Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського»

Кафедра вищої математики і статистики

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до самостійної роботи студентів по курсу МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ТЕМА: «Означення границі числової послідовності та границі функції»

Одеса - 2018

Методичні рекомендації для студентів фізико-математичного факультету спеціальностей

Укладачі:
Коваль Т. В., старший викладач кафедри вищої математики і статистики ПНПУ імені К. Д. Ушинського
Олефір О. І., к. ф.-м. н., старший викладач кафедри вищої математики і статистики ПНПУ імені К. Д. Ушинського
Волкова М.Г., к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики і статистики ПНПУ імені К. Д. Ушинського
Рекомендовано до друку засіданням кафедри вищої математики і статистики ПНПУ імені К. Д. Ушинського протокол № від 2018 року
Ухвалено до друку вченою радою ПНПУ імені К. Д. Ушинського
Протокол від 2018 року
Рецензенти:
Канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики і статистики ПНПУ імені К. Д. Ушинського Г. Д. Урум
доктор фіз.-мат. наук, професор, зав. кафедри вищої та прикладної математики ОДЕКУ О. В. Глушков

Методичні рекомендації присвячені таким важливим поняттям математичного аналізу як границя числової послідовності та границя функції. В роботі детально розглянуті основні означення границі числової послідовності та границі функції. Крім основних означень наведені також означення, пов’язані з топологією та метрикою простору. Разом з теоретичними відомостями розглянуто приклади, частина з яких подано з розв’язками, інші для самостійної роботи.

Зміст

1. Границя числової послідовності

1.1 Означення границі числової послідовності

Позначимо через N – множину натуральних чисел, через Q – множину раціональних чисел, через R – множину дійсних чисел.

Якщо кожному натуральному числу n$\in$ N по деякому відомому правилу поставити у відповідність дійсне число $a_n \in$R, то кажуть, що задана числова послідовність a_n.

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$називають членами послідовності, при цьому, a_n називають загальним членом послідовності.

Означення. Число $a \in$R називається границею числової послідовності a_n , якщо для кожного дійсного числа ε>0 існує натуральне число N_0 таке, що для будь-якого натурального числа n$\geq$ N_0 виконується нерівність $| a_n - a | < \varepsilon$

Позначення

Для запису цього означення прийнято використовувати наступні символічні позначення:

|

$\forall$ - « для кожного » або « для буд-якого »,

$\exists$ - « існує» або «знайдеться»,

котрі називаються, відповідно, кванторами спільності та кванторами існування.

За допомогою цих позначень означення границі числової послідовності можна записати так:

Число a $\in$ R називається границею числової послідовності a_n якщо

$\forall$ ε>0$\exists$ N_0 $\in$ N таке, що $\forall n \geq$ N_0 виконується нерівність $| a_n - a | < \varepsilon$.

Той факт, що число a є границею a_n позначається так

У цьому випадку кажуть, що послідовність a_n збігається або прямує до a.

Якщо a=0, то послідовність a_n називається нескінченно малою

Зауваження. З означення границі послідовності випливає, що, якщо число b не є границею числової послідовності, то ε_0>0 , що $\forall$ $N_0 \in$N $\exists$n$_0 \geq$ N_0 таке, що $| a_{n_o} - b | \geq \varepsilon$.

1.2 Означення границі числової послідовності за допомогою поняття окіла точки

Нехай $\alpha, \beta \in$ R, та $\alpha < \beta$, тоді інтервалом (α, β) називається множина дійсних чисел X$\subset$R таких, що $\forall$ x$\in$X виконується нерівність α <x< β , тобто

$$(\alpha, \beta)=\{\ x \in X\ /\ \alpha < x < \beta;\ \alpha, \beta \in R\}.$$

Як відомо, дійсні числа можна зображати точками на числовій осі. Тому прийнято зберігати «геометричну мову» та називати дійсні числа точками множини R

Означення. Окілом точки $a \in$ R називається будь-який інтервал, що містить точку a . Позначається $\bigcup(a)$

Якщо ε >0, то інтервал $\bigcup_{\varepsilon}(a)$=($a - \varepsilon; a + \varepsilon$) називається ε-окілом точки a , при цьому, a називається центром окіла та ε називається радіусом окіла.

З властивостей модуля випливає, що нерівність $|\ a_n - a\ | < \varepsilon$ можна подати у вигляді $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ тобто $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ або $a_n \in \bigcup_{\varepsilon}(a)$. Тому означення границі числової послідовності можна сформулювати за допомогою окіла:

Число a називається границею числової послідовності a_n якщо

$\forall$ ε >0 $\exists$ N_0 таке, що $\forall$ n$\geq$ N_0, $a_n \in \bigcup_{\varepsilon}$.

