МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад
«Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

С.В. Драганюк, О. В. Куницька

ЕВКЛІДОВІ ПРОСТОРИ.
ЛІНІЙНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Тексти лекцій

Частина 2

Одеса – 2015

УДК 512.64
ББК 22.152я7

«**Евклідові простори. Лінійні відображення**»,**Тексти лекцій**, **Частина 2**.
Тексти лекцій з лінійної алгебри (частина 2) для студентів перших курсів напрямів підготовки Математика*, Фізика*, Інформатика*

(Укладачі: Драганюк С.В., Куницька О.В. — Одеса: ДЗ «ПНПУ імені К.Д. Ушинського», 2015 – 73 с.)

Друкується за рішенням Вченої ради ДЗ «ПНПУ імені К.Д. Ушинського», *від 23 жовтня 2015 року протокол № 3.*

УКЛАДАЧІ:
Драганюк С.В., кандидат фізико-математичних наук, викладач кафедри алгебри та геометрії;
Куниціка О.В., студентка спеціальності 7.04020101 Математика* Державного закладу «Південноукраїнський національний університет імені К.Д. Ушинського»

РЕЦЕНЗЕНТИ:
Покась С. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри геометрії та топології Одеського національного університету імені І. І. Мечникова

Варбанець П.Д., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова

ЗМІСТ

ВСТУП

Запропоновані теоретичні розробки є другою частиною текстів лекцій, написаних для студентів першого курсу спеціальності «математика» фізико-математичних факультетів педагогічних ВНЗ. В них у доступній формі викладені розділи лінійної алгебри, присвячені евклідовим просторам, лінійним відображенням та лінійним операторам, заданим на довільних векторних просторах, власним векторам лінійних операторів. Для успішного засвоєння цих матеріалів студенти повинні попередньо ознайомитись з елементами теорії множин, зокрема з відомостями стосовно відображень, теорією матриць та їх визначників, теорією сумісності систем лінійних рівнянь, відомостями про векторні простори, їх розмірність та підпростори.

Актуальність цієї роботи викликана різким зменшенням кількості аудиторних годин для лекційних та практичних занять, зокрема з алгебри. Це робить неможливим викладення багатьох важливих тем. Отже збільшується значення самостійної роботи студентів для засвоєння математичних дисциплін. Для цих цілей повинні бути напрацьовані на сучасному науковому рівні різноманітні методичні навчальні посібники. Нажаль, зараз бібліотечний фонд нашого ВНЗ поповнюється математичною літературою недостатньо, отже старішає і не завжди задовольняє потреби студентів-математиків.

Ці тексти лекцій включають всі основні теми, які входять в навчальні та робочі програми з курсу лінійної алгебри. Наведені в них факти мають доведення, супроводжуються необхідними коментарями та прикладами. Приклади беруться з різних галузей математики: алгебри, геометрії, математичного аналізу і т.д. Це, зокрема, підтверджує значення та широке застосування теорії векторних просторів у всьому комплексі математичних дисциплін. Вона має застосування також у фізиці, механіці, астрономії та ін.

§ 1. Евклідові простори

1.1. Векторні простори зі скалярним множенням

Нехай V – довільний векторний простір над полем скалярів F. Крім основних операцій додавання векторів та множення вектора на скаляр, введемо на цьому просторі ще одну операцію.

Означення 1.1. *Операцією* ***скалярного множення****, заданою на векторному просторі* V, *називається відображення, яке ставить у відповідність кожній впорядкованій парі векторів* $(\vec{a}, \vec{b})$ *простору* V*деякий елемент поля* F, *тобто скаляр, який називається* ***результатом*** *операції. Ця операція позначається* $\vec{a} \cdot \vec{b}$, *причому вона повинна задовольняти аксіомам.*

Для довільних векторів $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *простору* V *і будь-якого скаляра* α *поля* F:

1. $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(\vec{b} \cdot \vec{a}\right)$ *– комутативність;*
2. $(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ *– асоціативність відносно множення на скаляр;*
3. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ *– дистрибутивність;*
4. *Якщо* $\vec{a} \neq \vec{0}$, *то* $\vec{a} \cdot \vec{a} \neq 0$.

Вираз $\vec{a} \cdot \vec{a}$ *називається* ***скалярним квадратом*** *вектора* $\vec{a}$.

Евклідові простори, мова про які йтиме пізніше, це один з найважливіших класів векторний просторів зі скалярним множенням.

Властивості операції скалярного множення векторів

Для будь-яких векторів простору V та довільних скалярів поля F виконується:

1. $\vec{a} \cdot (\beta \cdot \vec{b}) = \beta \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$;
2. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
3. $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$;
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} = \vec{0}$.
5. Для довільних лінійних комбінацій векторів:

$$(\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k}) \cdot \left(\beta_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \beta_l \cdot \overrightarrow{b_l}\right) = \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot$$

$$\cdot \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{b_1} + \alpha_1 \cdot \beta_2 \cdot \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \alpha_1 \cdot \beta_l \cdot \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{b_l} + \alpha_2 \cdot \beta_1 \cdot \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{b_1} + \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot$$

$\cdot \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{b_2} + \cdots + \alpha_2 \cdot \beta_l \cdot \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{b_l} + \cdots + \alpha_k \cdot \beta_1 \cdot \overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_1} + \alpha_k \cdot \beta_2 \cdot \overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_2} +$
$+ \cdots + \alpha_k \cdot \beta_l \cdot \overrightarrow{a_k} \cdot \overrightarrow{b_l}$
.

∇

1. Застосовуючи перші дві аксіоми скалярного множення, маємо: $\vec{a} \cdot (\beta \cdot \vec{b}) =$ $= (\beta \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a} = \beta \cdot (\vec{b} \cdot \vec{a}) = \beta \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$. Зрозуміло, що вкінці знову застосовується аксіома 1.
2. Доводиться аналогічно властивості 1 за допомогою аксіом 1 і 3 скалярного множення векторів.
3. За властивостями векторних просторів [7. 19], для довільного вектора $\vec{b}$ виконується $0 \cdot \vec{b} = \vec{0}$, а тому $\vec{0} \cdot \vec{a} = (0 \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a}$. За аксіомою 2 скалярного множення буде $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0 \cdot (\vec{b} \cdot \vec{a}) = 0$. Останній добуток дорівнює нулю, тому що множення відбувається у полі F.
4. *Необхідність.* Нехай $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$. За аксіомою 4 скалярного множення вектор $\vec{a}$ не може бути ненульовим, а тому $\vec{a} = 0$.

   Достатність. Випливає з властивості 3.
5. Враховуючи асоціативність додавання векторів, введемо додаткові дужки, які не змінюють результату. Вираз у внутрішніх дужках є одним вектором. Використовуючи аксіому 3 та властивість 2 скалярного множення, маємо:

$$\left(\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + (\alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k})\right) \cdot \left(\beta_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + \left(\beta_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + \cdots + \beta_l \cdot \overrightarrow{b_l}\right)\right) =$$

$$= (\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1}) \cdot \left(\beta_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + \left(\beta_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + \cdots + \beta_l \cdot \overrightarrow{b_l}\right)\right) + (\alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k}) \cdot$$

$$\cdot \left(\beta_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + \left(\beta_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + \cdots + \beta_l \cdot \overrightarrow{b_l}\right)\right) =$$

$$(\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1}) \cdot \left(\beta_1 \cdot \overrightarrow{b_1}\right) + (\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1})\left(\beta_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + + \cdots + \beta_l \cdot \overrightarrow{b_l}\right) + (\alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k}) \cdot$$
$$\left(\beta_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + (\beta_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + \cdots + \beta_l \cdot \overrightarrow{b_l}\right) =$$

$$= \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{b_1} + (\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1})\left(\beta_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + \cdots + \beta_l \cdot \overrightarrow{b_l}\right) + (\alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k}) \cdot$$

$$\cdot \left(\beta_1 \cdot \overrightarrow{b_1}\right) + (\beta_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + \cdots + \beta_l \cdot \overrightarrow{b_l}).$$

Аналогічно розкриваючи дужки, отримаємо доведення останньої властивості.

Δ

Зауваження 1.1. У довільному векторному просторі V зі скалярним множенням ця операція індукує (породжує, задає) відповідну операцію скалярного множення на будь-якому його підпросторі.

Приклади векторних просторів зі скалярним множенням

1. Нехай V – тривимірний векторний простір геометричних векторів над полем дійсних чисел R. У цьому просторі вводиться операція скалярного множення векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha, \tag{1.1}$$

де α – кут між векторми $\vec{a}$ і $\vec{b}$. При цьому як властивості доводяться всі аксіоми скалярного множення, заданого на довільному векторному просторі.

2. Для довільних векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ арифметичного векторного простору R^n над полем дійсних чисел R [7. 22] покладемо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n. \tag{1.2}$$

Ясно, що вектор $\vec{a}$ ненульовий тільки у випадку, якщо хоча б одна з його компонент не дорівнює нулю. Це означає, що для ненульового вектора $\vec{a}$ буде $\vec{a} \cdot \vec{a} = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2 > 0$. Таким чином, ми довели, що аксіома 4 скалярного множення виконується для операції, заданої формулою 1.2. Інші аксіоми скалярного множення для цієї операції перевірте самостійно.

Означення 1.2. Стандартним евклідовим векторним простором $\boldsymbol{E_n}$ *називається* n*-вимірний арифметичний векторний простір* R^n *над полем дійсних чисел* R *з заданою на ньому операцією скалярного множення 1.2.*

3. На векторному просторі $C\,[A, B]$ неперервних на проміжку $[A, B]$ функцій над полем дійсних чисел R введемо операцію скалярного множення наступним чином. Для довільних функцій f і g цього простору покладемо

$f \times g = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx$. Аксіоми скалярного множення випливають з відповідних властивостей визначеного інтегралу. [1]

1.2 Ортогональні системи векторів, ортогональний базис векторного простору зі скалярним множенням

Нехай V – скінченовимірний векторний простір зі скалярним множенням над довільним полем F.

Означення 1.3. *Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ векторного простору V зі скалярним множенням називаються* ***ортогональними****, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю. При цьому пишуть $\vec{a} \perp \vec{b}$.*

Означення 1.4. *Система векторів $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}\}$ векторного простору V зі скалярним множенням називається* ***ортогональною,*** *якщо будь-які її два вектори взаємно ортогональні. Система, що складається з одного ненульового вектора вважається ортогональною за означенням.*

Означення 1.5. Ортогональним базисом *ненульового скінченовимірного векторного простору V зі скалярним множенням називається будь-яка скінчена ортогональна система векторів, що є базисом цього простору.*

Зауваження 1.2.

1. Нульвектор ортогональний будь-якому вектору векторного простору зі скалярним множенням.
2. Якщо вектор $\vec{a}$ ортогональний будь-якому вектору системи $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}\}$, то він ортогональний довільній лінійній комбінації векторів системи S.
3. Якщо $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}\}$ – ортогональна система ненульових векторів, то виконується:

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0, \vec{a}_i \cdot \vec{a}_i \neq 0 \qquad \textbf{(1.3)}$$

[1] В останньому прикладі векторний простір нескінченновимірний, а тому він не є предметом вивчення лінійної алгебри. Такі простори вивчаються у математичній дисципліні, яка називається функціональний аналіз.

$i,j = \overline{1,k}, i \neq j$.

4. Будь-який ненульовий скінченовимірний векторний простір зі скалярним множенням володіє ортогональними системами векторів.

∇

1. Випливає з властивості 3 операції скалярного множення.
2. Випливає з властивості 5 операції скалярного множення та означення 1.3.
3. Випливає з означення 1.3 і аксіоми 4 означення 1.1.
4. Дійсно, такою системою є, наприклад, довільна система, що складається з одного ненульового вектору.

Δ

<u>Теорема 1.1.</u> Будь-яка скінчена ортогональна система ненульових векторів векторного простору V зі скалярним множенням лінійно незалежна.

∇

Нехай $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}\}$ – ортогональна система ненульових векторів. Враховуючи означення 3.3 [7. 25], вияснимо значення коефіцієнтів рівності $\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_i \cdot \vec{a}_i + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k} = \vec{0}$. Для цього помножимо скалярно обидві частини цієї рівності на вектор $\vec{a}_i$. Використовуючи властивості операції скалярного множення, отримаємо:

$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} \cdot \vec{a}_i + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} \cdot \vec{a}_i + \dots + \alpha_i \cdot \vec{a}_i \cdot \vec{a}_i + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k} \cdot \vec{a}_i = \vec{0} \cdot \vec{a}_i = 0.$

З рівностей 1.3 маємо:

$$\alpha_i \cdot (\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i) = 0, i = \overline{1,k}, \qquad \textbf{(1.4)}$$

причому за аксіомою 4 означення 1.1 $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i \neq 0$. В рівності (1.4) множення відбувається у полі F. Як відомо, будь-яке поле не має дільників нуля, а тому $\alpha_i = 0, i = \overline{1,k}$. Це означає, що система S – лінійно незалежна.

Δ

<u>Наслідок.</u> Довільна ортогональна система n ненульових векторів n-вимірного векторного простору V зі скалярним множенням є його базисом. Це випливає з наслідку 3 теореми 6.1 [7. 72].

У наступній теоремі вирішується питання про знаходження ортогонального базису довільного ненульового скінченовимірного векторного простору V зі скалярним множенням.

<u>**Теорема 1.2.**</u> **Будь-яку ортогональну систему ненульових векторів n-вимірного векторного простору V зі скалярним множенням можна доповнити до базису цього простору.**

∇

Нехай $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}\}$ – ортогональна система ненульових векторів n-вимірного векторного простору V над полем скалярів F, $1 \le k < n$. За теоремою 1.1 ця система векторів лінійно незалежна. За теоремою 6.3 [7. 74] систему векторів S можна доповнити до базису векторного простору V. Нехай цим базисом буде $B = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{b_{k+1}}, \overrightarrow{b_{k+2}}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$.

Побудуємо вектор

$$\overrightarrow{a_{k+1}} = \overrightarrow{b_{k+1}} - \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} - \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} - \dots - \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k} \qquad \mathbf{(1.5)}$$

і підберемо скаляри $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ так, щоб вектор $\overrightarrow{a_{k+1}}$ був ортогональний до кожного з векторів системи S. Для цього помножимо обидві частини рівності (1.5) на вектор $\vec{a}_i, i = \overline{1,k}$ і прирівняємо цей добуток до нуля. Використовуючи властивість 5 операції скалярного множення, отримаємо:

$$\overrightarrow{a_{k+1}} \cdot \vec{a}_i = \overrightarrow{b_{k+1}} \cdot \vec{a}_i - \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} \cdot \vec{a}_i - \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} \cdot \vec{a}_i - \dots - \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k} \cdot \vec{a}_i = 0.$$

З рівностей 1.3 матимемо: $\alpha_i \cdot \vec{a}_i \cdot \vec{a}_i = \overrightarrow{b_{k+1}} \cdot \vec{a}_i$. За аксіомою 4 операції скалярного множення $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i \neq 0$, а тому

$$\alpha_i = \left(\overrightarrow{b_{k+1}} \cdot \vec{a}_i\right) \div (\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i), i = \overline{1,k}\,. \qquad \mathbf{(1.6)}$$

Зрозуміло, що знайдений вектор $\overrightarrow{a_{k+1}}$ ортогональний до кожного з векторів системи S. Доведемо методом від супротивного, що цей вектор ненульовий. Припустимо, що $\overrightarrow{a_{k+1}} = \vec{0}$, тоді з рівності 1.5 випливає, що вектор $\overrightarrow{b_{k+1}}$ є лінійною комбінацією векторів системи S. За властивістю 3 [7. 29], підсистема векторів $S' = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{b_{k+1}}\}$ лінійно залежна. За властивістю 1 лінійної залежності, базис B є також лінійно залежною системою векторів, що неможливо.

Система векторів $B' = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{a_{k+1}}, \overrightarrow{b_{k+2}}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$ також породжує векторний простір V. Ясно, що ця система лінійно незалежна, інакше її базис був би базисом простору V і містив би менше ніж n векторів, що неможливо. Ми довели, що система векторів B'є базисом векторного простору V. Якщо $k + 1 < n$, то повторюємо ті ж міркування для ортогональної системи S' та базису B'. Продовжуючи процес, зрештою отримаємо ортогональний базис векторного простору зі скалярним множенням.

Δ

Зауваження 1.3. Побудова ортогонального базису векторного простору за допомогою формул 1.5 та 1.6 називається **процесом ортогоналізації**. Цей процес застосовується і на практиці, зокрема для знаходження ортогональних базисів евклідових просторів.

<u>Наслідки</u>

1. Будь-який ненульовий скінченовимірний векторний простір V зі скалярним множенням володіє ортогональним базисом.
2. Довільний ненульовий вектор скінченовимірного векторного простору V зі скалярним множенням міститься в деякому ортогональному базисі цього простору.

∇

1. Нехай $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ – базис векторного простору V. За означенням 1.4 система векторів $\{\overrightarrow{e_1}\}$ – ортогональна. Застосовуючи до цієї системи векторів та базису B процес ортогоналізації, знайдемо ортогональний базис простору V.
2. Нехай $\vec{a}$ – довільний ненульовий вектор простору V. За означенням 1.4 система векторів $S = \{\vec{a}\}$ – ортогональна, а тому за теоремою 1.2 систему векторів S можна доповнити до ортогонального базису простору V.

   Δ

1.3. Ортогональне доповнення векторного підпростору

Означення 1.6. *Нехай V – скінченовимірний векторний простір зі скалярним множенням, U – деякий його підпростір, $\vec{a}$ – довільний вектор простору V. Вектор $\vec{a}$, ортогональний кожному вектору підпростору U, називається* ***вектором, ортогональним підпростору U***. *При цьому пишуть $\vec{a} \perp U$.*

Зауваження 1.4. Нехай $\vec{a}$ – довільний вектор простору V зі скалярним множенням, $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}\}$ – будь-яка система векторів цього простору. Вектор $\vec{a}$ ортогональний лінійній оболонці $L(S)$ тоді і тільки тоді, коли він ортогональний кожному вектору системи S.

∇

<u>*Необхідність.*</u> Дано, що вектор $\vec{a}$ ортогональний лінійній оболонці $L(S)$. За зауваженням 3.3 [7. 31] $S \subset L(S)$. За означенням 1.6 вектор $\vec{a}$ ортогональний кожному вектору системи S.

<u>*Достатність.*</u> Нехай $\vec{a} \perp \vec{a}_i, i = \overline{1, k}$, $\vec{b} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k}$ – довільна лінійна комбінація векторів системи S. Враховуючи, що $\vec{a} \cdot \vec{a}_i = 0$, за властивістю 5 скалярного множення матимемо:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1 \cdot \vec{a} \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \vec{a} \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_k \cdot \vec{a} \cdot \overrightarrow{a_k} = 0$. Оскільки $\vec{b}$ – довільний вектор лінійної оболонки $L(S)$, то $\vec{a} \perp L(S)$.

Δ

Означення 1.7. *Множина всіх векторів простору V зі скалярним множенням, ортогональних його підпростору U, називається* ***ортогональним доповненням*** *підпростору U і позначається $U^{\perp}$.*

<u>Теорема 1.3.</u> Нехай V – векторний простір зі скалярним множенням над полем скалярів F, U – його підпростір. Тоді ортогональне доповнення $U^{\perp}$ непорожнє і утворює векторний підпростір простору V.

