

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний
університет імені К. Д. Ушинського»
Навчально-науковий інститут природничо-математичних наук, інформатики
та менеджменту
Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації
*для організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Наукові засади
сучасних курсів алгебри та початків аналізу»*
Розділ: Елементи теорії множин. Тема: Принцип Діріхле

УДК 510.3

*Рекомендовано до друку Вченою радою Державного закладу
«Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського»*

Рецензенти:

- 1. Григор'єва Тетяна Ігорівна**, кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інформаційних технологій Міжнародного гуманітарного університету
- 2. Олефір Олена Іванівна**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і статистики Університету Ушинського.

Болдарєва О. М., Урум Г. Д. Методичні рекомендації для організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Наукові засади сучасних курсів алгебри та початків аналізу» Розділ: Елементи теорії множин. Тема: Принцип Діріхле : методичні рекомендації. Одеса : Університет Ушинського, 2025. 52 с.

Методичні рекомендації для організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Наукові засади сучасних курсів алгебри та початків аналізу» Розділ: Елементи теорії множин. Тема: Принцип Діріхле містять загальний теоретичний матеріал, розв'язки прикладів і задач. Рекомендовано для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 014.08 Середня освіта (Фізика та астрономія) з метою закріплення, поглиблення й узагальнення знань, одержаних під час навчання.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ І. ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ.....	6
1.1. Теоретичні підстави принципу Діріхле.....	6
1.2. Застосування принципу Діріхле при розв'язанні задач на розміщення.....	13
1.3. Застосування принципу Діріхле при розв'язанні геометричних задач.....	15
1.4. Застосування принципу Діріхле при розв'язанні задач на розфарбування.....	19
1.5. Застосування принципу Діріхле при розв'язанні завдань з теорії чисел	22
РОЗДІЛ ІІ. ВИВЧЕННЯ ПРИНЦИПУ ДІРІХЛЕ НА ФАКУЛЬТАТИВАХ.....	29
2.1. Загальні рекомендації для вивчення принципу Діріхле на факультативних курсах з математики у закладах загальної середньої освіти	29
2.2. Рекомендовані задачі з теми для учнів 6 класу.....	30
2.3. Рекомендовані практичні завдання для учнів 7 класу.	37
2.4. Рекомендовані практичні завдання для учнів 8 класу	40
2.5. Рекомендовані практичні завдання для учнів 11 класу	44
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	50
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК.....	52

ВСТУП

Принцип Діріхле, на перший погляд, є очевидним і простим, але він має дуже широке застосування в математиці. Свою назву він отримав на честь німецького математика 19 століття Петера Густава Лежбона Діріхле (1805 – 1859 рр.), який у свої 29 років успішно винайшов і застосовував його для доведення деяких арифметичних тверджень. Петеру Діріхле належить і ряд значних результатів у різних областях математики, математичної фізики, механіки,. Зокрема, у математичному аналізі П. Діріхле ввів поняття умовної збіжності ряду і сформулював ознаку збіжності числового ряду, займався інтегралами. У теорії чисел Діріхле довів теорему про те, що послідовність натуральних чисел виду $\{a + nb\}$, де a, b – взаємно-прості числа, містить нескінченну кількість простих чисел. Також вчений займався питаннями наближеного представлення ірраціональних чисел раціональними, та використовував цей принцип при доведенні теорем.

Принцип Діріхле встановлює відображення між елементами однієї множини (кроликами) і елементами іншої множини (клітками) при певних умовах, при чому це відображення не є оборотним. У найпростішому жартівливому вигляді принцип сформулюється так: не можна помістити 10 голубів у 9 кліток так, щоб у кожній клітці був не більше ніж один голуб. Якщо ж кліток 9, а голубів менше, то хоча б одна клітка буде порожньою.

Застосування цього принципу до деяких задач дає у багатьох випадках достатньо простий і витончений розв'язок. Цей принцип може бути ефективним засобом для доведення важливих теорем теорії чисел, алгебри, геометрії, дискретної математики тощо. Принцип Діріхле застосовується також і при доведенні теорем у теорії діофантових наближень. Принцип Діріхле використовують у деяких задачах й на доведення, причому в більшості доведень використовують метод «від супротивного».

Вивчення принципу Діріхле не входить у навчальну програму з математики основної і старшої (профільної) шкіл усіх рівнів навчання у загальноосвітніх навчальних закладах, у тому числі і в класах математичного,

економічного, інформаційно-технологічного профілю та спеціалізованих шкіл з поглибленим вивченням математики, економіки, інформатики. Тому вивчення принципу Діріхле може проходити на позакласних заняттях з математики – факультативних курсах та математичних гуртках. Для якісної підготовки учнів до участі в математичних олімпіадах необхідно знайомити учнів з цим базовим математичним принципом. Різноманітні формулювання цього принципу дозволяють розпочинати знайомство з ним учнів з 6 класу.

У методичних рекомендаціях розглянуто підстави та різноманітні додатки застосування принципу Діріхле, а також наведено низку практичних і нестандартних задач підвищеної складності, показано їх розв'язок, що базується на застосуванні принципу Діріхле. Ці завдання можна пропонувати учням 6-11 класів закладів загальної середньої освіти на факультативах чи при підготовці до математичних олімпіад різних рівнів. Також наведено альтернативне використання принципу Діріхле для доведення загальновідомих фактів, зокрема, про розклад раціонального числа у вигляді періодичного нескінченного десяткового дробу.

РОЗДІЛ І. ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

1.1. Теоретичні підстави принципу Діріхле

Основою принципу Діріхле вважають поняття множини, підмножини і відображення. Цей принцип стверджує, що коли множина з N елементів розбита на n підмножин, які не мають спільних елементів ($N > n$), то, принаймні, в одній підмножині буде більше ніж один елемент, або якщо є n ящиків, у яких знаходиться в цілому не менше ніж $n + 1$ предмет, то обов'язково є ящик, в якому міститься, принаймні, 2 предмети.

У загальному формулюванні принцип Діріхле виглядає так: Якщо n кроликів сидять в k клітках, то знайдеться клітка, в якій не менше n/k кроликів.

Наведемо **жартівливий варіант** принципу Діріхле: не можна посадити семеро кроликів в три клітки таким чином, щоб у кожній клітці знаходилися не більше двох кроликів. Дійсно, якщо в кожній клітці не більше двох кроликів, то всього кроликів не більш ніж $2 \cdot 3 = 6$, що не задовольняє умові.

Дробове число кроликів є можливим: наприклад, якщо виходить, що в ящику не менше $7/3$ кроликів, значить, їх більше 2.

Доведення

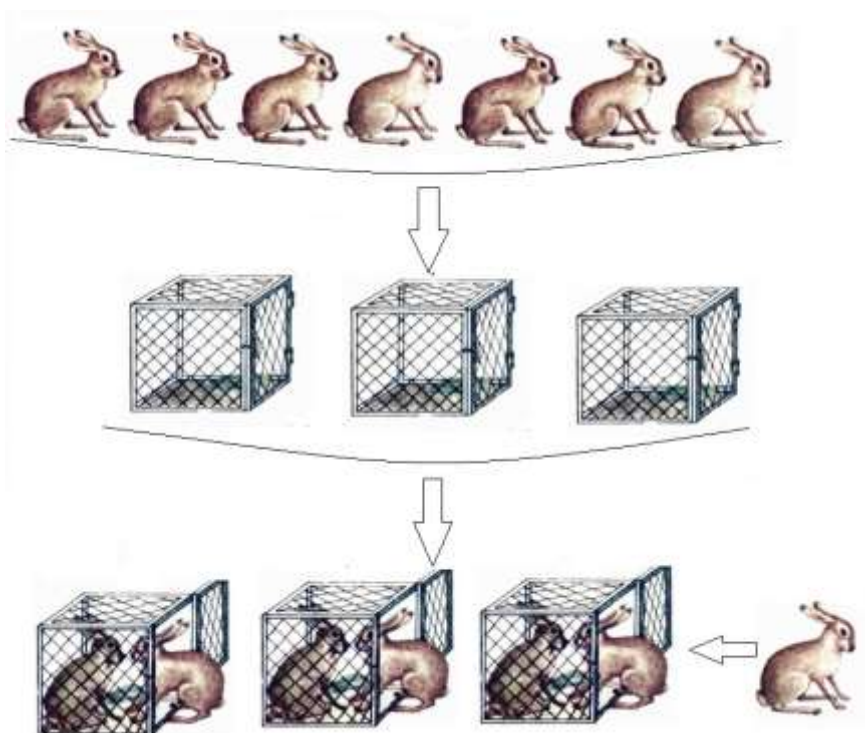


Рис. 1 Розподіл 7 кроликів по 3 кліткам

Припустимо, що в кожній клітці число кроликів менше, ніж n/k . Тоді в k клітках кроликів менше, ніж k та $n/k = n$. Отримали протиріччя. Теорему доведено.

Принцип Діріхле відомий також як принцип голубів і ящиків, коли об'єктами є голуби, а клітками – ящики. Така нотація поширена в іноземній літературі. Також можна використовувати принцип предметів і ящиків.

Особливістю у використанні принципу Діріхле є те, що його вважають непрямым методом розв'язування задачі. Наприклад, якщо потрібно довести, що деяке рівняння має корінь, то ми достатньо знайти цей корінь. Тобто у цьому випадку ми довели існування об'єкту із заданими властивостями – вказали його (корінь рівняння) і переконалися, що він дійсно володіє потрібними властивостями (знайдене значення є коренем рівняння). Доведення існування такого роду називають прямими або конструктивними.

Непрямі доведення існування (обґрунтування факту, що шуканий об'єкт існує, відбувається без прямої вказівки на сам об'єкт) також використовують у математичних задачах. Одним із способів побічного доведення існування є логічний прийом згідно з принципом Діріхле.

Розглянемо загальне формулювання принципу Діріхле для **скінчених множин**, яке використовує поняття ін'єктивності відображення і для нескінчених множин з використанням поняття потужності нескінченної множини.

Поняття множини є ключовим в багатьох розділах сучасної математики. Зазначимо, що можуть розглядатися множини різного характеру. Можна говорити, наприклад, про множину учнів окремої школи, про множину читачів бібліотеки, про множину натуральних чисел, які діляться без остачі на 3, про множину коренів даного рівняння і т. д.

Розглянемо дві скінченні множини

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \text{ і } B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}.$$

Якщо кожному елементу a з множини A поставлено у відповідність деякий елемент b множини B , тоді кажуть, що визначено *відображення*

множини A у множини B , при цьому елемент b називають образом елемента a .

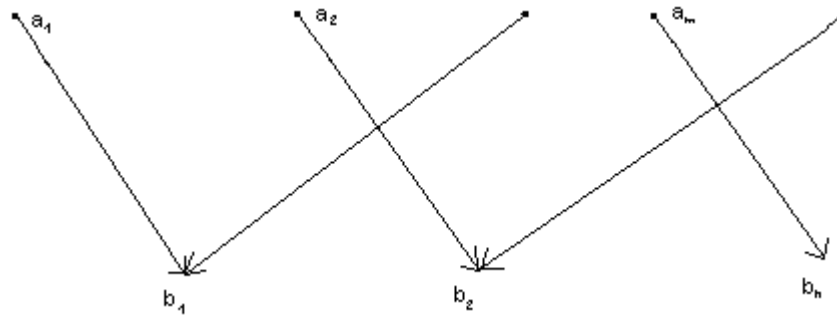


Рис. 2. Відображення між елементами множин A і B

Якщо A – множина кроликів, а B – множина кліток, в яких треба розмістити кроликів, то, визначивши клітку для кожного кролика, дістанемо відображення множини A у множини B .