Таким чином, якщо a - границя послідовності a_n , то члени послідовності a_{N_0} , a_{N_0+1},…обов’язково належать $\bigcup_{\varepsilon}(a)$; в цей окіл можуть не потрапити лише члени послідовності $a_1, a_2, ..., a_{N_0-1}$. Тому в ε - окіл точки a мусить потрапити нескінченна множина членів послідовності, тоді як, за межами окіла може залишитися тільки скінчене число членів послідовності. Враховуючи те, що ε довільне число, означення границі послідовності формуються так:

Точка $a \in$ R називається границею числової послідовності a_n якщо будь-який окіл точки a містить нескінчену множину членів послідовності, тоді як за межами окіла може залишитися лише скінчене число членів.

Зауваження. Той факт, що число b не є границею числової послідовності a_n означає, що

$\exists \bigcup_{\varepsilon}$(b) за межами якого залишається нескінчена множина членів послідовності a_n

1.3 Означення границі числової послідовності за допомогою поняття відстані.

.

Означення. Нехай x,y$\in$R. Відстанню між x та y називається число d (x,y)= $|x - y|$

Легко перевірити, що 1) d (x,y)$\geq$ 0, та d (x,y) = 0 тоді й тільки тоді, коли x = y

2) d (x,y) = d (y,x)

3) d (x,y) $\leq$ d(x,z) + d(z,y) для $\forall$ x,y,z $\in$ R

З означення відстані випливає ,що

$$d(a_n, a) = |a_n - a|$$

тому означення границі числової послідовності прийме вигляд: число a називається границею числової послідовності a_n якщо

$\forall\ \varepsilon \succ 0\ \exists\ N_0 \in$ N таке, що $\forall$ n$\geq$ N_0 d $(a_n, a) < \varepsilon$

Так як ε довільне і тому може як завгодно мало відрізнятися від 0, то відстань між членами послідовності та її границею становиться як завгодно малою починаючи с досить великого номера члена послідовності.

Зауваження. Число b не є границею послідовності a_n якщо $\exists\ \varepsilon_0$ >0 таке, що $\forall\ N_0 \in$ N $\exists\ n_o \geq N_0$ для якого d (a_{n_0}, b)$\geq \varepsilon_0$, тобто існує нескінчена множина членів послідовності таких, що відстань між ними та числом b не менш ніж деяке число ε_0.

1.4 Приклади.

Розглянемо приклади розв'язання задач, які полягають у доведенні рівності

за означенням границі послідовності.

Для доведення зручно використовувати наступну схему:

фіксуємо довільне ε>0

перевіряємо, чи знайдеться $N_0 \in$N таке, що для обраного ε при $\forall n \geq N_0$ вірна нерівність

$|a_n - a| < \varepsilon$

з того факту, що ε фіксовано довільно робимо висновок, що $\forall\ \varepsilon$>0 $N_0 \in$N (залежне від ε) таке, що $\forall n \geq N_0$ $|a_n - a| < \varepsilon$, тобто дійсно

.

Приклад 1.

Довести, що послідовність a_n = 1 / n нескінченно мала, використовуючи означення границі.

Розв язок Треба довести, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

1) Фіксуємо довільне ε >0

2) для перевірки існування числа $N_0 \in$ N розглянемо різницю

$|\ a_n - a\ | = |\ 1 / n - 0| = 1 / n$, яка стане менш за ε, як тільки n>1 / ε.

Тому, якщо за N_0 прийняти будь-яке ціле число, більше ніж 1 / ε, наприклад, покласти N_0 = [1 / ε] +1, де [1 / ε] означає цілу частину числа 1 / ε, то $\forall n \geq N_0$ виконується нерівність 1 / n < ε або $|\ 1 / n - 0\ | < \varepsilon$. Таким чином, потрібне за означенням число N_0 дійсно існує.

Виходячи з довільності ε, маємо $\forall\ \varepsilon >0 \exists\ N_0 \in$ N (наприклад, ε N_0 = [1 / n]=1) таке, що $\forall n \geq N_0$ виконується нерівність $|\ 1 / n - 0\ | < \varepsilon$

Отримали, для a = 0 виконано означення границі послідовності a_n = 1 / n, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Це й означає, що a_n = 1 / n є нескінченно мала послідовність.

Зауваження. Цілою частиною дійсного числа b називається найбільше ціле число, яке не перевищує b. Наприклад, [3,7] = 3; [-7,2] = -8.

Приклад 2

Використовуючи означення границі довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{1-2n}=-\frac{1}{2}$.

Розв язок.1) Фіксуємо довільно ε >0.

2) Маємо, $|\ a_n - a\ | = |\ \frac{n+1}{1-2n}-(-\frac{1}{2}\ )\ | = \left|\frac{n+1}{1-2n}+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{3}{1-2n}\right| = -\frac{3}{2(1-2n)} < \varepsilon$, як тільки 2n - 1 > $\frac{3}{2\varepsilon}$, або n > $\frac{1}{2}(\frac{3}{2\varepsilon}+1)$, тому потрібне N_0 існує, бо якщо, наприклад,

N_0 = [$\frac{3}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}$] + 1, то $\forall n \geq N_0$ вірно $|\ a_n - a\ | < \varepsilon$.

