

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний
університет імені К. Д. Ушинського»
Навчально-науковий інститут природничо-математичних наук, інформатики
та менеджменту
Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації
*для організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Наукові засади
сучасних курсів алгебри та початків аналізу»*
Розділ: Рівняння і нерівності.

*Рекомендовано до друку вченою радою Державного закладу
«Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського», протокол №12 від 27 березня 2025 року*

Рецензенти:

- 1. Григор'єва Тетяна Ігорівна**, кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інформаційних технологій Міжнародного гуманітарного університету
- 2. Урум Галина Дмитрівна**, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики і статистики Університету Ушинського.

Болдарєва О. М., Олефір О. І. Методичні рекомендації для організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Наукові засади сучасних курсів алгебри та початків аналізу» Розділ: Рівняння і нерівності : методичні рекомендації. Одеса : Університет Ушинського, 2025. 40 с.

Методичні рекомендації для організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Наукові засади сучасних курсів алгебри та початків аналізу» Розділ: Рівняння і нерівності містять загальний теоретичний матеріал, розв'язки прикладів і задач. Рекомендовано для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 014.08 Середня освіта (Фізика та астрономія) з метою закріплення, поглиблення й узагальнення знань, одержаних під час навчання.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	2
РОЗДІЛ I. НЕСТАНДАРТНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ.....	6
2.1. Властивість монотонності функції.....	6
2.2. Використання властивості обмеженості функції для розв'язування рівнянь.....	14
2.3. Використання області визначення...../.....	17
2.4. Розв'язування рівнянь відносно параметра.....	19
2.5. Використання виразу для відстані між двома точками на координатній прямій.....	19
2.6. Використання графіків функцій.....	22
2.7. Рівняння, що містять нескінченну кількість квадратних коренів.....	24
2.8. Множення рівняння на функцію.....	26
2.9. Вгадування кореня рівняння	27
РОЗДІЛ 2. НЕСТАНДАРТНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ..	29
2.1. Нерівності з параметрами.....	29
2.2. Ірраціональні нерівності.....	31
2.3. Нерівності вигляду $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} > 0, \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} < 0$	35
2.4. Метод заміни розв'язування ірраціональних нерівностей.....	37
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	39

ВСТУП

У сучасному освітньому процесі, за всеохоплюючої доступності відкритих інформаційних джерел, передача знань, які не вимагають активної участі у процесі навчання, вже не є головним завданням самого процесу навчання. Гарна математична освіта та розвиток математичних здібностей необхідні не тільки тому, хто згодом займатиметься науковими дослідженнями в галузі математики, а й тому, хто стане економістом, інженером, виробничником, аграрієм тощо. Однією із змістовних ліній змісту математичної освіти на рівні базової і профільної середньої освіти є рівняння та нерівності. І розвивається ця лінія з урахуванням завдань вивчення математики.

Застосування нестандартних способів розв'язування рівнянь та нерівностей дозволяє удосконалювати процес навчання математики в школах (класах з її поглибленим вивченням) та сприяє вдосконаленню в учнів умінь розв'язувати типи рівнянь та нерівностей, які допускають стандартне та функціональне розв'язання.

Розв'язок нестандартних рівнянь і нерівностей відкриває широкий спектр математичних можливостей і потенційних застосувань. Важливо відзначити, що такі завдання можуть виникати в різних галузях, починаючи від фізики та економіки і закінчуючи комп'ютерним моделюванням та науковим дослідженням.

Ключовим розуміння є той факт, що майже кожна задача вимагає індивідуального підходу до вирішення. Тому не існує єдиного універсального методу для розв'язання всіх нестандартних рівнянь або нерівностей. Вирішення таких завдань потребує комбінації технічних знань, математичного інтуїтивного розуміння та творчого мислення. Крім того, зазначимо, що в розв'язанні нестандартних нерівностей можна використовувати методи, які можуть бути непрямими або креативними. Іноді для вирішення таких задач потрібно дивитися на проблему з різних боків, використовуючи засоби абстрактного мислення та логіки.

У методичних рекомендаціях проведено огляд нестандартних методів розв'язання рівнянь і нерівностей. Зокрема представлено

1. опис нестандартних прийомів розв'язування рівнянь і нерівностей.
2. застосування на практиці досліджених методів розв'язання рівнянь і нерівностей, заснованих на використанні властивостей функцій.
3. практичне використання додаткових штучних методів розв'язання рівнянь і нерівностей.

Методичні рекомендації можуть бути корисними для здобувачів вищої освіти та додатковим матеріалом до підготовки уроків з математики. Вони також можуть використовуватися для підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання або інших видів тестування.

РОЗДІЛ І. НЕСТАНДАРТНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

Зовсім не аби яке рівняння чи нерівність за допомогою вдалої заміни змінної, або у результаті перетворень, отримає вигляд стандартного рівняння або нерівності, що дозволить знайти розв'язок з використанням певного алгоритму. Тому є доречним скористатися такими властивостями функцій, як обмеженість, періодичність, монотонність, парність та інші [6].

2.1. Властивість монотонності функції

В освітньому процесі у школі визначають чотири основні методи розв'язання рівнянь: розкладання на множники, заміна змінної, перехід від рівностей функції до рівності аргументів та функціонально-графічний метод. Однак варто відзначити, що існує значна кількість творчих задач, для вирішення яких необхідний нетрадиційний підхід. Здебільшого це зумовлено довготривалою практикою проведення математичних іспитів, ЗНО, НМТ, що призвело до виникнення потужної індустрії "виробництва" рівнянь для завдань.

Одним з варіантів вирішення нетрадиційних рівнянь є використання методу оцінок. Часто учні не можуть подолати навіть найбільш прості завдання, що свідчить про відсутність у них навичок використання методу оцінки в розв'язанні таких задач. На допомогу приходить **метод мажорант**.

Методом мажорант можна розв'язати рівняння виду $f(x) = g(x)$, де $f(x)$ і $g(x)$ – це функції абсолютно різного типу. Мажорант полягає в тому, що одна частина рівняння (або нерівності) обмежена зверху деяким числом M , а друга частина рівняння (або нерівності) обмежена знизу тим самим числом M .

Означення. Мажорантою (від *magiorante* – головуючий) даної функції f на множині D називають таке число M , що або $f(x) \leq M$ для усіх $x \in D$, або $f(x) \geq M$ для усіх $x \in D$.

Основну ідею мажорант можна сформулювати у вигляді наступних теорем:

Теорема 1. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ деякі функції, визначені на множині D . Нехай $f(x)$ обмежена на цій множині числом M зверху, а $g(x)$ обмежена на цій самій множині числом M знизу. Тоді рівняння $f(x) = g(x)$ буде рівносильно системі $\begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$

Теорема 2. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ – деякі функції, визначені на множині D . Нехай обмежені на даній множині знизу (зверху) числами M і N відповідно. Тоді рівняння $f(x) + g(x) = M + N$ еквівалентне системі рівнянь

$$\begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$$

Метод мажорант також називають методом оцінки лівої та правої частин, що входять до рівнянь та нерівностей. Мажоранти багатьох елементарних функцій відомі. Їх не важко вказати, коли ми знаємо область значень функцій.

1. $-1 \leq \sin x \leq 1$ або $|\sin x| \leq 1$
2. $-1 \leq \cos x \leq 1$ або $|\cos x| \leq 1$
3. $x^{2n} \geq 0$
4. $a^x > 0$
5. $|x| \geq 0$
6. $\sqrt{x} \geq 0$
7. $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$
8. $0 \leq \arccos x \leq \pi$
9. $-\frac{\pi}{2} < \arctg x < \frac{\pi}{2}$
10. $0 < \operatorname{arccot} x < \pi$

Алгоритм розв'язання за допомогою вказаного методу складається з наступних кроків:

1. Оцінити ліву частину рівняння/нерівності.
2. Оцінити праву частину.
3. Скласти систему рівнянь / нерівностей.
4. Вирішити систему та зробити висновок.

5. Виконати перевірку.

6. Записати відповідь.

Покажемо застосування алгоритму при розв'язанні такого рівняння.

$$(x - 3)^4 + (x^2 - 2x - 3)^{10} = 0$$

1. Потрібно оцінити ліву та праву частини рівняння:

$$x^{2n} \geq 0, \text{ тобто}$$

$$\begin{cases} (x - 3)^4 \geq 0 \\ (x^2 - 2x - 3)^{10} \geq 0 \end{cases}$$

Так як ліва частина рівняння прирівнюється до нуля, то рівність можлива тільки в тому випадку, якщо обидва доданки дорівнюють нулю.

2. Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x - 3)^4 = 0 \\ (x^2 - 2x - 3)^{10} = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x - 3 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

3. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 3, x = -1 \end{cases}$$

4. Зробимо перевірку:

При $x = -1$: $(-1 - 3)^4 + ((-1)^2 - 2 * (-1) - 3)^{10} = 0$, $256 + 0 = 0$ – невірна рівність, значить корінь $x = -1$ не підходить

Якщо $x = 3$, $(3 - 3)^4 + (3^2 - 2 * 3 - 3)^{10} = 0$, $0 + 0 = 0$ – вірна рівність, значить $x = 3$ – корінь рівняння [17].

Означення. Функція $f(x)$ називається **зростаючою** на проміжку D , якщо для будь-яких чисел x_1 і x_2 із проміжку D таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Означення. Функція $f(x)$ називається **спадною** на проміжку D , якщо для будь-яких x_1 і x_2 із проміжку D таких, що $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Функція $y = f(x)$,
 $x \in [a; b]$, зростає на
 кожному із проміжків
 $[a; x_1]$ і $[x_2; b]$ спадає на
 проміжку $(x_1; x_2)$.

Зверніть увагу, що
 функція зростає на

кожному із проміжків
 $[a; x_1]$ і $(x_2; b]$, але не на
 об'єднанні проміжків $[a; x_1) \cup (x_2; b]$.

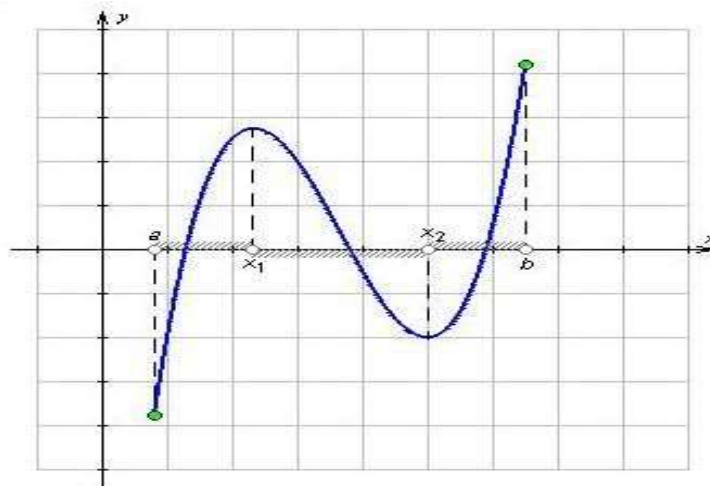


Рисунок 2.1

Якщо функція зростає або спадає на деякому проміжку, то вона називається **монотонною** на цьому проміжку.

Помітимо, що якщо $f(x)$ – монотонна функція на проміжку $D(f(x))$, то рівняння $f(x) = \text{const}$ не може мати більше одного кореня на цьому проміжку.

Дійсно, якщо x_1, x_2 – корінь цього рівняння на проміжку $D(f(x))$, де $f(x_1) = f(x_2) = 0$, що суперечить умові монотонності [13].

Перелік властивостей монотонних функцій на проміжку D :

1. Сума двох зростаючих (спадних) функцій є зростаючою (спадною) функцією на їхній спільній області визначення.
2. Добуток двох зростаючих (спадних) функцій, які приймають тільки невід'ємні значення, є зростаючою функцією.
3. Добуток двох зростаючих (спадних) функцій, які приймають тільки додатні значення, є зростаючою функцією.
4. Добуток двох спадних функцій, які приймають тільки додатні значення, є спадною функцією.
5. Різниця між зростаючою і спадною (спадною і зростаючою) функціями є функцією, яка зростає (спадає) на їхній спільній області визначення.

6. Якщо функція $f(x)$ зростає, то функції $cf(x)$ та $f(x) + c$ також зростають, а функція $cf(x)$ при $c < 0$ спадає.

7. Якщо функція $f(x)$ зростає й зберігає знак, то функція $\frac{1}{f(x)}$ спадає.

8. Якщо функції $f(x)$ зростає та від'ємна, то $f(x)^n$, де $n \in \mathbb{N}$, також зростає.

9. Якщо функція $f(x)$ зростає й n – непарне число, то $f(x)^n$ також зростає.

10. Якщо обидві функції $f(x)$ та $g(x)$ є або зростаючими, або спадними, то функція $f(g(x))$ є зростаючою. Якщо одна з них зростає, а інша спадає, то $f(g(x))$ є спадною [13].

Зауваження. Іноді трапляється, що різниця двох зростаючих функцій може не являтися функцією, що зростає. Наприклад, різницею функцій $y = x$ і $y = 2x$ є функція $y = -x$, яка є спадною. Різниця значень функцій $y = x^3$ і $y = x$ не є функцією, що спадає, та функцією, що зростає по всій області визначення [14].

Розв'язки подібних рівнянь зручно знаходити за таким алгоритмом:

1. Знаходимо розв'язки рівнянь чи нерівностей;
2. Виконуємо доведення, де рівняння чи нерівність не мають інших коренів, застосовуючи такі теореми про корені рівнянь:

Теорема 3. Якщо в рівнянні $f(x) = a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку.

Теорема 4. Якщо на певному проміжку функція $f(x)$ зростає, тобто її значення збільшуються при збільшенні аргументу x , і в той же час функція $g(x)$ на цьому проміжку спадає, тобто її значення зменшуються при збільшенні x , то рівняння $f(x) = g(x)$ може мати не більше одного кореня на цьому проміжку. Це означає, що точка перетину графіків цих функцій може бути лише одна на вказаному інтервалі [13].

Справджується твердження, для функції $f(x)$, яка є монотонною, розв'язок рівняння може містити лише один корінь, адже нерівним значенням аргументу для монотонної функції відповідають нерівні значення функції. На графіку (рис. 2.2) видно, що графіком константи є пряма, яка паралельна до осі абсцис, має лише одну точку перетину з графіком монотонної функції [12].

Означення. **Точкою максимуму** функції $f(x)$ називається така точка a , якщо існує така ε – околиця точки a , що для будь-якого x із цієї околиці виконується нерівність $f(a) \geq f(x)$.

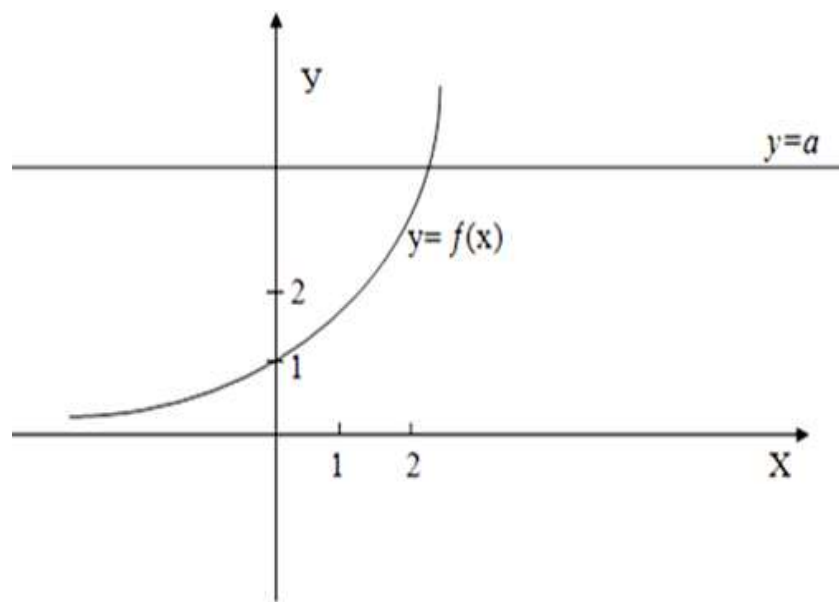


Рисунок 2.2

Означення. **Точкою мінімуму** функції $f(x)$ називається така точка a , якщо існує така ε - околиця точки a , що для будь-якого x із цієї околиці виконується нерівність $f(a) < f(x)$

Означення. **Точки екстремуму** – це точки, у яких досягається максимальне або мінімальне значення функції.

Зміна характеру монотонності функції відбувається у точці екстремуму. Отже, якщо точка екстремуму функції розташована праворуч від неї, то функція може зростати, а ліворуч від неї – спадати. Відповідно до

визначення, точка екстремуму має бути внутрішньою точкою області визначення функції [9].

