МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад

«Південноукраїнський національний педагогічний університет

імені К. Д. Ушинського»

С.В.Драганюк, Н.С.Парфанюк

«Векторні простори»

Навчальний посібник

Частина 1

Одеса – 2014

УДК 514

ББК

Рекомендовано до друку Вченою радою державного закладу "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського "

Протокол №2 від 25 вересня 2014 року

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор П.Д. Варбанець,

кандидат фізико-математичних наук, доцент О.П. Свєтной

С.В. Драганюк, Н.С Парфанюк Векторні простори. Навчальний посібник. – Одеса: ПНПУ, 2014. – 50 с.

Зміст

Вступ

§1.Основні відомості про алгебраїчні системи

1.1.Бінарна алгебраїчна операція, група……………………………7

1.2.Кільце, поле…………………………………………………………11

1.3.Поле…………………………………………………………………14

§2.Векторні простори

2.1. Введення векторних просторів……………………………...16

2.2. Приклади векторних просторів……………………………...17

2.3. Властивості векторних просторів…………………………...19

2.4. *n* - вимірний арифметичний векторний простір……………………22

§3. Системи векторів векторного простору

3.1. Лінійна залежність та лінійна незалежність систем векторів……..25

3.2. Властивості лінійної залежності та лінійної незалежності систем векторів…………………………………………………………………………29

3.3. Лінійна оболонка систем векторів……………………………..31

3.4. Еквівалентні системи векторів…………………………………36

3.5. Базис скінченої системи векторів……………………………..39

3.6. Ранг скінченої системи векторів…………………………………42

3.7. Властивості ранга скінченої системи векторів……………………..42

§4. Ранг матриці. Теорія сумісності систем лінійних рівнянь

4.1. Ранг матриці……………………………………………………...45

4.2. Властивості ранга матриці………………………………………50

4.3. Векторна форма запису систем лінійних рівнянь……………......52

4.4. Критерії сумісності та визначеності систем лінійних рівнянь…….54

4.5. Ненульові розв’язки однорідної системи лінійних рівнянь……….56

4.6.Векторний простір розв’язків однорідної системи лінійних рівнянь………………………………………………………………………..58

4.7. Фундаментальна система розв’язків однорідної системи лінійних рівнянь………………………………………………………………………..60

§5. Векторні підпростори

5.1.Введення векторних підпросторів……………………………………..63

5.2. Приклади векторних підпросторів……………………………………..64

5.3. Перетин векторних підпросторів………………………………………65

5.4. Додавання векторних підпросторів……………………………………66

5.5. Пряме додавання векторних підпросторів……………………………67

§6.Базис і розмірність векторного простору

6.1.Базис і розмірність скіченовимірного векторного простору…………70

6.2.Співідношення розмірностей скіченовимірного векторного простору та його підпросторів…………………………………………………………72

§7.Координати вектора у данному базисі

7.1.Існування та властивості координат вектора у данному базисі……...80

7.2.Зв`язок між базисами векторного простору…………………………...82

7.3. Зв`язок координат вектора у двох базисах векторного простору. Лінійні перетворення координат……………………………………………84

§8.Гомоморфізми і ізоморфізми векторних просторів.

8.1.Гомоморфізми векторних просторів…………………………………...87

8.2. Ізоморфізм векторних просторів………………………………………88

Література………………………………………………………………….94

Вступ

Лінійна алгебра – це розділ алгебри,який вивчає векторні простори та їх підпростори,лінійні оператори,лінійні,білінійні та квадратичні функції на векторних просторах.

Спочатку предметом дослідження лінійної алгебри була теорія лінійних рівнянь. У зв’язку з розв’язанням систем лінійних рівнянь виникли поняття матриці та її визначника. У 1750 році були отриманні формули Крамера. У 1849 році був запропонований метод Гауса. Поняття рангу матриці, введене Г. Фробеніуса в 1877 році, дозволило сформулювати умови сумісності і визначеності систем лінійних рівнянь. Тим самим наприкінці XIX століття було завершено побудову загальної теорії систем лінійних рівнянь,яка детально викладена у моєї дипломній роботі. Далі у XX столітті центральне місце в лінійній алгебрі займають поняття векторного простору та лінійного відображення заданого на ньому.

Спочатку під вектором розуміли величину, яка володіє не тільки числовим значенням, а й напрямком, як, наприклад, сила, швидкість, прискорення і т.п. Величину, яка не має напрямку, називають скалярною або скаляром. Необхідність векторного счислення виникла у XIX столітті у зв'язку з потребами механіки та фізики. В результаті була створена аналітична геометрія, яка розглядає вектор як множину всіх рівних між собою спрямованих відрізків прямої, площини чи простору.

Витоки оперування з направленими відрізками виникли ще у середньовіччі. У 1587 р. був опублікований трактат фламандського вченого С. Стевіна «Початки статики». У ньому автор приходить до висновку, що для знаходження результату додавання двох сил,необхідно скористатися «паралелограмом сил». При цьому для позначення сил С. Стевін ввів стрілки. Інакше кажучи, С. Стевін вперше ввів додавання двох векторів. Термін «вектор» походить від латинського слова «vector», що означає «ввести», «переносити».

У сучасній математиці розділ в якому викладаються дії з векторами, називають векторною алгеброю, так як ці дії мають багато спільних властивостей з алгебраїчними діями. Більше того в лінійній алгебрі абстрагуються від геометричної природи векторів,тобто називають векторами довільні елементи множини на якій задані операції додавання векторів та множення вектора на скаляр,які задовольняють певним алгебраїчним законам (аксіомам). Цю множину і називають векторним простором над деяким полем скалярів. Скаляром може бути елемент поля дійсних чи комплексних чисел або елемент будь-якого іншого поля. Основною характеристикою векторного простору являється його розмірність. Предметом вивчення лінійної алгебри є саме скінчено вимірні векторні простори.

Висвітленню основних фактів стосовно векторних просторів їх базисів,розмірності та підпросторів і присвячена моя дипломна робота. Теоретичні результати проілюстровані прикладами звятими з багатьох математичних теорії. Це зокрема вказує на широкі застосування теорії векторних просторів не тільки в алгебрі,а і в геометрії,теорії ймовірностей,фізиці,механіці,астрономії,і т.д. Векторний простір можна наділити додатковими структурами, наприклад, нормою, скалярним добутком,метрикою або топологією. Природним чином подібні простори з'являються в функціональному аналізі, переважно у виді нескінченновимірних функціональних векторних просторів.

Дипломна робота буде використана для створення першої частини методичного посібника з лінійної алгебри для студентів першого курсу інституту фізики та математики. Для успішного засвоєння викладеного матеріалу студенти повинні бути попередньо ознайомленні з основними елементами теорій використаних у прикладах,а також елементами теорії множин,відношень та відображень;теорії матриць та визначників; теорій основних алгебраїчних структур – груп,кілець та полів.

§1.Основні відомості про алгебраїчні системи

1.1. Бінарна алгебраїчна операція, група.

Векторним простором над довільним полем S є будь-яка множина V на якій задана одна бінарна алгебраїчна операція і одна не алгебраїчна операція, які задовольняють певним умовам. Ці умови називають алгебраїчними законами або аксіомами. Перед введенням векторних просторів коротко нагадаємо основні відомості про алгебраїчні системи з якими ви вже повинні бути ознайомлені. Цими алгебраїчними системами є групи,кільця та поля. Загалом під алгебраїчною системою будемо розуміти множину на якій задано одну або декілька алгебраїчних операцій чи відношень.

***Означення 1.1. Бінарною алгебраїчною операцією** «*» заданою на множині G, називається відображення множини G^2 у множину G, тобто відображення, що ставить у відповідність кожній порядкованій парі елементів множини G елемент цієї ж множини G.*

Знак операції ставиться між елементами порядкованої пари на яку вона діє. Образ цієї порядкованої пари при даному відображені називається результатом операції,при цьому пишуть $a * b = c$; $a, b, c \in G$.

***Означення 1.2.** Множина G заданої на ній бінарної алгебраїчною асоціативною операцією «*» називається **групою**, якщо відносно даної операції у множині G є нейтральний елемент і кожний елемент множини G володіє в цій множині симетричним елементом. Нагадаю, що операція «*» називається асоціативною на множині G, якщо $\forall\, a, b, c \in G$ виконується* $(a * b) * c = a * (b * c)$. **(1.1)**

Елемент $e \in G$ називається **нейтральним елементом** відносно операції «*», якщо $\forall\, a \in G$ виконується рівність $a * e = e * a = a$. **(1.2)**

Елемент $a' \in G$ називається **симетричним до елемента** $a \in G$ відносно до операції «*», якщо для них виконується рівність

$a' * a = a * a' = e.$ **(1.3)**

Назвемо деякі ***властивості груп:***

1. У групі результат операції над декількома елементами не залежить ні від кількості пар дужок,ні від їх розташування (але цей результат часто залежить від розташування самих елементів).
2. Відносно операції «*» для будь-яких елементів a і b групи G кожне з рівнянь

   $a * x = b$

   $y * a = b$ **(1.4)**

   має в цій групі єдиний розв'язок.
3. Кожна група володіє єдиним нейтральним елементом.
4. Будь-який елемент групи володіє в ній єдиним симетричним елементом.
5. *Закон скорочення.* Для $\forall\ a, b, c$ групи G рівність

   $a * c = b * c$ $(c * a = c * b)$ виконується тоді і тільки тоді, коли a = b.

Означення 1.3. *Група G називається **скінченою**, якщо множина G містить скічену кількість елементів. Інакше група G називається **нескінченою**. Порядком групи G називається **кількість n елементів** множини G, при цьому пишуть $|G| = n$ або $|G| = \infty$, якщо група G нескінчена.*

Означення 1.4. *Група G з операцією «*» називається **комутативною** або **абелевою групою**, якщо будь-які два її елементи переставні, тобто*

$\forall a, b \in G$ *виконується* $a * b = b * a$. ***(1.5)***

Основними прикладами числових груп є: за додаванням - групи всіх цілих раціональних дійсних та комплексних чисел,нульова група, що складається тільки з числа 0; за множенням – групи всіх раціональних дійсних та комплексних ненульових чисел,одинична група, що складається тільки з числа 1, та інші. Основними прикладами нечислових груп є: група матриць розмірності *m* на *n* за додаванням; група не вироджених матриць порядку n за множенням; група матриць визначних яких дорівнює 1 за множенням; групи підстановок n елементів відносно їх композиції, яку теж називають множенням;групи геометричних векторів простору,площини, прямої за додаванням; групу функції (або неперервних чи диференційованих функції), заданих на сегменті [A,B] за додаванням та інші.

В алгебраїчних системах деякі підмножини, множин на яких вони задані, мають певні властивості, які відіграють важливу роль при досліджені самих цих систем.

Означення 1.5. *Підмножина H групи G називається **підгрупою** групи G, якщо ця підмножина сама є групою відносно операції заданої у групі G.* Назвемо деякі з основних властивостей підгруп.

1. Нейтральний елемент у групі і підгрупі співпадають;
2. Для будь-якого елемента a підгрупи H групи G симетричні до нього елементи у групі і підгрупі співпадають;
3. Перетин будь-якої кількості підгруп групи G сам є підгрупою групи G.

Якщо операції задано у групі G називають додаванням і позначають символом „+”, то цю групу називають адитивною,результат операції називають сумою, нейтральний елемент адитивної групи G позначають символом 0, симетричний елемент до елемента $a \in G$ називають протилежним елементом і позначають символом *–a*, при цьому рівності 1.1-1.4 приймуть наступний вид $(a+b)+c=a+(b+c)$ **(1.6)**, $a+0=0+a=a$ $(\mathbf{1.7})$, $a+(-a)=-a+a=0$ $(\mathbf{1.8})$, де 0 - нейтральний елемент адитивної групи, $a+b=b+a$ $(\mathbf{1.9})$.

Якщо операція задана у групі G називають множенням і позначають символом $"\cdot"$, то цю групу називають мультиплікативною, результат операції називають добутком, нейтральний елемент мультиплікативною групи G позначають символом *e* або 1, симетричний елемент до елемента $a \in G$ називають оберненим елементом і позначають символом a^{-1}. Вид рівностей 1.1-1.4 для цієї операції випишіть самостійно.

Нейтральні та обернені елементи у мультиплікативній групі мають такі властивості:

1. $e^{-1} = e,\ e \cdot e = e,\quad \mathbf{(1.10)}$ тобто підмножина, що складається з нейтрального елемента e довільної групи G утворює в ній підгрупу, яка називається одиничною підгрупою групи G;
2. Для $\forall a \in G\quad (a^{-1})^{-1} = a$; **(1.11)**
3. Для будь-яких елементів групи G

   $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n)^{-1} = (a_n^{-1} \cdot a_{n-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot a_2^{-1} \cdot a_1^{-1})$. **(1.12)**

Відповідні властивості елементів адитивної групи випишіть самостійно. Далі будемо вважати, що група G мультиплікативна.

Алгебраїчні системи мають багато як різних так і схожих або однакових алгебраїчних властивостей. В міру схожості цих властивостей визначають за допомогою соціальних відображень цих алгебраїчних систем.

Означення 1.6. *Відображення φ групи G в групу G' називається **гомоморфізмом** групи G в групу G', якщо для будь-яких елементів a і b групи G виконується*

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)\quad \mathbf{(1.13)}$$

Отже, при гомоморфізмі образ добутку двох елементів групи G співпадає з добутком образів цих елементів у групі G'. Таким чином слід пам'ятати, що в лівій частині рівності 1.13 відбувається множення у групі G, а в правій – у групі G' і тільки для зручності, тобто умовно, ці операції позначені одним знаком. Якщо виконується рівність 1.13, то кажуть що відображення φ зберігає операцію.

Нехай φ гомоморфізм групи G у групу G'.

Означення 1.7. *Множина всіх елементів групи G' кожен з яких має хоча б праобраз у групи G називається **гомоморфним образом** групи G при гомоморфізмі φ і позначається im φ.*

Означення 1.8. *Множина всіх елементів групи G , які відображаються в нейтральний елемент у групи G' при гомоморфізмі φ, називається* ***ядром*** *гомоморфізма φ у групи G і позначається $\ker \varphi$.*

Гомоморфізми груп мають такі властивості. Нехай φ гомоморфізм групи G в групу G', e і e' нейтральні елементи цих груп відповідно,*a*-довільний елемент групи G, тоді:

1. $\varphi(e) = e'$; **(1.14)**
2. $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$; **(1.15)**
3. Гомоморфний образ in φ є підгрупою групи G';
4. Ядро гомоморфізма ker φ є підгрупою групи G.

Існує декілька типів гомоморфізмів алгебраїчних систем. Одним з них є ізоморфізм.

Означення 1.9. *Взаємно однозначне відображення φ групи G на групу G' називається* ***ізоморфізмом*** *групи G на групу G', якщо для будь-яких елементів a і b групи G виконується $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.* ***(1.13)***

Ізоморфні алгебраїчні системи характеризується тим, що вони мають абсолютно однакові алгебраїчні властивості,хоча б природа їх елементів може суттєво відрізнятися.

1.2 Кільце, поле

Необхідність введення двох назв для симетричних елементів викликана тим, що не менш поширеними ніж групи є алгебраїчні системи з двома бінарними операціями.

Означення 1.10. *Множина K з заданими на ній бінарними алгебраїчними операціями, які називають додаванням та множенням, називається* ***кільцем*** *якщо ці операції задовольняють наступним умовам:*

1.Відносно операції додавання множина К є комутативною групою.

2.Операція множення асоціативна.

3.Операції додавання та множення зв'язані лівим та правими дистрибутивними законами: $\forall\, a, b, c \in K$ *виконується*

$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \quad (\mathbf{1.15}) \qquad c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b$ ***(1.16)***

Отже, будь-яке кільце має адитивну групу, а тому має нейтральний елемент, що позначається символом 0. Крім того, кожний його елемент *a* володіє у цьому кільці протилежним елементом *–a.* Завдяки цьому у будь-якому кільці крім основних операції додавання та множення, вводять допоміжну операцію віднімання за наступним правилом:

$$\forall a, b \in K \quad a - b = a + (-b) \quad (\mathbf{1.17}).$$

Основними прикладами числових кілець є кільця всіх цілих раціональних дійсних та комплексних чисел. Основними прикладами нечислових кілець є: кільце матриць порядку *n*, кільце функції (або неперервних чи диференційованих функції), заданих на сегменті [A,B] за додаванням і множенням та інші.

Означення 1.11. Нульовим кільцем *називається кільце, що складається з одного елемента,який позначається символом 0(операції додавання та множення на одноелементної множини додаються очевидно,при цьому легко перевіряються всі аксіоми кільця).*

Означення 1.12. *Кільце F називається* ***ненульовим****,якщо в ньому є елемент* a, *такий що* $a \neq 0$.

Означення 1.13. Кільцем з одиницею *називається кільце у якому є нейтральний елемент за множенням, що позначається символом 1.*

Означення 1.14. *Кільце K називається* ***скінченим****, якщо множина K містить скінчену кількість елементів. Інакше кільце K називається нескінченим.*

Багато властивостей числових кілець виконується і в довільному кільці. Хоча існують кільця з властивостями,які у числових кільцях не виконуються. Однією з таких властивостей є наявність у кільцях дільників нуля.

Означення 1.15. *Елементи* a *і* b *кільця* K *називаються* ***дільниками нуля,****якщо* $a \neq 0, b \neq 0, a \cdot b = 0$.

Дільники нуля легко знайти у кільцях матриць та функції.

Основні властивості кілець. Нехай K довільне кільце і a,b,c будь-які його елементи, тоді:

1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;
2. У ненульовому кільці з одиницею елементи 0 і 1 не співпадають;
3. Закон скорочення: у довільному кільці без дільників нуля рівність $a \cdot c = b \cdot c$ $(c \cdot a = c \cdot b)$ виконується тоді і тільки тоді,коли $a = b$(зрозуміло,що у довільному кільці виконується і закон скорочення за додаванням,тому,що за додаванням кільце є групою).
4. $-(-a) = a$;
5. $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$;
6. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$;
7. $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c, c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$;

Однією з основних властивостей кілець є їх характеристика.

Означення 1.16. *Кільце* K *називається* ***кільцем характеристики n,****якщо* n *- це таке мінімальне натуральне число, що сума* n *його одиниць дорівнює нулю. Якщо ж такого натурального числа* n *не існує, то кільце* K *називають кільцем характеристики 0.*

Всі числові кільця є кільцями характеристики 0 та не мають дільників нуля, але існують кільця і ненульової характеристики.