З довільності ε випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{1-2n}=-\frac{1}{2}$

Приклад 4

За допомогою означення границі довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^3+1}=0.$

Розв язок. 1) Фіксуємо $\varepsilon>0$

2) Покажемо існування N_0 такого, що $\forall n\geq N_0$ буде вірна нерівність $\left|\frac{2n}{n^3+1}-o\right|=\frac{2n}{n^3+1}$

$<\varepsilon$

В цьому випадку вирішувати нерівність відносно n зовсім не обов'язково. Досить довести, що ця нерівність має розв'язки, чим і буде доведено існування N_0 Виконаємо очевидну оцінку:

$\frac{2n}{n^3+1}<\frac{2n}{n^3}=\frac{2}{n^2}<\varepsilon$. Для n>$\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$ вірна нерівність $\frac{2}{n^2}<\varepsilon$ це означає що також вірна нерівність $\frac{2n}{n^3+1}<\varepsilon$. Тому N_0 існує (наприклад, $N_0=[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}]+1$)

3) З довільності ε випливає, що рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^3+1}=0.$ доведено.

Приклад 5

Довести що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$

Розв язок. 1) Фіксуємо довільне $\varepsilon>0$.

2) Так як згідно бінома Ньютона $2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2!}+...+1>\frac{n(n-1)}{2!}$,то маємо оцінку різниці $\left|\frac{n}{2^n}-0\right|<\left|\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2!}}\right|=\frac{2}{n-1}<\varepsilon$, як тільки $n>\frac{2}{\varepsilon}+1$, що доводить існування N_0 (наприклад, $N_0=[\frac{2}{\varepsilon}+1]+1$).

3) З довільності ε випливає що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$

Приклад 6

Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$

Розв язок.

Фіксуємо довільне $\varepsilon>0$

Виконуємо очевидні перетворення

$$n=(\sqrt[n]{n})^n=(1+(\sqrt[n]{n}-1))^n=1+n(\sqrt[n]{n}-1)+\frac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{n}-1)^2+\frac{n(n-1)(n-2n)}{3!}(\sqrt[n]{n}-1)^3+\ldots+$$

$$(\sqrt[n]{n}-1)^n>\frac{n(n-1)}{2!}(\sqrt[n]{n}-1)^2$$

звідки $n>\dfrac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2$ або $1>\dfrac{n-1}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2$,звідки при n>1

$\sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$. Нерівність $\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}<\varepsilon$ вірна, як тільки $n>1+\dfrac{2}{\varepsilon^2}$, тому ,якщо покласти

$N_0=[1+\dfrac{2}{\varepsilon^2}]+1$, то $\forall n\geq N_0$ виконується нерівність $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$. З довільності обраного ε

випливає що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Приклад 7

Довести, що послідовність $a_n=(-1)^n$ границі не має.

Розв язок.

Доведемо від супротивного. Нехай існує $a\in$ R таке, що $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=a$. Тоді, за означенням границі послідовності, в будь-якому околі точки a містяться всі члени послідовності за винятком , можливо, скінченого числа членів,

Розглянемо окіл $\bigcup_{\frac{1}{4}}(a)$=(a-1/4, a+1/4). Очевидно, яке б не було число $a\in$R числа 1 та -1 одночасно належать околу $\bigcup_{\frac{1}{4}}(a)$ не можуть. Тому за межами окола $\bigcup_{\frac{1}{4}}(a)$ завжди залишиться нескінчена множина членів послідовності . З отриманої суперечності випливає, що $\forall$ $a\in$R $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\neq a$

Тому послідовність $a_n=(-1)^n$ границі не має.

1.5 Нескінченно великі послідовності.

Досі у рівності $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ передбачалось, що $a\in$R тобто a - дійсне число

Означення . Кажуть, що границя числової a_n дорівнює $+\infty$ якщо

$\forall$ E що $\forall n\geq N_E$ a_n>E $+\infty$.

Позначення $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$

Кажуть, що границя числової послідовності a_n дорівнює - ∞, якщо.

$\forall$ E>0 $\exists$ $N_E\in$N таке, що $\forall n\geq N_E$ a_n< -E.

Позначення $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$= - ∞

Кажуть, що границя числової послідовності a_n дорівнює ∞, якщо

$\forall$ E>0 $\exists$ $N_E \in$ N таке, що $\forall n \geq N_E$ $| a_n | >$ E

Позначення $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

В усіх, означених вище, випадках послідовність a_n називається нескінченно великою.

Зауваження 1. Той факт, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ означає, що послідовність a_n серед дійсних чисел границі не має.

