МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКІ УКРАЇНИ

Державний заклад:

Південноукраїнський національний педагогічний університет

імені К.Д. Ушинського

Фізико-математичний факультет

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до практичних занять
з математичного аналізу

ТЕМА: « ЧИСЛОВІ РЯДИ »

Одеса - 2018

Укладачі:

Урум Г. Д. , к. техн. н., доцент кафедри вищої математики і статистики ПНПУ імені К. Д. Ушинського

Олефір О. І., к. ф.-м. н., старший викладач кафедри вищої математики і статистики ПНПУ імені К. Д. Ушинського

Рецензенти:

Третьяк О. І., доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої математики і статистики ПНПУ ім. К. Д. Ушинського

Васильєва Н. С. к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики ОДАБА

Рекомендовано до друку засіданням кафедри вищої математики і статистики ПНПУ імені К. Д. Ушинського

протокол № від « » _________ 2018 року

Ухвалено до друку радою ОПДПУ імені К. Д. Ушинського

протокол № від « » ____________ 2018 року

Зміст

ВСТУП

Методичні рекомендації до практичних занять з математичного аналізу на тему «Числові ряди» складено на основі галузевого стандарту підготовки бакалавра і навчального плану для студентів 2 курсу 014.04 Середня освіта (Математика) , ОС бакалавр, фізико-математичного факультету ПНПУ імені К. Д. Ушинського, які вивчають навчальну дисципліну «Математичний аналіз».

В курсі математичного аналізу ряди є потужним засобом вивчення функцій та сильним обчислювальним апаратом, який дозволяє знаходити їх значення, обчислювати інтеграли та розв'язувати інші прикладні задачі. В багатьох випадках точне виконання вказаних математичних операцій виявляється досить важким чи неможливим. У цих випадках можна одержати наближений розв'язок за допомогою рядів з будь-якою, достатньою для практичного використання, точністю. Ряди являють собою простий і довершений інструмент математичного аналізу, у тому числі, и для розв'язувань диференціальних рівнянь. Тому знайомство студентів з теорією рядів – обов'язкова частина математичної освіти.

Ряди відіграють значну роль не тільки в математиці, але і в економіці, інженерії, геодезії, хімії, фізиці, астрономії, біології, архітектурі, естетиці, теорії музики, криптографії тощо.

В сучасній строгій теорії рядів основними задачами є:

- визначення поняття суми нескінченої послідовності доданків;
- встановлення ознак, за якими можна судити, чи має даний ряд суму;
- виділення класів рядів, з якими можна поводитися як зі скінченими сумами;
- виведення формул, які дозволяють представити задані функції у вигляді сум рядів, що складаються з порівняно простих функцій;
- інші прикладні застосування рядів (наближене обчислення рядів, розв'язання диференціальних рівнянь, обчислення границь, обчислювання

визначених інтегралів тощо).

Студенти, які завершили вивчення даного курсу, мають уміти класифікувати тип ряду; знати основні властивості ряду, необхідні і достатні ознаки збіжності ряду при застосуванні до різних класів рядів, алгоритми розкладання функції в степеневий ряд; володіти практичними навичками застосування рядів до обчислення значень функцій, визначених інтегралів, розв'язання диференціальних рівнянь.

У результаті оволодіння даною темою студент повинен засвоїти основні теоретичні положення, вміти практично застосовувати отримані знання при розв'язанні задач.

Робота складається з теоретичного матеріалу, розв'язаних прикладів та прикладів для самостійної роботи.

1.Числовий ряд, його сума

Нехай дана деяка нескінченна послідовність чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Означення: Вираз виду $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **(1)** називають *числовим рядом.*

Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ називають *членами ряду*, a_n - n*-м членом ряду.*

Щоб задати ряд (1), досить задати функцію натурального аргументу $a_n = f(n)$ обчислення n – го члена ряду за його номером n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Суму n перших членів ряда (1) позначають через S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_n \qquad \textbf{(2)}$$

і називають *n-ою частинною сумою ряду.*

Означення: Якщо послідовність частинних сум S_n ряду збіжна і $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то число S називають *сумою цього ряду*, а ряд називають *збіжним*. Використовують символічний запис $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Якщо послідовність S_n скінченної границі не має, то ряд називають *розбіжним*.