Означення. Якщо для кожного $x \in D$, ($x \neq a$) виконується нерівність $f(x) \leq f(a)$, $x \in D$, де точка a називається **точкою найбільшого значення функції** на множині D , позначається як $\max f(x) = f(a)$, $x \in D$.

Означення. Якщо для кожного $x \in D$, ($x \neq b$) виконується нерівність $f(x) \geq f(b)$, $x \in D$ де точка b називається **точкою найменшого значення функції** на множині D , позначається $\min f(x) = f(b)$, $x \in D$.

Точка, де функція досягає свого найбільшого або найменшого значення на множині D , може бути екстремумом цієї функції, але це не завжди відбувається. При дослідженні поведінки функції на відрізку розумно аналізувати серед екстремумів на цьому відрізку і значення функції на його кінцях. Особливо це стосується точки, де функція досягає свого максимального (мінімального) значення на відрізку, і ця точка є екстремумом за умови, що функція є неперервною [13].

На таких законах базується розв'язування як рівнянь, так і нерівностей із застосуванням такої властивості функцій, як монотонність.

1. Нехай функція $f(x)$ є строго монотонною і неперервною на проміжку T . Тоді рівняння $f(x) = p$, де p є сталою величиною, має тільки один корінь на проміжку T .

2. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ – функції неперервні на проміжку T , $g(x)$ строго спадає, а $f(x)$ строго зростає на цьому проміжку, тоді рівняння $f(x) = g(x)$ матиме лише один розв'язок на проміжку T .

Зазначимо, що за проміжок T можна взяти нескінченний проміжок $(-\infty; +\infty)$, проміжки $(a; +\infty)$, $(-\infty; a)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$, інтервали й напівінтервали, відрізки [6].

Приклад 1.1. [9]. Знайти розв'язок рівняння $x^3 + x = 10$.

Функцією, яка зростає на всій числовій прямій, буде ліва частина рівняння. Тому, за теоремою 1, у рівняння існує єдиний корінь. Коли $x = 2$, рівність виконується.

Відповідь: $x = 2$.

Приклад 1.2. [8]. Знайти розв'язок рівняння:

$$\log_5(x + 3) = 3 - x.$$

Розв'язання:

$f(x) = \log_5(x + 3)$ – це функція, що зростає; $f(x) = 3 - x$ – спадна. Правильною рівність буде при $x = 2$ Перевірка: $\log_5 5 = 3 - 2$; $1 = 1$. $x = 2$ – корінь.

Відповідь: $x = 2$.

Приклад 1.3. [8]. Розв'язати рівняння

$$x \cdot 2^{x^2+2x+3} = 64.$$

Розв'язання: можна стверджувати, що $x \leq 0$ не є розв'язком запропонованого рівняння, бо в такому випадку $x \cdot 2^{x^2+2x+3} \leq 0$. Для $x > 0$ функція $y = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ є неперервною і строго зростаючою, як значення добутку двох неперервних, додатних, строго зростаючих для даних x функцій $f(x) = x$ та $g(x) = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$. Тому, в межах $x > 0$ функція $y = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ набуває кожного свого значення чітко в одній точці. Тому можна стверджувати, що $x = 1$ являється єдиним розв'язанням вказаного рівняння.

Відповідь: 1.

Приклад 2.1.4. Знайти значення нерівності:

$$2^x + 3^x + 4^x < 3.$$

Розв'язання: Оскільки кожна з функцій $b = 2^x$, $b = 3^x$, $b = 4^x$ є неперервною й строго зростаючою на всій осі, тому такими ж самими характеристиками володіє й початкова функція $y = 2^x + 3^x + 4^x$. Розглянувши цю рівність можна стверджувати, коли $x = 0$ функція $y = 2^x + 3^x + 4^x$ набуває значення 3. Оскільки функція є неперервною та

строго монотонною при $x > 0$ отримаємо $2^x + 3^x + 4^x > 3$, а при $x < 0$ отримаємо $2^x + 3^x + 4^x < 3$. Тому розв'язками поданої нерівності є всі $x < 0$.

Відповідь: $(-\infty; 0)$.

Приклад 1.5. Розв'яжіть рівняння $\log_3(5 + \sqrt{x}) = \log_4 x$.

1. Скористуємось методом заміни:

Нехай $\log_4 x = t$. Тоді $x = 4^t$ та $\sqrt{x} = 2^t$. Отримуємо:

$$\log_3(5 + 2^t) = t,$$

$$3^t = 5 + 2^t,$$

2. Визначимо монотонність функцій: $y = 3^t$ та $y = (5 + 2^t)$ – зростаючі функції

3. Методом підбору знаходимо корінь $t = 2$.

4. Ділимо обидві частини рівняння на 2^t :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^t = 1 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

5. Знову визначимо монотонність отриманих функцій:

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^t - \text{зростає (основа } \frac{3}{2} > 1, \text{ а}$$

$$y = 1 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t - \text{зменшується (основа } \frac{1}{2} < 1).$$

Звідси слідує, що $t = 2$ – єдиний корінь рівняння.

6. Повернемося до заміни: $\log_4 x = 2 \rightarrow x = 16$.

2.2. Використання властивості обмеженості функції для розв'язування рівнянь

При розв'язанні рівнянь і нерівностей використання властивості обмеженості функції знизу чи зверху в певних межах спрощує процес знаходження коренів рівнянь.

Означення. Якщо для кожного значення x з області визначення D виконується умова $f(x) \leq c$, де c – фіксоване число, то функцію вважають **обмеженою зверху** на множині D .

Означення. Якщо для кожного значення x з області визначення D виконується умова $f(x) \geq c$, де c – фіксоване число, то функцію вважають **обмеженою знизу** на множині D .

Означення. Функцію вважають **обмеженою на множині D** , якщо вона обмежена як зверху, так і знизу. Геометрично обмеженість функції $f(x)$ на множині D означає, що графік функції $y = f(x)$, де $x \in D$, розташований всередині смуги, обмеженої лініями $c \leq y \leq C$. (рис. 2.5). [16]

Якщо функція не має обмеженості на заданій множині, то можна

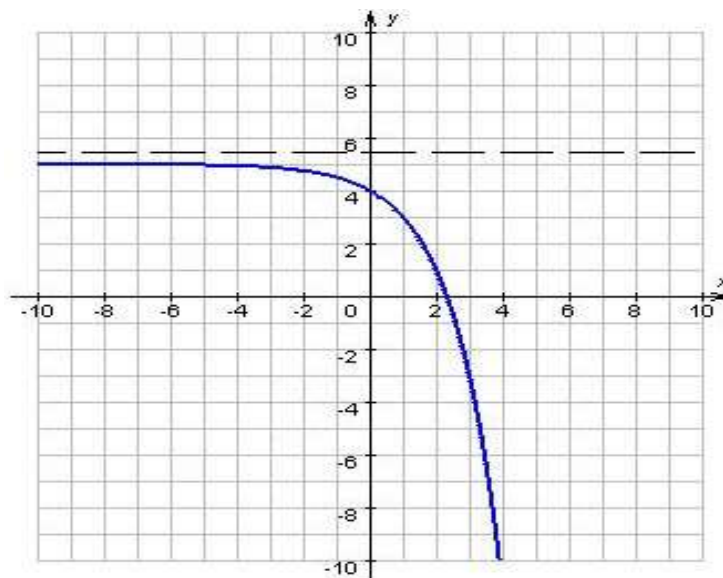


Рисунок 2. 3

вживають термін "необмежена" для її опису.

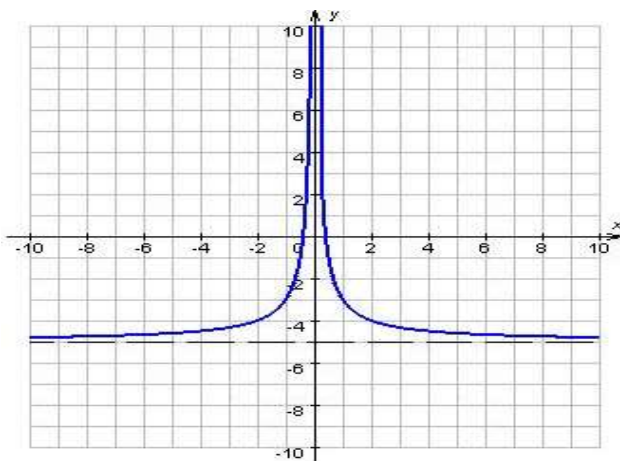


Рисунок 2.4

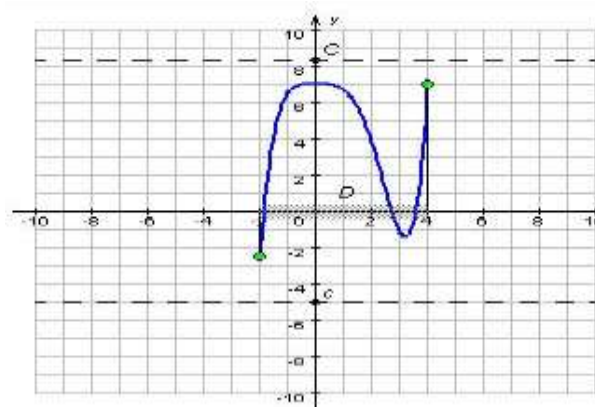


Рисунок 2. 5

Функція $y = x^2$ є прикладом функції, яка обмежена знизу на всій числовій осі. Функція $y = \frac{1}{x}$ є прикладом функції, обмеженої зверху на відкритому інтервалі $(-\infty, 0)$. Функція $y = \sin x$ є прикладом функції, яка обмежена на всій числовій осі [16].