Як і для будь-яких алгебраїчних систем для кілець вводять поняття підкільця та гомоморфізма кілець.

Означення 1.17. *Підмножина L кільця* K *називається* ***підкільцем*** *кільця* K, *якщо ця підмножина сама є кільцем відносно операцій заданих у кільці* K.

Означення 1.18. *Відображення* φ *кільця* K *в кільце* K' *називається* ***гомоморфізмом*** *кільця* K *в кільце* K', *якщо для будь-яких елементів* a *і* b *кільця* K *виконується* $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$ ***(1.18)***,
$\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$ $(\mathbf{1.19})$.

В лівих частинах рівностей 1.18,1.19 виконуються операції кільця K, а в правих – операції в кільця K'. Аналогічно вводиться гомоморфний образ кільця.

Гомоморфізми кілець мають такі властивості. Нехай φ гомоморфізм кільця K в кільце K',0 і $0'$ їх нулі відповідно, a - довільний елемент кільця K, тоді:

1. $\varphi(0)=0'$;
2. Якщо K і K' кільця з одиницями 1 і $1'$, то $\varphi(1)=\varphi(1')$;
3. Гомоморфний образ in φ є підкільцем кільця K';
4. $\varphi(-a)=-\varphi(a)$;
5. $\varphi(a-в)=\varphi(a)-\varphi(в)$;

Означення 1.19. *Взаємно однозначне відображення* φ *кільця* K *на кільце* K' *називається* ***ізоморфізмом*** *кільця* K *на кільце* K', *якщо для будь-яких елементів* a *і* b *кільця* K *виконується рівності 1.18,1.19. Ізоморфні кільця мають однакові алгебраїчні властивості, тому з алгебраїчної точки зору їх не розрізняють.*

Існує немало різних типів кілець. Для нас важливим є один з них,а саме поле.

1.3. Поле

Означення 1.20. *Множина* F *з заданими на ній бінарними алгебраїчними операціями додаванням та множенням називається* ***полем***, *якщо ці операції задовольняють наступним умовам:*

1.Відносно операції додавання множина F *є комутативною групою;*

2.Відносно операції множення множина F без нуля[1] *є комутативною групою;*

3.Операції додавання та множення зв'язані дистрибутивним законом: $\forall\, a, b, c \in K$ *виконується* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

З того,що 0 не входить у мультиплікативну групу поля F випливає,що будь-яке поле не має дільників нуля.

Довільне поле володіє нейтральними елементами за додаванням та множенням, які відповідно позначаються символами 0 і 1, і називаються нулем та одиницею поля F. Кожний елемент a поля F володіє у цьому полі протилежним елементом $-a$ і при $a \neq 0$ - оберненим елементом a^{-1} . Таким чином, протилежний елемент до нейтрального елемента за множенням поля F позначають символом -1. Отже, 0,1,-1 - це не обов'язково числа, а символи для позначення вище названих елементів поля F.

Основними прикладами полів є поля раціональних, дійсних та комплексних чисел. Існують поля ненульової характеристики зокрема поля зі скінченою кількістю елементів і скінчені поля. У довільному полі крім допоміжної операції віднімання вводиться ще одна допоміжна операція – ділення за правилом для будь-яких елементів a,b поля F, при $b \neq 0$

$\frac{a}{b} = (a \cdot b)^{-1}$. **(1.20)**

Елементи виду $\frac{a}{b}$ довільного поля F називають дробами. Вони володіють тими ж властивостями,що і числові дроби, зокрема стосовно скорочення дробів, властивостей пропорції, додавання та множення дробів протилежних до дробів.

Означення 1.21.*Підмножина S поля F називається* ***підполем*** *поля F, якщо ця підмножина сама є полем відносно операцій заданих у полі F.*

[1] Оскільки за додаванням S є групою, то в цій множині відносно додавання є нейтральний елемент і позначають символом 0 і позначають нулем .

Оскільки будь-яке поле є кільцем, то для полів не слід окремо вводити поняття гомоморфізма та ізоморфізма, хоча їх властивості для полів дещо покращується в чому неважко переконатись самим.

§2.Векторні простори

2.1 .Введення векторних просторів.

Нехай дані будь-яке поле F та множина V елементів довільної природи. Елементи поля F будемо називати скалярами і позначати їх малими грецькими буквами з індексами або без них. Частіше за все в ролі поля скалярів F будуть виступати поля дійсних чисел R та комплексних чисел C,хоча можуть бути і інші поля. Елементи множини V будемо називати векторами і позначати малими латинськими буквами з індексами або без них і зі стрілкою над ними. Таким чином,навіть без додаткових вказівок зрозуміло, чим є даний елемент скаляром чи вектором. Будемо вважати, що на множині векторів V задана бінарна алгебраїчна операція додавання векторів та неалгебраїчна операція множення вектора на скаляр. Остання операція не є алгебраїчною оскільки елементи на яку вона діє, взяті з різних множин.

Означення 2.1.*Операцію множення вектора на скаляр будемо називати* ***відображенням,*** *що діє з множини* $F \times V$*, тобто відображення яке ставить* *у відповідність кожній порядкованій парі* $(\alpha, \vec{a})$ *деякий вектор* $\vec{b}$ *з множини V. Цей вектор називають результатом операції множення вектор на скаляр і позначають* $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$.При цьому скаляр завжди пишуть першим множником хоча це й не має особливого значення. Прикладом такої операції є множення вектора на число у геометрії.

Означення 2.2. Векторним простором *V над полем скалярів F називається множина векторів V з заданими на ній операціями додавання векторів та множення вектора на скаляр,які задовольняють наступним аксіомам:*

1. *Множина V за додаванням є комутативною групою;*
2. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$ - *асоціативність відносно скалярів;*
3. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$ - *дистрибутивність відносно скалярів;*
4. $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$ - *дистрибутивність відносно векторів;*
5. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $\forall \alpha, \beta \in F$; $\vec{a}, \vec{b} \in V$.

В аксіомі 5 символ 1- це нейтральний елемент поля F за множенням, це необов'язково число. Нейтральний елемент адитивної групи векторного простору V позначається символом $\vec{0}$ і називається нульвектором. Будь-який вектор $\vec{a}$ простору V володіє у цьому просторі протилежним вектором $-\vec{a}$. Тому у будь-якому векторному просторі V вводять допоміжну операцію віднімання векторів за правилом:$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ **(2.1)** $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$, $-\vec{b}$ - це вектор протилежний до вектору $\vec{b}$.

З наступних прикладів видно наскільки значними є застосування теорії векторних просторів, а також те,що природа векторів може бути досить різноманітною.

2.2.Приклади векторних просторів

1.Множина $V = \{\vec{0}\}$ є векторним простором над довільним полем скалярів F,відносно операції $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}, \forall \alpha \in F$ $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$. Векторний простір який складається тільки з нульвектора називається **нульовим векторним**

простором. При потребі розглядають і порожній векторний простір над довільним полем. Порожній і нульовий – це різні векторні простори, тому,що у нульовому векторному просторі є один елемент - нульвектор, а у порожньому векторному просторі немає жодного вектора.

2. V_3 - векторний простір геометричних векторів простору[2] над полем дійсних чисел R, відносно операцій додавання векторів та множення вектора на число. Аксіоми векторного простору доводяться в аналітичній геометрії як властивості відповідних операції.

3. V_2 - векторний простір геометричних векторів площини над полем дійсних чисел R відносно тих же операцій.

4. V_1 - векторний простір геометричних векторів прямої над полем дійсних чисел R відносно тих же операцій.

5. Векторний простір V всіх матриць розмірності m на n над полем дійсних чисел R відносно операції додавання матриць та множення матриць на число. Аксіоми векторних просторів були доведені як властивості відповідних операцій над матрицями.

6. Векторний простір V всіх матриць розмірності m на n над полем комплексних чисел C відносно операції додавання матриці та множення матриці на число. При цьому зрозуміло, що елементами матриць теж повинні бути комплексні числа.

7. Множина комплексних чисел C є векторним простором над полем дійсних чисел R відносно операцій додавання комплексних чисел та множення комплексного числа на дійсне. Ясно, що векторами цього простору є комплексні числа.

8. Векторний простір $F[A, B]$ всіх функції, заданих на сегменті $[A, B]$, над полем дійсних чисел R відносно операцій додавання функції та множення функції на число.

---

[2] В аналітичній геометрії доводиться,що цей простір тривимірний. З поняття n-вимірного векторного простору в лінійній алгебрі ми познайомимось у §6 цього посібника.

9. Векторний простір $C[A,B]$ всіх неперервних функції, заданих на сегменті $[A,B]$, над полем дійсних чисел R відносно операцій додавання функцій та множення функції на число.

10. Векторний простір $D[A,B]$ всіх диференційованих функції, заданих на сегменті $[A,B]$, над полем дійсних чисел R відносно тих же операцій.

11.Нехай V множина всіх матриць порядку n над полем дійсних чисел R зі звичайною операцією додавання матриць. Добутком матриці $A \in V$ на дійсне число α будемо вважати діагональну матрицю B таку, що $B_{ii} = \alpha \cdot a_{ii}$, $i = 1,2,\dots,n$.Для цих операцій виконується всі аксіоми векторного простору, крім останньої. Тому множина V не буде векторним простором над полем дійсним чисел R. Цей приклад показує, що 5 аксіома незалежна від інших аксіом і не може бути з них виведена, тому її теж обов'язково перевіряти.

2.3.Властивості векторних просторів

Нехай V довільний векторний простір V над полем F, для $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ і $\forall \alpha, \beta \in F$,виконується:

1. Рівняння $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ має в просторі V єдиний розв'язок;
2. Сума будь-якої кількості векторів векторного простору не залежить ні від кількості пар дужок, ні від їх розташування, ні від розташування самих цих векторів(при необхідності можна викреслювати або вставляти одну або декілька пар дужок у довільному місті виразу);
3. В векторних рівностях доданки можна переносити з однієї частини в іншу, міняючи при цьому знак;
4. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$;
5. $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$;

6. $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{0}$,тоді і тільки тоді ,коли $\alpha = 0$,або $\vec{a} = \vec{0}$;
7. Якщо $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$,то $\vec{b} = -\vec{a} = (-1)\vec{a}$;
8. $\alpha \cdot (-\vec{a}) = (-\alpha) \cdot \vec{a} = -(\alpha \cdot \vec{a})$;
9. $(\alpha - \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} - \beta \cdot \vec{a}$;
10. $\alpha \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \alpha \cdot \vec{a} - \alpha \cdot \vec{b}$;
11. Якщо $\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$ і $\alpha \neq 0$, то $\vec{a} = \vec{b}$;
12. Якщо $\alpha \cdot \vec{a} = \beta \cdot \vec{a}$ і $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\alpha = \beta$;
13. $-\vec{0} = \vec{0}$.

∇ 1.*Існування*. Перевіримо, що розв'язком рівняння $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ є $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$ підставивши його у рівняння. Враховуючи комутативність та асоціативність додавання векторів, маємо:

$$\vec{a} + \left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \vec{a} + \left(-\vec{a} + \vec{b}\right) = (\vec{a} + (-\vec{a})) + \vec{b} = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b}$$

Тут використано також означення нейтрального та протилежного елементів адитивної групи векторного простору.

Єдиність. Доведемо методом від супротивного.Нехай $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ два розв'язки рівняння $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ підставивши їх у дане рівняння маємо дві векторні рівності:

$$\vec{a} + \vec{x_1} = \vec{b}$$

$$\vec{a} + \vec{x_2} = \vec{b}$$

Додамо до обох частин кожної з цих рівностей зліва вектор $-\vec{a}$, отримаємо:

$$-\vec{a} + (\vec{a} + \vec{x_1}) = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$-\vec{a} + (\vec{a} + \vec{x_2}) = -\vec{a} + \vec{b}$$

Провівши скорочення, як і при доведення існування розв'язку, отримаємо:

$$\vec{x_1} = \vec{x_2} = -\vec{a} + \vec{b}.$$

Ми довели що розв'язки нашого рівняння співпадають.

2.Випливає з властивості 1 груп і з аксіоми 1 означення векторного простору.

3.Доведемо для прикладу, що останній доданок правої частини рівняння $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} = \gamma \cdot \vec{c} + \delta \cdot \vec{d}$ можна перенести у його ліву частину. Для цього додамо до обох частин цієї рівності вправа вектор $-\delta \cdot \vec{d}$, отримаємо:

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} - \delta \cdot \vec{d} = \gamma \cdot \vec{c} + \delta \cdot \vec{d} - \delta \cdot \vec{d}.$$

Або після скорочення $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} - \delta \cdot \vec{d} = \gamma \cdot \vec{c}$.

4. Очевидно маємо $\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha + 0) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{a}$, отже справедливі рівності $\alpha \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a}$, $\alpha \cdot \vec{a} + \vec{0} = \alpha \cdot \vec{a}$.

За властивістю 1 рівняння $\alpha \cdot \vec{a} + \vec{x} = \alpha \cdot \vec{a}$ повинно мати єдиний розв’язок, а тому $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

5. Аналогічно доведенню попередньої властивості маємо:

$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{0}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{0}.$$

З рівностей $\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{0} = \alpha \cdot \vec{a}$ і $\alpha \cdot \vec{a} + \vec{0} = \alpha \cdot \vec{a}$ та властивості 1 заключаємо, що $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

6.*Необхідність*. Нехай $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{0}$ тоді потрібно довести, що $\alpha = 0$ або $\vec{a} = 0$.Отже, розглянемо випадок коли $\alpha \neq 0$.Тоді у полі F існує елемент α^{-1}.За аксіомами 5 і 2 означення векторного простору

$$\vec{a} = 1 \cdot \vec{a} = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot \vec{a} = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Ми довели,що коли $\alpha \neq 0$, то $\vec{a} = \vec{0}$.

Достатність випливає з властивостей 4 і 5.

7.Те, що $\vec{b} = -\vec{a}$ випливає з аксіоми 1 та означення протилежного елемента, оскільки за додавання векторний простір є групою. З іншого боку

$\vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = 1 \cdot \vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = (1 + (-1)) \cdot \vec{a} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$. З рівності

$\vec{a} + (-1)\cdot\vec{a} = \vec{a}$ випливає, що протилежним до $\vec{a}$ є також вектор $(-1)\cdot\vec{a}$. Оскільки в групі кожний елемент володіє одним протилежним елементом, то $-\vec{a} = (-1)\cdot\vec{a}$.

8. Маємо $\alpha\cdot(-\vec{a}) = \alpha\cdot\big((-1)\vec{a}\big) = \big(\alpha\cdot(-1)\big)\cdot\vec{a} = (-\alpha)\cdot\vec{a}$. З іншого боку

$$\big(\alpha\cdot(-1)\big)\cdot\vec{a} = \big((-1)\cdot\alpha\big)\cdot\vec{a} = (-1)(\alpha\cdot\vec{a}) = -(\alpha\cdot\vec{a}).$$

В цьому доведенні важливо слідкувати,де використовуються аксіоми поля, аксіоми векторного простору чи попередньо доведені його властивості.

9. Випливає з рівності 1.17, властивості 3 векторного простору та властивості 8.

10.Випливає з рівності 2.1 і аксіоми 4 векторного простору.

11.З властивостей 3 і 10 маємо: $\alpha\cdot\big(\vec{a}-\vec{b}\big) = \vec{0}$. Оскільки $\alpha \neq 0$, то з властивості 6 заключаємо, що $\vec{a}-\vec{b} = \vec{0}$ або $\vec{a} = \vec{b}$.

12.Доводиться аналогічно попередній властивості.

13.Доведіть самостійно.

Δ

За індукцією легко довести, що аксіоми 3 і 4 векторних просторів легко поширюються на будь-яку кількість доданків, а аксіома 2 на будь-яку кіот кість скалярів.

2.4. n - вимірний арифметичний векторний простір

Зараз ми побудуємо один з важливих прикладів векторних просторів, який сам використовується для дослідження цих просторів.

Означення 2.3. *n – вимірним вектором називається* ***порядкований набір дійсних*** *чисел виду*

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \qquad \textbf{(2.2)}$$

Числа з яких складається n – вимірний вектор,називаються його **компонентами.** Компоненти вектора не можна міняти місцями, тому їх нумерують згідно місцю від початку вектора - перша,друга,т.д. Так вектори

$\vec{a} = (3,0,-5)$ і $\vec{b} = (-5,3,0)$ є різними. Множина всіх n – вимірних векторів позначається R^n.

Нехай дані вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Означення 2.4. *n – вимірні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються* ***рівними****, при цьому пишуть $\vec{a} = \vec{b}$, якщо співпадають їх відповідні компоненти, тобто $a_i = b_i$,*

$i = \overline{1, \ldots, n}$.

Означення 2.5.*Сумою n – вимірних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, кожна компонента якого є сумою відповідних компонент векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$,тобто $c_i = a_i + b_i$, $i = \overline{1, \ldots, n}$, при цьому пишуть $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.Отже,*

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$ ***(2.3)***

Означення 2.6. *Добутком n – вимірного вектора $\vec{a}$ на дійсне число α називається вектор кожна компонента якого є добутком відповідної компоненти вектора $\vec{a}$ на число α. Цей вектор позначається $\alpha \cdot \vec{a}$.Отже,*

$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \ldots, \alpha \cdot a_n)$ ***(2.4)***

Такі операції над *n* – вимірними векторами, а також їх рівність називають **покомпонентними.**

Приклад.

Нехай дані вектори $\vec{a} = (2,-1,0,6)$,$\vec{b} = (-4,3,2,-4)$; $\vec{a}, \vec{b} \in R^4$. Тоді

$\vec{a} + \vec{b} = (-2,2,2,2)$,$-5 \cdot \vec{a} = (-10,5,0,-30)$.

Лема 2.1. Множина R^n всіх *n* – вимірних векторів є векторним простором над полем дійсним чисел R відносно операцій додавання *n* – вимірних векторів та множення *n* – вимірного вектора на дійсне число.

∇ Доведемо, що за додаванням множина R^n є комутативною групою.

З формул 2.3,2.4 видно, що операції додавання *n* – вимірних векторів та множення *n* – вимірного вектора на число замкнуті на множині R^n, замкнуті і однозначні на множині R^n,тобто результат кожний з цих операції є єдиним вектором,що належить множині R^n. Нейтральним елементом за додаванням у множині R^n, тобто нольвектором є вектор, що складається з *n* нулів:

$\vec{0} = (0,0,\dots,0)$. Протилежним до вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ є вектор

$-\vec{a} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$.