Приклад 1. Дослідити на збіжність наступні числові ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^n$.

Розв'язання.

1) Розглянемо послідовність частинних сум даного ряду: $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0, \ldots, S_{2n-1} = 1$, $S_{2n} = 0, \ldots$. Ця послідовність границі не має, тому ряд розбіжний.

2) Запишемо n-й член ряду u_n у вигляді: $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Знайдемо n-у частинну суму даного ряду:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} ... + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... +$$

$$+\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, то ряд є збіжним і його сума дорівнює одиниці.

3) Даний ряд є сумою членів геометричної прогресії з першим членом a та знаменником q. При $q \neq 1$ сума n членів геометричної прогресії $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$. При $|q| < 1$ $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, оскільки у цьому випадку $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, тому ряд збіжний і його сума дорівнює $\frac{a}{1-q}$. При $q > 1$ $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$, тому $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ і ряд розбіжний. При $q < -1$ $\lim_{n\to\infty} q^n$ не існує, не існує також і границя $\lim_{n\to\infty} S_n$, ряд розбіжний. При $q = 1$ маємо ряд $a + a + a + ...$ з частинною сумою $S_n = na$. $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, тому у цьому випадку ряд розбіжний. При $q = -1$ маємо ряд $a - a + a - a + ...$. Тут при парному номері $n = 2k$ $S_n = S_{2k} = 0$, для непарного номера $n = 2k-1$ $S_n = S_{2k-1} = a$, тому границя $\lim_{n\to\infty} S_n$ не існує і ряд розбіжний.

Отже, ряд, що є сумою членів нескінченної геометричної прогресії, є збіжним при $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \geq 1$.

2. Основні властивості числових рядів

Основні властивості числових рядів сформулюємо у вигляді наступних теорем.

Теорема 1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний і має суму S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot u_n$ (α – стала) також збіжний і його сума дорівнює αS.

Теорема 2. Збіжні ряди можна почленно додавати та віднімати, тобто якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ є збіжними і мають суми відповідно S та σ, то збіжними є також ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm v_n$ і суми їх дорівнюють $S \pm \sigma$.

Теорема 3. На збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання до нього скінченної кількості членів.

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і позначимо $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ... = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$. Величину r_n називають n*-м залишком ряду*. Його можна розглядати як суму ряду, який утворюється з ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ після відкидання його перших n членів. Якщо ряд збіжний і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $r_n = S - S_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Справедливим є і наступне твердження.

Теорема 4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є збіжним (розбіжним) тоді і лише тоді, коли збіжним (розбіжним) є його n-й залишок.

Теорема 5. (Необхідна умова збіжності ряду). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є збіжним, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Теорема 6. (Достатня умова розбіжності ряду). Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ є розбіжним.

Приклад 2. Дослідити на збіжність наступні ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$.

Розв'язання.

1) Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ необхідна умова збіжності виконана, оскільки

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Отримали, що $S_n > \sqrt{n}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, тобто ряд є розбіжним.

2) Перевіримо виконання необхідної умови збіжності ряду. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2 \neq 0$, тому за теоремою 6 ряд є розбіжним.

3) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ є збіжним, оскільки це сума членів нескінченної геометричної прогресії, знаменник якої $q = \frac{1}{5}$, $|q| < 1$.

Як свідчить приклади, з виконання необхідної умови збіжності ряду ніякого висновку про його збіжність зробити не можна. Потрібне додаткове дослідження. Звичайно воно виконується з допомогою достатніх умов збіжності ряду.

3. Достатні умови збіжності знакододатних рядів

При дослідженні на збіжність знакододатних рядів, тобто рядів з невід'ємними членами, найчастіше використовують такі достатні умови, як ознаки порівняння, ознака Д'Аламбера, радикальна та інтегральна ознаки Коші.

Теорема 7. (Ознаки порівняння). Нехай задано ряди з невід'ємними членами: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \geq 0, \quad \forall n \in N$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $v_n \geq 0, \quad \forall n \in N$ і для всіх $\forall n \in N$ $u_n \leq v_n$. Тоді:

1) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (перша ознака порівняння);

2) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (друга ознака порівняння).