Деякі рівняння можна вирішити, використовуючи оцінку лівої та правої частини рівняння. Цей метод ґрунтується на наступній властивості: якщо потрібно знайти розв'язки рівняння $f(x) = \varphi(x)$ і виявлено, що $f(x) \geq a$ і $\varphi(x) \leq a$, то рівність між лівою та правою частинами можлива лише тоді, коли $f(x)$ і $\varphi(x)$ одночасно приймають значення a . Тобто якщо

$$\begin{cases} f(x) \geq a \\ \varphi(x) \leq a \end{cases} \text{ то } \begin{cases} f(x) = a \\ \varphi(x) = a \end{cases}$$

Приклад 1.6. Знайти корені $2\sin x = \cos x + 4$.

Розв'язання: Множиною значень функції $f(x) = 2\sin x$ є інтервал $[-2; 2]$, тоді як множина значень функції $g(x) = \cos x + 4$ є інтервалом $[3; 5]$. Оскільки вони не мають спільних значень, у цього рівняння спільного розв'язку не існує [3].

Приклад 1.7. Розв'яжемо рівняння $x^3 - x - \sin \pi x = 0$.

Розв'язання: Очевидно, що $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ є розв'язками даного рівняння. Для знаходження інших розв'язків у силу непарності функції $f(x) = x^3 - x - \sin \pi x$ досить знайти його розв'язок в області $x = 0$, $x = 1$.

Розіб'ємо множину $x > 0$, $x = 1$, на два проміжки: $(0; 1)$ і $(1; +\infty)$.

Перепишемо початкове рівняння у вигляді $x^3 - x = \sin \pi x$. На проміжку $(0; 1)$ функція $f(x) = x^3 - x$ приймає тільки від'ємні значення, оскільки $x^3 < x$, а функція $f(x) = \sin \pi x$ тільки додатні. Бачимо, що на цьому проміжку рівняння не буде мати розв'язків.

Зазначимо, що для значень x з проміжку $(1; +\infty)$ функція $f(x) = x^3 - x$ приймає додатні значення, а функція $g(x) = \sin \pi x$ має значення різних знаків. Зокрема, на проміжку $(1; 2]$ функція $g(x) = \sin(\pi x)$ є від'ємною.

Отже, на проміжку $(1; 2]$ вихідне рівняння не має розв'язків. Якщо $x > 2$, то $|\sin(\pi x)| \leq 1$, і $x^3 - x - x(x^2 - 1) > 2 \cdot 3 - 6$. Це означає, що на проміжку $(1; +\infty)$ рівняння також не має розв'язків. Отже, лише значення $x = -1$, $x = 0$ і $x = 1$ є розв'язками вихідного рівняння.

Відповідь: $\{-1; 0; 1\}$

2.3. Використання області визначення

Нехай маємо рівняння $f(x) = g(x)$, область допустимих значень (ОДЗ) визначається як спільна область визначення функцій $f(x)$ і $g(x)$. Кожен корінь рівняння знаходиться у області визначення обох функцій, що гарантує його включення до ОДЗ. Аналіз ОДЗ іноді дозволяє ефективно знаходити розв'язки рівнянь. [13]

Якщо ОДЗ рівняння складається з обмеженого набору значень, достатньо провести перевірку наявності коренів в цих конкретних точках. У випадку, коли ОДЗ порожня (не має жодного значення), можна визначити, що рівняння не має коренів. Тому перед фактичним розв'язанням рівняння важливо провести його аналіз, вивчаючи поведінку окремих членів рівняння для припустимих значень невідомої змінної.

Приклад 1.8. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x - 2 + x^2} = \sqrt{4 - 2x + x + 2}$

Розв'язання: Знайдемо ОДЗ

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 4 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Змінна x має лише одне допустиме значення – 2. Перевірка вказує, що $x = 2$ є коренем рівняння.

$$\begin{aligned}\sqrt{x-2+x^2} &= \sqrt{2-2+2^2} = 4 \\ \sqrt{4-2x+x+24} &= 4 = \sqrt{4-2 \cdot 2+2+2} = 4 \\ 4 &= 4.\end{aligned}$$

Отже, отримали корінь $x = 2$. Записуємо відповідь.

Відповідь: 2.

Приклад 1.9. Знайти розв'язок рівняння $\sqrt{x^2-1}+x=1+\sqrt{2-2x^2}$.

Розв'язання: Знайдемо ОДЗ

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 2 - 2x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned}x = 1 &- \text{корінь } (\sqrt{0} + 1 = 1 + \sqrt{0}, 1 = 1) \\ x = -1 &- \text{не корінь } (\sqrt{0} - 1 \neq 1 + \sqrt{0}, -1 \neq 1)\end{aligned}$$

Відповідь: 1.

Приклад 1.10. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x-3} = 5x + \sqrt{2-x}$

Розв'язання:

$$\text{ОДЗ } \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Таким чином, область допустимих значень для даного рівняння не містить жодних можливих значень, що підтверджує відсутність коренів у цьому рівнянні.

Відповідь. Розв'язків немає.

Приклад 1.11. Знайти розв'язки рівняння: $\sqrt{x-10-4x^2} = \sqrt[4]{4-2x}$

Розв'язання: Область допустимих значень

$$\begin{cases} x - 10 \geq 0 \\ 4 - 2x \geq 0 \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 2 \end{cases} \text{ не буде мати розв'язків.}$$

Відповідь: немає розв'язків.

2.4. Розв'язування рівнянь відносно параметра

Розв'язання рівнянь відносно параметра включає трактування константи, яка входить у рівняння, як параметра, і подальше знаходження розв'язків у відношенні до цього параметра [17].

Покажемо на конкретному рівнянні.

Приклад 1.12. [2]. Розв'язати рівняння $x^3 - (\sqrt{2} + 1)x^2 + 2 = 0$.

Нехай $\sqrt{2} = a$. Отримаємо $x^3 - (a + 1)x^2 + a^2$. Розглянемо розв'язання цього рівняння відносно введеного параметра a :

$$\begin{aligned}a^2 - x^2a + x^2 - x^2 &= 0, \\a^2 - x^2a + x(x^2 - x) &= 0, \\ \begin{cases} a = x \\ a = x^2 - x \end{cases}\end{aligned}$$

Маємо один корінь: $x = \sqrt{2}$. Будемо знаходити ще два корені: $x^2 - x = \sqrt{2}$. Можемо записати, що наступні числа будуть коренями даного рівняння:

$$\frac{1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}.$$

2.5. Використання виразу для відстані між двома точками на координатній прямій

Для знаходження коренів рівнянь, що включають змінну під знаком модуля, часто застосовують такі методи, як використання визначення модуля, піднесення обох сторін рівняння до квадрату, або метод інтервалів. Альтернативно, використовуючи формулу відстані між двома точками на координатній прямій, можна знаходити розв'язки цих рівнянь.

Можна побачити, що рівняння даного виду, а саме

$$|x - a| + |x - b| = c, \text{ де } c \geq 0,$$

якщо $|a - b| < c$ буде мати два корені. Відмітимо, що дані корені не потраплять в інтервал $[a; b]$. Якщо $|a - b| > c$, то рівняння має нескінченну

множину коренів, причому розв'язком є діапазон значень $[a; b]$. Якщо $|a - b| > c$, то у рівняння коренів немає. [12]

Приклад 1.13. Розглянемо таке рівняння $|x + 4| - |x - 2| = 5$.