Асоціативність та комутативність додавання *n* – вимірних векторів, а також аксіоми 2-5 векторного простору випливають з того, що покомпонентне додавання *n* – вимірних векторів та множення *n* – вимірного вектора на число зводяться до додавання та множення дійсних чисел. А ці операції над дійсними числами асоціативні та комутативні, для них виконується і дистрибутивні закони. Для прикладу доведемо аксіому 4 векторного простору.

Нехай $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$; $\vec{a}, \vec{b} \in R^n, \alpha \in R^n$.

За формулами 2.3 і 2.4 маємо:

$$\alpha \cdot \left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \alpha \cdot \left((a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)\right) = \alpha \cdot (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) = \left(\alpha \cdot (a_1 + b_1), \alpha \cdot (a_2 + b_2), \dots, \alpha \cdot (a_n + b_n)\right) = (\alpha \cdot a_1 + \alpha \cdot b_1, \alpha \cdot a_2 + \alpha \cdot b_2, \dots, \alpha \cdot a_n + \alpha \cdot b_n)$$

.

Аналогічно

$$\alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) + \alpha \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \dots, \alpha \cdot a_n) + (\alpha \cdot b_1, \alpha \cdot b_2, \dots, \alpha \cdot b_n) = (\alpha \cdot a_1 + \alpha \cdot b_1, \alpha \cdot a_2 + \alpha \cdot b_2, \dots, \alpha \cdot a_n + \alpha \cdot b_n)$$

.

Праві частини цих рівностей співпадають, а тому співпадають і їх ліві частини, тобто справедлива аксіома 4 означення векторного простору.

Δ

Означення 2.7. *n – вимірним арифметичним векторним простором над полем дійсних чисел R називається множина всіх n – вимірних векторів відносно операції їх покомпонентного додавання та множення вектора на скаляр. Цей простір позначається* R^n.

Зауваження 2.1.

1. За аналогічною схемою будується n – вимірний арифметичний векторний простір F^n над довільним полем F. Ясно,що компонентами n – вимірних векторів простору F^n є взагалом не дійсні числа, а елементи поля F.
2. Іноді при потребі n – вимірні вектори записують не рядками, а стовпцями. Тоді, вектори простору F^n називають вектор стовбцями. Це тільки форма запису векторів, з точки зору математики вона не впливає на викладання теорії.

§3. ***Системи векторів векторного простору***

3.1. Лінійна залежність та лінійна незалежність систем векторів

Слово «*система*» фактично є синонімом слова *«множина».* Воно вживається коли досліджують не елементи множини, а їх взаємний зв'язок.

Крім того, на відмінно від множини, всі елементи якої попарно різні, система векторів може містити і рівні вектори. Далі до кінця параграфу будемо вважати, що над деяким полем F заданий довільний векторний простір V, звідки і беруться всі вектори. Систему векторів векторного простору V будемо позначати великою латинською літерою, а вектори, що входять в цю систему будемо заключати у фігурні дужки. Наприклад, система векторів $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}\}$. Якщо система векторів S міститься у векторному просторі V, тобто є його підмножиною, то будемо писати $S \subset V$. Розглядають також порожні системи векторів і системи, що складаються з одного або декількох нульових векторів.

***Означення 3.1** . Вектор $\vec{b}$ називається **лінійною комбінацією векторів** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, якщо його можна подати у виді $\vec{b} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n}$ **(3.1).** При цьому також кажуть що вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$.*

***Зауваження 3.1**.*

1.Сума (різниця) двох лінійних комбінації векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ є лінійною комбінацією тих же векторів коефіцієнти якої дорівнюють сумам (різницям) відповідних коефіцієнтів вихідних лінійних комбінації.

2.Добутком лінійної комбінації векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ на скаляр α є лінійною комбінацією тих же векторів, кожний коефіцієнт якої множиться на скаляр α.

Означення 3.2**. Система векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ векторного простору V називається **лінійно залежною**, якщо існують скаляри $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, які не всі дорівнюють нулю і такі, що $\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$.* ***(3.2)

***Означення 3.3.** Система векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ векторного простору V називається* **лінійно незалежною**, *якщо $\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$ тільки у випадку коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.*

Таким чином рівність 3.2 можна записати завжди. Якщо коефіцієнти в ній можна підібрати так, щоб хоча б один з них був ненульовим, то система векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ **лінійно залежна**. Якщо ж ця рівність можлива тільки з нульовими коефіцієнтами, то система векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ **лінійно незалежна.**

Приклад. Система векторів $\overrightarrow{a_1} = (1,-1,2)$, $\overrightarrow{a_2} = (3,2,1)$,$\overrightarrow{a_3} = (11,4,7)$ тривимірного арифметичного векторного простору R^3лінійно залежна, оскільки $2 \cdot \overrightarrow{a_1} + 3 \cdot \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_3} = \vec{0}$,тому, що наприклад коефіцієнт при векторові $\overrightarrow{a_3}$ ненульовий. Він дорівнює -1.

Означення 3.4. *Система векторів* $E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ *n- вимірного арифметичного векторного простору* R^n *називається* ***системою одиничних векторів,*** *якщо* $\overrightarrow{e_1} = (1,0,\ldots,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1,\ldots,0), \ldots, \overrightarrow{e_n} = (0,0,\ldots,1)$. **(3.3)**

Зауваження 3.2.

1. Система одиничних векторів n- вимірного арифметичного векторного простору R^n - лінійно незалежна.
2. Довільний вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n- вимірного арифметичного векторного простору R^n є лінійною комбінацією системи одиничних векторів цього простору: $\vec{a} = a_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + a_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + a_n \cdot \overrightarrow{e_n}$. **(3.4)**
3. Вектор $\vec{b}$ простору R^n є лінійно комбінацією векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_m}$ цього простору тоді і тільки тоді,коли кожна компонента вектора $\vec{b}$ є лінійною комбінацією відповідних компонент векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_m}$ з тими ж коефіцієнтами.

∇ *1.*Для доведення лінійної незалежності систем одиничних векторів E потрібно встановити, що всі коефіцієнти рівності

$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2}, + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{e_n} = \vec{0}$ дорівнюють нулю. Враховуючи 3.3,2.3,2.4 маємо

$\alpha_1.(1,0,\ldots,0)+\alpha_2\cdot(0,1,.\,.,0)+\cdots+\alpha_n\cdot(0,0,\ldots,1)=(\alpha_1,0,\ldots,0)+$
$+(0,\alpha_2,\ldots,0)+\cdots+(0,0,\ldots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\vec{0}=(0,0,\ldots,0)$
.

За означенням 2.4 буде $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$. Отже, за означенням 3.3 система одиничних векторів лінійно незалежна.

2.Рівність 3.4 легко перевірити самостійно.

3. *Необхідність*.Нехай $\vec{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, $\overrightarrow{a_1}=(a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n})$
,$\overrightarrow{a_2}=(a_{21},a_{22},\ldots,a_{2n})$
....

$\overrightarrow{a_m}=(a_{m1},a_{m2},\ldots,a_{mn})$, тобто $\vec{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$, $i=\overline{1,\ldots,m}$, при чому $\vec{b}=\alpha_1\cdot\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\cdot\overrightarrow{a_2}+\cdots+\alpha_m\cdot\overrightarrow{a_m}$, тоді

$(b_1,b_2,\ldots,b_n)=\alpha_1\cdot(a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n})+\alpha_2\cdot(a_{21},a_{22},\ldots,a_{2n})+\cdots+\alpha_m\cdot(a_{m1},a_{m2},\ldots,a_{mn})=(\alpha_1\cdot a_{11},\ \alpha_1\cdot a_{12},\ldots,\alpha_1\cdot a_{1n})+(\alpha_2\cdot a_{21},\alpha_2\cdot a_{22},\ldots,\alpha_2\cdot a_{2n})+\cdots+(\alpha_m\cdot a_{m1},\alpha_m\cdot a_{m2},\ldots,\ \alpha_m\cdot a_{mn})=(\alpha_1\cdot a_{11}+\alpha_2\cdot a_{21}+\cdots+\alpha_m\cdot a_{m1},\ \alpha_1\cdot a_{12}+\alpha_2\cdot a_{22}+\cdots+\alpha_m\cdot a_{m2},\ldots,\alpha_1\cdot a_{1n}+\alpha_2\cdot a_{2n}+\cdots+\alpha_m\cdot a_{mn})$

.Звідси отримуємо потрібні лінійні комбінації для компонент вектора $\vec{b}$:

$b_1=\alpha_1\cdot a_{11}+\alpha_2\cdot a_{21}+\cdots+\alpha_m\cdot a_{m1}$,

$b_2=\alpha_1\cdot a_{12}+\alpha_2\cdot a_{22}+\cdots+\alpha_m\cdot a_{m2},\cdots\cdots\cdots,$

$b_n=\alpha_1\cdot a_{1n}+\alpha_2\cdot a_{2n}+\cdots+\alpha_m\cdot a_{mn}$. **(3.5)**

Достатність. Нехай тепер виконуються рівності 3.5. Тоді

$\vec{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)=(\alpha_1\cdot a_{11}+\alpha_2\cdot a_{21}+\cdots+\alpha_m\cdot a_{m1},\ \alpha_1\cdot a_{12}+$
$+\alpha_2\cdot a_{22}+\cdots+\alpha_m\cdot a_{m2},\ldots,\alpha_1\cdot a_{1n}+\alpha_2\cdot a_{2n}+\cdots+\alpha_m\cdot a_{mn})=\alpha_1\cdot\overrightarrow{a_1}+$
$+\alpha_2\cdot\cdot\overrightarrow{a_2}+\cdots+\alpha_m\cdot\overrightarrow{a_m}$
.

Ми довели, що вектор $\vec{b}$ є лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_m}$.

Δ

Виясними властивості стосовно лінійної залежності систем, що складаються з одного,двох, а потім і довільної кількості n векторів.

Означення 3.5*.Ненульові вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *називаються* ***пропорційними,****якщо існує скаляр* α *такий, що* $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$*. При цьому скаляр* α *називається коефіцієнтом пропорційності. За означенням нуль вектор пропорційний будь-якому вектору того ж простору.*

В геометрії пропорційні вектори називають ***колінеарними.***

<u>Теорема 3.1</u>

1. **Система, що складається з одного вектора лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли цей вектор нульовий.**
2. **Система двох векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді,коли ці вектори пропорційні**.

∇ *<u>1.Необхідність.</u>*Дано, що система яка складається з одного вектора $\vec{a}$, лінійно залежна. Тоді за означенням 3.2 існує ненульовий скаляр α такий, що $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{0}$. З властивості 6 векторних просторів випливає, що вектор $\vec{a} = \vec{0}$.

<u>Достатність.</u> Нехай $\vec{a} = \vec{0}$. Тоді для будь-якого скаляра $\alpha \neq 0$, буде $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{0}$. Це і є рівність 3.2 для системи, що складається з одного вектора $\vec{a}$. Так як коефіцієнт $\alpha \neq 0$, то ця система лінійно залежна.

<u>2.*Необхідність.*</u>Нехай система векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ лінійно залежна. Тоді в рівності $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} = \vec{0}$, хоча б один з коефіцієнтів,наприклад β, ненульовий,$\beta \in F$. Це означає, що у полі F існує обернений до нього елемент β^{-1}. Домножимо обидві частини рівності $\beta \cdot \vec{b} = -\alpha \cdot \vec{a}$ на елемент β^{-1}. Використовуючи аксіоми векторного простору та властивості поля, отримаємо: $\vec{b} = \alpha' \cdot \vec{a}$, де $\alpha' = -\alpha \cdot \beta^{-1}$. За означення 3.5 вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ пропорційні.

<u>Достатність.</u> Нехай тепер вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ пропорційні. Тоді рівність $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$ можна записати у виді: $\alpha \cdot \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \vec{0}$. У будь-якому полі $-1 \neq 0$, а тому за означенням 3.2 система векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ лінійно залежна.

Δ

З цієї теореми безпосередньо випливають **твердження**:

1. Система,що складається з одного вектора лінійно незалежна тоді і тільки тоді,коли цей вектор ненульовий.
2. Система двох векторів лінійно незалежна тоді і тільки тоді, коли ці вектори не пропорційні.

Їх легко довести методом від супротивного.

3.2. Властивості лінійної залежності та лінійної незалежності систем векторів

1. Якщо яка-небудь підсистема системи векторів лінійно залежна, то лінійно залежна і вся система.
2. Якщо система векторів містить нуль вектор, то вона лінійно залежна.
3. Система векторів $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}\}$, в якій вектор $\overrightarrow{a_1} \neq 0$, лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли хоча б один з її векторів лінійно виражається через попередні вектори цієї системи.
4. Якщо система векторів $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}\}$ лінійно незалежна, а система векторів $S' = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}, \vec{b}\}$ лінійно залежна, то вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори системи S, при чому цей розклад вектора $\vec{b}$ за векторами системи S єдиний.

∇

1. Нехай $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}\}$. При необхідності, міняючи позначення системи векторів S, тобто міняючи місцями їх індекси, можна вважати, що потрібна підсистема S' розташована на початку системи S.Будемо вважати, що підсистема $S' = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_m}\}$ системи S лінійно залежна. Доведемо, що система S лінійно залежна.

Оскільки система S лінійно залежна, то за означенням 3.2 існують не всі рівні нулю скаляри $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ такі, що

$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_m \cdot \overrightarrow{a_m} = \vec{0}$. При потребі додаючи нульові доданки,цю рівність можна записати у виді:

$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_m \cdot \overrightarrow{a_m} + 0 \cdot \overrightarrow{a_{m+1}} + 0 \cdot \overrightarrow{a_{m+2}} + \cdots + 0 \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$.

В останньому виразі також не всі коефіцієнти дорівнюють нулю, а тому за означенням 3.2 система S' лінійно залежна.

2. Випливає з теореми 3.1 та попередньої властивості,при цьому лінійною залежною підсистемою векторів слід вважати підсистему,що складається з нуль вектора.

3. *Необхідність.* Дано, що система S лінійно залежна. За означенням 3.2 існують не всі рівні нулю скаляри $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такі, що

$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$.

Нехай k найбільший з індексів такий, що $\alpha_k \neq 0$. Ясно, що $k > 1$, інакше з останньої рівності випливало б, що $\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} = \vec{0}$, де $\alpha_1 \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{a_1} \neq \vec{0}$. Але з властивості 6 векторного простору це не можливо.

У полі F існує елемент α_k^{-1}. Вектор $\overrightarrow{a_k}$ лінійно виражається через попередні вектори системи S наступним чином :

$$\overrightarrow{a_k} = (-\alpha_k^{-1} \cdot \alpha_1) \cdot \overrightarrow{a_1} + (-\alpha_k^{-1} \cdot \alpha_2) \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + (-\alpha_k^{-1} \cdot \alpha_{k-1}) \cdot \overrightarrow{a_{k-1}}.$$

Нагадаю,що $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \cdots = \alpha_n = 0$.

Достатність. Дано, що для деякого індексу k виконується $\overrightarrow{a_k} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_{k-1} \cdot \overrightarrow{a_{k-1}}$, $2 \leq k \leq n$. Цю ж рівність запишемо у виді:

$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_{k-1} \cdot \overrightarrow{a_{k-1}} + (-1) \cdot \overrightarrow{a_k} + 0 \cdot \overrightarrow{a_{k+1}} + 0 \cdot \overrightarrow{a_{k+2}} + + \cdots + 0 \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$

. За означенням 3.2 система векторів S лінійно залежна тому, що коефіцієнт при векторові $\overrightarrow{a_k}$ не дорівнює нулю.

4. *Існування розкладу.*

З лінійної залежності системи S' випливає, що існують не всі рівні нулю скаляри $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ такі, що

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n} + \beta \cdot \vec{b} = \vec{0}.$$

Доведемо методом від супротивного, що у цьому розкладі $\beta \neq 0$. Припустимо,що $\beta = 0$, тоді остання рівність прийме вид:

$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$, при чому хоча б один з її коефіцієнтів не дорівнює нулю, що протирічить умові за якою система S лінійно незалежна.

Таким чином $\beta \neq 0$, а тому вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори системи S:

$$\vec{b} = (-\beta^{-1} \cdot \alpha_1) \cdot \overrightarrow{a_1} + (-\beta^{-1} \cdot \alpha_2) \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + (-\beta^{-1} \cdot \alpha_n) \cdot \overrightarrow{a_n}.$$

Єдиність розкладу доведемо методом від супротивного. Нехай $\vec{b} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n}$,$\vec{b} = \beta_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \beta_n \cdot \overrightarrow{a_n}$ два розклади вектора $\vec{b}$ за векторам системи S. Віднявши один розклад від іншого отримаємо: $(\alpha_1 - \beta_1) \cdot \overrightarrow{a_1} + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$.

Так, як система векторів лінійно незалежна, то всі коефіцієнти останньої рівності дорівнюють нулю. Ми довели, що $\alpha_i = \beta_i$, $i = \overline{1, \ldots, n}$, а тому розклади вектора $\vec{b}$ за векторам системи S співпадають.

Δ

З властивості 1 випливає, що всі підсистеми лінійно незалежної системи векторів також лінійно незалежні. Крім того, лінійна незалежна система векторів не може містити нуль векторів.

<u>3.3.Лінійна оболонка систем векторів</u>

Означення 3.6.*Нехай дана система векторів $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}$ лінійною оболонкою натягнута на вектори системи S називається* ***множина всіх лінійних комбінації*** *векторів системи S. Вона позначається $L(S)$ або $L(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n})$.*

Зауваження 3.3.Нехай $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}$ довільна система векторів векторного простору V, тоді $S \subset L(S)$.