У термінах теорії множин принцип Діріхле сформулюємо принцип Діріхле таким чином:

Нехай $m > n$ і $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, тоді при будь-якому відображенні множини A у (на) множини B знайдуться два елементи множини A , які мають один і той же образ, тобто будь-яке відображення m -елементної множини A на n -елементну множини B , при якому кожний елемент множини A має образ в множині B , не є ін'єктивним.

Існує узагальнення даного принципу на випадок нескінченних множин: не існує ін'єктивного відображення більш потужної нескінченної множини в менш потужну нескінченну множини. Наприклад, якщо незлічена множини голубів міститься в зліченій множині ящиків, то хоча б в одному з ящиків міститься нескінченна кількість голубів.

Проілюструємо застосування принципу Діріхле до розв'язку різноманітних задач.

Задача 1. У мішку є кульки двох різних кольорів – чорного і білого. Яку найменшу кількість кульок потрібно вийняти з мішка, щоб серед них точно дві кульки виявились одного кольору?

Розв'язання

Зрозуміло, що обравши три кульки, ми виявимо, що дві з них одного кольору. У даному випадку роль кроликів відіграють кульки, а роль кліток – чорний і білий кольори.

Звичайно, задача 1 є очевидною і легко може бути розв’язана без використання принципу Діріхле. Однак часто розв’язування деяких задач не є можна розв’язати очевидним способом, і в той же час достатньо просто може бути розв’язаними за допомогою принципу Діріхле. Простота розв’язання значною мірою залежить від того, наскільки вдало будуть вибрані *ящики* та *предмети* (або *клітки* та *кролики*) і встановлено відповідність між цими множинами.

Задача 2. Уздовж круглого столу рівномірно розміщено таблички з прізвищами дипломатів, які беруть участь у переговорах. Після початку переговорів виявилось, що кожен із дипломатів не сидить напроти своєї таблички. Чи можна повернути стіл так, щоб, принаймні, двоє дипломатів сиділи напроти своїх табличок?

Розв’язання

Зауважимо, що серед усіх можливих n положень столу завжди можна вибрати одне, коли якийсь дипломат сидить напроти своєї таблички. Тоді за умови, що при такому положенні столу такого дипломата немає, згідно з принципом Діріхле, можна повернути стіл так, щоб, принаймні, двоє дипломатів сиділи напроти своїх табличок. Дипломати грають роль «кроликів», «клітки» – положення столу.

Умова про те, що спочатку жоден з дипломатів не знаходяться коло своєї таблички не суттєва. Насправді вихідне положення також є «кліткою», але ця клітка за умовою свідомо опиниться порожньою. Так що можна вважати, що всього «кліток» на одну менше, ніж «кроликів».

Задача 3. У місті більше ніж 8 000 000 жителів. Науковці вважають, що в кожної людини менш ніж 200 000 волосин на голові. Доведіть, що є, принаймні, 41 житель з однаковою кількістю волосин на голові.

Розв’язання

Оскільки $40 \cdot 200\,000 = 8\,000\,000$ (кількість волосин у людини коливається від 0 до 199 999, усього 200 000 варіантів), то, згідно з принципом Діріхле знайдеться, принаймні, 41 житель, що має однакову кількість волосин на голові. Тут роль «кроликів» відіграють жителі, а роль «кліток» – усі можливі варіанти кількості волосин на голові.

Доведемо принцип Діріхле в узагальненій формі.

Теорема 1 (принцип Діріхле в узагальненій формі). Якщо $k \cdot n + 1$ кроликів розкладені в k ящиків, то, принаймні, в одному з ящиків є не менше, ніж $n + 1$ кроликів.

Доведення

Доведення проведемо методом математичної індукції (нижче розглянемо доведення теореми іншим способом).

1. Доведемо вірність твердження при $k = 1$. В цьому випадку всього буде $n \cdot 1 + 1 = n + 1$ кроликів. Якщо їх розкласти в $k = 1$ ящиків, то в цьому ящику буде $n + 1$ кролик.

2. Припустимо тепер, що при розміщенні $p \cdot n + 1$ кроликів в $k = p$ ящиках знайдеться ящик, в якому не менш, ніж $n + 1$ кролик.

3. Доведемо вірність твердження при $k = p + 1$. В цьому випадку число кроликів дорівнює $(p + 1) \cdot n + 1 = (n \cdot p + 1) + n$, а число ящиків дорівнює $p + 1$.

Якщо в одному з цих ящиків більше, ніж n кроликів, тобто не менше, ніж $n + 1$ кролик, то твердження доведене. Якщо в цьому ящику не більше, ніж n кроликів, то в останніх p ящиках знаходяться не менше, ніж $n \cdot p + 1$ кроликів. А тоді, згідно з припущенням 2, знайдеться ящик, в якому не менше, ніж $n + 1$ кролик.

Отже, в обох випадках справедливою є істинність твердження для $k = p + 1$. Це означає, що твердження виконується для будь-якого натурального значення k . Принцип Діріхле доведений.

Задача 4. На п'яти полицках книжкової шафи 161 книга, причому на одній з полицок – 3 книги. Доведіть, що знайдеться поличка, на якій не менше ніж 40 книг.

Розв'язання

Припустімо, що на кожній із решти чотирьох полицок не більш ніж 39 книг. Тоді на всіх п'яти полицках не більше ніж $3+4\cdot 39=160$ книг, що суперечить умові. Отже, на одній із полицок не менше ніж 40 книг. У цьому випадку книги – предмети, полички – ящики.

Наведемо деякі інші формулювання принципу Діріхле, які застосовуються при доведенні тверджень чи розв'язуванні задач.

1. Якщо в n клітках сидять не більш за $n - 1$ кроликів, то є порожня клітка.

Твердження доводиться методом «від супротивного»: якщо порожньої клітки немає, то в кожній клітці сидить хоч би один кролик. Тоді кроликів не менше, ніж кліток. Значить, порожня клітка є.

2. Якщо в n клітках сидять рівно n кроликів, то або в кожній клітці сидить рівно один кролик, або є i порожня клітка, i клітка, в якій не менш двох кроликів.

Дійсно, якщо не в кожній клітці сидить рівно 1 кролик, то можливі такі варіанти:

(а) є порожня клітка,

(б) є клітка, в якій не менш 2 кроликів.

У випадку (а) у нас n кроликів виявляються розсадженими в $n - 1$ клітку, тому, за принципом Діріхле, є i клітка, в якій не менш 2 кроликів. У випадку (б) у нас не більш $n - 2$ кроликів, що залишилися, які розсажені в $n - 1$ клітку, отже, згідно з п.1, є й порожня клітка.

3. Якщо в n клітках сидять не менше $n \cdot (k - 1) + 1$ кроликів, то в деякій з кліток сидять не менше k кроликів.

Дійсно, якщо в кожній клітці сидить не більш за $k - 1$ кролика, то у всіх клітках сидить не більш за $n \cdot (k - 1)$ кроликів, а це не задовольняє умову твердження.

4. Якщо в n клітках сидять не більш $n \cdot (k + 1) - 1$ кроликів, то в якійсь з кліток сидять не більш k кроликів.

Дійсно, якщо в кожній клітці сидить не менше $k + 1$ кролика, то у всіх клітках сидить не менше $n \cdot (k + 1)$ кроликів, а це не задовольняє умову твердження.

Так званий **неперервний принцип Діріхле** застосовується, як правило, до чисел.

У **загальному вигляді** принцип Діріхле формулюється так: Якщо сума n чисел більше S , то хоча б одне з чисел більше, ніж S/n .

Або:

Якщо середнє арифметичне декількох чисел більше, ніж a , то хоча б одне з цих чисел більше за a .

У термінах кліток-кроликів **загальний принцип Діріхле** можемо записати так:

Якщо n кроликів з'їли m кг трави, то деякий кролик з'їв не менше, ніж m/n кг трави.

Існує наглядна геометрична інтерпретація неперервного принципу Діріхле:

Нехай з деякої точки на площині проведено N різних променів. Тоді кут між двома деякими з них не менше, ніж $360^\circ/N$.

Дійсно, якщо розглядати тільки кути між сусідніми променями, то усього буде N кутів. Сума цих кутів складає кут, рівний 360° . Згідно з неперервним принципом Діріхле градусна міра одного з кутів між променями не менш, ніж $360^\circ/N$, інакше сума кутів буде менша, ніж 360° .

Такий принцип називається неперервним, оскільки числа (або градусні міри кутів) можуть приймати будь-які значення з деякого проміжку, в той час як принцип Діріхле у звичайному сенсі оперує дискретною множиною натуральних чисел (кроликами і клітками).

Задача 5. На площині дано n попарно непаралельних прямих. Довести, що знайдуться дві з них, кут між якими не менш, ніж $180^\circ/n$.

Розв'язання

Достатньо зробити паралельний перенос прямих так, щоб вони усі проходили через одну точку. Тоді з цієї точки виходить $2n$ променів, звідки, застосовуючи неперервний принцип Діріхле, отримуємо, що знайдуться дві прями, кут між якими не менш, ніж $180^\circ/n$

1.2. Застосування принципу Діріхле при розв'язанні задач на розміщення

Принцип Діріхле широко використовується у різних розділах математики. Тому його можна розглядати у контексті відповідної теми. Задачі, які можна розглядати на факультативних курсах і гуртках з математики, можна розділити на класи задач, для розв'язування з певної теми.

Ми виокремили такі класи задач на використання принципу Діріхле:

- задачі на розміщення;
- на розфарбування
- на подільність

Для початку розглянемо задачі на розміщення.

Задача 6. Чи можна вивезти з каменоломні 50 каменів, маси яких відповідно дорівнюють 370, 372, 374, ..., 468 кг, на семи тритонках?

Розв'язання

Якби це вдалося здійснити, то на деяку тритонку навантажили б 8 каменів, оскільки $7 \cdot 7 + 1 = 50$, і згідно з принципом Діріхле навіть при

рівномірному розподілі по 7 каменів на кожну тритонку дістанемо в надлишку 1 камінь. Але навіть 8 найлегших каменів складають у сумі

$$S = 370 + 372 + 374 + \dots + 384 = 3016 \text{ кг} > 3\text{т.}$$

Не можна.

Зауважимо, що загальна маса всіх каменів, як не важко підрахувати, складає 20950 кг, а на сім тритонок можна навантажити одночасно 21т. Тому складається враження, що відповідь на запитання задачі мусить бути позитивною. Проте це було б можливо, якби ми подрібнили каміння.

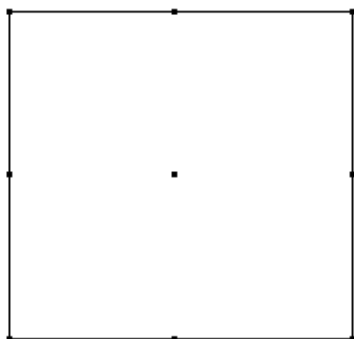
Досить часто задачі на розміщення зустрічаються в геометричній інтерпретації.

Задача 7. Яку найбільшу кількість точок можна розмістити у квадраті зі стороною 1 таким чином, щоб всі відстані між цими точками були не менші 0,5? («У квадраті» означає «всередині квадрата або на його межі»).

Розв'язання

Розв'язання цієї задачі має складатись з двох частин: доведення того факту, що деяку кількість точок розміщувати належним чином можливо, а також того факту, що більшої кількості точок розміщувати таким чином вже не можна. Досить легко збагнути, як саме можна розмістити дев'ять точок відповідно до вимоги умови задачі: одну точку розмістити в центрі квадрата, чотири – в його вершинах і ще чотири – на серединах сторін квадрата.