∇

Дійсно, ця множина непорожня, оскільки за властивістю 3 операції скалярного множення $\vec{0} \in U^{\perp}$. За критерієм підпростору [7. 63] потрібно довести замкнутість операцій додавання векторів та множення вектора на скаляр простору V на його підмножині $U^{\perp}$. Нехай $\forall\, \vec{a}, \vec{b} \in U^{\perp}, \alpha \in F, \vec{c} \in U$. Доведемо, що вектор $\vec{a} + \vec{b} \in U^{\perp}$. Оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ортогональні кожному з векторів підпростору U, то за означенням 1.3 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. Тоді $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{в} \cdot \vec{c} = 0$, а тому $\vec{a} + \vec{b} \in U^{\perp}$. Аналогічно доводиться, що $\alpha \cdot \vec{a} \in U^{\perp}$.

Δ

Приклади ортогональних доповнень векторних підпросторів

1. Нехай E_n – стандартний евклідів простір і $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_m}\}$ його система векторів, $\vec{a}_i = (a_{i1},\ a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = \overline{1,m}$, $U = L(S)$ – підпростір цього простору. Знайдемо ортогональне доповнення $U^{\perp}$. За зауваженням 1.4 вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ортогональний підпростору U тоді і тільки тоді, коли $\vec{x} \cdot \vec{a}_i = 0$, $i = \overline{1,m}$. Враховуючи формулу 1.2, заключаємо, що $\vec{x} \in U^{\perp}$ тоді і тільки тоді, коли він є розв'язком однорідної системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0 \end{cases}$$

Отже, підпростір розв'язків останньої системи лінійних рівнянь і є ортогональним доповненням векторного підпростору U.

2. Нехай у стандартному евклідовому просторі E_5 вибраний одиничний базис $\mathrm{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_5})$ [7. 72]. Знайдемо ортогональне доповнення до підпростору $U = L(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_4})$. Отже підпростір U складається з усіх векторів евклідового простору E_5, у яких третя та п'ята компоненти дорівнюють нулю. Ясно, що $U^{\perp} = L(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_5})$.

<u>Теорема 1.4.</u> Нехай V – скінченовимірний векторний простір зі скалярним множенням, U – деякий його підпростір, тоді [7. 57]

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{U}^{\perp} \qquad \textbf{(1.7)}$$

∇

Якщо $U = \langle\vec{0}\rangle$, то $U^{\perp} = V$, оскільки нульвектор ортогональний всім векторам простору V. Формула 1.7 приймає вид: $V = \langle\vec{0}\rangle \oplus V$.

Нехай U – ненульовий векторний підпростір. Спочатку доведемо, що $U \cap U^{\perp} = \langle\vec{0}\rangle$. Нехай $\vec{a} \in U \cap U^{\perp}$, тоді $\vec{a} \in U, \vec{a} \in U^{\perp}$.Отже вектор $\vec{a}$ ортогональний сам собі, а тому $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$. За властивістю 4 операції скалярного множення $\vec{a} = \vec{0}$.

Тепер доведемо, що $\forall \vec{a} \in V \, \exists \, \vec{b} \in U, \vec{c} \in U^{\perp}$ такі, що $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. За наслідком 1 теореми 1.2 підпростір U має ортогональний базис $B = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_m}\}$. Потрібно підібрати скаляри $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ і вектор $\vec{c} \in U^{\perp}$ так, щоб виконувалась рівність

$$\vec{a} = \beta_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \beta_m \cdot \overrightarrow{b_m} + \vec{c}. \qquad \textbf{(1.8)}$$

Для цього помножимо скалярно обидві частини рівності 1.8 на вектор $\vec{b}_i$, $i = \overline{1,m}$. Враховуючи ортогональність базису B, а також ортогональність вектору $\vec{c}$ та підпростору U, матимемо: $\vec{a} \cdot \vec{b}_i = \beta_i \cdot \vec{b}_i \cdot \vec{b}_i$.

Вектори базису ненульові, а тому за означенням 1.1 $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i \neq 0$. Виконавши ділення у полі F, отримаємо:

$$\beta_i = (\vec{a} \cdot \vec{b}_i) \div (\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i), i = \overline{1,m} \qquad \textbf{(1.9)}$$

Нехай $\vec{b} = \beta_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \beta_m \cdot \overrightarrow{b_m}$, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Доведемо, що $\vec{c} \in U^{\perp}$. Дійсно, $\vec{c} \cdot \vec{b}_i = (\vec{a} - \beta_1 \cdot \overrightarrow{b_1} - \beta_2 \cdot \overrightarrow{b_2} - \dots - \beta_m \cdot \overrightarrow{b_m}) \cdot \vec{b}_i = \vec{a} \cdot \vec{b}_i - \beta_i \cdot \vec{b}_i \cdot$ $\cdot \vec{b}_i$. За рівністю 1.9 буде $\vec{c} \cdot \vec{b}_i = 0, i = \overline{1,m}$. Отже, вектор $\vec{c}$ ортогональний кожному вектору базису підпростору U, а тому за зауваженням 1.4 $\vec{c} \perp U$, тобто $\vec{c} \in U^{\perp}$. За наслідком теореми 5.6 [7. 69] простір V є прямою сумою своїх підпросторів U і $U^{\perp}$.

Δ

<u>Теорема 1.5.</u> Нехай V – скінченовимірний векторний простір зі скалярним множенням, U – деякий його підпростір, тоді $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

∇

Нехай $\forall \vec{a} \in U, \vec{b} \in U^{\perp}$. Оскільки $\vec{b} \perp \vec{a}$, то $\vec{a} \in (U^{\perp})^{\perp}$, а тому $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$. Доведемо, що $U = (U^{\perp})^{\perp}$. За теоремою 1.4 $V = U \oplus U^{\perp}$, $V = U^{\perp} \oplus (U^{\perp})^{\perp}$. За наслідком теореми 6.5 [7. 79] буде: $dim\, U = dim\, V -$ $-dim\, U^{\perp}$, $dim\, (U^{\perp})^{\perp} = dim\, V - dim\, U^{\perp}$, а тому $dim\, U = dim\, (U^{\perp})^{\perp}$. Це означає, що будь-який базис підпростору U є базисом підпростору $(U^{\perp})^{\perp}$ і навпаки, а тому ці підпростори співпадають.

Δ

<u>1.4 Евклідові простори</u>

Вище ми відмічали, що це один з найважливіших класів векторних просторів зі скалярним множенням. У евклідових просторах можна ввести аналог поняття довжини, який називається нормою вектора та кута між векторами, тому тривимірний евклідів простір є математичною моделлю простору, в якому ми живемо.

Означення 1.8. ***Евклідовим простором*** *називається векторний простір зі скалярним множенням заданий над полем дійсних чисел R , такий що для будь-якого вектора $\vec{a}$ з цього простору виконується $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$.*

Зрозуміло, що для евклідових просторів виконуються всі результати попередніх пунктів. Ясно також, що всі приклади векторних просторів зі скалярним множенням пункту 1.1 є евклідовими просторами. Векторні простори, які задані над полем дійсних чисел називаються дійсними векторними просторами. З наступної теореми видно, що будь-який векторний простір можна перетворити на евклідовий.

<u>Теорема 1.6.</u> На будь-якому скінченовимірному дійсному векторному просторі V можна визначити операцію скалярного множення так, щоб цей простір став евклідовим.

∇

Нехай $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ – базис векторного простору V, $\vec{a}, \vec{b}$ – довільні вектори цього простору, які в базисі B мають координати: $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ і $\vec{b}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Визначимо на векторному просторі V операцію множення векторів, поклавши $\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1 \cdot \beta_1 + a_2 \cdot \beta_2 + \dots + \alpha_n \cdot \beta_n$ (*) і доведемо, що задана цією формулою операція є скалярним множенням векторів. Для цього доведемо аксіоми 2 і 4 скалярного множення. Інші аксіоми доведіть самостійно.

Нехай $\alpha \in R$ довільне число. За теоремою 7.2 [7. 81] вектор $\alpha \cdot \vec{a}$ у базисі B має координати $\alpha \cdot \vec{a}(\alpha \cdot \alpha_1, \alpha \cdot \alpha_2, \dots, \alpha \cdot \alpha_n)$. Враховуючи формулу (*), матимемо: $(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\alpha \cdot \alpha_1) \cdot \beta_1 + (\alpha \cdot \alpha_2) \cdot \beta_2 + \dots + (\alpha \cdot \alpha_n) \cdot \beta_n =$
$= \alpha \cdot (\alpha_1 \cdot \beta_1 + a_2 \cdot \beta_2 + \dots + \alpha_n \cdot \beta_n) = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$. Аксіому 2 доведено. Аксіома 4 випливає з наступного співвідношення $\vec{a} \cdot \vec{a} = \alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \dots + \alpha_n{}^2 \geq 0$
Δ

Міняючи базиси векторного простору V, можна отримати різні евклідові простори. Пізніше ми доведемо, що вони мають однакові властивості, тобто, що вони ізоморфні.

1.5. Норма вектора у евклідовому просторі

За формулою 1.1, для будь-якого геометричного вектора виконується $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2$. У довільному евклідовому просторі замість поняття «довжина» використовують термін «норма вектора».

Означення 1.9. Нормою вектора $\vec{a}$ *евклідового простору* V *називається арифметичний квадратний корінь зі скалярного квадрату цього вектора. Норма вектора* $\vec{a}$ *позначається* $\|\vec{a}\|$.

Отже, за цим означенням для довільного вектора $\vec{a}$ буде:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \qquad \textbf{(1.10)}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \qquad \textbf{(1.11)}$$

Властивості норми вектора

Для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ евклідового простору V та будь-якого дійсного числа α виконується:

1. $\|\vec{a}\| \geq 0$, причому $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$;
2. $\|\alpha \cdot \vec{a}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{a}\|$;
3. $\|\vec{a} \cdot \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$ – нерівність Коші-Буняковського;
4. $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ – нерівність трикутника.

∇

1. Випливає з рівності 1.10 та властивості 4 скалярного множення.
2. $\|\alpha \cdot \vec{a}\| = \sqrt{(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot (\alpha \cdot \vec{a})} = \sqrt{\alpha^2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = |\alpha| \cdot \|\vec{a}\|$.
3. Властивість очевидна, якщо один з векторів нульовий, тому будемо вважати вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ненульовими. Оскільки скалярний квадрат будь-якого вектора невід'ємний, то для будь-яких дійсних чисел α і β буде: $(\alpha \cdot \vec{a} - \beta \cdot \vec{b}) \cdot (\alpha \cdot \vec{a} - \beta \cdot \vec{b}) = \alpha^2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\alpha \cdot \beta \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \beta^2 \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} \geq 0$.

   Покладемо: $\alpha = \|\vec{b}\|, \beta = \|\vec{a}\|$. Тоді з цієї рівності отримаємо: $2 \cdot (\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|)^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ненульові, а тому за властивістю 1 $\|\vec{a}\| \neq 0, \|\vec{b}\| \neq 0$. Розділивши обидві частини останньої нерівності на додатне число $2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$, отримаємо нерівність Коші-Буняковського.
4. За рівністю 1.11 матимемо: $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + +\|\vec{b}\|^2 = (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2 + 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b} - \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|) \leq (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$

   , тому що за нерівністю Коші-Буняковського останній доданок є недодатним числом. Взявши квадратні корені з обох частин нерівності

   $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 \leq (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$, завершимо доведення нерівності трикутника.

Δ

Вияснимо, при яких умовах нерівність Коші-Буняковського перетворюється на рівність. Це дасть нам один з критеріїв пропорційності векторів.

Теорема 1.7. Рівність

$$\|\vec{a}\cdot\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\| \qquad \textbf{(1.12)}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ пропорційні.

∇

Необхідність. Нехай виконується рівність 1.12. Доведемо методом від супротивного, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ пропорційні. Припустимо, що вони не пропорційні. Це означає, що для довільного дійсного числа α буде: $\vec{a}-\alpha\cdot\vec{b}\neq\vec{0}$. За властивістю 1 норми вектора маємо $\|\vec{a}-\alpha\cdot\vec{b}\|>0$. Тоді за рівністю 1.11 $(\vec{a}-\alpha\cdot\vec{b})^2=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\cdot\alpha\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\alpha^2\cdot\vec{b}\cdot\vec{b}>0$. Це означає, що квадратне рівняння $(\vec{b}\cdot\vec{b})\cdot x^2+\left(-2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot x+(\vec{a}\cdot\vec{a})=0$ немає дійсних коренів, а тому його дискримінант: $D=\left(-2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2-4\cdot(\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{b})<0$. За рівністю 1.11 звідси випливає, що $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2<\left(\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\right)^2$. Отже рівність 1.12 порушується, що суперечить умові. З цього протиріччя заключаємо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ пропорційні.

Достатність. Дано, що існує дійсне число α таке, що $\vec{a}=\alpha\cdot\vec{b}$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ пропорційні. Тоді $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\alpha^2\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)^2=\alpha^2\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)=$ $=\left(\alpha\cdot\alpha\cdot\vec{b}\cdot\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)=(\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)=\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2$. Взявши квадратний корінь з обох часин рівності $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2$, отримаємо рівність 1.12.

∆

Теорема 1.8 (теорема Піфагора).

Для будь-яких ортогональних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується:

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2.$$

∇

За рівністю 1.11, враховуючи ортогональність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, маємо:
$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = (\vec{a}\cdot\vec{a})^2 + 2\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) + \left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right)^2 = \|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2$.
Δ

Легко помітити, що у двовимірному евклідовому просторі ця теорема перетворюється на звичайну теорему Піфагора, записану у векторній формі.

В аналітичній геометрії з формули 1.1 можна виразити косинус кута між векторами через скалярний добуток та довжини цих векторів. Цей результат переноситься в лінійну алгебру для введення кута між будь-якими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ довільного евклідового простору V . Отже, кут α між довільними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ евклідового простору знаходиться за значенням його косинусу:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|}$$

Аналог теореми 1.7 в аналітичній геометрії за допомогою формули 1.1 отримати значно легше. Ця теорема є критерієм колінеарності геометричних векторів.

1.6. Ортонормований базис евклідового простору

Означення 1.10. *Вектор називається* ***нормованим або ортом****, якщо його норма дорівнює 1.*

Зауваження 1.5. Для того, щоб **нормувати** вектор $\vec{a}$ потрібно помножити його на число $1/\|\vec{a}\|$.
∇

Нехай $\vec{a}$ – довільний вектор евклідового простору,

$$\vec{e} = 1/\|\vec{a}\|\cdot\vec{a}. \qquad \textbf{(1.13)}$$

За формулою 1.10:
$\|\vec{e}\| = \sqrt{\vec{e}\cdot\vec{e}} = \sqrt{1/\|\vec{a}\|\cdot\vec{a}\cdot 1/\|\vec{a}\|\cdot\vec{a}} = \sqrt{1/\|\vec{a}\|^2\cdot(\vec{a}\cdot\vec{a})} = \sqrt{1/\|\vec{a}\|^2}\cdot$
$\cdot\sqrt[+]{\vec{a}\cdot\vec{a}} = 1.$
Δ

***Означення 1.11. Ортонормованою системою** векторів евклідового простору V називається ортогональна система векторів цього простору, яка складається з нормованих векторів.*

***Означення 1.12. Ортонормованим базисом** евклідового простору V називається ортогональний базис цього простору, кожен вектор якого нормований.*

<u>Теорема1.9.</u> Будь-який ненульовий скінченовимірний евклідовий простір V володіє ортонормованим базисом.

Випливає з наслідку 1 теореми 1.2 та зауваження 1.5.

<u>Наслідок.</u> Будь-яку ортонормовану систему векторів можна доповнити до ортонормованого базису ненульового скінченовимірного евклідового простору. Для цього спочатку за допомогою процесу ортогоналізації потрібно доповнити ортогональну систему S векторів до ортогонального базису евклідового простору, а потім кожний вектор цього базису нормувати, тобто помножити на число, обернене до його норми.

Зауваження 1.6. Нехай $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ – ортонормований базис евклідового простору V. Тоді:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1 \;\; i, j = \overline{1, n}, i \neq j. \qquad \textbf{(1.14)}$$

Випливає з означення 1.3 та рівності 1.11.

<u>Теорема 1.10.</u> Нехай $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ – базис евклідового простору V, $\vec{a}, \vec{b}$ – довільні вектори цього простору, які в базисі B мають координати: $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ і $\vec{b}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Базис B ортонормований тоді і тільки тоді, коли:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1 \cdot \beta_1 + a_2 \cdot \beta_2 + \dots + \alpha_n \cdot \beta_n. \qquad \textbf{(1.15)}$$

∇

<u>Необхідність.</u> Дано, що базис B ортонормований. Доведемо справедливість рівності 1.15. Застосуємо властивість 5 операції скалярного множення до розкладів векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за базисом B, тобто до лінійних комбінацій

$\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{e_n}, \vec{b} = \beta_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \beta_n \cdot \overrightarrow{e_n}.$

Використовуючи рівності 1.14, отримаємо формулу 1.15.

Достатність. Нехай тепер виконується рівність 1.15. Доведемо, що базис B ортонормований. За зауваженням 7.1 [7. 81] вектор $\vec{e}_i$ має впорядкований набір кооординат i-та компонента якого дорівнює 1, а інші його компоненти дорівнюють нулю. Використовуючи формулу 1.15 до векторів базису B, легко перевірити справедливість рівностей 1.14, з яких випливає, що базис B ортонормований.

Δ

Наслідок. *Нехай* $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ *– ортонормований базис евклідового простору* V, $\vec{a}$ *– довільний вектор цього простору, який в базисі* B *має координати:* $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. *Тоді:*

$$1.\ \|\vec{a}\| = \sqrt{{\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + \dots + {\alpha_n}^2} \quad \textbf{(1.16)}$$

$$2.\ \alpha_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i,\ i = \overline{1,n} \quad \textbf{(1.17)}$$

∇

Рівність 1.16 випливає з рівностей 1.10 і 1.15. Використовуючи рівності 1.14, доведемо рівність 1.17:

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_i = (\alpha_1 \cdot \vec{e_1} + \alpha_2 \cdot \vec{e_2} + \dots + \alpha_i \cdot \vec{e}_i + \dots + \alpha_n \cdot \vec{e_n}) \cdot \vec{e}_i = \alpha_i \cdot \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = \alpha_i.$$

Δ

Зауваження 1.7. Система одиничних векторів E [7. 26] є ортонормованим базисом стандартного евклідового простору E_n.

Справедливість рівності 1.15 для системи одиничних векторів перевірте самостійно.

1.7. Ізоморфізм евклідових просторів

Означення 1.13. *Взаємно-однозначне відображення* φ *евклідового простору* V *на евклідів простір* V' *називається* ***ізоморфізмом евклідового простору*** V *на* V', *якщо для довільних векторів* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *евклідового простору* V *і довільного дійсного числа* α *виконується:*

$$\varphi(\vec{a} + \vec{b}) = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b}) \quad \textbf{(1.18)}$$

$$\varphi(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{a}) \quad \textbf{(1.19)}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \varphi(\vec{a}) \cdot \varphi(\vec{b}) \quad \textbf{(1.20)}$$

При цьому евклідові простори V *і* V' *називають* ***ізоморфними*** *і позначають* $V \equiv V'$.

Зауваження 1.8. Ізоморфні евклідові простори ізоморфні і як векторні простори.

Щоб в цьому переконатись, достатньо порівняти означення 8.2[7. 88] і означення 1.13.