Зауваження 2. Не слід плутати поняття нескінченно великої послідовності з поняттям необмеженої послідовності. Числова послідовність b_n називається необмеженою, якщо $\forall M > 0 \exists n_M \in N$ таке, що $|a_{n_M}| > M$

З означень випливає, що будь яка нескінченно велика послідовність водночас буде необмеженою. Однак, необмежена послідовність може не бути нескінченно великою. Наприклад, для послідовності 1, 1, 2, 3, …, n, 1,… виконується означення необмеженої послідовності, але не виконується означення нескінченно великої послідовності (чому?)

1.6. Приклади

Розглянемо приклади розв'язання задач, які полягають у доведені рівності $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ за допомогою означення. Для доведення будемо використовувати таку ж саму схему, як і у випадку скінчених границь.

Приклад 1

Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$

Розв язок.1) Фіксуємо довільне Е.

2Нерівність $n^2>$Е виконується як тільки $n > \sqrt{E}$, тому, якщо покласти $N_E =[\sqrt{E}]+1$,

то $\forall n \geq N_E$ виконається нерівність $n^2>$Е, тобто необхідне число N_E дійсно існує,

З довільності вибору Е випливає, що $\forall$ Е>0 $\exists$ $N_E \in$ N (наприклад, $N_E = [\sqrt{E}]+1$) таке, що $\forall n \geq N_E$ $n^2>$Е, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

Приклад 2.

Довести, що послідовність $a_n = 2^n$ нескінченно велика.

Розв язок.1) Фіксуємо Е>0.

2) Так як $2^n=(1+!)^n = 1+n+\dfrac{n(n-1)}{2!}+...+1 > n$, то $2^n > n$. Це означає, що за N_E можна прийняти будь яке натуральне число, яке перевищує Е (наприклад, $N_E =[E]+1$), тоді

$\forall\ n \ge N_E$ виконається нерівність 2^n>E

З довільності E випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$

Приклад 3.

Довести що $\lim\limits_{n\to\infty}((-1)^n n) = \infty$.

Розв язок. 1) Фіксуємо довільне E>0

2) $|a_n| = |(-1)^n n| = n$, тому в якості N_E можна покласти N_E =[E]+1.

3) З довільності E випливає, що $\forall$ E>0 $\exists\ N_E \in$ N (наприклад, N_E =[E]+1) таке, що $\forall\ n \ge N_E$ вірна нерівність $|(-1)^n\ n|$ > E тобто $\lim\limits_{n\to\infty}((-1)^n\ n) = \infty$, тобто

$a_n = (-1)^n\ n$ - нескінченно велика послідовність.

1.7.Приклади для самостійної роботи,

1.7.1. За допомогою означення довести, що наступні послідовності нескінченно малі.

1) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

2) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

3) $a_n = \dfrac{1}{n+1}$

4) $a_n = \dfrac{1}{3^n}$

5) $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{2n-1}}$

6) $a_n = \dfrac{1}{n^p}$, де $p \ge 1$

1.7.2. За допомогою означення довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

1) $a_n = \dfrac{n-2}{2n-1}$, $a = \dfrac{1}{2}$

2) $a_n = \dfrac{3n-4}{2n+1}$, $a = \dfrac{3}{2}$

3) $a_n = \dfrac{5n-1}{3n+4}$, $a = \dfrac{5}{3}$

4) $a_n = \dfrac{3n-2}{2n-1}$, $a = \dfrac{3}{2}$

5) $a_n = \dfrac{7n-4}{n+1}$, $a = 7$

6) $a_n = \dfrac{6n+5}{5n-3}$, $a = \dfrac{6}{5}$

7) $a_n = \dfrac{1-3n}{n+2}$, $a = -3$

8) $a_n = \dfrac{2-5n}{n-1}$, $a = -5$

9) $a_n = \dfrac{2-3n}{n-2}$, $a = -3$

10) $a_n = \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}$, $a = \dfrac{4}{3}$