Знаходимо на числовій прямій таку точку, відстань від якої до точки $x = -4$ та $x = 2$ має різницю, що дорівнює 5. Оскільки відстань між точками $x = -4$ і $x = 2$ становить 6, то точка, яку шукали, буде знаходитися посередині цього інтервалу (а саме $[-4; 2]$).



Рисунок 2.6

Нехай y - це відстань, тоді можемо отримати: $y - (6 - y) = 5$,
 $y = 5,5, \rightarrow x = 1,5$.

Відповідь: $\{1,5\}$.

Якщо ми будемо порівнювати відстані на числовій прямій, то можемо легко встановити, що рівняння поданого виду $|x - a| + |x - b| = c$ має один розв'язок, якщо $|a - b| > |c|$; точка, яку шукаємо, буде в інтервалі $(a; b)$. Якщо $|a - b| = |c|$, то рівняння має нескінченну множину коренів. Якщо $|a - b| < |c|$, то рівняння коренів не має.

У випадках, коли коефіцієнти перед x не дорівнюють одиниці, можна винести їх за знак модуля, а після цього використовувати вищеописаний метод для розв'язання рівнянь.[19]

Приклад 1.14. Розв'язати рівняння $|2x - 10| - |8x - 24| = 0$.

Виконаємо перетворення під знаком модуля, отримаємо

$$2|x - 5| - 8|x - 3| = 0;$$

$$|x - 5| - 4|x - 3| = 0;$$

$$|x - 5| = 4|x - 3|;$$

Треба знайти такі точки на числовій прямій, відстань яких до точки $x = 3$ становлять четвертину відстані, порівняно з відстанню від точки $x = 5$.

1) Нехай шукана точка знаходиться поза інтервалом $[3; 5]$ зліва від точки $x = 3$ на відстані y , тоді маємо рівняння $4y = y + 2$, $y = \frac{2}{3}$, тобто $x = 2\frac{1}{3}$.

2) Припустимо, що точка, яку будемо знаходити, міститься в проміжку $[3; 5]$ на деякій відстані k від точки 3. Можемо записати наступне : $4k = 2 - k$, відповідно $k = \frac{2}{5}$, а $x = 3\frac{2}{5}$.

3) За межами інтервалу праворуч від $x = 5$ рівняння не буде мати корені.

Відповідь: $\{2\frac{1}{3}; 3\frac{2}{5}\}$.

Приклад 1.15. [5]. Розв'язати рівняння $|x + 5| + |x - 8| = 16$.

Розв'язання: можемо знайти такі точки на числовій прямій, що сума відстаней яких від точок $x = -5$ і $x = 8$ буде 16. Позначаємо відстань, на якій буде знаходитися точка, лівіше розташована від точки $x = -5$, через y та отримаємо рівняння, що нам допоможе: $y + (y + 13) = 16$ або $y = 1,5$ тобто $x_1 = -6,5$



Рисунок 2.9

В інтервалі $[-5; 8]$ не буде точок, що задовольняють розв'язку рівняння. Праворуч від точки $x_1 = 8$ (відстань $= 1,5$), знаходиться друга точка, що задовольняє рівняння: $x_2 = 9,5$

Відповідь: $\{-6,5; 9,5\}$.

Завдяки числовій прямій ми встановимо, що подібні до наведеного рівняння, а саме $|x - a| + |x - b| = c$, де $c \geq 0$, якщо $|a - b| < c$ мають 2 корені, і ці корені будуть знаходитись поза інтервалом $[a; b]$. Якщо $|a - b| = c$ - то рівняння буде мати нескінченну множину коренів і розв'язком буде інтервал $[a; b]$. Якщо $|a - b| > c$ - рівняння коренів не має.

Якщо ми порівнюємо відстань між точками на числовій прямій, то зможемо легко визначити, що рівняння у наведеному вигляді $|x - a| - |x - b| = c$ матиме один розв'язок. У випадку, коли $|a - b| > |c|$, точка буде знаходитися всередині інтервалу $(a; b)$. Якщо $|a - b| = |c|$, то рівняння буде мати нескінченну множину коренів. А якщо $|a - b| < |c|$, то рівняння не має коренів.

Коли коефіцієнти при x відрізняються від одиниці, їх можна «витягти» за знак модуля, а потім вирішувати рівняння за методом, описаним раніше.

Таким чином, при вирішенні рівнянь зі змінною, що знаходиться під знаком модуля, вже на початковому етапі, формуючи важливе допоміжне рівняння, ми зазначаємо, в яких інтервалах слід шукати корені та скільки коренів має відповідне рівняння.

Приклад 1.16. [11]. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 3.$$

Розв'язання: рівняння можна переписати так

$$|x - 1| + |x + 2| = 3$$

Так як $|-2 - 1| = 3$, бачимо, що розв'язком даного рівняння буде весь інтервал $[-2; 1]$.

Таким чином, при розв'язанні рівнянь зі змінною під знаком модуля вже на початковому етапі, шляхом створення допоміжного рівняння, ми перед самим вирішенням рівняння визначаємо проміжки, де слід шукати корені, і кількість коренів у даному рівнянні [11].

2.6. Використання графіків функцій

Один із методів знаходження розв'язків рівнянь полягає у їх графічному аналізі.

Суть цього методу полягає в тому, що ліву і праву частини рівняння розглядають, як функції. Будують графіки заданих функцій в одній системі координат і знаходять абсциси точок перетину.

Використання графіків при розв'язуванні рівнянь дає наочне уявлення про кількість коренів рівняння, а в деяких випадках допомагає швидко і раціонально знайти його розв'язки [19].

Дослідимо ефективність даного способу при розв'язуванні різних типів рівнянь.

Приклад 1.17. Розв'язати рівняння $5 - 2|x| = x^2 - \frac{6}{x}$.

Розв'язання: Можна записати рівняння, перетворивши його:

$$|x|^2 + 2|x| - 5 = \frac{6}{x},$$

$$(|x| + 1)^2 - 6 = \frac{6}{x}.$$

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій:

$$f(x) = (|x| + 1)^2 - 6 \text{ і } g(x) = \frac{6}{x}.$$

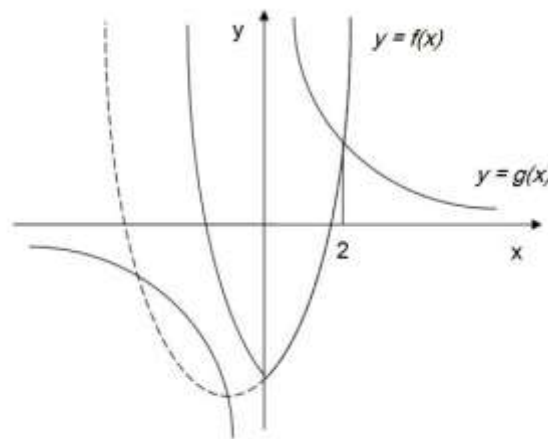


Рисунок 2.7

Відповідь: 2.

Приклад 1.18. Скільки коренів має рівняння $|x^2 - 4|x|| = a$ залежно від значення параметра?

Розв'язання:

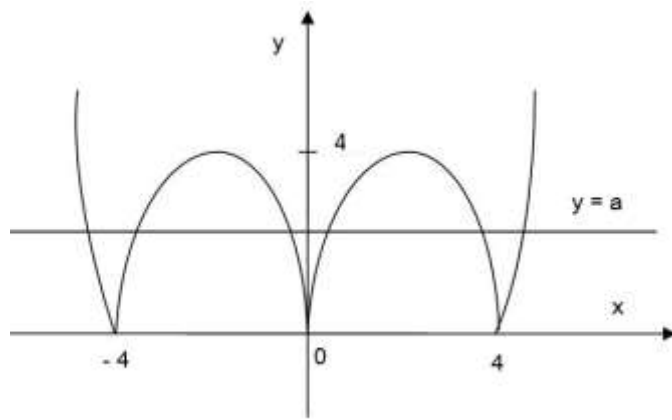


Рисунок 2.8

Відповідь: при $a < 0$ рівняння не має коренів; при $a = 0$ – 3 корені; при $0 < a < 4$ – 6 коренів; при $a = 4$ – 4 корені; при $a > 4$ – 2 корені.

Отже, графічний метод є особливо ефективним при якісному аналізі рівняння, коли потрібно визначити існування коренів або їх кількість. Перевагою цього способу є наочність, недоліком – неточність [12].

2.7. Рівняння, що містить нескінченну кількість квадратних коренів

Теорема Вейерштрасса стверджує, що якщо монотонна послідовність обмежена, то у неї існує границя. Спробуємо розглянути, як ця теорема може бути використана для вирішення рівнянь з нескінченною кількістю квадратних коренів [12].