<u>Теорема 1.11.</u> Відношення ізоморфізму є відношенням еквівалентності [8. 63] на множині всіх евклідових просторів.

∇

Враховуючи доведення теореми 8.8 [7. 89], потрібно переконатись в істинності рівності 1.20 для тотожного відображення ε [8. 86] та відображень φ^{-1} , $\varphi\cdot\chi$ при умові, що φ і χ ізоморфізми евклідових просторів.

Рівність 1.20 для тотожного відображення ε очевидна, оскільки $\varepsilon(\vec{a}) = \vec{a}, \varepsilon(\vec{b}) = \vec{b}$.

Доведемо рівність 1.20 для взаємно-однозначного відображення φ^{-1} [8. 95], $\varphi\cdot\chi$ [8. 90] при умові, що ця рівність виконується для відображення φ. Маємо: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \varphi\big(\varphi^{-1}(\vec{a})\big)\cdot\varphi\big(\varphi^{-1}(b)\big) = \varphi^{-1}(\vec{a})\cdot\varphi^{-1}(b)$.

Тепер перевіримо рівність 1.20 для композиції відображень $\varphi\cdot\chi$ при умові, що вона виконується для кожного з цих відображень.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \varphi(\vec{a})\ \cdot\varphi(\vec{b}) = \chi\big(\varphi(\vec{a})\big)\cdot\chi\left(\varphi(\vec{b})\right) = \varphi\chi(\vec{a})\cdot\varphi\chi(\vec{b})$.

Δ

<u>Теорема 1.12</u> Будь-який $\boldsymbol{n}$-вимірний евклідів простір $\boldsymbol{V}$ ізоморфний $\boldsymbol{n}$-вимірному стандартному евклідовому простору $\boldsymbol{E_n}$.

∇

Для доведення цієї теореми можна використати доведення теореми 8.3 [7. 91]. При цьому додатково слід переконатись, що рівність 1.20 виконується для відображення $\varphi(\vec{a}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, яке відображає будь-який вектор $\vec{a}$ евклідового простору V на рядок його координат у деякому базисі цього простору. Ясно, що цей рядок є вектором арифметичного векторного простору R^n. Рівність 1. 20 для цього відображення випливає зі співпадання правих частин рівностей 1.15 та 1.2.

Δ

<u>Теорема 1.13.</u> Нехай $\boldsymbol{\varphi}$ – ізоморфізм евклідового простору $\boldsymbol{V}$ на евклідів простір $\boldsymbol{V'}$ і $\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$, ортонормований базис евклідового простору $\boldsymbol{V}$. Тоді система векторів $\boldsymbol{B'} = \{\boldsymbol{\varphi}(\overrightarrow{e_1}), \boldsymbol{\varphi}(\overrightarrow{e_2}), \dots, \boldsymbol{\varphi}(\overrightarrow{e_n})\}$ є ортонормованим базисом евклідового простору $\boldsymbol{V'}$.

∇

Дивись теорему 8.4 [7. 91]. Те, що базис B'– ортонормований, випливає з ортонормованості базису B та рівності 1.20.

Δ

Теорема 1.14 (критерій ізоморфізму евклідових просторів).

Скінченовимірні евклідові простори V і V' ізоморфні тоді і тільки тоді, коли співпадають їх розмірності.

Доведіть самостійно, враховуючи теорему 8.5 [7. 93] та зауваження 1.8.

§2 Лінійні відображення. Лінійні оператори

2.1. Лінійні відображення, їх завдання та приклади

У цьому параграфі повернемось до більш детального вивчення лінійних відображень скінченовимірних векторних просторів над довільним полем F. Первісні відомості, які стосуються лінійних відображень наведено в параграфі 8 [7. 87]. Отже, нагадаємо основне означення.

Означення 2.1. *Нехай V і V' – векторні простори над одним і тим же полем F. Відображення φ простору V у простір V' називається **гомоморфізмом або лінійним відображенням** простору V у простір V', якщо для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ простору V і довільного скаляра α з поля F виконується:*

$$\varphi(\vec{a}+\vec{b}) = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b}) \quad \textbf{(2.1)}$$

$$\varphi(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{a}) \quad \textbf{(2.2)}$$

*Рівності 2.1 і 2.2 називаються **умовами лінійності**, причому рівність 2.1 називається **адитивністю**, а рівність 2.2 – **однорідністю** лінійного відображення φ. Лінійне відображення векторного простору V в себе називається **лінійним оператором** векторного простору V.*

Приклади лінійних відображень та лінійних операторів.

1. Тотожне відображення ε [8. 86] векторного простору V на себе є лінійним оператором простору V, який називається **одиничним лінійним оператором.**

∇

Нагадаю, що тотожне відображення відображає кожен вектор простору V в себе $\forall \vec{a} \in V \, \varepsilon(\vec{a}) = \vec{a}$. Умови адитивності та однорідності для нього перевіряються очевидно. Дійсно $\varepsilon(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{b} = \varepsilon(\vec{a}) + \varepsilon(\vec{b})$. Однорідність перевірте самостійно.

Δ

2. Для довільного простору V відображення $\varphi(\vec{a}) = \vec{0}$, яке кожен вектор простору V відображає у нульвектор цього простору, є лінійним оператором простору V. Цей лінійний оператор називається **нульовим лінійним оператором.** Рівності 2.1 та 2.2 для нього перевірте самостійно.
3. Нехай V векторний простір над полем F, $\delta \in F$ довільний фіксований скаляр. Відображення, яке ставить у відповідність довільному вектору $\vec{a}$ простору V вектор $\delta\vec{a}$ позначається $\delta\varepsilon$. Воно є лінійним оператором простору V, який називається **оператором подібності**: $\delta\varepsilon(\vec{a}) = \delta\vec{a}$.

∇

Перевіримо однорідність цього відображення. Його адитивність доведіть самостійно. Доведемо його однорідність. Для довільного скаляра α та будь-якого вектора $\vec{a}$, враховуючи аксіому 2 означення векторного простору [7. 16] маємо: $\delta\varepsilon(\alpha \cdot \vec{a}) = \delta(\alpha \cdot \vec{a}) = (\delta\alpha) \cdot \vec{a} = (\alpha\delta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\delta\vec{a}) = \alpha \cdot (\delta\varepsilon(\vec{a}))$.

Δ

Зрозуміло, що одиничний лінійний оператор є оператором подібності при $\delta = 1$, а нульовий лінійний оператор є оператором подібності при $\delta = 0$.

4. Нехай V – векторний простір над полем F, $\vec{a}$ – довільний вектор простору V, $\vec{x}$ – фіксований ненульовий вектор цього простору. Відображення $\varphi(\vec{a}) = \vec{a} + \vec{x}$ не буде лінійним оператором простору V.

Дійсно, для цього відображення не виконується рівність 2.1, тому що $\varphi(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{x}$, $\varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b}) = (\vec{a} + \vec{x}) + (\vec{b} + \vec{x})$.

5. Нехай $V = U_1 \oplus U_2$ – пряма сума підпросторів [7. 67]. Це означає, що для будь-якого вектора $\vec{a}$ простору V існує єдине подання $\vec{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_1} \in U_1$, $\overrightarrow{a_2} \in U_2$. Відображення $\varphi(\vec{a}) = \overrightarrow{a_1}$ є лінійним оператором

простору V, який називається **оператором проектування** на підпростір U_1. Рівності 2.1 і 2.2 для цього відображення перевірте самостійно.

6. Нехай V – двовимірний векторний простір вільних векторів площини π над полем дійсних чисел R, причому в цій площині задана прямокутна декартова система координат Oxy. Задамо відображення φ, яке повертає довільний вектор $\vec{a}$ цього простору на фіксований кут γ відносно початку координат, тобто γ – це кут між векторами $\vec{a}$ і $\varphi(\vec{a})$. Відображення φ є лінійним **оператором повороту**.

   ∇

Доведемо рівність 2.1 для цього відображення. Додаючи вектори за правилом паралелограма, легко помітити, що $\varphi\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ – це вектор, представлений діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, причому повернутою на кут γ. З іншого боку вектор $\varphi(\vec{a})+\varphi\left(\vec{b}\right)$ – це діагональ паралелограма, побудованого на вектора $\varphi(\vec{a})$ і $\varphi\left(\vec{b}\right)$. Ясно, що ці діагоналі співпадають. Для нашого відображення рівність $\varphi(\alpha\cdot\vec{a})=\alpha\cdot\varphi(\vec{a})$ означає, що неважливо в якому порядку виконувати дії: множення на число α чи поворот на кут γ, або навпаки.

Δ

7. Нехай $D[\,A,B]$ – векторний простір нескінченно-диференційованих на проміжку $[A,B]$ функцій над полем дійсних чисел R. Відображення $D(f)=f'$, яке ставить у відповідність кожній функції f цього простору її похідну називається **оператором диференціювання**. Умови лінійності для цього оператора випливають з властивостей похідної.
8. Будемо вважати, що вектори n-вимірного арифметичного векторного простору R^n записані стовпцями (а не рядками). Такі вектори називаються **векторстовпцями**. Нехай X – фіксована матриця порядку n [9. 12]. Для довільного вектор стовпця $\vec{a}$ відображення $\varphi(\vec{a})=X\cdot\vec{a}$ є лінійним оператором простору R^n. Умови лінійності випливають з

відповідних властивостей операцій додавання матриць та множення матриці на число.

9. Нехай V – довільний n-вимірний векторний простір над полем скалярів F в якому вибраний базис B. В теоремі 8.3 [7. 90] доведено, що відображення $\varphi(\vec{a}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, яке ставить у відповідність кожному вектору простору V порядкований набір його координат у базисі B є лінійним відображенням простору V на n-вимірний арифметичний векторний простір F^n [7. 24].

10. Нехай $V = R^2$ – 2-вимірний арифметичний векторний простір впорядкованих пар дійсних чисел, а V' – векторний простір матриць другого порядку відносно операцій додавання матриць та множення матриці на число. Для довільної впорядкованої пари чисел (a, b) покладемо $\varphi(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Перевірте самостійно, що φ є лінійним відображенням простору V у простір V'. Це лінійне відображення не на ввесь простір V', тому що не всі матриці другого порядку діагональні.

Як задати будь-яке лінійне відображення видно з наступної теореми.

<u>**Теорема 2.1.**</u> **Нехай V і V' векторні простори над одним і тим же полем F і $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ – базис векторного простору V. Для довільних фіксованих векторів $\overrightarrow{a_1}', \overrightarrow{a_2}', \dots, \overrightarrow{a_n}'$ існує єдине лінійне відображення φ простору V у V'таке, що**

$$\varphi(\vec{e}_i) = \vec{a}_i', i = \overline{1, n}. \tag{2.3}$$

∇

<u>*Існування.*</u> Нехай $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \vec{e_1} + \alpha_2 \cdot \vec{e_2} + \dots + \alpha_n \cdot \vec{e_n}$ – розклад довільного вектора $\vec{a}$ простору V за базисом B. Задамо відображення φ простору V у V', поклавши:

$$\varphi(\vec{a}) = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1}' + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2}' + \dots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n}'. \tag{2.4}$$

Спочатку доведемо, що для цього відображення виконуються рівності 2.3. Ясно, що $\vec{e_1} = 1 \cdot \vec{e_1} + 0 \cdot \vec{e_2} + \dots + 0 \cdot \vec{e_n}$, а тому з рівності 2.4 маємо:

$\varphi(\overrightarrow{e_1}) = 1 \cdot \overrightarrow{a_1}' + 0 \cdot \overrightarrow{a_2}' + \cdots + 0 \cdot \overrightarrow{a_n}' = \overrightarrow{a_1}'$. Аналогічно перевіряються рівності 2.3 для решти векторів базису B.

Доведемо тепер, що відображення φ – лінійне. Нехай крім вектора $\vec{a}$ вибрано довільний вектор $\vec{b} = \beta_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \beta_n \cdot \overrightarrow{e_n}$ простору V і будь-який скаляр α з поля F. За теоремою 7.2 [7. 81] буде: $\varphi(\vec{a} + \vec{b}) = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot$ $\cdot \overrightarrow{a_1}' + (\alpha_2 + \beta_2) \cdot \overrightarrow{a_2}' + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \cdot \overrightarrow{a_n}' = (\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1}' + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2}' + \cdots + \alpha_n \cdot$ $\overrightarrow{a_n}') + (\beta_1 \cdot \overrightarrow{a_1}' + \beta_2 \cdot \overrightarrow{a_2}' + \cdots + \beta_n \cdot \overrightarrow{a_n}') = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b})$.
Аналогічно доводиться рівність 2.2. Шукане лінійне відображення φ знайдене.

Єдиність. Доведемо методом від супротивного. Припустимо, що крім лінійного відображення φ, яке задовільняє рівності 2.3, існує лінійне відображення χ простору V у простір V'таке, що $\chi(\vec{e}_i) = \vec{a}_i', i = \overline{1,n}$. Нехай $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{e_n}$ довільний вектор простору V. За теоремою 8.1 [7. 87] лінійне відображення переводить лінійну комбінацію векторів у лінійну комбінацію їх образів з тими ж коефіцієнтами, а тому $\chi(\vec{a}) = \alpha_1 \cdot$ $\cdot \chi(\overrightarrow{e_1}) + \alpha_2 \cdot \chi(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + \alpha_n \cdot \chi(\overrightarrow{e_n}) = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1}' + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2}' + \cdots + +\alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n}'$.
Порівнюючи з рівністю 2.4, отримаємо, що для довільного вектора $\vec{a}$ простору V буде: $\varphi(\vec{a}) = \chi(\vec{a})$.
Δ

Таким чином, щоб задати лінійне відображення простору V у простір V' потрібно задати образи базисних векторів деякого базису простору V. У рівностях 2.3 вектори $\vec{a}_i'$ необов'язково різні. Зрозуміло, що ця теорема виконується і для лінійних операторів, при цьому вектори $\vec{a}_i'$ належать тому ж простору V.

2.2. Матриця лінійного відображення

Нагадаю, що в теорії векторних просторів ми використовуємо матриці, елементи яких належать довільному полю F. Для таких матриць справедливі всі відомі нам результати. Теорія матриць – це один з найзручніших засобів для дослідження лінійних відображень та лінійних операторів.

Нехай V і V' – ненульові скінченовимірні векторні простори над одним і тим же полем F і нехай в цих просторах вибрані базиси відповідно $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ і $B' = \{\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \dots, \overrightarrow{e_m}'\}$, φ – лінійне відображення простору V у простір V'. Образи векторів базису B при відображенні φ є векторами простору V', а тому їх можна розкласти за базисом B'. Маємо:

$$\begin{cases} \varphi(\overrightarrow{e_1}) = \alpha_{11} \cdot \overrightarrow{e_1}' + \alpha_{21} \cdot \overrightarrow{e_2}' + \dots + \alpha_{m1} \cdot \overrightarrow{e_m}' \\ \varphi(\overrightarrow{e_2}) = \alpha_{12} \cdot \overrightarrow{e_1}' + \alpha_{22} \cdot \overrightarrow{e_2}' + \dots + \alpha_{m2} \cdot \overrightarrow{e_m}' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(\overrightarrow{e_n}) = \alpha_{1n} \cdot \overrightarrow{e_1}' + \alpha_{2n} \cdot \overrightarrow{e_2}' + \dots + \alpha_{mn} \cdot \overrightarrow{e_m}' \end{cases} \qquad \textbf{(2.5)}$$

Означення 2.2 *Нехай V і V' ненульові скінченовимірні векторні простори, в яких вибрані базиси $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ і $B' = \{\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \dots, \overrightarrow{e_m}'\}$ відповідно, φ – лінійне відображення простору V у простір V'. Матриця $A = (\alpha_{ij})$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, j-й стовпець якої є стовпцем координат образу j-го вектора базису B у базисі B' називається **матрицею лінійного відображення** φ у базисах B і B'.*

Зауваження 2.1.

1. Матриця лінійного відображення залежить від вибору базисів просторів, на яких це відображення задано.
2. Нехай V і V' – ненульові скінченовимірні векторні простори над одним і тим же полем F, в яких вибрані базиси B і B' відповідно. Лінійні відображення, які в базисах B і B' мають одну і ту ж матрицю, співпадають.
3. Нехай φ – лінійний оператор ненульового скінченовимірного простору V, в якому вибраний базис $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$. Для побудови матриці лінійного оператора φ у базисі B у її стовпці записують відповідно координати векторів $\varphi(\vec{e}_i)$ у тому ж базисі B, $i = \overline{1,n}$.

∇

Пункти 1 і 3 цього зауваження очевидні, доведемо пункт 2. Нехай φ і χ – лінійні відображення, які в базисах B і B' мають одну і ту ж матрицю $A = (\alpha_{ij}), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$. Записавши для кожного з цих відображень рівності

2.5, побачимо, що їх праві частини співпадають. Праві частини цих рівностей є векторами, позначимо їх через $\vec{a}_i', i=\overline{1,n}$. Тоді отримаємо: $\varphi(\vec{e}_i) = \chi(\vec{e}_i) == \vec{a}_i', i=\overline{1,n}$. За теоремою 2.1 ці лінійні відображення співпадають $\varphi = \chi$.

Δ

За допомогою матриці лінійного відображення можна знайти координати образу вектора, якщо відомі координати прообразу і навпаки.

<u>Теорема 2.2.</u> Нехай $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{V'}$ – ненульові скінченовимірні векторні простори, $\boldsymbol{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ і $\boldsymbol{B'} = \{\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \dots, \overrightarrow{e_m}'\}$ – базиси цих просторів, $\boldsymbol{\varphi}$ – лінійне відображення простору $\boldsymbol{V}$ у простір $\boldsymbol{V'}$, $\boldsymbol{A}$ – його матриця у базисах $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{B'}$, $\vec{\boldsymbol{a}}$ – довільний вектор простору $\boldsymbol{V}$. Нехай вектор $\vec{\boldsymbol{a}}$ у базисі $\boldsymbol{B}$ має координатний стовпець $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, а вектор $\boldsymbol{\varphi}(\vec{\boldsymbol{a}})$ у базисі $\boldsymbol{B'}$ має координатний стовпець $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. Тоді їх координатні стовпці пов'язані рівністю

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\alpha}. \tag{2.6}$$

∇

Подіємо відображенням φ на розклад вектора $\vec{a}$ за базисом B: $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{e_n}$. Матимемо: $\varphi(\vec{a}) = \alpha_1 \cdot \varphi(\overrightarrow{e_1}) + \alpha_2 \cdot \varphi(\overrightarrow{e_2}) + \dots + \alpha_n \cdot \varphi(\overrightarrow{e_n})$. Замінимо в останній рівності образи базисних векторів їх розкладами за базисом B' з рівностей 2.5:

$$\varphi(\vec{a}) = \alpha_1 \cdot \left(\alpha_{11} \cdot \overrightarrow{e_1}' + \alpha_{21} \cdot \overrightarrow{e_2}' + \dots + \alpha_{m1} \cdot \overrightarrow{e_m}'\right) + \alpha_2 \cdot \left(\alpha_{12} \cdot \overrightarrow{e_1}' + \alpha_{22} \cdot \overrightarrow{e_2}' + \right.$$
$$\left. + \dots + \alpha_{m2} \cdot \overrightarrow{e_m}'\right) + \dots + \alpha_n \cdot \left(\alpha_{1n} \cdot \overrightarrow{e_1}' + \alpha_{2n} \cdot \overrightarrow{e_2}' + \dots + \alpha_{mn} \cdot \overrightarrow{e_m}'\right) =$$

$$= (\alpha_{11} \cdot \alpha_1 + \alpha_{12} \cdot \alpha_2 + \dots + \alpha_{1n} \cdot \alpha_n) \cdot \overrightarrow{e_1}' + (\alpha_{21} \cdot \alpha_1 + \alpha_{22} \cdot \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n} \cdot$$
$$\cdot \alpha_n) \cdot \overrightarrow{e_2}' + \dots + (\alpha_{m1} \cdot \alpha_1 + \alpha_{m2} \cdot \alpha_2 + \dots + \alpha_{mn} \cdot \alpha_n) \cdot \overrightarrow{e_m}'.$$

Тепер одразу розкладемо вектор $\varphi(\vec{a})$ за базисом B', отримаємо: $\varphi(\vec{a}) = \beta_1 \cdot \overrightarrow{e_1}' + \beta_2 \cdot \overrightarrow{e_2}' + \cdots + \beta_m \cdot \overrightarrow{e_m}'$. Порівнюючи ці розклади вектора $\varphi(\vec{a})$ за базисом B', маємо: $\beta_i = (\alpha_{i1} \cdot \alpha_1 + \alpha_{i2} \cdot \alpha_2 + \cdots + \alpha_{in} \cdot \alpha_n), i = \overline{1,m}$. Враховуючи означення множення матриць [9. 21], заключаємо, що рівність 2.6 істина.

