)

8. Дідусеві 53 роки, а онукові – 3. Через скільки років дідусь буде в 6 разів старший за онука? (через 7 років)

9. Будівельна бригада витратила крейди у три рази більше, ніж алебастру, але на 23 т менше, ніж цементу, витрата якого була в 3 рази менша від витрати вапна. Знайти витрати кожного з цих матеріалів, якщо всього їх використано 812 т. (135 т, 45 т, 158 т, 474 т)

10. Відстань у 1220 км турист долав по черзі автомобілем протягом 6 год, далі поїздом – 15 год і пароплавом – 7 год. Швидкість автомобіля у 2 рази більша, ніж швидкість поїзда і у 4 рази більша, ніж швидкість пароплава. Знайти шлях, який подолав турист на кожному виді транспорту. (480 км, 600 км, 140 км).

Розділ III. Окремі види текстових задач з математики у 6-му класі та методика їх розв'язування.

3.1. Задачі на рух

Формула шляху

В задачах на рух розглядаються три взаємопов'язані величини: S – відстань (пройдений шлях), t – час руху, v – швидкість руху (відстань, яка пройдена за одиницю часу).

Відстань – це добуток швидкості та часу $S = v \cdot t$

Швидкість – це частка від ділення відстані на час $v = \frac{S}{t}$

Час – це частка від ділення відстані на швидкість $t = \frac{S}{v}$

Всі дані в задачах на рух вимірюються однаковими величинами (наприклад, км, год, км/год або м, хв, м/хв тощо).

В задачах на рух можливі такі випадки:

- *рух тіл назустріч одне одному*

При розв'язуванні задач на зустрічний рух доцільно використовувати поняття «швидкість зближення». Швидкість зближення в цих задачах – це сума швидкостей об'єктів руху.

- *рух тіл у протилежних напрямках*

При розв'язуванні задач на рух в протилежних напрямках доцільно використовувати поняття «швидкість віддалення». Швидкість віддалення в цих задачах – це сума швидкостей об'єктів руху.

- *рух тіл в одному напрямку*

При розв'язуванні задач на рух в одному напрямі при одночасному початку руху доцільно використовувати поняття «швидкість зближення» і «швидкість віддалення». Швидкість зближення і швидкість віддалення в цих задачах – це різниця швидкостей об'єктів руху (від більшої швидкості віднімаємо меншу).

Задача № 1. Відстань між автомобілями 345 км. На якій відстані вони будуть знаходитися через дві години, якщо швидкість одного 72 км/год, а другого – 68 км/год, і вони одночасно виїдуть назустріч один одному.

Розв'язання

І спосіб

1) $72 \cdot 2 = 144$ (км) – відстань, яку проїде 1-й автомобіль за 2 години;

2) $68 \cdot 2 = 136$ (км) – відстань, яку проїде 2-й автомобіль за 2 години;

3) $144 + 136 = 280$ (км) – на таку відстань автомобілі наблизяться один до одного за 2 години;

4) $345 - 280 = 145$ (км) – відстань між автомобілями через 2 години.

Відповідь: 145 км.

II спосіб

1) $72 + 68 = 140$ (км/год) – швидкість зближення автомобілів;

2) $140 \cdot 2 = 280$ (км) – на таку відстань автомобілі наблизяться один до одного за 2 години;

3) $345 - 280 = 145$ (км) – на такій відстані один від одного будуть автомобілі через 2 години.

Відповідь: 145 км.

Задача № 2. З одного лігва одночасно в протилежних напрямках вибігло два тигри. Швидкість одного тигра 48 км/год, а другого – 54 км/год. Яка відстань буде між тиграми через 3 години?

Розв'язання

І спосіб

1) $48 \cdot 3 = 144$ (км) – пробіжить один тигр за 3 год;

2) $54 \cdot 3 = 162$ (км) – пробіжить другий тигр за 3 год;

3) $144 + 162 = 306$ (км) – буде між тиграми через 3 год.

Відповідь: 306 км.

II спосіб

1) $48 + 54 = 102$ (км /год) – швидкість віддалення тигрів;

2) $102 \cdot 3 = 306$ (км) – буде між тиграми через 3 год.

Відповідь: 306 км.

3

а

д

а

ч

Розв'язання

а 1) $18 - 6 = 12$ (км /год) – швидкість зближення велосипедиста і спортсмена;

№ 2) $24: 12 = 2$ (год) – велосипедист дожене спортсмена;

3) $6 \cdot 2 = 12$ (км) – на такій відстані велосипедист дожене спортсмена.

3 Відповідь: через 2 год; 12 км.

.

Завдання для самостійного розв'язання

3. З двох пунктів відстань між якими 24 км, одночасно виїхав велосипедист і спортсмен. Швидкість спортсмена 100 м/хв, а швидкість велосипедиста – 96 м/хв. Через скільки хвилин вони зустрінуться? (1 год)

3. З двох пунктів А і В, відстань між якими 16 км, одночасно виїхали два велосипедисти. Швидкість велосипедиста, який виїхав з пункту В – 12 км/год, а швидкість велосипедиста, який виїхав із пункту А – 18 км/год. Яка відстань буде між велосипедистами через 2 години, якщо відомо, що вони їдуть в протилежних напрямках? (30 км)

3. З двох пунктів А і В, відстань між якими 16 км, одночасно і в одному напрямку виїхали два велосипедисти. Швидкість велосипедиста, який виїхав з пункту В – 12 км/год, а швидкість велосипедиста, який виїхав із пункту А – 18 км/год. Яка відстань буде між велосипедистами через 2 години? (4 км)

4. Бомбардувальник за 4 год пролетів таку відстань, як винищувач за 3 год. Знайдіть швидкість винищувача, якщо відомо, що швидкість бомбардувальника на 400 км/год менша, ніж швидкість винищувача. (1600 км/год)

5. Автомобіліст проїхав за першу годину $\frac{3}{8}$ шляху, за другу годину він проїхав $\frac{1}{5}$ того, що залишилося, а за третю годину $\frac{3}{4}$ суми перших двох ділянок. Скільки ще залишилося проїхати автомобілісту кілометрів, якщо весь шлях становить 40 км? За який час він подолає шлях, який залишився, якщо його швидкість $6\frac{2}{3}$ км/год? (5км, 45 хвилин)

Рух з одночасним виходом

Задача № 1. Відстань між двома станціями 784 км. З цих станцій одночасно назустріч один одному вийшли два поїзди і зустрілися через 8 годин. Знайдіть швидкість кожного поїзда, якщо швидкість першого на 10 км/год більша, ніж швидкість другого.

Розв'язання

I спосіб

1) $784:8=98$ (км) – на скільки кілометрів зближались поїзди щогодини?

2) $98-10=88$ (км) – на скільки кілометрів зближались б поїзди щогодини, якби перший мав таку саму швидкість, як і другий?

3) $88:2=44$ (км/год) – з якою швидкістю їхав другий поїзд?

4) $44+10=54$ (км/год) – з якою швидкістю їхав перший поїзд?

II спосіб

1) $10 \cdot 8=80$ (км) – на скільки кілометрів менше проїхав до зустрічі другий поїзд, ніж перший?

2) $784-80=704$ (км) – на скільки кілометрів зблизилися б поїзди за 8 год, якби перший мав таку саму швидкість, як і другий?

3) $704:2=352$ (км) – скільки кілометрів проїхав до зустрічі другий поїзд?

4) $352:8=44$ (км/год) – з якою швидкістю їхав другий поїзд?

5) $44+10=54$ (км/год) – з якою швидкістю їхав перший поїзд?

III спосіб

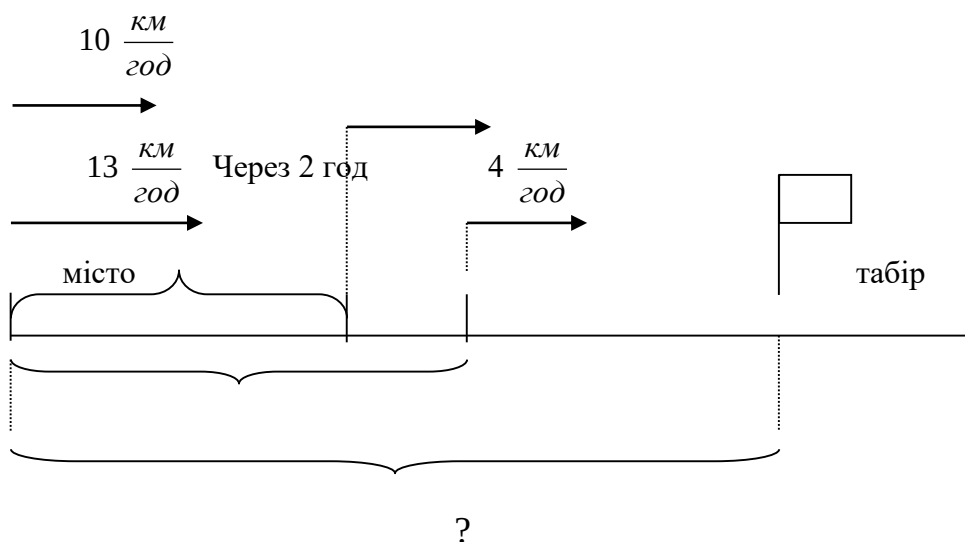
Нехай другий поїзд їхав зі швидкістю x км/год, тоді швидкість першого становила $(x+10)$ км/год. За 8 год вони проїхали відповідно $8x$ і $8(x+10)$ км. У задачі сказано, що сума цих відстаней дорівнює 784 км. Отже, $8x+8(x+10)=784$,

$$8x+8x+80=784, \quad 16x=704, \quad x=44; \quad x+10=54.$$

Відповідь: 54 км/год і 44 км/год.

Задача № 2. Два велосипедисти виїхали одночасно з міста до спортивного табору. Один їхав зі швидкістю 10 км/год, а другий – 13 км/год. Через 2 години другий велосипедист проколов камеру, тому далі він йшов пішки зі швидкістю 4 км/год. На якій відстані від міста перший велосипедист дожене другого? (див. схему 6)

Схема 6.



I спосіб

- за 2 години велосипедисти подолують різні відстані: другий проїде більшу відстань, ніж перший тому що в нього швидкість більше;
- до місця зустрічі обидва велосипедисти подолують однакову відстань;
- до місця зустрічі обидва велосипедисти рухатимуться однаковий час, тому що вони вирушили одночасно і закінчать рухатися теж одночасно.

1) $10 \cdot 2 = 20$ (км) – подолає перший велосипедист за 2 год;

2) $13 \cdot 2 = 26$ (км) – подолає другий велосипедист за 2 год;

3) $26 - 20 = 6$ (км) – на ст. випередить другий велосипедист першого за 2 год;

4) $10 - 4 = 6$ (км) – на стільки наздоганяв другого перший за кожну годину;

5) $6: 6 = 1$ (год) – через стільки годин, після початку руху пішки другим велосипедистом його наздожене перший велосипедист;

6) $4 \cdot 1 = 4$ (км) – пройде другий велосипедист пішки;

7) $26 + 4 = 30$ (км) – подолає всього другий велосипедист до зустрічі, а тому на цій відстані від міста перший велосипедист наздожене другого.

II спосіб

1) $10 \cdot 2 = 20$ (км) – подолає перший велосипедист за 2 год;

2) $13 \cdot 2 = 26$ (км) – подолає другий велосипедист за 2 год;

3) $26 - 20 = 6$ (км) – на ст. випередить другий велосипедист першого за 2 год;

4) $10 - 4 = 6$ (км) – на стільки наздоганяв другого перший за кожну годину;

5) $6: 6 = 1$ (год) – через стільки годин, після початку руху пішки другим велосипедистом його наздожене перший велосипедист;

6) $2 + 1 = 3$ (год) – рухався перший велосипедист до зустрічі;

7) $10 \cdot 3 = 30$ (км) – подолає перший велосипедист до зустрічі, а тому на цій відстані від міста перший велосипедист наздожене другого.

III спосіб

1) $13 - 10 = 3$ (км) – на стільки відставав перший велосипедист від другого, коли другий їхав;

2) $3 \cdot 2 = 6$ (км) – на стільки кілометрів відстав перший велосипедист від другого за 2 год;

3) $10 - 4 = 6$ (км) – на стільки кілометрів за кожну годину наздоганяв перший другого, коли другий пішов пішки;

4) $6: 6 = 1$ (год) – через стільки годин перший наздожене другого;

5) $2 + 1 = 3$ (год) – час руху першого велосипедиста;

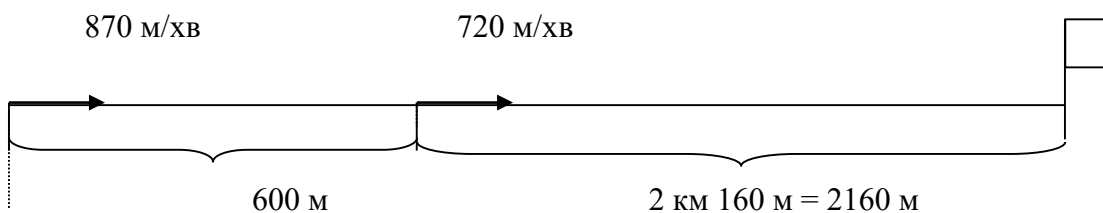
6) $10 \cdot 3 = 30$ (км) – відстань, яку подолає перший велосипедист до місця зустрічі, відстань від міста.

Відповідь: на відстані 30 км від міста перший велосипедист наздожене другого.

Задача № 3. Лисиця помітила зайця, коли той був на відстані 600 м від неї. Зайцю до місця, де він міг би сховатися від лисиці, бігти 2 км 160 м. Чи піймає лисиця зайця, якщо бігтиме зі швидкістю 870 м/хв? (швидкість зайця 720м/хв)

(див. схему 7)

Схема 7.



Попереднє міркування

- Швидкість зайця менша за швидкість лисиці, тому відстань між ними буде за кожну хвилину скорочуватися.

- Лисиця наздожене зайця, коли відстань між ними скоротиться на 600 м.

I спосіб

$870 - 720 = 150$ (м) – на стільки скорочується відстань між лисицею і зайцем за кожну хвилину;

$600 : 150 = 4$ – стільки хвилин потрібно лисиці, щоб наздогнати зайця;

$2160 : 720 = 3$ – стільки хвилин потрібно зайцю, щоб добігти до місця, де він може сховатися.

II спосіб

1) $2160 : 720 = 3$ – стільки хвилин потрібно зайцю, щоб добігти до місця, де він може сховатися;

2) $870 - 720 = 150$ (м) – на стільки скорочується відстань між лисицею і зайцем за кожну хвилину;

3) $150 \cdot 3 = 450$ (м) – на стільки кілометрів скоротиться відстань між лисицею та зайцем за 3 хвилини;

$450 < 600$, тому лисиця не встигне догнати зайця.

Відповідь: лисиця не піймає зайця.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Петрик почав наздоганяти Олега, коли той був від нього на відстані 960 м, і наздогнав його через 8 хв. Швидкість Олега у 2 рази менша швидкості Петрика. Знайди швидкість Петрика. (240 м/хв)

2. З двох пунктів, відстань між якими 12 км, одночасно вийшли назустріч один одному два пішоходи. Швидкість одного з них $3\frac{2}{3}$ км/год, швидкість другого 4 км/год. Яка відстань між ними буде через $\frac{3}{2}$ год? (500 м)

3. З двох пунктів, відстань між якими 11 км, одночасно вийшли назустріч один одному два пішоходи. Швидкість одного з них дорівнює $4\frac{1}{5}$ км/год, а швидкість другого – в $1\frac{13}{15}$ разів менша. Чи зустрінуться пішоходи через $1\frac{2}{3}$ год? (ні)

4. З двох міст, віддалених одне від одного на 1680 км, вийшли одночасно назустріч один одному 2 потяги. Перший потяг проходить усю відстань за 21 год, а другий – за 28 год. Через скільки годин вони зустрінуться? (12 год)

5. На даний час відстань між таксистами 345 км. На якій відстані вони будуть знаходитися через 2 год, якщо швидкість одного 72 км/год, а іншого – 68 км/год й вони виїжджають одночасно назустріч один одному? (145 км)

Рух з неодноразовим виходом

Можна використати теоретичні блоки до теми 3 «Задачі на рух» для 5 класу даного посібника.

Задача № 1. З міста *A* в місто *B* виїхав вантажний автомобіль. Через 30 хв. назустріч йому з міста *B* виїхав легковий автомобіль, швидкість якого на 20 км/год. більша, ніж вантажного. Коли легковий автомобіль через 2,2 год.

після свого виїзду з міста B приїхав у місто A , вантажному залишилося проїхати до B ще 4 км. Знайти відстань між містами.

Розв'язання

Пропонується хід розв'язання подати у вигляді таблиці (див. табл. 14)

Таблиця 14.

Автомобілі	Час руху (t), год	Швидкість (v), км/год	Відстань (s), км
Легковий	2,2	x	$2,2x$ ←
Вантажний	$2,2 + 0,5$	$x-20$	$(2,2 + 0,5)(x-20)$ на 4 <

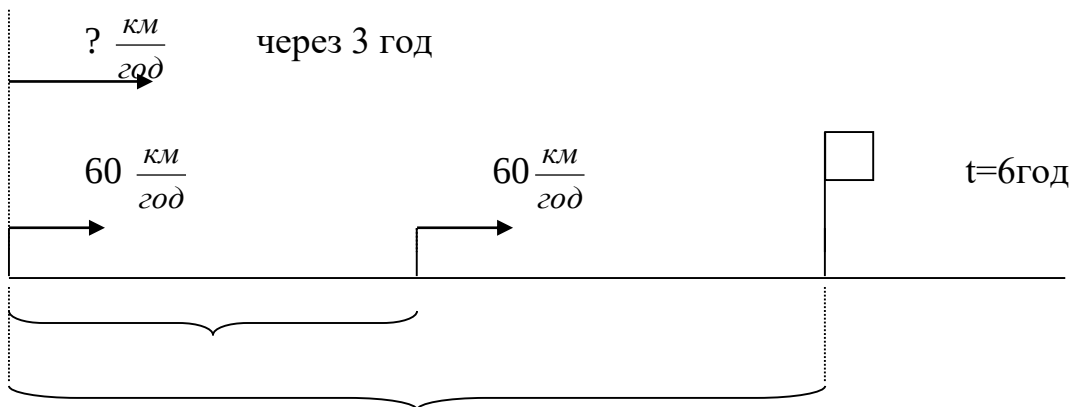
$$2,2x = 2,7(x-20) + 4, \quad 2,2x = 2,7x - 54 + 4, \quad 0,5x = 50, \quad x = 100; \quad 2,2 \cdot 100 = 220(\text{км}).$$

Відповідь: 220 км

Задача № 2. Зі станції вийшов електропоїзд зі швидкістю 60км/год. Через 3 години з тієї самої станції в тому самому напрямі вийшов другий електропоїзд. З якою швидкістю мав їхати другий електропоїзд, щоб наздогнати перший за 6 год? (див. схему 8)

Розв'язання

Схема 8.



Попереднє міркування

- Якщо рух розпочався неодноразово, то перший електропоїзд за 3 години встиг подолати певну відстань.

- Щоб наздогнати перший електропоїзд, другий повинен рухатися зі швидкістю більшою за 60км/год.

- Другий електропоїзд повинен наздогнати перший за 6 годин, тому 6 годин – це час руху другого електропоїзду.

- Перший електропоїзд вирушив раніше, тому він був у дорозі більше, ніж 6 годин.

- До зустрічі кожний електропоїзд пройшов однакову відстань.

I спосіб

1) $60 \cdot 3 = 180$ (км) – пройхав перший електропоїзд до виходу другого;

$60 \cdot 6 = 360$ (км) – пройхав перший електропоїзд після виходу другого;

3) $180 + 360 = 540$ (км) – пройхав перший або другий електропоїзд до місця зустрічі;

4) $540 : 6 = 90$ (км/год) – швидкість другого електропоїзду.

II спосіб

1) $3 + 6 = 9$ (год) був у дорозі перший електропоїзд;

2) $60 \cdot 9 = 540$ (км) пройхав перший або другий електропоїзд до місця зустрічі;

3) $540 : 6 = 90$ (км/год) – швидкість другого електропоїзду.

Відповідь: 90 км/год.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Дівчинка почала наздоганяти подругу, коли відстань між ними була 60 м. Швидкість першої дівчинки – 100 м/хв, а швидкість другої дівчинки 90 м/хв. Через скільки хвилин перша дівчинка наздожене другу? (через 6 хв)

2. Рома і Саша вийшли зі школи з швидкістю 50 м/хв, Коля вийшов за ними, через 6 хв, зі швидкістю 80 м/хв. Через скільки хвилин Коля наздожене друзів? (10 хв)

3. Із міста А в місто В виїхав вантажний автомобіль. Через 30 хв слідом за ним виїхав легковий автомобіль, який прибув у місто В на 10 хв раніше за вантажний. Знайти відстань між містами, якщо швидкість вантажного автомобіля 60 км/год, а легкового – 80 км/год. (160 км)

4. Відстань між містами А и В 720 км. З міста А в місто В йшов швидкий поїзд зі швидкістю 80 км/год. Через 2 години назустіч йому з міста В в місто

А вийшов пасажирський поїзд зі швидкістю 60 км/год. Через скільки годин після виходу пасажирського поїзда ці поїзди зустрінуться? (4 год)

5. З пункту *A* в пункт *B* одночасно вирушили автомобіль і автобус. Через 2 год 30 хв автомобіль прибув до пункту *B*, а автобус перебував за 80 км від *B*. Знайти швидкість автобуса, якщо швидкість автомобіля у 2,6 рази більша за швидкість автобуса. (20 км/год)

6. З міста *B* у місто *C* виїхав вантажний автомобіль зі швидкістю 60 км/год. Через годину з міста *A*, яке знаходиться на 20 км далі від міста *C*, ніж місто *B*, виїхав легковий автомобіль зі швидкістю 80 км/год. У місто *C* автомобілі прибули одночасно. Яка відстань між містами *A* і *C*? (320 км)

7. Від двох пристаней, відстань між якими дорівнює $5\frac{5}{9}$ км, одночасно в одному напрямі відійшли човен і катер (човен рухавсь попереду катера). Швидкість катера дорівнює 14 км/год і становить $2\frac{1}{6}$ швидкості човна. Через скільки годин після початку руху катер наздожене човен? ($1\frac{2}{3}$ год)

Комбіновані задачі на рух

Можна використати теоретичні блоки до теми 3 «Задачі на рух» для 5 класу даного посібника.

Задача № 1. Михайлик і Віталій вийшли назустріч один одному із двох сіл, відстань між якими 20 км. Швидкість Михайлика 6 км/год, а Віталія – 4 км/год. Одночасно з Михайликом назустріч Віталію вилетіла муха. Долетівши до Віталія, вона розвернулася і полетіла до Михайлика, і так літала між ними доти, поки вони не зустрілися. Скільки кілометрів налітала муха, якщо її швидкість 11 км/год?

Розв'язання

Звичайно, розв'язуючи цю задачу, можна вдатися до обчислення відстаней, які щоразу пролітала муха. Однак є більш зручний спосіб розв'язання, адже насправді муха летіла стільки часу, скільки витратили наші герої, щоб зустрітися, тобто $20:(6+4) = 2$ (год).

Знаючи, що швидкість мухи становила 11 км/год, легко обчислити, що відстань, яку вона пролетіла, $2 \cdot 11 = 22$ (км).

Відповідь: 22 км.

Задача № 2. За начальником одного з відділів зранку заїжджала машина й привозила його на роботу у визначений час. Якось начальник вирішив прогулятися. Він вийшов за годину до приїзду машини й пішов їй назустріч. Дорогою він зустрів машину і прибув на роботу на 20 хвилин раніше, ніж звичайно. Скільки часу тривала прогулянка?

Розв'язання

20 хвилин, які зекономив начальник, – це час, за який машина могла б доїхати від місця зустрічі з начальником і повернутися назад. Тобто зустріч відбулася на 10 хвилин раніше, ніж звичайно. Оскільки начальник вийшов на годину раніше, прогулянка тривала 50 хвилин.

Відповідь: 50 хвилин.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Собака женеться за мисливцем зі швидкістю $64\frac{1}{4}$ м/хв, а мисливець втікає від неї зі швидкістю $73\frac{3}{4}$ м/хв. З якою швидкістю змінюється відстань між собакою і мисливцем? Якою вона буде через 8,3 хв, якщо зараз між собакою і мисливцем 58,6 м? (9,5 м/хв; 137,45 м/хв)

2. Два велосипедисти виїхали одночасно з міста до табору відпочинку. Один їхав зі швидкістю 10 км/год, а другий – 13 км/год. Через 2 години другий велосипедист проколов камеру, тому далі він йшов пішки зі швидкістю 4 км/год. На якій відстані від міста перший велосипедист наздожене другого велосипедиста? (30 км)

3. Поїзд проходить міст довжиною 450 метрів за 45 секунд, а повз будку стрілочника він проходить за 15 секунд. Обчисліть довжину поїзда і його швидкість. (225 метрів; 15 м/с)

4. Знайдіть швидкість і довжину потяга, якщо він проїжджає уздовж платформи завдовжки 378 м за 25 секунд, а повз нерухомого пасажира – за 7 секунд. (147 м)

5. Перший турист, проїхавши 1,5 год на велосипеді зі швидкістю 16 км/год, зупиняється на 1,5 год, а потім продовжує рух з попередньою швидкістю. Через 4 год після початку подорожі першого туриста навздогін йому вирушає на мотоциклі другий турист зі швидкістю 56 км/год. Яку відстань вони пройдуть, перш ніж другий турист наздожене першого? (56 км)

Задачі на рух у водоймах. Комбіновані задачі на рух у водоймах.

Рух об'єктів по воді:

- власна швидкість (тобто швидкість руху в стоячій воді) – $v_{\text{вл}}$;
- швидкість течії – $v_{\text{теч}}$;
- швидкість проти течії $v_{\text{пр. теч}} = v_{\text{вл}} - v_{\text{теч}}$;
- швидкість за течією $v_{\text{за теч}} = v_{\text{вл}} + v_{\text{теч}}$;

Задача № 1. Човен проплив шлях між двома пристанями за 6,5 год, а на зворотний шлях витратив 4,5 год. Знайти відстань між пристанями, якщо швидкість течії 4 км/год.

Нехай власна швидкість човна $v_{\text{вл}} = x$ км/год. (див. табл. 15)

Таблиця 15.