11) $a_n = \dfrac{7n+4}{n-3}$, $a = 7$

12) $a_n = \dfrac{6-5n}{2-n}$, $a = 5$

13) $a_n = \dfrac{5n-3}{2n+1}$, $a = \dfrac{5}{2}$

14) $a_n = \dfrac{6n-7}{2n+1}$, $a = 3$

15) $a_n = \dfrac{3-n^2}{1+5n^2}$, $a = -\dfrac{1}{5}$

16) $a_n = \dfrac{n+1}{1-3n}$, $a = -\dfrac{1}{3}$

17) $a_n = \dfrac{3n-2}{2n-5}$, $a = \dfrac{3}{2}$

18) $a_n = \dfrac{1-3n^2}{n^2+4}$, $a = -3$

19) $a_n = \dfrac{2n^2}{3-n^2}$, $a = -2$

20) $a_n = \dfrac{n}{5n-1}$, $a = \dfrac{1}{5}$

21) $a_n = \dfrac{6n^3}{n^3+1}$, $a = 6$

22) $a_n = \dfrac{8n-3}{5n+4}$, $a = \dfrac{8}{8}$

23) $a_n = \dfrac{2-n^2}{4+5n^2}$, $a = -\dfrac{1}{5}$

24) $a_n = \dfrac{2+3n}{1-4n}$, $a = -\dfrac{3}{4}$

25) $a_n = \dfrac{10-9n}{2n}$, $a = -\dfrac{9}{2}$

26) $a_n = \dfrac{1-3n^2}{2+5n^2}$, $a = -\dfrac{3}{5}$

27) $a_n = \dfrac{5n^3}{n^3-5}$, $a = 5$

28) $a_n = \dfrac{5n+7}{8n}$, $a = \dfrac{5}{8}$

29) $a_n = \dfrac{4n-5}{5n+1}$, $a = \dfrac{4}{5}$

1.7.1. За допомогою означення довести, що наступні послідовності нескінченно малі.

1) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

2) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

3) $a_n = \dfrac{1}{n+1}$

4) $a_n = \dfrac{1}{3^n}$

5) $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{2n-1}}$

6) $a_n = \dfrac{1}{n^p}$, де $p \geq 1$

2 ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

2.1. Початкові поняття

Означення. Нехай X, У $\subset$ R. Якщо кожному числу $x \in X$ по деякому відомому правилу поставлене у відповідність одне число $y \in У$ то кажуть, що на множені X

Задана функція с значеннями в множені У.

Позначають функцію y = f(x), де

x – незалежна змінна або аргумент функції;

f – подає правило, згідно з яким обчислюється y;

y – залежна змінна.

Множина X називається областю визначення функції та позначається D_f

З означення випливає, що число послідовність це також функція, областю визначення якої є множина дійсних чисел.

Означення. Нехай множина M $\subset$ R та точка $a \in$R .

Точка a називається граничною точкою множини M, якщо в будь якому околі точки a міститься елемент множини M, відмінний від a, тобто

$\forall \bigcup(a)$ $\exists$m$\in$M такий що m $\in$ $\bigcup(a)$.

З наведеного означення випливає, що сама точка a може як належати так і не належати множені M. Наприклад, якщо M = {1, 1/2, 1/3, …}, то гранична точка $a = 0$ множини M (перевірити) не належить множені M. Якщо множину M задати як M = { 0, 1, 1/2, 1/3, …}, то $a = 0$ буде граничною точкою M та $a \in$M

.

2.2 Означення границі функції в точці.

Означення 1(по Коші). Нехай функція y = f(x) має область визначення D_f і точка $a \in$R є граничною точкою D_f. Число A називається границею функції y = f(x) в точці a, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ таке, що $\forall$ x$\in D_f$ для яких 0<│ x - a│ <δ справедлива нерівність │ f(x) – A │ <ε.

Позначення $\lim\limits_{x \to a}$ f(x) =A або f(x)$\to$A при x$\to a$.

Зауваження. Умова │ x -a│ > 0 означає, що x $\neq 0$. Тому в означенні границі функції f(x) в точці a сама точка a із розгляду виключається Функція може бути однако не визначеною в точці a. Але f(x) має бути визначена в будь якому околі точки a, бо за умовою означення a є граничною точкою D_f

Означення 1 можна сформулювати, використовуючи поняття окіла.

Проколотим околом точки a називається окіл точки a з якого видалена сама точка a

Позначення $\dot{\bigcup}(a)$

Наприклад, проколотим δ-околом точки a буде об єднання інтервалів

$\dot{\bigcup}_{\delta}(a) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$.

Означення 1 можна записати так: нехай y = f(x) має область визначення D_f ,точка a - гранична точка D_f .Число А називається границею функції f(x) в точці a, якщо

$\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\ \delta>0$ таке, що коли x$\in \dot{\bigcup}_{\delta}(a) \bigcap D_f$, то f(x)$\in \bigcup_{\varepsilon}(A)$

Таким чином, число А називається границею функції f(x) в точці a, якщо

$\forall \bigcup$(A) $\exists\ \dot{\bigcup}(a)$ такий що $\forall$ x$\in \dot{\bigcup}(a) \bigcap D_f$, то f(x)$\in \bigcup$(A).

Напишемо означення 1 за допомогою поняття відстані між точками:
число А називається границею функції f(x) в точці a якщо $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ таке, що $\forall$ x$\in D_f$ для яких 0 < d(x, a) < δ виконується нерівність d(f(x), A) < ε, тобто відстань між значеннями функції та її границею може стати як завгодно малою як тільки відстань між точками x та a досить мала .

Крім означення границі функції по Коші (за допомогою ε та δ) існує також друге означення границі функції по Гєйне (за допомогою числових послідовностей).