∇ Це твердження випливає з очевидних рівностей:

$\overrightarrow{a_1} = 1 \cdot \overrightarrow{a_1} + 0 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + 0 \cdot \overrightarrow{\mathrm{a_n}}$,

$\overrightarrow{a_2} = 0 \cdot \overrightarrow{a_1} + 1 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + 0 \cdot \overrightarrow{\mathrm{a_n}}$,

……………………………………………

$\overrightarrow{a_n} = 0 \cdot \overrightarrow{a_1} + 0 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + 1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{a_n}}$ **(3.6)**

∆

Теорема 3.2. ***Нехай*** $\boldsymbol{S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}\}}$ ***система векторів простору V над полем скалярів F. Тоді лінійна оболонка L(S) є теж векторним простором над полем скалярів F.***

∇ В замкнутість операцій додавання векторів та множення вектора на скаляр на множині *L(S)* випливає з зауваження 3.1. Оскільки,

$\vec{0} = 0 \cdot \overrightarrow{a_1} + 0 \cdot \overrightarrow{\mathrm{a_2}} + \dots + 0 \cdot \overrightarrow{\mathrm{a_n}}$ ***(3.7)***, то $\vec{0} \in L(S)$.

Нехай $\vec{a}$ довільний вектор лінійної оболонки *L(S)*. Це означає, що у полі *F* існують скаляри $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$,такі що $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n}$. Тоді $-\vec{a} = (-\alpha_1) \cdot \overrightarrow{a_1} + (-\alpha_2) \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + (-\alpha_n) \cdot \overrightarrow{a_n}$, тому $-\vec{a} \in L(S)$.Інші аксіоми комутативної групи за додаванням зокрема та векторного простору на множині *L(S)* випливає з того,що вони виконується на будь-якій підмножині векторів простору V.

∆

Теорема 3.3. ***Нехай*** $\boldsymbol{S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}\}, T = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_k}\}}$ ***системи векторів векторного простору V над полем F, якщо*** $\boldsymbol{S \subset L(T), \vec{a} \in L(S)}$***,то*** $\boldsymbol{\vec{a} \in L(T)}$***.***

∇ За умовою вектор $\vec{a}$ є лінійною комбінацією векторів системи S, а тому існують скаляри $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, такі що $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k}$. Крім того, за умовою кожний з векторів системи S є лінійною комбінацією векторів системи T, тобто існують скаляри $\beta_{ij,} i = \overline{1, \dots, k}, j = \overline{1, \dots, n}$,такі що: $\overrightarrow{a_1} = \beta_{11} \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_{12} \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \beta_{1n} \cdot \overrightarrow{b_n}$,

$\overrightarrow{a_2} = \beta_{21} \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_{22} \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \beta_{2n} \cdot \overrightarrow{b_n}$,

…………………………………………………………,

$\overrightarrow{a_k} = \beta_{k1} \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_{k2} \cdot \overrightarrow{b_2} + \cdots + \beta_{kn} \cdot \overrightarrow{b_n}.$

Далі, такого виду лінійні комбінації будемо записувати так:

$\overrightarrow{a_i} = \beta_{i1} \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_{i2} \cdot \overrightarrow{b_2} + \cdots + \beta_{in} \cdot \overrightarrow{b_n}, i = \overline{1, \dots, k}.$

Доведемо,що вектор $\vec{a}$ є лінійною комбінацією системи векторів T. Маємо:

$\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k} = \alpha_1 \cdot \left(\beta_{11} \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_{12} \cdot \overrightarrow{b_2} + \cdots + \beta_{1n} \cdot \overrightarrow{b_n}\right) + \alpha_2 \cdot \left(\beta_{21} \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_{22} \cdot \overrightarrow{b_2} + \cdots + \beta_{2n} \cdot \overrightarrow{b_n}\right) + \cdots + \alpha_k \cdot (\beta_{k1} \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_{k2} \cdot \overrightarrow{b_2} + \cdots + \beta_{kn} \cdot \overrightarrow{b_n})$

.

Далі слід розкрити дужки та зібрати подібні біля векторів системи T. Отримаємо:

$\vec{a} = (\alpha_1 \cdot \beta_{11} + \alpha_2 \cdot \beta_{21} + \cdots + \alpha_k \cdot \beta_{k1}) \cdot \overrightarrow{b_1} + (\alpha_1 \cdot \beta_{12} + \alpha_2 \cdot \beta_{22} + \cdots + \alpha_k \cdot \beta_{k2}) \cdot \overrightarrow{b_2} + \cdots + (\alpha_1 \cdot \beta_{1n} + \alpha_2 \cdot \beta_{2n} + \cdots + \alpha_k \cdot \beta_{kn}) \cdot \overrightarrow{b_n}$

.

Вирази в дужках є елементами поля F, тобто скалярами,позначимо:

$\beta_j = \alpha_1 \cdot \beta_{1j} + \alpha_2 \cdot \beta_{2j} + \cdots + \alpha_k \cdot \beta_{kj}, j = \overline{1, \dots, n}.$

Отже, $\vec{a} = \beta_1 \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{b_2} + \cdots + \beta_n \cdot \overrightarrow{b_n}$, тобто $\vec{a} \in L(S)$.

Δ

***<u>Теорема 3.4.</u>* Нехай $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}, \overrightarrow{a_{n+1}}\}$,$T = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$ системи векторів векторного простору V над полем F. Якщо $S \subset L(T)$, то система векторів S лінійно залежна.**

∇ Одразу будемо вважати, що всі вектори системи S ненульові, оскільки за властивістю 2 пункт 3.3, система що містить нуль вектори лінійно залежна. Доведемо теорему методом математичної індукції по числу n.

1. *<u>Базис індукції.</u>*

Нехай $n = 1$.За умовою теореми кожен з векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ належить лінійній оболонці $L(\overrightarrow{b_1})$.Це означає, що існують скаляри α, β такі, що

$\overrightarrow{a_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{b_1}$,$\overrightarrow{a_2} = \beta \cdot \overrightarrow{b_1}$.Оскільки вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ ненульові, то за властивостями векторних просторів $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$.Тоді у полі F ці елементи володіють оберненими елементами, які теж ненульові. Звідси випливає,що $\alpha^{-1} \cdot \overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{b_1}$, $\beta^{-1} \cdot \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{b_1}$. Віднявши другу рівність від першої отримаємо:

$\alpha^{-1} \cdot \overrightarrow{a_1} + \left(-\beta^{-1}\right) \cdot \overrightarrow{a_2} = \vec{0}$. Коефіцієнти цієї лінійної комбінації не дорівнюють нулю, а тому за означенням 3.2 система векторів $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\}$ лінійно залежна.

2. *<u>Індуктивний перехід.</u>*

Припустимо, що твердження теореми істинне для натурального числа k. Доведемо,що в цьому припущенні воно істинне для числа $k+1$. За нашим припущенням будь-яка система $k+1$ векторів, яка міститься в лінійній оболонці системи, що складається з k векторів є лінійно залежною.

Нехай тепер система S містить $k+2$ вектора, система T складається з $k+1$ векторів: $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{a_{k+1}}, \overrightarrow{a_{k+2}}\}$,$T = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_k}, \overrightarrow{b_{k+1}}\}$, $S \subset L(T)$. Доведемо,що система S лінійно залежна.

Випишімо всі розклади векторів системи S за векторами системи T:

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_1} = \beta_{11} \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_{12} \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \beta_{1k} \cdot \overrightarrow{b_k} + \beta_{1k+1} \cdot \overrightarrow{b_{k+1}} \\ \overrightarrow{a_2} = \beta_{21} \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_{22} \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \beta_{2k} \cdot \overrightarrow{b_k} + \beta_{2\,k+1} \cdot \overrightarrow{b_{k+1}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overrightarrow{a_k} = \beta_{k1} \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_{k2} \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \beta_{kk} \cdot \overrightarrow{b_k} + \beta_{kk+1} \cdot \overrightarrow{b_{k+1}} \\ \overrightarrow{a_{k+1}} = \beta_{k+1\,1} \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_{k+2\;2} \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \beta_{k+1\,k} \cdot \overrightarrow{b_k} + \beta_{k+1\,k+1} \cdot \overrightarrow{b_{k+1}} \\ \overrightarrow{a_{k+2}} = \beta_{k+2\,1} \cdot \overrightarrow{b_1} + \beta_{k+2\;2} \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \beta_{k+2\,k} \cdot \overrightarrow{b_k} + \beta_{k+2\,k+1} \cdot \overrightarrow{b_{k+1}} \end{cases} \quad (3.8)$$

Якщо в рівностях 3.8 всі коефіцієнти при векторові $\overrightarrow{b_{k+1}}$ дорівнюють нулю, тобто дорівнюють нулю всі останні доданки цих рівностей, то вектори підсистеми $S' = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{a_{k+1}}\}$є лінійними комбінаціями векторів підсистеми $T' = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_k}\}$. За індуктивним припущенням система S'

лінійно залежна. Тоді за властивістю 1 пункт 3.2 система S теж лінійно залежна.

Нехай тепер хоча б один з коефіцієнтів при векторові $\overrightarrow{b_{k+1}}$ в рівностях 3.8 не дорівнює нулю, наприклад, $\beta_{k+2}, \beta_{k+1} \neq 0$(якщо ненульовим є інший коефіцієнт при векторові $\overrightarrow{b_{k+1}}$, то в системі S можна поміняти місцями індекси векторів). Виразимо[3] з останньої рівності 3.8 вектор $\overrightarrow{b_{k+1}}$ і підставимо цей розклад у решту рівностей 3.8. Розкриємо дужки отриманих $(k+1)$ рівностях, а потім зберемо подібні біля векторів $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_k}, \overrightarrow{a_{k+2}}$. Не вираховуючи коефіцієнти при цих векторах позначимо їх одразу через $\gamma_{ij}, i,$ $j = \overline{1, \dots, k+1}$. Після цих перетворень у системі рівностей 3.8 отримаємо наступну систему рівностей:

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_1} = \gamma_{11} \cdot \overrightarrow{b_1} + \gamma_{12} \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \gamma_{1k} \cdot \overrightarrow{b_k} + \gamma_{1k+1} \cdot \overrightarrow{a_{k+2}} \\ \overrightarrow{a_2} = \gamma_{21} \cdot \overrightarrow{b_1} + \gamma_{22} \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \gamma_{2k} \cdot \overrightarrow{b_k} + \gamma_{2\,k+1} \cdot \overrightarrow{a_{k+2}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overrightarrow{a_{k+1}} = \gamma_{k+1\,1} \cdot \overrightarrow{b_1} + \gamma_{k+1\,2} \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \gamma_{k+1\,k} \cdot \overrightarrow{b_k} + \gamma_{k+1\,k+1} \cdot \overrightarrow{a_{k+2}} \end{cases}$$

В цій системі перенесемо останні доданки в лівій частини рівностей і введемо систему векторів $P' = \{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \dots, \overrightarrow{c_{k+1}}\}$, $\overrightarrow{c_i} = \overrightarrow{a_i} - \gamma_{ik+1} \cdot \overrightarrow{a_{k+2}},$

$i = \overline{1, \dots, k+1}$ ***(3.9)***

Отримаємо систему рівностей:

$$\begin{cases} \overrightarrow{c_1} = \gamma_{11} \cdot \overrightarrow{b_1} + \gamma_{12} \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \gamma_{1k} \cdot \overrightarrow{b_k} \\ \overrightarrow{c_2} = \gamma_{21} \cdot \overrightarrow{b_1} + \gamma_{22} \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \gamma_{2k} \cdot \overrightarrow{b_k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overrightarrow{c_{k+1}} = \gamma_{k+1\,1} \cdot \overrightarrow{b_1} + \gamma_{k+1\,2} \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + \gamma_{k+1\,k} \cdot \overrightarrow{b_k} \end{cases}$$

Остання система рівностей означає, що вектори системи $P' = \{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \dots, \overrightarrow{c_{k+1}}\}$ є лінійними комбінаціями векторів системи

---

[3] Ясно, що цей розклад матиме вид $\overrightarrow{b_{k+1}} = \left(\frac{1}{\beta_{k+2\,k+1}}\right) \cdot \overrightarrow{a_{k+2}} + \left(\frac{-\beta_{k+2\,1}}{\beta_{k+2\,k+1}}\right) \cdot \overrightarrow{b_1} + \left(\frac{-\beta_{k+2\,2}}{\beta_{k+2\,k+1}}\right) \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots . + \left(\frac{-\beta_{k+2\,k}}{\beta_{k+2\,k+1}}\right) \cdot \overrightarrow{b_k}$. Але цей вид для нас не принциповий.

$T' = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_k}\}$. За індуктивним припущенням система векторів P' лінійно залежна. Отже, існують не всі рівні нулю скаляри $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$, такі що: $\alpha_1 \cdot \overrightarrow{c_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{c_2} + \dots + \alpha_{k+1} \cdot \overrightarrow{c_{k+1}} = \vec{0}$. Замінивши всі рівності вектори системи P' їх виразами з 3.9 отримаємо рівність:

$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_{k+1} \cdot \overrightarrow{a_{k+1}} + \alpha_{k+2} \cdot \overrightarrow{a_{k+2}} = \vec{0}$. При цьому коефіцієнт α_{k+2} точно вираховувати не обов'язково тому,що серед коефіцієнтів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$ є хоча б один ненульовий. За означенням 3.2 система
$S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{a_{k+1}}, \overrightarrow{a_{k+2}}\}$ лінійно залежна.

Δ

<u>Наслідки.</u>

1. Нехай $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}\}, T = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$ системи векторів векторного простору V над полем F. Якщо $k > n$, $S \subset L(T)$, то система векторів S лінійно залежна.

∇ За теоремою 3.4 підсистема $S' = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}, \overrightarrow{a_{n+1}}\}$ системи S лінійно залежна. Тоді за властивістю 1 пункт 3.2 система S також лінійна залежна.

Δ

2. В тих же позначеннях, якщо система S лінійна незалежна, то $k \le n$.

Зауваження 3.4

1. *n*- вимірний арифметичний векторний прості R^n є лінійною оболонкою системи одиничних векторів E цього простору: $R^n = L(E)$. ***(3.10)***
2. Будь-яка система *k* векторів *n*- вимірного арифметичного векторного простору R^n при $k > \mathrm{n}$ лінійно залежна.

∇

1. Будь-який векторний простір V замкнутий відносно операції додавання векторів та множення вектора на скаляр. Звідси випливає, що будь-яка лінійна комбінація, а значить і лінійна оболонка,довільної системи

векторів S векторного простору V належить цьому ж простору. Ми довели,що $L(E) \subset R^n$.

Зворотне включення $R^n \subset L(E)$ випливає з пункту 2 зауваження 3.2.

2. Нехай S система k векторів векторного простору R^n. Оскільки $k > n$ і $S \subset L(E)$, то за наслідком 1 теореми 3.4 система S лінійно залежна. Нагадаю, що система одиничних векторів 3.3 складається з n векторів.

Δ

<u>3.4. Еквівалентні системи векторів</u>

Означення 3.7. *Системи векторів S і T векторного простору V над полем F кожна з яких містить хоча б один ненульовий вектор, називаються* ***еквівалентними,*** *якщо будь-який вектор кожної з цих систем є лінійною комбінацією векторів іншої системи. За означенням всі порожні системи, а також системи,що складаються з будь-якої кількості нульових векторів еквівалентні між собою.*

Зауваження 3.5 .Системи векторів S і T,кожна з яких містять хоча б один ненульовий вектор, еквівалентні тоді і тільки тоді,коли $\mathrm{S} \subset \mathrm{L}(\mathrm{T}), \mathrm{T} \subset \mathrm{L}(\mathrm{S})$.

Випливає з того, що будь-яка лінійна оболонка системи векторів складається з усіх лінійних комбінацій векторів цієї системи.
Еквівалентні системи не завжди містять однакову кількість векторів.

<u>Теорема 3.5 (критерії еквівалентності систем векторів)</u>

Дві системи векторів, кожна з яких містять хоча б один ненульовий вектор, еквівалентні тоді і тільки тоді , коли співпадають лінійні оболонки натягнуті на ці системи.

∇ *<u>Необхідність</u>*. Дано,що системи S, T, які містять ненульові вектори, еквівалентні. За зауваженням 3.5 $S \subset L(T)$. Тоді за теоремою 3.3 $L(S) \subset L(T)$. Помінявши в цих міркуваннях букви S і T місяцями отримаємо доведення включення $L(T) \subset L(S)$. За означенням рівності множин буде $L(S) = L(T)$.

<u>*Достатність.*</u> Нехай $L(S) = L(T)$, тоді $L(S) \subset L(T)$. За зауваженням 3.3 $S \subset L(S)$, а тому $S \subset L(T)$. Отже, кожний вектор системи S є лінійною комбінацією системи векторів T. Аналогічно доводиться, що кожний вектор системи T є лінійною комбінацією системи векторів S. Ми довели,що системи S і T еквівалентні.

Δ

<u>***Наслідок.***</u> Еквівалентність систем векторів дійсно є відношенням еквівалентності на множині всіх систем векторів векторного простору V.

∇ Рівність множин зокрема рівність лінійних оболонок рефлексивна, симетрична і транзитивна,тобто є відношенням еквівалентності. Тому за теоремою 3.5 введене в означені 3.7 бінарне відношення є відношенням еквівалентності. Очевидно, що ті ж властивості має еквівалентність порожніх систем та систем нульових векторів. Ясно,що ці системи утворюють окремий клас еквівалентності.

Δ

Означення 3.8.*Система векторів називається* ***скінченою****, якщо вона містить скінчену кількість* n *векторів,* $n \in N$*. Інакше система векторів називається нескінченою.*

<u>***Теорема 3.6.***</u>***Еквівалентні лінійно незалежні, скінчені системи векторів векторного простору V містять однакову кількість векторів.***

∇ Нехай S $= \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}\}$,T $= \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$ - еквівалентні системи векторів. За зауваженням 3.5 $S \subset L(T)$. За наслідком 2 теореми 3.4 $k \leq n$. Помінявши тут букви S і T місцями отримаємо, що $n \leq k$. Звідси маємо, що $k = n$.

Δ

У системах векторів можна здійснювати багато різних перетворень. Деякі з них приводять до еквівалентних систем. Саме такі перетворення зручно зводити до найпростіших, елементарних.

Означення 3.9.Елементарними перетвореннями *скінченої системи векторів називаються:*

1. *Множення деякого вектора системи на ненульовий скаляр.*
2. *Додавання до деякого вектора системи іншого її вектора помноженого на скаляр.*
3. *Виключення з системи або введення в неї нуль вектора.*

Елементарні перетворення перших двох типів називають **не виродженими.** Елементарні перетворення третього типу називають **виродженим.**

<u>Теорема 3.7.</u>Якщо одна скінчена система векторів отримана з іншої скінченої системи векторів за допомогою декількох елементарних перетворень, то ці системи векторів еквівалентні.

∇ Доведення цієї теореми дуже просте.