Рух човна	Час руху (t), год	Швидкість (v), км/год	Відстань (s), км
За течією	4,5	$x + 4$	$4,5(x + 4)$
Проти течії	6,5	$x - 4$	$6,5(x - 4)$

Розв'язання

$$4,5(x+4)=6,5(x-4),$$

$$4,5x + 18 = 6,5x - 26,$$

$$2x=44,$$

$$x=22;$$

$$(22 + 4) \cdot 4,5 = 117 \text{ (км)}$$

Відповідь: 117 км.

Задача № 2. Катер за 20 хв за течією і 15 хв проти течії пропливає на 2 км більше, ніж за 30 хв озером. Знайти швидкість течії, якщо власна швидкість катера 22 км/год.

Нехай швидкість течії $v_{течії} = x$ км/год (див. табл. 16)

Таблиця 16.

Рух катера	Час (t), год	Швидкість (v), км/год	Шлях (s), км
За течією	$\frac{1}{3}$	$22 + x$	$\left. \begin{array}{l} (22 + x) \cdot \frac{1}{3} \\ (22 - x) \cdot \frac{1}{4} \end{array} \right\} \text{ на 2 км } \rightarrow$
Проти течії	$\frac{1}{4}$	$22 - x$	
Озером	$\frac{1}{2}$	22	
			$22 \cdot \frac{1}{2}$

Розв'язання

$$\frac{1}{2}(22 + x) + \frac{1}{4}(22 - x) = \frac{1}{2} \cdot 22 + 2,$$

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x = 13 - 12\frac{5}{6},$$

$$\frac{1}{12}x = \frac{1}{6},$$

$$x = 2(\text{км/год})$$

Відповідь: 2 км/год.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Катер пройшов відстань від пристані А до пристані В і повернувся назад. Від А до В катер ішов 2 год, а через 2,5 год після відправлення від

пристані *B* йому залишилося пройти до пристані *A* ще 5 км. Знайти відстань між пристанями, якщо швидкість течії річки 4 км/год. (60 км)

2. Відстань між двома містами річкою 5 км. За течією катер проходить цю відстань за 10 хв, а проти течії – за 15 хв. Знайти власну швидкість катера. (25 км/год)

3. Швидкість руху пароплава за течією 28 км/год. Швидкість течії 3 км/год. Знайти швидкість руху пароплава проти течії. (22 км/год)

4. Теплохід проходить $40\frac{1}{2}$ км за течією річки за $1\frac{1}{2}$ год. На скільки більше часу витратить теплохід на зворотний шлях, якщо швидкість течії річки дорівнює $3\frac{3}{8}$ км/год? (на $\frac{1}{2}$ год)

5. Теплохід проходить відстань між двома пристанями і повертається назад (без зупинки) за 4,5 год. Швидкість теплохода в стоячій воді становить 18 км/год, а швидкість течії річки – 2 км/год. Знайдіть відстань між пристанями. (40 км)

6. Пароплав пройшов проти течії 24 км і повернувся назад, витративши на дорогу назад на 20 хв менше, ніж при русі проти течії. Знайдіть його власну швидкість в нерухомій воді, якщо швидкість течії дорівнює 3 км/год. (21 км/год)

7. Швидкість човна за течією 21,8 км/год, а проти течії 17,2 км/год. Знайти власну швидкість човна і швидкість течії річки. (19,5 км/год; 2,3 км/год)

8. Швидкість катера по озеру дорівнює 16 км/год. Який шлях пройде катер за 3 години? (48 км)

9. Моторний човен за 4 години проплив по озеру 60 км. Знайдіть власну швидкість моторного човна. (15 км/год)

10. Скільки часу буде потрібно човну, власна швидкість якого 28 км/год, щоб проплисти по озеру 84 км? (3 год)

11. Швидкість течії річки 2 км/год. На скільки кілометрів річка відносить будь-який предмет (тріску, пліт, човен) за 1 год, за 4 години? (2 км/год, 8 км/год)

12. Власна швидкість катера 21 км/год, а швидкість течії річки 4 км/год. Знайдіть швидкість катера за течією річки. (25 км/год)

3.2. Задачі на спільну роботу

Задачі на роботу з трьома різнойменними величинами (продуктивність праці, час, кількість виконаної роботи)

«Батько може скопати рядок за 30 хвилин, а син – за 40 хвилин. Якщо вони працюватимуть разом, для того щоб скопати цей рядок, їм потрібно більше чи менше часу, ніж 30 хвилин?»

Учні міркують приблизно так: «Потрібно часу менше, ніж 30 хвилин, тому що батькові допомагає син.»

Радимо при розборі задачі на спільну роботу ставити запитання «Більше чи менше?». Відповідь на це запитання попередить можливі помилки у розв'язанні задач на спільну роботу, коли у відповіді отримаємо більше часу, ніж час роботи кожного.

Виходячи з цього, на ступені ознайомлення, пропонуємо такі задачі.

Задача № 1. Одна друкарка за годину друкує 5 сторінок, а інша – 4. Скільки сторінок надрукують за годину обидві друкарки?

Розв'язання з попереднім міркуванням

Більше чи менше, ніж 5, надрукують за 1 годину обидві друкарки? (Більше, тому що першій допомагатиме друга.)

Що треба знати, щоб дізнатися, скільки сторінок надрукують разом обидві друкарки за 1 годину? (Треба знати два числові значення: 1 – скільки сторінок друкує перша друкарка – 5, та скільки сторінок друкує друга друкарка – 4.)

Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією додавання.)

Запишіть розв'язання. ($5 + 4 = 9$ (с.))

Відповідайте на запитання задачі. (Відповідь: 9 сторінок надрукують друкарки, якщо працюватимуть разом.)

Задача № 2. У зв'язку з підвищенням продуктивності праці час, який потрібний для виконання певної роботи, зменшився на $28\frac{4}{7}\%$. На скільки відсотків підвищилась продуктивність праці? (див. табл. 17)

Розв'язання

Якщо прийняти час до його зменшення 100%, то після зменшення він становитиме $100\% - 28\frac{4}{7}\% = 71\frac{3}{7}\%$

Таблиця 17.

Час виконання роботи	Продуктивність праці
100%	100%
$71\frac{3}{7}\%$	x

Продуктивність праці та час виконання певної роботи – величини обернено пропорційні: x буде у стільки разів більшим від 100, у скільки разів 100 більше від $71\frac{3}{7}$. Складемо пропорцію:

$$x: 100 = 100: 71\frac{3}{7},$$

$$x = \frac{100 \cdot 100 \cdot 7}{500} = 140.$$

Отже, продуктивність праці збільшилась на 40%.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Токар виготовляв за годину 40 деталей. Використавши різець з більш міцнішої сталі, він став виточувати на 10 деталей за годину більше. На скільки процентів підвищилась продуктивність праці токаря? (25%)

2. Одна друкарка друкує за годину 5 сторінок, а інша – 4 сторінки. Скільки сторінок вони надрукують за 8 год, якщо працюватимуть разом? (72 сторінки)

3. Бригада виконує деяку роботу за 5,6 год. За який час виконує бригада ту саму роботу, якщо продуктивність праці зростає в 1,4 рази? (4,2 год)

4. Тесляр виготовляє за день 12 рам, а його помічник 7. Скільки рам вони зроблять разом за робочий тиждень (5 днів)? (95 рам)

5. Треба пофарбувати 150 рам. Один муляр може це зробити за 15 днів, другий – за 10 днів. За скільки днів виконають цю роботу обидва муляри, якщо працюватимуть разом? (6 днів)

6. Одна бригада може виконати певну роботу за 10 днів, друга — за 15 днів. За скільки днів обидві бригади, працюючи разом, виконають цю роботу? (6 днів)

7. Одна друкарка може надрукувати рукопис за 4 год, а друга — за 6 год. За який час можуть виконати цю роботу обидві друкарки, працюючи разом? Всю роботу, яку потрібно для надрукування рукопису приймемо за 1. (2,4 год)

8. Через, одну трубу басейн наповнюється водою за 4 год, а через другу — за 6 год. Яку частину басейну наповнять водою дві труби, працюючи разом, за 1 год? ($\frac{5}{12}$ басейну)

9. Один кран наповнює ванну за 15хв, а другий – за 12 хв. Яку частину ванни наповнять крани за 1 хв спільної роботи? ($\frac{3}{20}$ ванни/хв)

10. Карлсон з'їдає банку варення за 3 хв, а Малюк таку ж банку за 6 хв. За скільки хвилин разом з'їдять банку варення? (2 хв)

Задачі на спільну роботу

Опорна схема та способи розв'язування задач на спільну роботу (див. схему 9)

Схема 9.

I спосіб	II спосіб
$A = N_1 \cdot t \pm N_2 \cdot t$	$A = (N_1 \pm N_2) \cdot t$
	$t = A : (N_1 \pm N_2)$
$N_1 = (A \pm N_2 \cdot t) : t$	$N_1 = A : t \pm N_2$

N_1 – продуктивність праці першого виконавця;

N_2 – продуктивність праці другого виконавця;

$(N_1 > N_2)$, A – загальний виробіток при спільній праці;

t – час спільної праці.

Задача № 1. Перша друкарка може виконати всю роботу, працюючи сама, за 6 год, а друга – за 8 год. Спочатку 1 год працювала друга, потім ще 2 год вони працювали разом, після чого перша друкарка закінчувала роботу сама. Скільки часу перша друкарка закінчувала роботу? (див. табл. 18)

Таблиця 18.

Друкарка	Може виконати роботу, год	Продуктивність праці	Працювали, год	Зробили
I	6	$\frac{1}{6}$	$2 + X$	$\frac{1}{6}(2 + X)$
II	8	$\frac{1}{8}$	$1 + X$	$\frac{1}{8} \cdot 3$

Розв'язання

$$\frac{1}{6}(2 + X) + \frac{3}{8} = 1, \quad \frac{1}{6}X = \frac{7}{24}, \quad X = 1\frac{3}{4} \text{ (год)}.$$

Відповідь: 1 год 45 хв

Задача № 2. Перший робітник може виготовити замовлену партію деталей за 10 год, а другий таку саму партію – за 8 год. Спочатку вони виготовили 20 деталей, а потім перший робітник 2 год працював сам, після чого вони ще 3 год працювали разом. Скільки деталей вони зробили? (див. табл. 19)

Таблиця 19.

Робітники	Може виконати всю роботу, год	Продуктивність праці	Працювали, год	Виготовили деталей
I	10	$\frac{1}{10}$	(2 + 3)	$20 + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{10} X \cdot 5 \\ \frac{1}{8} X \cdot 3 \end{array} \right\} X$
II	8	$\frac{1}{8}$	3	

Розв'язання

$$20 + \frac{1}{10} X \cdot 5 + \frac{3}{8} X = X, \quad 20 + \frac{1}{2} X + \frac{3}{8} X = X, \quad \frac{1}{8} X = 20, \quad X = 160 (\text{деталей}).$$

Відповідь: 160 деталей виготовили робітники.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Нова машина може викопати канаву за 6 годин, а стара за 9 годин. Яку частину канави залишилося викопати після того, як обидві машини працювали протягом години? ($\frac{13}{18}$)

2. Іван виконує свою роботу за 2 години, а Микола — за 3 години. Скільки часу вони витратять, якщо будуть виконувати цю роботу разом? (1,2 год)

3. Кожний з двох робітників однієї кваліфікації може виконувати замовлення за 15 годин. Через 3 години після того, як один з них приступив до виконання замовлення, до нього приєднався другий робітник, і роботу над замовленням вони довели до кінця вже разом. Скільки годин роботи витратили на виконання всього замовлення? (9 год)

4. Перша труба пропускає 15 літрів води за хвилину, а друга — 10. За скільки хвилин дві труби наповнять басейн, об'ємом 100 літрів? (4 хвилини)

5. Два робітники виконували роботу за два дні. Якщо б перший робітник пропрацював 2 дні, а другий 1 день, то вони разом виконали б $\frac{5}{6}$ всієї роботи. За скільки днів виконає цю роботу перший робітник? (3 год)

6. Через I-й кран порожній бак заповнюється через 15 хв, а через II-й кран повний бак спустошується за 12 хв. Яка частина бака буде заповнена водою через 1 хв, якщо відкрити обидва крани одночасно при умові, що спочатку бак повний? ($\frac{59}{60}$ бака)

7. Дві бригади, працюючи разом, зорали поле за 8 год. За скільки годин може зорати поле кожна бригада, працюючи самостійно, якщо другій бригаді на це потрібно на 12 год більше, ніж першій? (12 год; 24 год)

8. Перша труба може заповнити басейн на 24 год швидше, ніж друга. Спочатку відкрили другу трубу, а через 8 год – першу. Через 20 год спільної роботи обох труб водою було заповнено $\frac{2}{3}$ басейну. За скільки годин може заповнити басейн кожна труба, працюючи самостійно? (60 год; 84 год)

9. Через I трубу порожній басейн заповнюється за 10 годин, через II трубу повний басейн спустошується за 15 годин. Чи буде заповнений порожній басейн, якщо відкрити разом обидва отвори? За скільки годин? (30 год)

10. Два робітника, працюючи разом, закінчили роботу за 2 дні. За скільки днів закінчить цю ж роботу кожен з них, працюючи окремо, при умові, що якби перший пропрацював 2 дні, а другий – 1 день, то разом вони зробили б $\frac{5}{6}$ усієї роботи? (перший робітник виконає роботу за 3 дні, другий – за 6 днів.)

3.3. Задачі на відсоткові розрахунки

Основні типи задач на відсотки.

Під час роботи з задачами на відсотки можна виділити такі основні поняття: $1\% = \frac{1}{100} = 0,01$

Знаходження відсотків від числа

а) за означенням відсотка

Щоб знайти відсотки від числа, треба:

- Це число поділити на 100 (знайдемо 1%);
- Результат помножити на кількість відсотків.

Задача № 1. Знайти 4% від 20.

Розв'язання

$20:100 = 0,2$ – становить 1%;

$0,2 \cdot 4 = 0,8$.

б) зведення до дробу

Щоб знайти відсотки від числа, треба:

- Записати відсоток дробом;
- Дріб помножити на число.

Задача № 2. Знайти 4% від 20.

Розв'язання

$4\% = 0,04$;

$20 \cdot 0,04 = 0,8$.

в) за допомогою пропорції

- Записати умову задачі у вигляді схеми;
- Скласти пропорцію і розв'язати її (маємо пряму пропорційну залежність).

20 – 100%

x – 4%

$$\frac{20}{x} = \frac{100}{4}, x = 0,8.$$

Знаходження числа за значенням його відсотка

а) за означенням відсотка

- Дане значення поділити на кількість відсотків (1%);
- Результат помножити на 100%.

б) зведення до дробу

- Записати відсоток дробом
- Поділити число на цей дріб.

в) за допомогою пропорції

- Записати умову задачі у вигляді схеми;
- Скласти пропорцію і розв'язати (маємо пряму пропорційну залежність).

Знаходження відсоткового відношення двох чисел

а) за означенням відсотка

- Знайти відношення чисел (поділити);
- Результат записати у відсотках (помножити на 100%).

б) за допомогою пропорції

- Записати умову задачі за допомогою схеми;
- Скласти пропорцію (маємо пряму пропорційну залежність) і розв'язати

її.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Свіжі гриби містять 90% води, а сухі 12%. Скільки можна одержати сухих грибів з 22 кг свіжих? (2,5 кг)

2. Маса крові дорослої людини складає в середньому 7,5% від її загальної маси. Яка кількість крові у людини, якщо її маса – 72 кг? Визначте масу крові свого організму. (5,4кг)

3. На заводі проводять заміну обладнання. Після того як 51 верстат замінили новими, лишилося замінити ще 83% верстатів. Скільки верстатів треба було замінити на заводі? (300)

4. Що відбудеться з ціною товару, якщо спочатку її підвищити на 25%, а потім понизити на 25%? (знизиться на 6,25%)

5. В басейн проведена труба. Внаслідок потрапляння сміття подача води зменшилася на 60%. На скільки процентів внаслідок цього збільшиться час, потрібний для заповнення басейн? (150%)

6. Найстаріше дерево на Землі – остиста сосна. Їй близько 5000 років. Тривалість життя дуба складає 10 % від віку остистої сосни, а листяних дерев – 60 % від тривалості життя дуба. Скільки років живуть листяні дерева? (300 років)

7. Розмах крил маленького кажана на Землі складає 6 см, а пугача – 2м. На скільки відсотків розмах крил пугача більший, ніж кажана? (97%)

Відсоткові обчислення, пов'язані з фінансовими операціями. Формула складних відсотків.

Працівникам фінансових установ доводиться проводити розрахунки, пов'язані з нарахуванням відсоткових грошей. Розглянемо такі задачі в загальному випадку. На практиці часто зустрічаються задачі, у яких доводиться обчислювати відсотки величин, одержаних у результаті нарахування відсотків. Це можна зробити за формулою:

$$A_n = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, \text{ де } A \text{ — це вихідне число, на яке нараховуються відсотки}$$

p , n — кількість нарахувань. Ця формула називається формулою складних відсотків.

Задача № 1. Вкладник поклав у банк 200000 грн. під 7 % річних. Які відсоткові гроші він одержить через 5 років?

Розв'язання

За умовою початкова сума поетапно змінюється. При цьому кожного разу її зміна становить певну кількість відсотків від значення, яке ця величина мала на попередньому етапі. Нехай $A_0 = 200\,000$ грн. — вихідне значення, яке змінюється на сталу кількість $p\%$ n разів, де $p = 7$; $n = 5$, тоді A_5 — сума через n років.

$$A_5 = 200000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)^5 = 200000 \cdot 1,07^5 = 280510 \text{ (грн)}$$

$$\text{Відсоткові гроші: } 280510 - 200000 = 80510.$$

Відповідь: 80510 грн.

Задача № 2. Від тривалого зберігання ячмінь втрачає за перший рік 3 % своєї маси, а за кожний наступний по $i\%$. Скільки залишиться від 100 ц ячменю через 4 роки?

Розв'язання

1) $100 \cdot 0,03 = 3$ (ц) — втрати ячменю за перший рік зберігання;

2) $100 - 3 = 97$ (ц) — маса ячменю після першого року зберігання.

Використаємо формулу складних відсотків.

$$A_n = A_0(1 - \frac{p}{100})^n, \text{ де } p = 1 \%, n = 3, A_0 = 97 \text{ ц.}$$

Оскільки ячмінь втрачає у масі, то у формулі знак «-».

$$A_n = (1 - \frac{1}{100})^3 = 97 - 0,99^3 = 94.$$

Отже, через 4 роки від 100 ц ячменю залишиться 94 ц.

Відповідь: 94 ц.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Початковий внесок в ощадбанк дорівнює 300 доларів, за рік нараховується 3%. Знайдіть суму внеску через 5 років. (≈ 348 доларів)
2. Вкладник вніс до банку 4000 грн. під 6% річних. Скільки грошей буде на його рахунку через два роки? (8480 грн)
3. Сім'я для придбання пральної машини взяла в банку позику 1800 грн терміном на 2 роки під 12% річних. Який прибуток отримає банк через 2 роки? (432 грн)
4. Вкладник поклав до банку 20 000 грн. під 4% річних. Через скільки років на його банківському рахунку буде 21 632 грн? (2 роки)
5. Фірма “Старт” хоче взяти позику 40000 грн в банку для розширення виробництва терміном на 5 років. Із десяти банків міста лише два дають позики: АГРО і ОРГА. Перший банк надає позику під 25% річних, а другий – під 2% на місяць і вимагає бізнес-план на розробку якого потрібно витратити 1000 грн. Який варіант є економічно вигіднішим? (вигіднішим в ОРГА)
6. Вкладник вніс до банку 2000 грн. під 11% річних. На скільки більше від внесеної суми він зможе одержати грошей через 3 роки? (660 грн)
7. Вкладник поклав на депозит \$3000 під 9% річних на 10 років. Яка сума акумулюється наприкінці 10-го року при річній капіталізації? На скільки зросте сума порівняно з початковим внеском? (\$7102,09; \$4102,09)
8. Інвестор вклав 7000 грн під 10% річних при умові нарахування складних процентів щокварталу. Яку суму він отримає через 8 років? (15426,30 грн)

9. Вкладник поклав до банку 10000 грн під 16% річних. Скільки грошей буде на рахунку вкладника через 2 роки? Скільки відсоткових грошей отримає вкладник через 2 роки? (13456 грн; 3456 грн)

10. Населення деякого міста становить 50000 мешканців. Кожного року населення зменшується на 0,3%. яким буде населення цього міста через 6 років? (49107 мешканців)

Задачі на суміші і сплави, розчини

Задача № 1. Сплав містить 83% алюмінію, 10% цинку і 7% олова, причому цинку на 2,7 г більше, ніж олова. Чому дорівнює маса сплаву?

Розв'язання

I спосіб

Нехай 1% становить x г ($x > 0$), тоді в сплаві цинку – $10x$ г, олова – $7x$ г.

За умовою цинку було більше, ніж олова на $(10x - 7x)$ г або на 2,7 г.

Складаємо і розв'язуємо рівняння:

$$10x - 7x = 2,7; \quad x = 0,9.$$

Отже, 1% становить 0,9 г, а маса всього сплаву 100 %.

$$0,9 \cdot 100 = 90 \text{ г} - \text{маса сплаву.}$$

II спосіб

1) знайдемо, на скільки відсотків більше у сплаві цинку, ніж олова.

$$10\% - 7\% = 3\%.$$

Отже, 3% становить 2,7 г.

$$2) 2,7 : 0,3 = 90 \text{ г} - \text{маса сплаву.}$$

Задача № 2. У воді розчинили 180 г солі й одержали 12-відсотковий розчин солі. Скільки грамів води використали для приготування розчину?

Розв'язання

I спосіб

180 г солі становлять 12%;

$$180 : 12 = 15 \text{ г} - \text{становить } 1\%.$$

Маса всього розчину – 100%, $15 \cdot 100 = 1500$ г – маса всього розчину,

$$1500 - 180 = 1320 \text{ г} - \text{маса води.}$$

II спосіб

$$180 - 12\%$$

$$x - 100\%$$

Складемо пропорцію:

$$\frac{180}{x} = \frac{12}{100},$$

$$x = 1500.$$

$$1500 - 180 = 1320 \text{ г} - \text{маса води.}$$

Відповідь: 1320 грамів.

Задача № 3. (стародавній спосіб розв'язання задач на змішування речовин, правило «золотої рибки») У деякої людини були масла на продаж: одне вартістю 10 гривень за відро, друге – 6 гривень за відро. Які частини цих масел потрібно взяти, щоб дістати відро масла вартістю 7 гривень?

Для розв'язання задачі запишемо умову таким чином. (див. рис. 7)

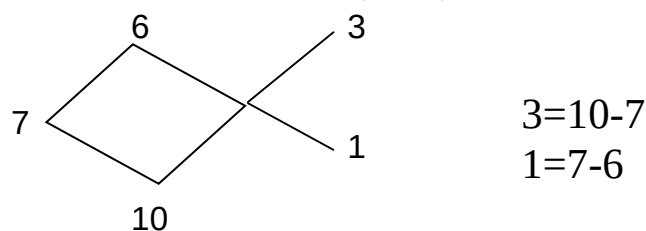


Рис. 7.

Висновок. Дешевого масла потрібно взяти втричі більше, ніж дорогого, тобто $\frac{1}{4}$ відра масла по 10 грн. і $\frac{3}{4}$ відра по 6 грн.

Завдання для самостійного розв'язання

1. У посудину, що містить 2 кг 80%-го водного розчину оцту додали 3 кг води. Знайдіть концентрацію отриманого розчину оцтової кислоти. (32%)

2. 5 літрів вершків жирністю 35% змішали з 4 літрами 20%-них вершків і до цієї суміші додали 1 літр чистої води. Яка жирність одержаної суміші? (25,5%)

3. (на застосування правила «золотої рибки») Є срібло: одне одинадцятої проби, інше – чотирнадцятої. Скільки якого срібла потрібно взяти, щоб отримати 1 фунт срібла дванадцятої проби? ($\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$)

4. Бронза є сплавом олова та міді. Скільки процентів сплаву становить мідь в шматку бронзи, який складається з 6 кг олова та 34 кг міді? (85%).

5. До 15 л 10%-го розчину солі додали 5%-ний розчин солі і одержали 8%-ий розчин. Яку кількість літрів 5%-ного розчину додали? (10 л 5%-ного розчину)

6. Скільки грамів 45-відсоткового розчину солі можна дістати із 300 г рідини, що містить 30% солі? (200 г)

7. Скільки води потрібно долити до 25 г 90-відсоткової кислоти, щоб одержати 75-відсоткову кислоту? (5 г)

8. Скільки слід додати міді до 5 г золота 840-ї проби, щоб одержати золото 750-ї проби? (0,6 г)

5. Сплав містить 10 кг олова та 15 кг цинку. Який процентний вміст олова і цинка в сплаві? (40%; 60%).

Розв'язування більш складних задач на відсотки

Задача № 1. За перший місяць ціна товару підвищилася на 20%, а за другий – ще на 15%. На скільки відсотків зросла ціна товару за два місяці?

Розв'язання

Після першого подорожчання ціна становила $100+20=120\%$ від початкової. Зрозуміло, що відсоток другого подорожчання інший, бо він вираховується від більшого числа: 1% другого подорожчання становить $120:100=1,2\%$ початкової ціни. Тому друге подорожчання становить $1,2 \cdot 15 = 18\%$ початкової ціни. Отже, за два місяці ціна зросла на $20 + 18 = 38\%$.

Задача № 2. Ціна на товар була підвищена на 20%, а потім двічі знижувалася щоразу на 10%. Як змінилася ціна на товар?

Розв'язання

Після подорожчання ціна становила $100+20=120$ (%) від початкової ціни. Перший раз ціна знизилася на $120:100 \cdot 10=12$ (%) і становила $120-12=108$ (%) від початкової ціни. Другий раз ціна товару знизилася на $108:100 \cdot 10=10,8$ (%) і становила $108-10,8=97,2$ (%). Таким чином ціна товару знизилася на $100-97,2=2,8$ (%) від початкової ціни.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Якщо від задуманого числа знайти 60%, а потім від одержаного результату знову знайти 60%, то матимемо 180. Знайти задумане число. (500)
2. У двох бочках води було порівну. Кількість води в першій бочці спочатку зменшилась на 10%, а потім збільшилась на 10%, а в другій бочці навпаки – спочатку збільшилась на 10%, а потім зменшилась на 10%. В якій бочці стало більше води? (в обох бочках після переливань води залишилося порівну)
3. Бригада викосила ділянку за 2 дні. За перший день викосила 50% ділянки і ще 2 га, а за другий день – 25 % того, що залишилося, і ще 6 га. Знайти площу ділянки. (12га)
4. Поділити число 80 на дві частини так, що одна частина становила 60% від другої частини. (30 і 50)
5. Від двадцяти відсоткового розчину оцтової кислоти відлили 20% розчину і долили чистої води до початкової кількості. Цю процедуру повторили ще раз. Яка концентрація одержаного розчину? (12,8 %)

3.4. Задачі на пропорційні величини

Задачі на пропорційний поділ. Задачі з прямо порційними та обернено пропорційними величинами.