Означення 2 (по Гєйне) Нехай функція y = f(x) має область визначення D_f та точка a є граничною точкою D_f . Число А називається границею функції f(x) в точці a якщо для будь якої послідовності x_n яка прямує до a, причому $x_n \in D_f$ та $x_n \neq a$ при $\forall$ n$\in$N відповідна послідовність значень функції y_n = f(x_n) збігається до А,
тобто, якщо $\forall\ x_n \to a\,(x_n \in D_f , x_n \neq a)$, то f(x_n)$\to$A.

Зауваження. В математичному аналізі показують, що означення 1 та 2 еквівалентні. Це означає що якщо число А є границею функції в точці a в сенсі означення 1, то А є також границею f(x) в точці a і в сенсі означення 2 та навпаки.

2.3 Приклади

Розглянемо приклади розв’язання задач, які полягають у тому, щоб довести рівність $\lim\limits_{x\to a}$ f(x) = A, використовуючи означення границі функції 1 або 2.

Приклад 1

Нехай f(x) = 5x – 1, a = 4. За допомогою означення границі довести що

$$\lim_{x\to 4}(5x-1)=19$$

Розв язок. Очевидно D_f =R тому кожний інтервал, що містить точку a= 4, містить також і інші дійсні числа. Тому a є гранична точка D_f

1). Фіксуємо довільне ε>0 .

2). Покажемо, що для обраного ε існує число δ >0 таке що як тільки 0<│ x - 4│ <δ , то │ f(x) – 19 │ <ε . Для цього розглянемо різницю

│ f(x) – 19 │ = │ (5x – 1) – 19 │ = 5│ x – 4 │

Якщо 5│ x – 4 │ <ε ,то │ x – 4 │ < $\frac{\varepsilon}{5}$ Покладемо $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ тоді, видаляючи точку x = 4 з розгляду, як тільки 0<│ x – 4 │ <δ , то │ f(x) - 19│ =│ (5x – 1) – 19 │ <ε

За означенням 1 маємо $\lim\limits_{x\to 4}(5x-1)=19$ Приклад 2

f(x) = $3x^2+5x+2$, a= 1 Довести. що $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+5x+2)=10$

Розв язок. Маємо D_f = R, a= 1- гранична точка D_f

Використаємо означення 2 границі функції за допомогою послідовностей.

фіксуємо довільну числову послідовність x_n таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ = 1, причому $x_n \neq 1$,

розглянемо відповідну числову послідовність f (x_n) =$3x_n^2+5x_n+2$, за арифметичними властивостями границі числової послідовності маємо $\lim\limits_{n\to\infty}$ f (x_n) = $\lim\limits_{n\to\infty}$ ($3x_n^2+5x_n+2$) =

$3\lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} x_n + 5\lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} 2$ = 3 + 5 + 2 =10

так як x_n вибрано довільно, то $\forall$ $x_n \to 1$ відповідна послідовність f(x_n)$\to$10

Отримали $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+5x+2)=10$

Приклад 3.

Довести, що у функції f(x) = sgn x =
- 1, при x < 0
0, при x = 0
1,при x > 0

в точці a= 0 границі не має.

Доведення. Маємо D_f =R , та a= 0 гранична точка D_f .Розглянемо дві числові послідовності що збігаються до 0:

нехай перша послідовність x_n > 0 та $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ = 0

друга послідовність y_n < 0 та $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ = 0

тоді $\lim\limits_{n\to\infty}$ f(x_n) = $\lim\limits_{n\to\infty}$ 1 = 1; $\lim\limits_{n\to\infty}$ f(y_n) = $\lim\limits_{n\to\infty}$ (- 1) = - 1, отримали, що

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$, Це означає, що границя послідовності $f(x_n)$ залежить від закону згідно якого x_n прямує до 0, Тому в точці $a = 0$ порушується означення границі функції бо для $\forall\ x_n \to 0$ відповідна послідовність $f(x_n)$ повинна сходитися до одного й того ж числа.

Приклад 4.

Довести, що $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{3x^2+17x-6}{x+6} = 19$

Розв язок.1)Маємо $D_f = \{ x \in R,\ x \neq -6\}$; $a = -6$ гранична точка D_f так як

$\forall \dot{U}(-6) \subset D_f$. Фіксуємо $\varepsilon > 0$

2) Розглядаємо різницю $\left|\dfrac{3x^2+17x-6}{x+6} - (-19)\right| =$

$$\left|\frac{3x^2+36x+108}{x+6}\right| = \left|\frac{3(x^2+12x+36)}{x+6}\right| = 3\left|\frac{(x+6)^2}{x+6}\right| = 3|x+6|$$, якщо $x \neq 6$

Нерівність $3|x+6| < \varepsilon$ виконується як тільки $|x+6| < \dfrac{\varepsilon}{3}$,