До розміщення, показаного на рис. 3, десятю точку додати вже не



можна. У цьому не важко переконатись, адже кола радіуса 0,5 з центрами в перших дев'яти точках покривають весь квадрат. Проте наведені міркування не можна вважати за розв'язок задачі.

Рис. 3. Розміщення 10 точок на
сторонах квадрата

Дійсно, не виключена можливість того, що існують й інші способи розміщення дев'яти точок. При цьому може трапитись, що один з цих способів розміщення цих точок дає змогу додати до них ще й десятю, не порушуючи при цьому умову задачі. Саме тут у нагоді стануть міркування, пов'язані з принципом Діріхле.

Дійсно, розіб'ємо квадрат на дев'ять рівних квадратиків зі стороною $\frac{1}{3}$.

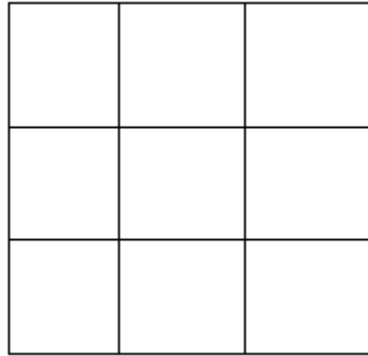


Рис. 4. Поділ квадрата зі стороною 1 на 9 квадратів

Якщо в одиничному квадраті розміщено десять точок, то щонайменше дві з них потраплять до одного й того самого квадратика. Відстань між будь-якими двома точками квадрата не перевищує довжини діагоналі цього квадрату, тобто не перевищує числа $\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2}$.

1.3. Застосування принципу Діріхле при розв'язанні геометричних задач

Для розв'язування задач геометричного змісту доцільно використовувати такі формулювання принципу Діріхле:

1. Якщо на відрізку довжини l розташовано декілька відрізків, сума довжин яких більша за l , тоді, принаймні, два відрізки мають спільну точку.

2. Якщо усередині фігури площею S розташовані фігури, сума площин яких більша за S , то серед них існують, принаймні, дві фігури, які мають спільну точку.

3. Якщо фігури $F_1, F_2, \dots, F_n$ ($S_1, S_2, \dots, S_n$ – відповідно їх площі) розташовані у фігурі F площею S і $S_1, S_2, \dots, S_n > kS$, тоді $k + 1$ з фігур $F_1, F_2, \dots, F_n$ має спільну точку.

Задача 8. Доведіть, що рівносторонній трикутник не можна покрити двома меншими по площині за нього рівносторонніми трикутниками.

Розв'язання

Зрозуміло, що менший рівносторонній трикутник може покривати щонайбільше одну вершину даного рівностороннього трикутника. А тому даний рівносторонній трикутник можна покрити, принаймні, трьома меншими.

Задача 9. На газоні у формі правильного трикутника зі стороною 3 метри росте 10 гвоздик. Доведіть, що знайдуться дві гвоздики, які знаходяться одна від одної на відстані, що не перевищує 1 метр.

Розв'язання

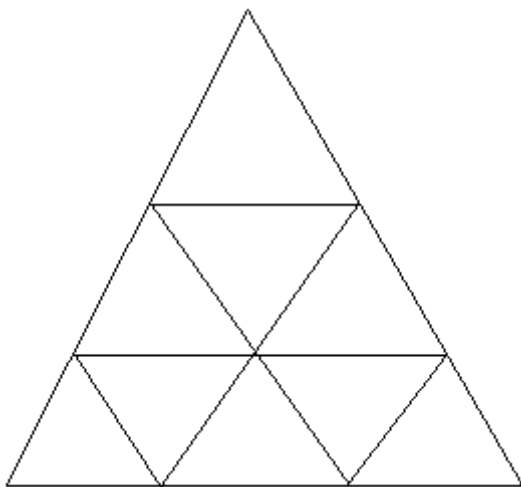


Рис. 5. Розбиття трикутника на 9 трикутників

Розділимо газон на 9 рівносторонніх трикутників зі стороною 1 метр. Тоді, згідно з принципом Діріхле, принаймні дві точки містяться в одному з них. А тому відстань між цими точками не перевищує 1 метра. Зауважимо, що після розміщення 10 гвоздик у вершинах розбиття усі відстані між ними дорівнюватимуть 1 метру.

Задача 10. Доведіть, що у кожного многогранника знайдуться дві грані з однаковою кількістю сторін.

Розв'язання.

Нехай Γ – грань, що містить найбільшу кількість сторін. Тоді даний многогранник має, хоча б $n + 1$ грань, причому кількість сторін на кожній із

них змінюється від 3 до n . Тоді, згідно з принципом Діріхле, знайдіться дві грані з однаковою кількістю сторін.

Задача 11. П'ять точок $A_1, A_2, \dots, A_5$ належать одній площині, та їхні координати – цілі числа. Доведіть, що серед усіх трикутників з вершинами в даних точках є принаймні три, площі яких виражаються цілими числами.

Розв'язання

Нехай $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ – вершини деякого трикутника з цілими координатами. Зауважимо, що якщо одну з координат змінити на парне число, то площа відповідного трикутника зміниться на ціле число. Таким чином, замінивши координати точок $A_1, A_2, \dots, A_5$ числами 0 чи 1 залежно від їх парності, згідно з принципом Діріхле, деяким двом точкам відповідатимуть однакові координати. Нехай це будуть точки A_1 і A_2 . Тоді площі трикутників $A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, A_1A_2A_5$ виражаються цілими числами.

Задача 12. У колі радіуса 1 проведено кілька хорд, сумарна довжина яких більша за 7π . Доведіть, що знайдеться діаметр, який перетинає не менш ніж 8 хорд.

Розв'язання

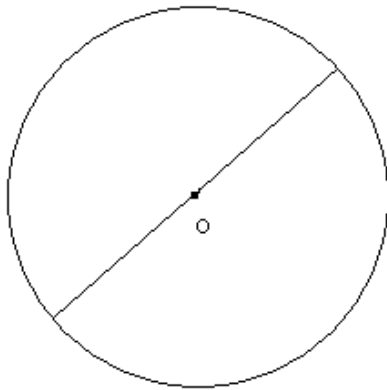


Рис. 6 Коло радіуса 1 з діаметром

Оскільки довжина хорди більша за довжину відповідно дуги, то сума цих дуг також більша за 7π . Розглянемо довільний діаметр кола і відобразимо симетрично відносно центра O одне з півкіл. Отже, друге півколо буде покрите дугами, які матимуть сумарну довжину, більшу за 7π . Тоді, згідно з принципом Діріхле,

одна з точок півкола покривається принаймні 8 разів. А тому відповідний діаметр, що проходить через цю точку, перетинає 8 хорд.

Задача 13. Доведіть, що в опуклий n -кутник з площею S і периметром P можна помістити круг, радіусом $\frac{S}{P}$.

Розв'язання

Нехай $ABCD$ – фрагмент даного многокутника. Відносно кожної сторони многокутника побудуємо прямокутник з висотою $AA_1 = \frac{S}{P}$. Оскільки деякі з цих прямокутників перетинаються, а їх сумарна площа дорівнює S , то, згідно з принципом Діріхле, знайдеться така точка многокутника, що не покрита сім'єю побудованих прямокутників. Зрозуміло, що круг із центром у цій точці, радіусом $\frac{S}{P}$, повністю розміщений усередині даного многокутника.

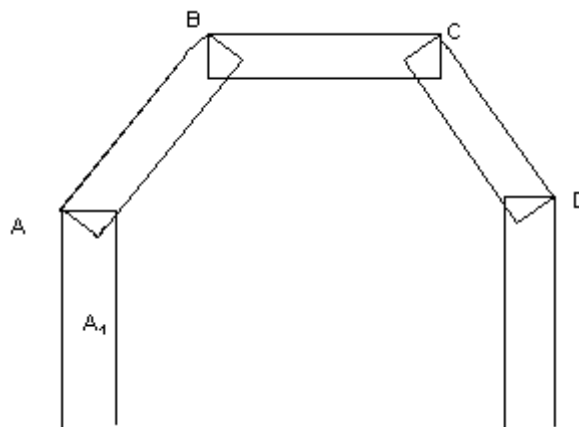


Рис. 7. Фрагмент опуклого многокутника

Задача 14. Попарні відстані між точками $A_1, A_2, \dots, A_n$ більші ніж 2. Доведіть, що довільну фігуру, площа якої менша від π , можна зсунути на вектор, довжиною, не більшою за 1 так, що вона не буде містити точок $A_1, A_2, \dots, A_n$

Розв'язання

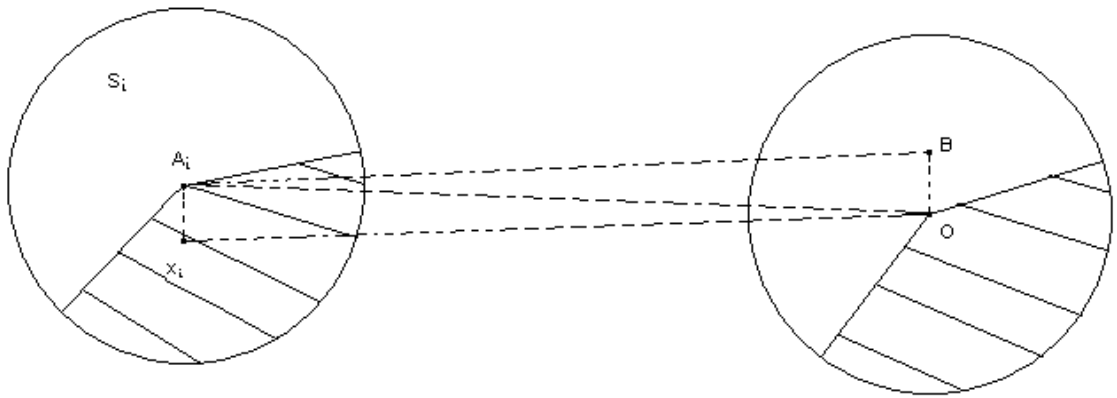


Рис. 8. Круг з центром A_i площею S_i

Нехай F – дана фігура, а $S_1, S_2, \dots, S_n$ – круги з центрами в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$, радіусом 1. Оскільки круги $S_1, S_2, \dots, S_n$ попарно не перетинаються, то фігури $V_i = F \cap S_i$ також попарно не перетинаються. А тому сума площ V_i ($i = 1, \dots, n$) менша від π . Візьмемо довільну точку O та зсунемо кожен фігуру V_i на вектор $\overline{A_i O}$. Тоді образи цих фігур при паралельному перенесенні повністю не покривають круг з центром в точці O радіусом 1. Нехай B – непокрита точка цього круга. Тоді вектор $\overline{BO}$ буде шуканим.

1.4. Застосування принципу Діріхле при розв'язанні задач на розфарбування

Задача 15. Дано дев'ятикутну піраміду, всі 9 бічних ребер та всі 27 діагоналей основи якої пофарбовано в червоний або синій колір. Довести, що існують три вершини піраміди, які водночас є вершинами трикутника, всі сторони якого пофарбовані в однаковий колір. Чи правильне твердження для восьмикутної піраміди?

Розв'язання

Серед дев'яти бічних ребер обов'язково щонайменше п'ять пофарбовано в один колір, наприклад червоний. Нехай A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 – кінці цих ребер, занумерованих підряд. Одна з сторін п'ятикутника є діагоналлю основи, нехай для визначеності буде $A_1 A_2$.