Зазначимо, що ознаки порівняння (теорему 7) можна застосовувати і тоді, коли нерівність $u_n \leq v_n$ виконується не для всіх членів рядів, що порівнюються, а починаючи з деякого номера N. Це випливає з теореми 3. При дослідженні рядів на збіжність за допомогою ознак порівняння використовують еталонні ряди, про збіжність чи розбіжність яких наперед відомо. У якості таких рядів найчастіше використовують суму нескінченної геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ та *ряд Діріхле* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ є збіжним при $|q| < 1$ і розбіжним при інших значеннях знаменника прогресії q. Ряд Діріхле збіжний при $\alpha > 1$, при $\alpha \leq 1$ він розбіжний. Ряд Діріхле називають також *узагальненим гармонічним рядом*.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln \ n+1}$.

Розв'язання.

1) Оскільки $\frac{1}{n\cdot 2^n}\le\frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ є збіжним (сума нескінченної геометричної прогресії, де $q=\frac{1}{2}$, $|q|<1$), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ за першою ознакою порівняння також є збіжним.

2) Оскільки $\ln x<x$ при $x>0$, то $\ln\left(n+1\right)<n+1$ і $\frac{1}{\ln\left(n+1\right)}>\frac{1}{n+1}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ є розбіжним (це гармонічний ряд з вилученим першим членом), тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln\left(n+1\right)}$ за другою ознакою порівняння також є розбіжним.

Теорема 8. **(Гранична ознака порівняння)**. Якщо задано два ряди з додатними членами: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, причому існує скінченна, відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=a$ ($a\ne 0$, $a\ne\infty$), то ці ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3+2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\ln n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^4+2n^2}{n^4+1}$

Розв'язання.

1) Застосуємо граничну ознаку порівняння. Нехай $u_n=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$, $v_n=\frac{1}{n}$.

Тоді $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}{1/\mathrm{n}}=\left\|\begin{array}{l}x=\frac{1}{n},\\ n\to\infty,\, x\to 0\end{array}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{tg\,\frac{\pi x}{2}}{x}=\left\|\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}kx}{x}=k\right\|=\frac{\pi}{2}\ne 0.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний (це гармонічний ряд), тому розбіжним є ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$.

2) Позначимо $u_n = \frac{2n+1}{n^3+2}$. Виберемо $v_n = \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ є збіжним, оскільки це ряд Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha = 2 > 1$. Знайдемо границю $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{n^3+2}}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+n^2}{n^3+2} = 2 \neq 0.$$

За граничною ознакою порівняння з збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, де $u_n = \frac{2n+1}{n^3+2}$.

3) Порівняння з гармонічним рядом за ознакою порівняння I тут нічого не дає, так як $\frac{1}{n+\ln n} < \frac{1}{n}$, і ніякого висновку про збіжність даного ряду зробити неможливо. Скористаємось ознакою порівняння II з тим же гармонічним рядом. Маємо $a_n = 1/(n+\ln n)$, $b_n = 1/n$, а значить

$$\lim_{n\leftrightarrow\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+\ln n)}{1/n} = \lim_{n\leftarrow\infty} \frac{1}{(\ln n/n)+1} = 1 \neq 0$$

4) Так як $\ln \frac{n^4+2n^2}{n^4+1} = \ln\left(1 + \frac{2n^2-1}{n^4+1}\right) \sim \frac{2n^2-1}{n^4+1} \sim \frac{2}{n^2}$

То даний ряд поводить себе (в сенсі збіжності) так, як і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$.

Останній збігається як узагальнений гармонічний з показником $p = 2 > 1$. Значить, збігається і даний ряд.

Теорема 9. (Ознака Д'Аламбера). Якщо для ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то:

1) ряд збіжний при $l<1$;
2) ряд розбіжний при $l>1$.
3) Зазначимо, що у випадку, коли $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. У цьому випадку ознаку Д'Аламбера застосувати не можна, потрібно використовувати інші ознаки.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n\cdot(2n)!!}$

Розв'язання.

1) Для даного ряду $u_n=\frac{n^3}{3^n}$, $u_{n+1}=\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^3}=\frac{(n+1)^3}{3n^3}$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{3n^3}=\frac{1}{3}<1$. Отже, за ознакою Д'Аламбера ряд збіжний.