Нехай дана система векторів $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}\}$. Доведемо,що елементарні перетворення кожного з трьох типів системи S приводить до еквівалентної системи.

1. Нехай система $T = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_k}\}$, при цьому $\overrightarrow{b_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{a_1}, \alpha \neq 0$, інші вектори системи T і S співпадають. Доведемо,що системи S і T еквівалентні. Виразимо вектори системи S через вектори системи T:

$$\begin{cases} \overrightarrow{a_1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \overrightarrow{b_1} + 0 \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + 0 \cdot \overrightarrow{b_k} \\ \overrightarrow{a_2} = 0 \cdot \overrightarrow{b_1} + 1 \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + 0 \cdot \overrightarrow{b_k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overrightarrow{a_k} = 0 \cdot \overrightarrow{b_1} + 0 \cdot \overrightarrow{b_2} + \dots + 1 \cdot \overrightarrow{b_k} \end{cases} \qquad (3.11)$$

Тепер виразимо вектори системи T через вектори системи S:

$$\begin{cases} \overrightarrow{b_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{a_1} + 0 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + 0 \cdot \overrightarrow{a_k} \\ \overrightarrow{b_2} = 0 \cdot \overrightarrow{a_1} + 1 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + 0 \cdot \overrightarrow{a_k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overrightarrow{b_k} = 0 \cdot \overrightarrow{a_1} + 0 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + 1 \cdot \overrightarrow{a_k} \end{cases} \qquad \textbf{(3.12)}$$

2. Нехай тепер система $T = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_k}\}$ отримана з система S елементарним перетворенням другого типу. Оскільки індекси векторів системи S можна поміняти місцями, то будемо вважати, що

$\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{a_1} + \alpha \cdot \overrightarrow{a_2}$, інші вектори систем S і T співпадають. Ясно,що

$\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{b_1} - \alpha \cdot \overrightarrow{b_2}$. Виразіть самостійно вектори системи S через вектори системи T і навпаки.

3. Нехай тепер система T отримана з системи S приєднанням нуль вектора, $T = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_k}, \overrightarrow{b_{k+1}}\}$, $\overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{b_i}, i = \overline{1, \dots, k}$, $\overrightarrow{b_k} = \vec{0}$. Виразити вектори кожної з систем S і T через вектори іншої системи легко. Очевидно,що при цьому слід використовувати рівність:$\overrightarrow{b_{k+1}} = 0 \cdot \overrightarrow{a_1} + 0 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + 0 \cdot \overrightarrow{a_k}$.

Нарешті розгляньте самостійно випадок коли в системі S вектор $\overrightarrow{a_k} = \vec{0}$, а система T отримана з системи S його вилученням.

Δ

3.5.Базис скінченої систем векторів

Базис - це одне з найважливіших математичних понять.

Означення 3.10.Базисом *скінченої системи векторів називається* ***її*** *упорядкована лінійно незалежна підсистема еквівалентна всій системі.*

Ясно,що вектори підсистеми завжди можна лінійно виразити через вектори всієї системи. Отже,важливим є вираження векторів системи через вектори її базису. Зауважимо також, що упорядкованість базису дуже важлива. Вона відбувається за допомогою індексів векторів базису. Помінявши індекси, тобто помінявши вектори базису, отримаємо інший базис. Переформулюємо означення базису системи векторів зробивши його більш зручним для практики.

Означення 3.11.Базисом *скінченої системи векторів називається **її** упорядкована підсистема яка задовольняє дві умови:*

1. *Ця підсистема лінійно незалежна.*
2. *Будь-який вектор системи є лінійною комбінацією векторів цієї підсистеми.*

<u>Теорема 3.8</u>

1.Будь-яка скінчена система векторів, яка містить хоча б один ненульовий вектор, володіє базисом.

2. Будь-які два базиси скінченої системи містять однакову кількість векторів.

∇ 1.Нехай S $=\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}\}$ система векторів векторного простору V. Викресливши в ній всі нульові вектори, отримаємо еквівалентну систему, тому одразу будемо вважати,що всі вектори цієї системи ненульові. Якщо система S лінійно незалежна,то вона сама і є своїм базисом.

Якщо система S лінійно залежна, то за властивістю 3 пункту 3.2 деякий вектор цієї системи є лінійною комбінацією передуючих йому векторів: $\overrightarrow{a_l} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \dots + \alpha_{l-1} \cdot \overrightarrow{a_{l-1}}$ **(3.13),** $1 < l \leq k$. Викресливши його з системи S, отримаємо систему $\mathrm{T} = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_{l-1}}, \overrightarrow{a_{l+1}}, \overrightarrow{a_k}\}$. Ясно, що системи S і T еквівалентні. Відповідні лінійні комбінації випішіть самостійно.

Якщо підсистема T лінійно незалежна, то вона є базисом системи S. Якщо підсистема T лінійно залежна, то аналогічно викреслюємо з неї один вектор,який є лінійною комбінацією попередніх векторів і т.д.

Процес не може бути нескінченим, оскільки система S містить скінчену кількість векторів. Зрештою отримаємо лінійну незалежну підсистему R еквівалентну кожній з раніше отриманих підсистем. Отже, підсистема R є базисом системи S. Система R може складатися навіть з одного ненульового вектора. Нагадаю, що за теоремою 3.1 підсистема R і в цьому випадку лінійно незалежна.

2.Доведемо тепер, що всі базиси скінченої системи S містять однакову кількість векторів.

Нехай R і T різні базиси системи S,тоді кожен з них еквівалентній в цій системі. За теоремою 3.5 $L(T) = L(S) = L(R)$ тому системи R і T еквівалентні. Ясно, що будь-яка підсистема скінченої системи векторів є також скінченою. Крім того за означенням базису системи R і T лінійно незалежні. За теоремою 3.6 вони містять однакову кількість векторів.

Δ

Означення 3.12.Максимальною лінійно незалежною *підсистемою системи векторів S називається така її лінійно незалежна підсистема S', приєднання до якої хоча б одного вектора системи S,який не належить S', приводить до лінійну залежної підсистеми системи S.*

<u>Теорема 3.9.</u>Підсистема T з скінченої системи векторів S є її базисом тоді і тільки тоді,коли вона є максимальною лінійно незалежною.

∇ *<u>Необхідність</u>*. Нехай $\mathrm{T} = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_r}\}$базис системи векторів $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}\}, 1 \leq r \leq k$. Нагадаю, що міняючи індекси завжди можна добитись щоб потрібна підсистема стояла на початку системи. Приєднуючи до підсистеми T довільний вектор $\vec{b}$ системи S, отримаємо підсистему T' системи $S, \vec{b} = \vec{a_i}, i = \overline{r+1, \dots, k}$,

$\mathrm{T}' = \left\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_r}, \vec{b}\right\}$. Доведемо,що підсистема T' лінійно залежна.За означенням 3.11 вектор $\vec{b}$ є лінійною комбінацією векторів системи T. За властивістю 3 пункт 3.2 система T' лінійно залежна. Оскільки, $\vec{b}$ довільний вектор системи S, то за означенням 3.12 підсистема T максимальна лінійно незалежна.

<u>*Достатність*</u>. Нехай в тих же позначеннях T - максимальна лінійно незалежна підсистема скінченої системи векторів S, і $\vec{b}$- довільний вектор системи S.Тоді система T' лінійно залежна. За властивістю 4 пункт 3.2 вектор $\vec{b}$ є лінійною комбінацією системи векторів T. Оскільки, $\vec{b}$ довільний вектор системи S , а підсистема T лінійно незалежна, то підсистема T є базисом системи S .

Δ

<u>***3.6 . Ранг скінченої системи векторів***</u>

Це поняття є важливою характеристикою довільної скінченої системи векторів. Його дозволяє ввести теорема 3.10.

Означення 3.13.Рангом *скінченої системи векторів, яка містить хоча б один ненульовий вектор, називається кількість векторів будь-якого її базису. Ранг порожньої системи та ранг системи, що складається з нульових векторів вважаються рівним нулю.*

<u>Теорема 3.10.</u>Нехай $\boldsymbol{S = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_k}\}, T = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_m}\}}$ ***системи векторів векторного простору V. Якщо*** $\boldsymbol{S \subset L(T)}$***, то ранг системи*** $\boldsymbol{S}$ ***не перевищує рангу системи*** $\boldsymbol{T}$***.***

∇ Якщо система S порожня або складається з нульових векторів,то очевидно твердження теореми істинне. Отже, будемо вважати, що система S містить хоча б один ненульовий вектор. Але тоді і система T містить ненульові вектори, інакше лінійна оболонка L(T) містила б тільки нуль вектори або була би порожньою. За теоремою 3.8 системи S і T володіють базисами, відповідно $S' = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_l}\}$, $T' = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}\}$, $S' \subset S$, $T' \subset T$. За означенням 3.10 системи T і T′ еквівалентні,а тому за теоремою 3.5 $L(T) = L(T')$. За умовою теореми $S \subset L(T)$, а тому $S' \subset L(T')$. За наслідком 2 теореми 3.4 $l \le n$. За означенням 3.13 ранг системи $S = l$, а ранг системи $T = n$.

Δ

3.7.Властивості ранга скінченої системи векторів

1.Ранг будь-якої підсистеми скінченої системи векторів не більше ранга всієї системи.

2.Еквівалентні системи векторів мають однакові ранги.

3.Якщо скінчена система векторів має ранг r, то при $\mathrm{k} > \mathrm{r}$ будь-яка її підсистема k векторів лінійно залежна.

4. При $\mathrm{k} > \mathrm{r}$ система рангу r, яка складається з k векторів, лінійно залежна.

5. Якщо приєднання вектора до системи не міняє її ранга, то приєднаний вектор є лінійною комбінацією векторів цієї системи.

6.Ранг системи векторів дорівнює кількості векторів її довільної максимальної лінійно незалежної підсистеми.

∇ 1.Нехай S система векторів, а S' довільна її підсистема, $S' \subset S$. За зауваженням 3.3 $\mathrm{S} \subset \mathrm{L(S)}$, а тому $S' \subset \mathrm{L(S)}$. За теоремою 3.10 ранг системи S' не перебільшує рангу системи S.

2.Нехай еквівалентні скінчені системи векторів S і T мають відповідно ранги l і n. За зауваженням 3.5 $\mathrm{S} \subset \mathrm{L(T)}$,а тому за теоремою 3.10 $l \leq n$. Але за тим же зауваженням $\mathrm{T} \subset \mathrm{L(S)}$,а тому $n \leq l$. Отже, $l = n$.

3.Нехай система S складається з n векторів і має ранг r, S' її підсистема k векторів,$1 \leq r \leq k \leq m.$ Якщо ранг системи $\mathrm{S} = 0,$ наше твердження очевидне. Інакше система S має базис T, який складається з r векторів.За означенням 3.10 і зауваженням 3.5 буде $\mathrm{S} \subset \mathrm{L(T)}$,а тому $\mathrm{S'} \subset \mathrm{L(T)}$. За наслідком 1 теорема 3.4 система $\mathrm{S'}$ лінійно залежна.

4.Нехай S система векторів,що задовольняє умові властивості 4.Тоді її лінійно залежність випливає з властивості 3 якщо за підсистему взяти саму систему S.

5.Нехай ранги систем $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}\}$, $S' = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}, \vec{b}\}$ дорівнюють r. Якщо $r = 0$, то ці системи складаються тільки з нуль векторів. За властивістю 4 векторних просторів нуль вектор завжди можна записати у виді лінійної комбінації нуль векторів. Якщо $r \neq 0$,то система S володіє базисом

$T = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_r}\}$, $r \leq k$. Розглянемо систему $T' = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_r}, \vec{b}\}$. Оскільки $T' \subset S'$, то ранг T' не перевищує числа r. За властивістю 4 система T' лінійно залежна. За означенням базиса система T лінійно незалежна. За властивістю 4 пункт 3.2 вектор $\vec{b}$ є лінійною комбінацією векторів системи T. Тоді вектор $\vec{b}$ можна записати лінійною комбінацією векторів системи S,при необхідності використовуючи нульові коефіцієнти.

6.Випливає з теореми 3.9.

Δ

Зауваження 3.6. Ранг будь-якої скінченої системи векторів $n -$ вимірного арифметичного векторного простору R^n не більший за n.

∇ З зауваження 3.2 пункт 2 випливає, що будь-яка система S векторів векторного простору R^n міститься в лінійній оболонці L(E), де E – система одиничних векторів 3.3.За пунктом 1 того ж зауваження система E лінійно незалежна тому вона є своїм базисом. Отже,система E має ранг n. За теоремою 3.10 ранг системи S не більший за n.

Δ

§4. *Ранг матриці. Теорія сумісності систем лінійних рівнянь*

4.1. Ранг матриці

Матриця розмірності m на n це прямокутна таблиця, що складається з m рядків та n стовбців дійсних чисел. Кожен з рядків матриці є упорядкованим набором n дійсних чисел, а кожен з її стовбців – упорядкованим набором m дійсних чисел.

Зауваження 4.1.Нехай дана матриця А розмірності m на n. Тоді:

1. Рядки матриці А є векторами n – вимірного арифметичного векторного простору R^n.
2. Стовбці матриці А є векторами m– вимірного арифметичного векторного простору R^m.

Випливає з означення 2.3.

Означення 4.1.*Рядковим (стовпцевим) рангом матриці А розмірності m на n називається* ***ранг системи*** *всіх рядків (стовбців) матриці А,як векторів арифметичного векторного простору* R^n (R^m).

Основними задачами цього пункту є доведення того,що рядковий та стовпцевий ранги матриці співпадають,а також знаходження способу обчислення рангу матриці. Виявляється, що ранг матриці пов'язаний з найбільшим порядком її ненульових мінорів(див.[6]). Звертаю вашу увагу, що ранг матриці пов'язаний не зі значенням деякого її мінора, а з його порядком. Важливою є наступна лема хоча безпосереднього відношення до предмету наших досліджень вона не має.

Лема 4.1.Якщо всі мінори *k*-го порядку матриці А розмірності *m* на *n* дорівнюють нулю, то дорівнюють нулі і всі її мінори більших порядків.

∇ Нехай А матриця яка задовольняє умови леми і М довільний її мінор порядку $k + s, s \neq 0, 1 < k + s \leq min(m, n)$. За допомогою теореми Лапласа розкладемо мінор М за його першими k рядками. Ясно,що будь-який мінор мінора М є також мінором і матриці А, а тому всі мінори k-го порядку мінора М дорівнюють нулю. За теоремою Лапласа мінор М є сумою всіх його мінорів k-го порядку, що лежать у його перших k рядках, помножених на їх алгебраїчні доповнення. Оскільки перший множник кожного доданку дорівнює нулю, то $\mathrm{M} = 0$.

Δ

Таким чином, якщо у матриці ці всі мінори третього порядку дорівнюють нулю, то в ній нема нерівного нулю мінора п'ятого порядку. Результатом цієї леми є те, що можна говорити про максимальній порядок ненульових мінорів довільної матриці.

Теорема 4.1(теорема про ранг матриці)

Найбільший порядок ненульових мінорів матриці А розмірності m на n дорівнює стовпцевому рангу цієї матриці.

∇ Нехай *r* найбільший порядок ненульових мінорів матриці А, $1 \leq r \leq min(m, n)$,М - її ненульовий мінор порядку *r*, що стоїть на перетині рядків матриці А з номерами $i_1, i_2, \cdots, i_r$ та її стовпців з номерами $j_1, j_2, \cdots, j_r$, $1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_r \leq m$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$. Поміняємо у матриці А рядки, а потім і стовпці місцями так, щоб мінор М розташовувався у лівому верхньому куті отриманої матриці В. При цьому взаємне розташування рядків і стовпців мінора М не повинно змінитись. Отже,поміняємо рядок з номером i_1 з кожним з попередніх рядків,поки він не стане першим. При цьому буде здійснено $i_1 - 1$ перестановок рядків матриці. Далі, поміняємо рядок з номером i_2 з кожним з попередніх рядків,поки він не стане другим. При цьому буде здійснено $i_2 - 2$ перестановок рядків і т.д. Нарешті піднімемо вгору рядок з номером i_r міняючи місцями його з сусідніми рядками, поки він не стане r-тим. При цьому буде здійснено $i_r - r$ перемін місцями рядків матриці. Таким чином, ми доб'ємося, що при переміні місцями $(i_1 - 1)+(i_2 - 2) + \cdots + (i_r - r\,) =$ $= (i_1 + i_2 + \cdots + i_r) - (1 + 2 + \cdots + r)$ рядків матриці А буде отримана матриця в якій мінор М буде знаходитись у перших *r* рядках. При цьому взаємне розташування рядків мінора М не зміниться.

Аналогічно,рухаючи вліво стовпці отриманої матриці за допомогою $(j_1 + j_2 + \cdots + j_r) - (1 + 2 + \cdots + r)$ перемін місцями стовпців цієї матриці отримаємо матрицю В в лівому верхньому куті якої буде знаходитись мінор М.За властивостями визначників кожна переміна місцями рядків або стовпців матриці змінює знак її визначника,а тому максимальний порядок ненульових мінорів матриць А і В співпадає, тобто дорівнює r. Це випливає з того,що будь-який мінор матриці В буде відрізнятись від деякого мінора матриці А тільки розташуванням його рядків і стовпців,і навпаки.

Доведемо,що стовпцеві ранги матриць А і В співпадають. Встановимо,що переміна місцями двох рядків не міняє стовпцевого ранга матриці. Нехай матриця A' отримана з матриці А переміною місцями і-го та j-го рядків. Позначимо через S систему стовпців матриці А, а через $S\,'$-систему стовпців матриці A' . Кожен вектор системи $S\,'$ буде отриманий з відповідного вектора системи S переміною місцями його і-тої та j-тої компонент, і навпаки. Нехай Т довільна лінійно незалежна підсистема векторів системи S. А T' - підсистема системи $S\,'$ отримана з векторів системи Т переміною місцями *i*-тої та *j*-тої компонент. За означенням 3.3 лінійна комбінація векторів системи Т дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вона має нульові коефіцієнти. За зауваженням 3.2 пункт 3 всі лінійні комбінації відповідних компонент векторів системи T дорівнюють нулю тільки з нульовими коефіцієнтами. Але тією ж властивістю володіють і лінійні комбінації векторів системи T'. За зауваженням 3.2 пункт 3 система T' теж лінійно незалежна. Отже,кожній лінійно незалежній підсистемі векторів системи S відповідає лінійно незалежна підсистема векторів системи S', і навпаки, при цьому відповідні підсистеми мають однакову кількість векторів. Нехай тепер B максимальна лінійно незалежна підсистема системи векторів S.Її відповідає максимальна лінійна незалежна підсистема B' системи векторів S',при цьому ці підсистеми містять однакову кількість r векторів.За властивістю 6 пункт 3.7 системи векторів S і S' мають однакові ранги. Таким чином переміна місцями рядків матриці A не міняє її стовпцевий ранг. Переміна місцями стовпців матриці A взагалі не міняє системи її стовпців, а тому теж не міняє її стовпцевий ранг.