Приклад 1.19. Розв'язати розв'язання.

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 7$$

Можемо піднести до другого степеня ліву і праву частини рівності і отримаємо:

$$x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 49$$

Оскільки другий доданок ідентичний лівій частині вихідного рівняння, то $x + 7 = 49$; $x = 42$.

Відповідь: 42.

Приклад 1.20. Розв'язати розв'язання.

$$\sqrt{1 + \sqrt{x + \sqrt{1 + \sqrt{x + \sqrt{1 + \sqrt{x + \dots}}}}} = 3.$$

Піднесемо обидві сторони рівності до квадрата, ми отримаємо

$$1 + \sqrt{x + \sqrt{1 + \sqrt{x + \sqrt{1 + \sqrt{x + \dots}}}}} = 9;$$

$$\sqrt{x + \sqrt{1 + \sqrt{x + \sqrt{1 + \sqrt{x + \dots}}}}} = 8;$$

Проведемо ще одне підняття до квадрату:

$$x + \sqrt{1 + \sqrt{x + \sqrt{1 + \sqrt{x + \dots}}}}} = 64$$

Один з доданків дорівнює 3, і це дозволяє нам знайти корінь x :

$$x + 3 = 64, \quad x = 61.$$

Також є можливість провести чергування коренів різного порядку. У якості прикладів розглянемо розв'язання наступного рівняння:[12]

Приклад 1.21. [11]. Розв'язати розв'язання.

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt{x + \sqrt[3]{1 + \sqrt{x + \dots}}}}} = 2,$$

$$1 + \sqrt{x + \sqrt[3]{1 + \sqrt{x + \dots}}}}} = 8,$$

$$x + \sqrt[3]{1 + \sqrt{x + \dots}}}}} = 49,$$

$$x + 2 = 49, \quad x = 47$$

Відповідь: $x = 47$.

2.8. Множення рівняння на функцію

Множення рівняння на функцію – один із штучних способів розв’язання алгебраїчних рівнянь. Іноді розв’язування рівняння істотно полегшується, якщо помножити обидві його частини на деяку функцію – многочлен від невідомої. При цьому треба пам’ятати, що можлива поява зайвого кореня – кореня многочлена, на який множили рівняння. Тому треба або множити на многочлен, який не має кореня, і отримати рівносильне рівняння, або множити на многочлен, що має корінь і тоді кожен з таких коренів треба обов’язково підставити у вихідне рівняння і встановити, чи є це число його коренем.

Приклад 1.22. [21]. Розв’язати рівняння

$$x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

Розв’язання. Помноживши обидві частини рівняння на многочлен $x^2 + 1$, який не має коренів, отримаємо рівняння.

$$(x^2 + 1)(x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0)$$

рівносильне вихідному рівнянню. Останнє рівняння можна записати у вигляді:

$$x^{10} = 0.$$

Зрозуміло, що таке рівняння не має дійсних коренів, тому і вихідне рівняння їх не має.

Відповідь: немає розв’язків.

Приклад 1.23. [21]. Розв’язати рівняння:

$$6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0.$$

Розв’язання: Помноживши обидві частини рівняння на многочлен $x + \frac{1}{2}$, отримаємо рівняння:

$$6x^4 + 2x^3 - \frac{41}{2}x^2 + 2x + 6 = 0.$$

що є наслідком попереднього рівняння, так як останнє рівняння має корінь $x = -\frac{1}{2}$, що не є коренем рівняння в умові.

Останнє рівняння є симетричним рівнянням четвертого степеня. Оскільки $x = 0$ не є коренем цього рівняння, то, розділивши обидві його частини на $2x^2$ та перегрупувавши його члени, отримаємо рівняння

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{41}{4} = 0,$$

яке буде рівносильним рівнянням. Позначивши $y = x + \frac{1}{x}$, перепишемо останнє рівняння у вигляді

$$3y^2 + y - \frac{65}{4} = 0.$$

Це рівняння має два корені: $y_1 = \frac{-5}{2}$ та $y_2 = \frac{13}{6}$. Тому рівняння $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{41}{4} = 0$ рівносильне сукупності рівнянь

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6} \\ x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Коренями сукупності є числа

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = -\frac{1}{2}.$$

Так як корінь $x_4 = -\frac{1}{2}$ є коренем рівняння $x + \frac{1}{x} = 0$, то звідси отримуємо, що вихідне рівняння має три кореня: x_1, x_2, x_3

Відповідь: $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = -2$.

2.9. Вгадування кореня рівняння

Вгадування кореня рівняння – це ще один штучний метод розв’язання рівнянь. Іноді зовнішній вигляд рівняння підказує, яке число є його коренем. розкриємо алгоритм розв’язання рівнянь методом вгадування кореня:

1. Методом підбору визначити корінь рівняння.
2. Визначити ОДЗ рівняння.
3. Привести многочлен до стандартного вигляду.
4. Визначити інші корені рівняння.

Приклад 1.24. [17]. Розв'язати рівняння:

$$x^3 + 3x - 12^3 - 3 \cdot 12 = 0$$

1. Методом підбору визначимо корінь рівняння: $x = 12$

2. Розкладемо многочлен на множники,

$$\begin{aligned} x^3 + 3x - (12^3 + 3 \cdot 12) &= (x^3 - 12^3) + 3(x - 12) \\ &= (x - 12)(x^2 + 12x + 12^2 + 3) = (x - 12)(x^2 - 12x + 147). \end{aligned}$$

3. Знайдемо інші корені:

$$x^2 - 12x + 147 = 0,$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 147 = -444 < 0,$$

Отже, $x = 12$ – єдиний корінь рівняння

Відповідь: 12.

РОЗДІЛ 2. НЕСТАНДАРТНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Головною метою вивчення даної теми є опанування методів розв'язування нерівностей, які є математичним інструментарієм для вирішення різноманітних завдань з природничих наук та інших галузей знань. Зміст матеріалу спрямований на розвиток різноманітних когнітивних процесів, математичного мовлення, навичок навчання, алгоритмічного та абстрактного мислення, на стимулювання творчої активності.

2.1 Нерівності з параметрами

Приклад 2.1. Розв'язати нерівність $ax^2 - 2x + 4 > 0$.

Розв'язання. Прирівнюючи до нуля коефіцієнт при x^2 і дискримінант квадратного тричлена $ax^2 - 2x + 4$, знаходимо перше контрольне значення параметра $a = 0$ і друге контрольне значення $a = \frac{1}{4}$ (зауважимо, якщо $a > \frac{1}{4}$, то $D < 0$, і, якщо $a \leq \frac{1}{4}$, тоді $D \geq 0$). Розв'яжемо нерівність у кожному з наступних чотирьох випадків:

$$a > \frac{1}{4}; 0 < a \leq \frac{1}{4}; a = 0; a < 0.$$

1) Якщо $a > \frac{1}{4}$, то тричлен $x^2 - 2x + 4$ має від'ємний дискримінант і додатній старший коефіцієнт. Отже, тричлен додатній за будь-яких x , тобто розв'язком нерівності у даному випадку є множина всіх дійсних чисел.

2) Якщо $0 < a \leq \frac{1}{4}$, то тричлен $x^2 - 2x + 4$ має наступні корені:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{a},$$

$$\text{причому } \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{a} \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{a}.$$

Отже, розв'язком нерівності є наступна сукупність:

$$x < \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{a}; x > \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{a}.$$

3) Якщо $a = 0$, то нерівність приймає вигляд: $-2x + 4 > 0$, звідки отримуємо $x < 2$

4) Якщо $a < 0$, то маємо $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$,

Отже, у цьому випадку рішенням нерівності є така система:

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{a} < x < \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{a}.$$

Відповідь: 1) якщо $a > \frac{1}{4}$, то $-\infty < x < +\infty$;

2) якщо $0 < a \leq \frac{1}{4}$, то $x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}; \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$;

3) якщо $a = 0$, то $x < 2$;

4) $a < 0$, то $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$. [11]

Приклад 2.2. Знайти всі значення параметру a , при яких нерівність $(x - 2 + 3a)(x - 2a + 3) < 0$ виконується для всіх x , що належать відрізку $[2; 3]$.

Розв'язок: Дану нерівність можемо переписати у вигляді $(x - x_1)(x - x_2) < 0$, де $x_1 = 2 - 3a$, $x_2 = 2a - 3$. Розв'язав її, отримуємо: $x_1 < x < x_2$ (якщо $x_1 < x_2$) або $x_2 < x < x_1$ (якщо $x_2 < x_1$); якщо $x_1 = x_2$, то розв'язків немає.