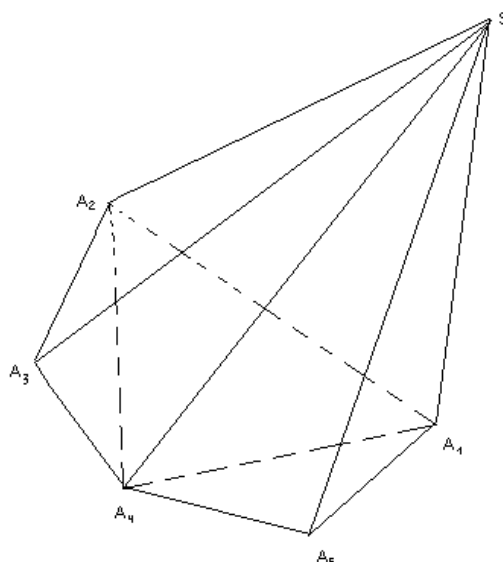


Рис. 9. П'ятикутна піраміда

Розглянемо $\triangle A_1A_2A_4$: його сторони є діагоналями основи. Якщо вони зафарбовані в один колір, то задача доведена. Якщо ні, то одна з його сторін (діагоналей основи) – червона, і тому однокольоровим буде трикутник, утворений цією діагоналлю та бічними ребрами, які сполучають її кінці з вершиною піраміди S .

Аналогічне твердження для восьмикутної піраміди неправильне. Наведемо приклад, коли чотири послідовних ребра пофарбовано в червоний колір, а решту – в синій, причому кінці червоних ребер сполучено синіми діагоналями, кінці синіх – червоними.

Ця задача демонструє наочний приклад використання принципу Діріхле з геометрії з елементами розфарбування. Відомою є задача Гутрі або проблема чотирьох фарб: скільки фарб знадобиться для розфарбовування карти, якщо зафарбовувати сусідні держави, що межують, різним кольором. Розв'язуючи цю задачу, ми стикаємося з поняттям зовнішніх і внутрішніх точок геометричної фігури, з поняттям кордону. Не всі відразу знаходять спосіб розфарбовування, деякі з учнів наполегливо вважають, що таке неможливо. І лише отриманий позитивний результат, підтверджуючий теоретичні викладення, здатний переконати найвпертіших.

Задачі на розфарбування частіше за все їх розв'язуються за допомогою засобів комбінаторики, принципу парності, графів, таблиць. Тому пропонувати ці задачі до розв'язання школярам потрібно після вивчення відповідних тем. У деяких задачах на розфарбування доцільно використовувати при розв'язанні принцип Діріхле. Розглянемо приклади таких задач, починаючи з елементарних.

Задача 16. Площина розмальована двома кольорами. Доведіть, що знайдуться дві точки одного кольору, відстань між якими дорівнює 1.

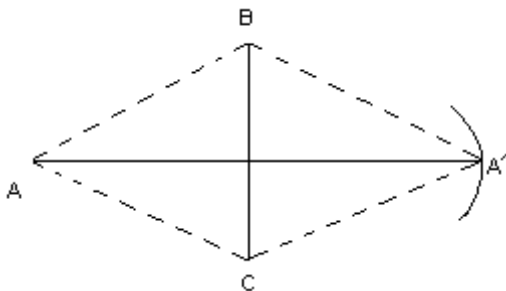
Розв'язання

Розглянемо три точки, що є вершинами рівностороннього трикутника. Тоді серед них є дві точки одного кольору.

Задача 17. Площина розмальована трьома кольорами. Доведіть, що знайдуться дві точки одного кольору, відстань між якими дорівнює 1.

Розв'язання

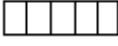
Доведемо твердження від супротивного. Якщо вершини рівностороннього трикутника ABC будуть розмальовані різними кольорами, тоді точка A' , яка симетрична до точки A відносно прямої BC , буде



розмальована тим самим кольором, що й A . Оскільки відстань між A і A' , дорівнює $\sqrt{3}$, то всі точки кола з центром в точці A радіуса $\sqrt{3}$ будуть замальовані одним кольором. Зрозуміло, що на цьому колі можна вибрати дві точки на відстані 1.

Задача 18. Кожна клітинка прямокутної таблиці 5×41 зафарбована білим або чорним кольором. Доведіть, що можна вибрати 3 стовпці та 3 лінійки так, що всі їх 9 клітинок перетину будуть зафарбовані одним кольором.

Розв'язання

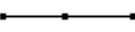
Оскільки при кожному розмалюванні таблиці  принаймні 3 клітинки будуть одного кольору, то згідно з принципом Діріхле, серед 41 стовпця таблиці принаймні 21 матиме 3 клітинки того самого кольору. Оскільки три клітинки одного кольору можна розмістити на 5-ти позиціях

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

способами, то знову ж таки, згідно з принципом Діріхле, із 21 такого набору принаймні 3 будуть однаковими.

Задача 19. Вузли нескінченної решітки в клітинку розмальовані двома кольорами. Доведіть, що існують 2 горизонтальні і 2 вертикальні прямі, на перетині яких лежать чотири точки одного кольору.

Розв'язання

Виділимо з цієї решітки лише один фрагмент, розміром 3×9 . Оскільки набір  можна розмалювати двома кольорами



$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ способами (для кожного вузла є лише дві можливості для його розмалювання), то серед 9-ти вертикальних наборів є два, що розмальовані однаково. Зауважимо, що в наборі є принаймні два вузли одного кольору. А тому серед вузлів фрагменту решітки є, принаймні, 4 одного кольору, що утворюють прямокутник.

1.5. Застосування принципу Діріхле при розв'язанні завдань з теорії чисел

Якщо розглядати задачі на подільність цілих чисел, то принцип Діріхле доцільно сформулювати у наступній формі: серед $p + 1$ цілих чисел знайдуться 2 числа, які дають однакові остачі при діленні на p .

Дійсно, при діленні на p можна отримати p різних остач

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \dots, \quad p - 1.$$

Якщо ми візьмемо $p + 1$ ціле число, то обов'язково хоча б два числа дають однакові остачі при діленні на p .

У цьому формулюванні принципу Діріхле числа – «кролики», а остачі – «клітки».

Задача 20. Дано 11 різних цілих чисел. Довести, що з них можна вибрати два числа, різниця яких ділиться на 10.

Розв'язання

Принаймні два числа з 11 обраних дають однакові остачі при діленні на 10 (за принципом Діріхле). Хай це будуть числа A і B , тоді за теоремою ділення з остачею ми можемо записати рівності:

$$A = 10a + r, \quad B = 10b + r.$$

Тоді їх різниця $A - B = 10(a - b)$ ділиться на 10.

Задача 21. Довести, що серед чисел вигляду 7^k знайдеться число, що закінчується на 0001.

Розв'язання

Розглянемо числа $7^0, 7^1, 7^2, 7^3, \dots, 7^{10000}$. Всього цих чисел 10001, тоді серед них знайдуться два числа, різниця яких ділиться на 10000. Представимо цю різницю у виді:

$$7^m - 7^n = 7^n \cdot (7^{m-n} - 1),$$

де m і n – цілі невід'ємні числа, для визначеності припустимо, що $m > n$. Числа 7^n та 10000 є взаємно-простими, тому множник $7^{m-n} - 1$ ділиться на 10000, тобто число $7^{m-n} - 1$ має чотири останні цифри 0001, що потрібно було довести.

Принцип Діріхле широко використовується при вивченні питань подільності чисел. Зокрема, при розгляді остач, які дають при діленні на задане число послідовні степені деякого фіксованого числа.

Задача 22. Довести, що серед заданих ста цілих чисел $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ можна обрати декілька чисел (можливо, й одне), сума яких ділиться на 100.

Розв'язування

Розглянемо сто сум:

$$S_1 = x_1,$$

$$S_2 = x_1 + x_2, \dots$$

$$S_{100} = x_1 + x_2 + \dots + x_{100}$$

Якщо хоча б одна з цих сум ділиться на 100, то задача розв'язана. Допустимо, що жодне з чисел $S_1, S_2, \dots, S_{100}$ не ділиться на 100. Отже, два з них при діленні на 100 дають рівні остачі (бо сум у нас 100, а різних остач може бути лише 99). Нехай це S_m, S_n . Тоді їх різниця

$$S_m - S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_m - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = x_{n+1} + \dots + x_m.$$

ділиться на 100, тому сума $x_{n+1} + \dots + x_m$ є шуканою.

Задача 23. Першокласник Володимир знає лише цифру 1. Довести, що він може написати число, що ділиться на 1997.

Розглянемо послідовність чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, десятковий запис яких містить одні одиниці. Оскільки існує скінченна кількість остач при діленні на 1997, а послідовність містить нескінченну кількість членів, то, згідно з принципом Діріхле, серед них знайдуться два числа, що дають однакові остачі: a_k і a_l , ($k > l$). Їх різниця $a_k - a_l = 10^l a_{k-l}$, ділиться на 1997. Оскільки 10^l і 1997 - взаємно прості, то a_{k-l} , ділиться на 1997. Це число Володимир і напише.

Теорема 2. При будь-яких натуральних a і m остачі від ділення чисел $a, a^2, a^3, \dots, a^m, a^{m+1}, \dots$ на m періодично повторюються (можливо, не з самого початку).

Доведення

Розглянемо перші $m + 1$ степеней числа a : $a, a^2, a^3, \dots, a^m, a^{m+1}$ та розглянемо остачі цих чисел при діленні на m . Оскільки різних остач при діленні на m може бути рівно m , а чисел $m + 1$, то за принципом Діріхле

знайдеться два числа, які дають однакові остачі при діленні на m . Нехай це будуть числа a^k та a^{k+n} , де $n > 0$. Тоді $a^k - a^{k+n} = mt, t$ – ціле.

Нехай $s \geq k$, помножимо обидві частини рівності на a^{s-k} і отримаємо $a^s - a^{s+n} = mt \cdot a^{s-k}$, тобто різниця цих чисел ділиться на m . Отже, починаючи з числа a^k остачі періодично повторюються. Відмітимо, що, починаючи з числа a^k , будемо отримувати n різних остач при діленні на m , які потім будуть періодично повторюватись. Теорему доведено.

Ця теорема дозволяє легко розв'язувати задачі наступного змісту.

Задача 24. Знайти останню цифру числа 2^{251} .

Розв'язання

Випишемо послідовні степені числа 2, доки не станеться «зациклення».

2^1 – остання цифра 2

2^2 – остання цифра 4

2^3 – остання цифра 8

2^4 – остання цифра 6

2^5 – остання цифра 2

Бачимо, що сталося зациклювання. Довжина циклу $T = 4$, тому

$$2^{251} = (2^4)^{62} \cdot 2^3.$$

Число 2^{251} закінчується тією ж самою цифрою, що і число 2^3 , тобто цифрою 8.

Задача 23. Чи вірне твердження: сума $(8 \cdot 3^{57} + 14^{20})$ ділиться на 5?

Розв'язання

Число ділиться на 5 тоді і тільки тоді, якщо його остання цифра 0 або 5. Таким чином, наша задача полягає в визначенні останньої цифри числа.

Повторимо міркування задачі 22:

3^1 – остання цифра 3

3^2 – остання цифра 9

3^3 – остання цифра 7

3^4 – остання цифра 1

3^5 – остання цифра 3

$T = 4$; $3^{57} = (3^4)^{14} \cdot 3$, число 3^{57} закінчується цифрою 3.