Якщо ми доведемо,що стовпцевий ранг матриці B дорівнюватиме максимальному порядку її ненульових мінорів, то теж саме буде виконуватись і для матриці A. Нехай матриця

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1r+1} & \cdots & b_{1l} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2r+1} & \cdots & b_{2l} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rr} & b_{rr+1} & \cdots & b_{rl} & \cdots & b_{rn} \\ b_{r+1\,1} & b_{r+1\,2} & \cdots & b_{r+1\,r} & b_{r+1\,r+1} & \cdots & b_{r+1\,l} & \cdots & b_{r+1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ir} & b_{ir+1} & \cdots & b_{il} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} & b_{mr+1} & \cdots & b_{ml} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$i = \overline{1,\ldots m}, l = \overline{r+1,\ldots n}$. В лівому верхньому куті матриці B знаходиться ненульовий мінор r-го порядку M. Всі мінори $(r+1)$-го і вищих порядків матриці B дорівнюють нулю, i-тий рядок матриці B може проходити через мінор M, але може розташовуватись і нище нього.

Побудуємо допоміжні мінори $(r+1)$-го порядку

$$\mathrm{M}_i = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rr} & b_{rl} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ir} & b_{il} \end{vmatrix}$$

Доведемо,що всі мінори $\mathrm{M}_i = 0, i = \overline{1,\dots,m}$.

Дійсно, при $i \leq r$ вони мають два однакових рядків. За властивостями визначника такі мінори дорівнюють нулю. При $i > r$ мінор M_i співпадає з одним з мінорів $(r+1)$-го порядку матриці B,а тому теж дорівнює нулю.

Додатковим мінором елемента b_{il} у всіх мінорах M_i є мінор M. Розкладемо мінор M_i по останньому рядку. При знаходженні алгебраїчних доповнень елементів b_j останній рядок мінора M_i викреслюється, а тому ці алгебраїчні доповнення не залежать від i. Позначимо алгебраїчні доповнення елементів b_j через $\mathrm{B}_j, j = \overline{1,..,r}$. Маємо $\mathrm{M}_i = b_{i1} \cdot \mathrm{B}_1 + b_{i2} \cdot \mathrm{B}_2 + \cdots + b_{ir} \cdot \mathrm{B}_r + b_{il} \cdot M$. Враховуючи,що M$\neq 0$ покладемо $\beta_j = -\frac{B_j}{M}$,

$j = \overline{1,\dots,r}$. Маємо $b_{il} = \beta_1 \cdot b_{i1} + \beta_2 \cdot b_{i2} + \cdots + \beta_r \cdot b_{ir}$, $i = \overline{1,\dots,m}$, $l = \overline{r+1,\dots,n}$.Тут індекс l фіксований. З останньої рівності видно,що i-та компонента l-го стовпця матриці B є лінійною комбінацією i-тих компонент її перших r стовпців з одними і тими ж коефіцієнтами $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ для всіх $i = \overline{1,\dots,m}$. Отже, l-тий стовпець матриці B є лінійною комбінацією її перших r стовпців.

Доведемо, що система всіх стовпців матриці B лінійно залежна. При $l = r+1$ отримаємо, що $(r+1)$-й стовпець матриці B є лінійною комбінацією перших r сповпців цієї матриці. За властивістю 3 пункт 3.2 підсистема перших $(r+1)$ стовпців матриці B лінійно залежна, а тому за властивістю 1 пункт 3.2 система всіх стовпців матриці B теж лінійно залежна.

Нехай S система r стовпців матриці В. Доведемо методом від супротивного, що система S лінійно незалежна. Отже,припустимо,що вона лінійна залежна. За властивістю 3 пункт 3.2 один з векторів системи S є лінійною комбінацією попередніх векторів цієї системи. Це означає,що один зі стовпців мінора М є лінійною комбінацією інших його стовпців. Тоді за властивостями визначників $\mathrm{M} = 0$, що суперечить його вибору , як ненульового мінора r-го порядку матриці А. З цього протиріччя заключаємо,що підсистема S лінійно незалежна. Вище ми довели,що при $l = \overline{r+1, \dots, n}$ l-тий стовпець матриці В є лінійною комбінацією стовпців системи S. Отже ,S – максимальна лінійно незалежна підсистема системи всіх стовпців матриці В. За теоремою 3.9 система S є базисом системи всіх стовпців матриці В. За означенням 3.13 і 4.1 стовпцевий ранг матриці $\mathrm{B} = r$.

Δ

Наслідки.

1)Стовпцевий та рядковий ранги матриці співпадають.

2)Визначник матриці А *n*-го порядку дорівнює нулю і тоді і тільки тоді,коли один з його рядків (стовбців) є лінійною комбінацією інших його рядків (стовбців).

∇

1.Ясно,що всі мінори транспонованої матриці $\mathrm{A}^{\mathrm{т}}$ можна отримати транспонуванням відповідних мінорів матриці А і навпаки. Отже,максимальні порядки ненульових мінорів матриць А і $\mathrm{A}^{\mathrm{т}}$ співпадають,а тому співпадають її стовпцеві ранги. Але стовпцевий ранг матриці $\mathrm{A}^{\mathrm{т}}$ співпадає з рядковим рангом матриці А,а тому рядковий і стовпцевий ранги матриці А співпадають.

2.Необхідність.Нехай $|\mathrm{A}| = 0$. Ясно,що $|\mathrm{A}|$ це єдиний мінор n-го порядку матриці А. Це означає,що максимальний порядок r ненульових мінорів матриці А менше порядку цієї матриці *n*. Отже, стовпцевий ранг матриці А менше кількості її стовпців. З властивістю 4 ранга системи векторів випливає,що система всіх стовпців матриці А лінійна залежна. За властивістю 3 пункт 3.2 один зі стовпців матриці А є лінійною комбінацією інших його стовпців. Це твердження аналогічно доводиться і для рядків матриць.

Достатність є однією з властивостей визначника.

Δ

З наслідку 1 випливає,що рядковий і стовпцевий ранги матриці можна не розрізняти, а тому далі будемо говорити просто про ранг матриці.

4.2.Влативості ранга матриці, метод його обчислення

1.При транспонуванні матриці її ранг не міняється.

2.Елементарні перетворення матриці не міняють її ранга.

3.Приписування до матриці або викреслення з неї нульового рядка (стовпця) не міняє ранга матриці.

4.Ранг матриці дорівнює кількості векторів максимальної лінійно незалежної системи її рядків (стовпців).

5.Приписування до матриці довільного рядка (стовпця) збільшує її ранг не більш ніж на одиницю.

∇

1. При доведенні наслідку 1 теореми 4.1 встановлено, що максимальні порядки ненульових мінорів матриць А і A^T співпадають, а тому співпадають і їх ранги.
2. Нехай системою векторів буде множина всіх рядків матриці А, тоді за означенням 3.9 елементарні перетворення першого та другого роду рядків матриці зводяться до невироджених елементарних перетворень цієї системи векторів. За теоремою 3.7 при цьому отримаємо еквівалентну систему векторів, а за властивістю 2 пункт 3.7 еквівалентні системи векторів мають однакові ранги. Елементарні перетворення третього роду, тобто переміна місцями рядків матриці, взагалі не змінює систему стовпців цієї матриці.

3. За означенням 3.9 вказане перетворення матриці зводиться до виродженого елементарного перетворення системи векторів яка складається з рядків(стовпців) цієї матриці. За теоремою 3.7 це елементарне перетворення приводить до еквівалентної системи рядків(стовпців) матриці,а еквівалентні системи векторів мають однакові ранги.
4. Випливає з означення 4.1 і теореми 3.9.
5. Нехай матриця B отримана приписуванням до матриці A останнього стовпця $\vec{b}$, r - ранг матриці A, а T – базис системи стовпців цієї матриці, $T' = T \cup \{\vec{b}\}$. Якщо система T' лінійно незалежна, то вона очевидно є базисом системи стовпців матриці B. Це означає,що ранг матриці $\mathrm{B} = r + 1$. Якщо система T' лінійно залежна, то за властивістю 4 пункт 3.2 вектор $\vec{b}$ є лінійною комбінацією векторів системи T.Отже,в цьому випадку система векторів T є базисом системи всіх стовпців матриці B. Це означає,що ранг матриці $\mathrm{B} = r$.

Δ

<u>Метод обчислення ранга матриці:</u>для обчислення ранга матриці A потрібно за допомогою елементарних перетворень звести її до трапецевидної матриці B.Тоді ранг матриці A дорівнює кількості ненульових рядків трапецевидної матриці B.

∇ За властивістю 2 матриці A і B мають однакові ранги r. Будемо вважати,що в матриці B викреслені всі нульові рядки. За властивістю 3 це не змінить її ранга. Отже,будемо вважати,що матриця B містить r рядків і всі вони ненульові. Відомо,що будь-яку матрицю A можна звести до трапецевидної форми,тобто побудувати таку матрицю B, для якої елементи $b_{ii} \neq 0, i = \overline{1, \dots, r}$, всі інші елементи в рядках які передують елементам $b_{ii} = 0$ (див [6]). Тоді мінор M,що складається з перших r стовпців матриці B не дорівнює нулю,тому,що він верхньо трикутний. За теоремою 4.1 ранг матриці $\mathrm{B} = r$.

Δ

На практиці у мінор М вибирають ті r стовпці матриці В, які мають попарно різну кількість нулів у кінці.

З властивості 2 ранга матриці випливає,що яким б шляхом не зводили матрицю до ступінчатої форми кількість її ненульових рядків не зміниться.

<u>4.3. Векторна форма запису системи лінійних рівнянь</u>

Нехай дана система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими(див.[6]):

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases} \qquad \mathbf{(4.1)}$$

Випишемо систему векторів,яка складається зі усіх стовпців розширеної матриці цієї системи лінійних рівнянь: $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \overrightarrow{a_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots,$

$$\overrightarrow{a_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \mathbf{(4.2)}$$

Означення 4.2.*Векторною формую системи лінійних рівнянь 4.1 називається* ***векторне рівняння*** *виду:*$x_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + x_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{b}$ ***(4.3)****,*

$x_i \in R$ *- невідомі дійсні числа,* $i = \overline{1, \ldots, n}$.

В тому,що векторне рівняння 4.3 є іншою формою запису системи лінійних рівнянь 4.1 легко переконатись записавши покомпонентно векторне рівняння 4.3.

Означення 4.3.*Розв'язком векторного рівняння 4.3 називається упорядкований набір n дійсних чисел* $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$*,який при підстановці чисел цього набору замість відповідних невідомих перетворює векторне рівняння 4.3 у правильну рівність.*

Лема 4.2.Система лінійних рівнянь 4.1 та векторне рівняння 4.3 рівносильні, тобто мають одну і ту ж множину розв'язків*.*

∇ Спочатку переконаємось,що будь-який розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ системи 4.1 є розв'язком векторного рівняння 4.3.За означенням розв'язку системи лінійних рівнянь цей порядкований набір перетворює систему лінійних рівнянь 4.1 в систему правильних рівностей:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot \alpha_1 + a_{12} \cdot \alpha_2 + \cdots + a_{1n} \cdot \alpha_n = b_1, \\ a_{21} \cdot \alpha_1 + a_{22} \cdot \alpha_2 + \cdots + a_{2n} \cdot \alpha_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdot \alpha_1 + a_{m2} \cdot \alpha_2 + \cdots + a_{mn} \cdot \alpha_n = b_m \end{cases} \qquad \textbf{(4.4)}$$

З іншого боку,якщо виписати окремо кожну з компонент векторної рівності, $\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{b}$ ***(4.5)*,**отримаємо ту ж систему рівностей 4.4.Це означає, що упорядкований набір $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ є розв'язком векторного рівняння 4.3.

Тепер доведемо,що будь-який розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ векторного рівняння 4.3 є також розв'язком системи лінійних рівнянь 4.1. Дійсно,з векторної рівності 4.5 при її покомпонентному записі отримаємо систему рівностей 4.4, яка і означає, що упорядкований набір $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ є розв'язком системи лінійних рівнянь 4.1.

Δ

4.4 .Критерії сумісності та визначеності систем лінійних рівнянь

Ці дві теореми повністю вирішують питання про розв'язність будь-якої системи лінійних рівнянь та про кількість її розв'язків. Перша з них є критерієм сумісності. Нагадаю, що система лінійних рівнянь називається сумісною,якщо вона має хоча б один розв'язок.

Теорема 4.2(теорема Кронекера - Капелі[4])

Система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці цієї системи дорівнює рангу її розширеної матриці.

∇ *Необхідність*. Дано,що система лінійних рівнянь 4.1 сумісна. Тоді існує її розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. З леми 4.2 випливає, що справедлива

[4] Кронекер Леопольд (7.12.1823 — 29.12.1891)- німецький математик.
Альфредо Капелли (5.08. 1855 – 28.01.1910)- італійський математик.

векторна рівність 4.5. Позначимо через $S_А = \{\vec{a}_1, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}$ систему всіх векторстовпців матриці А системи лінійних рівнянь 4.1,а через

$S_в = \{\vec{a}_1, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}, \vec{b}\}$ систему всіх векторстовпців розширеної матриці В тієї ж системи лінійних рівнянь. З властивості 3 пункту 3.2 та рівності 4.5 заключаємо, що система $S_в$ - лінійно залежна. Ясно,що будь-який базис системи векторстовпців $S_А$ є також базисом системи $S_в$, тому ці системи векторів мають однакові ранги. Це означає,що однакові ранги мають матриці А і В.

Достатність. Нехай в тих же позначеннях матриці А і В мають однакові ранги. Тоді будь-який базис Т системи векторстовпців $S_А$ є також базисом системи векторстовпців $S_в$. Звідси випливає,що стовпець вільних членів $\vec{b}$ лінійно виражається через базис Т, а значить через векторстовпців системи $S_А$. Отже,існують скаляри $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ для яких виконується рівність 4.5. За лемою 4.2 упорядкований набір $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ є розв'язком системи 4.1, а значить система лінійних рівнянь сумісна.

Δ

Наслідок.Якщо ранг матриці системи лінійних рівнянь дорівнює кількості рівнянь цієї системи, то вона сумісна при будь-якому стовпці вільних членів.

Дійсно,якщо матриця рангa r має r рядків, то в ній не можна вибрати мінор порядку більшого ніж r ,скільки б стовпців до неї недописували.

Теорема 4.3(критерії визначеності системи лінійних рівнянь)

Сумісна система m лінійних рівнянь з n невідомими визначена тоді і тільки тоді, коли ранг матриці цієї системи дорівнює кількості її невідомих.

∇ *Необхідність.* Дано,що система 4.1 має єдиний розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. Тоді за лемою 4.2 виконується векторна рівність 4.5.Доведемо методом від супротивного,що ранг r матриці А цієї системи рівнянь дорівнює *n*. Ясно,що випадок $r > n$ неможливий,тому що в матриці не можна вибрати ненульовий мінор порядку більшого ніж кількість стовпців цієї матриці. Припустимо, що $r < n$.Тоді за наслідком 1 теореми 3.4 система $S_{\text{A}} = \{\vec{a}_1, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}\}$ стовпців матриці A лінійно залежна. За означенням 3.2 існують не всі рівні нулю скаляри $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ такі що: $\beta_1 \cdot \vec{a}_1 + \beta_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \beta_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$. Додавши цю рівності до 4.5 маємо:$(\alpha_1 + \beta_1) \cdot \vec{a}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{b}$.

За лемою 4.2 упорядкований набір $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ є іншим розв'язком системи лінійних рівнянь 4.1, який не співпадає з її розв'язком $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. Це суперечить визначеності даної системи лінійних рівнянь. В результаті цього протиріччя заключаємо,що $r = n$.

Достатність. Нехай тепер в тих же позначеннях для системи лінійних рівнянь 4.1 виконується $r = n$. Доведемо методом від супротивного,що ця система визначена. Припустимо,що вона має два різних розв'язки $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ і $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$. За лемою 4.2 виконуються рівності:

$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{b}$

$\beta_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \beta_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{b}$

Віднявши одну рівність від іншої отримаємо:

$$(\alpha_1 - \beta_1) \cdot \vec{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{0}.$$

Не всі коефіцієнти цієї рівності дорівнюють нулю, тому що розв'язки системи не співпадають. За означенням 3.2 система стовпців S_{A} матриці системи A лінійно залежна. Звідси випливає,що ранг r матриці A менше кількості її стовбців n, що протирічить умові. З цього протиріччя випливає,що система лінійних рівнянь 4.1 визначена.

Δ

<u>Наслідок.</u> Нехай r ранг матриці системи m лінійних рівнянь з n невідомами, тоді:

1)Якщо $r < n$, то система лінійних рівнянь має нескінчену кількість розв'язків;

2)Якщо $r = n$,то система має єдиний розв'язок.

∇ Якщо $r < n$, то розв`язуючи систему лінійних рівнянь методом Гауса, отримаємо загальний розв'язок з $n - r$ вільними невідомами. Значеннями вільних невідомих можна вибирати довільні дійсні числа,тому за допомогою загального розв'язку можна знайти безліч числових розв'язків системи лінійних рівнянь.

Якщо $r = n$, то за теоремою 4.3 система 4.1 має єдиний розв`язок. Сумісна система лінійних рівнянь має однин або нескінченну кількість розв'язків.

Δ

4.5 Ненульові розв'язки однорідної системи лінійних рівнянь

Нагадаю, що система лінійних рівнянь називається **однорідною**, якщо вона має нульовий стовпець вільних членів. Отже,однорідна система лінійних рівнянь має такий загальний вид:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(4.6)}$$

Однорідна система лінійних рівнянь завжди сумісна тому, що вона має як мінімум один, а саме нульовий розв'язок. **Нульовим розв'язком** однорідної системи m лінійних рівнянь з n невідомими називається її розв'язок,який складається з n нулів. Розв'язок однорідної системи, хоча б одна компонента якого не дорівнює нулю, називається **ненульовим розв'язком** цієї системи. Наявність однорідної системи ненульових розв'язків, а також методи їх знаходження – це основна задача цього пункту.