Види задач на пропорційне ділення (див. табл. 20)

Таблиця 20.

№ задачі	Величини			Задачі
	ціна	кількість	вартість	
I	Стала	Дано два або більше значень	Дано суму значень, які відповідають кількості. Знайти доданки	Дівчинка купила по однаковій ціні 1 кг груш і 2 кг яблук. Всього вона заплатила 18 грн. Скільки коштували окремо груші і яблука?
II	Стала	Дано суму значень, які відповідають вартості. Знайти доданки	Дано два або більше значень	Дівчинка купила по однаковій ціні груші і яблука, всього 3 кг. За груші вона заплатила 12 грн., а за яблука 6 грн. Скільки було куплено окремо кілограмів яблук і груш?
III	Дано два або більше значень	Стала	Дано суму значень, які відповідають ціні. Знайти доданки	У магазині продали однакову кількість сорочок і штанів. Сорочка коштувала 80 грн., а штани 100 грн. За всі продані речі виручили 540 грн. Скільки коштували окремо сорочки і штани?
IV	Дано суму значень, які відповідають вартості. Знайти доданки	Стала	Дано два або більше значень	У магазині продали однакову кількість сорочок і штанів. Сорочка зі штанами коштувала 180 грн. За всі сорочки виручили 240 грн., а за всі штани 300 грн. Скільки коштувала сорочка і скільки коштували штани?

Завдання для самостійного розв'язання

1. За 8 м тканини заплатили 96 грн. Скільки коштують 15 м такої тканини? (180 грн)
2. Скільки треба взяти картоплі, щоб отримати 100 кг крохмалю, якщо з 30 кг картоплі виходить 5,4 кг крохмалю? (556 кг)
3. Скільки кілограмів масла можна виготовити з 261 кг вершків, якщо з 9 кг вершків виходить 2 кг масла? (58 кг)
4. На пошиття 20 костюмів витратили 83 м тканини. Скільки таких самих костюмів вийде з 58,1 м тканини? (14 костюмів)
5. Потяг проходить відстань між містами за 12 годин при середній швидкості 45 км/год. Із якою швидкістю має їхати потяг, щоб пройти ту саму відстань за 9 годин? (60 км/год)
6. Яблука при сушінні втрачають 84% своєї маси. Скільки треба взяти свіжих яблук, щоб одержати 64 кг сушених? (400 кг)
7. Перший тракторист зорав 40% поля, другий – 35% поля. Яку площу має поле, якщо перший зорав на 4 га більше, ніж другий? (80 га)
8. Два трактори зорали поле за 6 днів. За скільки днів зорюють це поле 4 трактори, якщо будуть працювати з такою самою продуктивністю праці. Скільки тракторів потрібно, щоб зорати це поле за 2 дні? (3 дні, 6 тракторів)
9. Петрик може пройти шлях від будинку до стадіону за 20 хв. За який час він доїде на велосипеді від будинку до стадіону, якщо швидкість його руху на велосипеді у 2 рази більша, ніж швидкість руху пішки? (10 хв)
10. Майстер, працюючи самостійно, виконує роботу за 3 дні, а разом з учнем – за 2 дні. За скільки днів учень може виконати цю роботу самостійно? (6 днів)
11. Із басейну можуть викачати воду за 1 год 15 хв. Через скільки часу після початку роботи в басейні залишиться 0,2 тієї кількості води, яка була спочатку? (1 год)

12. Три трактори зорали поле. Перший трактор зорав 40% усього поля, другий – 80% того, що зорав перший, а третій – решту, 14 га. Скільки гектарів поля зорав другий трактор? (16 га)

13. Один учень стрибнув у довжину на 2,4 м, а стрибок другого був на 15% довший. Яка довжина стрибка другого дня? (2,76 м)

Задачі на розчини, сплави та суміші. Розв'язування задач за допомогою пропорцій.

Задачі на подану тему викликають труднощі, оскільки в них йдеться про складання сумішей, сплавів, розчинів тощо. Розв'язування таких задач пов'язане з поняттями «концентрація», «відсотковий вміст», «вологість» тощо. При розв'язуванні задач, у яких використовується поняття відсоткового складу сумішей, слід чітко уявляти, які саме величини зберігаються при тих чи інших описуваних у задачах процесах, і вміти визначити, які величини в кожному конкретному випадку слід приймати за 100%.

Фактично питання розв'язування задач на відсотки, яке винесено на державну підсумкову атестацію в 9 класі, ретельно опрацьовується лише в 5-6 класах (й епізодично зустрічається в задачах на уроках алгебри та геометрії у 7-9 класах). Тому дуже важливо зараз сформувати сталі, тверді навички розв'язування задач на відсотки, а також, якщо клас готовий до цього, похідних від них задач: задачі на суміші, сплави, відсотковий вміст (що передбачають і складання рівнянь у вигляді пропорцій). Тому на цьому уроці можна запропонувати до розв'язування такі або подібні до них задачі.

Задача № 1. У 85 кг залізної руди міститься 51 кг заліза. Скільки відсотків заліза міститься у залізній руді?

Розв'язання

Нехай x % заліза міститься у руді. Маса всієї руди становить 100 %.
Запишемо:

85 кг – 100%

51 кг – x %

Складаємо пропорцію і розв'язуємо її.

Відповідь: 60%

Задача № 2. Є 9 л 48-відсоткового розчину спирту і 1 л 20-відсоткового розчину. Якої концентрації буде суміш цих розчинів?

Розв'язання

1) $9 \cdot 0,48 = 4,32$ (л) – вміст спирту в першому розчині;

2) $1 \cdot 0,2 = 0,2$ (л) – вміст спирту в другому розчині;

3) $4,32 + 0,2 = 4,52$ (л) – загальна маса спирту в обох розчинах, яка залишається незмінною після їх змішування.

Обчислення концентрації суміші двох розчинів зводиться до відсоткового відношення числа 4,52 (маса чистого спирту) до 10 (маса суміші)

$$\frac{4,52}{10} \cdot 100\% = 45,2\%.$$

Відповідь: 45,2%.

Завдання для самостійного розв'язання

1. У лабораторії є суміш, загальна маса якої на 3,3 кг більша від маси титану, що міститься у ній. Якщо додати до неї 2 кг суміші з 25 % вмісту титану, одержимо суміш, у якій 20 % титану. Визначити початкову масу суміші і відсоток титану в ній. (4 кг; 17,5%)

2. У лабораторії є два ящики порошку. Порошок в одному ящику містить 20 % заліза, у другому – 12 %. Скільки потрібно взяти порошку з кожного ящика, щоб отримати 3,2 кг порошку, що містить 15 % заліза? (з першого ящика потрібно взяти 1,2 кг, а з другого 2 кг порошку)

3. Обчислити масу і пробу сплаву срібла з міддю, знаючи, що при сплавленні його з 3 г чистого срібла можна одержати сплав 900-ї проби, а при сплавленні його з 2 кг сплаву 900-ї проби – сплав 840-ї проби. (3 кг 800-ї проби)

4. Сплав міді та цинку масою 36 кг містить 45 % міді. Яку масу міді потрібно додати до нього, щоб новий сплав містив 60 % міді? (13,5 кг)

5. Сплав масою 320 кг містить 20 % олова і 144 кг свинцю. Визначати відсотковий вміст домішок. (35 % домішок)

6. Скільки потрібно змішати 10 %-го та 15 %-го розчинів солі, щоб одержати 1 кг 12 %-го розчину? (0,6 кг 10 %-го і 0,4 кг 15 %-го)

Задачі комбінованого характеру. Задачі з трьома пропорційними величинами (метод зведення до одиниці, складання двох пропорцій)

Задачі на подану тему викликають труднощі, оскільки в них йдеться про складання сумішей, сплавів, розчинів і т. ін.. розв'язування таких задач пов'язане з поняттями «концентрація», «відсотковий вміст», «вологість» тощо. При розв'язуванні задач, у яких використовується поняття відсоткового складу сумішей, слід чітко уявляти, які саме величини зберігаються при тих чи інших описуваних у задачах процесах, і вміти визначити, які величини в кожному конкретному випадку слід приймати за 100%.

Фактично питання розв'язування задач на відсотки, яке винесено на державну підсумкову атестацію в 9 класі, ретельно опрацьовується лише в 5-6 класах (й епізодично зустрічається в задачах на уроках алгебри та геометрії у 7-9 класах). Тому дуже важливо зараз сформувати сталі, тверді навички розв'язування задач на відсотки, а також, якщо клас готовий до цього, похідних від них задач: задачі на суміші, сплави, відсотковий вміст (що передбачають і складання рівнянь у вигляді пропорцій). Тому на цьому уроці можна запропонувати до розв'язування такі або подібні до них задачі.

Задача № 1. У 85 кг залізної руди міститься 51 кг заліза. Скільки відсотків заліза міститься у залізній руді?

Розв'язання

Нехай x % заліза міститься у руді. Маса всієї руди становить 100 %.
Запишемо:

85 кг – 100%

51 кг – x %

Складаємо пропорцію і розв'язуємо іі.

Відповідь: 60%

Задача № 2. Є 9 л 48-відсоткового розчину спирту і 1 л 20-відсоткового розчину. Якої концентрації буде суміш цих розчинів?

Розв'язання

1) $9 \cdot 0,48 = 4,32$ (л) – вміст спирту в першому розчині;

2) $1 \cdot 0,2 = 0,2$ (л) – вміст спирту в другому розчині;

3) $4,32 + 0,2 = 4,52$ (л) – загальна маса спирту в обох розчинах, яка залишається незмінною після їх змішування.

Обчислення концентрації суміші двох розчинів зводиться до відсоткового відношення числа 4,52 (маса чистого спирту) до 10 (маса суміші)

$$\frac{4,52}{10} \cdot 100\% = 45,2\%.$$

Відповідь: 45,2%.

Завдання для заняття

1. У лабораторії є суміш, загальна маса якої на 3,3 кг більша від маси титану, що міститься у ній. Якщо додати до неї 2 кг суміші з 25 % вмісту титану, одержимо суміш, у якій 20 % титану. Визначити початкову масу суміші і відсоток титану в ній. (4 кг; 17,5%)

2. У лабораторії є два ящики порошку. Порошок в одному ящику містить 20 % заліза, у другому – 12 %. Скільки потрібно взяти порошку з кожного ящика, щоб отримати 3,2 кг порошку, що містить 15 % заліза? (з першого ящика потрібно взяти 1,2 кг, а з другого 2 кг порошку)

3. Обчислити масу і пробу сплаву срібла з міддю, знаючи, що при сплавленні його з 3 г чистого срібла можна одержати сплав 900-ї проби, а при сплавленні його з 2 кг сплаву 900-ї проби – сплав 840-ї проби. (3 кг 800-ї проби)

4. Сплав міді та цинку масою 36 кг містить 45 % міді. Яку масу міді потрібно додати до нього, щоб новий сплав містив 60 % міді? (13,5 кг)

5. Сплав масою 320 кг містить 20 % олова і 144 кг свинцю. Визначати відсотковий вміст домішок. (35 % домішок)

6. Скільки потрібно змішати 10 %-го та 15 %-го розчинів солі, щоб одержати 1 кг 12 %-го розчину? (0,6 кг 10 %-го і 0,4 кг 15 %-го)

3.5. Розв'язування задач складанням рівнянь

Рівняння як основний засіб математичного моделювання прикладних задач. Задачі з однойменними величинами. Різні способи розв'язування рівнянь

Розглянемо один із прийомів розв'язування задач за допомогою рівнянь. Виділимо три етапи.

1. Розпізнавання величин, що використанні в задачі.
2. Встановлення залежності між величинами.
3. Запис однієї величини через іншу.

Вибрати менший з невідомих величин і позначити її через x , решту невідомих величин виразити через меншу. З'ясувати, порівнюються чи додаються величини. Якщо величини додаються (див. схему 10), якщо величини порівнюються (див. схему 11).

Схема 10.

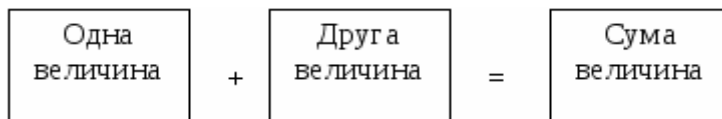
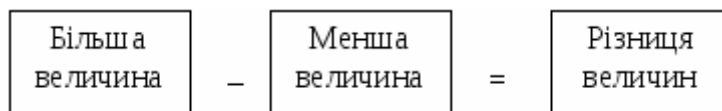


Схема 11.



Для розв'язування прикладної задачі необхідно зробити кілька кроків, а саме:

- Перевести умову прикладної задачі на мову математики;
- Розв'язати отриману математичну задачу;
- Скористатися результатами розв'язання математичної задачі, щоб знайти правильний розв'язок.

Такий підхід до розв'язування задач називається методом математичного моделювання.

Прикладні задачі вважаються одним із типів навчальних задач. Відомо, що до основних етапів розв'язування навчальних задач належать:

- 1) аналіз формулювання задачі;
- 2) пошук плану розв'язування;
- 3) здійснення плану, перевірку і дослідження знайденого розв'язку;
- 4) обговорення (аналіз) знайденого способу розв'язування з метою з'ясування його раціональності, можливості розв'язування задачі іншим методом чи способом.

У процесі розв'язування прикладних задач здійснюється навчання учнів елементам математичного моделювання, адже найбільш відповідальним і складним етапом розв'язування прикладної задачі є побудова її математичної моделі. Реалізація цього етапу вимагає від учнів багатьох умінь: виділяти істотні фактори, що визначають досліджуване явище (процес); вибирати математичний апарат для побудови моделі; виділяти фактори, що викликають похибку при побудові моделі. Прикладні задачі можна умовно розділити на такі, у яких математична модель міститься в умові задачі, та такі, розв'язування яких передбачає побудову математичної моделі.

Прикладна задача повинна задовольняти такі умови:

- питання задачі формулюється так, як воно зазвичай формулюється у житті;
- розв'язок задачі має практичну значимість;
- дані та шукані величини задачі мають бути реальними, взятими з життя.

Прикладна задача — задача, що виникла поза математикою, але розв'язується математичними засобами.

Звичайно, задачі, що виникають у життєвих ситуаціях і стосуються реальних об'єктів або процесів, тобто прикладні задачі, вимагають переформулювання їх мовою математики. Таке переформулювання будемо називати математичним моделюванням і, відповідно, постановку прикладної задачі в математичних термінах називатимемо математичною моделлю цієї задачі.

Задача № 1. Потрібно визначити, скільки кахлі в розміром 32 x 32 см необхідно купити для того, щоб викласти на стіну розмірами 1,8 x 2,4 м.

Розв'язання

Для розв'язування цієї задачі реальний об'єкт – кахлі – заміняємо його математичною моделлю – квадратом з довжиною сторони 0,32 м, а математичною моделлю стіни може слугувати прямокутник довжиною 2,4 м і шириною 1,8 м. Математична задача в цьому випадку має такий вигляд:

Якою найменшою кількістю квадратів з довжиною сторони 0,32 м можна цілком покрити прямокутник довжиною 2,4 м і шириною 1,8 м?

Задача № 2. Скільки ходок повинна зробити машина вантажопідйомністю 5 т, щоб вивезти 23 т піску.

Розв'язання

Математична модель задачі:

Знайти найменше натуральне число, що дорівнює або більше частки від ділення числа 23 на число 5.

Задача № 3. В автопарку вантажних автомашин у 7 разів більше ніж легкових. Скільки легкових машин в автопарку, якщо їх на 162 менше ніж вантажних.

Розв'язання

Нехай x легкових машин в автопарку, тоді $7x$ – вантажних автомашин. За умовою задачі вантажних автомашин на 162 менше ніж легкових. Складаємо рівняння: $7x - x = 162$; $6x = 162$; $x = 162 : 6$; $x = 27$.

Відповідь: 27 легкових машин в автопарку.

Завдання для самостійного розв'язання

1. У двох мішках 68 кг картоплі, причому в першому мішку на 12 кг картоплі більше, ніж у другому. Скільки картоплі у кожному мішку? (28 кг; 40 кг)

2. У двох бідонах є 36 л молока, до того ж, у першому бідоні молока в 1,4 разу більше, ніж у другому. Скільки молока в кожному бідоні? (21л, 15 л)

3. На трьох полицях стоїть 129 книжок, до того ж, на другій полиці на 15 книжок більше, ніж на першій, а на третій — на 12 книжок менше, ніж на першій. Скільки книжок стоїть на кожній полиці? (42, 57 і 30 книжок)

4. Три брати зібрали 88 кг яблук. Старший зібрав у 3 рази більше, ніж молодший, а середній – на 13 кг більше, ніж молодший. Скільки кілограмів яблук зібрав молодший брат? (15 кг)

5. За три дні Михайлик розв'язав 37 математичних задач. За другий день він розв'язав у 2 рази більше задач, ніж за перший, а за третій – на 5 задач більше, ніж за перший. Скільки задач розв'язав Михайлик першого дня? (8 задач)

6. Марічка придбала підручник, іграшку та цукерки, заплативши за всю покупку 61 грн. Іграшка коштувала в 6 разів більше, ніж цукерки, а підручник — на 3 грн. менше, ніж цукерки. Скільки гривень коштували цукерки? (8 грн)

7. Чотири коти — Мурко, Пушок, Базиліо та Леопольд — полювали на мишей. Мурко впіймав деяку кількість мишей, Пушок на 3 миші менше, ніж Мурко, Базиліо — утричі більше, ніж Мурко, а Леопольд удвічі більше, ніж Пушок. Усього вони впіймали 47 мишей. Скільки мишей упіймав кожен кіт? (Мурко – 8, Пушок – 5, Базиліо – 24, Леопольд – 10)

8. Матері 35 років, а дочці 12. Через скільки років дочка буде молодшою від матері вдвічі? (11)

9. У першій корзині було на, 12 яблук більше, ніж у другій. Після того як з першої корзини взяли 18 яблук, а з другої – 14, у першій корзині яблук стало в 1,2 рази більше, ніж у другій. Скільки яблук було в кожній корзині спочатку? (76 і 64)

10. Сума двох чисел дорівнює 162, до того ж, перше число більше від другого на 30. Знайдіть ці числа. (66 і 96)

11. У двох кошиках є 116 яблук, до того ж, у першому кошику на 14 яблук більше, ніж у другому. Скільки яблук у кожному кошику? (65 і 51)

12. Промінь ділить прямий кут на два кути. Знайдіть ці кути, якщо один із них на 12° менший від іншого. (39° і 51°)

13. Фермер відвів під зернові культури на 360 га, або у 5,5 разу, більше, ніж під овочеві. Скільки землі відвів фермер під зернові культури і скільки під овочеві? (під зернова – 440 га, під овочеві – 80 га)

14. Одне число утричі більше від іншого, а їх різниця дорівнює 132. Знайдіть ці числа. (66 і 198)

15. Довжина прямокутника в 4 рази більша від його ширини, а периметр дорівнює 60 м. Знайдіть площу прямокутника. (144 м²)

Задачі на рух

Можна скористатися теоретичним блоком до теми 3 «Задачі на рух» для 5 класу даного посібника.

Задача № 1. З міста А до міста В виїхав вантажний автомобіль. Через 30 хв назустріч йому з міста В виїхав легковий автомобіль, швидкість якого на 15 км/год більша, ніж вантажного. Коли легковий автомобіль приїхав до міста А, вантажному залишалося проїхати до міста В ще 3 км. Знайти відстань між містами, якщо на шлях від В до А легковий автомобіль затратив 2,2 год.

Розв'язання

Нехай швидкість легкового автомобіля дорівнює x км/год, тоді швидкість вантажного — $(x-15)$ км/год.

За 2,2 год легковий автомобіль проїхав $2,2x$ км. $2,2x$ км — це відстань між містами А та В. У момент приїзду легкового автомобіля до міста А вантажний автомобіль був у дорозі $30 \text{ хв} + 2,2 \text{ год} = 0,5 \text{ год} + 2,2 \text{ год} = 2,7 \text{ год}$. За цей час він проїхав $2,7(x-15)$ км. Додавши ще 3 км, одержимо відстань між містами: $(2,7(x-15) + 3)$ км.

Маємо рівняння:

$$2,7(x-15) + 3 = 2,2x;$$

$$2,7x - 40,5 + 3 = 2,2x;$$

$$2,7x - 37,5 = 2,2x;$$

$$2,7x - 2,2x = 37,5;$$

$$0,5x = 37,5;$$

$$x = 37,5 : 0,5;$$

$$x = 75.$$

Отже, швидкість легкового автомобіля дорівнює 75 км/год. Помноживши цю швидкість на час руху легкового автомобіля, одержимо відстань між містами: $75 \cdot 2,2 = 165$ (км)

Відповідь: 165 км.

Задача № 2. Човен пройшов за течією річки 2,4 години, а проти течії — 3,2 години. Шлях, пройдений за течією, виявився на 13,2 кілометра довшим від шляху, пройденого проти течії. Знайдіть швидкість човна в стоячій воді, якщо швидкість течії річки 3,5 км/год.

Розв'язання

Нехай власна швидкість човна x км/год. Тоді за течією човен рухався зі швидкістю $x + 3,5$ км/год і за 2,4 години пройшов відстань $2,4(x + 3,5)$ км.

Проти течії човен рухався зі швидкістю $x - 3,5$ км/год і за 3,2 години пройшов відстань $3,2(x - 3,5)$ км. (див. табл. 21)

Таблиця 21.

Рух	Швидкість (км/год)	Час (год)	Відстань (км)
За течією	$x + 3,5$	2,4	$2,4(x + 3,5)$
Проти течії	$x - 3,5$	3,2	$3,2(x - 3,5)$

За умовою задачі шлях, пройдений за течією, виявився на 13,2 км довшим від шляху, пройденого проти течії.

Складемо й розв'яжемо рівняння:

$$2,4(x + 3,5) - 3,2(x - 3,5) = 13,2;$$

$$2,4x + 8,4 - 3,2x + 11,2 = 13,2;$$

$$0,8x = 6,4; \quad x = 8.$$

Відповідь: власна швидкість човна 8 км/год.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Автомобіль мав подолати шлях 140 км за 2 години. Деяку частину шляху він проїхав зі швидкістю 60 км/год, а решту шляху — зі швидкістю 75 км/год. Скільки кілометрів проїхав автомобіль зі швидкістю 60 км/год, якщо відомо, що до місця призначення він прибув вчасно? (40 км)

2. Група туристів за три дні пройшла 74 км. За перший день туристи пройшли на 8,5 км менше, ніж за другий, а за третій стільки, скільки за другий. Який шлях проходили туристи кожного дня? (за перший день туристи пройшли 19 км, за другий — 27,5 км, за третій — 27,5 км)

3. Катер пройшов за течією річки шлях від пристані А до пристані В і повернувся назад. Швидкість течії річки дорівнює 3 км/год. Знайдіть швидкість катера у стоячій воді, якщо: а) від А до В катер йшов 1,5 год, а від В до А — 2 год; б) швидкість катера проти течії річки становить 75% від швидкості за течією. (21 км/год; 21 км/год)

4. Човен проплив шлях між двома пристанями за течією річки за 0,6 год, а на зворотний шлях затратив 1 год. Швидкість човна за течією річки на 6 км/год більша від швидкості проти течії. Знайдіть відстань між пристанями. (9 км)

5. З однієї станції вийшов потяг зі швидкістю 56 км/год., а через 4 год. з іншої станції назустріч йому вийшов інший потяг зі швидкістю 64 км/год. Відстань між станціями 584 км. Скільки часу був кожний потяг у дорозі до зустрічі? (7 год; 3 год)

6. Від села до міста легковий автомобіль доїхав за 2 години, а вантажівка — за 5 годин. Знайдіть швидкість руху кожної машини, якщо швидкість вантажівки на 48 км/год менша від швидкості легкового автомобіля. (80 км/год; 32 км/год)

7. Турист 3 год їхав на велосипеді і 2 год йшов пішки, до того ж, пішки він йшов на 6 км/год повільніше, ніж їхав на велосипеді. З якою швидкістю йшов турист, якщо всього він подолав 38 км? (4 км/год)

8. Автомобіль проїхав деякий шлях за 2,5 год. Якби він їхав швидше на 15 км/год, то проїхав би цей шлях за 2 год. З якою швидкістю їхав автомобіль і який шлях він проїхав? (60 км/год; 150 км)

9. Перший поїзд долає шлях між двома містами за 2,5 год, а другий — за 3,5 год. Швидкість першого поїзда більша від швидкості другого на 24 км/год.

Знайдіть швидкість кожного поїзда і відстань між містами. (перший – 84 км/год; другий – 60 км/год; 210 км)

10. Перший велосипедист долає шлях між двома селами за 36 хв., а другий — за 45 хв. Швидкість першого велосипедиста більша від швидкості другого на 4 км/год. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста і відстань між селами. (перший – 20 км/год; другий – 16 км/год; 12 км)

11. Катер пройшов річкою від пристані А до пристані В і повернувся назад. Від А до В катер йшов 2 год. Через 2,5 год після виходу катера від пристані В йому залишалося пройти до пристані А ще 3 км. Знайдіть відстань між пристанями, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год. (48 км)

12. З міста А до міста В одночасно виїхали автомобіль і мотоцикліст. Коли через 2,5 год автомобіль прибув до міста В, мотоциклістові до В залишалося проїхати ще 75 км. Знайдіть відстань між містами, якщо швидкість автомобіля в 1,6 разу більша від швидкості мотоцикліста. (200 км)

Задачі на відсотки. Задачі на суміші, сплави

Задачі на відсотки — це задачі на пряму пропорційність. Для розв’язування задач на суміші та сплави рекомендують від відсотків переходити до натуральних одиниць, обчислюючи вміст «чистої речовини» в суміші чи сплаві.

Задача № 1. Зі свіжих слив виходить 21% сушених. Скільки сушених слив можна отримати із 75 кг свіжих?

Розв’язання

Складемо пропорцію: $\frac{75}{x} = \frac{100}{21}$. Звідси $x = 15,75$.

Відповідь: 15,75 кг.