2) Тут $u_n=\frac{n!}{5^n}$, $u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{n!}=\frac{n+1}{5}$. Оскільки границя $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{5}=\infty>1$, то за ознакою Д'Аламбера ряд розбіжний.

3) $u_n=\frac{n^n}{n!}$, $u_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Використаємо ознаку Д'Аламбера. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1=e>1.$$

Отже, ряд є розбіжним.

4) Застосуємо до даного ряду ознаку Даламбера, то $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$. Таким чином, ознака Даламбера відповіді не дає. Інтегральну ознаку Коші тут

застосувати досить важко, тому що загальний член ряду містить факторіали. Спробуємо застосувати ознаку порівняння І. Загальний член ряду має вигляд: $a_n = \frac{(2n-1)!!}{n(2n)!!} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{n\cdot 2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n}$.

Звеличивши у кожному множнику починаючи з другого чисельники й знаменники на одиницю та враховуючи , що $\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$ (оскільки $4n^2 - 1 < 4n^2$), отримуємо нерівність

$$a_n < \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\ldots\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{n^2\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)(2n+1)}{n\cdot 2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}} = \frac{1}{n^2 a_n (2n+1)}.$$

Так як $2n+1 > n$,то й $a_n < \frac{1}{n^3 a_n}$, звідки $a_n^2 < \frac{1}{n^3}$, й тоді $a_n < \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Але ряд з загальним членом $\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ збігається як гармонічний з показником $p = \frac{3}{2} > 1$. Значить, за ознакою порівняння І, збігається і даний ряд.

Теорема 10. **(Радикальна ознака Коші)**. Якщо для ряду з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ границя $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$, то цей ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^{2n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{n}$.

Розв'язання.

1) Загальний член ряду $u_n = \left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^{2n}$, тоді $\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^{2n\cdot\frac{1}{n}} = \left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^{2}$,

отже $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^{2} = 2^2 = 4 > 1$.

За радикальною ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^{2n}$ є розбіжним. Зауважимо, що розбіжність даного ряду нескладно встановити за допомогою необхідної умови збіжності ($\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, отже, ряд розбіжний.)

2) Для даного ряду $u_n = \sin^n \frac{\pi}{n}$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n} = 0 < 1$. За радикальною ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{n}$ є збіжним.

Теорема 11. (Інтегральна ознака Коші). Нехай задано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, члени якого є значеннями неперервної, додатної і монотонно спадної функції $f(x)$ на проміжку $[1;+\infty)$. Тоді цей ряд збіжний, якщо збіжним є невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$, і розбіжний, якщо цей інтеграл є розбіжним.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+5}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

Розв'язання.

1) Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Для цього візьмемо функцію $f(x) = \frac{2x}{x^2+5}$, $x \in [1;+\infty)$. Заданий ряд можна записати у вигляді: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+5} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty}\frac{2x}{x^2+5}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^{M}\frac{d(x^2+5)}{x^2+5}dx = \lim_{M\to+\infty}\ln(x^2+5)\Big|_1^M = +\infty.$$

Цей інтеграл є розбіжним, отже розбіжним є і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+5}$.

2) Застосовуючи інтегральну ознаку Коші, дослідимо на збіжність ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, $x \in [1;+\infty)$. Розглянемо відповідний невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\int_1^{+\infty}x^{-\alpha}dx=\lim_{M\to+\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Bigg|_1^M=\begin{cases}0, \alpha>1;\\ +\infty, \alpha<1.\end{cases}$$

Отже, ряд Діріхле збігається при $\alpha>1$ і він розбіжний при $\alpha<1$. При $\alpha=1$ інтеграл набуває вигляду: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{M\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^M=+\infty$.

Отже, при $\alpha=1$ ряд Діріхле є розбіжним. Таким чином, цей ряд збігається при $\alpha>1$ і є розбіжним при $\alpha\le1$.