Δ

Наслідок. Нехай V – ненульовий скінченовимірний векторний простір, $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ – базис цього простору, φ – лінійний оператор, заданий на просторі V, A – його матриця у базисах B, $\vec{a}$ – довільний вектор простору V. Нехай вектор $\vec{a}$ у базисі B має координатний стовпець $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, а вектор $\varphi(\vec{a})$ у тому ж базисі B має координатний стовпець $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. Тоді їх координатні стовпці пов'язані рівністю

$$\beta = A \cdot \alpha.$$

Доведення цього наслідку повторює доведення попередньої теореми, якщо вважати що простори V і V', а також базиси B і B', співпадають.

Далі вияснимо зв'язок між матрицями лінійного оператора у різних базисах простору, на якому він діє. Для доведення цього факту нам знадобиться наступна суто технічна лема з теорії матриць.

Лема 2.1

Нехай S і T матриці порядку n. Якщо для будь-якого стовпця X довжини n виконується рівність $S \cdot X = T \cdot X$, то $S = T$.

∇

Спочатку будемо вважати, що $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Добуток першого рядка матриці S на стовпець X дорівнює першому елементу цього рядка. А тому добуток $S \cdot X$

співпадає з першим стовпцем матриці S. Тоді з рівності $S \cdot X = T \cdot X$ випливає, що перші стовпці матриць S і T співпадають. Поклавши далі $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, доведемо, що другі стовпці матриць S і T співпадають і т. д. Зрештою, поклавши $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$, доведемо, що останні стовпці цих матриць співпадають, а тому $S = T$.

∆

<u>Теорема 2.3.</u> Нехай у ненульовому скінченовимірному векторному просторі V вибрані два базиси $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ і $B' = \{\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \dots, \overrightarrow{e_n'}\}$, T – матриця переходу від базису B до базису B'. Нехай φ – лінійний оператор, який у базисі B має матрицю A, а у базисі B' цей оператор має матрицю A'. Тоді:

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T \tag{2.7}$$

∇

Нехай $\vec{a}$ – довільний вектор простору V, який у базисі B має координатний стовпець $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Нехай той же вектор $\vec{a}$ у базисі B' має координатний стовпець $\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \dots \\ \alpha_n' \end{pmatrix}$. Нехай його образ $\varphi(\vec{a})$ у базисі B має координатний стовпець $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, а у базисі B' $\varphi(\vec{a})$ має координатний стовпець $\beta' = \begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \\ \dots \\ \beta_n' \end{pmatrix}$. Тоді з рівностей 2.6 отримаємо:

$$\beta = A \cdot \alpha, \tag{2.8}$$

$$\beta' = A' \cdot \alpha'. \qquad \textbf{(2.9)}$$

Враховуючи теорему 7.4 [7. 84], матимемо наступний зв'язок між координатними стовпцями векторів у різних базисах простору V:

$$\alpha = T \cdot \alpha' \qquad \textbf{(2.10)}$$

$$\beta = T \cdot \beta' \qquad \textbf{(2.11)}$$

Підставляючи α і β з останніх двох рівностей у рівність 2.8 отримаємо: $T \cdot \beta' = A \cdot T \cdot \alpha'$. В цій рівності замінимо β'. Використовуючи рівність 2.9, отримаємо: $T \cdot A' \cdot \alpha' = A \cdot T \cdot \alpha'$. Тут α' – це довільний векторстовпець тому, що він складається з координат довільного вектора $\vec{a}$ у базисі B' простору V. За лемою 2.1 звідси випливає рівність матриць: $T \cdot A' = A \cdot T$. За наслідком 1 теореми 7.3 [7. 81] матриця переходу T – невироджена, а тому – оборотна [9. 105]. Домноживши обидві частини останньої рівності зліва на матрицю T^{-1}, отримаємо рівність 2.7.

Δ

<u>Теорема 2.4.</u> Нехай $V - n$-вимірний, а $V' - m$-вимірний простори над одним і тим же полем F. Тоді існує взаємно-однозначне відображення множини всіх лінійних відображень простору V у V' на множину всіх матриць розмірності $m \times n$ над полем F.

∇

Нехай $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ і $B' = \{\overrightarrow{e_1{}'}, \overrightarrow{e_2{}'}, \ldots, \overrightarrow{e_m{}'}\}$ – базиси векторних просторів V і V' відповідно. Позначимо через A_φ матрицю лінійного відображення φ простору V у V' у базисах B і B'. За теоремою 7.1 [7. 80] вектору $\varphi(\vec{e}_i)$ однозначно відповідає i-й стовпець матриці A_φ, а тому рівність

$$f(\varphi) = A_\varphi \qquad \textbf{(2.12)}$$

задає відображення f множини всіх лінійних відображень простору V у V' на множину всіх матриць розмірності $m \times n$ над полем F.

Доведемо, що це відображення взаємно-однозначне [8. 88]. Ін'єктивність відображення f випливає з пункту 2 зауваження 2.1. Доведемо його сюр'єктивність. Нехай $A=(\alpha_{ij}), i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ – довільна матриця розмірності $m\times n$ над полем F. Задамо вектори:

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_1}' = \alpha_{11}\cdot\overrightarrow{e_1}' + \alpha_{21}\cdot\overrightarrow{e_2}' + \cdots + \alpha_{m1}\cdot\overrightarrow{e_m}' \\ \overrightarrow{a_2}' = \alpha_{12}\cdot\overrightarrow{e_1}' + \alpha_{22}\cdot\overrightarrow{e_2}' + \cdots + \alpha_{m2}\cdot\overrightarrow{e_m}' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overrightarrow{a_n}' = \alpha_{1n}\cdot\overrightarrow{e_1}' + \alpha_{2n}\cdot\overrightarrow{e_2}' + \cdots + \alpha_{mn}\cdot\overrightarrow{e_m}' \end{cases} \tag{2.13}$$

За теоремою 2.1 рівності $\varphi(\vec{e}_j)=\vec{a}_j', j=\overline{1,n}$ задають єдине лінійне відображення простору V у V', який буде прообразом матриці A при відображенні f. Отже, відображення f – ін'єктивне і сюр'єктивне, а тому взаємно-однозначне.

Δ

<u>Наслідки.</u>

1. Нехай $V-n$-вимірний, а $V'-m$-вимірний простори над одним і тим же полем F. Будь-яка матриця розмірності $m\times n$ над полем F задає лінійне відображення векторного простору V у V', матрицею якого вона являється у деяких базисах цих просторів.
2. Нехай $V-n$-вимірний векторний простір над полем F. Існує взаємно-однозначне відображення множини всіх лінійних операторів простору V на множину всіх матриць порядку n над полем F.

∇

Другий наслідок очевидний, а тому доведемо наслідок 1. Виберемо базиси $B=\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\dots,\overrightarrow{e_n}\}$ і $B'=\{\overrightarrow{e_1}',\overrightarrow{e_2}',\dots,\overrightarrow{e_m}'\}$ векторних просторів V і V' відповідно. За допомогою стовбців матриці A та рівноей 2.13 побудуємо систему векторів $\overrightarrow{a_1}',\overrightarrow{a_2}',\dots,\overrightarrow{a_n}'$. Тоді рівності 2.3 зададуть єдине лінійне відображення φ, яке і буде шуканим лінійним відображенням.

Δ

<u>2.3. Подібні матриці</u>

Означення 2.3. *Матриці A і B порядку n називаються **подібними**, якщо існує невироджена матриця T, така що*

$$B=T^{-1}\cdot A\cdot T \tag{2.14}$$

З теореми 2.3 видно, що цей клас матриць допоможе нам дослідити лінійні оператори, а тому вивчимо деякі властивості подібних матриць.

<u>Теорема 2.5.</u> Визначники подібних матриць співпадають [9. 62].

∇

Нехай для матриць A і B виконується рівність 2.14. За теоремою 4.7 [9. 89], враховуючи означення оберненої матриці буде:

$|B| = |T^{-1}| \cdot |A| \cdot |T| = |T^{-1}||T||A| = |T \cdot T^{-1}| \cdot |A| = |E| \cdot |A| = |A|$. Тут E – одинична матриця.

Δ

З цієї теореми випливає, що подібні матриці одночасно вироджені, або невироджені.

<u>Теорема 2.6.</u> Відношення подібності є відношенням еквівалентності на множині всіх матриць порядку n над полем F.

∇

Потрібно довести, що це відношення рефлексивне, симетричне і транзитивне.

З рівності $E \cdot E = E$ та означення оберненої матриці випливає, що $E^{-1} = E$, а тому $A = E^{-1} \cdot A \cdot E$. Це означає, що матриця A подібна собі , а тому відношення подібності матриць рефлексивне.

Доведемо симетричність цього відношення. Нехай матриця A подібна до матриці B, тобто існує невироджена матриця T така, що виконується рівність 2.14. Домножаючи обидві частини цієї рівності справа на матрицю T^{-1}, а зліва на матрицю T, отримаємо: $A = T \cdot B \cdot T^{-1} = (T^{-1})^{-1} \cdot B \cdot T^{-1}$. Отже, матриця B подібна до матриці A, при цьому кажуть, що матриця B отримується з матриці A трансформуванням матрицею T^{-1}. Симетричність доведено.

Доведемо транзитивність цього відношення. Нехай матриця A подібна до матриці B, а матриця B подібна до матриці C. Потрібно довести, що матриця A подібна до матриці C. За означенням 2.3 існують матриці S і T такі, що: $B = T^{-1} \cdot A \cdot T, C = S^{-1} \cdot B \cdot S$. Тоді $C = S^{-1} \cdot T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot S = (T \cdot S)^{-1} \cdot A \cdot (T \cdot S)$. Транзитивність доведено.

Δ

<u>Наслідок.</u> Відношення подібності розбиває множину всіх матриць порядку n над полем F на класи подібних матриць, причому ці класи попарно не перетинаються [8. 67].

Твердження, обернене до теореми 2.3, також справедливе.

Зауваження 2.2. Якщо матриці A і A' подібні, то вони задають один і той же лінійний оператор векторного простору V над полем F.

∇

Нехай для матриць A і A' виконуються рівність 2.14, де $T = (\tau_{ij})$, $i,j = \overline{1,n}$ – невироджена матриця. Виберемо у просторі V базис $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$. Побудуємо систему векторів $B' = \{\overrightarrow{e_1{}'}, \overrightarrow{e_2{}'}, \dots, \overrightarrow{e_n{}'}\}$, поклавши:

$$\overrightarrow{e_1{}'} = \tau_{11} \cdot \overrightarrow{e_1} + \tau_{21} \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \tau_{n1} \cdot \overrightarrow{e_n}$$

$$\overrightarrow{e_2{}'} = \tau_{12} \cdot \overrightarrow{e_1} + \tau_{22} \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \tau_{n2} \cdot \overrightarrow{e_n}$$

… … … … … … … … … … … … … … … … … … …

$$\overrightarrow{e_n{}'} = \tau_{1n} \cdot \overrightarrow{e_1} + \tau_{2n} \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \tau_{nn} \cdot \overrightarrow{e_n}$$

За теоремою 7.5 [7. 85] система векторів B' також буде базисом векторного простору V, при чому T буде матрицею переходу від базису B до базису B'. За допомогою матриці A та базису B запишемо систему рівностей 2.5, які за теоремою 2.1 зададуть лінійний оператор φ простору V, причому A буде матрицею лінійного оператора φ у базисі B.

За допомогою матриці A' та базису B' запишемо систему рівностей 2.5, які за теоремою 2.1 зададуть лінійний оператор χ простору V, причому A' буде матрицею лінійного оператора χ у базисі B'. За теоремою 2.3 матриця A' буде матрицею лінійного оператора φ також у базисі B'. Отже, у базисі B' матриці лінійних операторів φ і χ співпадають, а тому за зауваженням 2.1 пункт 2 співпадають і ці оператори.

Δ

2.4. Операції над лінійними відображеннями та лінійними операторами

Нехай V і V' векторні простори над одним і тим же полем F. Позначимо через $Hom(V,V')$ множину всіх лінійних відображень простору V у простір V'. Введемо на множині $Hom(V,V')$ операції додавання лінійних відображень та множення лінійного відображення на скаляр з поля F. Доведемо, що відносно цих операцій множина $Hom(V,V')$ також є векторним простором над полем F. Зрозуміло, що векторами простору $Hom(V,V')$ будуть лінійні відображення простору V у V'. Над лінійними відображеннями ми стрілок ставити не будемо, крім того, результати операцій ми часто будемо заключати у круглі дужки. Так, суму лінійних відображень φ і χ будемо позначати в круглих дужках $(\varphi + \chi)$. Ясно також, що додавання лінійних відображень та додавання векторів простору $Hom(V,V')$ є абсолютно різними операціями, тільки для зручності вони позначаються одним і тим же знаком «$+$».

Означення 2.4. Сумою лінійних відображень *φ і χ векторного простору V у V' називається відображення, що позначається $(\varphi + \chi)$, яке кожний вектор $\vec{a}$ простору V відображає в суму образів вектора $\vec{a}$ при відображеннях φ і χ. Отже, для довільного вектора $\vec{a}$ простору V виконується:*

$$(\varphi + \chi)(\vec{a}) = \varphi(\vec{a}) + (\chi)(\vec{a}). \tag{2.15}$$

Означення 2.5. Добутком лінійного відображення φ на скаляр γ *з поля F називається відображення, яке позначається $\gamma \cdot \varphi$ і відображає кожний вектор $\vec{a}$ простору V на вектор $\gamma \cdot \varphi(\vec{a})$ Отже,:*

$$(\gamma\varphi)(\vec{a}) = \gamma \cdot \varphi(\vec{a}) \tag{2.16}$$

Теорема 2.7. Нехай V і V' векторні простори над одним і тим же полем F. Множина $Hom(V,V')$ всіх лінійних відображень простору V у V' утворює векторний простір над полем F відносно операції додавання лінійних відображень та множення лінійного відображення на скаляр, заданих формулами 2.15 та 2.16.

∇

Доведемо першу аксіому означення векторного простору[7. 16], а саме те, що множина $Hom(V,V')$ є комутативною групою за додаванням. Спочатку доведемо, що введені операції над лінійними відображеннями замкнуті, тобто, що результати цих операцій є також лінійними відображеннями простору V у V'. Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – довільні вектори простору V і α – довільний скаляр з поля F. Враховуючи, що для лінійних відображень φ і χ виконується рівність 2.1, з рівності 2.15 матимемо:

$$(\varphi+\chi)(\vec{a}+\vec{b}) = \varphi(\vec{a}+\vec{b}) + \chi(\vec{a}+\vec{b}) = \left(\varphi(\vec{a})+\varphi(\vec{b})\right) + \left(\chi(\vec{a})+\chi(\vec{b})\right) =$$

$$= \left(\varphi(\vec{a})+\chi(\vec{a})\right) + \left(\varphi(\vec{b})+\ \chi(\vec{b})\right) = (\varphi+\chi)(\vec{a}) + (\varphi+\chi)(\vec{b}).$$ Аналогічно перевіряється, що $(\varphi+\chi)(\alpha\cdot\vec{a}) = \alpha\cdot(\varphi+\chi)(\vec{a})$. Ми довели, що операція додавання лінійних відображень замкнута, а тому і алгебраїчна на множині $Hom(V,V')$.

Далі легко пересвідчитись, що алгебраїчною є операція множення лінійного відображення на скаляр. Для прикладу перевіримо справедливість рівності 2.2 для відображення $\gamma\varphi$. Очевидно: $(\gamma\varphi)(\alpha\cdot\vec{a}) = \gamma\cdot\varphi(\alpha\cdot\vec{a}) =$

$$= \gamma\cdot\left(\alpha\cdot\varphi(\vec{a})\right) = (\gamma\alpha)\cdot\varphi(\vec{a}) = (\alpha\gamma)\cdot\varphi(\vec{a}) = \alpha\cdot\left(\gamma\cdot\varphi(\vec{a})\right) = \alpha\cdot(\gamma\varphi)(\vec{a}).$$

Зрозуміло, що при доведені цих рівностей використовувались аксіоми простору V' та поля F.

Тепер доведемо, що операція додавання лінійних відображень асоціативна. Нехай $\varphi,\chi,\psi \in Hom(V,V')$, $\vec{a}$ – довільний вектор простору V. Застосовуючи двічі рівність 2.15 та асоціативність операції додавання на просторі V', отримаємо:

$$\left((\varphi+\chi)+\psi\right)(\vec{a}) = (\varphi+\chi)(\vec{a}) + \psi(\vec{a}) = \left(\varphi(\vec{a}) + +\chi(\vec{a})\right) + \psi(\vec{a}) = \varphi(\vec{a}) + \left(\chi(\vec{a})+\psi(\vec{a})\right) = \varphi(\vec{a}) + (\chi+\psi)(\vec{a}) = \left(\varphi + +(\chi+\psi)\right)(\vec{a})$$

. Оскільки $\vec{a}$ – довільний вектор простору V, то співпадають відображення: $(\varphi+\chi)+\psi = \varphi+(\chi+\psi)$. Асоціативність додавання лінійних відображень доведено. Аналогічно доводиться комутативність цієї операції, тобто рівність $\varphi+\chi = \chi+\varphi$.

Позначимо через 0^* – нульове лінійне відображення, яке відображає довільний вектор $\vec{a}$ простору V у нульвектор простору V', $0^*(\vec{a}) = \vec{0'}$. Доведемо, що відображення 0^* є нейтральним елементом відносно операції додавання на множині $Hom(V,V')$. Для довільного вектора $\vec{a}$ простору V та будь якого лінійного відображення φ простору V у V' буде $(\varphi + 0^*)(\vec{a}) = +\varphi(\vec{a}) + 0^*(\vec{a}) = \varphi(\vec{a}) + \vec{0'} = \varphi(\vec{a})$, де $\vec{0'}$ – нульвектор простору V'. Оскільки $\vec{a^*}$ – довільний вектор простору V, то $\varphi + 0^* = \varphi$. Враховуючи комутативність додавання лінійних відображень, заключаємо, що 0^* дійсно нейтральний елемент відносно додавання лінійних відображень.