Задача № 2. За зміну три робітники виготовили партію деталей. Перший робітник виготовив 30% усіх деталей, другий — на 5 деталей менше, ніж третій, і на дві деталі більше, ніж перший. Скільки всього деталей виготовили робітники разом?

Розв'язання

Нехай робітники виготовили x деталей. Тоді перший виготовив $0,3x$ деталей, другий — $(0,3x+2)$ деталей, а третій — решту, тобто $(x-0,3x-(0,3x+2))$ деталей. За умовою задачі, другий виготовив на 5 деталей менше, ніж третій.

Складемо й розв'яжемо рівняння:

$$0,3x+2+5=x-0,3x-(0,3x+2);$$

$$x=90.$$

Відповідь: 90 деталей.

Завдання для самостійного розв'язання

1. У воді розчинили 180 г солі і одержали 12%-ий розчин солі. Скільки грамів води використали для приготування розчину? (1500 г)

2. На пакеті молока написано: «Молоко «Українське», жирність 2,5%, маса нетто 1000 г». Знайдіть масу жиру, яка міститься в молоці із цього пакета. (25 г)

3. Із 40 учасників шахового турніру 9 осіб мають звання гросмейстера. Який відсоток учасників турніру становлять гросмейстери? (22,5%)

4. У містечку є три школи. Кількість учнів першої школи становить 30% від кількості всіх учнів містечка. У другій школі учнів у 1,5 разу більше, ніж у першій. Скільки учнів у трьох школах разом, якщо у третій школі навчається 550 учнів? (2200 учнів)

5. Розчин містить 7 частин цукру й 11 частин води. Скільки цукру потрібно взяти, щоб одержати 549 г розчину? (213,5 г)

Задачі на пропорційний поділ та пропорційні залежності

Не варто втрачати можливість з розв'язування на заняттях прикладних задач.

Наприклад, тема «Пропорції», що є однією з базових тем для профільного економічного навчання, входить у математичний апарат вивчення географії, фізики, хімії та інших предметів обов'язкового шкільного рівня і є підготовчою до вивчення теми «Функція», оскільки дає розуміння суті залежності між

величинами. Тому під час вивчення цієї теми доцільно розв'язувати задачі практичного змісту, зокрема такі.

Задача. Точка А розбиває відрізок CD на частини, довжини яких відносяться як 3:5. Знайти довжину відрізків CA і AD, якщо CD=16 см.

Розв'язання

Щоб розв'язати таку задачу, треба скористатися коефіцієнтом пропорційності шуканих величин.

Отже, нехай x — коефіцієнт пропорційності довжини відрізків. Тоді довжина AC — $3x$ см, а довжина AD — $5x$ см. За умовою задачі, CD=16 см.

Отримаємо та розв'яжемо рівняння:

$$3x+5x=16,$$

$$8x=16,$$

$$x=2.$$

$$2 \cdot 3=6;$$

$$2 \cdot 5=10.$$

Відповідь: AC = 6 см; AD = 10 см.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Скільки дошок потрібно, щоб настелити підлогу в кімнаті, довжиною 7,5 і шириною 5 м, якщо довжина дошки 6м, а ширина 0,25 м? (25 дошок)

2. Два птахи за добу можуть звільнити від шкідників 25 м^2 фруктових садів. Скільки птахів треба для садової ділянки розмірами 1050 м x 50 м? (4200 пт.)

3. Масштаб карти 1: 25 000. Яка відстань на місцевості між об'єктами, якщо на карті вона становить 2 см? (500 м)

4. План кімнати має форму прямокутника, зі сторонами 25 мм і 3 см. Які розміри має кімната, якщо план виконано в масштабі 1:300? (7,5; 9)

5. Водопровідний кран погано закритий. Кожну секунду з нього капає лише одна крапля. Чи багато витече з нього води за 1 год (за 1 добу), якщо маса 100 крапель дорівнює 7 г? (за годину – 4,2 г; за добу – 100,8)

6. Потяг проходить відстань між містами за 12 годин при середній швидкості 45 км/год. Із якою швидкістю має їхати потяг, щоб пройти ту саму відстань за 9 годин? (60 км/год)

7. Сума чотирьох чисел дорівнює 4,2. Перші три числа відносяться, як 1,2:4:0,8, а четверте число становить 0,6 від другого. Знайдіть ці числа. (0,6; 2; 0,4; 1,2)

Задачі на спільну роботу

Можна зауважити, що:

- задачі на спільну роботу є самостійним класом текстових задач, в деяких випадках вони схожі з задачами на рух, але ця схожість не є загальною;

- не зважаючи на зовнішню схожість запису розв'язання цих задач, міркування, що призводять до такого запису можуть істотно відрізнятися;

- при навчанні учнів розв'язанню задач на спільну роботу треба звертати увагу на розуміння учнями взаємозв'язку між основними характеристиками роботи, використовуючи в разі потреби аналогію з характеристиками руху, якщо вона зрозуміла учням та спирається на їх власний досвід;

- для полегшення набуття навичок розв'язання задач на спільну роботу можна рекомендувати школярам застосовувати шаблони міркувань, виконувати серії дій за заздалегідь визначеним алгоритмом, заповнювати таблиці (ілюстративні, стандартні чи модифіковані);

- робота з таблицями та шаблонами не повинна призводити до цілковитої алгоритмізації дій учнів, адже практика навчання учнів розв'язанню задач, що не спирається на цілковите розуміння суті виконуваних дій, приречена на поразку.

У розв'язанні цих задач велику роль відіграють такі величини: частина всієї роботи, яку виконує робітник (бригада, машина) за одиницю часу; час, який було витрачено на роботу; частина роботи, яку було виконано.

Задача. Один тракторист обробляв поле 9 годин, потім до нього приєднався другий тракторист. За 7 годин спільної роботи вони закінчили

обробляти поле. За скільки годин впорався би з цією роботою кожен тракторист, якщо першому з них потрібно було б на 3 години більше, ніж другому? (див. табл. 22)

Таблиця 22.

	При роботі взагалі		За даного режиму роботи		разом
	Перший тракторист	Другий тракторист	Перший тракторист	Другий тракторист	
Часу на роботу, годин	$x+3$	x	16	7	
Продуктивність, частина поля за годину	$\frac{1}{x+3}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+3}$	$\frac{1}{x}$	
Кількість роботи, частина поля	1	1	$\frac{1}{x+3} * 16$	$\frac{1}{x} * 7$	1

Модифікована таблиця станеться в нагоді і для задач на рух, якщо вони розраховані на аналогічний принцип додавання частин шляху.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Один трактор може зорати поле за 20 год, другий за 30 год. За скільки годин вони можуть зорати це поле працюючи разом. (12 год)

2. Одна бригада може виконати певну роботу за 10 днів, друга — за 15 днів. За скільки днів обидві бригади, працюючи разом, виконають цю роботу? (6 дн.)

3. Перша будівельна бригада будує один типовий котедж за 10 днів, а друга бригада будує два таких самих котеджі за 5 днів. За скільки днів обидві бригади, працюючи разом, побудують три типові котеджі? (6 дн.)

4. Четверо хлопців – Сашко, Юрко, Миколка та Грицько – збирали яблука в садку. Відомо, що Сашко збирав 50 яблук за 10 хв, Юрко – 24 яблука за 6 хв,

Миколка – 18 яблук за 3 хв, а Грицько – 27 яблук за 9 хв. Хто із цих хлопців працював найпродуктивніше? (Миколка)

5. Два трактори зорали 63 га поля, до того ж, перший трактор зорав 0,8 того, що зорав другий. Скільки землі зорав кожний трактор? (28 і 35)

6. Марійка за 6 хв може почистити 24 картоплини, а Наталка за 9 хв – 45 картоплини. За скільки хвилин спільної роботи вони почистять 198 картоплин? (22 хв)

7. Черв'ячок Кузя один з'їдає велике яблуко за 10 діб, а черв'ячок Пузя один з'їдає таке саме яблуко за 5 діб. За скільки діб Кузя та Пузя з'їдять одне таке яблуко разом, якщо темп поїдання кожного з них не зміниться? (4 дні)

8. Під час бойових навчань сержанти Х та У надсекретного спецпідрозділу мають поцілити в 120 мішеней кожен. Сержант Х виконав завдання за 15 с на скільки секунд швидше впорався з бойовим завданням сержант У, якщо він щосекунди вражав на 4 мішені більше, ніж його колега Х? (на 5 сек)

9. Малюк і Карлсон разом з'їдають торт за 24 хв. Якби кожен з них з'їв по такому самому торту окремо, то Карлсон упорався б на 14 хв швидше за Малюка. За скільки хвилин з'їдає торт Карлсон? (42 хв)

3.6. Задачі підвищеного рівня складності

Задачі підвищеного рівня складності

Для того щоб розв'язати складну задачу, треба спочатку намітити план розв'язання. План складають на основі аналізу задач, який проводять від числових даних або від питання задач. Аналізу задачі передують ретельне вивчення умови та питання. Перед тим як розв'язувати задачу треба поставити запитання: про які процеси іде мова в задачі? Скільки процесів описано в задачі? Якими величинами характеризується процес, описаний в задачі?

Задача. Яку загальну суму кредитор повинен покласти в три різні банки, щоб виконувались наступні умови: у банк А потрібно покласти 45% від вкладу

в банк В, а сума вкладу в банк становить 80% від вкладу в банк С, а в банк С він вклав суму, яка перевищує вклад в банк А на 6400 гривень?

Розв'язання

Нехай x гривень – сума вкладу в банк С. Тоді в банк В потрібно покласти $0,8x$ гривень, а в банк А – $0,36x$ гривень. Вклад у банк С перевищує вклад у банк А на $(x-0,36x)$ гривень, що за умовою задачі = 6400 гривень. Отже, в результаті наведених міркувань отримаємо рівняння з однією змінною:

$$x-0,36x=6400,$$

$$0,64x=6400,$$

$$x=10000 \text{ (грн)},$$

тоді вклад у банк В дорівнює: $0,8 \cdot 10000 = 8000$ (грн.) а вклад у банк А: $0,36 \cdot 10000 = 3600$ (грн); загальна сума, вкладена кредитором у банки: $3600 + 8000 + 10000$.

Відповідь: 21600 грн

Завдання для самостійного розв'язання

1. Клоун сказав, що кількість кошенят, які мешкають у нього дорівнює $\frac{3}{4}$ їх кількості і ще $\frac{3}{4}$ кошеняти. Слова « $\frac{3}{4}$ кошеняти» викликали сміх. Проте клоун сказав правду. Скільки кошенят мешкає у нього? (3 кошеняти)

2. Андрій і Петрик їдуть у сусідніх вагонах потягу «Київ – Івано-Франківськ». Вагон, в якому їде Андрій, – п'ятий з «голови» потягу, а вагон, в якому їде Петрик, – сьомий з «хвоста». Скільки вагонів у цьому потязі? Відповідь обґрунтуйте. (10 або 12 вагонів)

3. Сашко, Борис і Василь збирали гриби. Борис знайшов грибів на 20% більше, ніж Сашко, але на 20% менше, ніж Василь. На скільки відсотків більше грибів знайшов Василь, ніж Сашко? (на 50%)

4. Мандрівник повинен подолати пустелю. Його шлях дорівнює 80 км. За один день він долає 20 км та може нести запас їжі та води на 3 дні, тому він повинен робити проміжні бази, щоб поповнювати в них запаси. За скільки днів він може подолати пустелю? (за 6 днів)

5. Змішуючи два сорти чаю вартістю 30 грн і 50 грн за 1 кг. Скільки грамів чаю вищого сорту потрібно взяти, щоб одержати 500 г суміші вартістю 3 грн 50 коп за 100 г? (125г)

6. У Василька й Марічки було грошей порівну. Коли Василь купив книгу за 14 грн, а Марічка ляльку за 6 грн., то в дівчини залишилося грошей у 3 рази більше, ніж у хлопця. Скільки грошей було в кожного з них спочатку? (18 грн)

7. В одному ящику було в 7 разів більше апельсинів, ніж у другому. Коли з першого ящика взяли 38 апельсинів, а з другого — 14 апельсинів, то в другому залишилося на 78 апельсинів менше, ніж у першому. Скільки апельсинів було в кожному ящику спочатку? (17 і 119)

8. Щодня Ігор робить ранкову зарядку, пробігаючи за тиждень 12 км. Щосуботи і щонеділі він долає удвічі меншу відстань, ніж будь-якого іншого дня тижня. Яку відстань пробігає Ігор щосередини? (2 км)

9. Два жуки змагаються з бігу на 50 м. Перший жук пробігає 1 м за 5 с, а другий — за 4,6 с. Після подолання кожних 10 м дистанції жуки зупиняються на перепочинок: перший — на 10 с, а другий — на 15 с. Який жук фінішує першим? Чи зміниться відповідь, якщо довжина дистанції буде 100 м; 30 м? (одночасно; так)

Загадки-жарти

Відомий французький математик Блез Паскаль зазначав: «Предмет математики настільки серйозний, що корисно не втрачати нагоди зробити його дещо цікавим». Найпоширенішим видом таких завдань є загадки-жарти, запитання-жарти, у яких за простими істинами криється несподіванка, що перетворює задачу на цілком серйозне запитання, для відповіді на яке потрібна увага, кмітливість, зосередженість. Загадки-жарти можна застосовувати як під час уроків, так і в позакласній роботі, оскільки вони мають універсальний характер з точки зору розумового розвитку дитини. Пропоновані задачі можна віднести до загадок-запитань. Їх розв'язання не потребує від учнів особливої математичної підготовки. Достатніми є наявність елементарних знань з

математики та кмітливість, яка завжди притаманна допитливому дитячому розуму.

1. Назвіть двоцифрове число, сума цифр якого дорівнює найменшому натуральному числу.

Відповідь: 10.

2. Один хлопчик зірвав за годину 12,5 кг яблук. Скільки яблук зірвуть за годину 5 хлопчиків?

Відповідь: невідомо.

3. Як у кімнаті слід розставити 2 стільці, щоб біля кожної стіни стояло по 1 стільцю?

Відповідь: стільці слід розставити у протилежні по діагоналі кути кімнати.

4. Як, не користуючись метром, від стрічки довжиною 4 м відрізати триметрову стрічку?

Відповідь: скласти стрічку вчетверо і відрізати четверту частину.

5. Кожен із п'яти братів має одну сестру. Скільки всього дітей у цій сім'ї?

Відповідь: 6 дітей.

6. У батька є син, який удвічі молодший за нього. Син народився тоді, коли батькові було 24 роки. Скільки нині років сину?

Відповідь: 24 роки.

7. Три хлопчики Миколка, Петрик та Іванко йшли до магазину. По дорозі вони знайшли 50 к. Скільки б грошей знайшов Іванко, якби він йшов до магазину сам?

Відповідь: 50 к.

8. Які читання чисел першої сотні не змінюється при перевертанні їх запису?

Відповідь: 8, 69, 88.

9. Семеро чекали восьмого 14 хв. Скільки хвилин витратив на чекання кожен?

Відповідь: 14 хв.

10. Два автомобілі проїхали 120 км. Скільки кілометрів проїхав кожний автомобіль?

Відповідь: 120 км.

11. Коли ми, дивлячись на цифру «два», кажемо «десять»?

Відповідь: коли дивимося на годинник і говоримо про хвилини.

12. Дві матері і дві дочки порівну поділили між собою три яблука. Як так вийшло?

Відповідь: це були бабуса, дочка й онука.

13. Тракторист, їдучи в село, зустрів три легкових автомобілі та вантажівку. Скільки машин їхало у село?

Відповідь: одна (трактор).

14. У тварини дві праві і дві ліві ноги, дві ноги попереду і дві ноги позаду. Скільки всього ніг у тварини?

Відповідь: 4.

15. П'ять картоплин варяться 30 хв. Скільки хвилин потрібно для того, щоб зварилася одна картоплина?

Відповідь: 30 хв.

16. П'ятеро рибалок за 5 днів з'їли 5 судаків. За скільки днів 10 рибалок з'їдять 10 судаків?

Відповідь: за 5 днів.

17. Відомо, що 26 жовтня — це четвер. Назвіть дату наступного четверга?

Відповідь: 2 листопада.

18. На столі стоять 5 склянок з молоком. Хлопчик випив одну склянку молока. Порожню склянку він поставив на стіл. Скільки склянок залишилося на столі?

Відповідь: 5 склянок.

19. З Кривого Рога до Дніпропетровська о 12 год дня від'їжджає автобус, а на годину пізніше з Дніпропетровська до Кривого Рога — велосипедист, який їде значно повільніше, ніж автобус. Хто з них під час зустрічі буде ближче до Дніпропетровська?

Відповідь: обидва будуть на однаковій відстані.

20. Один учень розв'язав задачу за хвилину. За який час розв'яжуть цю задачу 10 учнів?

Відповідь: Невідомо.

21. Який знак слід поставити між цифрами 2 і 3, щоб отримане число було більше ніж 2, але менше ніж 3?

Відповідь: кому.

22. На руках — 10 пальців. Скільки пальців на 10 руках?

Відповідь: 50 пальців.

23. У поштовому відділенні за день прийняли 20 посилок загальною вагою 80,8 кг. Скільки важать 10 посилок?

Відповідь: невідомо, бо посилки, як правило, різної ваги.

24. Як, не виконуючи математичних дій, збільшити число 66 на його половину?

Відповідь: необхідно перевернути запис числа 66 і отримане число 99 більше від числа 66 на 33, тобто на його половину.

25. Їхали два батька і два сини. Скільки всього було чоловіків?

Відповідь: троє (дід, батько, син).

26. У яких двох чисел кількість цифр дорівнює кількості букв, за допомогою яких записані ці числа?

Відповідь: 100 — сто; 1 000 000 — мільйон.

27. Скільки картоплин може «увійти» в один казан?

Відповідь: жодної, бо картопля не ходить.

28. Скільки буде сорок п'ят і сорок п'ят?

Відповідь: вісімдесят п'ят.

29. Коли одиниця дорівнює трьомстам шістдесяти п'яти, п'ятдесяти двом і дванадцяти?

Відповідь: коли це один рік.

30. Якщо о 12 год ночі йде дощ, чи можна чекати, що через 72 год буде сонячна погода?

Відповідь: ні, бо через 72 год, тобто через три доби, буде ніч.

31. Чи можливо, щоб один та один було одинадцять?

Відповідь: так, якщо одиниці поряд записати.

32. У кошику лежить 5 яблук. Чи можна поділити їх порівну між п'ятьма дівчатами так, щоб одне яблуко залишилося у кошику?

Відповідь: так, одне яблуко слід віддати з кошиком.

33. Скільки кінців у п'яти паличок? А у п'яти з половиною паличок?

Відповідь: у п'яти паличок — 10 кінців, у п'яти з половиною — 12 кінців.

34. Щоб проповзти біговою доріжкою стадіону за годинниковою стрілкою, равлику потрібно півтори години. Коли ж равлик повзе по тій самій доріжці проти годинникової стрілки, то повне коло він здійснює за 90 хв.

Чим пояснити розбіжність результатів?

Відповідь: розбіжності немає: півтори години становлять 90 хв.

35. Чому перукар у Женеві швидше зволіє підстригти двох французів, ніж одного німця?

Відповідь: тому що він заробить вдвічі більше грошей.

36. У трикутнику відрізали три кути. Скільки кутів залишилося?

Відповідь: 6 кутів.

37. Стільниця парти має чотири кути. Якщо один з кутів відпиляти, то скільки стане кутів у стільниці?

Відповідь: 5 кутів.

38. Сума яких трьох натуральних чисел дорівнює їх добутку?

Відповідь: 1, 2, 3, бо $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

39. Чи можливо, що $1,5 \cdot 3,8 = 12,67$?

Відповідь: ні.

40. Колесо має 10 спиць. Скільки проміжків між спицями?

Відповідь: 10 проміжків.

41. На дереві сиділо вісімнадцять горобців. Бешкетник Сашко влучив з рогачки в одного і той упав. Скільки залишилося горобців?

Відповідь: один, той, що впав.

42. Зазвичай місяць закінчується 30-им або 31-им числом. В якому місяці є 28-ме число?

Відповідь: у всіх.

43. За книжку заплатили 60 грн. і ще третину її вартості. Скільки коштує книжка?

Відповідь: 90 грн.

44. Летіли качки: одна попереду, дві позаду; одна позаду і дві попереду; одна між двома і три в ряд. Скільки летіло качок?

Відповідь: летіло три качки, одна за одною.

45. Сидять три коти, проти кожного кота сидить два коти. Скільки всього котів?

Відповідь: 3 коти.

46. Біля будинку ростуть дві липи, дві яблуні, дві вишні. Скільки фруктових дерев росте біля будинку?

Відповідь: 4 дерева.

47. У квартирі було 3 кімнати. З однієї зробили 2 кімнати. Скільки кімнат стало у квартирі?

Відповідь: чотири.

48. Назвіть найбільше трицифрове число, яке записане трьома різними цифрами.

Відповідь: 987.

49. Якою цифрою закінчується добуток усіх натуральних чисел від 1 до 13?

Відповідь: нулем.

50. Скільки буде, якщо від тринадцяти відняти середину?

Відповідь: тридцять: три-на-дцять.

51. Жило триста котів і один чоловік. Скільки було ніг?

Відповідь: 2 ноги, бо у котів — лапи.

52. Скільки ком треба поставити у складному реченні, яке складається з чотирьох простих?

Відповідь: три коми.

53. Як слід позначити на сторонах прямокутника 12 точок, щоб на кожній стороні було 4 точки?

Відповідь: треба позначити вершини прямокутника і по дві точки на сторонах.

54. Як, віднявши від дев'яти половину дев'яти, можна отримати 4?

Відповідь: слід записати число 9 римськими цифрами (IX) і, розділивши запис горизонтальною рисою, отримаємо у верхній частині число 4, записане римськими цифрами (IV).

55. Як поділити 18 на дві рівні частини, щоб у кожній з них вийшло десять?

Відповідь: розділивши запис числа 18 горизонтальною рисою, отримаємо дві десятки.

Задачі на кмітливість. Принцип Діріхле

При розв'язуванні багатьох задач люди користуються способами міркувань, які одержали назву «принцип Діріхле» («принцип висунутих ящиків»). У найпростішій і дотепній формі принцип Діріхле звучить так: «Не можна посадити 7 зайців у 3 клітки так, щоб у кожній клітці було не більше, ніж 2 зайці». А взагалі твердження формулюється так:

У n клітках неможливо розсадити $n + 1$ зайців щоб кожний із них сидів у окремій клітці, тобто знайдеться клітка, де сидить не менше двох зайців.

Щоб застосувати принцип Діріхле до розв'язування задачі, ми повинні вказати, що саме будемо розуміти під «клітками» і «зайцями», а також спосіб, за яким будемо розсаджувати «зайців» у «клітки».

Як правило, під час розв'язування задач використовують не принцип Діріхле, а деяке його узагальнення:

Дано n кліток і $nk+1$ зайців, які розміщено у ці клітки. Тоді знайдеться клітка, де сидить не менше $k + 1$ зайців.

Проілюструємо застосування принципу Діріхле на розв'язуванні задач, серед яких є арифметичні й геометричні, жартівливі й побутові. Учням цікаво в них вибирати щоразу «зайців» і будувати для них відповідні «клітки».

Завдання даного типу дуже корисні для розвитку розмовної математичної культури, чіткого розуміння того, що означає розв'язати задачу.

Задача. У класі навчається 29 учнів. Сашко Петренко зробив у диктанті 13 помилок, і ніхто інший не зробив більшої кількості помилок. Довести, що принаймні три учні зробили однакову кількість помилок.

Розв'язання

Приймемо за «клітки» всі можливі варіанти кількості помилок. Їх 14, оскільки учні можуть зробити 0, 1, ..., 13 помилок. «Зайцями» вважатимемо учнів, які писали диктант і яких за умовою 29. Кожного з них «садимо» у «клітку», що відповідає кількості зроблених помилок. Зрозуміло, що знайдеться «клітка», в якій «сидять» принаймні три «зайці», а це й означає, що знайдуться три учні, які зробили однакову кількість помилок.

Завдання для самостійного розв'язання

1. У п'ятих класах школи навчається 160 учнів. Довести, що знайдуться 4 учні, у яких день народження припадає на один і той самий тиждень.

Розв'язання

У році може бути максимум 53 тижні. Їх і приймемо за «клітки», а за «зайців» — учнів. Розсаджуватимемо «зайців» у ті «клітки», що відповідають їх дням народження. Оскільки $160 : 53 = 3\frac{1}{3}$, то за принципом Діріхле знайдеться «клітка», у якій принаймні 4 «зайці». Це означає, що знайдеться тиждень, на який припадає день народження відразу у чотирьох учнів.

2. У клітинках таблиці розмірами 3×3 розміщено числа -1; 0; 1. Розглянемо вісім сум: суми всіх чисел у кожному рядку, кожному стовпці і на двох діагоналях таблиці. Чи можуть усі ці суми бути різними?

Розв'язання

Нехай «клітками» будуть усі різні значення сум трьох чисел, кожне з яких набуває значення 0, 1 або -1. Зрозуміло, що таких значень 7. Це -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3. «Зайцями» будуть набори із трьох чисел, що розмішені або в одному стовпці, або в одному рядку, або на одній із двох діагоналей таблиці. Таких наборів 8. Як розсаджуватимемо «зайців»? Кожного «зайця» садитимемо в «клітку», що є значенням суми чисел «зайця». Тоді за принципом Діріхле знайдеться «клітка», де сидять не менше двох «зайців». А це й означає, що знайдуться дві розглядувані трійки чисел, для яких суми рівні.

Відповідь: ні.

3. У ящику лежать 10 пар чорних рукавичок і 10 пар червоних одного розміру. Скільки рукавичок потрібно витягнути з ящика навмання, щоб серед них були:

- а) хоча б дві рукавички одного кольору;
- б) хоча б одна пара рукавичок одного кольору?

Розв'язання

а) якщо за «клітки» прийняти кольори рукавичок, то взявши три довільні рукавички, ми отримаємо, що в одній із «кліток» знаходяться два «зайці»-рукавички. А це і вимагається в задачі.

б) якщо взяти 20 рукавичок на одну руку, то з них не можна буде вибрати пару рукавичок одного кольору, тому шукана кількість рукавичок не менша ніж 21. Справді, якщо за «клітки» прийняти кольори рукавичок (їх два), а за «зайців» — рукавички, то за узагальненим принципом Діріхле в одній з «кліток» буде не менше 11 «зайців». Це означає, що знайдеться 11 рукавичок одного кольору. Але ми маємо лише 10 пар рукавичок одного кольору. Тому всі вони не можуть бути на одну руку. Отже, серед цих 11 рукавичок знайдеться одна пара рукавичок одного кольору.