14^1 – остання цифра 4

14^2 – остання цифра 6

14^3 – остання цифра 4

$T = 2$; $14^{20} = (14^2)^{10}$, число 14^{20} закінчується цифрою 6, а число $8 \cdot 3^{57} + 14^{20}$ закінчується цифрою 0, тобто дане число ділиться на 5.

Принцип Діріхле широко використовується при доведенні теорем теорії чисел. Наведемо використання цього принципу.

Теорема 3. Раціональне число $\frac{a}{b}$, де a і b – натуральні числа, можна представити у вигляді періодичного нескінченного десяткового дробу.

Доведення

Доведемо теорему в загальному випадку. Розглянемо дріб $\frac{a}{b}$. Розділимо число a на b «стовпчиком». У процесі ділення весь час будемо отримувати відмінні від нуля остачі, бо в протилежному випадку число $\frac{a}{b}$ записували б у вигляді скінченного десяткового дробу. Таким чином, щоразу при знаходженні наступної цифри частки діставатимемо в остачі одне з чисел $1, 2, \dots, b-1$. Випишемо послідовно остачі, які дістали при діленні, і розглянемо перші b з них. Оскільки щоразу випишемо одне з чисел $1, 2, \dots, b-1$, то за принципом Діріхле існують такі натуральні числа i та j , $1 \leq i \leq j < b$, що на місцях з номерами i та j вписано однакові числа, тобто i -та та j -та остачі при діленні a на b однакові. Проте тоді процес ділення, починаючи з j -тої остачі, повторюватиме процес ділення після i -тої остачі. Отже, починаючи з i -го місця в нескінченному десятковому дробі повторюватиметься та сама комбінація з $r = j - i$ цифр. У результаті ділення дістанемо нескінчений періодичний десятковий дріб, період якого містить не більше як $r = j - i \leq b-1$ цифр. Теорему доведено.

Задача 25. Перетворимо звичайний дріб $\frac{7}{275}$ у десятковий. Тут $b = 275 = 5^2 \cdot 11$. Це означає, що дріб перетворюється в нескінченний періодичний дріб, до періоду дві цифри:

$$\frac{7}{275} = 0,025454 \dots = 0,02(54)$$

Використання цього принципу є можливим і у теорії многочленів як складової частини навчальної дисципліни алгебри і теорії чисел.

Теорема 3. Будь-який многочлен із цілими коефіцієнтами (відмінний від константи) при деякому натуральному значенні аргументу набуває значення, що є складеним числом.

Доведення. Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{(n-1)} \dots + a_1 x + a_0$, де всі коефіцієнти $a_i, i = \{1, 2, \dots, n\}$ - цілі числа. Припустимо, що при деякому k значення многочлена $f(x)$ - просте число, тобто $f(k) = p$, p - просте. Многочлен степеня n може приймати одне й те саме значення не більше, ніж у n точках.

Доведемо, що існує таке ціле t , що при $f(k + pt)$ є складеним, тобто за означенням відмінним від 0 і p . Нам допоможе принцип Діріхле. Вважатимемо значення многочлена (у натуральних точках) клітками, а натуральні числа виду до $k + pt$ кроликами.

Натуральне число $N = k + pt$ поміщатимемо в клітку, яка відповідає значенню многочлена $f(N)$. Відповідно до наведеного вище твердження, в клітці не може поміститися більше n кроликів. Так як кроликів багато, то це означає, що $f(k + pt)$ не може приймати тільки значення 0 і p за різних цілих t , тобто знайдеться кролик $k + pt$, який не потрапить ні до клітки 0, ні до клітки p .

Отже, для деякого t маємо $f(k + pt) \neq 0$ та $f(k + pt) \neq p$.

Розкладемо $f(k + pt)$ за степенями pt (використовуючи біном Ньютона), отримаємо

$$f(k + pt) = f(k) + c_1 pt + c_2 (pt)^2 + \dots + c_n (pt)^n,$$

де всі c_i , $i = \{1, 2, \dots, n\}$ – деякі цілі числа. Оскільки $f(k) = p$, то, враховуючи цю у мову і розклад многочлена по степеням pt отримуємо, що $f(k + pt)$ ділиться на p , причому $f(k + pt) \neq 0$ і $f(k + pt) \neq p$, отже $f(k + pt)$ – число складене.

Отже, принцип Діріхле широко використовується у багатьох розділах математики і може бути запропонований учням як альтернативний спосіб розв’язання задачі, що оперує поняттям площі, довжини, подільності натуральних чисел, задачах на розфарбування вказаних фрагментів або на розміщення різних об’єктів.

Зауважимо, що всі вказані класи задач не відносяться до традиційних, тому найчастіше не можна сформулювати для їх розв’язання якийсь єдиний підхід. Принцип Діріхле для їх розв’язання може виступити як загальна рекомендація для вдалої роботи над завданнями такого типу.

РОЗДІЛ II. ВИВЧЕННЯ ПРИНЦИПУ ДІРІХЛЕ НА ФАКУЛЬТАТИВАХ

2.1. Загальні рекомендації для вивчення принципу Діріхле на факультативних курсах з математики у закладах загальної середньої освіти

Розв'язання задач на використання принципу Діріхле виховують уміння встановлювати відповідність між елементами певних множин. Вивчати принцип Діріхле можна вже з 6-го класу, тому що він не потребує глибоких математичних знань.

Знайомство з принципом Діріхле не входить в навчальну програму з математики всіх рівнів навчання закладів загальної середньої освіти, зокрема навіть у класах математичного, економічного, інформаційно-технологічного профілю та спеціалізованих закладах з поглибленим вивченням математики, економіки, інформатики. Отже, єдино-можливим спосіб знайомства з принципом Діріхле може бути реалізований на позакласних заняттях з математики – факультативних курсах або математичних гуртках. Для якісної підготовки учнів до участі в олімпіадах з математики усіх рівнів необхідно знайомити учнів з цим базовим математичним принципом. Застосовувати принцип Діріхле можна до різноманітних задач, що було показано на прикладах першого розділу кваліфікаційної роботи, тому на факультативних заняттях з математики доцільно присвячувати йому одне-два заняття у кожному класі.

Нижче ми пропонуємо розробки наборів завдань разом із методичними коментарями та системою навідних питань для вчителя і орієнтовні відповіді учнів, що можна використовувати на факультативних курсах з математики для 6-11 класів за темою «Принцип Діріхле».

Обов'язково перед розглядом відповідного набору задач треба підготувати для кожного класу відповідно до їх рівня розвитку теоретичну довідку про теоретичні підстави принципу Діріхле.

2.2. Рекомендовані задачі з теми для учнів 6 класу

Для учнів 6 класу можна розказати про один із способів побічного доведення існування: логічний прийом принципу Діріхле – за іменем Петера Густава Діріхле, німецького математика. Принцип Діріхле встановлює відношення між двома множинами (наприклад, «зайцями» та «клітками»).

Існує кілька формулювань цього принципу. У найпростішій формі він виглядає так: «Не можна посадити семеро зайців в три клітки так, щоб в кожній клітці знаходилися не більше двох зайців». Дійсно, якщо в кожній клітці не більше 2 зайців, то всього зайців не більш ніж $2 \cdot 3 = 6$, що не задовольняє умові. Подібну задачу ми сьогодні з вами розглянули.

Не дивлячись на досконалу очевидність цього принципу, його вживання є вельми ефективним методом розв'язування завдань, що дає у багатьох випадках найбільш простий розв'язок.

У найпростішому формулюванні принцип Діріхле виглядає так (учитель пише на дошці формулювання принципу Діріхле): Якщо n зайців сидять в k клітках, то знайдеться клітка, в якій не менше n/k зайців. Не треба боятися дробового числа зайців: наприклад, якщо виходить, що в ящику не менше ніж $7/3$ зайців, значить, їх більше 2.

Завдання 1. На дошці закріплено чотири конверта, на столі лежать п'ять карток з зображенням зайців. Учням пропонується розмістити зайців у конверти довільним чином.

Розв'язання.

На дошці записані результати розміщення

I конверт	II конверт	III конверт	IV конверт	
1 заєць	1 заєць	1 заєць	2 зайця	- 1 учень
2 зайця	1 заєць	2 зайця	0	- 2 учень
4 зайця	0	1 заєць	0	- 3 учень
				і т. д.

Учитель: Отже, ви розклали картки у конверти. Подивіться, чи можливо так розмістити зайців, щоб у кожному конверті було по одному зайцю?

Учень: Ні, бо зайців більше, ніж конвертів.

Учитель: Тобто, якщо ми розмістимо зайців по конвертах, то хоча б в одному з конвертів опиниться два зайця. А може опиниться в конверті більше двох зайців?

Учень: Так, якщо в одному з конвертів зайців не буде.

Задача 2. На столі учителя стоїть мішок, в нього засипано кульки чорного та білого кольору. У мішку кульки тільки чорного та білого кольорів. Перевіримо, скільки кульок потрібно дістати з мішка, щоб серед них опинилось точно дві кульки одного кольору.

Розв'язання.

Для розв'язання цієї задачі бажано, аби до дошки виходили учні по одному і діставали самостійно кульки доти, доки в них у руках не опиниться дві кульки одного кольору. Результати записуються на дошці.

I учень: 1 біла кулька; 1 чорна кулька; 1 чорна кулька.

II учень: 1 біла кулька; 1 біла кулька.

III учень: 1 чорна кулька; 1 біла кулька; 1 біла кулька.

IV учень: 1 біла кулька; 1 чорна кулька; 1 біла кулька.

Учитель: Подивіться на запис уважно і скажіть, яку кількість кульок потрібно дістати, щоб серед них опинилось дві одного кольору?

Учень: Потрібно дістати три кульки, тоді точно дві з них будуть одного кольору.

Учитель: Можна зробити висновок, що відповідь до задачі – три кульки. Чи можливо розв'язати цю задачу за допомогою принципу Діріхле? Якщо так, то що можна вважати в задачі зайцями, а що клітками?

Учень: Так, можливо. Якщо прийняти кульки за «зайців», а кольори цих кульок за клітки, то за принципом Діріхле достатньо дістати три кульки, щоб серед них точно дві були одного кольору.

Учитель: Вірно, ми «розмістили кульки по кольорам».

Учитель: Дійсно, ця задача розв'язується набагато простіше за допомогою принципу Діріхле. Отже, сформулюємо принцип Діріхле для цієї задачі:

Якщо кульки двох різних кольорів довільним чином діставати з мішка, то при вийманні трьох кульок, точно дві з них одного кольору.

Задача 3. У саду ростуть 10 кущів троянд, на кожному кущі не більше 8 троянд. Доведіть, що є хоча б два кущі троянд з однаковою кількістю квітів.

Розв'язання.

Учитель: Яка кількість квітів може бути на кущі?

Учень: Від 1 квітки до 8.

Учитель: Скільки всього кущів?

Учень: 10 кущів.

Учитель: Тобто кущів за кількістю більше, ніж варіантів кількості квітів на них. Що можна вважати зайцями, а що клітками?

Учень: Зайці - це кущі, а клітки - це кількість квітів.

Учитель: Якщо застосувати принцип Діріхле, то яке твердження отримаємо?

Учень: Існує принаймні два кущі з однаковою кількістю троянд.

Задача 4. На планету Альфа системи Омега запустили 20 космолітаків, на кожному з них не більше 16 чоловік. Доведіть, що хоча б на двох з них однакова кількість людей.

Розв'язання

Взагалі маємо 20 космолітаків, на кожному не більше 16 людей. Тобто кількість людей на кожному космолітаку від 1 до 16. За принципом Діріхле існує точно два космолітака з однаковою кількістю людей.