Доведемо, що лінійне відображення $-\varphi = (-1) \cdot \varphi$ є протилежним елементом до лінійного відображення φ на множині $Hom(V,V')$ відносно додавання лінійних відображень. Тут -1 – це протилежний елемент до нейтрального елемента за множенням у полі F. Враховуючи теорему 8.1 [7. 87] рівність 2.15 та рівності 2.1 і 2.2 для відображення φ, для довільного вектора $\vec{a}$ простору V маємо: $\varphi(\vec{a}) + \big(-\varphi(\vec{a})\big) = \varphi(\vec{a}) + \big((-1) \cdot \varphi(\vec{a})\big) =$

$= \varphi(\vec{a}) + \varphi(-1 \cdot \vec{a}) = \varphi(\vec{a}) + \varphi(-\vec{a}) = \varphi(\vec{a} + (-\vec{a})) = \varphi\big(\vec{0}\big) = \vec{0'} = 0^*(\vec{a})$.

Оскільки $\vec{a}$ – довільний вектор простору V, то $\varphi + (-\varphi) = 0^*$. З того, що додавання на множині $Hom(V,V')$ комутативне, випливає що $-\varphi$ є протилежним елементом до елемента φ. Ми довели, що $Hom(V,V')$ – комутативна група за додаванням.

Доведемо другу аксіому означення векторного простору. Нехай γ і δ – будь-які скаляри, $\vec{a}$ – довільний вектор простору V. Тоді за нерівністю 1.16 та аксіомою 2 векторного простору для V' буде: $\big((\gamma\delta)\varphi\big)(\vec{a}) = (\gamma\delta) \cdot \varphi(\vec{a}) =$

$= \gamma \cdot (\delta\varphi)(\vec{a}) = \big(\gamma \cdot (\delta\varphi)\big)(\vec{a})$. Оскільки $\vec{a}$ – довільний вектор простору V, то $(\gamma \cdot \delta) \cdot \varphi = \gamma \cdot (\delta \cdot \varphi)$. Аксіому 2 доведено.

Доведемо аксіому 3: $\big((\gamma + \delta)\varphi\big)(\vec{a}) = (\gamma + \delta) \cdot \varphi(\vec{a}) = \gamma \cdot \varphi(\vec{a}) +$

$+\delta \cdot \varphi(\vec{a}) = (\gamma \cdot \varphi)(\vec{a}) + (\delta \cdot \varphi)(\vec{a})$. Оскільки $\vec{a}$ – довільний вектор простору V, то $(\gamma + \delta) \cdot \varphi = \gamma \cdot \varphi + \delta \cdot \varphi$.

Доведемо аксіому 4 векторного простору для множини $Hom(V,V')$, враховуючи, що для простору V' вона виконується. Нехай γ – будь-який скаляр, φ і χ – довільні лінійні відображення з множини $Hom(V,V')$ $\vec{a}$ – довільний вектор простору V. Тоді $\big(\gamma(\varphi+\chi)\big)(\vec{a}) = \gamma(\varphi+\chi)(\vec{a}) =$
$= \gamma\cdot\big(\varphi(\vec{a})+\chi(\vec{a})\big) = \gamma\cdot\varphi(\vec{a})+\gamma\cdot\chi(\vec{a}) = (\gamma\varphi)(\vec{a})+(\gamma\chi)(\vec{a}) =$
$= (\gamma\varphi+\gamma\chi)(\vec{a})$. Оскільки $\vec{a}$ – довільний вектор простору V, то $\gamma(\varphi+\chi) =$
$= \gamma\varphi+\gamma\chi$. Аксіому 5 для множини $Hom(V,V')$, тобто рівність $1\cdot\varphi=\varphi$, перевірте самостійно.

Ми довели, що множина лінійних відображень $Hom(V,V')$ є векторним простором над полем F відносно операцій додавання лінійних відображень та множення лінійного відображення на скаляр.

Δ

Позначимо через $Hom(V)$ множину всіх лінійних операторів простору V. Оскільки лінійні оператори – це лінійні відображення простору V в себе, то з теореми 2.7 випливає, що множина $Hom(V)$ є векторним простором над полем F відносно операції додавання лінійних операторів та множення лінійного оператора на скаляр, заданих тими ж формулами 2.15 і 2.16.

Введемо на множині $Hom(V)$ ще одну операцію – множення лінійних операторів, яке є їх композицією [8. 90]. Будемо вважати, що в цій композиції першим, як відображення, діє другий множник.

Означення 2.6. Добутком лінійних операторів *φ і χ векторного простору V над полем F називається композиція цих відображень, тобто для довільного вектора $\vec{a}$ простору V*

$$(\varphi\chi)(\vec{a}\,) = \varphi\big(\chi(\vec{a}\,)\big). \qquad \textbf{(2.17)}$$

<u>Теорема 2.8.</u> Множина $Hom(V)$ всіх лінійних операторів векторного простору V над полем F є кільцем з одиницею відносно операцій додавання та множення лінійних операторів.

∇

Доведемо що операція множення лінійних операторів замкнута на множині $Hom(V)$ тобто, що відображення $\varphi\chi$ теж лінійний оператор простору V. Методом від супротивного легко пересвідчитись, що композиція $\varphi\chi$ є відображенням простору V. Доведемо, що для цієї композиції виконуються рівності 2.1 і 2.2, при умові, що вони виконуються для кожного з відображень φ і χ. Для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ простору V та будь-якого скаляра α виконується: $(\varphi\chi)(\vec{a}+\vec{b}) = \varphi\left(\chi(\vec{a}+\vec{b})\right) = \varphi\left(\chi(\vec{a})+\chi(\vec{b})\right) =$

$= \varphi(\chi(\vec{a})) + \varphi\left(\chi(\vec{b})\right) = (\varphi\chi)(\vec{a}) + (\varphi\chi)(\vec{b})$. Рівність 2.1 для відображення $\varphi\chi$ доведено. Аналогічно доводиться, що $(\varphi\chi)(\alpha\cdot\vec{a}) = \alpha\cdot(\varphi\chi)(\vec{a})$. Замкнутість операції множення лінійних операторів на множині $Hom(V)$ доведено. З теореми 2.7 випливає, що множина $Hom(V)$ є комутативною групою відносно додавання лінійних операторів. За теоремою 4.1 [8. 93] композиція лінійних відображень асоціативна, тобто $(\varphi\chi)\psi = \varphi(\chi\psi)$ для довільних лінійних відображень φ,χ,ψ множини $Hom(V)$.

Доведемо, що операції додавання та множення лінійних операторів пов'язані лівим та правим дистрибутивними законами. Нагадаю, що композиція відображень некомутативна. Нехай $\vec{a}$ – довільний вектор простору V, φ, χ, ψ – довільні лінійні оператори цього простору, тоді:
$((\psi+\chi)\varphi)(\vec{a}) = (\psi++\chi)(\varphi(\vec{a})) = \psi(\varphi(\vec{a})) + \chi(\varphi(\vec{a})) = (\psi\varphi)(\vec{a}) + (\chi\varphi)(\vec{a})$.

Оскільки $\vec{a}$ – довільний вектор простору V, то $(\psi+\chi)\varphi = \psi\varphi + \chi\varphi$.

Доведемо другий дистрибутивний закон.

$(\varphi(\psi+\chi))(\vec{a}) = \varphi((\psi+\chi)(\vec{a})) = \varphi(\psi(\vec{a})+\chi(\vec{a})) = \varphi(\psi(\vec{a})) + \varphi(\chi(\vec{a})) =$
$= (\varphi\psi)(\vec{a}) + (\varphi\chi)(\vec{a})$. Самостійно прослідкуйте за допомогою яких рівностей проводилися ці перетворення. Оскільки $\vec{a}$ – довільний вектор простору V, то $\varphi(\psi+\chi) = \varphi\psi + \varphi\chi$. Ми довели, що $Hom(V)$ є кільцем. В першому прикладі лінійних відображень доведено, що тотожне відображення ε є лінійним оператором простору V, який називається одиничним лінійним оператором. В

теоремі 4.2 [8. 93] доведено, що він задовольняє означення одиниці цього кільця.

Δ

2.5. Лінійні алгебри

Ви вже знайомі з такими алгебраїчними системами як групи, кільця, поля, векторні простори. В цьому пункті познайомимося зі ще одною алгебраїчною системою.

Означення 2.7. *Непорожня множина A називається **лінійною алгеброю** (або просто **алгеброю**) над довільним полем F, якщо на цій множині задані операції додавання, множення та операція множення елементів множини A на елементи множини поля F, які задовольняють наступним аксіомам:*

1. *Відносно додавання та множення множина A є кільцем.*
2. *Відносно додавання та множення на елементи поля F множина A є векторним простором.*
3. *Обидві операції множення на множині A пов'язані рівностями: для довільного елемента α поля F та будь-яких елементів a, b множини A виконується:*

$$\alpha \cdot (a \cdot b) = (\alpha \cdot a) \cdot b = a \cdot (\alpha \cdot b) \tag{2.18}$$

Приклади лінійних алгебр

1. Поле комплексних чисел C є лінійною алгеброю над полем дійсних чисел R.

∇

Аксіома 1 означення 2.7 випливає з того, що будь-яке поле є кільцем. Аксіома 2 – це приклад 7 векторних просторів [7. 18]. Завдяки асоціативності та комутативності множення, рівність 2.18 виконується очевидно для будь-яких комплексних чисел α, a, b. Нагадаю, що будь-яке дійсне число є комплексним.

Δ

Зрозуміло, що будь-яке поле F є лінійною алгеброю над тим же полем F. Це стосується і поля комплексних чисел C.

2. Множина $C[A,B]$ всіх неперервних функцій на проміжку $[A,B]$ є лінійною алгеброю над полем дійсних чисел R відносно операцій додавання і множення функцій та множення функції на дійсне число. Ця алгебра містить підалгебру диференційованих на проміжку $[A,B]$ функцій. Означення підалгебри сформулюйте самостійно.
3. Множина M_n всіх матриць порядку n (з елементами з довільного поля F) є лінійною алгеброю над полем F відносно операцій додавання і множення матриць та множення матриці на елементи поля F.

Те, що останні два приклади є лінійними алгебрами випливає з властивостей операцій, заданих на множинах функцій (матриць).

Теорема 2.9. **Множина $Hom(V)$ всіх лінійних операторів векторного простору V над полем F є лінійною алгеброю над полем F відносно операцій додавання і множення лінійних операторів та множення лінійного оператора на скаляр.**

∇

Аксіома 1 означення 2.7 випливає з теореми 2.8, аксіома 2 – з теореми 2.7. Доведемо рівність 2.18. Нехай γ – скаляр з поля F, φ і χ – лінійні оператори простору V, $\vec{a}$ – довільний вектор цього простору. Тоді з рівностей 2.15 і 2.17 буде: $\big(\gamma(\varphi\chi)\big)(\vec{a}) = \gamma\cdot(\varphi\chi)(\vec{a}) = \gamma\cdot\Big(\varphi\big(\chi(\vec{a})\big)\Big) = (\gamma\varphi)\big(\chi(\vec{a})\big) = \big((\gamma\varphi)\chi\big)(\vec{a})$.

Оскільки $\vec{a}$ – довільний вектор простору V, то $\gamma(\varphi\chi) = (\gamma\varphi)\chi$.

З іншого боку за рівністю 2.2 для оператора φ буде: $\big(\gamma(\varphi\chi)\big)(\vec{a}) =$

$= \gamma\cdot(\varphi\chi)(\vec{a}) = \gamma\cdot\varphi\big(\chi(\vec{a})\big) = \varphi\big(\gamma\cdot\chi(\vec{a})\big) = \varphi\big((\gamma\chi)(\vec{a})\big) = \big(\varphi(\gamma\chi)\big)(\vec{a})$.

Оскільки $\vec{a}$ – довільний вектор простору V, то $\gamma(\varphi\chi) = \varphi(\gamma\chi)$.

Δ

Означення 2.8. Лінійні алгебри *A і A', задані над одним і тим же полем F, називаються* ***ізоморфними,*** *якщо існує взаємно-однозначне відображення f алгебри A на алгебру A' таке, що для довільних елементів a, b алгебри A і будь-якого скаляра α з поля F виконуються рівності:*

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \qquad \textbf{(2.19)}$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \quad \textbf{(2.20)}$$

$$f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a) \quad \textbf{(2.21)}$$

При цьому пишуть: $A \equiv A'$. *Відображення f називається ізоморфізмом алгебр* A *і* A'.

<u>Теорема 2.10.</u> Алгебра $Hom(V)$ лінійних операторів n-вимірного векторного простору V над полем F ізоморфна алегбрі M_n матриць порядку n над полем F.

∇

Нехай $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ – базис векторного простору V. В теоремі 2.4 доведено, що відображення $f(\varphi) = A_\varphi$ (2.12), яке відображає кожний лінійний оператор алгебри $Hom(V)$ на його матрицю A_φ в базисі B. Потрібно для цього відображення довести справедливість рівностей 2.19-2.21. Нехай φ і χ – лінійні оператори простору V з матрицями $A_\varphi = (\alpha_{ij})$ і $A_\chi = (\beta_{ij})$ в базисі B відповідно, $i,j = \overline{1,n}$, γ – довільний скаляр з поля F. Застосовуючи означення 2.2 до лінійних операторів, розкладемо образи базисних векторів:

$$\varphi(\vec{e}_i) = \alpha_{1i} \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_{2i} \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \alpha_{ni} \cdot \overrightarrow{e_n}\,, \quad \textbf{(2.22)}$$

$$\chi(\vec{e}_i) = \beta_{1i} \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta_{2i} \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \beta_{ni} \cdot \overrightarrow{e_n},\ i = \overline{1,n}. \quad \textbf{(2.23)}$$

Виясними, яку матрицю в базисі B має лінійний оператор $\varphi + \chi$. Ця матриця позначається $A_{\varphi+\chi}$.За рівністю 2.15 буде: $(\varphi + \chi)(\overrightarrow{e_i}) = \varphi(\overrightarrow{e_i}) + \chi(\overrightarrow{e_i}) =$
$= (\alpha_{1i} \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_{2i} \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \alpha_{ni} \cdot \overrightarrow{e_n}) + (\beta_{1i} \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta_{2i} \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \beta_{ni} \cdot \overrightarrow{e_n}) =$
$= (\alpha_{1i} + \beta_{1i}) \cdot \overrightarrow{e_1} + (\alpha_{2i} + \beta_{2i}) \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + (\alpha_{ni} + \beta_{ni}) \cdot \overrightarrow{e_n}, i = \overline{1,n}.$

Таким чином, кожний стовпець матриці $A_{\varphi+\chi}$ є сумою відповідних стовпців матриць A_φ і A_χ. Отже, для матриць лінійних операторів виконується рівність:

$$A_{\varphi+\chi} = A_\varphi + A_\chi. \quad \textbf{(2.24)}$$

Тепер доведемо рівність 2.19: $f(\varphi + \chi) = A_{\varphi+\chi} = A_\varphi + A_\chi = f(\varphi) + f(\chi)$.

Виясними, яку матрицю в базисі B має лінійний оператор $\varphi\chi$. Використовуючи рівність 2.2 для лінійного оператора φ та рівності 2.17, 2.21 та 2.22, маємо: $(\varphi\chi)(\vec{e}_i) = \varphi\big(\chi(\vec{e}_i)\big) = \varphi(\beta_{1i} \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta_{2i} \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \beta_{ni} \cdot \overrightarrow{e_n}) = \beta_{1i} \cdot \varphi(\overrightarrow{e_1}) + \beta_{2i} \cdot$

$\cdot \varphi(\overrightarrow{e_2}) + \dots + \beta_{ni} \cdot \varphi(\overrightarrow{e_n}) = \beta_{1i} \cdot (\alpha_{11} \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_{21} \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \alpha_{m1} \cdot \overrightarrow{e_m}) + \beta_{2i} \cdot$
$\cdot (\alpha_{12} \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_{22} \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \alpha_{n2} \cdot \overrightarrow{e_n}) + \dots + \beta_{ni} \cdot (\alpha_{1n} \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_{2n} \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \alpha_{nn} \cdot \overrightarrow{e_n}) = (\alpha_{11} \cdot \beta_{1i} + \alpha_{12} \cdot \beta_{2i} + \dots + \alpha_{1n} \cdot \beta_{ni}) \cdot \overrightarrow{e_1} + (\alpha_{21} \cdot \beta_{1i} + \alpha_{22} \cdot \beta_{2i} + \dots +$
$+\alpha_{2n} \cdot \beta_{ni}) \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + (\alpha_{n1} \cdot \beta_{1i} + \alpha_{n2} \cdot \beta_{2i} + \dots + \alpha_{nn} \cdot \beta_{ni}) \cdot \overrightarrow{e_n}$
. Звідси видно, що i-й стовпець матриці $A_{\varphi\chi}$ лінійного оператора $\varphi\chi$ у базисі B є добутком кожного рядка матриці A_φ на i-й стовпець матриці A_χ. За означенням операції множення матриць [9. 21]

$$A_{\varphi\chi} = A_\varphi \cdot A_\chi. \qquad \textbf{(2.25)}$$

Тепер доведемо рівність 2.20: $f(\varphi\chi) = A_{\varphi\chi} = A_\varphi \cdot A_\chi = f(\varphi) \cdot f(\chi)$.

Вияснимо, яку матрицю в базисі B має лінійний оператор $\gamma\varphi$:

$(\gamma\varphi)(\vec{e}_i) = \gamma \cdot \varphi(\vec{e}_i) = \gamma \cdot (\alpha_{1i} \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_{2i} \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \alpha_{ni} \cdot \overrightarrow{e_n}) = (\gamma \cdot \alpha_{1i}) \cdot \overrightarrow{e_1} +$
$+(\gamma \cdot \alpha_{2i}) \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + (\gamma \cdot \alpha_{ni}) \cdot \overrightarrow{e_n}, i = \overline{1,n}$.

Таким чином, кожний стовпець матриці $A_{\gamma\varphi}$ є добутком i-го стовпця матриці A_φ на скаляр γ. Звідси випливає, що для матриці лінійного оператора $\gamma\varphi$:

$$A_{\gamma\varphi} = \gamma \cdot A_\varphi. \qquad \textbf{(2.26)}$$

Тепер доведемо рівність 2.21: $f(\gamma\varphi) = A_{\gamma\varphi} = \gamma \cdot A_\varphi = \gamma \cdot f(\varphi)$. Ізоморфізм наших лінійних алгебр встановлено.

Δ

<u>Наслідки:</u>

1. Кільце $Hom(V)$ всіх лінійних операторів n-вимірного векторного простору V над полем F ізоморфне кільцю матриць порядку n над полем F.
2. Векторний простір $Hom(V,V')$ всіх лінійних відображень n-вимірного векторного простору V у m-вимірний векторний простір V' над полем F ізоморфний векторному простору матриць розмірності $m \times n$ над полем F.
3. Векторний простір $Hom(V)$ всіх лінійних операторів n-вимірного векторного простору V над полем F ізоморфний векторному простору матриць порядку n над полем F.

4. Нехай V і V' – ненульові скінченовимірні векторні простори над одним і тим же полем F, у яких вибрані базиси B і B' відповідно. Тоді матриця суми лінійних відображень у базисах B і B' дорівнює сумі матриць цих лінійних відображень у тих же базисах.
5. Нехай V – ненульовий скінченовимірний векторний простір над полем F, у яких вибраний базис B. Тоді матриця суми (добутку) лінійних операторів у базисі B дорівнює сумі (добутку) матриць цих лінійних операторів у тому ж базисі.
6. Матриця добутку лінійного відображення (оператора) на скаляр γ дорівнює добутку скаляра γ на матрицю цього лінійного відображення (оператора).