Якщо покласти $\delta < \dfrac{\varepsilon}{3}$, то $\forall\ x \in D_f$ для яких $|x+6| < \delta$ вірна нерівність

$$\left|\frac{3x^2+17x-6}{x+6} - (-19)\right| < \varepsilon$$

2) Виходячи з довільності ε, отримали $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ (наприклад, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$) таке, що якщо

$0 < |x - (-6)| < \varepsilon$, то $|f(x) - (-!9)| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{3x^2+17x-6}{x+6} = 19$

2.4 Нескінченні границі функцій та границі функцій на необмежених проміжках

Означення. Нехай функція y = f(x) має область визначення D_f і точка $a \in R$ є граничною точкою D_f. Кажуть, що границя функції f(x) в точці a дорівнює ∞

Якщо $\forall$ E>0 $\exists\ \delta > 0$ таке, що $\forall\ x \in D_f$ для яких $0 < |x - a| < \delta$ вірна нерівність $|f(x)| > E$

Позначення $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

Вправа: Сформулювати означення рівностей $\lim\limits_{x \to a}$ f(x) = $+\infty$ та $\lim\limits_{x \to a}$ f(x) = $-\infty$

Необмеженими інтервалами ($-\infty$, a) та (b, $+\infty$) називаються відповідно множини дійсних чисел ($-\infty$, a) = {x$\in$X$\subset$R, x < a },

(b, $+\infty$) = { x$\in$X$\subset$R, x > b },

та ($-\infty$, $+\infty$) = R

Означення. Число A називається границею функції f(x) при x$\to\infty$, якщо $\forall\ \varepsilon$>0 $\exists$G>0, таке що $\forall$ x$\in$ D_f для яких │ x │ > G вірна нерівність │ f(x) – A │ < ε

Позначення $\lim\limits_{x \to \infty}$ f(x) = A

Вправа: сформулювати означення того що $\lim\limits_{x \to +\infty}$ f(x) = A, та $\lim\limits_{x \to -\infty}$ f(x) = A

Згідно приведеним означенням $\lim\limits_{x \to \infty}$ f(x) $=\infty$ означає, що

$\forall\ \varepsilon$>0 $\exists$G>0 таке, що $\forall$ x$\in$ D_f та │ x │ > G виконується нерівність │ f(x) │ > E

2.5 Приклади

Приклад 1

За допомогою означення довести, що $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

Розв язок. Маємо D_f : x$\neq$0

Фіксуємо довільне E > 0

Перевіримо існування δ>0. Очевидно, $\left|\frac{1}{x}\right|$ > E при $|x|$ $<\frac{1}{E}$, тому, якщо покласти $\delta = \frac{1}{E}$,

то як тільки $|x|$ $<\delta$ отримуємо вірну нерівність │ $\frac{1}{x}$ │ > E .

З довільності E випливає, що $\forall$ E > 0 $\exists$ δ>0 (наприклад, δ = $\frac{1}{E}$) таке, що для

0<$|x|$ $<\delta$ виконується нерівність │ $\frac{1}{x}$ │ > E, звідки за означенням $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

Приклад 2

Використовуючи означення нескінченої границі функції довести, що

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{5x-10} = \infty$$

Розв'язок. Маємо D_f : x$\neq$ 2

1) Фіксуємо довільно E > 0

2) Нерівність $\left|\frac{1}{5x-10}\right| = \frac{1}{5|x-2|}$ > E буде вірною як тільки 0 < $|x-2|$ < $\frac{1}{5E}$, якщо покласти $\delta = \frac{1}{5E}$, то для $\forall$ x$\in$ R для яких 0< $|x-2|$ < δ виконується нерівність $\left|\frac{1}{5x-10}\right|$ > E. Таким чином, для обраного E існування δ доведено.

3) З довільності E випливає, що $\forall$ E > 0 $\exists$ δ > 0 (наприклад, $\delta = \frac{1}{5E}$ таке, що $\forall$ x$\in$ R для яких 0 < $|x-2|$ < δ виконується нерівність $\left|\frac{1}{5x-10}\right|$ > E, тобто за означенням $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{5x-10} = \infty$.

Приклад 3

За допомогою означення довести, що $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-x^2}{1+2x^2} = -\frac{1}{2}$.

Розв язок. 1)Фіксуємо довільно ε > 0

2) Покажемо, що існує G > 0 таке, що $\forall$ x $\in$ R для яких $|x|$ > G виконується нерівність $\left|\frac{3-x^2}{1+2x^2} - (-\frac{1}{2})\right|$ < ε. Розглянемо різницю $\left|\frac{3-x^2}{1+2x^2} - (-\frac{1}{2})\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{7}{1+2x^2}\right| = \frac{7}{2}\frac{1}{1+2x^2}$.