Розглянемо, як принцип Діріхле використовується до розв'язування задач на подільність. Такі задачі — класичний приклад застосування принципу Діріхле.

4. Довести, що серед довільних трьох цілих чисел можна знайти два, сума яких ділиться на 2.

Розв'язання

Прийmemo за «клітки» різні остачі від ділення чисел на 2. Їх усього дві: 0 і 1. «Зайцями» будемо вважати остачі від ділення на 2 трьох даних чисел. Їх буде три. Розмістивши «зайців» у «клітки» (кожного «зайця» розміщаємо у «клітку», що дорівнює остачі від ділення його на 2), за принципом Діріхле отримаємо, що знайдеться «клітка» з двома «зайцями», тобто знайдуться два числа, що дають при діленні на 2 однакові остачі. Їх сума і ділиться на 2.

5. Довести, що серед довільних семи чисел можна знайти три, сума яких ділиться на 3.

Розв'язання

За «клітки» приймаємо різні остачі від ділення на 3. Їх усього три: 0, 1, 2. «Зайцями» вважатимемо остачі від ділення на 3 даних семи чисел. Їх усього 7. Як і в попередній задачі, розмістивши «зайців» у «клітки» і використовуючи узагальнений принцип Діріхле, робимо висновок, що знайдуться три «зайці», що знаходяться в одній із «кліток». А це й означає, що знайдуться три числа, які дають однакові остачі від ділення на 3. Їх сума ділиться на 3.

6. Дано 12 довільних цілих чисел. Довести, що з них можна вибрати два, різниця яких ділиться на 11.

Розв'язання

Прийmemo за «клітки» різні остачі від ділення чисел на 11. Їх усього 11. За «зайців» приймаємо остачі від ділення даних чисел на 11. Їх усього 12. Розміщуючи «зайців» у «клітки» аналогічно до попередніх задач, за принципом Діріхле отримаємо, що знайдеться два «зайці» в одній із «кліток». А це означає, що знайдеться два числа, які дають однакові остачі від ділення на 11. Зрозуміло, що різниця цих чисел буде ділитися на 11.

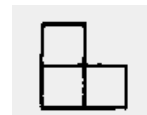
Принцип Діріхле використовується і під час розв'язування задач на зафарбовування.

7. Кожну грань куба зафарбовано у білий або чорний колір. Довести, що знайдуться однаково зафарбовані грані, що мають спільне ребро.

Розв'язання

Розглянемо довільну вершину куба. У ній перетинаються три грані. Прийmemo за «клітки» кольори, а за «зайців» — грані, що перетинаються в одній вершині. Їх усього три. Тому за принципом Діріхле знайдеться клітка, у якій міститься два «зайці». А це означає, що знайдуться дві грані, які мають спільне ребро (оскільки вони мають спільну точку) і зафарбовані однаково.

8. На шаховій дошці розмірами 8×8 клітинок розставлено 31 фігуру. Довести, що знайдеться вільна фігура, яка складається з трьох клітинок і зображена на малюнку. (див. рис. 8)



Розв'язання

Для того щоб не було вільної фігури, складеної з трьох клітинок, у будь-якому квадраті розмірами 2×2 клітинки має

Рис.8

розміститися не менше двох фігур. Оскільки можна покрити

всю дошку 16-ма квадратами розмірами 2×2 клітинки, що не перекриваються, то всього фігур має бути не менше 32, а у нас є 31. Отже, за сформульованим принципом знайдеться квадрат розмірами 2×2 клітинки, в якому опиниться лише одна фігура. У ній і міститься вільна фігура, що складається з трьох клітинок.

Симетрична стратегія в ігрових задачах

Діти люблять гратися! Тому в школярів середніх класів великий інтерес викликають задачі-ігри. З їх допомогою можна внести в заняття гуртка елемент розваги, що важливо для учнів 6-го класу.

В той же час такі задачі є змістовними. При їх розв'язуванні школярі звичайно мають значні труднощі. Адже необхідно, по-перше, грамотно сформулювати стратегію, а по-друге, довести, що вона справді веде до виграшу.

Тому завдання-ігри дуже корисні для розвитку розмовної математичної культури, чіткого розуміння того, що означає розв'язати задачу.

Необхідно усвідомити, що міркування типу “якщо він ходить так, то я ходжу так” не є, як правило, розв'язком гри.

В математичних іграх припускається, що грають двоє гравців, ходи роблять по черзі (жоден із гравців не може пропустити хід), причому гравці не роблять помилок. А тому в таких іграх наперед можна визначити кінцевий результат, тобто передбачити, який з гравців може забезпечити собі виграш. В цих задачах треба відшукати виграшну стратегію для одного із гравців.

Розглянемо приклади найпростіших задач, де у виграшних стратегіях гравець має робити ходи симетричні у певному сенсі ходам суперника. В наведених прикладах симетричні ходи гарантують гравцеві, що йому буде куди зробити хід. А якщо гра завершується за скінчену кількість ходів, то колись не буде куди походити іншому учаснику.

При виборі симетричної стратегії потрібно пам'ятати таке правило: суперник не повинен мати можливості перешкодити вашому черговому симетричному ходу.

Задача. Двоє гравців по черзі розламають шоколадну плитку 6×8 . За один хід дозволяється зробити прямолінійний розлом будь-якого зі шматків уздовж заглиблення на плитці. Програє той, хто не зможе зробити наступного ходу. У котрого з гравців є виграшна стратегія?

Розв'язання

Перемога першого гравця досягається незалежно від його гри, все ж можна було б запропонувати для нього цілком осмислену стратегію. Припустимо, що своїм першим ходом він розламав плитку на дві однакові частини розмірами 6×4 . Тоді, яку б із цих частин не розламав другий гравець, у першого є можливість зробити аналогічний (симетричний) розлом у тотожній їй другій частині. При цьому одержимо дві пари рівних між собою шматків. Тоді, який би шматок не розламав другий гравець, перший знову має змогу зробити аналогічний розлом шматка, який входить із розламаним в ту ж

саму пару. Таким чином, скільки б не продовжувалася гра, ходи першого гравця не зможуть вичерпатися раніше, ніж ходи другого. А оскільки число розломів плитки є скінченним, ми дістаємо, що врешті-решт вичерпаються ходи обох гравців. З попередніх міркувань випливає, що останній хід при цьому буде за починаючим гру, який і здобуде перемогу.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Двоє гравців по черзі кладуть однакові монети на круглий стіл, причому так, щоб вони не накладалися одна на одну. Програє той, хто не може зробити хід.

Розв'язання

В цій грі виграє перший гравець, незалежно від розмірів столу. Першим ходом він кладе монету так, щоб центри монети і столу співпали. Після цього на кожний хід другого гравця перший гравець відповідає симетрично щодо центру столу. При такій стратегії після кожного ходу першого гравця позиція симетрична. Тому, якщо черговий хід другого гравця можливий, то можливий і симетричний йому відповідний хід першого гравця. Отже, перший гравець перемагає.

2. Двоє гравців по черзі ставлять слонів на клітинки шахової дошки так, що слони не б'ють один одного (колір слонів значення не має). Програє той, хто не може зробити хід.

Розв'язання

Шахова дошка симетрична відносно свого центра, тому, на перший погляд, другий гравець на кожен хід першого має симетричний хід. Однак це не так, бо, якщо перший гравець ставить слона на одну з клітинок головної діагоналі, то другий гравець симетричного ходу немає. Щоб розв'язати задачу за допомогою симетричної стратегії, необхідно знайти симетрію, при якій попередній хід суперника не перешкоджає дотриманню обраної стратегії. Такою є симетрія відносно прямої, що розділяє четверту і п'яту горизонталі.

Симетричні відносно неї поля мають різний колір, і тому слони, поставлені на такі поля, не б'ють один одного.

Отже, другий гравець виграє, якщо на кожен хід першого гравця відповідає ходом, симетричним відносно вказаної прямої.

3. Хлопчик та дівчинка по черзі зафарбовують клітинки прямокутної таблиці. За один хід треба зафарбувати дві не зафарбовані клітинки, які мають спільну сторону. Починає гру дівчинка, а програє той, хто немає можливості зробити хід. Хто переможе при правильній грі, якщо таблиця має розміри:

а) 2004×2006 ; б) 2005×2006 ?

Розв'язання

а) переможе хлопчик. Після кожного ходу дівчинки йому треба зафарбувати ту пару клітинок, яка центрально – симетрична відносно центра прямокутника клітинкам, тільки що зафарбованими дівчинкою. Простіше кажучи, ходи хлопчика повинні бути центрально – симетричні ходам дівчинки. Клітинки для такого ходу хлопчика завжди будуть чистими. Адже після кожного ходу хлопчика набір не зафарбованих клітинок буде мати центр симетрії – центр прямокутника. І якщо дівчинка обере для свого ходу якісь дві чисті клітинки, то чистими будуть і клітинки для ходу хлопчика. Оскільки загальна кількість клітинок скінченна, гра колись кінчиться, а програти може лише дівчинка. Для стратегії хлопчика важливим буде те, що центр прямокутника лежить у вершині клітинки.

б) виграє дівчинка. Для прямокутника 2005×2006 центр симетрії лежить всередині спільної сторони двох клітинок, і першим ходом дівчинці треба зафарбувати ці дві клітинки. Далі вона повинна робити ходи, центрально – симетричні ходам хлопчика відносно центра прямокутника.

4. Прямокутна шоколадка розділена 4 повздовжніми та 9 поперечними заглибленнями на $5 \times 10 = 50$ квадратних частин. Перший гравець розламає шоколадку по деякому заглибленню на дві прямокутні частини. Два гравці по черзі одну із отриманих частин по заглибленнях ділять на дві прямокутні частини. Хто виграє при правильній грі, якщо той, хто відламає частку 1×1 :

- а) програє; б) виграє.

Розв'язання

В обох випадках виграє перший гравець, і першим своїм ходом він має розламати шоколадку на дві частини 5×5 .

а) на кожний хід другого гравця на одній половині шоколадки першому треба зробити такий же хід на іншій. Очевидно, що частку 1×1 раніше отримає другий гравець.

б) перший гравець дублює ходи другого в іншій половині шоколадки, поки другий не відламає якусь частку 1×1 . Тоді з цієї частини перший отримує частку 1×1 .

5. Дано смужку розміром 1×2005 . Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід потрібно закреслити одну довільну клітинку смужки або деякі дві послідовні клітинки. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто може забезпечити собі виграш – перший гравець чи його суперник?

Розв'язання

Перемогу може забезпечити собі перший гравець. Першим ходом він закреслює 1003-тю (центральну) клітинку, а потім повторює ходи суперника симетрично відносно неї.

6. Двоє гравців по черзі кладуть п'ятикопійчані монети на прямокутний стіл. Монети повинні повністю вміщуватися на столі і не торкатися одна одної. Той, кому нікуди покласти монету, програє. Хто переможе при правильній грі – той, що ходить першим чи той, хто другим? (виграє той, хто ходить першим. Йому треба першу монету покласти в центр стола, а потім класти монети симетрично ходам другого відносно центра стола)

7. На колі розставлено 20 точок. За хід дозволяється сполучити будь-які дві з них відрізком, що не перетинає відрізків, які проведено раніше. Програє той, хто не може зробити хід. Хто переможе при правильній грі – той, що ходить першим чи той, хто другим? (виграє перший гравець. Перший хід – провести хорду, по обидва боки від якої розміщено по 9 точок. Виграшна стратегія – симетричні ходи)

8. Двоє гравців по черзі ставлять коней на клітинки шахової дошки так, що коні не б'ють один одного. Програє той, хто не може зробити хід. Хто переможе при правильній грі – той, що ходить першим чи той, хто другим? (виграє другий гравець. Виграшна стратегія – центральна або осьова симетрія)

9. Двоє гравців грають в шашки на дошці 8×8 . При цьому забороняється бити шашки суперника та перетворювати шашки в дамки. Програє той, хто не може зробити хід. Хто переможе при правильній грі? (виграє другий гравець. Йому треба робити ходи, симетричні ходам партнера, відносно центра дошки)

10. Два гравці записують по черзі числа 1 і -1 в одиничні клітинки таблиці розміром 1987×1987 . Після того, як всі клітинки заповнені, для кожного рядка, стовпця і двох діагоналей таблиці підраховується добуток чисел, які там записані. Довести, що гравець, який робить перший хід, може грати так, щоб серед цих добутків було рівно 1990 додатних.

Розв'язання

Оскільки число 1987 непарне, то існує клітинка, центром якої є центр симетрії даної таблиці. Для кожної іншої клітинки існує клітинка, симетрична з нею відносно центра таблиці. Якщо перший гравець хоче домогтись вказаного в задачі результату, то своїм першим ходом він має записати в центральну клітинку число (-1) , а після кожного ходу другого гравця йому слід записувати число протилежного знаку в клітинку, симетричну відносно центра таблиці із клітинкою “суперника”. Якщо, наприклад, другий гравець своїм першим ходом записує число $(+1)$ в клітинку першого стовпця, то перший гравець записує число (-1) в симетричну з нею клітинку 1987 -го стовпця. Після цього обміну ходів в кожному із заданих стовпців залишиться по 1986 клітинок, тому в першому стовпцеві буде $993+1$ число $(+1)$ і 993 числа (-1) , тобто добуток чисел буде дорівнювати -1 . В 1987 стовпцеві буде 994 клітинки з числами (-1) і 993 – з числами $(+1)$. Добуток всіх чисел дорівнює $(+1)$. Таким чином, в тому рядку чи в тій діагоналі, де перший запис робить перший гравець, добуток чисел дорівнює $(+1)$. Сюди відносяться, перш за все, обидві діагоналі, той рядок і той стовець, які містять центральну клітинку (всього 4).

В решті рядків і стовпців буде 1986 з додатними добутками і 1986 – з від’ємними. $1986 + 4 = 1990$.

11. У рівностях $***+*=*$, $*+*=*$, $*=*$ двоє вписують по черзі на свій розсуд замість зірочок цілі числа. Довести, що той, хто починає гру, завжди може досягти правильності усіх числових рівностей.

Розв’язання

Перший гравець повинен записати довільне ціле число замість однієї із зірочок другої рівності. Далі, записуючи числа в тій же рівності, що і його суперник, він матиме змогу записати останні числа кожної рівності, а отже, і добитися їх виконання.

Слід зауважити, що відступ від описаної стратегії може привести першого гравця і до поразки. Наприклад, суперник негайно міг би скористатися із вписування числа у третю рівність.

12. Дано шахівницю 8×8 і прямокутні доміно 1×2 . За один хід дозволяється накрити дві сусідні клітинки шахівниці так, щоб плитки доміно не перекривались. Програє той, хто не зможе зробити наступного ходу. У котрого з двох гравців є виграшна стратегія?

Розв’язання

Виграшна стратегія є у другого гравця. Для перемоги він кожного разу повинен ставити плитку доміно симетрично відносно центра дошки до плитки, поставленої перед цим його суперником.

13. Двоє по черзі ставлять на вільні клітинки шахової дошки коней: один – білих, другий – чорних, роблячи це так, щоб виставлений кінь не міг бути взятий жодним із вже поставлених противником коней. Програє той, хто не може зробити черговий хід. Хто виграє при правильній грі: той хто починає гру чи його партнер – і як треба ходити, щоб виграти?

Розв’язання

Нехай другий гравець, роблячи черговий хід, ставить свого коня на клітинку, яка симетрична відносно центра дошки клітинці, на яку тільки що поставив коня його партнер. Доведемо, що вказана стратегія дозволяє другому

гравцю завжди добитися перемоги. Для цього покажемо, що якщо перший гравець може зробити черговий хід, то черговий хід може зробити і його партнер.

В силу вибору стратегії, по-перше, вільна клітинка, на яку другий гравець ставить коня. По-друге, цей кінь не може бути взятий тільки що поставленим конем партнера, бо ці коні знаходяться на клітинках одного кольору. По-третє, цей кінь не може бути взятим жодним з інших виставлених партнером коней: якби він міг бути взятий з клітинки А, то виставлений останнім кінь першого гравця міг би бути взятий конем із клітинки, симетричної А відносно центра.

Зауваження. Існують і інші стратегії, які дозволяють завжди виграти тому, хто ходить другим. Наприклад, він може ставити коня на клітинку, симетричну клітинці, на яку тільки що поставив коня його партнер, відносно вертикальної (горизонтальної) осі симетрії дошки.

14. Дано клітчасту дошку 10×10 . За хід дозволяється покрити будь-які дві сусідні клітинки прямокутником 1×2 так, щоб прямокутники не перекривались. Програє той, хто не може зробити хід. (Виграє другий гравець. Центральна симетрія)

15. В кожній клітинці дошки 11×11 стоїть шашка. За хід дозволяється зняти з дошки будь-яку кількість шашок, що йдуть підряд, або з одного вертикального, або з одного горизонтального ряду. Виграє той, хто зняв останню шашку. (Виграє перший гравець. Першим ходом він знімає центральну шашку, а потім грає центрально симетрично)

16. Два гравці по черзі записують числа 1 і -1 в клітинки таблиці розмірами 2025×2025 . Після того, як всі клітинки заповнені, для кожного рядка, кожного стовпчика і двох діагоналей таблиці підраховується добуток чисел, які там записані. Довести, що гравець, який робить хід першим, може грати так, щоб серед цих добутків було рівно 2028 від'ємних. (Шуканою стратегією є така: перший гравець ставить -1 в центральну клітинку. Якщо другий гравець записує в деяку клітинку певне число, то перший гравець

записує протилежне число в клітинку, яка симетрична клітинці другого гравця відносно центральної клітинки)

17. Два гравці по черзі кладуть фішки на клітинки дошки 101×101 . Перший може покласти чергову фішку на будь-яку вільну клітинку, для якої кількість фішок, які вже стоять в стовпці та рядку, що містять цю клітинку, парна. Другий може покласти чергову фішку на будь-яку вільну клітинку, для якої така кількість непарна. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє при правильній грі? (Виграє перший гравець. Він першим своїм ходом кладе фішку в центральну клітинку, а потім робить ходи симетрично відносно стовпця, який проходить через центральну клітинку, при умові, що другий гравець перед цим не поставив фішку у цей стовпець. У супротивному разі він (перший гравець) робить ходи симетрично відносно центральної клітинки)

18. Є дошка 50×50 . Двоє по черзі закреслюють вибрану клітинку, а також клітинки, які знаходяться над нею і справа від неї. Програє той, хто закреслить ліву нижню клітинку. Хто виграє при правильній грі: перший гравець чи його партнер? (Виграє перший гравець. Першим своїм ходом він повинен закреслити квадрат 49×49 , а потім ходити симетрично)

Розділ IV. Тестові задачі з математики у 7-9 класах та методика їх розв'язування.

4.1. Методи розв'язання задач

Є різні методи розв'язання текстових задач: арифметичний, алгебраїчний, геометричний, практичний, графічний, логічний, комбінований тощо.

Арифметичний: це метод, при якому здійснюються арифметичні дії над даними числами. Одну і ту ж задачу можна розв'язати різними способами, тобто відношення між даними та шуканими, покладеними в основу розв'язку, повинні відрізнятись.

Задача. Грають у шахи та займаються музикою 82 учні, займаються музикою та футболом 32 учні, а грають у шахи та займаються футболом 78 учнів. Скільки учнів грають у шахи, скільки у футбол, а скільки займаються музикою, якщо відомо, що кожен учень займається лише чимось одним?

Розв'язання.

1) $82+32+78=192$ (уч.) – подвоєна кількість учнів, котрі займаються у всіх секціях.

2) $192:2=96$ (уч.) – кількість учнів, що займаються у всіх секціях,

3) $96-32=64$ (уч.) – грають у шахи,

4) $96-78=18$ (уч.) – займаються музикою,

5) $96-82=14$ (уч.) – займаються футболом.

Відповідь: 64 учні грають у шахи, 18 займаються музикою та 14 займаються футболом.

Алгебраїчний: це метод, у якому задача розв'язується шляхом складання та розв'язання рівнянь (нерівностей) або системи рівнянь (системи нерівностей). Задача вважається розв'язаною алгебраїчним способом, якщо для її розв'язання складені інші рівняння (нерівності) або системи рівнянь (системи нерівностей), в основі яких знаходяться зовсім інші співвідношення між даними та шуканими.

Задача. Шахтар може видобути кілька кілограмів вугілля за 3 дні. Якщо він на день видобуватиме на 10 кілограмів більше, то впорається за 2 дні. Яка

початкова продуктивність робітника та скільки кілограмів вугілля він має видобути?

Розв'язання.

Нехай x кг/день – початкова продуктивність шахтаря. Тоді, $(x + 10)$ кг/день – нова продуктивність, $3x$ кг – кількість кілограмів, які він має здобути. За умовою одержуємо рівняння $3x = 2(x + 10)$, розв'язавши яке, знайдемо $x = 20$. Отже, $20 \cdot 3 = 60$ (кг) – повинен видобути шахтер.

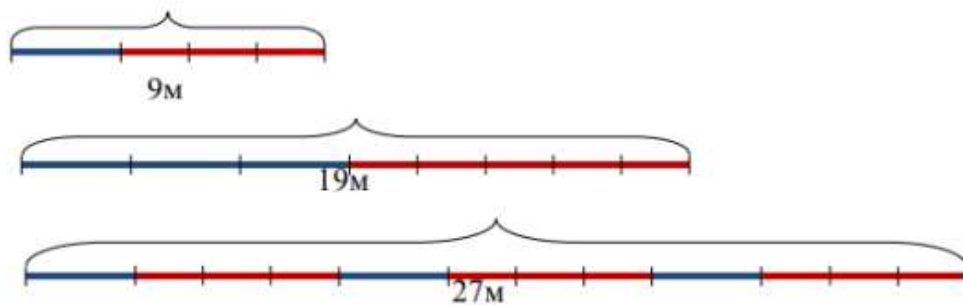
Відповідь: початкова продуктивність шахтаря 20 кг на день, а добути йому необхідно 60 кг.

Геометричний: при розв'язанні задачі цим методом використовуються геометричні побудови та властивості геометричних фігур. Одну і ту ж задачу можна розв'язати принципово різними геометричними методами, якщо для її розв'язання застосувати різні побудови чи властивості.

Задача. На одну футболку та три кофти пішло 9 метрів матеріалу, а на три таких самих футболки та п'ять кофт – 19 метрів матеріалу. Скільки тканини потрібно на виготовлення однієї футболки та однієї кофти?

Розв'язання.

По-перше, складемо геометричну модель цієї задачі. Зобразимо одну футболку синім відрізком однієї довжини, а три кофти – трьома червоними відрізками іншої довжини. Усі чотири відрізки будуть моделювати кількість матеріалу, який використаний для виготовлення однієї футболки та трьох кофт, тобто 9м. (Схема 12)



Нижче зобразимо відповідними відрізками умову задачі, що на три таких самих футболки і п'ять кофт витратили 19м матеріалу, значить, накреслимо три синіх і п'ять червоних відповідних відрізків. Оскільки у другій умові задачі футболок у три рази більше, ніж у першій умові, то в третьому рядку накреслимо три фігури першого рядка, отримаємо три сині та дев'ять червоних відрізків загальною умовною довжиною 27м. (Схема 13)

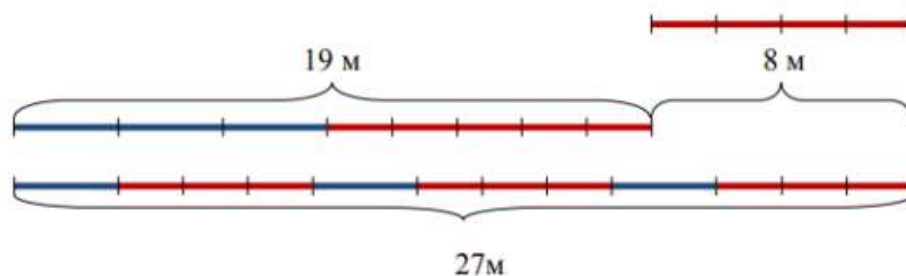


Схема 13

Отримали, що довжина третьої фігури відрізняється від довжини другої фігури на 4 рівних синіх відрізків, а довжина їх відповідає $27 - 19 = 8\text{м}$.

Отже, отримали, що на 4 кофти витрачено 8м матеріалу, отже, на одну кофту – 2м. 10

Знайти довжину тканини, витраченої на футболку, дозволить перша фігура. Зрозуміло, що довжина синього відрізків відповідає $9 - 3 \cdot 2 = 3\text{м}$ матеріалу.

Таким чином, ми відповіли на головні питання задачі: 3м матеріалу потрібно на одну футболку та 2м на одну кофту.

Відповідь: 3м матеріалу потрібно на одну футболку та 2м на одну кофту.

Логічний: це метод, у якому, зазвичай, не здійснюють обчислення, а користуються логічними міркуваннями.

Задача. 3 9 монет одна фальшива (більш легша). Як двома зважуваннями на шалькових вагах визначити фальшиву монету?

Розв'язання.

Хід міркування оформимо як блок – схеми 14.