Таким чином, розв'язком вихідної нерівності служить або інтервал $(2a - 3; 2 - 3a)$, або інтервал $(2 - 3a; 2a - 3)$:

З умови завдання слідує, що всі точки з відрізка $[2; 3]$ повинні задовольняти заданій нерівності, а це виконуватиметься тоді і тільки тоді, коли точки з координатами 2 і 3 лежать всередині інтервалу $(x_1; x_2)$ або $(x_2; x_1)$, тобто коли $2a - 3 < 2 < 3 < 2 - 3a$ або коли $2 - 3a < 2 < 3 < 2a - 3$.

З системи нерівностей $2a - 3 < 2 < 3 < 2 - 3a$ отримаємо

$$\begin{cases} 2a - 3 < 2 \\ 2 - 3a > 3 \end{cases}$$

звідки ми знаходимо, що $a < -\frac{1}{3}$.

Система нерівностей $2 - 3a < 2 < 3 < 2a - 3$ рівносильна системі

$$\begin{cases} 2a - 3 < 2 \\ 2 - 3 > 3 \end{cases}, \text{ звідки ми знаходимо, що } a > 3.$$

Отже, задана нерівність виконується для всіх $x \in [2; 3]$, коли $a < -\frac{1}{3}$, або $a > 3$ [11].

2.2. Ірраціональні нерівності

При розв'язанні ірраціональних нерівностей використовуються подані нижче теореми [11], [12].

Теорема 1. Нерівність вигляду $\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Теорема 2. Нерівність вигляду $\sqrt[n]{f(x)} \geq \sqrt[n]{g(x)}$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Теорема 3. Нерівність вигляду $\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)}$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Теорема 4. Нерівність вигляду $\sqrt[n]{f(x)} \leq \sqrt[n]{g(x)}$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Теорема 5. Нерівність вигляду $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^{2n} \\ g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Теорема 6. Нерівність вигляду $\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) \leq (g(x))^{2n} \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Теорема 7. Нерівність вигляду $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ рівносильна системі

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^{2n} \end{cases} \end{array} \right.$$

Теорема 8. Нерівність вигляду $\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x)$ рівносильна системі

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^{2n} \end{cases} \end{array} \right.$$

При розв'язуванні ірраціональних нерівностей використовують ті ж самі прийоми, що і при розв'язанні ірраціональних рівнянь: піднесення обох частин нерівності до одного і того ж натурального степеня, введення нових (допоміжних) змінних і т. п. Знайти розв'язок можна, дотримуючись, наприклад, такого плану:

- 1) Знайти область визначення заданої нерівності.
- 2) Керуючись пропозиціями про рівносильні нерівності, розв'язати задану нерівність.
- 3) Із знайдених розв'язків відібрати значення змінної, які належать області визначення заданої нерівності.

Приклад 2.3. Розв'яжемо нерівність $\sqrt{5x-4} < x$.

- 1) Область визначення нерівності: $x \geq \frac{4}{5}$.
- 2) Так як на множині $x \geq \frac{4}{5}$ обидві частини нерівності невід'ємні, то при піднесенні обох частин нерівності до другого степеня отримаємо $5x-4 < x^2$, або $x^2-5x+4 > 0$. Ця нерівність рівносильна нерівності в області визначення. З останнього запису нерівності знайдемо $x < 1$; $x > 4$.
- 3) Із знайденої сукупності $x < 1$; $x > 4$ розв'язками нерівності будуть лише ті значення x , які належать області визначення вихідної нерівності, а саме значення x , які є розв'язком наступної системи:

$$\begin{cases} x < 1; x > 4 \\ x \geq \frac{4}{5} \end{cases}.$$

Знаходимо, що $x > 4$ – розв’язок нерівності.

Приклад 2.4. Розв’язати нерівність:

$$\sqrt{x+2} < x + \frac{1}{2}.$$

Розв’язання.

1) Область визначення нерівності : $x \geq -2$.

2) На множині $x \geq -2$ ліва частина нерівності невід’ємна, а права може приймати як невід’ємні, так і від’ємні значення. Тому необхідно розглянути два випадки: $x + \frac{1}{2} \geq 0$ і $x + \frac{1}{2} < 0$. У першому випадку можна обидві частини вихідної нерівності піднести до другого степеня (отримаємо рівносильну нерівність), а в другому цього робити не можна і не треба, так як чітко бачимо, що при $x + \frac{1}{2} < 0$ маємо, що ліва частина вихідної нерівності невід’ємна, а права від’ємна, а це суперечить умові нерівності. Тобто, у другому випадку нерівність не буде мати розв’язків. Маємо нерівність, яка рівносильна у своїй області визначення наступній системі:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2} \geq 0 \\ (\sqrt{x+2})^2 < \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

З цієї системи знайдемо $x > \frac{\sqrt{7}}{2}$

3) Залишається з розв’язків $x > \frac{\sqrt{7}}{2}$ відібрати значення x , які належать множині $x \geq -2$, тобто розв’язати систему нерівностей

$$\begin{cases} x > \frac{\sqrt{7}}{2} \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Отримаємо, що розв’язок нерівності: $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}; +\infty\right)$.

Приклад 2.5. Розв’язати нерівність

$$\sqrt{x+2} > x + \frac{1}{2}.$$

Розв’язання:

1) Область визначення нерівності: $x \geq -2$.

2) Як і в попередньому прикладі, треба розглянути два можливих випадки: $x + \frac{1}{2} \geq 0$ і $x + \frac{1}{2} < 0$.

Але зараз у другому випадку нерівність виконується при всіх x з області визначення (невід'ємне число в лівій частині нерівності більше від'ємного числа у правій частині нерівності).

Таким чином, вихідна нерівність рівносильна у своїй області визначення у сукупності:

$$\left[\begin{cases} x + \frac{1}{2} \geq 0 \\ \left(\sqrt{x+2} \right)^2 > \left(x + \frac{1}{2} \right)^2, \\ x + \frac{1}{2} < 0 \end{cases} \right.$$

З першої системи знайдемо $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{\sqrt{7}}{2}$, а з нерівності $x + \frac{1}{2} < 0$ отримаємо $x < -\frac{1}{2}$. Поєднавши ці значення x , отримаємо $x < \frac{\sqrt{7}}{2}$.

3) Залишається розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} x > \frac{\sqrt{7}}{2} \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Отримаємо, що $\left[-2; \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ розв'язок нерівності.

Зауваження. При отриманні певних навичок розв'язання ірраціональних нерівностей можна не розподіляти розв'язок на три етапи, а відразу зводити дану нерівність до систем більш простих нерівностей. Так, нерівність (приклад 2.4) можна замінити рівносильною йому системою

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x + \frac{1}{2} > 0 \\ x + 2 < \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 \end{cases}$$

а нерівність $\sqrt{x+2} > x + \frac{1}{2}$ (приклад 2.5) – сукупність систем

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x + \frac{1}{2} > 0 \\ x + 2 < \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \text{ i } \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x + \frac{1}{2} < 0 \end{cases}$$

2.3. Нерівності вигляду $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} > 0$, $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} < 0$

Кожна з нерівностей $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} > 0$, $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} < 0$ рівносильна системі раціональних нерівностей ([11], [12]):

$$\begin{aligned} f(x)\sqrt{g(x)} > 0 &\leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} & \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} > 0 &\leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \\ f(x)\sqrt{g(x)} \geq 0 &\leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) = 0 \\ x \in D(f) \end{cases} & \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} \geq 0 &\leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ f(x)\sqrt{g(x)} < 0 &\leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases} & \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} < 0 &\leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases} \\ f(x)\sqrt{g(x)} \leq 0 &\leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq 0 \\ g(x) = 0 \\ x \in D(f) \end{cases} & \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} \leq 0 &\leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \leq 0 \end{cases} \\ \frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)} > 0 &\leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} & \frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)} < 0 &\leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases} \\ \frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)} \geq 0 &\leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) = 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases} & \frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)} \leq 0 &\leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < 0 \\ g(x) = 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Приклад 2.7. Розв'язати нерівність

$$(x - 10)\sqrt{x - 4} \leq 0.$$

За рівносильністю маємо:

$$(x - 10)\sqrt{x - 4} \leq 0 \leftrightarrow \begin{cases} x - 10 \leq 0 \\ x - 4 \geq 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \leq 10 \\ x \geq 4 \\ x = 4 \end{cases} \leftrightarrow 4 \leq x \leq 10.$$

Відповідь: $x \in [4; 10]$.