Вправи для самостійної роботи:

І. Знайти суми наступних рядів:

1. $\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+....+\frac{2}{5^n}+...$

2. $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}+...$

3. $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)+...\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right)+...$

4. $\left(3+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{18}\right)+...+\left(\frac{3}{2^{n-1}}+\frac{(-1)^{n-1}}{2\cdot3^{n-1}}\right)+...$

5. $\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+...+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+...$

6. $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+...+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+...$

7. $\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{5\cdot7\cdot9}+...+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}+...$

8. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+...$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-8n-3}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{25n^2+5n-6}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{36n^2-24n-5}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{49n^2+7n-12}$

13 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n-3}$

15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-8n-15}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{26n^2+12n-35}$

17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+3)}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+5)}$

18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-n}{n(n+2)(n+3)}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n(n+1)(n+4)}$

II. Досліджувати наа збіжність ряди з ознакою Даламбера

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{(n+1)!}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}{1\cdot6\cdot11\ldots(5n-4)}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a^n}{n^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot5\ldots(4n-3)}{2\cdot6\ldots(4n-2)}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{3^n n!}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot7\cdot10\ldots(3n+4)}{2\cdot6\cdot10\ldots(4n+2)}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!(2{,}7)^{n+1}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(3n+4)^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{1\cdot4\cdot\ldots(3n+1)}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\ldots(a+(n-1))}{(2n-1)!!}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{2^n(n+1)!}$

14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+1}{2^{n+5}(n^2+1)}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!}$

19. $\sum n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n^2+1)^n}}{n\cdot2^{n/2}}$

III. Досліджувати наа збіжність ряди з ознакою Коши

1 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^n$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+2}\right)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^3}$

7. $\sum\left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n=1}\right)^{n^2+4n+5}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{(n+3)/2}}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n^2+3n+1}}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{(\ln(n+1))^{n/2}}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{n/2}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n/3}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$ 16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^{2}+1}{n^{2}+1}\right)^{n^{2}}$ 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^{n}(n+1)}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^{2}}}{n^{n^{2}}3^{n}}$. 19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{\ln^{n}(n+1)}$

IV. Скориставшись ознакою порівняння, дослідити на збіжність такі ряди:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{n}}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-\frac{n^{2}}{n+1}}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{4^{n}}$ 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{n}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4^{n}}\right)}{\sqrt[5]{2n^{5}-1}}$ 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{2}}$ 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\frac{\pi}{4n}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$ 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\left(\sqrt{2}+\sin\sqrt{n}\right)}{2^{n}+n}$

5. Знакозмінні ряди

Ряд називають *знакозмінним*, якщо серед його членів є як від'ємні, так і додатні. Знакочережні ряди є окремим випадком знакозмінних рядів.

Розглянемо довільний знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, де числа u_n можуть мати довільний знак. Поряд з цим розглянемо ряд, утворений з модулів членів цього ряду, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Для знакозмінних рядів справедлива наступна ознака збіжності.

Теорема 12. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ є збіжним, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

З цієї теореми випливає, що при дослідженні на збіжність знакозмінних рядів можна користуватися ознаками збіжності рядів з додатними членами.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}$.

Розв'язання.

Даний ряд є знакозмінним, оскільки знаки його членів залежать від знаку виразу $\cos n\alpha$. Складемо ряд з модулів членів заданого ряду. Отримуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{n^2}$. Оскільки $|\cos n\alpha| \le 1$ $\forall\, \alpha \in R,\ \forall\, n \in N$, то $\frac{|\cos n\alpha|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ є збіжним (це ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha = 2 > 1$), то за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{n^2}$ є збіжним. За теоремою 13 збіжним є і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}$.

Теорема 12 є лише достатньою, але не необхідною умовою збіжності знакозмінного ряду. Існують знакозмінні ряди, які є збіжними, проте ряди, складені з модулів їх членів, розбігаються. Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}^{n-1}$ за ознакою Лейбніца є збіжним, а ряд, складений з його модулів, тобто гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є класичним прикладом розбіжного ряду. У зв'язку з цим всі збіжні знакозмінні ряди можна розділити на абсолютно збіжні та умовно збіжні.

Означення. Знакозмінний ряд називають *абсолютно збіжним*, якщо збіжним є ряд, складений з модулів його членів.

Означення. Якщо знакозмінний ряд є збіжним, а ряд, складений з модулів його членів розбігається, то такий ряд називають *умовно збіжним*.

Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2}$ є абсолютно збіжним, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1^{\ n-1}}{n}$ – умовно збіжний.