Теорема 4.4. **Однорідна система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими має ненульові розв'язки тоді і тільки тоді,коли ранг її матриці r менше числа невідомих n.**

∇ *Необхідність*. Нехай система 4.6 має ненульовий розв'язок. Але будь-яка однорідна система має і нульовий розв'язок, а тому система має як мінімум два розв'язки. З наслідку теореми 4.3 випливає, що це можливо тільки у випадку, коли $r < n$.

Достатність. Нехай $r < n$. Тоді за наслідком теореми 4.3 система однорідних рівнянь має безліч розв'язків,один з них нульовий,а всі інші ненульові.

Δ

Наслідки.

1.Однорідна система лінійних рівнянь має ненульові розв'язки тоді і тільки тоді,коли система стовпців її матриці лінійно залежна.

2.Якщо кількість m рівнянь однорідної системи менше числа її невідомих n, то ця система має ненульові розв'язки.

∇ *1.Необхідність*.Випливає з означення 4.1 і властивості 4 пункту 3.7.

Достатність. За означенням 3.2 існують не всі рівні нулю коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ такі,що $\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$. ***(4.7)***

За лемою 4.2 упорядкований набір $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ - ненульовий розв'язок однорідної системи 4.6.

2. Матриця однорідної системи має мінори порядку не більшого ніж m**.** Тоді за теоремою 4.1 її ранг r менше n. За теоремою 4.4 ця однорідна система має ненульові розв'язки.

Δ

Теорема 4.5 **.Однорідна система *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими має ненульові розв'язки тоді і тільки тоді,коли визначник матриці цієї системи дорівнює нулю.**

∇ *Необхідність.* Нехай система 4.6 має ненульові розв'язки. За теоремою 4.4 ранг матриці А цієї системи r менша числа її невідомих n**.** За лемою 4.1

всі мінори матриці системи порядків більших ніж r дорівнюють нулю. Визначник матриці А є її мінором *n-го* порядку, а тому він дорівнює нулю.

Достатність. Нехай $|A| = 0$. Цей мінор є єдиним мінором *n-го* порядку матриці А. Тоді за теоремою 4.1 ранг матриці системи r буде менше *n*. За теоремою 4.4 наша однорідна система має ненульові розв'язки.

Δ

4.6. Векторний простір розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь

Позначимо через V_n множину всіх розв'язків однорідної системи *m* лінійних рівнянь з *n* невідомами 4.6. Кожен з її розв'язків є впорядкованим набором *n* дійсних чисел, тобто вектором *n*- вимірного арифметичного векторного простору R^n, $V_n \subset R^n$. Це означає,що розв'язки однорідної системи можна покомпонентно додавати та множити на дійсні числа.

Теорема 4.6.Множина $\mathbf{V_n}$ всіх розв'язків однорідної системи m лінійних рівнянь з n невідомами є векторним простором над полем дійсних чисел R.

∇ Спочатку доведемо,що операції додавання векторів та множення вектора на число замкнуті на множині V_n. Іншими словами потрібно встановити,що сума двох розв'язків однорідної системи 4.6 знову є розв'язком цієї системи, а також,що розв'язок цієї системи помножений на число буде її розв'язком.

Нехай $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$,$\lambda \in R$ довільне дійсне число. Візьмемо довільне рівняння системи 4.6:

$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n = 0, i = \overline{1, \cdots, m}$. Підставляючи розв'язки системи у дане рівняння отримаємо числові рівності:

$a_{i1} \cdot a_1 + a_{i2} \cdot a_2 + \cdots + a_{in} \cdot a_n = 0,$ $\quad a_{i1} \cdot b_1 + a_{i2} \cdot b_2 + \cdots + a_{in} \cdot b_n = 0.$.

Додавши ці рівності отримаємо:

$a_{i1} \cdot (a_1 + b_1) + a_{i2} \cdot (a_2 + b_2) + \cdots + a_{in} \cdot (a_n + b_n) = 0, \forall\, i = \overline{1, \cdots, m}.$

Це означає,що упорядкований набір $(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$ є розв'язком системи 4.6, а тому $\vec{a}+\vec{b} \in V_n$.

Для добутку $\lambda \cdot \vec{a}$ маємо: $a_{i1} \cdot (\lambda \cdot a_1) + \ a_{i2} \cdot (\lambda \cdot a_2) + \cdots + a_{in} \cdot (\lambda \cdot a_n) = 0$

або $\lambda \cdot (\ a_{i1} \cdot a_1 + a_{i2} \cdot a_2 + \cdots + a_{in} \cdot a_n) = 0$. Це означає,що $\lambda \cdot \vec{a}$ є розв'язком системи 4.6, а тому $\lambda \cdot \vec{a} \in V_n$.

Кожна однорідна система має нульовий розв'язок, а тому $\vec{0} \in V_n$. Нехай $\vec{a}$- розв'язок системи 4.6,тобто $\vec{a} \in V_n$. Враховуючи, що $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$,з замкнутості операції множення вектора на число заключаємо, що $-\vec{a} \in V_n$. Решта аксіом абелевою групи за додаванням та векторного простору виконується для всіх векторів векторного простору R^n, а тому виконуються і для векторів його підмножини V_n.

Δ

Наслідки.

1. Сума (різниця) двох розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь є розв'язком цієї системи.
2. Добуток розв'язку однорідної системи лінійних рівнянь на довільне дійсне число є розв'язком цієї системи.
3. Лінійна комбінація з довільними коефіцієнтами розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь є розв'язком цієї системи.

Ці наслідки випливають з доведення попередньої теореми. Ясно,що для неоднорідної системи лінійних рівнянь жодне з цих тверджень не виконується. Дійсно,сума двох розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь вже не буде її розв'язком і т.д. Це означає,що множина розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь не буде векторним простором.

4.7. Фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь

Це поняття є важливим в теорії систем лінійних рівнянь в основному через застосування його аналогів не тільки в алгебрі, а і в інших математичних теоріях.

Означення 4.4.*Фундаментальною системою* *розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь називається система розв'язків S даної системи однорідних лінійних рівнянь, яка задовольняє двом умовам:*

1. *Ця система розв'язків лінійно незалежна.*
2. *Будь-який розв'язок даної однорідної системи лінійних рівнянь є лінійною комбінацією розв'язків системи S.*

Теорема 4.7. **Нехай дана однорідна система m лінійних рівнянь з n невідомами 4.6, ранг матриці якої дорівнює $\mathbf{r}$. Якщо $\mathbf{r} = \mathbf{n}$, то однорідна система 4.6 немає фундаментальної системи розв'язків. Якщо $\mathbf{r} < n$, то однорідна система володіє фундаментальною системою розв'язків,яка складається $\mathbf{n} - \mathbf{r}$ розв'язків.**

∇ Якщо $r = n$,то за теоремою 4.3 однорідна система лінійних рівнянь 4.6 має єдиний, а саме нульовий розв'язок. За теоремою 3.1 система,що складається з одного нуль вектора лінійно залежна. Зрозуміло,що вона не містить лінійно незалежних підсистем,а тому при $r = n$ однорідна система 4.6 немає фундаментальної системи розв'язків.

Нехай тепер $r < n$. Розв'язуючи систему 4.6 методом Гауса знайдемо загальний розв'язок цієї системи,який матиме $n - r$ вільних невідомих:

$$\begin{cases} x_1 = b_{1\,r+1} \cdot x_{r+1} + b_{1\,r+2} \cdot x_{r+2} + \cdots + b_{1\,n} \cdot x_n, \\ x_2 = b_{2\,r+1} \cdot x_{r+1} + b_{2\,r+2} \cdot x_{r+2} + \cdots + b_{2\,n} \cdot x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = b_{r\,r+1} \cdot x_{r+1} + b_{r\,r+2} \cdot x_{r+2} + \cdots + b_{r\,n} \cdot x_n \end{cases} \qquad \mathbf{(4.8)}$$

При цьому слід пам'ятати,що при отримані загального розв'язку можлива зміна індексів невідомих системи лінійних рівнянь, тому що при зведенні матриці до трапецевидної можлива переміна місцями її стовпців.

Візьмемо невироджену матрицю C' порядку $\mathrm{n} - \mathrm{r}$,елементи рядків якої будемо використовувати як значення відповідних вільних невідомих у загальному розв'язку 4.8. Отже,позначимо індекси елементів матриці C' зручним для нас способом:

$$C' = \begin{pmatrix} c_{1\,r+1} & c_{1\,r+2} & \cdots & c_{1\,n} \\ c_{2\,r+1} & c_{2\,r+2} & \cdots & c_{2\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-r\,r+1} & c_{n-r\,r+2} & \cdots & c_{n-r\,n} \end{pmatrix}, |C'| \neq 0.$$

Підставляючи елементи рядків цієї матриці замість відповідних вільних невідомих у загальний розв'язок 4.8 отримаємо систему $\mathrm{T} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \cdots, \vec{c}_{n-r}\}$ розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь 4.6

$\vec{c}_1 = (c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1r}, c_{1\,r+1}, c_{1\,r+2}, \cdots, c_{1\,n})$,

$\vec{c}_2 = (c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2r}, c_{2\,r+1}, c_{2\,r+2}, \cdots, c_{2\,n})$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$

$\vec{c}_{n-r} = (c_{n-r\,1}, c_{n-r\,2}, \cdots, c_{n-r\,r}, c_{n-r\,r+1}, c_{n-r\,r+2}, \cdots, c_{n-r\,n})$.

Доведемо,що система Т утворює фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь 4.6. Спочатку встановимо,що ця система векторів лінійно незалежна. Матриця С рядками якої є вектори системи Т містить ненульовий мінор $|C'|$ порядку $\mathrm{n-r}$. За теоремою 4.1 матриця С розмірності $\mathrm{n-r}$ на n має ранг $\mathrm{n-r}$. За означенням 4.1 такий же ранг має і система розв'язків Т. Отже, за означеннями 3.13 і 3.11 система векторів Т лінійно незалежна.

Доведемо тепер,що будь-який розв'язок $\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_r, b_{r+1}, b_{r+2}, \cdots, b_n)$ є лінійною комбінацією розв'язків системи Т. Нехай $\overrightarrow{b'} = (b_{r+1}, b_{r+2}, \cdots, b_n)$, $T' = \{\overrightarrow{c_1'}, \overrightarrow{c_2'}, \cdots, \overrightarrow{c_{n-r}'}\}$ - система рядків матриці C', $S' = \{\overrightarrow{c_1'}, \overrightarrow{c_2'}, \cdots, \overrightarrow{c_{n-r}'}, \overrightarrow{b'}\}$. Ранг системи $T' = \mathrm{n-r}$, тому що $|C'| \neq 0$. За зауваженням 3.4 пункт 2 система векторів S' лінійно залежна. За властивістю 4 пункт 3.2 вектор $\overrightarrow{b'}$ є лінійною комбінацією векторів системи T': $\overrightarrow{b'} = \gamma_1 \cdot \overrightarrow{c_1'} + \gamma_2 \cdot \overrightarrow{c_2'} + \cdots + \gamma_{n-r} \cdot \overrightarrow{c_{n-r}'}$ ***(4.9).*** За наслідком 3 теореми 4.6 вектор $\vec{c} = \vec{b} - \gamma_1 \cdot \overrightarrow{c_1} - \gamma_2 \cdot \overrightarrow{c_2} - \cdots - \gamma_{n-r} \cdot \overrightarrow{c_{n-r}}$ **(4.10)** є розв'язком однорідної системи лінійних рівнянь 4.6. З рівності 4.9 випливає,що його останні $n-r$ компонент дорівнюють нулю. Отже, перші r компонент розв'язку вектора $\vec{c}$ можна отримати з загального розв'язку 4.8 вважаючи, що всі вільні невідомі дорівнюють нулю. Звідси видно,що $\vec{c}=\vec{0}$. Таким чином з рівності 4.10 випливає,що довільний розв'язок $\vec{b}$ системи лінійних рівнянь 4.6 є лінійною комбінацією векторів системи T. За означенням 4.4 система векторів T утворює фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь 4.6.

Δ

З доведення цієї теореми випливає метод знаходження фундаментальної системи розв'язків.

Алгоритм знаходження фундаментальної системи розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь

1. Методом Гауса знаходимо загальний розв'язок вихідної однорідної системи лінійних рівнянь.
2. Якщо цей загальний розв'язок має $n-r$ вільних невідомих, то візьмемо невироджену матрицю C порядку $n-r$ (частіше за все беруть діагональну або одиничну матрицю).
3. Використовуючи елементи рядків матриці C, як значення відповідних вільних невідомих загального розв'язку знаходимо $n-r$ розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь, які і утворюють її фундаментальну систему розв'язків.

§5. Векторні підпростори

5.1.Введення векторних підпросторів

Проаналізувавши означення підгруп,підкілець та підполів легко помітити, що всі ці поняття вводяться за однією і тією ж схемою.

Означення 5.1. *Нехай V векторний простір над полем скалярів F. Підмножина U векторного простору V називається* ***векторним підпростором*** *простору V,якщо вона сама є векторним простором відносно операції заданих у просторі V над тим же полем S. При цьому пишуть* $U \subset V$*,маючи на увазі незвичайне включення множин,а структурне,тобто якщо V векторний простір, то* U *– теж векторний простір над тим же полем S якій міститься у просторі V.*

<u>Теорема 5.1</u>**.Відношення[5] включення на множині всіх просторів над одним і тим же полем *F* векторного простору V рефлексивне,транзитивне та антисиметричне.**

∇

1. Рефлексивність цього відношення випливає з того, що будь-якій простір *V* є своїм підпростором, $V \subset V$.
2. Нехай $U \subset V, V \subset W$ тоді очевидно,що $U \subset W$ а це і означає, що дане відношення транзитивне.
3. Антисиметричність цього відношення теж очевидне. Дійсно,якщо $U \subset V$ і $V \subset U$, то ці простори співпадають як множини,тобто $U = V$.

Δ

<u>Теорема 5.2(критерій векторного підпростору)</u>

Підмножина U вектроного простору V є його підпростором тоді і тільки тоді,коли операції додавання векторів та множення вектора на скаляр, задані на векторному просторі V, замкнуті на підмножині U.

∇ *<u>Необхідність.</u>* Дано,що U підпростір простору V, тоді за означенням 5.1 операції задані на векторному просторі V індукують відповідні операції на

[5] Таке відношення називають відношення часткового нестрогого порядку. Це відношення є частковим порядком ,тому що не для будь-яких просторів V і U над полем F один з них є підпростором іншого.

підпросторі U. Це означає,що індуковані операції повинні бути замкнуті на підпросторі U.Іншими словами,якщо $\vec{a}$, $\vec{b} \in U, \alpha \in F$, то $\vec{a} + \vec{b} \in U$,$\alpha \cdot \vec{a} \in U$.

Достатність. Нехай тепер операції додавання векторів та множення вектора на скаляр, задані на векторному простору V, замкнуті на його підмножині U. Доведемо,що відносно цих операції на множині U виконуються всі аксіоми векторного простору. Нехай $\vec{a} \in U$-довільний вектор. Через замкнутість операції множення вектора на скаляр маємо: $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}$,$-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$, а тому $\vec{0}, -\vec{a} \in U$.Інші аксіоми абелевою групи за додаванням та векторного простору виконується для всіх векторів векторного простору V,а тому виконується і для векторів його підмножини U.

Δ

5.2. Приклади векторних підпросторів

1. $\langle\vec{0}\rangle \subset V$. Нульовий векторний підпростір,тобто підпростір що складається тільки з нуль вектора,міститься у будь-якому векторному просторі. При потребі розглядають і порожні векторні підпростори.
2. $\mathrm{V} \subset \mathrm{V}$, тобто будь-який простір сам є своїм підпростором.
3. Нехай у просторі задана площина P , а в ній пряма q. Позначимо через V підмножину векторів простору геометричних векторів V_3 паралельну площині P, а через U – підмножину векторів простору V_3 паралельних прямій q. Тоді $U \subset V \subset V_3$.
4. Нехай V векторний простір всіх матриць розмірності m на n над полем дійсних чисел R, а U - його підмножина всіх матриць в яких останній стовпець нульовий. За теоремою 5.2 $U \subset V$.
5. Нехай Cвекторний простір комплексних чисел над полем дійсних чисел R. Позначимо через R' множину всіх уявних чисел,тобто чисел типу $b \cdot i$,де i – уявна одиниця. Тоді $\mathrm{R} \subset C$, $\mathrm{R}' \subset C$.
6. $D[A, B] \subset C[A, B] \subset F[A, B]$.

7. Нехай U підмножина всіх векторів n-вимірного арифметичного векторного простору R^n у яких перша компонента дорівнює нулю. Тоді за теоремою 5.2 $U \subset \mathrm{R}^n$.
8. Нехай V_n множина всіх розв'язків деякої однорідної системи m лінійних рівнянь з n невідомами. За теоремою 4.6 $V_n \subset \mathrm{R}^n$.

Таким чином, у будь-якому просторі V є нульовий підпростір $\langle\vec{0}\rangle$ і підпростір V,який співпадає з цим простором.

Означення 5.2.*Підпростір U простору V називається* ***власним підпростором*** *простору V,якщо він відмінний від його нульового підпростору та від самого простору V. При цьому пишуть $U \subset\neq V$.*

5.3.Перетин векторних підпросторів

Над векторними підпросторами деякого простору V над полем F вводять такі операції:їх перетин,додавання та пряме додавання. Розглянемо кожну з цих операції.

Означення 5.3.Перетином *векторних підпросторів U_1 і U_2 векторного простору V називається підмножина U векторів простору V, кожен з яких належить кожному з підпросторів U_1 і U_2,тобто перетин цих підпросторів як множин. При цьому пишуть $U = U_1 \cap U_2$.*

Аналогічно вводять перетин будь-якої кількості векторних підпросторів.