Доведіть ці наслідки самостійно.

2.6. Ядро і образ лінійного оператора

Нехай V – ненульовий скінченовимірний векторний простір над полем F.

Означення 2.9. Ядром лінійного оператора *φ, заданого на векторному просторі V, називається множина всіх векторів простору V, які лінійний оператор φ відображає у нульвектор цього простору. Ядро лінійного оператора φ позначається $ker\ \varphi$.*

Таким чином, $\forall\vec{a} \in ker\ \varphi \Leftrightarrow \varphi(\vec{a}) = \vec{0}$, тобто ядро лінійного оператора φ є повним прообразом нульвектора при дії цього відображення. За теоремою 8.1 [7. 87] ядро лінійного оператора φ ніколи непорожнє, зокрема воно завжди містить нульвектор.

Теорема 2.11. Ядро лінійного оператора φ векторного простору V над полем F є векторним підпростором цього простору.

∇

За критерієм векторного підпростору [7. 63] потрібно довести замкнутість операцій додавання векторів та множення вектора на скаляр, заданих на просторі V на його підмножині $ker\,\varphi$. Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – довільні вектори ядра лінійного оператора φ, α – довільний скаляр. За означенням 2.9 та рівністю 2.1 буде: $\varphi(\vec{a}+\vec{b}) = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, а тому $\vec{a}+\vec{b} \in ker\,\varphi$. Замкнутість операції додавання на множині $ker\,\varphi$ доведено. Аналогічно доводиться замкнутість на цій множині операції множення вектора на скаляр.

Δ

Означення 2.10. Дефектом лінійного оператора *φ називається розмірність його ядра. Він позначається $def\ \varphi$.*

Нагадаю, що ізоморфізмом векторних просторів називається їх взаємно-однозначне лінійне відображення [7. 88].

<u>Теорема 2.12.</u> Лінійний оператора φ є ізоморфізмом векторного простору V на себе тоді і тільки тоді, коли $ker\ \varphi = \langle\vec{0}\rangle$.

∇

<u>*Необхідність.*</u> Нехай φ – ізоморфізм векторного простору V на себе. Тоді він є взаємно-однозначним відображенням. Це означає, що прообразом нульвектора простору V при відображенні φ може бути тільки один елемент. За теоремою 8.1 [7. 87] цим елементом може бути тільки нульвектор. Отже, $ker\,\varphi = \langle\vec{0}\rangle$.

<u>*Достатність.*</u> Нехай $ker\,\varphi = \langle\vec{0}\rangle$. Доведемо методом від супротивного, що лінійний оператор φ є взаємно-однозначним відображенням. Припустимо, що для векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ простору V при $\vec{a} \neq \vec{b}$ $\varphi(\vec{a}) = \varphi(\vec{b})$. Тоді при $\vec{a} - \vec{b} \neq \vec{0}$ буде $\varphi(\vec{a}-\vec{b}) = \varphi(\vec{a}) - \varphi(\vec{b}) = \vec{0}$. Це означає, що ненульовий вектор $\vec{a}-\vec{b}$ належить ядру, яке за умовою є нульовим підпростором простору V. З цього протиріччя випливає, що φ – це взаємно-однозначне лінійне відображення, а тому і ізоморфізм простору V.

Δ

Означення 2.11. Образом лінійного оператора *φ, заданого на векторному просторі V, називається множина всіх векторів простору V, кожен з яких має* *хоча б один прообраз при відображенні φ. Образ лінійного оператора φ позначається $im\ \varphi$.*

Таким чином, $\forall\ \overrightarrow{a'} \in im\ \varphi \Leftrightarrow \exists \vec{a} \in V,\ \varphi(\vec{a}) = \overrightarrow{a'}$.

Нехай φ – лінійне відображення векторного простору V у простір V' . Для будь якої підмножини M векторів простору V через $\varphi(M)$ будемо позначати множину образів всіх векторів множини M при відображенні φ.

<u>Теорема 2.13.</u> Нехай φ – лінійне відображення векторного простору V у простір V' і U – векторний підпростір простору V. Тоді образ підпростору U при відображенні φ буде підпростором простору V'.

∇

Використаємо той же критерій підпростору. Нехай $\overrightarrow{a'}$ і $\overrightarrow{b'}$ довільні вектори множини $\varphi(U)$, α – будь-який скаляр поля F. Це означає, що існують вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ підпростору U такі, що $\varphi(\vec{a}) = \overrightarrow{a'}, \varphi(\vec{b}) = \overrightarrow{b'}$. Тоді $\varphi\left(\vec{a} + \vec{b}\right) =$
$= \varphi(\vec{a}) + \varphi\left(\vec{b}\right) = \overrightarrow{a'} + \overrightarrow{b'}$. Оскільки операція додавання векторів простору V замкнута на його підпросторі U ,то $\vec{a} + \vec{b} \in U$. Таким чином $\overrightarrow{a'} + \overrightarrow{b'} \in \varphi(U)$, тому що його прообразом при відображенні φ буде $\vec{a} + \vec{b}$. Аналогічно доводиться, що $\alpha \cdot \overrightarrow{a'} \in \varphi(U)$. За критерієм підпростору [7. 63], $\varphi(U)$ – векторний підпростір простору V'.

Δ

<u>Наслідок.</u> Образ лінійного оператора φ, заданого на просторі V, є підпростором цього простору.

Випливає з попередньої теореми, тому що $im\ \varphi = \varphi(V)$.

Означення 2.12. Рангом лінійного оператора *φ, заданого на векторному просторі V, називається розмірність образу лінійного оператора φ. Ранг лінійного оператора φ позначається $rang\ \varphi$.*

<u>Теорема 2.14.</u> Ранг лінійного оператора φ, заданого на векторному просторі V, дорівнює рангу матриці A цього лінійного оператора у деякому базисі простору V [7. 45].

∇

Нехай $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ – базис векторного простору V,
$S = \{\varphi(\overrightarrow{e_1}), \varphi(\overrightarrow{e_2}), \dots, \varphi(\overrightarrow{e_n})\}$. Нехай $\vec{a}$ – довільний вектор простору V, який за базисом B має наступний розклад: $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{e_n}$. Тоді

$\varphi(\vec{a}) = \alpha_1 \cdot \varphi(\vec{e_1}) + \alpha_2 \cdot \varphi(\vec{e_2}) + \cdots + \alpha_n \cdot \varphi(\vec{e_n})$. Це означає, що будь-який вектор підпростору $im\,\varphi$ є лінійною комбінацією векторів системи S, тобто $im\,\varphi = L(S)$, де $L(S)$ – це лінійна оболонка, натягнута на систему векторів S. За теоремою 6.1 [7. 70] базис системи векторів S є базисом підпростору $im\,\varphi,$ а тому ранг системи векторів S [7. 42] співпадає з рангом лінійного оператора φ.

Нехай f – відображення, яке відображає кожний вектор простору V у його координатний стовпець у базисі B. За теоремою 8.3 [7. 90] це відображення є ізоморфізмом простору V на n-вимірний арифметичний векторний простір F^n. За наслідком теореми 8.4 [7. 92] відображення f переводить будь-яку лінійно незалежну підсистему векторів системи S у лінійно незалежну підсистему системи стовбців матриці A лінійного оператора φ у базисі B. За наслідком 2 теореми 8.2 [7. 90] відображення f^{-1} є ізоморфізмом векторного простору F^n на простір V. Отже, відображення f^{-1} переводить будь-яку лінійно незалежну підсистему системи стовбців матриці A у лінійно незалежну підсистему векторів системи S. Таким чином, будь-якій максимальний лінійно незалежній підсистемі векторів системи S [7. 42] відповідає максимальна лінійно незалежна підсистема системи стовбців матриці A [7. 41], і навпаки. Це означає, що кількість векторів максимальної лінійно незалежної підсистеми системи векторів S, тобто ранг системи S [7. 41], співпадає з рангом матриці A [7. 50]. Вище ми довели, що ранг системи S співпадає з рангом лінійного оператора φ.

Δ

<u>Наслідок.</u> Подібні матриці мають однакові ранги.

∇

Дійсно, за зауваженням 2.2 подібні матриці задають один і той же лінійний оператор векторного простору V, а тому їх ранги дорівнюють рангу цього оператора.

Δ

<u>Теорема 2.15.</u> Сума рангу та дефекту лінійного оператора дорівнює розмірності векторного простору, на якому він заданий:

$$\boldsymbol{def\ \varphi + rang\ \varphi = dim\ V.} \qquad \textbf{(2.27)}$$

∇

Якщо V – нульовий векторний простір, то рівність 2.27 очевидна, тому що $dim\,V = def\ \varphi = rang\,\varphi = \langle\vec{0}\rangle$. Нехай тепер V – ненульовий векторний простір $dim\,V = n$. Якщо $ker\,\varphi = \langle\vec{0}\rangle$, то $def\ \varphi = 0$. За теоремою 2.12 φ – ізоморфізм векторного простору V, а тому $im\,\varphi = V$ і $rang\,\varphi = n$. Отже рівність 2.27 виконується і в цьому випадку.

Нехай тепер $ker\,\varphi$ – ненульовий векторний підпростір простору V. Тоді в підпросторі $ker\ \varphi$ існує базис $S = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_k}\}$. За означенням 2.9

$$\varphi(\vec{e}_i) = \vec{0}, \qquad i = \overline{1,k}\ . \qquad \textbf{(2.28)}$$

За теоремою 6.3 [7. 64] систему векторів S можна доповнити до базису B векторного простору V, $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_k}, \overrightarrow{e_{k+1}}, \overrightarrow{e_{k+2}}, \dots, \ \vec{e_n}\}$.

Доведемо, що система векторів $T = \{\varphi(\overrightarrow{e_{k+1}}),\ \varphi(\overrightarrow{e_{k+2}}), \dots,\ \varphi(\vec{e_n})\}$ є базисом образу лінійного оператора $im\ \varphi$. Спочатку встановимо, що ця система векторів лінійно незалежна. Для цього вияснимо, чому можуть дорівнювати коефіцієнти нульової лінійної комбінації:

$$\alpha_{k+1} \cdot \varphi(\overrightarrow{e_{k+1}}) + \alpha_{k+2} \cdot \varphi(\overrightarrow{e_{k+2}}) + \dots + \alpha_n \cdot \varphi(\vec{e_n}) = \vec{0}. \qquad \textbf{(2.29)}$$

За теоремою 8.1 [7.87] буде: $\varphi(\alpha_{k+1} \cdot \overrightarrow{e_{k+1}} + \alpha_{k+2} \cdot \overrightarrow{e_{k+2}} + \dots + \alpha_n \cdot \vec{e_n}) = \vec{0}$. Це означає, що $\vec{a} \in ker\ \varphi$, де

$$\vec{a} = \alpha_{k+1} \cdot \overrightarrow{e_{k+1}} + \alpha_{k+2} \cdot \overrightarrow{e_{k+2}} + \dots + \alpha_n \cdot \vec{e_n}. \qquad \textbf{(2.30)}$$

Розкладемо вектор $\vec{a}$ по базису S підпростору $\ker\varphi$: $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \vec{e_1} +$ $+\alpha_2 \cdot \vec{e_2} + \dots + \alpha_k \cdot \vec{e_k}$. Заміняючи в рівності 2.30 вектор $\vec{a}$ його розкладом за базисом S, отримаємо:

$\alpha_1 \cdot \vec{e_1} + \alpha_2 \cdot \vec{e_2} + \dots + \alpha_k \cdot \vec{e_k} + (-\alpha_{k+1}) \cdot \overrightarrow{e_{k+1}} + +(-\alpha_{k+2}) \cdot \overrightarrow{e_{k+2}} + \dots +$ $(-\alpha_n) \cdot \vec{e_n} = \vec{0}$

. Оскільки базис B є лінійно незалежною системою векторів, то $\alpha_i = 0, i = \overline{1,n}$. Тоді з рівності 2.29 випливає, що система векторів T – лінійно незалежна.

Доведемо, що будь-який вектор підпростору $im\,\varphi$ є лінійною комбінацією векторів системи T, тобто $im\,\varphi = L(T)$. Нехай $\vec{a}$ – довільний вектор простору V, який має наступний розклад за базисом B:

$\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{e_k} + \alpha_{k+1} \cdot \overrightarrow{e_{k+1}} + \alpha_{k+2} \cdot \overrightarrow{e_{k+2}} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{e_n}$.

Враховуючи рівність 2.28, отримаємо:

$\varphi(\vec{a}) = \alpha_1 \cdot \varphi(\overrightarrow{e_1}) + \alpha_2 \cdot \varphi(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + +\alpha_k \cdot \varphi(\overrightarrow{e_k}) + \alpha_{k+1} \cdot \varphi(\overrightarrow{e_{k+1}}) + \alpha_{k+2} \cdot \varphi(\overrightarrow{e_{k+2}}) + \cdots + \alpha_n \cdot \varphi(\overrightarrow{e_n}) = \alpha_{k+1} \cdot$

$\cdot\, \varphi(\overrightarrow{e_{k+1}}) + \alpha_{k+2} \cdot \varphi(\overrightarrow{e_{k+2}}) + \cdots + \alpha_n \cdot \varphi(\overrightarrow{e_n})$. Оскільки $\vec{a}$ – довільний вектор простору V, то з останньої рівності випливає, що $im\,\varphi = L(T)$. Ми довели, що T – базис векторного підпростору $im\,\varphi$. Врахувавши розмірності підпросторів $ker\,\varphi$ та $im\,\varphi$ простору V, легко побачити, що рівність 2.27 справедлива.

Δ

2.7. Оборотні лінійні оператори

Означення 2.13. *Лінійний оператор φ векторного простору V називається* ***оборотним****, якщо для нього існує обернене відображення φ^{-1} [8. 95].*

З наслідку 2 теореми 8.2 [7. 90] та з властивості 1 оборотних відображень [8. 96] випливає, що для будь-якого оборотного лінійного оператора φ, φ^{-1} є також оборотним лінійним оператором. Отже, для оборотного лінійного оператора φ та оберненого до нього лінійного оператора, виконується рівність

$$\varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot \varphi = \varepsilon, \qquad \textbf{(2.31)}$$

де ε – одиничний лінійний оператор простору V (дивись приклад 1 лінійних відображень).

Теорема. 2.16. Множина G всіх оборотних лінійних операторів n-вимірного векторного простору V над полем F утворює групу відносно множення, причому ця група ізоморфна групі $Gl(n,F)$ всіх невироджених матриць n-го порядку над полем F.

∇

Множення лінійних операторів це їх композиція. Як і вище будемо вважати, що при композиції першим, як відображення, діє другий множник, тобто це множення відбувається за формулою 2.17. Доведемо, що множина G всіх оборотних лінійних операторів простору V утворює групу відносно їх множення. Спочатку доведемо, що ця операція замкнута на множині G. Це випливає з наслідку 3 теореми 8.2 [7. 90] з якого видно, що добуток лінійних операторів простору V також є лінійним оператором цього простору та з властивості 2 оборотних відображень [8. 97] з якої видно, що цей добуток оборотний. Асоціативність множення на G випливає з теореми 4.1 [9. 93]. Ясно, що $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$. З теореми 4.2 [8. 93] випливає, що одиничний лінійний оператор ε є нейтральним елементом відносно операції множення на множині G. З рівності 2.31 видно, що φ^{-1} є оберненим елементом до елемента φ групи G відносно множення лінійних операторів.

Нехай f – відображення множини G, яке кожному оборотному лінійному оператору φ ставить у відповідність його матрицю A_φ у деякому базисі B простору V: $f(\varphi) = A_\varphi (2.12)$. Доведемо, що матриця оборотного лінійного оператора φ – невироджена. З зауваження 7.1 [7. 81] випливає, що матрицею одиничного лінійного оператора ε у базисі B служить одинична матриця E. За рівністю 2.25 маємо: $A_{\varphi\varphi^{-1}} = A_\varphi \cdot A_{\varphi^{-1}} = A_\varepsilon = E$. Звідси за теоремами 4.1 [9. 67] та 4.7 [9. 89] буде $|A_\varphi| \cdot |A_{\varphi^{-1}}| = 1$, а тому $|A_\varphi| \neq 0$.

З теореми 2.4 випливає, що відображення f, задане рівністю 2.12, є взаємно-однозначним відображенням групи оборотних лінійних операторів G на групу $Gl(n, F)$ невироджених над полем F матриць порядку n. Рівність: $f(\varphi\chi) = f(\varphi) \cdot f(\chi)$ доведена в теореми 2.10. Це означає, що f – ізоморфізм цих груп.

Δ

Наведемо в одній теоремі декілька критеріїв оборотності лінійного оператора. Еквівалентність декількох умов доводиться по колу, тобто, що з першої умови випливає друга, з другої – третя, …, з останньої – перша.

<u>Теорема. 2.17.</u> Нехай φ – лінійний оператор n-вимірного векторного простору V над полем F. Тоді наступні умови еквівалентні:

1. **Лінійний оператор φ – оборотний.**
2. **Лінійний оператор φ є ізоморфізмом векторного простору V на себе.**
3. **Ядро лінійного оператора φ є нульовим підпростором векторного простору V.**
4. **$def\ \varphi = 0$.**

5. $\boldsymbol{rang\ \varphi = n}$.
6. **Матриця лінійного оператора $\boldsymbol{\varphi}$ – невироджена.**

∇

1. Нехай φ – оборотний лінійний оператор. Доведемо, що він є ізоморфізмом простору V на себе, тобто що з умови 1 цієї теореми випливає умова 2. Нагадаю, що ізоморфізмом називається взаємно-однозначне лінійне відображення. Таким чином наше твердження випливає з означення 2.13 та теореми 4.5 [8. 95].
2. За теоремою 2.12 з умови 2 випливає умова 3.
3. За означенням 2.10 з умови 3 випливає умова 4.
4. За теоремою 2.15 з умови 4 випливає умова 5.
5. Доведемо, що з умови 5 випливає умова 6. За теоремою 2.14 ранг матриці лінійного оператора дорівнює n. За теоремою про ранг матриці [7. 46], визначник цієї матриці не дорівнює нулю, тобто вона невироджена.
6. Доведемо, що з умови 6 випливає умова 1. Дано, що матриця A лінійного оператора φ у деякому базисі B простору V невироджена. За теоремою 5.3 [9. 105] для неї існує обернена матриця A^{-1} . За наслідком 1 теореми 2.4 існує лінійний оператор χ простору V, який у базисі B має матрицю A^{-1}. За рівністю 2.25 лінійні оператори $\varphi\chi$ і $\chi\varphi$ мають одиничну матрицю у базисі B. Як ми знаємо одиничну матрицю має одиничний лінійний оператор ε. А тому $\varphi\chi = \chi\varphi = \varepsilon$. За теоремою 4.6 [8. 96] буде $\chi = \varphi^{-1}$, а тому лінійний оператор φ оборотний.

Δ

Враховуючи цю теорему, оборотні лінійні оператори, тобто лінійні оператори ранга n n-вимірного векторного простору, ще називають невиродженими, а лінійні оператори ранга меншого ніж n називають виродженими.

§3. Власні вектори лінійного оператора

3.1. Інваріантні підпростори лінійного оператора

Нехай V – n-вимірний векторний простір над полем F, φ – лінійний оператор, заданий на цьому просторі.