Задача 5. В коробці 82 кульки. Кожна з них розмальована певним кольором. Доведіть, що існує 10 кульок одного кольору, чи 10 кульок різного кольору.

Розв'язання

Якщо для розмалювання 82 кульок використано не менше ніж 10 кольорів, то зрозуміло, що знайдеться 10 кульок різного кольору. Якщо ж для розмалювання 82 кульок використано не більше ніж 9 різних кольорів, то згідно з принципом Діріхле, знайдеться принаймні 10 кульок одного кольору. Тут у ролі «зайців» виступають кульки, а в ролі «кліток» - кольори.

Можна навести і такий перелік питань для контролю учнів, на який бажано відповісти після розв'язування перших п'яти найпростіших задач на застосування принципу Діріхле.

1. Сформулюйте принцип Діріхле
2. Скільки елементів беруть участь у принципі Діріхле?
3. Наведіть приклади розміщення елементів за принципом Діріхле
Вивчити формулювання принципу Діріхле.
4. Скласти самостійно задачу на використання цього принципу.

Далі ми можемо перейти до розгляду принципу Діріхле в загальному вигляді: якщо $n \cdot k + 1$ предмет розміщувати в n ящиків, то принаймні в одному опиниться не менш ніж $k + 1$ предмет.

Задача 6. Доведіть, що якщо 13 зайців розмістити в 4 клітках, то хоча б в одній з них опиниться 4 зайця.

Розв'язок

Згідно з умовами задачі маємо $n = 4$, а $n \cdot k + 1 = 13$. Тоді отримаємо, що $k = 3$, тому згідно з принципом Діріхле в одній з кліток буде точно $k + 1 = 4$ зайця.

Узагальнений принцип Діріхле можна легко переформулювати і для довжин: Якщо на відрізку довжини l розташовано декілька відрізків, сума довжин яких більша за l , тоді принаймні два відрізки мають спільну точку.

Задача 7. У 6-А класі 28 учнів написали диктант. Сашко в диктанті припустився 13 помилок, а решта — менше. Довести, що принаймні троє учнів припустились помилок порівну (можливо, і по 0 помилок).

Доведення

Припустимо, що жодні троє учнів не припустилися однакової кількості помилок. Тоді не більше ніж двоє учнів припустилися 0 помилок, одну помилку, дві, ..., 12 помилок. Отже, кількість учнів, враховуючи Сашка, не перевищує $2 \cdot 13 + 1 = 27$, що суперечить умові. Таким чином, наше припущення неправильне. Тобто принаймні троє учнів припустилися помилок порівну.

Якщо розглядати задачі на подільність цілих чисел, то принцип Діріхле доцільно сформулювати у наступній формі: серед $p + 1$ цілих чисел знайдуться два числа, які дають однакові остачі при діленні на p .

Дійсно, при діленні на p можна отримати p різних остач: $0, 1, 2, 3, \dots, p-1$. Якщо ми візьмемо $p+1$ ціле число, то обов'язково хоча б два числа дають однакові остачі при діленні на p . У цьому формулюванні принципу Діріхле числа – зайці, а остачі – клітки.

Задача 8. 15 хлопчиків зібрали 100 грибів. Доведіть, що принаймні два хлопчика зібрали однакову кількість грибів.

Учитель: Для розв'язання цієї задачі потрібно скласти протилежне твердження і довести його невірність. Це метод доведення від супротивного.

Учень: Нехай кожний з 15 хлопчиків зібрали різну кількість грибів.

1-й хлопчик – 0 грибів

2-й хлопчик – 1 грибів

.....

.....

15-й хлопчик – 14 грибів

Учитель: Як підрахувати, скільки всього зібрано грибів? Давайте складемо кількість грибів, яку зібрав кожен хлопчик окремо.

Учень записує: $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14=105$ грибів.

Учитель: Але, за умовою зібрано лише 100 грибів. Тому наше твердження, що всі хлопчики зібрали різну кількість грибів, – невірне. Можна зробити висновок, що принаймні два хлопчика зібрали однакову кількість грибів.

Задача 9. Чи може число, в десятковому записі якого використовуються лише одиниці, ділитися на 2001?

Розв'язування

Розглянемо 2002 числа вигляду 1, 11, 111, 1111, ..., 1111...1. Оскільки різних остач від ділення на 2001 є лише 2001, то принаймні два із цих чисел при діленні на 2001 дають однакові остачі. Тому їх різниця, що має вигляд 11...100...0, ділитиметься на 2001. Але число 2001 не має своїми дільниками числа 2 та 5, через те число 11...1, одержане із цієї різниці відкиданням нулів, теж ділитиметься на 2001.

Задача 10. Кожну точку площини замалювати в один з двох кольорів. Довести, що існує відрізок довжиною 1, кінці якого мають однаковий колір.

Розв'язування

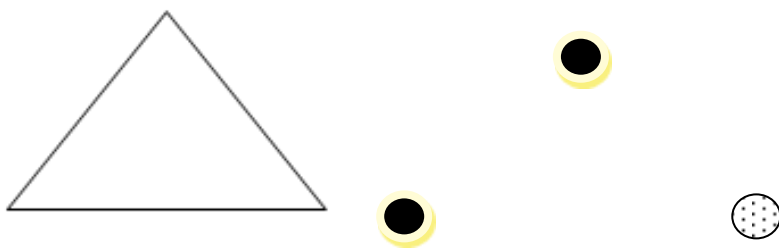


Рис. 10. Довільний рівносторонній трикутник площини зі стороною 1

Розглянемо довільний рівносторонній трикутник, сторона якого 1, а вершинами є дані точки. Оскільки трикутник має 3 вершини, а кольорів тільки 2, то принаймні дві вершини будуть одного кольору, які і є кінцями шуканого відрізка.

Задача 11. 90 учнів виконували тест, що містив 30 завдань. Іванов Василь дав 22 невірних відповіді, інші діти менше. Чи знайдуться 5 учнів з однаковими результатами тестування.

Розв'язування

Нам відомо число помилок Василя Іванова, тоді інші 89 учнів дали не більше 21 неправильних відповідей. Всього різних варіантів відповідей може бути від 0 і до 21, тобто 22 варіанта. За «клітки» візьмемо – 22 помилки. А 89 учнів за «зайців». Будемо саджати зайців по кліткам згідно числа невірних відповідей. Тобто, $22 \cdot 4 + 1$. Відповідно до узагальнення принципу Діріхле

знайдеться «клітка», в якій не менше $4 + 1$, тобто 5 «зайців». Значить, знайдуться, принаймні, 5 учнів з однаковими результатами тестування.

Задача 12. На полицях книжкової шафи 160 книг, причому на одній з них – 3 книги. Доведіть, що знайдеться поличка, на якій не менше ніж 40 книг.

Розв'язування

Припустимо, що на кожній із решти 4 полицок не більше ніж 39 книг. Тоді на всіх 5 полицках не більше ніж $3 + 4 \cdot 39 = 159$ книг, що суперечить умові. Отже, на одній із полицок не менше ніж 40 книг.

Задача 13. У дворі 36 дітей шкільного віку, у районі 7 шкіл. Всі діти 1 вересня пішли до школи. Доведіть, що принаймні в одній школі навчається не менше ніж 5 дітей з цього двору.

Розв'язання.

Відомо, що ми маємо 7 шкіл і 36 учнів $36 : 7 = 5,142$ тоді $7 \cdot 5 < 35 + 1$ тобто в одній школі навчається не менше ніж 5 дітей з цього двору.

Задача 14. 10 школярів на олімпіаді розв'язали 35 завдань, причому відомо, що серед них є школярі, які розв'язали рівно одну задачу, школярі, які розв'язали рівно два завдання і школярі, які розв'язали рівно три завдання. Доведіть, що є школяр, який розв'язав не менше п'яти завдань.

Розв'язання.

З умови слідує, що знайдуться 7 школярів, які розв'язали $35 - 6 = 29$ завдань. Так як $29 = 4 \cdot 7 + 1$, тобто знайдеться школяр, який розв'язав не менше п'яти завдань.

Задача 15. Щовечора 15 шахтарів, що працюють на маленькій шахті, піднімаються на ліфті, і разом з ними піднімаються на ліфті черговий. Вага чергового 55 кг; вага шахтарів 60, 62, 64, ... 90 кг. Чи зможуть всі шахтарі піднятися вгору за 3 рази, якщо максимальне навантаження ліфта 350 кг?

Розв'язання.

Всього 16 чоловік та $16 = 3 \cdot 5 + 1 > 15$ і згідно узагальнення принципу Діріхле хоча б за один підйом необхідно взяти 6 осіб. Вага шести найлегших людей дорівнює:

$$60 + 55 + 62 + 64 + 66 + 68 = 115 + 130 \cdot 2 = \\ 115 + 260 = 375 \text{ кг.}$$

Тобто, підняти всіх шахтарів і чергового за 3 рази, не можна.

Задача 16. Влітку, через річку з села Затока на Зелений острів переправлялося 20 осіб вагою: 55, 57, 59, 61, 63, ..., 93 кг. І ще одна людина вагою 50 кг з дитиною вагою 20 кг. Чи зможуть всі ці люди переправитися через річку за 5 разів, якщо вантажопідйомність човна 300 кг?

Розв'язання.

Одну людину з дитиною ми можемо прийняти за одну людину з вагою 70кг. Тоді $5 \cdot 4 + 1$ – отже, за один рейс доведеться відправити 5 осіб, тобто

$$55 + 57 + 59 + 61 + 63 = 118 \cdot 2 + 59 = 295 \text{ кг.}$$

Але $295 < 300$, отже 21 людина зможе переправитися через річку за 5 разів.

2.3. Рекомендовані практичні завдання для учнів 7 класу.

Учні у 6-му класі вже розглядали принцип Діріхле на простих задачах, тому можна просто нагадати цей принцип у простому формулюванні: якщо п'ятьох зайців розмістити в чотири клітки, то хоча б в одній з них опиниться два зайці.

Тут не є важливою кількість зайців – 5, та кількість кліток – 4. Ми розташовували більшу кількість зайців у меншу кількість кліток. Деякі клітки можуть бути порожніми, оскільки ми розміщували зайців довільним чином.

Після цього бажано нагадати формулювання принципу Діріхле в загальному вигляді: якщо $n \cdot k + 1$ предмет розміщувати в n ящиків, то принаймні в одному опиниться не менш ніж $k + 1$ предмет. Далі проілюструємо принцип на прикладі, для чого розв'яжемо наступну задачу, і доведемо його.

Задача 17. Доведіть, що коли 13 яблук розмістити в 4 корзинах, то хоча б в одній з них опиниться 4 яблука.

Розв'язання

Згідно з умовами задачі маємо $n = 4$, а $n \cdot k + 1 = 13$. Тоді отримаємо, що $k = 3$, тому згідно з принципом Діріхле в одній з корзин буде точно $k + 1 = 4$ яблука.

Доведемо тепер принцип Діріхле. Будемо розміщувати $n \cdot k + 1$ предмет в n ящиків. Для визначеності будемо розміщувати, наприклад, $n \cdot k + 1$ яблук у n корзин довільним способом. Доведемо, що принаймні в одній корзині опиниться $k + 1$ яблуко.

Нехай в I корзині – x_1 яблук

в II корзині – x_2 яблук

.....

в N корзині – x_n яблук.