Приклад 2.8. Розв'язати нерівність

$$(x + 10)\sqrt{x - 4} \leq 0.$$

Вираз $\sqrt{x - 4} \geq 0$ при $x \in \text{ОДЗ}$, отже,

$$(x + 10)\sqrt{x - 4} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 10 \leq 0 \\ x - 4 \geq 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -10 \\ x \geq 4 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

Відповідь: $x = 4$.

Приклад 2.9. Розв'язати нерівність

$$(x + 1)\sqrt{(x + 4)}\sqrt{x + 7} < 0$$

Вирази $\sqrt{x + 4} \geq 0$, $\sqrt{x + 7} \geq 0$ за умови існування радикалів, отже,

$$(x + 1)\sqrt{(x + 4)}\sqrt{x + 7} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 < 0 \\ x + 4 > 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > -4 \\ x > -7 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x < -1.$$

Відповідь: $x \in [-4; -1]$

Приклад 2.10. Розв'язати нерівність

$$(x + 2)\sqrt{(4 - x)(5 - x)} \geq 0.$$

$$(x + 2)\sqrt{(4 - x)(5 - x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ (4 - x)(5 - x) \geq 0 \\ (4 - x)(5 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 4 \\ x \geq 5 \\ x = 4, x = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 4 \\ x \geq 5 \end{cases}$$

Відповідь: $x \in [-2; 4] \cup [5; \infty)$.

Приклад 2.11. Розв'язати нерівність

$$(x^2 + 3x - 10)\sqrt{2x^2 + 5x + 2} \geq 0.$$

За рівносильністю маємо:

$$(x^2 + 3x - 10)\sqrt{2x^2 + 5x + 2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 10 \geq 0 \\ 2x^2 + 5x + 2 \geq 0 \\ 2x^2 + 5x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ x \geq 2 \\ x \leq -2 \\ x \geq -0,5, \\ x = -2, x = -0,5 \end{cases}.$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -5] \cup \{-2; -0,5\} \cup [2; \infty)$.

Приклад 2.12. Розв'язати нерівність

$$\frac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 - x - 12}} < 0.$$

За рівносильністю маємо:

$$\frac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 - x - 12}} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 25 < 0 \\ x^2 - x - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 5 \\ x < -3, x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < -3 \\ 4 < x < 5 \end{cases}.$$

Відповідь: $x \in (-5; -3] \cup (4; 5)$.

Приклад 2.13. Розв'язати нерівність

$$\frac{\sqrt{17 - 15x - 2x^2}}{x + 3} \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{17 - 15x - 2x^2}}{x + 3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 > 0 \\ 17 - 15x - 2x^2 \geq 0 \\ 17 - 15x - 2x^2 = 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ -8,5 \leq x \leq 1 \\ x = -8,5, x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x = -8,5; x = 1 \end{cases}.$$

Відповідь: $x \in \{-8,5\} \cup (-3; 1]$.

2.4. Метод заміни розв'язування ірраціональних нерівностей

При розв'язанні ірраціональних нерівностей використовують ті ж самі методи, що і при розв'язанні ірраціональних рівнянь: піднесення обох частин нерівності до одного і того ж натурального степеню, введення нових (допоміжних) змінних і т. д. Здійснювати розв'язок можна, дотримуючись, наприклад, наступного плану:

- 1) Знайти область визначення заданої нерівності.
- 2) Керуючись пропозицією про рівносильність нерівностей, розв'язати задану нерівність.
- 3) Із знайдених розв'язків вибрати значення змінної, які належать області визначення заданої нерівності.

Приклади 2.14. Розв'язати нерівність:

$$-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \geq 0.$$

ОДЗ: $x \geq 0$

Введемо заміну $\sqrt[4]{x} = t$, $t \geq 0$ і розв'яжемо квадратичну нерівність $t^2 - 9t + 18 \geq 0$. Враховуючи умову $t \geq 0$, отримаємо сукупність

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 3 \\ t \geq 6 \end{cases}.$$

Повертаючись до змінної x , маємо

$$\begin{cases} 0 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3 \\ \sqrt[4]{x} \geq 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 81 \\ x \geq 1296 \end{cases}.$$

Відповідь: $x \in [0; 81] \cup [1296; \infty)$. [12]

Приклади 2.15. Розв'язати нерівність:

$$\sqrt{\frac{4x}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{4x}} > \frac{3}{2}.$$

Введемо заміну $\sqrt{\frac{4x}{x-1}} = t$, $t > 0$, тоді отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} t > 0 \\ t - \frac{1}{t} > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ 2t^2 - 3t - 2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t > -\frac{1}{2} \\ t > 2 \end{cases} \rightarrow t > 2.$$

Повертаючись до змінної x , маємо

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4x}{x-1}} > 2 &\Leftrightarrow \frac{4x}{x-1} > 4 \Leftrightarrow \frac{4x}{x-1} - 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x-1} > 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

Відповідь: $x \in (1; \infty)$.

Приклади 2.16. Розв'язати нерівність:

$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} + \sqrt{x^2 - 5x + 20} \geq 4$$

Нехай $x^2 - 5x + 4 = t$, $t \geq 0$. Тоді $x^2 - 5x + 20 = t + 16$. Дана нерівність набуває вигляду $\sqrt{t} + \sqrt{t+16} \geq 4$. Домовимось, що при $t \geq 0$ можна записати дві наступні нерівності: $\sqrt{t} \geq 0$ та $\sqrt{t+16} \geq 4$. Маємо, що при $t \geq 0$ ліва частина буде більшою або дорівнювати 4 – усі існуючі розв'язки нерівності відповідають $t \geq 0$. Якщо повернемося до x , отримаємо:

$$x^2 - 5x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 4 \end{cases}.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Голубев В. И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. М. : ИЛЕКСА, 2007. 252 с.
2. Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами. К. : РІА «Текст»; МП «ОКО», 1992. 290 с.
3. Егеров В. К., Зайцев В. В. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы. Мінськ : Вища школа, 1990. 312 с.
4. Иванов О. А. Практикум по элементарной математике: Алгебро-аналитические методы: науч. пособ. М. : МЦНМО, 2001. 116 с.
5. Ивлев Б. М., Абрамов А. М., Дудницин Ю. П., Швардцбург С. И. Задачи повышенной сложности по алгебре и началам анализа: учеб. пособие. М. : Просвещение, 1990. 48 с.
6. Ковалева Г. И., Конкина Є. В. функциональные методы решений уравнений и неравенств М. : Чистые пруды, 2008. 32 с.
7. Кольман Е. Я. История математики в древности. М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 235 с.
8. Коростіянець Т. П. Нерівності в шкільному курсі математики: Методичні рекомендації для організації дистанційного навчання. Одеса : Університет Ушинського, 2023. 50 с.
9. Куланин Е. Д., Норин В. П., Федин С. Н., Шевченко Ю. А. 3000 конкурсных задач по математике: науч. пособ. 5-е изд., испр. М. : Айрис-пресс, 2003. 624 с.
10. Кушнир І. А. Математическая энциклопедия: для школьников, абитуриентов, преподавателей шк., лицеев, колледжей и вузов. К. : АСТАРТА, 1995. 768 с.
11. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. институтов. 3-е изд., перераб. и доп. М. : АБФ, 1995. 352 с.

12. Муранова Н. П., Харченко Л. А., Шевченко Г. В., Муранов О. С. Математика. Ірраціональні рівняння, нерівності та їх системи: практикум. 2-е вид., стер. К. : НАУ, 2012. 96 с.
13. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень. Харків : Гімназія, 2010. 416 с.
14. Рыбников К. А. Возникновение и развитие математической науки. М. : Просвещение, 1987. 159 с.
15. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник. 2-ге вид., доп. і переробл. Київ : Вища школа, 2006. 582 с.
16. Супрун В. П. Математика для старшеклассников: Учеб. пособие для учащихся, абитуриентов. М., 2009. 272 с.
17. Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. І. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: справочное издание. М. : Факториал, 1997. 219 с.
18. Творогова А. Ю., Трояновская Н. І. Некоторые нестандартные методы решения уравнений и неравенств // Юный ученый. 2021. № 6 (47). С. 51–56.
19. Титаренко О. М., Роганін О. М. Математика. Форсований курс: навч. посібник. Харків : Торсінг Плюс, 2011. 608 с.
20. Яковлева Л. В. Розв'язування рівнянь вищих степенів: методичний посібник. Умань : Поліграфічний центр "Візаві", 2009. 46 с.
21. Юшкевич А. П. История математики в средние века. М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 448 с.