Розмежування рядів на абсолютно та умовно збіжні є досить істотним. Абсолютно збіжні ряди мають важливі властивості скінченних сум, тоді як абсолютно збіжні ряди таких властивостей не мають. Зокрема, абсолютно збіжні ряди мають переставну властивість: будь-який ряд, утворений за допомогою перестановки членів абсолютно збіжного ряду, також є абсолютно збіжним і має ту ж суму, що й вихідний ряд. Умовно збіжні ряди такої властивості не мають: від перестановки їхніх членів може змінитися сума ряду і навіть утворитися розбіжний ряд.

Дослідження знакозмінного ряду на збіжність розпочинають, як правило, з дослідження ряду на абсолютну збіжність, тобто з дослідження на збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$

При цьому використовують ознаки збіжності рядів з невід'ємними членами. Якщо останній ряд збігається, то роблять висновок, що заданий ряд збігається абсолютно і дослідження завершене. Якщо ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ виявляється розбіжним, то дослідження продовжується, але уже безпосередньо ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Серед ознак збіжності знакозмінних рядів найбільш простою з точки зору перевірки її умов є ознака Лейбніца, але застосовна вона до рядів, у яких знаки змінюються почережно.

Ознака Лейбніца. Якщо послідовність додатних чисел (u_n) не зростаюча і нескінченно мала, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ збігається, причому $\forall n$ $|s_n - s| < u_{n+1}$ де $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}u_k$, $s -$сума ряду.

Зазначимо, що дослідження послідовності (u_n) на монотонність інколи значно спрощується, якщо можна побудувати функцію f таку, що $\forall n$ $f(n) = u_n$, і дослідити функцію $f'(x)$ на знак для достатньо великих x.

Зазначимо, також, що монотонність послідовності (u_n) може виконуватись не з першого члена, а починаючи з деякого номера n_0. Проте, якщо $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд збігається (відкидання скінченого числа членів ряду не впливає на його збіжність).

Наступні дві ознаки передбачають подання членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n$ у вигляді $\omega_n = u_n v_n$ і дослідження послідовності (u_n) і ряду $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$

Ознака Діріхле. Якщо послідовність (a_n) монотонна і нескінченно мала, а послідовність часткових сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ обмежена, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n u_n$ збігається.

Ознака Абеля. Якщо послідовність (a_n) монотонна і обмежена, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n u_n$ збігається.

Приклад 9. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{\ln n}{2^n}$ збігається абсолютно.

Розв'язання.

Заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{\ln n}{2^n}=0-\frac{\ln 1}{4}+\frac{\ln 3}{8}+\frac{\ln 4}{16}+\ldots$ є знакозмінним рядом.

До ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{\ln n}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2^n}$ застосуємо ознаку Даламбера.

Маємо $\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{2\ln n}=\frac{1}{2}$

Отже, ряд складений з абсолютних величин членів заданого ряду, збігається. Тому заданий ряд збігається абсолютно.

Приклад 10. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\cos^3 n\arccos\frac{n+1}{2n+1}arctg\frac{n+1}{n^3+2}$

абсолютно збіжний.

Розв'язання.

Очевидно, що заданий ряд знакозмінний, так як

($\cos 1>0, \cos 2<0, \cos 3<0, \cos 4<0, \cos 5>0, \ldots$).

Члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\cos^3 n\right|\arccos\frac{n+1}{2n+1}arctg\frac{n+1}{n^3+2}$ (*)

не перевищують відповідних членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arccos\frac{n+1}{2n+1}arctg\frac{n+1}{n^3+2} \qquad (**)$$

Останній ряд порівняємо із збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{3n^2}$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\arccos\frac{n+1}{2n+1}arctg\frac{n+1}{n^3+2}\div\frac{\pi}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\pi}\arccos\frac{n+1}{2n+1}\cdot\frac{arctg\frac{n+1}{n^3+2}}{\frac{n+1}{n^3+2}}\cdot\frac{n^3+n^2}{n^3+2}=1,$$

то ряд (**), а отже, і ряд (*) збігаються. Це й означає, що заданий ряд збігається абсолютно.

Приклад 11 . Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+4)}{n(2+\sqrt{n^2+3})}$ збігається умовно.

Розв'язання.