Означення 3.1. *Підпростір U простору V називається* ***інваріантним підпростором лінійного оператора*** *φ, якщо для будь-якого вектора $\vec{a}$ підпростору U його образ $\varphi(\vec{a}) \in U$.*

Отже, U – інваріантний підпростір лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли $\varphi(U) \subset U$. В цьому випадку можна розглядати обмеження лінійного оператора φ на підпростір U. Зазвичай його позначають φ_U, при цьому кажуть, що лінійний оператор φ векторного простору V індукує (породжує) лінійний оператор φ_U на підпросторі U простору V.

Приклади інваріантних підпросторів лінійних операторів

1. Нехай V – довільний векторний простір. Тоді будь-який його підпростір U є інваріантним підпростором одиничного лінійного оператора ε заданого на просторі V.
2. Для нульового оператора, заданого на довільному просторі V, інваріантними підпросторами будуть також всі підпростори простору V.
3. Нехай V – довільний векторний простір, а φ – будь-який лінійний оператор цього простору. Тоді його нульовий підпростір $\langle\vec{0}\rangle$, підпростори $ker\,\varphi$ та $im\,\varphi$, а також сам простір V є інваріантними підпросторами лінійного оператора φ.
4. Нехай V – 3-вимірний векторний простір вільних векторів з ортонормованим базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ та прямокутною декартовою системою координат $Oxyz$. Нехай φ – лінійний оператор повороту (дивись приклад 6 лінійних відображень) відносно вектора $\vec{k}$. Інваріантними підпросторами цього лінійного оператора є: векторний підпростір U_1 всіх векторів простору V паралельних осі Oz та підпростір U_2 всіх векторів простору V паралельних площині xOy.
5. Для того ж простору V та його підпросторів U_1 і U_2 буде: $V = U_1 \oplus U_2$. Нехай φ – оператор проектування на підпростір U_1. Інваріантними

підпросторами лінійного оператора φ будуть всі підпростори простору U_1 тому, що на цьому підпросторі оператор φ індукує одиничний лінійний оператор.

6. Нехай $\lambda\varepsilon$ оператор подібності з коєфіцієнтом λ двовимірного векторного простору вільних векторів площини з прямокутною декартовою системою координат Oxy, l – фіксована пряма, яка проходить через початок координат. Підпростір U_l векторів паралельних прямій l є інваріантним підпростором оператора подібності.

3.2. Власні значення та відповідні їм власні вектори лінійного оператора

Означення 3.2. *Нехай φ – лінійний оператор простору V, ненульовий вектор $\vec{a}$ простору V називається* ***власним вектором лінійного оператора φ, відповідним власному значенню λ*** *цього лінійного оператора, якщо для них виконується рівність:*

$$\varphi(\vec{a}) = \lambda \cdot \vec{a}. \tag{3.1}$$

Отже $\vec{a}$ є власним вектором лінійного оператора φ, якщо він переводиться цим лінійним оператором у пропорційний вектор (в геометрії кажуть у колінеарний вектор). Власні вектори відіграють важливу роль не тільки в алгебрі а й у геометрії, фізиці та інших науках. Їх значення видно вже з наступного зауваження.

Зауваження 3.1.

Нехай V – ненульовий векторний простір, φ – лінійний оператор простору V:

1. Ненульовий вектор $\vec{a}$ є власним вектором лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли одновимірний підпростір породжений цим вектором є інваріантним підпростором лінійного оператора φ.
2. Якщо $\vec{a}$ – власний вектор лінійного оператора φ, відповідний власному значенню λ, то будь-який ненульовий вектор $\vec{b}$, пропорційний вектору $\vec{a}$, є також власним вектором лінійного оператора φ, відповідним власному значенню λ.

∇

1. *Необхідність.* Дано, що ненульовий вектор $\vec{a}$ є власним вектором лінійного оператора φ, відповідним власному значенню λ. Потрібно довести, що підпростір $U = L(\vec{a})$є інваріантним підпростором лінійного оператора φ. Нагадаю, що лінійна оболонка $L(\vec{a})$ складається з усіх векторів, пропорційних вектору $\vec{a}$. Нехай $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ – довільний вектор підпростору U. Потрібно довести, що $\varphi(\vec{b}) \in U$. З рівностей 2.2 та 3.1 маємо: $\varphi(\vec{b}) =$ $= \varphi(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{a}) = \alpha \cdot (\lambda \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \lambda) \cdot \vec{a}$. А тому $\varphi(\vec{b}) \in L(\vec{a})$. Оскільки $\vec{b}$ – довільний вектор підпростору U, то $\varphi(U) \subset U$, а тому $L(\vec{a})$ – інваріантний підпростір лінійного оператора φ.

   Достатність. Дано, що для ненульового вектора $\vec{a}$ лінійна оболонка $U = L(\vec{a})$ є інваріантним підпростором лінійного оператора φ, заданого на просторі V. Потрібно довести, що $\vec{a}$ – власний вектор лінійного оператора φ. Оскільки $\varphi(\vec{a}) \in U$, то вектор $\varphi(\vec{a})$ є лінійною комбінацією вектора $\vec{a}$, тобто пропорційний йому, а тому існує скаляр λ такий, що $\varphi(\vec{a}) = \lambda \cdot \vec{a}$. За означенням 3.2 вектор $\vec{a}$ є власним вектором лінійного оператора φ, відповідним власному значенню λ цього лінійного оператора.
2. Нехай $\vec{a}$ – власний вектор лінійного оператора φ, відповідний власному значенню λ, $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ – довільний вектор, пропорційний вектору $\vec{a}, \alpha \neq 0$. Тоді $\varphi(\vec{b}) = \varphi(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{a}) = \alpha \cdot (\lambda \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \lambda) \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot \alpha) \cdot \vec{a} =$ $= \lambda \cdot (\alpha \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot \vec{b}$. За означенням 3.2 вектор $\vec{b}$ є власним вектором лінійного оператора φ, відповідним власному значенню λ цього лінійного оператора.

Δ

Приклади власних векторів лінійного оператора

1. Існують лінійні оператори без власних векторів. Наведемо такий приклад: Нехай V – 2-вимірний векторний простір вільних векторів площини з

прямокутною декартовою системою координат Oxy, φ – лінійний оператор повороту відносно початку координат O на фіксований кут $\gamma \neq k\pi$, де k довільне ціле число. Цей оператор не має власних векторів, тому що для жодного ненульового вектора $\vec{a}$ вектори $\vec{a}$ і $\varphi(\vec{a})$ непропорційні, а тому рівність 3.1 не виконується для будь-якого ненульового вектора $\vec{a}$ простору V.

2. Нехай $\lambda\varepsilon$ оператор подібності з коефіцієнтом λ заданий на довільному векторному простору V. За означенням оператора подібності для будь-якого вектора $\vec{a}$ простору V виконується рівність: $(\lambda\varepsilon)(\vec{a}) = \lambda \cdot \vec{a}$. Це означає, що всі ненульові вектори простору V є власним векторами оператора подібності $\lambda\varepsilon$, причому всі вони відповідні одному і тому ж власному значенню λ цього лінійного оператора. Зрозуміло, що інших власних значень у цього оператора немає.
3. Нехай $D[A,B]$ – векторний простір нескінченно-диференційованих на проміжку $[A,B]$ функцій над полем дійсних чисел R відносно операцій додавання функцій та множення функцій на число. Задамо на цьому просторі лінійний оператор диференціювання $D(f) = f'$ (дивись приклад 7 лінійних відображень). Для будь-якого фіксованого скаляра λ функція $f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$ є власним вектором лінійного оператора $D(f)$, який відповідає його власному значенню λ. Перевіримо справедливість рівності 3.1 для цих функцій. Обчислюючи похідну складної функції, отримаємо: $D(f_\lambda) = \left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda \cdot e^{\lambda x} = \lambda \cdot f_\lambda$.

Нижче ми розробимо спосіб обчислення власних значень та відповідних їм власних векторів будь-якого оператора. З зауваження 3.1 видно, що одному власному значенню лінійного оператора може відповідати декілька і навіть безліч власних векторів. З наступної теореми видно, що різним власним значенням відповідають різні власні вектори, тому що ці вектори утворюють лінійно незалежну систему. Таким чином, множини власних векторів, які відповідають різним власним значенням лінійного оператора, не перетинаються.

<u>Теорема 3.1.</u> Нехай $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_m}\}$ – система власних векторів лінійного оператора φ простору V над полем F, відповідних попарно різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Тоді система векторів S – лінійно незалежна.

∇

Доведемо теорему методом математичної індукції, причому індукцію будемо проводити по числу m – кількості векторів системи S.

<u>1. Базис індукції.</u> Нехай $m = 1$, тоді $S = \{\overrightarrow{a_1}\}$. За означенням 3.2 $\overrightarrow{a_1} \neq \vec{0}$, за теоремою 3.1 [7. 28] система S – лінійно незалежна.

<u>2. Індуктивний перехід.</u> Припустимо, що будь-яка система, яка складається з k власних векторів лінійного оператора φ векторного простору V, відповідних попарно різним власним значенням цього оператора, лінійно незалежна. В цьому припущенні доведемо, що $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{a_{k+1}}\}$ – система власних векторів лінійного оператора φ, віповідних попарно різним власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ цього оператора, лінійно незалежна. Для цього вияснимо значення коефіцієнтів нульової лінійної комбінації:

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k} + \alpha_{k+1} \cdot \overrightarrow{a_{k+1}} = \vec{0} \qquad \textbf{(3.2)}$$

Подіємо на обидві частини цієї рівності лінійним оператором φ. За теоремою 8.1 [7. 87] отримаємо: $\varphi(\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k} + \alpha_{k+1} \cdot \overrightarrow{a_{k+1}}) = \alpha_1 \cdot \varphi(\overrightarrow{a_1}) + \alpha_2 \cdot \varphi(\overrightarrow{a_2}) + \dots + \alpha_k \cdot \varphi(\overrightarrow{a_k}) + \alpha_{k+1} \cdot \varphi(\overrightarrow{a_{k+1}}) = \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$

. За означенням 3.2 буде: $\varphi(\vec{a}_i) = \lambda_i \cdot \vec{a}_i, i = \overline{1, k+1}$, а тому з останньої рівності

буде: $\alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_k \cdot \lambda_k \cdot \overrightarrow{a_k} + \alpha_{k+1} \cdot \lambda_{k+1} \cdot \overrightarrow{a_{k+1}} == \vec{0}$.

Віднімемо від цієї рівності рівність 3.2, помножену на скаляр λ_{k+1}. Після очевидних перетворень, отримаємо: $\alpha_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_{k+1}) \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_k \cdot (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdot \overrightarrow{a_k} = \vec{0}$.

Власні вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ відповідають попарно різним власним значенням лінійного оператора φ, а тому за індуктивним припущенням система, що складається з цих векторів лінійно незалежна. За означенням лінійно незалежної системи векторів всі коефіцієнти в останньої рівності повинні дорівнювати нулю

$\alpha_i \cdot (\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0, i = \overline{1,k}$. Власні значення лінійного оператора попарно різні, а тому $\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0, i = \overline{1,k}$. Поле F, як і будь-яке інше поле, не має дільників нуля, а тому $\alpha_i = 0, i = \overline{1,k}$.

Тоді рівність 3.2 матиме вид: $\alpha_{k+1} \cdot \overrightarrow{a_{k+1}} = \vec{0}$, причому за означенням 3.2 $\overrightarrow{a_{k+1}} \neq \vec{0}$. Тоді за властивостями векторних просторів [7. 19] скаляр $\alpha_{k+1} = 0$. З рівності 3.2 заключаємо, що система S, яка складається з $(k+1)$-го вектора, лінійно незалежна. За принципом математичної індукції лінійно незалежна будь-яка система векторів, яка задовольняє умови теореми.

Δ

<u>3.3. Характеристичний многочлен матриці. Короткі відомості про многочлени</u>

Означення 3.3. *Нехай A – довільна матриця порядку n над полем F, λ – невідомий скаляр з поля F.* ***Характеристичною матрицею матриці*** *A називається матриця*

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(3.3)}$$

де E – одинична матриця порядку n.

Означення 3.4. Характеристичним многочленом матриці *n-го порядку A називається визначник характеристичної матриці матриці A. Тобто, $|A - \lambda E|$.*

Означення 3.5. Характеристичним рівнянням матриці *n-го порядку A називається рівняння виду: $|A - \lambda E| = 0$ відносно невідомої величини λ.*

Означення 3.6. Характеристичними коренями матриці *n-го порядку A називаються корені її характеристичного рівняння.*

Теорія многочленів досить глибоко вивчається студентами математиками на другому курсі. А тому зараз ми дуже коротко наведемо без доведень тільки ті факти цієї теорії, які нам знадобляться для вивчення лінійних операторів.

Означення 3.7. Многочленом *n-го степеня, заданим над полем F, називається вираз виду: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$, причому $a_n \neq 0$. Елементи $a_0, a_1, \dots, a_n$ називаються* ***коефіцієнтами*** *цього многочлена, x – невідома величина з поля F.*

Означення 3.8. *Нехай F – підполе поля P, елемент α поля P називається* ***коренем многочлена*** *$f(x)$, якщо виконується рівність: $f(\alpha) = a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \alpha + a_0 = 0$.*

Теорема 3.2. Нехай $f(x)$ многочлен n-го степеня, заданий над полем F. Тоді у будь-якому полі многочлен $f(x)$ має не більше ніж n коренів, причому існує поле P, $F \subset P$, яке містить всі n корені цього многочлена.

Отже, многочлен не може мати більше ніж n коренів. Крім того поле F, над яким заданий многочлен $f(x)$, може містити не всі корені цього многочлена, і навіть може не містити жодного його кореня.

Означення 3.9. *Нехай $f(x)$ і $g(x)$ многочнени над полем F. Кажуть, що многочлен $f(x)$* ***ділиться*** *на многочлен $g(x)$ над полем F, якщо над цим полем існує многочлен $h(x)$, такий що $f(x) = g(x) \cdot h(x)$.*

Якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ задані над полем F, причому $f(x)$ не ділиться на $g(x)$, то може існувати поле P, $F \subset P$ над яким многочлен $f(x)$ ділиться на $g(x)$.

Теорема 3.3. Елемент α є коренем многочлена $f(x)$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ ділиться на двочлен $x - \alpha$.

Означення 3.10. *Елемент α називається* ***коренем кратності k*** *або* ***k кратним*** *коренем многочлена $f(x)$, якщо многочлен $f(x)$ ділиться на $(x - \alpha)^k$ і не ділиться на $(x - \alpha)^{k+1}$, при цьому число k називається* ***кратністю*** *кореня α многочлена $f(x)$.*

Вважається, що елемент α стільки раз є коренем многочлена $f(x)$, якою є його кратність.

Повернемось до характеристичної матриці довільної квадратної матриці A n-го порядку.

Зауваження 3.2.

1. Характеристичний многочлен матриці n-го порядку A є многочленом степеня n відносно λ.
2. Характеристичні корені матриці A є коренями її характеристичного многочлена.
3. Матриця n-го порядку A має не більш ніж n характерестичних коренів з урахуванням їх кратності.

∇

1. Нагадаю, що визначник матриці A n-го порядку є алгебраїчною сумою (тобто зі знаком $+$ або $-$) членів цього визначника. Член визначника є добутком n елементів матриці, взятих по одному з кожного її рядка і з кожного стовпця. Отже, $|A-\lambda E|$ матиме член визначника виду: $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda)$, який буде доданком характеристичного многочлена матриці A з найбільшим степенем λ. Збираючи подібні біля степенів λ, знайдемо характеристичний многочлен матриці n-го порядку A у виді: $f(\lambda)=|A-\lambda E|=(-1)^n\cdot\lambda^n+a_{n-1}\cdot\lambda^{n-1}+\dots+a_1\cdot\lambda+a_0$. Ясно, що цей многочлен має степінь[2] n.
2. Випливає з означень 3.5 і 3.8.
3. Випливає з теореми 3.2.

Δ

<u>**Теорема 3.4.**</u> **Характеристичні многочлени подібних матриць співпадають.**

∇

Нехай A і B подібні матриці порядку n. Тоді за означенням 2.3 існує невироджена матриця T, така що виконується рівність: $B=T^{-1}\cdot A\cdot T$ (2.14).

[2] При цьому слід вважати, що поле не є полем характеристики n.

Матриця $\lambda \cdot E$ є скалярною, а тому за теоремою 2.2 [9. 33] вона переставна з будь-якою матрицею порядку n. Звідси випливає, що будь-яка скалярна матриця подібна собі. Дійсно, за означенням оберненої матриці [9. 102] буде: $\lambda \cdot E = E \cdot (\lambda \cdot E) = T^{-1} \cdot T \cdot (\lambda \cdot E) = T^{-1} \cdot (\lambda \cdot E) \cdot T$. Враховуючи властивості операції множення матриць [9. 23], отримаємо:

$|B - \lambda \cdot E| = T^{-1} \cdot A \cdot T - T^{-1} \cdot (\lambda \cdot E) \cdot T = T^{-1} \cdot (A \cdot T - (\lambda \cdot E) \cdot T) =$

$= T^{-1} \cdot (A - \lambda \cdot E) \cdot T$. З останньої рівності видно, що характеристичні матриці матриць A і B подібні. За теоремою 2.5 визначники цих характеристичних матриць, тобто характеристичні многочлени матриць A і B, співпадають.

Δ

Наслідок. Характеристичні рівняння, а тому і характеристичні корені подібних матриць співпадають.

Випливає з означень 3.5 і 3.6.

3.4. Знаходження власних значень та відповідних їм власних векторів лінійного оператора

Означення 3.11. *Нехай φ – лінійний оператор векторного простору V, який у деякому базисі B цього простору має матрицю A.* ***Характеристичним многочленом (рівнянням) лінійного оператора*** φ *називається характеристичний многочлен (рівняння) матриці A цього лінійного оператора. Характеристичні корені матриці A називаються* ***характеристичними коренями лінійного оператора*** φ.

Зауваження 3.3. Нехай φ – лінійний оператор заданий на ненульовому скінченовимірному просторі V. Тоді характеристичний многочлен, характеристичні рівняння і характеристичні корені не залежать від базису векторного простору, на якому заданий цей оператор.

∇

З теореми 2.3 випливає, що матриці лінійного оператора φ у різних базисах простору V подібні. З теореми 3.4 та її наслідку випливає, що ці матриці мають один і той же характеристичний многочлен, а тому характеристичні рівняння та характеристичні корені. З означення 3.11 випливає, що цей многочлен (рівняння, корені) є характеристичним многочленом (рівнянням, коренем) лінійного оператора φ.

Δ

Означення 3.12. Спектром лінійного оператора φ *називається множина всіх характеристичних коренів цього лінійного оператора з урахуванням їх кратності.*

Для знаходження власних векторів лінійного оператора спочатку потрібно обчислити всі його власні значення, тобто спектр. Це роблять за допомогою наступного критерія.

Теорема 3.5. Скаляр λ є власним значенням лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли λ є його характеристичним коренем.

∇

Необхідність. Нехай V – векторний простір з базисом $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$, φ – лінійний оператор простору V, який у базисі B має матрицю $A = (a_{ij})$, $i,j = \overline{1,n}$, λ – власне значення лінійного оператора φ, $\vec{a}$ – власний вектор лінійного оператора φ, відповідний власному значенню λ, $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ – координатний стовпець вектора $\vec{a}$ у базисі B. Доведемо, що λ є характеристичним коренем лінійного оператора φ.