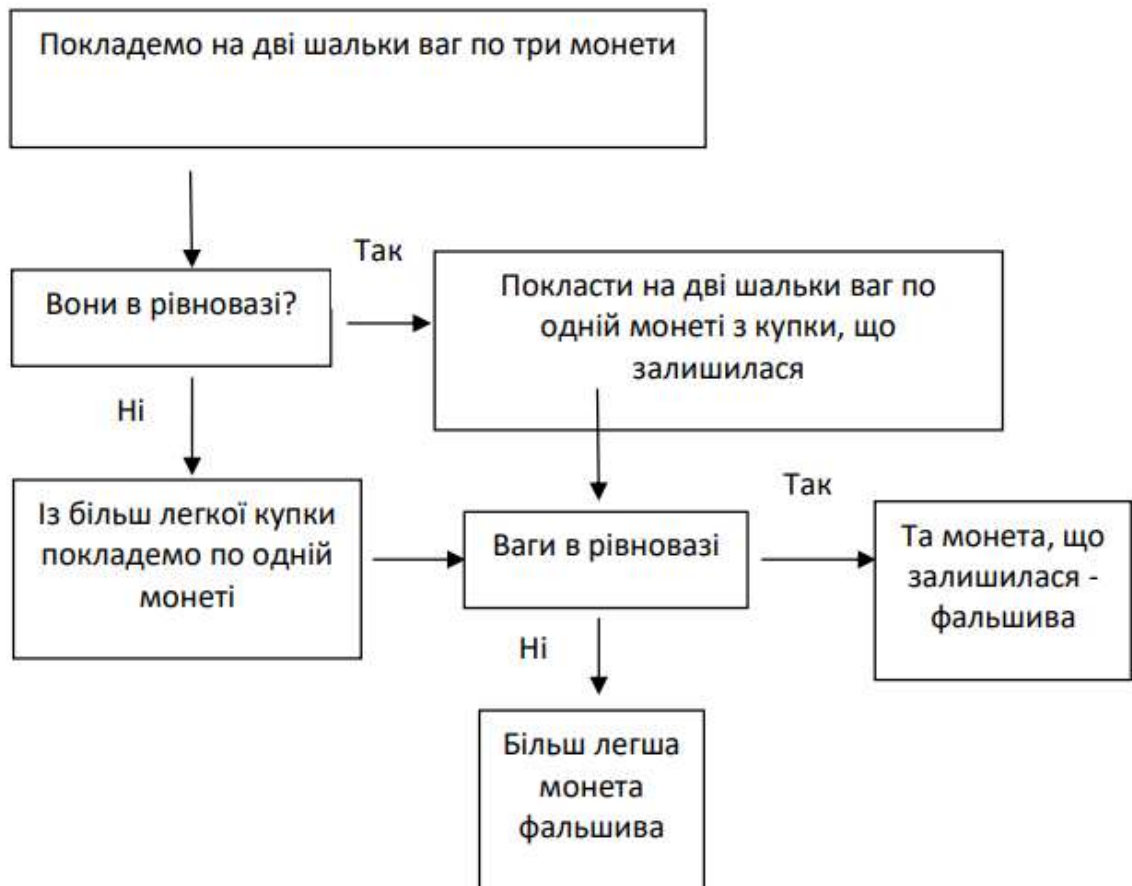


Схема 14

Графічний: це метод, у якому задача розв’язується за допомогою побудови графіків у прямокутній системі координат. Математичною моделлю буде графік, побудований за цими умовами задачі.

Задача. Із міста А у бік міста В вийшла людина зі швидкістю 6 км/год. У той самий час, у тому ж напрямку з міста В вийшла друга людина з швидкістю 4 км/год. Через скільки годин та на якій відстані від міста В перша людина наздожене другу, якщо відстань між містами А і В 18 км?

Розв’язання.

У прямокутній системі координат по горизонталі відкладемо час руху (у годинах), по вертикалі відстань (у км). Побудуємо графіки, що характеризують рух кожного пішохода (Рис.9)

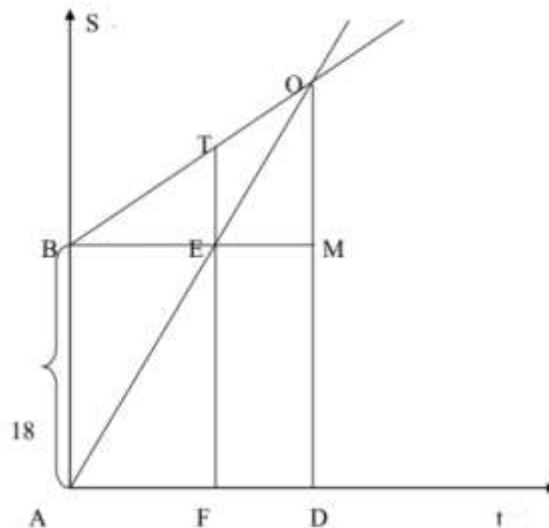


Рис.9

1) $18 : 6 = 3$ (год) – AF

2) $3 \cdot 4 = 12$ (км) – TE

3) $\triangle ABO \sim \triangle ETO \rightarrow \frac{AB}{ET} = \frac{AO}{EO} = \frac{AE+EO}{EO} = \frac{18}{12} \rightarrow AE = \frac{1}{2}EO$

4) $\triangle AOD \sim \triangle AEF \rightarrow \frac{AO}{AE} = \frac{AE+EO}{AE} = \frac{AD}{AF} = \frac{AD}{3} \rightarrow \frac{1,5EO}{0,5EO} = \frac{AD}{3} \rightarrow AD = 9$

5) $9 - 3 = 6$ (год) – FD

6) $6 \cdot 6 = 36$ (км) – OM

Відповідь: перша людина наздожене другу через 9 год, на відстані 36 км від В.

Застосування того чи іншого методу при розв'язанні текстової задачі залежить від конкретного задачі. Зокрема, задачі на роботу часто розв'язують саме геометричним методом. Оскільки за виконану роботу дуже зручно брати площу деякого прямокутника, у якого одна сторона – продуктивність, а інша, відмінна від першої сторони, час.

І, звісно, вибір залежить від віку учнів. Так, наприклад, графічний метод краще підходить дев'ятим, десятим та одинадцятим класам, тому що в ньому дуже часто використовується подібність трикутників. Але є завдання, які можна розв'язати і без подібності, їх можна розв'язувати і в середній школі. Інші методи можуть застосовуватися як у старшій, так і в середній школі.

4.2. Задачі з невідомими, які приймають тільки цілі значення

У цьому параграфі зібрані задачі, в яких необхідно скласти та розв'язати рівняння чи нерівності, у яких невідомі величини за змістом задачі можуть бути лише цілими. Дуже часто такі задачі складені таким чином, що однозначно їх можна розв'язати, тільки якщо приймати факт цілості величин.

Задача. У гонках “Формула 1” беруть участь команди, в яких рівна кількість машин марки “Мерседес” і марки “Феррарі”, і в кожній команді кількість усіх машин менше 7. Якщо у всіх командах кількість машин марки “Мерседес” не змінювати, а кількість машин марки “Феррарі” збільшити втричі, то загальна кількість “Феррарі”, які беруть участь у ралі, стане на 50 більше загальної кількості “Мерседесів”, а кількість машин в обох командах буде понад дванадцять. Обчислити кількість команд, що беруть участь у перегонах, та кількість “Мерседесів” та “Феррарі” у кожній команді.

Розв'язання.

Позначимо кількість команд, які беруть участь у перегонах, через N , а число “Мерседесів” та “Феррарі” у кожній команді – через m та n відповідно. Умова задачі призводить до наступної системи рівнянь та нерівностей.

Табл.23

Умова задачі	Рівняння, нерівності
У кожній команді кількість всіх автомобілів менше 7	$m + n < 7$
Якщо у кожній команді кількість “Мерседесів” не змінювати, а кількість “Феррарі” збільшити втричі, то всього “Феррарі” буде на 50 більше загальної кількості “Мерседесів”	$3nN - mN = 50$
Кількість машин в обох командах стане більше дванадцяти	$m + 3n > 12$

Виявляється, що навіть такої невеликої кількості інформації достатньо для однозначного визначення трьох цілих додатних невідомих m , n та N . Розглянемо останню нерівність

$$m + 3n = (m + n) + 2n > 12, \text{ або } n > 6 - \frac{m+n}{2}$$

Оскільки m і n – натуральні числа, то першу нерівність можна записати так: $m + n \leq 6$; очевидно також, що $n < 6$. Використовуючи ці обмеження, отримуємо, що $3 < n < 6$.

Можливі варіанти:

1. $n = 4, m = 1$;
2. $n = 4, m = 2$;
3. $n = 5, m = 1$.

Відповідно до цього єдине наявне в системі рівняння дає:

1. $11N = 50$;
2. $10N = 50$;
3. $14N = 50$.

Оскільки N – ціле число, то $N = 5$.

Відповідь. У гонках брало участь 5 команд, у кожній з яких є 2 “Мерседеса” та 4 “Феррарі”.

Задачі для самостійного розв’язання.

1) Василь придбав 30 цуценят за 30 золотих. За кожних трьох пуделів заплачено один золотий, за кожні дві такси — теж 1 золотий, за кожного спанієля – 2 золоті. Скільки Вася купи цуценят кожного виду? (9 пуделів, 10 такс, 11 спанієлів).

2) Валера придбав кілька блокнотів і підручників, так, що підручників придбано на 4 більше, ніж блокнотів. За всі блокноти він віддав 72 цента, а за всі підручники – 6 доларів 60 центів. Якби блокнот коштував так само, як і

підручник, а підручник – так само як і блокнот, то Валера витратив би на все менше, ніж 4 долари 44 центи. Скільки придбано блокнотів? (2 блокнота)

3) Коля та Міша розподілили між собою 39 грибів. Кількість грибів, що дісталися одному з них, менша за подвоєну кількість грибів, що дісталася іншому. Квадрат третини кількості грибів, що дісталися Міші, менше збільшеної на одну кількість грибів, що дісталися Колі. Скільки грибів у кожного з хлопців? (14 та 25 грибів)

4) Є однакові набори поштових марок, що складаються з гашених і негашених марок, причому в кожному наборі кількість гашених марок більша ніж на 2 перевищує кількість негашених. Якщо в кожному наборі кількість гашених марок збільшити в 4 рази, а кількість негашених не змінювати, то кількість гашених марок в одному наборі перевищить кількість негашених не більше ніж на 20, а загальна кількість марок у всіх наявних наборах дорівнюватиме 44. Визначити кількість наявних наборів та кількість гашених та негашених марок у кожному наборі. (2 набори, що складаються з 5 гашених та 2 негашених марок кожен)

5) 4 однокласники купили в магазині наступне: один придбав маркер і лінійку, заплативши 40 грн; інший купив лінійку та циркуль, заплативши 12 грн; третій купив маркер, циркуль та два транспортири, заплативши 50 грн; четвертий купив маркер і транспортер. Скільки заплатив четвертий учень? (39 грн)

6) У магазині продали однакові набори, що складаються лише із зелених та жовтих ручок, так що в кожному наборі кількість зелених ручок більш ніж на три перевищувала кількість жовтих. Якби в кожному наборі кількість зелених ручок збільшили у 3 рази, а жовтих – у 2 рази, то кількість зелених ручок в одному наборі перевищувало б кількість жовтих не більше ніж на 16, а всього проданих ручок стало б 81. Обчислити, скільки було продано наборів і скільки було в кожному наборі зелених та жовтих ручок. (3 набори по 7 зелених та 3 жовтих ручки)

7) Група студентів, із 30 людей, отримала на заліку оцінки 2, 3, 4 та 5. Якщо скласти всі їхні оцінки, то вийде 93, причому оцінок “3” було більше, ніж оцінок “5”, і менше, ніж оцінок “4”. Також кількість оцінок “4” кратна 10, а кількість оцінок “5” кратна двом. Обчислити, скільки і яких оцінок одержала група студентів. (11 “двійок”, 7 “трійок”, 10 “четвірок”, 2 “п’ятірки”)

8) У новобудові на всіх поверхах однакова кількість квартир. Всього в будинку 96 квартир та площа кожної з них дорівнює 46 м^2 . При будівництві будинку загальні витрати на земляні роботи, оздоблювальні та обладнання квартир не перевищили 252 720 грн, причому на оздоблювальні роботи було витрачено по 2760 грн, на кожен поверх будинку, на обладнання квартир – по 2000 грн на кожную квартиру та на земляні роботи на відведеній під будівництво ділянці землі – 14 грн за 1 м^2 земельної ділянки. Відомо, що площа ділянки землі не перевищує 2550 м^2 , а загальна площа всіх квартир кожного поверху у 5 разів менше ніж площа земельної ділянки. Скільки поверхів у будівлі? (12)

9) У Тані була деяка кількість грошей купюрами номіналом 15 доларів і 20 доларів, причому двадцятидоларних купюр було більше, ніж п’ятнадцятидоларних. П’яту частину всіх грошей Таня витратила, віддавши дві купюри на квиток до театру. Половину грошей, що залишилися в неї, вона витратила на обід, сплативши його трьома купюрами. Скільки купюр кожного номіналу було в Тані спочатку? (2 п’ятнадцятидоларових купюр та 6 двадцятидоларових купюр)

4.3. Задачі з альтернативною умовою

Умова деяких задачах сформульована таким чином, що при складанні одного із рівнянь виникає альтернатива: залежно від умов рівняння записуються по-різному, і слід розглядати кілька варіантів. В інших розділах математики так само зустрічаються задачі, для розв’язання яких потрібно розбирати всі допустимі варіанти. Наприклад, під час розв’язання рівнянь чи нерівностей з модулями доведеться окремо розглядати випадки, коли вирази, що стоять під знаком модуля, додатні (або дорівнюють нулю) і коли вони

від'ємні. При розв'язанні логарифмічних нерівностей зі змінною основою досліджуються випадки, коли основи логарифмів, що входять до задачі, більше або менше одиниці тощо. Кожна з таких задач вимагає розгляду всіх можливих варіантів, і розв'язок буде знайдено тільки після того, як всі ці варіанти будуть розглянуті.

Задача. У басейні є дві труби різної пропускної спроможності. Одна з труб розташована на бічній стіні, а інша – на дні басейну. Обидві труби можуть працювати на злив та наповнення. Пропускна здатність кожної труби при переході від наповнення до зливу не змінюється і не залежить від рівня води над нею. Перша труба працює на злив у тому випадку, якщо рівень води вище рівня розташування її входу. Басейн наповнили на $\frac{1}{4}$ і включили першу трубу на злив, а другу – на наповнення. При цьому виявилось, що басейн наповнився за час, в $\frac{13}{12}$ раз більше, ніж те, що знадобиться для наповнення порожнього басейну лише другою трубою. Наступного разу при наповненому повністю басейні включили обидві труби на злив, і тоді виявилось, що вся вода витекла з басейну за час, що становить $\frac{5}{18}$ від часу, необхідного для наповнення спочатку порожнього басейну тільки першою трубою. У скільки разів пропускна спроможність другої труби більша за пропускну спроможність першої?

Розв'язання.

Виходячи з умови задачі, не можна сказати відразу, чи знаходиться вхід в першу трубу вище $\frac{1}{4}$ висоти басейну або він нижче за цей рівень. В той же час перша умова задачі (першу трубу включили на злив, а другу – на наповнення) приводить у кожному з можливих випадків розташування входу першої труби до різних рівнянь. Для того щоб знайти розв'язання, необхідно розглянути обидва можливі варіанти.

1 випадок: $x < \frac{h}{4}$, де h – висота басейну, x – рівень знаходження входу першої труби. Позначимо пропускні здібності труб через v_1 і v_2 відповідно, а площу дна басейну приймемо за 1. Тоді маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\frac{3h}{4}}{v_2 - v_1} = \frac{13}{12} \cdot \frac{h}{v_2} \\ \frac{h-x}{v_2 + v_1} + \frac{x}{v_2} = \frac{5}{18} \cdot \frac{h}{v_1} \end{cases}$$

Ця система рівнянь фактично містить тільки дві невідомі величини

$$\frac{x}{h} \text{ і } \frac{v_2}{v_1},$$

тому систему можна записати так:

$$\begin{cases} \frac{0.75}{\frac{v_2}{v_1} - 1} = \frac{13}{12} \cdot \frac{1}{\frac{v_2}{v_1}} \\ \frac{1 - \frac{x}{h}}{1 + \frac{v_2}{v_1}} + \frac{\frac{x}{h}}{\frac{v_2}{v_1}} = \frac{5}{18} \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо невідомі: $\frac{x}{h} = \frac{169}{288}, \frac{v_2}{v_1} = \frac{13}{4}.$

Нерівність $x < h/4$ показує, що у розглянутому випадку відношення x/h менше

$1/4$. Тому розв'язок $\frac{x}{h} = \frac{169}{288}$ не задовольняє умову задачі.

2 випадок: $x \geq \frac{h}{4}$. В цьому випадку система рівнянь задачі має інший вид:

$$\begin{cases} \frac{x - \frac{h}{4}}{v_2} + \frac{h-x}{v_2 - v_1} = \frac{13}{12} \cdot \frac{h}{v_2} \\ \frac{h-x}{v_2 + v_1} + \frac{x}{v_2} = \frac{5}{18} \cdot \frac{h}{v_1} \end{cases}$$

Перетворюючи цю систему так само, як і в попередньому випадку, отримаємо два рівняння

$$\begin{cases} \frac{\frac{x}{h} - \frac{1}{4}}{\frac{v_2}{v_1}} + \frac{1 - \frac{x}{h}}{\frac{v_2}{v_1} - 1} = \frac{13}{12} \cdot \frac{1}{\frac{v_2}{v_1}} \\ \frac{1 - \frac{x}{h}}{1 + \frac{v_2}{v_1}} + \frac{\frac{x}{h}}{\frac{v_2}{v_1}} = \frac{5}{18} \end{cases}$$

для визначення двох невідомих $\frac{x}{h}, \frac{v_2}{v_1}$.

Розв'язуючи цю систему, знаходимо невідомі: $\frac{x}{h} = \frac{1}{3}, \frac{v_2}{v_1} = 3$

Оскільки в цьому випадку $x \geq \frac{h}{4}$, тобто, $\frac{x}{h} \geq \frac{1}{4}$, то знайдене відношення $\frac{v_2}{v_1}$ дає розв'язок задачі.

Відповідь: у 3 рази

Таким чином, розв'язок такої задачі вдалося знайти після того, як були розглянуті обидва можливі випадки. Правильним виявився лише один із них, який і визначив розв'язок задачі.

Задачі для самостійного розв'язання

1) Між містом А та містом В знаходиться місто С, причому від міста А до міста В – 17 км, від міста С до міста В – 3 км. З міста А до міста В виїхав мотоцикліст, який, не проїхавши й двох кілометрів, зупинився. Через якийсь час він поїхав далі в місто С, і в цей же час із міста С в місто В вирушили з постійними швидкостями пішохід та велосипедист, кожен з яких, прийшовши до міста С, відразу ж вирушає назад. З ким раніше зустрінеться мотоцикліст, з пішоходом чи велосипедистом, якщо його швидкість у 4 рази більша за швидкість велосипедиста і у 8 разів більша за швидкість пішохода? (З велосипедистом)

2) Дві електрички рушили разом в однаковому напрямку з міст А та В, що знаходяться на відстані 60 км один від одного, і одночасно приїхали на станцію С. Якби хтось із них збільшив свою швидкість на 25 км/год, а інший – на 20 км/год, то вони все одно приїхали б одночасно на станцію С, але на дві години раніше. Знайти швидкість електричок. (50 км/год, 40 км/год)

3) Літак йде на посадку і їде по посадковій смузі деякий час рівномірно зі швидкістю v . Після цього пілот включає гальма, і швидкість літака стає рівносповільненою, причому в кожную секунду швидкість зменшується на 2

м/с. Відстань від точки приземлення до точки абсолютної зупинки дорівнює 4 км. Відношення часу, за який літак проходить перші 400 м, до часу, протягом якого літак проходить весь шлях землею, дорівнює 4:65. Визначити швидкість v . ($v = 100$ м/с)

4) Відстань між містом та селом, що знаходяться на одному шосе дорівнює 120 км. Одночасно з міста в село, із села в місто виїхали два мотоциклісти. За дві години після початку руху вони зустрілися. Якщо б швидкість першого мотоцикліста була вдвічі більшою, а швидкість другого мотоцикліста на 10 км/год менше, то вони зустрілися б на 1 годину пізніше. Обчислити, скільки часу потрібно першому мотоциклісту, щоб доїхати від міста до села. (12 год)

5) У колгоспі є 2 кукурудзяні поля. Перше поле було прибрано бригадою А, після чого друге поле було прибрано разом бригадами А та В. Коли була прибрана третина загальної площі, з'ясувалося, що час, потрібний для завершення прибирання, в $21/13$ рази менше часу, який знадобився б бригаді А, для прибирання обох полів. Крім того, бригаді В, для прибирання другого поля, необхідно часу, удвічі більше часу, за який могла б зібрати обидва поля одна бригада А. У скільки разів продуктивність бригади А більша за продуктивність бригади В? (У 6 разів)

6) 3 особи, які в один і той же час виходять з пункту M і одночасно приходять в пункт O , пройшовши маршрутом, що складається з прямолінійних відрізків MN , NK , KM , MO ($MNKO$ – паралелограм). На кожному з цих відрізків швидкості всіх людей стали і рівні: у першого 3, 6, 5 і 8 км/год відповідно, у другого – 4, 5, 6 і 7 км/год відповідно. Швидкість третьої людини на відрізку MO дорівнює 8 км/год, а на інших відрізках збігається або зі швидкістю першого, або зі швидкістю другого на відповідному відрізку, проте ні з тим, ні з іншим він не проходить весь маршрут повністю. Встановити, чи є кут MNK гострим або тупим. (Кут MNK – гострий)

7) Три спортсмени синхронно починають біг у пункті А і так само синхронно закінчують біг у пункті А, подолавши дистанцію, що складається з

прямолінійних відрізків АВ, ВС, СМ, МА (АВС – трикутник, М – середина відрізка АВ). На кожному з цих відрізків швидкості всіх спортсменів незмінні: у першого $13\frac{5}{7}$, 10, 10 та 16 км/год відповідно, а у другого – $12\frac{12}{13}$, 14, 12 та 14 км/год відповідно. Останній спортсмен на відрізку ВС біжить поряд з одним з інших бігунів, на ділянці МА його швидкість та ж, що й на ділянці АВ, причому на всьому шляху він змінює швидкість не більше двох разів. З'ясувати більше чи менше 90° кут АВС. (Кут АВС менший за 90°)

8) 3 вантажні автомобілі завантажуються піском двома транспортерами. Вантажопідйомність першого з них дорівнює 12 т, другого не менше 2 т, а третього – не менше, ніж другого. Перший транспортер завантажує $\frac{1}{2}$ т піску за хвилину, другий – $\frac{2}{3}$ т за хвилину. Вантажівки можуть під'їхати до транспортеру у довільній послідовності, при цьому завантаження однієї вантажівки може здійснюватися тільки одним транспортером. Якщо транспортер почав навантажувати вантажівку, то та вже не може поїхати до іншого транспортера. Час навантаження вважається від початку завантаження першої вантажівки до закінчення завантаження останньої. Якщо дотримуватися цих умов, найменший час завантаження складає 22,5 хв. Припустимо, що на зміну у транспортера завантаженого вантажівки іншою порожньою вантажівкою час не витрачається. Відомо, що другий транспортер може завантажити всі вантажівки за 36 хвилин. Обчислити вантажопідйомності другої та третьої вантажівок. (3 т, 9 т)

9) Три спортсмени пробігли послідовно три пункти, М, N, К (МНК – трикутник). Старт знаходиться в пункті М, фініш в пункті К. Відомо, що дистанції між пунктами – це відрізки. На кожному з цих відрізків швидкості у спортсменів незмінні. У першого 10, 16 і 14 км/год відповідно, у другого 12, 10 і 16 км/год відповідно. Третій спортсмен у пунктах N і К біжить не один, а з кимось, і змінює швидкість тільки один раз. З'ясувати, чи є трикутник МНК гострокутним або тупокутним. (Трикутник МНК тупокутний)

4.4. Задачі, які розв'язуються за допомогою нерівностей

Дуже часто в умові задачі зустрічаються така умова, математичний запис якої еквівалентний нерівності. У таких задачах розв'язок можна знайти тільки в тому випадку, якщо врахувати нерівності, що впливають з умови. Врахування нерівностей дозволяє отримати додаткові співвідношення і тим самим знайти розв'язок. Більше того, існує цілий клас задач, який націлений на вміння складати не тільки рівняння, а й нерівності. Ці задачі доречно було б назвати «задачами на складання рівнянь і нерівностей».

Задача. Маша колекціонує монети. Якщо вона розкладатиме по 20 монет на сторінці, то їй не вистачить альбому, а якщо по 23 монети на сторінці то, принаймні одна сторінка буде порожньою. Якщо б Маша придбала ще один такий самий альбом, на кожній сторінці якого є по 21 монеті, то всього у неї буде 500 монет. Скільки сторінок у альбомі?

Розв'язок.

Нехай у альбомі m сторінок, а у Маші N монет. Тоді рівняння та нерівності цієї задачі можна скласти в такий спосіб (Табл.24)

Табл. 24

Умови задачі	Рівняння, нерівність
Якщо Маша збере по 20 монет на сторінку, їй не вистачить альбому	$20m < N$
Якщо Маша збере по 23 монети на одній сторінці, то принаймні одна сторінка виявиться порожньою	$23(m - 1) \geq N$
Якщо Маша придбає такий самий альбом, в якому на кожній сторінці по 21 монеті, то всього у неї буде 500 монет	$21m + N = 500$

Таким чином, у цій задачі маємо одне рівняння та дві нерівності. Виразимо N з рівняння цієї системи і підставимо його в кожну з нерівностей:

$$20m < 500 - 21m$$

$$23(m - 1) \geq 500 - 21m,$$

враховуючи, що m – ціле число, з першої нерівності цієї системи знаходимо, що $m \leq 12$, а з другої нерівності – що $m \geq 12$. Порівнюючи між собою ці результати, одержуємо, $m = 12$.

Відповідь. В альбомі 12 сторінок.