$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{n\left(2+\sqrt{n^2+3}\right)} = 0$. Проте ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n\left(2+\sqrt{n^2+3}\right)}$ розбігається, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається, а послідовності $\frac{n+4}{n(2+\sqrt{n^2+3})}$ і $\frac{1}{n}$ еквівалентні. Заданий ряд є рядом знаки якого почережно змінюються, а послідовність членів є нескінченно малою. Більше того, похідна функції

$$f(x)=\frac{x+4}{x(2+\sqrt{x^2+3})} \qquad f'(x)=-\frac{x^3+8x^2+8\sqrt{x^2+3}+12}{x^2(2+\sqrt{x^2+3})^2}$$

від'ємна для $x>0$. Звідси випливає, що ця функція, а отже, і послідовність $\frac{n+4}{n(2+\sqrt{n^2+3})}$ монотонно спадає. За ознакою Лейбніца заданий ряд збігається, причому умовно.

Приклад 12. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ умовно збіжний.

Розв'язання.

Спочатку доведемо, що даний ряд збігається. Послідовність часткових сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n$ подаємо у вигляді

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\cos k=\frac{1}{2\sin 1}\sum_{k=1}^{n}2\sin 1\cos k=\frac{1}{\sin 1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin 1}(\sin(n+\frac{1}{2})-\sin\frac{1}{2})=\frac{\cos\frac{n+1}{2}\sin\frac{n}{2}}{\sin 1}. \quad \forall\, n\in N,\ |s_n|\le\frac{1}{\sin 1},$$

тобто є обмеженою.

Послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ монотонна і нескінченно мала. Отже, за ознакою Діріхле заданий ряд збігається. У ряді $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n}$ n – й член оцінимо в такий спосіб:

$$\frac{|\cos n|}{n} \geq \frac{\cos^2 n}{n} = \frac{1+\cos 2n}{2n}$$

Тоді кожний член ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n}$ не менший відповідного члена ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos 2n}{2n}$. Останній ряд розбіжний як сума розбіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ і збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n}$.

Заданий ряд збігається, а ряд, складений з абсолютних величин його членів, розбігається. А це й означає, що заданий ряд умовно збіжний.

Приклад 13. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)arctg\frac{2n^2+3}{2n^2+1}$ умовно збіжний.

Розв'язання.

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

за ознакою Лейбніца збігається, а послідовність $\left\{arctg\,\frac{2n^2+3}{2n^2+1}\right\}$ монотонна і спадна, то за ознакою Абеля заданий ряд збігається. Доведемо, що він не є абсолютно збіжним, тобто доведемо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)arctg\frac{2n^2+3}{2n^2+1}$ розбігається.

Дійсно, послідовність його членів $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)arctg\frac{2n^2+3}{2n^2+1}$ еквівалентна послідовності $\frac{\pi}{8\sqrt{n}}$ і ряд розбігається одночасно з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{8\sqrt{n}}$.

Вправи для самостійної роботи:

I. Довести, що задані ряди є абсолютно збіжними:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^3}{2^n}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n}{2n+1}\right)^n$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\ln(n+1)}}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{(n+1)\sqrt{\ln^3(n+2)}}$ 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\sin n+1}}{\sqrt[3]{n}}\arcsin\frac{\pi}{6n}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n}{4}}\frac{n^n}{n!e^{n+1}}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg(-n)^n}{\sqrt{2n^3+n+1}}$ 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2+2}{n^3+4n}}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3n}{n\ln(n+1)\ln^2(\ln(n+2))}$ 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}}-\cos\frac{1}{n}\right)\cos n\pi$

II. Довести, що задані ряди є умовно збіжними:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln^5 n}{n}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-\ln(n+1)}$ 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}arctg\frac{1}{\sqrt{n}}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\frac{n+2}{n^2+4}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$ 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(n+1)\ln(\ln(n+2))}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{(-n)^{n+1}}$ 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2-2n+3}}{n}$

III. Дослідити на збіжність знакозмінні ряди:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$ 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n^2+1}}$ 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt[n]{n}}$ 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\sin n^2}{n}$ 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+\frac{\pi}{4})}{\ln^2(n+1)}$

Список використаної літератури

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. М.: - Наука, 1978. –т.2.

2. Задачи и упражнения по математическому анализу / Под. Ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1972. -472 с.

3. Запорожец Г.И. руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1961. – 404 с.

4. Каплан А.И. Практическое занятия по высшей математике. Ч.3 и 4, - Харьков: Изд. ХГУ, 1971. – 498 с.