Відомо, що сума $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n \cdot k + 1$. Якщо допустити, що припущення не є вірним, тобто в кожній корзині лежить не більш ніж k яблук ($x_1 \leq k, x_2 \leq k, \dots, x_n \leq k$), то разом в n корзинах лежало б не більш ніж $n \cdot k$ яблук, тобто $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq n \cdot k$, що є протиріччям умові (всього $n \cdot k + 1$ предмет).

Задача 18. У місті більше ніж 8 000 000 мешканців. Учені вважають, що у кожної людини менше ніж 200 000 волосин на голові. Доведіть, що існує, принаймні, 41 мешканець з однаковою кількістю волосин на голові.

Розв'язання.

Скільки за умовою мешканців? – 8 000 000.

Скільки варіантів кількості волосин на голові у одного мешканця? – 200 000 (від 0 до 199 999).

$$8\,000\,000 = 40 \cdot 200\,000$$

Згідно з принципом Діріхле ($k = 40, k + 1 = 41$), знайдуться принаймні 41 мешканців з однаковою кількістю волосин на голові.

Задача 19. 15 хлопчиків зібрали 100 грибів. Доведіть, що принаймні два хлопчика зібрали однакову кількість грибів.

Розв'язання

Для розв'язання цієї задачі потрібно скласти протилежне твердження і довести його невірність.

Нехай кожний з 15 хлопчиків зібрали різну кількість грибів.

1-й хлопчик - 0 грибів,

2-й хлопчик - 1 грибів,

.....

15-й хлопчик - 14 грибів.

Як підрахувати, скільки всього зібрано грибів?

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \\ + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 105 \text{ грибів.}$$

Але за умовою зібрано лише 100 грибів, тому наше твердження, що всі хлопчики зібрали різну кількість грибів невірна. Отже, можна сказати, що принаймні два хлопчика зібрали однакову кількість грибів.

Задача 20. На полицках книжкової шафи 160 книг, причому на одній з них – 3 книги. Доведіть, що знайдеться полицка, на якій не менше ніж 40 книг.

Розв'язання

Припустимо, що на кожній із решти 4 полицок не більше ніж 39 книг. Тоді на всіх 5 полицках не більше ніж $3 + 4 \cdot 39 = 159$ книг, що суперечить умові. Отже, на одній із полицок не менше ніж 40 книг.

Задача 21 (самостійно). 7 космонавтів відправляються у політ. Ракета витримує 497 кг. Відомо, що вага першого космонавта 51 кг. Всі інші космонавти важать більше ніж 51 кг і у всіх космонавтів вага різна. Чи витримає їх ракета?

2.4. Рекомендовані практичні завдання для учнів 8 класу .

У шостому та сьомому класах ми почали розглядати принцип Діріхле. У шостому класі ми розглядали спрощений принцип Діріхле на прикладі задачі: розташовували 5 зайців у 4 клітки і отримували, що принаймні в одній з них сидить 2 зайця. У сьомому класі ми розглянули узагальнений принцип Діріхле, який має таке формулювання:

Якщо $n \cdot k + 1$ предмет розміщувати в n ящиків, то принаймні в одному опиниться не менш ніж $k + 1$ предмет.

Сьогодні ми пристосуємо цей принцип до задач геометрії.

Учитель: Якими основними поняттями оперує геометрія?

Учень: Точка, пряма, площа.

Учитель: Так. Нехай всі наші дії відбуваються на площині. Переформулюємо принцип Діріхле так, щоб він мав силу на площині. Для цього головними елементами принципу повинні бути геометричні фігури.

Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n, A$ фігури, для яких визначено поняття площі, причому $A_i \subset A$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Якщо

$$k \cdot S(A) \leq S(A_1) + S(A_2) + \dots + S(A_n),$$

то принаймні $k + 1$ фігура з фігур A_i має спільну внутрішню точку. Іншими словами, якщо усередині фігури площі S знаходиться декілька фігур, що мають суму площ більше S , то хоч би дві з них мають спільну точку.

Пояснимо принцип формулювання на наочному прикладі.

A_1	A_2	A_3
...		
	A_k	A_n

Рис. 12. Квадрат A

Нехай A – квадрат, $A_i \subset A$ – частини квадрату. Важливо зрозуміти, що фігура $(A_1 + A_2)$ – це теж частина квадрату. Тому, якщо обирати такі частини:

$$(A_1 + A_2), (A_2 + A_3), \dots, (A_k + A_n), (A_1 + A_2 + A_3), \dots, \\ (A_1 + A_2 + \dots + A_k),$$

то очевидно, що сума площ частин квадрату більша за $k \cdot S(A)$. Тому легко збагнути, що існують фігури із спільними внутрішніми точками, а принцип Діріхле стверджує, що таких фігур принаймні $k + 1$.

Цей принцип можна легко переформулювати для довжин:

Якщо на відрізку довжини l розташовано декілька відрізків, сума довжин яких більша за l , тоді принаймні два відрізки мають спільну точку. Розв'яжемо наступну задачу.

Задача 22. Доведіть, що рівносторонній трикутник неможна покрити двома меншими за нього рівносторонніми трикутниками.

Розв'язання

- Скільки вершин даного рівностороннього трикутника може покрити менший рівносторонній трикутник?
- Не більше однієї.
- Тоді скільки потрібно менших рівносторонніх трикутників, щоб вони покрили даний?
- Потрібно, принаймні, 3 рівносторонніх трикутника.
- Таким чином ми довели, що двома трикутниками ми не зможемо покрити даний.

Задача 23. У квадраті площею S розташовано 100 фігур, сума площ яких більша за $99S$. Довести, що всі ці фігури мають спільну точку.

Доведення.

Нехай $S_1, S_2, \dots, S_{100}$ — площі вказаних фігур, а $S'_1, S'_2, \dots, S'_{100}$ — площі фігур, що доповнюють їх до квадрата. Зрозуміло, що $S_k + S'_k = S$. Згідно з умовою, $S_1, S_2, \dots, S_{100} > 99S$, тому

$$\begin{aligned} S'_1 + S'_2 + \dots + S'_{100} &= (S - S_1) + (S - S_2) + \dots + (S - S_{100}) \\ &= 100S - (S_1 + S_2 + \dots + S_{100}) < 100S - 99S = S. \end{aligned}$$

Отже, сума площ фігур, що доповнюють, менша площі квадрата, і, отже, вони можуть покрити весь квадрат (згідно з принципом Діріхле), тобто знайдеться точка, що не належить жодній з них.

Тоді ця точка належить кожній з вихідних фігур і є шуканою.

Задача 24. Вузли нескінченного паперу у клітинку розфарбовують у два кольори. Доведіть, що існують дві горизонтальні і дві вертикальні прямі, на перетині яких є точки одного кольору.

Доведення

Візьмемо три вертикальні і дев'ять горизонтальних прямих. Розглянемо тільки точки їх перетину. Так як є лише $2^3 = 8$ варіантів розфарбування трьох точок у два кольори, то знайдуться дві горизонтальні прямі, на яких лежать однаково розфарбовані трійки точок. Серед трьох точок, розфарбованих у два кольори, знайдуться дві однаково розфарбовані точки. Вертикальні прямі, що проходять через ці точки, разом з обраними двома горизонтальними є шуканими.

На перший погляд, задача є геометричною, однак тут важливо обрати на початку розв'язання потрібну кількість вертикальних і горизонтальних прямих.

Задача 25. Кожна з дев'яти прямих розбиває квадрат на два чотирикутники, площі яких відносяться як 2 : 3. Доведіть, що хоча б три з цих дев'яти прямих проходять через одну точку.

Ці прямі не можуть перетинати сусідні сторони квадрата $ABCD$, оскільки інакше утворюються не два чотирикутники, а трикутник і п'ятикутник. Нехай пряма перетинає сторони BC і AD у точках M і N . Трапеції $ABMN$ і $CDNM$ мають рівні висоти, тому їх площі відносяться як середні лінії, тобто MN ділить відрізок, що з'єднує середини сторін AB і CD , як 2:3. Точок, що ділять середні лінії квадрата як 2 : 3, є рівно чотири. Так

як дані дев'ять прямих проходять через ці чотири точки, через одну з точок проходять принаймні три прямі.

Задача 26. Доведіть, що в кожному многограннику знайдуться дві грані з однаковою кількістю сторін.

Розв'язання

Нехай G – грань, яка має найбільшу кількість сторін. Тоді даний многогранник має принаймні $n + 1$ грань, і кількість сторін на кожній з них коливається від 3 до n . Отже, згідно з принципом Діріхле, знайдуться дві грані з однаковою кількістю сторін.

Задача 27. На аркуші зошита у клітинку позначили 5 точок, розташованих у вузлах клітинок. Довести, що хоч би один з відрізків, що сполучають ці точки, проходить через вузол клітинки.

Розв'язання

Розглянемо на аркуші систему координат з початком координат в одному з вузлів, осями, направленими уздовж ліній сітки, і одиничним відрізком, рівним стороні клітинки. Тоді всі відмічені точки матимуть цілі координати. Покажемо, що знайдуться дві точки з п'яти, у яких одна і та ж парність координат x і y . Зайцями у нас будуть точки, а клітками – пари (П, П) (П, НП) (НП, П) (НП, НП).

Якщо, наприклад, у обраній точки (x, y) координата x парна, а координата y – непарна, то ми її помістимо в клітинку (П, НП). Отже маємо 5 зайців і 4 клітки. Нехай (x_1, y_1) і (x_2, y_2) – дві точки, що попали в одну клітинку. Середина відрізка, що сполучає ці дві точки, має координати $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, які є цілими числами через однакову парність x_1 та x_2 , y_1 та y_2 . Таким чином, середина цього відрізка лежить у вузлі клітинки, тобто даний відрізок є шуканим.

Можна також сформулювати такі питання для самоконтролю:

- Згадайте саме просте формулювання принципу Діріхле.

- Згадайте різні формулювання для принципу Діріхле (як алгебраїчні, так і геометричні).

Задача 28. У колі радіуса 1 проведено декілька хорд, сумарна довжина яких більше 7π . Доведіть, що існує діаметр, який перетинає не менше ніж 8 хорд.

Розв'язання

Відомо, що довжина хорди менша за довжину відповідної дуги, тоді сума цих дуг також більша за 7. Оберемо довільний діаметр кола та відобразимо симетрично відносно центра кола O одне з півкіл. Тоді, інше півколо буде покрите дугами, що матимуть загальну сумарну довжину, більшу за 7. Тоді, за принципом Діріхле, одна з точок півкола покривається принаймні 8 разів. Отже, відображений діаметр, що проходить через цю точку, перетинає 8 хорд.

Задача 29 На площині дано 25 точок, і серед довільних трьох з них є дві точки, відстань між якими менша за 1. Доведіть, що існує круг радіусу 1, що містить не менше 13 із цих точок.

Доведення.

Нехай деякі 2 з цих вказаних точок розміщені на відстані, що $\geq$ за 1. Проведемо навколо цих точок два кола з центрами в них, радіусів 1. Згідно з принципом Діріхле, маємо, що всередині одного з них міститься принаймні 12 точок.

Задача 30 (самостійно). В одиничному квадраті вибрано довільним чином 51 точку. Довести, що деякі три з них можна покрити колом радіуса $\frac{1}{7}$.

2.5. Рекомендовані практичні завдання для учнів 11 класу

Спочатку треба актуалізувати опорні знання про принцип Діріхле, наприклад, системою навідних питань і базові знання з комбінаторики:

- Сформулюйте принцип Діріхле.
- Де ми зустрічали цей принцип?

- Які елементи потрібно виділити в задачі, якщо при її розв'язанні ми застосовуємо принцип Діріхле?