Задачі для самостійного розв'язання

1) Одночасно з двох міст, відстань між якими дорівнює 360 км, назустріч один одному виїхали два автобуси. Автобус, що виїхав із першого міста, приїхав в інше місто не раніше ніж через 5 год після початку руху. Якби його швидкість була в 1,5 рази більшою, ніж насправді, то він зустрів б другий автобус раніше, ніж через дві години після свого виходу з першого міста. Швидкість якого автобуса більша? (Швидкість автобуса з другого міста більша)

2) З міста А до міста В о 9 годин ранку виїхав швидкий поїзд. Одночасно з міста С, розташованого між містами А та В, виїжджають два пасажирських поїзди, один їде до міста А, а інший до міста В, і рухаються вони з однаковими швидкостями. Швидкий поїзд зустрічає перший пасажирський поїзд не пізніше ніж через 3 год після його відправлення, потім приїжджає до міста С не раніше 14 год того ж дня і, нарешті, прибуває в місто В у той же момент, що й другий пасажирський поїзд, через 12 год після зустрічі з першим пасажирським поїздом. Знайти час прибуття до міста А першого пасажирського поїзда. (16 год 30 хв)

3) З одного табору до іншого за течією річки пливе пліт. У той момент, коли пліт рушив з першого табору до другого, з другого табору до першого, назустріч йому почав рух човен, який зустрічає пліт не раніше ніж через 2 год і потім припливає до першого табору. Відомо, що на весь шлях човен витратив

менше 3 годин 20 хвилин. Чи зможе пліт доплисти до другого табору за п'ять годин, якщо відстань між таборами дорівнює 20 км? (Ні, не зможе)

4) У районі є п'ятиповерхові та дев'ятиповерхові будівлі, та дев'ятиповерхових будівель менше, ніж п'ятиповерхових. Якщо кількість дев'ятиповерхових будівель збільшити в 2 рази, то всього будівель буде більше 24, а якщо збільшити в 2 рази кількість п'ятиповерхових будівель, то загальна кількість будівель стане менше 27. Скільки п'ятиповерхових будівель та скільки дев'ятиповерхових? (9 п'ятиповерхових будівель, 8 дев'ятиповерхових будівель)

5) По річці сплавляється пліт, пропливаючи між двома селами на добу. Такий же шлях, і назад катер пропливає не менше ніж за 10 годин. Як би власна швидкість катера збільшилася на 40%, то для проходження такої ж відстані знадобилося б не більше 7 годин. За який час катер пропливе від одного села до іншого за течією річки, якщо її швидкість не змінювати. (За 4 год)

6) О 9 годині ранку з пункту А в пункт В рухається мотоцикліст. Через 2 години після виїзду мотоцикліста з А в В виїхала легкова машина, яка наздогнала мотоцикліста не пізніше 12 години дня. Після того, як легковик доїхав до пункту В, він тут же розвертається та їде назад. В якийсь момент після розвороту машина зустрічає мотоцикліста, і приїжджає до А о 17 годині того ж дня. О котрій годині мотоцикліст приїхав до пункту В, якщо між зустрічами пройшло не більше 3 год. (18 год)

7) Від однієї пристані до іншої пливе пліт зі швидкістю v км/год. Через годину після цього від цієї ж пристані відпливає моторний човен, швидкість якого у стоячій воді дорівнює 10 км/год. Наздогнавши пліт, човен пливе назад. Обчислити всі можливі значення v , при яких пліт встигне пропливти більше 15 км, у той момент, коли човен припливе назад до пристані. ($5 < v < 10$)

8) Толя та Коля йдуть на зустріч один одному по одній дорозі. Спочатку між ними було 7 км. Як би Толя йшов у 2 рази швидше, ніж він йшов насправді, а швидкість руху Коля була б на 2 км/год більша за його справжню швидкість,

то на момент зустрічі Коля пройшов би більше, ніж Толя. Швидкість, кого з хлопців більша? (Швидкість Колі більше)

9) З міста N до міста M, відстань між якими 120 км, одночасно назустріч один одному виїжджають два автомобілі. Вони зустрілися пізніше, ніж через п'ять годин після початку руху. Наступного дня вони виїжджають одночасно в один і той же бік з пунктів N і T, відстань між якими 36 км, причому автомобіль, що їде попереду, рухається зі швидкістю, на 6 км/год більше, ніж напередодні, а автомобіль, що їде ззаду, рухається з тією ж швидкістю, що й напередодні. Чи вистачить другому автомобілю дві години, щоб наздогнати першого? (Не вистачить)

10) З одного міста до іншого з постійною швидкістю рухається маршрутний автобус. Відстань між містами дорівнює 105 км. Через півгодини за ним із першого міста зі швидкістю 40 км/год виїжджає легковий автомобіль. Він наздогнав автобус і розвертається назад. Обчислити ті значення v , при яких автомобіль повертається в місто A пізніше, ніж автобус приходить до другого міста. ($30 < v \leq 33,6$)

4.5. Задачі на зустрічний рух

Задача. З села K у село P вийшов чоловік. У той же момент із села P до села K виїхав скутер, який зустрів чоловіка через $5/6$ години після того, як виїхав із села P. Скільки часу потрібно чоловікові, щоб подолати відстань до села P, якщо скутер може проїхати всю відстань на 4 години швидше за чоловіка.

Розв'язання.

Побудуємо графіки руху скутера та чоловіка (рис.10)

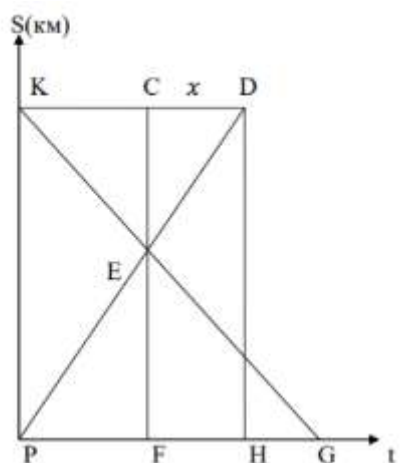


Рис.10.

Позначимо $CD = FH = x$

$$PF = KC = \frac{5}{6} \text{ (год)}$$

$$HG = 4$$

$$\triangle PEG \sim \triangle DEK \rightarrow \frac{KD}{PG} = \frac{CE}{FE}$$

$$\triangle PEF \sim \triangle DEC \rightarrow \frac{DC}{PF} = \frac{CE}{FE}$$

$$\rightarrow \frac{KD}{PG} = \frac{DC}{PF} \rightarrow \frac{\frac{5}{6} + x}{\frac{5}{6} + x + 4} = \frac{x}{\frac{5}{6}}$$

$$x^2 + 4x - \frac{25}{36} = 0$$

Звідки

$$x_1 = -\frac{25}{6} \text{ (не задовольняє); } x_2 = \frac{1}{6}$$

$$1) \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + 4 = 5 \text{ (год)}$$

Відповідь: 5 год.

Задачі для самостійного розв'язання

1) Маша та Катя вийшли один одному назустріч, з пунктів А та В, о 12:00 та зустрілися через 30 хвилин. Катя прийшла до пункту А на одинадцять

хвилин пізніше, ніж Маша прийшла до пункту В. За який час подолати відстань АВ кожна дівчина? (55 хв; 66 хв)

2) Назустріч один одному виїхали мотоцикл та автобус. Щоб проїхати від пункту А до пункту В автобус витрачає, на 160 хв більше, ніж потрібно мотоциклісту на дорогу з В в А, а сума цих часів у 3 рази більше часу, що минув від початку руху автобуса та мотоцикліста до моменту їхньої зустрічі. Скільки часу потрібно автобусу, щоб проїхати з А в В, а мотоциклу з В в А? (4 год; 41 3 год)

3) Пішохід вийшов з пункту А в пункт В о 10 год, а через деякий час з В в А виїхав автомобіль і приїхав до А о 14 год того ж дня. Швидкості автомобіля та пішохода стали. Пішохід прийшов в В через 6 годин після виїзду звідти автомобіля. Знайдіть, яку частину шляху з А в В пройшов пішохід до його зустрічі з автомобілем. (0,4)

4) Відстань від міста А до міста В 210 км. З А в В і з В в А виїхали автомобілі назустріч один одному. Перший автомобіль прибув у В через 2 години після моменту зустрічі, а другий прибув в А через 1,125 години після моменту зустрічі. Знайдіть суму швидкостей автомобілів. (140 км/год)

5) З міста А до міста В виїхав автомобіль. Через деякий час з В в А по тій же дорозі виїхав мотоцикліст. Швидкості автомобіля та мотоцикліста стали. Автомобіль до зустрічі з мотоциклістом перебував у дорозі 7 годин 30 хвилин, а мотоцикліст до зустрічі їхав 3 години. Мотоцикліст прибув до А о 23 годині, а автомобіль прибув до В о 16 годині 30 хвилин. Знайдіть час відправлення мотоцикліста із міста В. (11 год)

6) З села М до села N виїжджає мотоцикліст. Через якийсь час з В в А тією ж дорогою виїхав велосипедист. Швидкості велосипедиста та мотоцикліста стали. Мотоцикліст до зустрічі з велосипедистом перебував у дорозі 5 годин, а велосипедист до зустрічі їхав 2 години. Велосипедист прибув до А о 20 годині, а мотоцикліст прибув до В о 17 годині. Знайдіть час відправлення велосипедиста із міста В. (13:00)

7) З міста С до міста D виїхав електропоїзд. У той самий час, з D в С виїхав другий електропоїзд, цією ж залізницею. Перший поїзд прибув у D на 5 годин раніше, ніж другий у С. Якби перший поїзд виїхав із С на 1 годину раніше, ніж другий з D, то через 2 години після виходу другого поїзда їх розділяло б 850 км. Визначте відстань від С до D. (Потяги рухаються кожен з своєю сталою швидкістю та без зупинок). (160 км)

8) З міста А до міста В о 6 годині ранку виїхав вантажний автомобіль. Через шість годин поспіль із міста В до міста А тією ж дорогою виїхав легковий автомобіль. Автомобілі рухаються зі сталими швидкостями. За попередньою домовленістю вони одночасно приїхали в селище С, розташоване на дорозі між А та В. Розвантаження та оформлення документів тривали п'ять годин. Потім автомобілі продовжили кожен свій шлях. Легковий та вантажний автомобілі прибули відповідно до міст А та В одночасно о 23 годині того ж дня. Знайдіть час прибуття автомобілів до міста С. (14.00)

9) Від однієї пристані А до пристані В пливе катер, назустріч йому пливе другий катер. Вони зустрілися через 30 хвилин після відплиття від пристаней, рухаючись зі сталими швидкостями. Скільки часу потрібно кожному катеру, щоб пропливти відстань між пристанями, якщо відомо, перший приплив до В на 25 год пізніше, ніж другий приплив до А? (50 год; 75 год)

10) Ігор вийшов зі школи о 17:00 і побіг додому, а через деякий час із дому у школу пішов його батько. Ігор прибіг додому за 6 хвилин після виходу батька. Батько прийшов о 17:14 того ж дня. Швидкості Ігоря та батька сталі. Знайдіть, яку частину шляху зі школи пробіг Ігор до зустрічі з батьком. (0,7)

11) Два пішоходи вийшли одночасно назустріч один одному з пунктів А і В. Перший вийшов з А, другий – з В. Вони зустрілися через 3 години. Знайдіть час, за який перший пройшов відстань від А до В, якщо перший прийшов у В на 2,5 години пізніше, ніж другий прийшов до А. (5 год)

12) З міста А до міста В виїхав товарний поїзд. Через 5 год 5 хв тією ж дорогою виїхав із міста В до міста А пасажирський поїзд. Обидва поїзди зустрілися на проміжній станції. Від цієї станції товарний поїзд йшов до міста

В 12 год 55 хв і від тієї ж станції пасажирський поїзд йшов до міста А 4 год 6 хв. Скільки часу витратив кожен поїзд на шлях між містом А та містом В? (9 год 16 хв, 23 год 10 хв)

13) Пішохід та велосипедист, що вирушили з пунктів А та В назустріч один одному о 10 год, зустрілися о 16 год. Пішохід і вершник, що вирушили з цих же пунктів назустріч один одному о 12 год, також зустрілися о 16 год. Визначити, на скільки кілометрів відстане до 20 год велосипедист від вершника, якщо вони вийдуть із пункту А об 11 год в одному напрямку. Шлях від А до В дорівнює 120 км. (90 км)

14) Два автомобілі рухаються назустріч один одному з двох міст А та В. Першому автомобілю, щоб подолати $\frac{2}{5}$ всієї відстані, необхідно на 2 години більше, ніж другому, щоб проїхати $\frac{2}{15}$ всієї відстані. Скільки годин потрібно кожному автомобілю, щоб доїхати від одного до іншого міста? (10 год; 15 год)

4.6. Задачі на рух в одному напрямку навздогін

Задача. Петя та Вася розташовуються за 220 м від Олега. Як тільки Олег наздогнав Петю, Вася відставав від них на 180 м. За скільки метрів від Васі був Петя, коли Олег наздогнав Васю? Розв'язання. Побудуємо графіки руху Петі, Васі та Олега (Рис.11)

Розв'язання

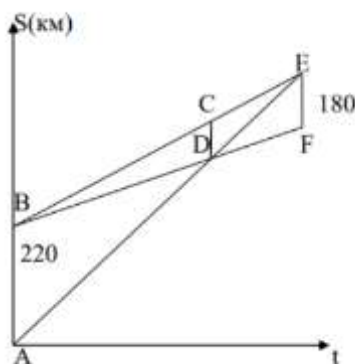


Рис.11

Позначимо $BC = m$, $CE = n$, $CD = x$

$$\Delta ABE \sim \Delta DCE \rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{CE}{BE}, \frac{x}{220} = \frac{n}{m+n}, x = \frac{220n}{m+n}$$

$$\Delta FBE \sim \Delta DBC \rightarrow \frac{DC}{FE} = \frac{BC}{BE}, \frac{x}{180} = \frac{m}{m+n}, x = \frac{180m}{m+n}$$

$$\frac{220n}{m+n} = \frac{180m}{m+n},$$

$$n = \frac{9m}{11},$$

$$x = \frac{220 \cdot \frac{9m}{11}}{m + \frac{9m}{11}}, x = 99$$

Відповідь: 99 м.

Задачі для самостійного розв'язання:

1) Трьом спортсменам необхідно пропливти з А в В і назад. Довжина колії дорівнює 55 м. Вони стартують послідовно, з інтервалом у п'ять секунд. В деякий момент часу, до розвороту, спортсмени опинилися в одному місці. Останній спортсмен, діставшись В і відразу розвернувшись назад, зустрічає другого в 9 м від В, а першого в 15 м від В. Обчисліть, швидкість третього спортсмена. (1 м/с).

2) Пішохід, велосипедист і мотоцикліст їдуть дорогою в один бік зі сталими швидкостями. У той момент, коли пішохід і велосипедист перебували в одній точці, мотоцикліст випереджав їх на 6 км. Коли мотоцикліст наздогнав велосипедиста, пішохід відставав від них 3 км. На скільки кілометрів велосипедист випередив пішохода в той момент, коли пішохода наздогнав мотоцикліст? (2 км)

3) З пункту А до пункту В о 9 год вирушив пішохід, а о 10 год 30 хв – велосипедист. Об 13 год велосипедист наздогнав пішохода, а о 18 год – приїхав до пункту В. Знайдіть, о котрій годині в пункт В прийшов пішохід. (21 год).

4) На дорозі послідовно розташовані пункти М, N, К, О. Відстань від М до N дорівнює 24 км. Із М до О виїхала з сталою швидкістю машина. В той же час з N в О почали рух з сталими швидкостями велосипедист та мотоцикліст. У той момент, коли машина зрівнялася з велосипедистом, мотоцикліст був попереду на 6 км. Машина наздогнала мотоцикліста в пункті К і, доїхавши до О, тут же поїхала назад у М, зустрівшись з велосипедистом вдруге в К. Обчислити відстань між N і К, якщо відомо, що час від початку руху до моменту другої зустрічі машини та велосипедиста в 2 рази більше, ніж час від початку руху до того моменту, коли машина вперше наздогнала мотоцикл. (16 км).

5) Автомобіль проїхав першу половину шляху зі швидкістю 40 км/год, а другу – 60 км/год. Знайдіть середню швидкість руху автомобіля. (48 км/год).

6) Згідно з розкладом, автобус курсує за маршрутом з пункту А до пункту В і назад, без зупинок. На шляху з А в В він змушений був зробити зупинку, тому на зворотному шляху збільшив швидкість на 25%. Приїхавши до А з 10-хвилинним відхиленням від розкладу, він зменшив останню швидкість на 24% і прибув у В вчасно. Яка була тривалість зупинки (у хвилинах)? (28 хв).

7) Група відпочиваючих протягом 2 год 40 хв каталася на моторному човні по річці зі сталою швидкістю (відносно води) поперемінно то за течією, то проти течії – загалом не менше ніж по 1 годині. У результаті човен пройшов весь шлях 40 км (відносно берега) і, відчаливши від пристані А, причалила до пристані В на відстані 10 км від А. У який бік текла річка? Яка за цих умов максимальна швидкість її течії? (8 км/год).

8) Юнак пішов до залізничної станції, до якої від його будинку було 10,5 км. Через півгодини з того ж будинку слідом за юнаком тією ж дорогою вийшов його брат, який, йдучи зі швидкістю 4 км/год, наздогнав юнака, передав забуту ним річ, і відразу повернув назад з колишньої швидкістю. З якої швидкістю йшов юнак, якщо відомо, що йшов він всю дорогу рівномірно, а його брат повернувся у той момент, коли хлопець підійшов до станції. (3 км/год).

9) З А до В через однакові інтервали часу виїжджають три мотоцикли. Вони доїжджають до В синхронно, після цього їдуть до пункту С, що знаходиться на відстані 120 км, від В. Перший мотоцикл прибуває туди через 1 годину після другого. Третій мотоцикл приїхавши в С, відразу повертає назад і в 40 км від С зустрічає перший мотоцикл. Обчислити швидкість першого мотоцикла, якщо швидкість всіх мотоциклістів була незмінною. Відповідь: 30 км/год. 10) З одного міста в інше їдуть 2 автомобілі. Через 1 год за ними виїхав ще один автомобіль. Ще через 1 год відстань між третім і першим автомобілями зменшилася в 1,5 рази, а між третім і другим – у 2 рази. У скільки разів швидкість першого автомобіля більша за швидкість другого, якщо відомо, що третій автомобіль не обганяв перших двох? (9/8).

11) Лісовою стежкою йдуть два пішоходи, і їде один лижник. Усі учасники рухаються в одному напрямку. Лижник відставав від пішоходів на 900 метрів, в той момент, коли вони були в одному місці. Як тільки лижник наздогнав другого пішохода, перший відставав від них на 100 м. На скільки метрів другий пішохід випереджав першого, коли лижник наздогнав першого пішохода. (90 м).

12) Пункти А, В і С розташовані по одній прямій, так що пункт В знаходиться між пунктами А і С. З пунктів А і В до пункту С в один і той же час, вийшли два пішоходи. Через 3 години відстань між ними дорівнювала чверті відстані ВС, а ще через 3 години вони прибули в С в один і той же час. Знайти відношення швидкостей цих пішоходів. Швидкості пішоходів вважати сталими протягом усього шляху. (3/2).

13) З одного пункту до іншого вийшов пішохід. Через 2 години з пункту А виїхав велосипедист, а ще за півгодини – мотоцикліст. Пішохід, мотоцикліст та велосипедист рухалися рівномірно і без зупинок. Через деякий час після виїзду мотоцикліста виявилось, що вони подолали однакову частину шляху від А до В. На скільки пізніше мотоцикліста до В прибув велосипедист, якщо пішохід прийшов на 1 годину пізніше мотоцикліста? (48).

14) Дорога проходить послідовно через пункти А, В, С, D. Відстань від В до С дорівнює 12 км. З А в D виїхав зі сталою швидкістю мотоцикліст. Одночасно з ним з В в D вирушили зі сталими швидкостями пішохід і велосипедист. Коли мотоцикліст наздогнав пішохода, велосипедист обганяв їх на 6 км. У пункті С мотоцикліст наздогнав велосипедиста і, доїхавши до D, одразу поїхав назад в А, зустрівшись з пішоходом вдруге в С. Знайдіть відстань між А і В, якщо відомо, що час від початку руху до моменту повторної зустрічі мотоцикліста та пішохода в 4 рази більше, ніж час від початку руху до того моменту, коли мотоцикліст вперше наздогнав велосипедиста. (18 км).

15) Турист, що йде з села на станцію, пройшовши за першу годину 3 км, розрахував, що він запізниться до поїзда на 40 хв, якщо рухатиметься з тією самою швидкістю. Тому решта шляху проходить зі швидкістю 4 км/год і прибуває на станцію, за 45 хв до відходу поїзда. Знайдіть відстань від села до станції. (20 км).

16) Протягом 2 годин пароплав рухався річкою в тумані. Після того, як туман розвіявся, пароплав удвічі збільшив свою швидкість і рухався ще шість годин. Який шлях подолав пароплав у тумані, якщо його середня швидкість за 8 годин руху становила 14 км/год? (16 км).

4.7. Задачі на рух в одному напрямку із відставанням

Задача. З села А до села В, довжина шляху між якими 120 км, синхронно виїхали 2 мотоцикли. Коли один з них подолав 70 км, другому потрібно було здолати ще 36 км. Скільки кілометрів потрібно буде проїхати одному з мотоциклів, коли другий прибуде до села В?

Розв'язання.

Побудуємо графіки руху мотоциклістів (Рис.12)

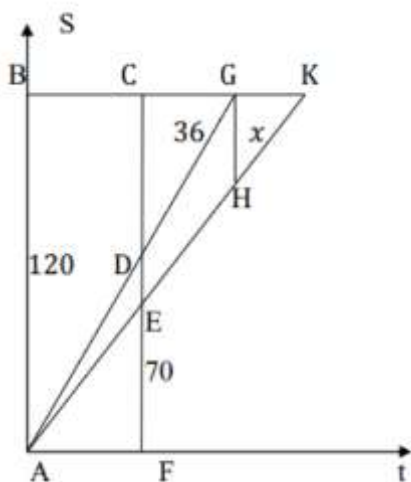


Рис.12

Позначимо $AD = n$; $DG = m$; $GH = x$

Оскільки $CD = 36$, $FE = 70$, то $DE = 14$

$$\Delta GCD \sim \Delta GBA: \frac{GD}{GA} = \frac{CD}{BA}, \frac{m}{m+n} = \frac{36}{120}, \frac{m}{n} = \frac{3}{7}$$

$$\Delta ADE \sim \Delta AGH: \frac{AD}{AG} = \frac{DE}{GH}, \frac{n}{m+n} = \frac{14}{x}$$

$$x = 14 \cdot \frac{m}{n} + 14 = 14 \cdot \frac{3}{7} + 14 = 20 \text{ (км)}$$

Відповідь: 20 км.

Задачі для самостійного розв'язання:

1) Від причалу А до причалу В відпливли катер і човен, причому швидкість катера в 5 разів більша за швидкість човна. Відомо, що вони пливли з сталими швидкостями, але катер зробив кілька зупинок. Скільки часу катер витратив на всі зупинки, якщо він доплив до причалу В за 2 години, а човен за 4 години? (6/5 год).

2) Два автомобілі брали участь у гонці. Перші 2/3 шляху вони проїхали одночасно і обидва заїхали на піт-стоп. За півхвилини обидві машини продовжили гонку, при цьому перший гонщик збільшив швидкість у півтора рази, а другий рухався з колишньою швидкістю. Скільки часу пройшло від старту автомобілів до їхнього фінішу, якщо перший фінішував на одну хвилину раніше? (8,5 хв; 9,5 хв).

3) Перший автомобіль проходить за хвилину на 300 м більше, ніж другий, тому час проходження одного кілометра на 10 с менше. На скільки метрів збільшується відставання другого автомобіля від першого за час, поки перший проходить один кілометр? (200 м).

4) Два пішоходи одночасно вийшли з дому до магазину, до якого 150 метрів. Яка відстань залишиться пройти першому в той момент, коли другий пішохід пройде 70 метрів, якщо в той момент, коли перший прийшов у магазин, другому залишилося пройти 50 метрів? (45 м).

5) Син поїхав велосипедом на озеро о 7 ранку. Через деякий час батько поїхав за ним. У той момент, коли батько вийшов із дому, син встиг проїхати 10 км, а за 1,5 год після виїзду батька йому залишилося проїхати 20 км, а син приїхав на озеро. О котрій виїхав батько? (7:36).

6) Перший пішохід вийшов на вокзал та прибув за 25 хвилин до поїзда. Через 10 хвилин за першим пішоходом вийшов другий пішохід, який теж хотів встигнути на той самий поїзд. Швидкість другого пішохода в 0,5 рази менша за швидкість першого, і він спізнюється на 10 хвилин. У скільки разів йому потрібно збільшити швидкість, щоб прийти за 5 хвилин до відправлення поїзда? ($1\frac{3}{7}$).

7) Перший катер проходить за хвилину на 200 м більше, ніж другий, тому час проходження одного кілометра в нього на 8 с менше. На скільки метрів збільшується відставання другого катера від першого за час, поки перший проходить один кілометр? (42 м).

8) Три бігуни брали участь у марафоні на 10 км. Перший бігун прибів раніше другого на 4 хв, а третього на 6 хв. У той момент, коли перший учасник добіг до фінішу, третьому залишилося пробігти ще 4 км. За скільки часу кожен бігун пробіг марафон? (9 хв, 13 хв, 15 хв).

9) З міста А до міста В виїхали вантажний та легковий автомобілі, причому, швидкість легкового автомобіля в 1,5 рази більша за швидкість вантажного. Відомо, що вони їхали зі сталими швидкостями, але легковий

автомобіль зробив кілька зупинок. Скільки часу легковий автомобіль витратив на всі зупинки, якщо на всю дорогу він витратив 2 години, а вантажний 3 години? (12 год).

10) Автомобіль та мотоцикл виїхали одночасно з міст А та В, відстань між якими 100 км у напрямку міста С, яке розташоване між містами А і С. Через дві години автомобіль знаходився за 180 км від мотоцикліста, а через 3 години від початку шляху мотоцикліст подолав 90 км. На якій відстані вони будуть через 8 годин після початку руху? (220 км).

4.8. Комбінований рух

Задача. По шосе назустріч пішоходу рухаються велосипедист і мотоцикліст. У момент, коли велосипедист та мотоцикліст перебували в одній точці, пішохід був від них за 8 км, а коли мотоцикліст зустрів пішохода, велосипедист відставав від мотоцикліста на 4 км. Яка відстань буде між мотоциклістом та велосипедистом, коли пішохід зустріне велосипедиста?

Розв'язання.

Побудуємо графіки руху велосипедиста, мотоцикліста та пішохода (Рис.13)

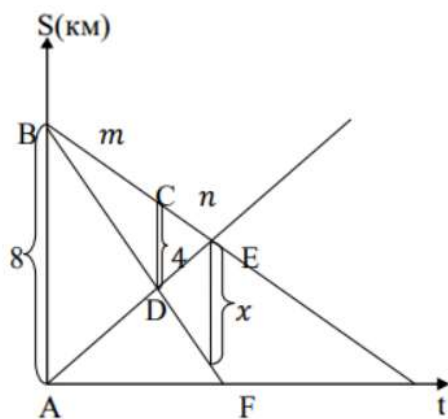


Рис.13

Позначимо: $BC = m$; $CE = x$

$$\triangle ABE \sim \triangle DCE \rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{BC}{CE} = \frac{BC+CE}{CE} \rightarrow \frac{8}{4} = \frac{m+n}{n} \rightarrow m = n$$

$$\triangle FBE \sim \triangle DBC \rightarrow \frac{FE}{DC} = \frac{BE}{BC} = \frac{m+n}{m} \rightarrow \frac{x}{4} = 2 \rightarrow x = 8$$

Відповідь: 8 км.

Задачі для самостійного розв'язання:

1) З пункту А до пункту В виїхав велосипедист. Діставшись В, він розвернувся і поїхав назад. З А в В рухається пішохід, який зустрів велосипедиста через 20 хв після відправлення велосипедиста з А. Доїхавши до А, велосипедист знову повернувся і наздогнав пішохода через 10 хвилин після першої зустрічі. Через який час пішохід прийде до В? (1 год).