Нерівність $\frac{7}{2}\frac{1}{1+2x^2} < \varepsilon$ виконується як тільки $(1+2x^2) > \frac{7}{2\varepsilon}$ або $|x|$ > $\sqrt{\left|\frac{7-2\varepsilon}{2\varepsilon}\right|}$ Тому в якості необхідного G можна покласти G = $\sqrt{\left|\frac{7-2\varepsilon}{2\varepsilon}\right|}$

3) З довільності ε випливає, що $\forall$ ε > 0 $\exists$ G > 0 (наприклад, G = $\sqrt{\left|\frac{7-2\varepsilon}{2\varepsilon}\right|}$) таке, що як тільки $|x|$ < G, то $\left|\frac{3-x^2}{1+2x^2} - (-\frac{1}{2})\right|$ < ε. Це доводить, що $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-x^2}{1+2x^2} = -\frac{1}{2}$.

2.6. Приклади для самостійної роботи

За допомогою означення границі функції по Коші довести, що

2.6.01 $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7$

2.6.02. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}=6$

2.6.03 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}=-7$

2.6.04 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{6x^2-x-1}{x-\frac{1}{2}}=5$

2.6.05 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{6x^2+x-1}{x+\frac{1}{2}}=-5$

2.6.06 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-14x+6}{x-3}=10$

2.6.07 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{x+\frac{1}{3}}=-6$

2.6.08 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}=7$

2.6.09 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-2x-1}{x+\frac{1}{3}}=-4$

2.6.10 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1}=-6$

2.6.11 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=2$

2.6.12 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+3x-2}{x-\frac{1}{2}}=5$

2.6.13 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{6x^2-5x+1}{x-\frac{1}{3}}=-1$

2.6.14 $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{7}}\dfrac{10x^2+9x-7}{x+\frac{5}{7}}=-19$

2.6.15 $\lim\limits_{x\to -\frac{7}{2}}\dfrac{2x^2+13x+21}{2x+7}=-\dfrac{1}{2}$

2.6.16 $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}}\dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5}=\dfrac{1}{2}$

2.6.17 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{6x^2+x-1}{x-\frac{1}{3}} = 5$

2.6.18 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \dfrac{6x^2-75x-39}{x+\frac{1}{2}} = -81$

2.6.19 $\lim\limits_{x\to 11} \dfrac{2x^2-21x-11}{x-11} = 23$

2.6.20 $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5x^2-24x-5}{x-5} = 26$

2.6.21 $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{2x^2+15x+7}{x+7} = -13$

2.6.22 $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{2x^2+6x-8}{x+4} = -10$

2.6.23 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} \dfrac{6x^2-x-1}{3x+1} = -\dfrac{5}{3}$

2.6.24 $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+2x-15}{x+5} = -8$

2.6.25 $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{3x^2-40x+128}{x-8} = 8$

2.6.26 $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{5x^2-51x+10}{x-10} = 49$

2.6.27 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-5x+2}{x-\frac{1}{2}} = -3$

2.6.28 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{3x^2+17x-6}{x-\frac{1}{3}} = 19$

2.6.29 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{5}} \dfrac{15x^2-2x-1}{x+\frac{1}{5}} = -8$

2.6.30 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}} = 8$

За допомогою означення границі функції по Гейне (за допомогою послідовностей) довести, що

2.6.31 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2$

2.6.32 $\lim\limits_{x \to 1} (15x^2 - 3x + 4) = 16$

2.6.33 $\lim\limits_{x \to 0} (x^4 + 120x^3 - 73x^2 + 27x - 4) = -4$

2.6.34 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = 10$

2.6.35 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4} = -10$

2.6.36 $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = -8$

2.6.37 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2$

Довести, що функція f(x) в точці x = a не має границі

2.6.38 f(x) = $\sin \dfrac{\pi}{x}$, $a = 0$ (Вказівка. Розглянути дві послідовності $x_n = \dfrac{1}{n}$ та $y_n = \dfrac{2}{4n+1}$)

2.6.39 f(x) = $arctg \dfrac{1}{x}\ a$, $a = 0$

2.6.40 f(x) = $\sin x$, $a = +\infty$

2.6.41 f(x) = $\mathrm{sgn}(\sin \dfrac{1}{x})$, $a = 0$

2.6.42 f(x) = $\cos x$, $a = +\infty$

2.6.43 f(x) = tgx, $a = +\infty$

2.6.44 f(x) = $ctgx$, $a = +\infty$

Список літератури

1. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 1. – М.: Наука, 1981. – 543 с.

2. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1966. – 319 с.

3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 1. – М.: Наука, 1966. – 607 с.

4. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Наука, 1984 – 592 с.

5. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966. – 460 с.

6. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1984. – 416 с.

7. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – 9-е вид. – М.: Наука, 1977. – 527 с.

8. Гунтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. – М. : Гостехиздат, 1949. – 224 с.