- Згадайте, що таке розміщення, розстановка та сполучення?

- Запишіть формули для їх знаходження.

Задача 31. У класі 25 чоловік. Відомо, що серед будь-яких трьох з них є двоє друзів. Доведіть, що є учень, в якого не менше ніж 12 друзів.

Розв'язання

Виберемо будь-яких двох учнів класу, які не дружать між собою (якщо таких немає, то всі учні класу дружать між собою, значить, в кожного є 24 друзі, і завдання розв'язали). Серед тих 23 учнів, що залишились, кожен дружить з одним з цих двох, інакше ми мали б трійку учнів, серед яких не було б друзів. Тоді в одного з обраних двох учнів не менше 12 друзів (23 зайці розсаджено в дві клітки).

Задача 32. Вузли решітки розміру 3×9 розмальовані двома кольорами. Доведіть, що існують 2 горизонтальні і 2 вертикальні прямі, на перетині яких лежать чотири точки одного кольору.

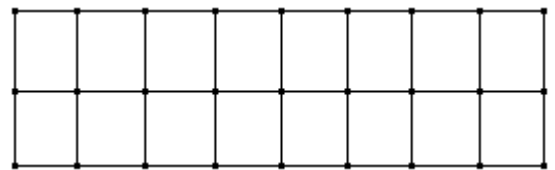


Рис. 13. Решітка 3×9

Розв'язання

Учитель: Якою кількістю кольорів може бути розмальований фрагмент —? ?

Учень : Двома кольорами.

Учитель: Скількома способами?

Учень: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Учитель: Скільки вертикальних наборів?

Учень: 9.

Учитель: Тобто варіантів розмальовування 8, а наборів 9, що можна сказати?

Учень: Згідно з принципом Діріхле 2 набори будуть розмальовані однаково.

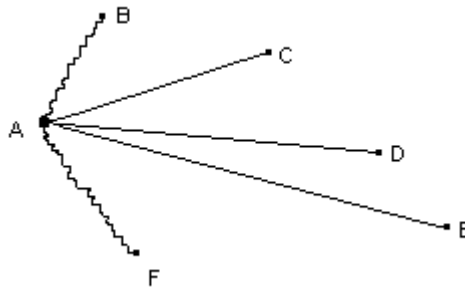
Учитель: Але в наборі $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$ принаймні 2 вузли одного кольору, що з цього випливає?

Учень: Серед вузлів решітки існує принаймні 4 вузла одного кольору, які утворюють прямокутник.

Задача 33. Доведіть, що серед будь-яких 6 чоловік є троє попарно знайомих, або троє попарно не знайомих.

Розв'язання

Нехай A, B, C, D, E, F – точки на площині, які позначають людей.



Будемо сполучати точки лінією _____, якщо люди знайомі між собою, та ~~~~~ - якщо не знайомі між собою. З кожної точки виходить 5 ліній, принаймні 3 з них однотипні. Якщо це відрізки, то знайдуться 3 людей знайомі між собою, якщо хвилясті, то навпаки.

Учитель: Тобто завдяки не складним логічним міркуванням задача розв'язана .

Задача 34. У клітинках таблиці 3×3 розміщені числа 0; 1; -1. Доведіть що принаймні дві з 8 сум за рядками, стовпчиками та діагоналями будуть рівні.

Розв'язання

Оскільки можливі суми чисел можуть змінюватись від -3 до 3, то згідно з принципом Діріхле принаймні дві з них будуть рівними.

Задача 35. Дано 20 натуральних чисел:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{20} \leq 64.$$

Доведіть, що серед різниць $a_i - a_k$ ($i > k$) знайдуться принаймні чотири рівних.

Розв'язання

Учитель: Скільки існує можливих додатних різниць даних чисел?

Учень: $C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$.

Учитель: Якому проміжку належать ці 190 чисел?

Учень: Від 0 до 63.

Учитель: Що отримаємо, коли застосуємо принцип Діріхле?

Учень: $n = 63$, $190 = 63 \cdot 3 + 1$, $k = 3$. Згідно з принципом Діріхле принаймні $k + 1 = 4$ з цих чисел співпадають.

Задача 36. Дано 1002 різних числа, які не перевищують числа 2000. Доведіть, що з них можна вибрати три таких числа, що сума двох з них дорівнює третьому числу.

Розв'язання

Для розв'язку задачі використаємо метод математичної індукції. Доведемо спочатку твердження: якщо з чисел від 1 до $2n - 2$ ($n \geq 3$) вибране $n + 1$ різне число, то з них можна вибрати три таких числа, що сума двох чисел дорівнює третьому числу.

При $n = 3$ істинність твердження очевидна $(1, 2, 3; 1 + 2 = 3)$.

Вважаємо, що твердження вірне для $n = k$. Доведемо його вірність для $n = k + 1$.

Якщо $k+1$ з обраних чисел потрапили в проміжок від 1 до $2k - 2$, то можемо застосувати припущення індукції. Якщо ж це не так, то обов'язково повинні бути обрані числа $2k - 1$ і $2k$. Інші k вибраних чисел знаходяться у проміжку від 1 до $2k - 2$. Розіб'ємо цей проміжок на пари

$$(1, 2k - 2), (2, 2k - 3), \dots, (k - 1, k),$$

отримуємо, що одна з цих пар складається з вибраних чисел. Але тоді їх сума дає $2k - 1$. Твердження справедливе для $n = k + 1$, тобто воно справедливе для любого натурального значення $n \geq 3$.

У нашому випадку $n = 1000$.

Задача 37. Кожна точка площини з цілими координатами розфарбована в один з n кольорів. Доведіть, що знайдеться прямокутник з вершинами в точках одного кольору.

Розв'язання

Розглянемо точки з цілими координатами, які розташовані у нескінченній горизонтальній полосі. У цій полосі знайдуться два однаково пофарбованих рядка точок. Дійсно, розглянемо полосу $n + 1$ послідовно розташованих рядків точок з цілими координатами. Розглянемо вертикальні рядки цієї полоси, які складаються з $n + 1$ точки. Існує лише скінченна кількість способів розфарбування $n + 1$ точки в n кольорів, усього існує n^{n+1} таких способів. Тому серед вертикальних рядків цієї полоси (а таких рядків нескінченна кількість) знайдуться два однаково розфарбованих рядка A і B , тобто таких рядки, що точки цих рядків, розташовані у i -ому горизонтальному рядку ($i = 1, 2, \dots, n + 1$), мають один колір. Оскільки у вертикальному рядку A $n + 1$ точка з цілими координатами, то в ньому знайдуться дві точки X і Y одного кольору. У рядку B дві точки X' , Y' , розташовані в тих же горизонтальних рядках, що і точки X і Y рядка A , пофарбовано тим же кольором, що і точки X, Y (так як рядки A і B однаково пофарбовані). Точки X, Y, X', Y' є вершинами прямокутника і пофарбовані в однаковий колір, тобто утворюють шукану четвірку точок, що і потрібно було довести.

Можна також сформулювати такі питання для самоконтролю:

- Сформулюйте принцип Діріхле у різних формах.
- В яких розділах математики застосовується принцип Діріхле.
- Назвіть в задачах предмети, які відігравали роль «зайців» і «кліток».

Задача 38 (самостійно). В таблиці 10×10 розміщені цілі числа, причому довільні два числа в сусідніх клітинках відрізняються не більш як на 5. Доведіть що серед цих чисел є принаймні два рівних.

Задача 39 (самостійно). У роботі міжнародної конференції бере участь 17 учених. Кожні двоє з них розмовляють між собою однією з трьох мов.

Доведіть, що серед учасників конференції знайдуться троє, що розмовляють між собою однією мовою.

Задача 40 (самостійно). Доведіть, що серед будь-яких 10 різних двоцифрових чисел можна вибрати дві різні групи чисел так, щоб суми чисел в обох групах були однаковими.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акуленко І. А. Готуємось до математичних олімпіад: навч.-метод. Посіб. / І. А. Акуленко, В. В. Атамась, О. М. Козлова. – Черкаси: Черкаський нац. Ун-т. ім. Б. Хмельницького, 2008 – 48 с.
2. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. : пер. з англ. Москва : Вильямс, 2004. 960 с.
3. Андреев А. А. Принцип Дирихле. Учебное издание. Серия А: Математика. Вып. 1. / А. А. Андреев, Г. Н. Горелов, А. И. Люлев, А. И. Савин А.И. – Самара : Пифагор, 1997, 21 с.
4. Болдарева О. М., Мамедова А. Принцип Діріхле та його застосування при розв'язуванні шкільних задач. *Education via Distance Learning and other Pedagogical Challenges: Proceedings of the 2nd International Scientific and Practical Internet Conference, September 21-22, 2023., Dnipro, Ukraine*, pp. 58-61.
5. Болтянский В. Г. Шесть зайцев в пяти клетках // Квант. – 1977. – №2. – С. 17-20.
6. Веремко К. І. Планування роботи школи: навч. вид. / К. І. Веремко, Л. М. Григоренко, Л. Л. Бондарева. – Харків: «Основа», 2012. – 384 с.
7. Генкин С. А. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. – Киров: АСА, 1994. – 272 с.
8. Гусев В. А. Внеклассная работа по математике в 6-8 классах: Кн. для учителя / В. А. Гусев, А. И. Орлов, А. Л. Розенталь. – М.: Просвещение, 1984. – 289 с.
9. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике / Е. В. Галкин. – М.: Просвещение, 1986. – 272 с.
10. Гальперин Г. А. Московские математические олимпиады / Г. А. Гальперин. – М.: Просвещение, 1986. – 303 с.
11. Орлов В. И. Принцип Дирихле // Квант. – 1971. – № 7. – С. 17-21.

- 12.Пивоварчик В. М. Дискретна математика (частина 1) : навч. посіб. / В. М. Пивоварчик, О. М. Яковлева, О. М. Болдарєва. – Одеса : Держ. закл. «Південноукраї. нац. пед. ун-т ім. К. Д. Уш.»», 2022. - 145 с.
- 13.Рего В. Курс: «Практикум з розв’язування олімпіадних та конкурсних задач». Навчальний матеріал до Теми 8: Принцип Діріхле. Задачі на застосування принципу Діріхле. *Ужгородський національний університет*. URL: <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/30234> (дата звернення: 16.06.2023).
- 14.Спивак А. В. Математический праздник / А. В. Спивак. – М.: МЦНМО, 1995. – 78 с.
15. Федак І. В. Цілі числа. Комбінації. Принцип Діріхле. Ігри. Посібник для підготовки до математичних олімпіад у 6-8 класах / І. В. Федак. – Тернопіль: Бібліотечка заочної математичної школи, 1997. – 111 с.
16. Фоминых. Ю. Ф. Принцип Дирихле // Математика в школе. – 1996. – №3. – С. 25-31.
- 17.Фурман М. С., Математика. 6 клас. Навчальний посібник. Частина 1 (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 7 (139))./ М. С. Фурман, А. О. Нагорна. — Х. : Вид. група «Основа», 2014. – 122 с.
- 18.Харік О. Ю. Матеріали для факультативних занять, спецкурсів, гуртків. Математика 5-7 класи / О. Ю. Харік. – Х.: Основа, 2008. – 143 с.
19. Ядренко М. Й. Принцип Діріхле та його застосування /М. Й. Ядренко. – К.: Вища школа, 1985. – 80 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Формулювання принципу Діріхле

жартівливий варіант	5
для скінчених множин	6,7
для нескінчених множин	7
в узагальненій формі	9
неперервний принцип	11