2) Три мотоциклісти А, В і С брали участь у гонці. Мотоциклісти А і С стартували відразу, а мотоцикліст В через деякий час. Першим фінішував мотоцикліст А. Мотоцикліст В через 1 годину після свого старту наздогнав мотоцикліста С і прибув на фініш через 4 години після старту мотоциклістів А та С, та за 2 години до фінішу мотоцикліста С. Знайдіть відношення швидкості мотоцикліста А до швидкості мотоцикліста С, якщо відомо, що мотоцикліст А рухався в $\frac{8}{5}$ рази повільніше за мотоцикліста В. ($\frac{15}{8}$).

3) Дорогою зі швидкістю 90 км/год їде автомобіль “Жигулі”, на відстані 100 м перед ним зі швидкістю 60 км/год їде дитячий автобус, а назустріч їм на відстані 1 км від “Жигулів” зі швидкістю 120 км/год рухається “Мерседес”. Чи може “Жигулі”, не змінюючи швидкості, випередити автобус, якщо для безпеки обгону потрібно, щоб в момент закінчення обгону він знаходився від двох машин на відстані, чисельно рівним (м) їх швидкості (км/год)? (так, 120).

4) З пункту А до пункту В виїхали одночасно велосипедист та мотоцикліст. Доїхавши до пункту В, мотоцикліст, не зупиняючись, розвернувся і вирушив у пункт А. Проїхавши $\frac{1}{4}$ частину шляху від А до В мотоцикліст зустрів велосипедиста. До пунктів В і А відповідно велосипедист та мотоцикліст прибули одночасно. Знайдіть відношення їх швидкостей. (3:1).

5) З пункту А до пункту В вирушили одночасно пішохід і велосипедист. Велосипедист, доїхавши до пункту В, повернувся назад і зустрів пішохода через 20 хв після відправлення з А. Доїхав до А, він знову повернувся і наздогнав пішохода за 5 хвилин після зустрічі. Через який час пішохід прийде до В? ($55\frac{1}{3}$ хв).

6) З селища в одному і тому самому напрямку виїхали послідовно з інтервалом в 1 годину три велосипедисти. Перший їхав зі швидкістю 12 км/год, другий – 10 км/год, а третій, маючи більш високу швидкість, наздогнав спочатку другого велосипедиста, ще за 2 години – першого. Запишіть у відповіді число, яке виражає швидкість (км/год) третього велосипедиста. (20 км/год).

7) З міста в село одночасно вирушили бігун Б і пішохід П1, а в той самий момент із села до міста вийшов пішохід П2. Швидкість пішоходів рівна. Зустрівшись, Б і П2 деякий час стояли на місці, а потім попрямували до села. При цьому Б побіг із колишньою швидкістю 12 км/год, а П2 зменшив свою швидкість у півтора рази. В результаті до села спочатку прибів Б, а потім через деякий проміжок часу, удвічі більший тривалості зустрічі Б і П2, одночасно прийшли обидва пішоходи. Знайдіть швидкість пішохода П1. (6 км/год).

8) Пункти А, В і С віддалені від пункту М відповідно на 60, 55 та 56 км. Одночасно з цих пунктів до пункту М вийшли три пішоходи: перший – з А, другий – з В, третій – з С. Перший пройшов весь шлях зі сталою швидкістю і прибув у М на 2 години раніше другого і третього, що прибули одночасно. Другий пішохід, пройшовши 40 км із тією самою швидкістю, як і перший, зробив зупинку на 1 годину. Залишок шляху він пройшов зі швидкістю, яка менша за швидкість третього пішохода на стільки ж, на скільки швидкість третього менша за швидкість першого. Третій пішохід весь шлях пройшов із сталою швидкістю. Визначити швидкості першого та третього пішоходів. (5 км/год; 4 км/год).

9) На річці розташовані пункти А і В, причому пункт В розташований нижче за річкою, на відстані 20 км від А. Катер прямує з А до В, потім відразу повертається до А і знову слідує в В. Одночасно з катером з А відправляється пліт. При поверненні з В катер зустрів пліт на відстані 4 км від А. На якій відстані від А катер наздожене пліт, слідуючи вдруге в В? (5 км).

10) Моторний човен пройшов відстань від міста М за течією річки до міста N та, не зупиняючись, повернувся назад за 12 годин. За який час пройде

пліт цю відстань, якщо він вийшов з М в той момент, коли човен вийшов з міста N, та зустрівся з човном на його зворотному шляху на відстані, що дорівнює $\frac{1}{3} MN$ від міста М. (16 км).

11) По шосе зі сталими швидкостями рухаються пішохід, а назустріч йому – велосипедист і мотоцикліст. У той момент, коли велосипедист і мотоцикліст знаходилися в одній точці, пішохід був на відстані 8 км від них. В той момент, коли мотоцикліст зустрів пішохода, велосипедист відставав від мотоцикліста на 4 км. На скільки кілометрів мотоцикліст обганятиме велосипедиста в той момент, коли пішохід зустрінеється з велосипедистом? (8 км).

4.9. Задачі на роботу

Задача. Дві бригади, працюючи одночасно, обробили ділянку землі за 12 год. За який час могла б обробити цю ділянку кожна з бригад окремо, якщо швидкості виконання роботи бригадами відносяться як 3:2?

Розв'язання.

Побудуємо графіки, що характеризують продуктивність кожної бригади(Рис.14)

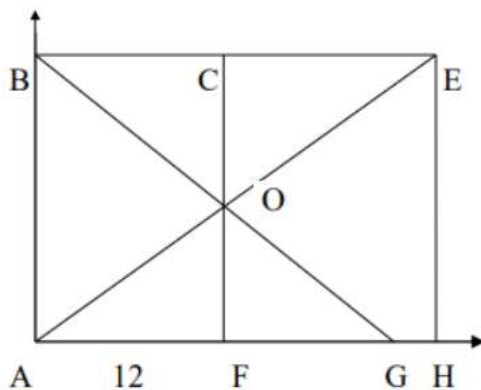


Рис.14

За умовою $v_1:v_2=3:2$, а також $\frac{AG}{AB} = \frac{BE}{AB} \rightarrow \frac{AG}{BE} = \frac{3}{2}$

$$\Delta AOF \sim \Delta EOC \rightarrow \frac{AF}{CE} = \frac{AO}{EO}$$

$$\Delta AOG \sim \Delta EOB \rightarrow \frac{AG}{BE} = \frac{AO}{EO}$$

$$\frac{AF}{CE} = \frac{AG}{BE} \rightarrow \frac{12}{CE} = \frac{3}{2} \rightarrow CE=8$$

$$BE = BC + CE = 12 + 8 = 20$$

$$\frac{AG}{BE} = \frac{3}{2}, AG = 30$$

Відповідь: 20; 30.

Задачі для самостійного розв'язання:

1) Три басейни D, F і G однакового об'єму заповнювали водою з труб із сталими швидкостями. Басейни D та G почали заповнювати одночасно, а басейн F – пізніше. Першим був заповнений басейн D. Через 20 хвилин після початку заповнення басейну F об'єм води в ньому зрівнявся з об'ємом води в басейні G. Басейн F був заповнений через 80 хвилин після початку заповнення басейнів D і G і за 40 хвилин до закінчення заповнення басейну G. Знайдіть, на скільки хвилин пізніше почали заповнювати басейн F, ніж басейни D і G, якщо відомо, що басейн F, заповнюється в 5/3 рази швидше за басейн D. (40 хв).

2) Дві бригади робітників мали відремонтувати дві ділянки дороги (перша бригада – перша ділянка, друга – друга). Причому, обсяг робіт на першій ділянці був удвічі меншим, ніж на другому, а в першій бригаді було на 10 робітників менше, ніж у другій. Продуктивність всіх робітників однакова. Бригади одночасно розпочали роботу, і коли перша бригада закінчила роботу, друга ще працювала. Яка найменша кількість робітників могла б бути в першій бригаді? (11 чоловіків).

3) Тракторна бригада може зорати $\frac{5}{6}$ ділянки землі за 4 год 15 хв. До обідньої перерви бригада працювала 4,5 год, після чого залишилися невиораними ще 8 га. Яка площа ділянка? (68 га).

4) Два екскаватори, працюючи разом, можуть викопати котлован за 4 години. Щоб викопати половину котловану, першому потрібно на 7,5 год менше, ніж другому. Перший екскаватор почав працювати о 9 год, а другий о 10 год. До 11 год було вийнято 180 кубометрів ґрунту. Яка ємність котловану? (400 м^3).

5) Трьом робітникам потрібно зробити однакові деталі. Один приступив до роботи на 1 годину раніше за інших, які почали синхронно. Незабаром третій робітник зробив стільки ж деталей, скільки і перший, а другий зрівнявся з першим на дві години пізніше, ніж третій. Знайдіть відношення продуктивностей першого та третього робітників, якщо відношення продуктивності другого робітника до продуктивності третього становить 2:3? (1:2).

ВИСНОВКИ

Розв'язування текстових задач є важливою складовою математичної освіти в основній школі. Воно забезпечує не лише засвоєння математичних знань і формування обчислювальних навичок, а й розвиток логічного, критичного та алгоритмічного мислення, а також формування ключових компетентностей, передбачених Державним стандартом базової середньої освіти.

У першому розділі посібника було розглянуто теоретико-методичні основи навчання учнів розв'язуванню текстових задач, зокрема в контексті вимог Нової української школи. Аналіз наукової, методичної та психолого-педагогічної літератури дозволив визначити, що текстові задачі мають значний потенціал для реалізації компетентнісного підходу, інтеграції знань, формування життєвих навичок. Особливу увагу приділено ролі алгебраїчного методу в розвитку структурного й логічного мислення учнів, що є підґрунтям для засвоєння складніших понять у старших класах.

У другому розділі систематизовано основні типи текстових задач, що вивчаються у 5-му класі, та подано методику їх розв'язування як в арифметичному, так і в алгебраїчному способах. Аналіз продемонстрував доцільність поступового переходу від конкретних до абстрактних моделей задач, а також значення варіативних підходів і диференційованих методик. Виявлено, що особливу ефективність у навчанні дає використання контекстних задач, пов'язаних із повсякденним життям школярів.

У третьому розділі розкрито специфіку навчання розв'язуванню окремих видів задач у 6-му класі, зокрема задач на рух, спільну роботу, пропорційні величини та задач, що розв'язуються складанням рівнянь. Значна увага приділена задачам підвищеного рівня складності, які не лише сприяють глибшому розумінню теми, а й розвивають дослідницькі вміння учнів. Запропоновано методичні підходи до роботи з такими задачами, що передбачають активну пізнавальну діяльність, самостійне формулювання математичних моделей, роботу в парах і групах.

У четвертому розділі досліджено специфіку тестових задач у 7–9 класах. Особливу увагу приділено задачам, що передбачають використання нерівностей, цілочисельних умов, альтернативних варіантів відповіді, а також задачам на рух і роботу з різними ускладненнями. Встановлено, що тестовий формат, за умови якісного методичного супроводу, може бути не лише інструментом перевірки, але й ефективним засобом навчання. Розроблені приклади завдань і методичні кейси ілюструють можливості для впровадження інтегративного, компетентнісного та діяльнісного підходів.

Окрему цінність посібника становлять ****додатки****, у яких запропоновано завдання для самостійної роботи студентів та методичні кейси, що стимулюють розвиток педагогічного мислення, творчого підходу до навчання текстових задач. У кожному додатку подано завдання різного типу — аналітичні, порівняльні, конструкторські, фрагменти уроків, рефлексивні запитання та практичні ситуації (кейси). Такий формат дозволяє майбутнім учителям не лише засвоїти змістовий матеріал, а й апробувати методичні інструменти на практиці.

Таким чином, посібник містить ґрунтовне методичне забезпечення для підготовки майбутніх учителів математики до роботи з текстовими задачами в основній школі. Практико-орієнтована структура посібника, наявність прикладів, завдань для самостійної роботи, методичних кейсів та проєктів сприяє формуванню професійної компетентності педагогів, здатних не лише навчати учнів розв'язувати задачі, а й формувати в них математичну грамотність, критичне мислення та інтерес до предмета.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Текстові задачі на складання рівнянь. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: <https://yukhym.com/uk/matematika/tekstovi-zadachi-na-skladannya-rivnyan.html>
2. Методика навчання учнів основної школи розв'язувати текстові задачі. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: <https://sites.google.com/site/tekstovizadaci>
3. Текстові задачі на сумісну роботу і планування в шкільному курсі математики. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: <http://eprints.zu.edu.ua/19723/1>
4. Розв'язуємо текстові задачі. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: <https://volrmk.at.ua/serednia/matematika/01/1/3.pdf>
5. Демідова Т.Е. Текстові задачі і методи їх розв'язання. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: <https://webcache.googleusercontent.com/search?q>
6. Навчання учнів розв'язувати текстові задачі. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: https://allref.com.ua/uk/skachaty/Navchannya_uchniv_rozvyazuvati_tekstovi_zadachi
7. Розв'язування прикладних задач методом рівнянь в основній школі. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: <https://naurok.com.ua/rozvyazuvannya-prikladnih-zadach-metodom-rivnyan-v-osnovniy-shkoli-38419.html>
8. Розв'язання текстових задач геометричним методом в курсі математики. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: <http://school2100.com/upload/iblock/536/5361fbdd868009f4bd985ecd334d88.pdf>
9. Лур'є М.В. Задачі на складання рівнянь. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: <https://obuchalka.org/20190617110264/zadachi-na-sostavlenie-uravnenii-lure-mv-aleksandrov-vi-1990.html>
10. Методичний пошук вчителя математики. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: <https://vspu.edu.ua/science/new-style>
11. Текстові задачі

на сумісну роботу у шкільному курсі математики. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: <http://school4.edukit.kiev.ua> (дата звернення 23.09.2022)

12. Збірник задач. Частина 15. Текстові задачі. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: <https://vseosvita.ua/library/zbirnik-zadac-castina-15-tekstovi-zadaci-93306.html>

13. Бурда М. Прикладна спрямованість змісту шкільної математичної освіти. Наукове забезпечення розвитку освіти в Україні: актуальні проблеми теорії і практики (до 25-річчя НАПН України): зб.наук. праць. Київ: Вид. дім “Сам”, 2017. 210 с.

14. Розв’язування задач. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: http://catalog.library.tnpu.edu.ua:8080/library/TopicDescription?topic_id=69952&page=7

15. Сафін В.Ф. Психологія самовизначення особистості. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: <https://scibook.net/>

16. Гече Ф.Е. Збірник конкурсних тестових завдань з математики. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: <https://www.uzhnu.edu.ua/en/infocentre/get/6183>

17. Шаригін І.Ф. Факультативний курс з математики 10. Розв’язання задач. [Електроний ресурс]. – Режим доступу. URL: <https://retrokniga.com/estestvennye-i-tekhнические-nauki/mathematics/sharyigin-63-if-fakultativnyi-kurs-po-matematike-10-reshenie-zadach>

18. Слепкань З.І. Методика навчання математики: підручник / З. І. Слепкань. – 2-ге вид. Київ: Вища школа, 2006. 582 с

Завдання для самостійної роботи студентів

(до розділу І «Методичні орієнтири навчання розв'язуванню текстових задач у контексті концепції Нової української школи»)

1. Аналітичне завдання

Ознайомтеся з Державним стандартом базової середньої освіти (2020 р.). Визначте, які ключові компетентності формуються через вивчення математики. Обґрунтуйте, які з цих компетентностей розвиваються у процесі розв'язування текстових задач. Наведіть приклади.

2. Методичне порівняння

Порівняйте два підходи до розв'язування задач на рух:

- традиційний (арифметичний або алгебраїчний);
- компетентнісний (через контекст реального життя).

Складіть таблицю порівняння за такими критеріями: мета, тип завдання, очікувані результати, мотивація учнів, роль учителя. Зробіть висновки: які елементи кожного підходу варто поєднувати в практиці викладання.

3. Планування фрагменту уроку

Розробіть міні-фрагмент уроку для 6 класу на тему «Задачі на спільну роботу». Обов'язково врахуйте:

- діяльнісний і компетентнісний підхід;
- активну роль учня;
- використання практично значущої задачі;
- можливість диференціації.

Оформіть як мікропроект (тема, мета, тип задачі, опис активностей, короткий підсумок).

4. Рефлексія

На основі власного шкільного досвіду опишіть:

- які типи текстових задач були найбільш поширені у вашому навчанні;
- як подавалися задачі (традиційно, через життєві приклади, з елементами дослідження тощо);

- що вам подобалося чи викликало труднощі;
- як ви змінили б підхід до навчання текстових задач у контексті вимог НУШ.

Практичні кейси

Кейс 1. Математика і побут

Ви викладаєте тему «Задачі на відсотки» у 6 класі. Учні не бачать сенсу в цій темі й запитують, навіщо їм це потрібно.

Завдання:

- Складіть текстову задачу побутового чи фінансового змісту, що викликає інтерес.
- Опишіть, як ви представите її учням (формулювання проблеми, етапи обговорення, співпраця в парах/групах).
- Запропонуйте коротке продовження задачі для диференціації рівнів.

Кейс 2. Задача як дослідницький проєкт

У 7 класі ви подаєте задачі на зустрічний рух. Хочете перетворити роботу з ними на дослідницьку діяльність.

Завдання:

- Сформулюйте задачу з життєво наближеним змістом.
- Розпишіть інструкцію для учнів.
- Поясніть, як цей підхід сприяє формуванню компетентностей НУШ.

Кейс 3. Мотивація через інтеграцію

Ви готуєте квест або інтелектуальну гру до Тижня математики. Хочете включити задачі різного змісту.

Завдання:

- Сформулюйте концепцію заходу (тема, назва, формат).
- Наведіть 3 задачі з різних тем, адаптовані під гру.
- Вкажіть методи оцінювання й мотивації учнів.

Завдання для самостійної роботи студентів

(до Розділу II «Окремі види текстових задач з математики у 5-му класі та методика їх розв'язування»)

1. Аналіз підручників

Оберіть один із сучасних підручників математики для 5 класу. Проаналізуйте, які типи текстових задач у ньому подано, як вони систематизовані, які методи пропонуються для їх розв'язування. Зробіть висновки щодо відповідності матеріалу віковим особливостям учнів.

2. Методичне обґрунтування

Обґрунтуйте доцільність використання арифметичного методу для розв'язування текстових задач у 5 класі. Наведіть приклади задач, для яких цей метод є найбільш ефективним. Визначте обмеження арифметичного методу у навчанні.

3. Підготовка дидактичних матеріалів

Підготуйте комплект з трьох задач на обчислення тривалості подій для учнів 5 класу. Забезпечте поступове ускладнення. Запропонуйте способи активізації уваги учнів під час розв'язування (використання візуалізації, реальних прикладів тощо).

4. Методика введення задач на рух

Опишіть, як доцільно вводити задачі на рух у 5 класі. Розробіть короткий фрагмент уроку: визначте мету, етапи, тип задачі, очікувані результати. Зверніть увагу на попередню підготовку учнів та можливі труднощі.

5. Творче завдання

Складіть цікаву текстову задачу для 5 класу на основі сюжетів казок, мультфільмів чи повсякденних ситуацій. Визначте, як її використання може сприяти розвитку математичної грамотності учнів.

Практичні ситуації

Ситуація 1. Задачі на частини

На уроці вчитель пояснює задачі на частини. Деякі учні плутаються у формулюваннях типу «частина від числа» та «скільки становить». Один учень вигукує, що «нічого не розуміє».

Завдання:

- Які прийоми ви використаєте, щоб пояснити зміст задач?
- Які засоби наочності ви застосуєте?
- Як ви створите умови для підтримки та розуміння учня, який втратив мотивацію?

Ситуація 2. Геометричні задачі у 5 класі

Учні тільки починають знайомитися з елементами геометрії. Вчитель подає задачі на периметр та площу фігур. Дехто механічно підставляє формули, не розуміючи, що обчислює.

Завдання:

- Як ви поясните зміст понять «периметр» і «площа» у доступний спосіб?
- Які практичні задачі варто запропонувати для осмислення понять?
- Як ви оціните розуміння учнів?

Завдання для самостійної роботи студентів

(до розділу III «Окремі види текстових задач з математики у 6-му класі та методика їх розв'язування»)

1. Методичне завдання

Проаналізуйте підручник математики для 6 класу (на вибір).

- Випишіть усі текстові задачі на спільну роботу.
- Визначте: які з них розв'язуються арифметично, а які передбачають складання рівняння.
- Порівняйте складність задач, рівень реалістичності, наявність життєвого контексту.

- Зробіть висновки щодо відповідності задач сучасним вимогам НУШ.

2. Методичне моделювання

Розробіть фрагмент уроку для 6 класу з теми «Задачі на відсоткові розрахунки». У проєкті врахуйте:

- навчальну мету, яка спрямована на формування математичної та фінансової грамотності;
- конкретну текстову задачу з реального життя (наприклад, знижки, податки, депозит);
- методику подання задачі: мотивація, формулювання проблеми, види запитань;
- активності учнів у парах/групах;
- варіанти диференціації (2 рівні задач);
- коротке підсумкове завдання з рефлексією.

3. Методичне порівняння

Порівняйте задачі на пропорційні величини та задачі на спільну роботу за такими критеріями:

- математичний зміст і логічна структура;
- труднощі в засвоєнні для учнів;
- можливості для ілюстрацій, моделей, інтерактивних завдань;

- типові помилки учнів;
- прийоми роботи з кожним типом задач.

Оформіть як порівняльну таблицю з прикладами.

3. Дидактична трансформація

Оберіть складну задачу з підручника (наприклад, з розділу «Задачі на рух»).

- Перетворіть її на двоступеневу задачу з розгорнутою умовою в сюжетній формі.
- Опишіть, як ви подасте її учням 6 класу в ігровій або дослідницькій формі.
- Поясніть, як зміниться мотивація, складність та включеність учнів.
- Вкажіть, як ви перевірятимете результат (усно, письмово, презентацією, у формі гри тощо).

Практичні кейси

Кейс 1. Задача — старт для дискусії

У 6 класі учень стверджує, що задачі на спільну роботу «незрозумілі і не потрібні».

Завдання:

- Запропонуйте текстову задачу з цієї теми, що має соціальний або побутовий контекст (наприклад, прибирання парку, робота команди волонтерів).
- Опишіть, як перетворити задачу на проблему для обговорення.
- Як учні можуть дійти до математичного розв'язання самостійно?
- Як заохотити тих, хто не включається одразу?

Кейс 2. Урок-розслідування

Під час вивчення задач на пропорції ви плануєте провести «урок-розслідування».

Завдання:

- Складіть сюжет уроку (напр., порівняння цін у магазинах, перевірка рекламної знижки, економічне планування).

- Наведіть 2–3 задачі.
- Вкажіть, які компетентності розвиваються (математична, підприємницька, критичне мислення).
- Опишіть форму оцінювання та підтримки учнів.

Кейс 3. Учень — дослідник

Після теми «Задачі на відсотки» ви хочете, щоб учні самостійно склали задачі для однокласників.

Завдання:

- Визначте вимоги до задачі (реалістичність, чіткість, наявність числових даних, життєвий контекст).
- Розробіть інструкцію для учнів.
- Запропонуйте критерії оцінювання: логіка задачі, правильність розв'язання, оригінальність, подача.

Завдання для самостійної роботи студентів

(до розділу IV «Тестові задачі з математики у 7–9 класах та методика їх розв’язування»)

1. Аналітичне завдання

Ознайомтеся з тестовими збірниками або підручниками для 7–9 класів.

- Випишіть по 2 приклади тестових задач з кожного класу (7, 8, 9).
- Визначте тип задачі (рух, робота, нерівності, логіка тощо).
- Проаналізуйте рівень складності (базовий, середній, підвищений).
- Зробіть висновок щодо ефективності задач у підготовці до ДПА/НМТ.

2. Конструювання задач

Складіть 3 авторські тестові задачі з різних тем, які вивчаються у 8–9 класах.

- 1 задача — з цілочисельною відповіддю;
- 1 задача — з вибором однієї правильної відповіді;
- 1 задача — з відкритою відповіддю (коротке розв’язання або пояснення).

Зазначте: тему, правильну відповідь, пояснення до кожної задачі.

3. Методичне порівняння

Порівняйте методику розв’язання задач на рух:

- у 6 класі (традиційна задача на зустрічний рух);
- у 9 класі (задача з параметром або нерівністю).

Побудуйте таблицю за критеріями: тип задачі, рівень абстракції, метод розв’язання, складність, форма подачі, види помилок.

4. Рефлексія на власний досвід

Пригадайте, як ви розв’язували задачі на комбінований рух або роботу в середній школі.

- Які труднощі виникали?
- Як можна було б інакше подати цей матеріал, щоб учні краще засвоїли?
- Які методи з арсеналу НУШ ви використали б зараз?

Практичні кейси

Кейс 1. Тестова задача — неформальна перевірка

Після теми «Нерівності» ви хочете влаштувати нестандартну перевірку знань.

Завдання:

- Складіть 2 тестові задачі, які спрямовані не лише на правильне рішення, а й на розуміння логіки міркування;
- Опишіть, як ви використаєте їх у формі гри або індивідуального квесту;
- Запропонуйте систему зворотного зв'язку.

Кейс 2. Задачі на уроках математики і логіки

Ви проводите інтегрований урок «Математика + логіка» у 9 класі.

Завдання:

- Доберіть 3 задачі з тестовим форматом, які передбачають логічне мислення (альтернативна умова, виключення зайвого, комбінаторика тощо);
- Опишіть методику подання задач (групова робота, формулювання гіпотез, обговорення рішень);
- Обґрунтуйте формувальне оцінювання для таких типів уроків.

Кейс 3. Діагностика через задачі

На початку навчального року ви хочете діагностувати рівень умінь учнів у 8 класі.

Завдання:

- Складіть короткий тест з 5 задач різних типів (рух, відсотки, нерівності, комбінаторика, задача на цілі числа);
- Наведіть правильні відповіді й пояснення;
- Опишіть, як ви проведете самоаналіз учнівських результатів та побудуєте подальше навчання.

Навчальне видання

ЗАДОРІНА Ольга Миколаївна, кандидат педагогічних наук, доцент,
доцент кафедри математики і методики її навчання ДЗ «Південноукраїнський
національний педагогічний університет ім.К.Д.Ушинського»

КАЧАН Тетяна Василівна, викладач математики ВСП «Одеський
технічний фаховий коледж Одеського національного технологічного
університету», викладач-методист

Навчальний посібник

з дисципліни "Методика навчання математики"

***(розділ "Текстові задачі та методика навчання їх
розв'язування у основній школі")***

Одеса

2025