За рівністю 3.1 вектор $\varphi(\vec{a})$ має в базисі B координатний стовпець $\beta = \begin{pmatrix} \lambda \cdot \alpha_1 \\ \lambda \cdot \alpha_2 \\ \cdots\cdots \\ \lambda \cdot \alpha_n \end{pmatrix}$. Враховуючи властивості одиничної матриці за теоремою 2.2, маємо: $A \cdot \alpha = \beta = \lambda \cdot \alpha = E \cdot (\lambda \cdot \alpha) = (\lambda \cdot E) \cdot \alpha$. З рівності векторстовпців $A \cdot \alpha = (\lambda \cdot E) \cdot \alpha$ буде: $(A - \lambda \cdot E) \cdot \alpha = \vec{0}$. Розписавши останню векторну рівність покомпонентно, отримаємо систему рівностей

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\cdot\alpha_1 + a_{12}\cdot\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\cdot\alpha_n = 0 \\ a_{21}\cdot\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\cdot\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\cdot\alpha_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\cdot\alpha_1 + a_{n2}\cdot\alpha_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)\cdot\alpha_n = 0 \end{cases}. \qquad \textbf{(3.4)}$$

За означенням 3.2 вектор $\vec{a}$ – ненульовий. Справедливість рівностей системи (3.4) означає, що однорідна система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = 0 \\ a_{21}\cdot x_1 + (a_{22}-\lambda)\cdot x_2 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)\cdot x_n = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(3.5)}$$

має ненульовий розв’язок $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. За теоремою 4.5 [7. 58] система лінійних рівнянь (3.5) має ненульові розв’язки тоді і тільки тоді, коли визначник її матриці $|A-\lambda\cdot E| = 0$. Остання рівність означає, що λ є характеристичним коренем матриці A. За означенням 3.11 λ – характеристичний корінь лінійного оператора φ.

Достатність. Дано, що λ – характеристичний корінь лінійного оператора φ. Доведемо, що λ – власне значення цього лінійного оператора. За означенням 3.11 λ – характеристичний корінь матриці A лінійного оператора φ векторного простору V у деякому базисі B цього простору. Тоді за означеннями 3.5 і 3.4 виконується рівність $|A-\lambda\cdot E| = 0$. Тоді за теоремою 4.5 [7. 58] система лінійних рівнянь (3.5) має ненульовий розв’язок $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Це означає, що кожне з рівнянь системи (3.4) істинне. Позначимо через $\vec{a}$ вектор, який у базисі B має координатний стовпець

$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, ясно, що вектор $\vec{a}$ – ненульовий. У матричній формі [9. 57] система рівностей (3.4) має вид: $(A-\lambda\cdot E)\cdot\alpha = \vec{0}$ або $A\cdot\alpha = \lambda\cdot\alpha$.

За теоремою 8.3 [7. 90] відображення $f(\vec{a}) = \alpha$, яке відображає кожний вектор $\vec{a}$ простору V на його координатний стовпець у базисі B є взаємно-однозначним відображенням n-вимірного простору V на n-вимірний арифметичний векторний простір F^n. За теоремою 2.2 стовпець $A\cdot\alpha$ є координатним стовпцем вектора $\varphi(\vec{a})$ у базисі B, тобто $f\left(\varphi(\vec{a})\right) = A\cdot\alpha$.

Обернене відображення f^{-1} є взаємно-однозначним відображенням n-вимірного арифметичного векторного простору F^n на простір V, а тому $f^{-1}(A \cdot \alpha)= \varphi(\vec{a})$, $f^{-1}(\lambda \cdot \alpha) = \lambda \cdot \vec{a}$. Враховуючи взаємно-однозначність відображення f^{-1} та рівність $A \cdot \alpha = \lambda \cdot \alpha$, отримаємо: $\varphi(\vec{a}) = \lambda \cdot \vec{a}$. оскільки вектор $\vec{a}$ – ненульовий, то за означенням 3.2 він є власним вектором лінійного оператора φ, відповідним власному знаєнню λ цього лінійного оператора.

Δ

Наслідки:

1. Нехай V – векторний простір з базисом $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}, \varphi$ – лінійний оператор простору V, який у базисі B має матрицю A. Ненульовий вектор $\vec{a}$ є власним вектором лінійного оператора φ, відповідним його власному значенню λ, тоді і тільки тоді, коли його координатний стовпець у базисі B буде розв'язком однорідної системи лінійних рівнянь 3.5.
2. Множина U_λ всіх власних векторів лінійного оператора φ, відповідних його власному значенню λ, в обєднанні з нульвектором є векторним підпростором простору V, причому цей підпростір ізоморфний простору всіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь 3.5.

Таким чином, для знаходження підпростору власних векторів лінійного оператора φ, відповідним його власному значенню λ, потрібно знайти фундаментальну систему розв'язків цієї однорідної системи лінійних рівнянь.

∇

1. Випливає з доведення теореми 3.5.
2. Відображення $f(\vec{a}) = \alpha$, яке відображає кожний вектор $\vec{a}$ простору V на його координатний стовпець у базисі B є ізоморфізмом n-вимірного простору V на n-вимірний арифметичний векторний простір F^n. Тоді відображення f^{-1} є ізоморфізмом простору F^n на простір V. Будь-який ізоморфізм є лінійним відображенням. За теоремою 2.13 ізоморфний образ підпростору всіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь 3.5 при відображенні f^{-1} , тобто множина U_λ, є підпростором простору V.

Δ

Приклад знаходження власних значень та відповідних їм власних векторів лінійного оператора

Нехай лінійний оператор φ заданий на 2-вимірному векторному просторі V над полем дійсних чисел R, причому у деякому базисі B цього простору він має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}$$

Випишемо характеристичне рівняння матриці A та знайдемо всі його корені. За означенням 3.5 воно має вид: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 7 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$, або $\lambda^2 - 7\lambda - 44 = 0$. Легко перевірити, наприклад за теоремою Вієта, що коренями цього рівняння будуть: $\lambda_1 = -11$, $\lambda_2 = 4$. За теоремою 3.5 числа λ_1 і λ_2 є власними значеннями лінійного оператора φ. Знайдемо множини власних векторів лінійного оператора φ, які відповідають кожному з цих власних значень.

1.Запишемо систему лінійних рівнянь 3.5, використовуючи матрицю A лінійного оператора φ та його власне значення $\lambda_1 = -11$. Отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 14x_1 + 2x_2 = 0 \\ 7x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Рівняння цієї системи пропорційні, а тому одне з них можна викреслити. Очевидно, що загальним розв'язком цієї системи лінійних рівнянь буде: $x_2 = -7x_1$, а її фундаментальною системою розв'язків [7. 60] є, наприклад, $(1,-7)$. Це означає, що вектор $\overrightarrow{a_1}$, який у базисі В має координати $(1,-7)$, є власним вектором лінійного оператора φ, відповідним власному значенню $\lambda_1 = -11$. За зауваженням 3.1 кожний вектор, пропорційний вектору $\overrightarrow{a_1}$ є також власним вектором лінійного оператора φ, відповідним власному значеню $\lambda_1 = -11$. Крім того лінійна оболонка натягнута на вектор $\overrightarrow{a_1}$ є інваріантним підпростором цього лінійного оператора.

2.Тепер запишемо систему лінійних рівнянь 3.5, використовуючи матрицю A та його власне значення $\lambda_2 = 4$. Отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 7x_1 - 14x_2 = 0 \end{cases}.$$

Загальним розв'язком цієї системи лінійних рівнянь буде $x_1 = 2x_2$. Її фундаментальною системою розв'язків, наприклад, є $(1,2)$. Це означає, що вектор $\overrightarrow{a_2}$, який у базисі В має координати$(1,2)$, є власним вектором лінійного оператора φ, відповідним власному значенню $\lambda_2 = 4$.

<u>3.5. Лінійні оператори з простим спектром. Зведення матриці до діагонального виду</u>

Однією з задач цього пункту є встановлення умов, при яких матрицю можна звести до матриці діагонального виду.

Означення 3.13. *Кажуть, що матриця A n-го порядку* ***зводиться до діагонального виду****, якщо вона подібна діагональній матриці.*

<u>Теорема 3.6.</u> Нехай V – векторний простір з базисом $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$, φ – лінійний оператор простору V. Всі вектори базису B є власними векторами лінійного оператора φ тоді і тільки тоді, коли матриця лінійного оператора φ у даному базисі буде діагональною.

∇

<u>Необхідність.</u> Дано, що всі вектори базису B є власними векторами лінійного оператора φ. За означенням 3.2 існують скаляри $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такі, що $\varphi(\vec{e}_i) = \lambda_i \cdot \vec{e}_i, i = \overline{1,n}$. Це означає, що вектор $\vec{e}_i$ у базисі B має координатний стовпець, i-й елемент якого дорівнює λ_i, а решта його елементів дорівнюють нулю. Звідси видно, що матрицею лінійного оператора φ у базисі B буде діагональна матриця з елементами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ на головній діагоналі.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

<u>Достатність.</u> Дано, що діагональна матриця A з елементами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ на головній діагоналі є матрицею лінійного оператора φ у базисі B. За означенням 2.2 її i-й стовпець є стовпцем координат вектора $\varphi(\overrightarrow{e_i})$ у базисі B. Тоді розкладом цього вектора за базисом B буде: $\varphi(\vec{e}_i) = \lambda_i \cdot \vec{e}_i, i = \overline{1, n}$. Отже, вектор $\vec{e}_i$ є власним вектором лінійного оператора φ, відповідним власному значенню λ_i, $i = \overline{1, n}$. Ми довели, що базис B складається з власних векторів лінійного оператора φ.

Δ

Таким чином, існують лінійні оператори, які в деяких базисах мають діагональні матриці. Одним з типів таких лінійних операторів є лінійні оператори з простим спектром.

Означення 3.14. *Лінійний оператор φ n-вимірного векторного простору V над полем F називається* ***лінійним оператором з простим спектром****, якщо у полі F він має n попарно різних характеристичних коренів.*

<u>Теорема 3.7.</u> Якщо лінійний оператор φ n-вимірного векторного простору V над полем F має простий спектр, то існує базис B векторного простору V, в якому цей лінійний оператор має діагональну матрицю.

∇

За умовою теореми, лінійний оператор φ у полі F має попарно різні характеристичні корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, які за теоремою 3.5 є його власними значеннями. Отже, цей оператор має власні вектори $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ відповідні цим власним значенням. Ясно, що система векторів $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ є базисом простору V. Дійсно, за теоремою 3.1 ця система векторів лінійно незалежна. За наслідком 3 теореми 6. 1 [7. 72] вона є базисом простору V. Зрозуміло, що матриця лінійного оператора φ у базисі B є діагональною матрицею з елементами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ на головній діагоналі.

Δ

<u>Теорема 3.8.</u> Будь-яка матриця порядку n над полем F, яка має у полі F n попарно різних характеристичних коренів, зводиться до діагонального виду.

∇

Нехай матриця n-го порядку A має у полі F попарно різні характеристичні корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Потрібно довести, що матриця A подібна діагональній матриці. Виберемо у векторному просторі V базис $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$. Враховуючи наслідок 1 теореми 2.4, позначимо через φ лінійний оператор простору V, який у базисі B задається матрицею A. За означенням 3.11 φ є лінійним оператором з простим спектром $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. За теоремою 3.7 існує базис $B' = \{\overrightarrow{e_1{}'}, \overrightarrow{e_2{}'}, \ldots, \overrightarrow{e_m{}'}\}$ простору V, який складається з власних векторів лінійного оператора φ, причому у базисі B' він має діагональну матрицю A' з елементами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ на головній діагоналі. За теоремою 2.3 матриці A і A' подібні.

Δ

Отже, необхідною умовою зведення матриці порядку n до діагонального виду є існування у неї n попарно різних характеристичних коренів. Але ця умова не є достатньою, тому нижче наведемо критерій звідності матриці до діагонального виду. Для доведення цього критерію нам знадобиться наступна технічна лема, яка стосується властивостей операцій множення матриць.

<u>Лема 3.1.</u> Нехай A, B, C – матриці n-го порядку над полем F, причому $C = A \cdot B$. Тоді:

1. I-й стовпець матриці C дорівнює добутку матриці A на i-й стовпець матриці B.
2. Якщо B – діагональна матриця зі скалярами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ на головній діагоналі, то i-й стовпець матриці C дорівнює добутку i-го стовпця матриці A на скаляр λ_i.

∇

1. За означенням операції множення матриць [9. 21] обчислимо всі елементи i-го стовпця матриці С, $i = \overline{1, n}$. Маємо:

$$c_{1i} = a_{11} \cdot b_{1i} + a_{12} \cdot b_{2i} + \cdots + a_{1i} \cdot b_{ii} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{ni}. \quad \textbf{(3.7)}$$

Таким чином, цей елемент дорівнює добутку першого рядка матриці A на i -й стовпець матриці B. Елемент c_{2i} дорівнює добутку другого рядка матриці A на i -й стовпець матриці B і т. д. Елемент c_{ni} дорівнює добутку n-го рядка матриці A на i-й стовпець матриці B. Твердження 1 доведено.

2. Нехай матриця $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Тоді в рівності 3.7 елемент

$b_{ii} = \lambda_i, b_{ki} = 0 \;\; i,k = \overline{1,n}, k \neq i$. Отже $c_{1i} = \lambda_i \cdot a_{1i}$. Аналогічно, елемент c_{2i} дорівнює добутку другого рядка матриці A на i -й стовпець матриці B, а тому $c_{2i} = \lambda_i \cdot a_{2i}, \dots, \; c_{ni} = \lambda_i \cdot a_{ni}$.

∆

Означення 3.15. *Нехай A – довільна ненульова матриця порядку n над полем F. Ненульовий векторстовпець $\vec{x}$ називається **власним вектором матриці** A відповідним власному значенню λ цієї матриці, якщо в полі F існує ненульовий скаляр λ такий, що*

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}. \tag{3.6}$$

Теорема 3.9. Ненульова матриця A порядку n над полем F зводиться до діагонального виду тоді і тільки тоді, коли вона має n лінійно незалежних власних векторів.

∇

Необхідність. Дано, що матриця A подібна діагональній матриці

$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Тоді за означенням 2.3 існує оборотна матриця T, така

що $T^{-1} \cdot A \cdot T = B$. Домножимо обидві частини цієї рівності зліва на матрицю T, після скорочення отримаємо рівність: $A \cdot T = T \cdot B$. Складемо систему $S = \{\vec{t_1}, \vec{t_2}, \dots, \vec{t_n}\}$ векторстовпців, які є стовпцями матриці T з тими ж номерами. З останьої рівності, враховуючи лему 3.1, для цих векторстовпців отримаємо: $A \cdot \vec{t}_i = \lambda_i \cdot \vec{t}_i$. З означення 3.6 випливає, що вектори системи S є власними векторами матриці A, відповідними її власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Доведемо, що система векторів S лінійно незалежна. Оскільки матриця T оборотна, то вона не вироджена [9. 106]. Отже, ранг матриці T [7. 45], а тому і ранг системи векторстовпців S [7. 42], дорівнює n. Це означає, що система векторстовпців S сама є своїм базисом, а тому лінійно незалежна.

<u>*Достатність.*</u> Дано, що матриця A має n лінійно незалежних власних векторів $\overrightarrow{t_1}, \overrightarrow{t_2}, \dots, \overrightarrow{t_n}$, відповідних її власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Відмітимо, що власні значення λ_i необов'язково різні, а власні вектори $\vec{t}_i$ всі попарно різні, тому що утворюють лінійно незалежну систему векторів $i = \overline{1,n}$. Побудуємо з векторів цієї системи матрицю $T = (t_{ki})$, $k, i = \overline{1,n}$ так, щоб її i-й вектор був i-им стовпцем цієї матриці. За означенням 3.15 буде:

$A \cdot \vec{t}_i = \lambda_i \cdot \vec{t}_i$, $i = \overline{1,n}$. З цих векторних рівностей маємо:

$$A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot t_{11} & \lambda_2 \cdot t_{12} & \cdots & \lambda_n \cdot t_{1n} \\ \lambda_1 \cdot t_{21} & \lambda_2 \cdot t_{22} & \cdots & \lambda_n \cdot t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 \cdot t_{n1} & \lambda_2 \cdot t_{n2} & \cdots & \lambda_n \cdot t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що матрицю правої частини останньої рівності можна отримати як добуток $T \cdot B$, де B – діагональна матриця з елементами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ на головній діагоналі. Таким чином, остання матрична рівність прийме вид: $A \cdot T = T \cdot B$. Ясно, що ранг матриці T дорівнює n, тому що система її стовпців лінійно незалежна. За теоремою про ранг матриці [7. 46] матриця T – невироджена, а тому і оборотна. Помноживши обидві частини останньої рівності зліва на матрицю T^{-1} отримаємо рівність 2.14, з якої випливає, що матриці A і B подібні. Це означає, що матриця A зводиться до діагонального виду.

Δ

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979. – 512 с.
2. Архангельский А. В. Конечномерные векторные пространства. – М.: Изд-во МГУ,1982. – 248 с.
3. Бугров Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Бугров Я. С., Никольский С. М. – М.: Наука, 1980. – 176 с.
4. Воеводин В. В. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1975. – 176 с.
5. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука,1966. – 245 с.
6. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые её приложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
7. Драганюк С. В. Векторні простори: навч.посіб./ Драганюк С. В., Парфанюк Н. С. – Одеса: ПНПУ, 2014. – 50 с.
8. Драганюк С.В. Елементи теорії множин: навч.посіб./ Драганюк С. В., Перець О. Б. – Одесса: ПНПУ, 2013. – 141 с.
9. Драганюк С. В. Матриці та визначники: навч.посіб.– Одеса: ПНПУ, 2012. – 112 с.
10. Ефимов Н. В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. – М.: Наука, 1970. – 247 с.
11. Завало С. Т. Алгебра і теорія чисел: В 2 –х ч./ Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б. І. – К.: Вища школа,1974.Ч.1. – 464 с.
12. Завало С. Т. Алгебра и теория чисел: В 2 –х ч./ Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б. И. – К.: Высшая школа, 1977.Ч.1. – 400 с.
13. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. – М.: Наука, 1975. – 320 с.
14. Ильин В. А. Линейная алгебра / Ильин В. А., Позняк Э. Г. – М.: Наука, 1974. – 296 с.

15.Кострикин А. И. Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977. – 236 с.
16.Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия / Кострикин А. И., Манин Ю. И. – М.: Наука,1986. – 235 с.
17.Кострикина А. И. Сборник задач по алгебре. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
18.Куликов Л. Я. Алгебра и теорія чисел. – М.: Высш.школа,1979. – 559 с.
19.Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
20. Ляпин Е. С. Алгебра і теорія чисел: В 2-х ч. / Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. – М.: Просвещение, 1978. Ч. 2. – 448с.
21.Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука,1975. – 400 с.
22.Окунев Л. Я. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1974. – 185 с.
23.Практикум. Алгебра і теорія чисел/ [Завало С.Т.,Левіщенко С.С.,Пилаєв В.В.,Рокицький І.О.]. – К.:Вищ.школа,1983.Ч.1. – 232 с.
24.Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука,1974. – 384 с.
25.Тышкевич Р. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия/ Тышкевич Р.И., Феденко А.С. – Мн.:Выс.школа,1976. – 544 с.
26.Фадеев Д. К. Сборник задач по линейной алгебре. / Фадеев Д. К., Соминский И. С. – М.: Наука, 1977. – 335 с.
27.Фадеев Д. К. Лекции по алгебре. – М.:Наука,1984. – 416 с.