Теорема 5.3.**Нехай V векторний простір над полем F, $\mathbf{U_1}$ і $\mathbf{U_2}$ його підпростори. Тоді перетин цих підпросторів також є векторним підпростором векторного простору V.**

∇ Нехай $U = U_1 \cap U_2$, $\vec{a}$, $\vec{b} \in U$ - довільні вектори, $\alpha \subset F$- довільний скаляр. Оскільки U_1 векторний підпростір простору V, то за теоремою 5.2 $\vec{a} + \vec{b} \in U_1, \alpha \cdot \vec{a} \in U_1$. Аналогічно доводиться,що $\vec{a} + \vec{b} \in U_2, \alpha \cdot \vec{a} \in U_2$. За означенням 5.2 $\vec{a} + \vec{b} \in U, \alpha \cdot \vec{a} \in U$. За теоремою 5.2 U- векторний підпростір простору V.

Δ

Отже, для будь-яких підпросторів U_1 і U_2 векторного простору V існує єдиний їх перетин який теж є векторним підпростором. Зрозуміло,що цей перетин може бути і нульовим підпростором. Таким чином, операція перетину векторних підпросторів є бінарною алгебраїчною на множині всіх підпросторів простору V. Неважко довести,що ця операція комутативна, асоціативна та ідемпотентна[6]. Ідемпотентність цієї операції випливає з того,що для будь-якого підпростору U простору V виконується: $U \cap U = U$.

<u>5.4. Додавання векторних підпросторів</u>

Означення 5.4.Сумою *векторних підпросторів U_1 і U_2 векторного простору V називається підмножина U всіх векторів простору V виду $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{a}_1 \in U_1, \vec{a}_2 \in U_2$.При цьому пишуть $U_1 + U_2$.*

Аналогічно вводять суму будь-якої кількості s підпросторів простору V. Таким чином підмножина $U = U_1 + U_2 + \cdots + U_s$ складається з усіх векторів виду: $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_s$, $\vec{a}_i \in U_i, i = \overline{1, \ldots, s}$.

<u>Теорема 5.4.</u>**Нехай V векторний простір над полем F, U_1 і U_2 його підпростори. Тоді сума цих підпросторів також є векторним підпростором векторного простору V.**

∇ Нехай $U = U_1 + U_2$, $\vec{a}, \vec{b} \in U$-довільні вектори, $\alpha \subset F$-довільний скаляр. За означенням 5.4 існують вектори $\vec{a}_1, \overrightarrow{b_1} \in U_1$ і $\vec{a}_2, \overrightarrow{b_2} \in U_2$ такі, що

$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b} = \overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2}$. Враховуючи комутативність операції додавання векторів маємо: $\vec{a} + \vec{b} = (\vec{a}_1 + \overrightarrow{b_1}) + (\vec{a}_2 + \overrightarrow{b_2})$. Операція додавання векторів замкнута на кожному підпросторі, а тому: $\vec{a}_1 + \overrightarrow{b_1} \in U_1, \vec{a}_2 + \overrightarrow{b_2} \in U_2$. За означенням 5.4 $\vec{a} + \vec{b} \in U$. Аналогічно доводиться,що $\alpha \cdot \vec{a} \in U$. За теоремою 5.2 U - підпростір векторного простору V.

[6] Операція " $*$ " задана на множині G називається ідемпотентною,якщо для будь-якого елемента $a \in G$ виконується $a * a = a$.

Δ

Легко перевірити,що додавання векторних просторів - це бінарна алгебраїчна асоціативна,комутативна та ідемпотентна операція. Ідемпотентність цієї операції випливає з того,що $U+U=U$. Нейтральним елементом відносно цієї операції є нульовий векторний підпростір $\langle\vec{0}\rangle$. Операція об'єднання векторних підпросторів співпадає з їх сумою.

Означення 5.5.Об'єднанням *векторних підпросторів* $U_1, U_2, \cdots, U_s$ *векторного простору* V *називається лінійна оболонка натягнута на систему S,яка складається з усіх векторів цих підпросторів. При цьому пишуть* $U=U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_s$.

Система векторів S може бути нескінченою,але в будь-якій лінійній комбінації з об'єднання підпросторів використовується тільки скінчена кількість векторів цієї системи. Зрозуміло,що лінійні комбінації можуть мати різну кількість доданків.

Зауваження 5.1. Операція об'єднання векторних підпросторів $U_1, U_2, \cdots, U_s$ векторного простору V співпадає з сумою цих підпросторів. Дійсно,враховуючи асоціативність та комутативність операції додавання векторів векторного простору V,кожну лінійну комбінацію з об'єднанням можна записати так, щоб її i-тий доданок належав векторному підпростору U_i, $i=\overline{1,\dots,s}$.

<u>***5.5.Пряме додавання векторних підпросторів***</u>

Означення 5.6. *Сума векторних підпросторів* U_1 *і* U_2 *векторного простору* V *називається* ***прямою*** *і позначається* $U=U_1 \oplus U_2$,*якщо будь-який вектор* $\vec{a}$ *підпростору* U *можна єдиним чином подати у виді:* $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2$, $\vec{a}_1 \in U_1$, $\vec{a}_2 \in U_2$.

Аналогічно вводять пряму суму будь-якої кількості s підпросторів. Таким чином підмножина $U=U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_s$ складається з усіх векторів,які мають єдине подання у виді: $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_s$, $\vec{a}_i \in U_i$,

$i = \overline{1,\dots,s}$ ***(5.1).*** Це означає, що для іншого розкладу $\vec{a} = \overrightarrow{a_1'} + \overrightarrow{a_2'} + \dots + \overrightarrow{a_s'}$, $\overrightarrow{a_i'} \in U_i, i = \overline{1,\dots,s}$ виконується $\vec{a}_i = \overrightarrow{a_i'}$. Якщо сума векторних підпросторів не пряма, то в ній існують вектори,які мають декілька розкладів у виді 5.1 і навпаки.

<u>Теорема 5.5.</u>Сума векторних підпросторів $\mathbf{U_1, U_2, \cdots, U_s}$ векторного простору V є прямою тоді і тільки тоді,коли подання нуль вектора у виді суми нуль векторів цих підпросторів єдине.

∇ ***<u>Необхідність</u>.*** Нехай сума векторних підпросторів $\mathrm{U_1, U_2, \cdots, U_s}$ векторного простору V є прямою. Ясно,що нуль вектор простору V належить кожному з його підпросторів. Отже,за означенням 5.6 єдиним поданням нуль вектора сумою нуль векторів підпросторів $\mathrm{U_1, U_2, \cdots, U_s}$ буде:

$\vec{0} = 0 + 0 + \dots + 0$ **(5.2).**

<u>Достатність.</u> Доведемо методом від супротивного. Нехай розклад нуль вектора у виді 5.2 єдиний. Припустимо,що сума підпросторів не пряма. Це означає,що існує вектор $\vec{a}$ підпростору U, який має два розклади у виді 5.1:$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_s$,$\vec{a} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \dots + \vec{b}_s$, $\vec{a}_i, \vec{b}_i \in U_i, i = \overline{1,\dots,s}$, при чому для деякого j буде $\vec{a}_j \neq \vec{b}_j$,$1 \le j \le s$. Для зручності будемо вважати,що $j = 1$. Віднявши ці розклади отримаємо: $\vec{0} = (\vec{a}_1 - \vec{b}_1) + (\vec{a}_2 - \vec{b}_2) + \dots + +(\vec{a}_s - \vec{b}_s)$. Цей розклад нуль вектора відрізняється від розкладу 5.2 тому,що $\vec{a}_1 - \vec{b}_1 \neq 0$. Ми отримали протиріччя,оскільки за умовою розклад нуль вектора у виді 5.1 повинен бути єдиним. З цього протиріччя випливає,що сума підпросторів $\mathrm{U_1, U_2, \cdots, U_s}$ пряма.

Δ

<u>Теорема 5.6.</u>**Сума векторних підпросторів $\mathbf{U_1, U_2, \cdots, U_s}$ векторного простору V є прямою тоді і тільки тоді,коли $\mathbf{U_i} \cap (\mathbf{U_1} \cup \mathbf{U_2} \cup \dots \cup \mathbf{U}_{i-1} \cup \mathbf{U}_{i+1} \cup \dots \cup \mathbf{U_s}) = \langle \vec{0} \rangle, i = \overline{1,\dots,s}$ (5.3), тобто коли**

перетин підпростору U_i з об'єднанням решти підпросторів є нульовим підпростором.

∇ <u>*Необхідність.*</u> Доведемо методом від супротивного. Дано,що сума підпросторів пряма. Припустимо,що рівність 5.3 не виконується, наприклад для підпростору U_1. Якщо вона порушується для іншого підпростору U_i, то індекси підпросторів U_1 і U_i міняють місцями. Отже,існує вектор $\vec{a}_1 \neq 0$, такий,що $\vec{a}_1 \in \mathrm{U}_1$, $\vec{a}_1 \in \mathrm{U}_2 \cup \mathrm{U}_3 \cup \cdots \cup \mathrm{U}_s$. За зауваженням 5.1 існують вектори $\vec{a}_i \in U_i, i = \overline{2, \ldots, s}$ такі, що $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \cdots + \vec{a}_s$. Звідси маємо: $\vec{0} = -\vec{a}_1 + +\vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \cdots + \vec{a}_s$ - розклад нуль вектора,який не співпадає з розкладом 5.2. За теоремою 5.5 сума підпросторів $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \cdots, \mathrm{U}_s$ не пряма. Це протирічить умові, а тому рівність 5.3 не порушується.

<u>*Достатність.*</u> Доведемо методом від супротивного. Нехай для кожного з векторних підпросторів U_i виконується рівність 5.3. Припустимо,що сума цих підпросторів не пряма. Це означає,що існує вектор $\vec{a} \in \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2 + \cdots + +\mathrm{U}_s$,який має два розклади у виді 5.1: $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_s$,$\vec{a} = \vec{b}_1 + +\vec{b}_2 + \cdots + \vec{b}_s$, $\vec{a}_i, \vec{b}_i \in U_i, i = \overline{1, \ldots, s}$, при чому для деякого j буде $\vec{a}_j \neq \vec{b}_j$,

$1 \leq \mathrm{j} \leq s$. Як і вище для зручності будемо вважати,що $\mathrm{j} = 1$. Віднявши ці розклади отримаємо: $\vec{0} = (\vec{a}_1 - \vec{b}_1) + (\vec{a}_2 - \vec{b}_2) + \cdots + (\vec{a}_s - \vec{b}_s)$. Тоді $\vec{b}_1 - \vec{a}_1 = (\vec{a}_2 - \vec{b}_2) + (\vec{a}_3 - \vec{b}_3) + \cdots + (\vec{a}_s - \vec{b}_s)$, $\vec{b}_1 - \vec{a}_1 \neq \vec{0}$. Це означає,що $\mathrm{U}_1 \cap (\mathrm{U}_2 \cup \mathrm{U}_3 \cup \cdots \cup \mathrm{U}_s) \neq \langle \vec{0} \rangle$, що суперечить умові. З цього протиріччя випливає,що сума підпросторів пряма.

Δ

<u>***Наслідок.***</u> Сума векторних підпросторів U_1 і U_2 векторного простору V є прямою тоді і тільки тоді,коли $\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2 = \langle \vec{0} \rangle$.

Випливає з теореми 5.6.

§6.Базис і розмірність векторного простору

6.1.Базис і розмірність скіченовимірного векторного протсору

Означення 6.1._Векторний простір V називається_ ***скінченовимірним***_,якщо в ньому існує така скінчена система векторів S,що векторний простір V співпадає з лінійною оболонкою натягнутою на систему векторів S:_
$V = L(S)$ **(6.1).** _При цьому кажуть,що векторний простір V породжується системою векторів_ S.

Іншими словами векторний простір V скіченовимірний тоді і тільки тоді,коли в ньому існує така скінчена система векторів S,що кожний вектор простору V є лінійною комбінацією системи векторів S. В курсі лінійної алгебри вивчають тільки скінченовимірні векторні простори. Нескінченовимірні векторні простори вивчають у курсі функціонального аналізу. Базис векторного простору – це одне з фундаментальних понять для векторних просторів. Воно важливе не тільки в лінійній алгебрі, а і в геометрії,топології,фізиці і т.д.

Означення 6.2.Базисом _скінченовимірного векторного простору V називається порядкована система векторів простору V, яка задовольняє двом умовам:_

1. _Вона лінійна незалежна;_
2. _Будь-який вектор простору V є лінійною комбінацією векторів цієї системи._

Зауваження 6.1.Базисом векторного простору V є його лінійно незалежна система векторів B яка породжує цей простір: $V = L(B)$.

<u>Теорема 6.1.</u>

1.Довільний ненульовий скінченовимірний векторний простір V володіє базисом. При чому,якщо система векторів S породжує векторний простір V,то будь-який базис системи S є також базисом векторного простору V.

2.Всі базиси скінченовимірного векторного простору V мають однакову кількість векторів.

∇

1. Оскільки векторний простір V ненульовий і $V = L(S)$, то в системі $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_k}\}$ також є ненульові вектори. За теоремою 3.8 система векторів S володіє базисом $B = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}\}$. Нагадаю,що індекси векторів системи S завжди можна поміняти так,щоб потрібна підсистема векторів була на початку системи. За теоремою 3.3
$V = L(B)$. За означенням 3.11 підсистема B лінійно незалежна, а тому ця підсистема є базисом векторного простору V.

2. Нехай B і B' базиси скінченовимірного векторного простору V, а $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_k}\}$ скінчена система векторів яка породжує простір V. Доведемо методом від супротивного,що система B скінчена. Припустимо,що ця система нескінчена. Оскільки $B \subset L(S)$, то за теоремою 3.4 будь-яка її підсистема Т,яка складається з $k+1$ векторів лінійна залежна. Тоді за властивістю 2 пункт 3.2 і система векторів B також лінійно залежна,що суперечить означенню базиса. Аналогічно можна довести,що система векторів B' також скінчена. За означенням 6.2 $V = L(B) = L(B')$.За теоремою 3.5 системи векторів B і B' еквівалентні. Оскільки ці системи векторів лінійно незалежні, то за теоремою 3.6 вони містять однакову кількість векторів.

Δ

Означення 6.3.Розмірністю *скінченовимірного векторного простору V називається число векторів будь-якого базису цього простору. Розмірність* *векторного простору V позначається $\dim V$*[7]*. Векторний простір V розмірності n називається n - вимірним векторним простором. За означенням будемо вважати,що розмірність нульового векторного простору $\langle\vec{0}\rangle$ дорівнює нулю.*

Наслідки.

1. При $k > n$ будь-яка система k векторів n – вимірного векторного простору V лінійно залежна.
2. Якщо система k векторів n - вимірного векторного простору V лінійно незалежна,то $k \leq n$.
3. Будь-яка лінійно незалежна система n векторів n - вимірного векторного простору V є базисом цього простору.

∇

1. Нехай $\mathrm{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n}\}$ базис векторного простору V,а $\mathrm{S} = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_k}\}$ система векторів простору V, $k > n$. Оскільки $\mathrm{V} = \mathrm{L(B)}$, то $\mathrm{S} \subset \mathrm{L(B)}$. За наслідком 1 теореми 3.4 система векторів S лінійно залежна.
2. Випливає з наслідку 1.
3. Нехай $\mathrm{S} = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n}\}$ лінійно незалежна система векторів n - вимірного векторного простору V, $\vec{a} \in \mathrm{V}$ довільний вектор. За наслідком 1 система векторів $\mathrm{S'} = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n}, \vec{a}\}$ лінійно залежна. За властивістю 4 пункт 3.2 вектор $\vec{a}$ є лінійною комбінацією векторів системи S. Отже,система S задовольняє означенню 6.2.

Δ

Зауваження 6.2.Система одиничних векторів E є базисом n - вимірного арифметичного векторного простору $\mathrm{R^n}$. Випливає з пуктів 1 і 2 зауваження 3.2.

Означення 6.4. *Нехай $\mathrm{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n}\}$ базис векторного простору V і $\vec{a}$- довільний вектор простору V. Лінійна комбінація*

[7] Це позначення походить від англійського слова “dimention”,яке перекладається як розмірність.

$\vec{a} = \alpha_1 \cdot \vec{e_1} + \alpha_2 \cdot \vec{e_2} + \cdots + +\alpha_n \cdot \vec{e_n}$ *називається розкладом вектора* $\vec{a}$ *за базисом* B.

З умови 2 означення 6.2 випливає,що будь-який вектор $\vec{a}$ скінченовимірного простору V можна розкласти за базисом цього простору.

<u>6.2.Співідношення розмірностей скіченовимірного векторного простору та його підпросторів</u>

<u>Теорема 6.2.</u>Будь-який ненульовий підпростір U скіченовимірного векторного простору V є скіченовимірним,при чому $\mathrm{dim}U \le \mathrm{dim}V$.

∇ Нехай $dim V = n$. Оскільки векторний підпростір U ненульовий, то існує вектор $\vec{a_1}$ такий,що $\vec{a_1} \neq \vec{0}, \vec{a_1} \in \mathrm{U}$. За теоремою 3.1 система векторів $\mathrm{S}_1 = \{\vec{a_1}\}$ лінійно незалежна. Якщо система S_1 базис векторного підпростору U,то підпростір U= $\mathrm{L}(\mathrm{S}_1)$ скінченовимірний.

Якщо система S_1 не є базисом векторного підпростору U, то існує вектор $\vec{a_2}$ такий,що $\vec{a_2} \neq \vec{0}, \vec{a_2} \in \mathrm{U}, \vec{a_2} \notin \mathrm{L}(\mathrm{S}_1)$.Доведемо методом від супротивного,що система векторів $\mathrm{S}_2 = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}\}$ лінійно незалежна. Припустимо,що вона лінійно залежна. За означенням 3.2 існують скаляри α_1 і α_2, хоча б один з яких ненульовий, такі що $\alpha_1 \cdot \vec{a_1} + \alpha_2 \cdot \vec{a_2} = \vec{0}$ **(6.2)**.

Якщо $\alpha_2 = 0$, то з рівності 6.2 буде: $\alpha_1 \cdot \vec{a_1} = \vec{0}$,при чому $\alpha_1 \neq 0$. Це означає,що система S_1 лінійно залежна,але вище було доведено,що вона лінійно незалежна.Отже, $\alpha_2 \neq 0$, а тому $\vec{a_2} = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \cdot \vec{a_1}$. Звідси випливає, що $\vec{a_2} \in \mathrm{L}(\mathrm{S}_1)$,що суперечить вибору вектора $\vec{a_2}$. З цього протиріччя заключаємо,що система S_2 лінійно незалежна.

Якщо система векторів S_2 базис векторного підпростору U,то підпростір $\mathrm{U} = \mathrm{L}(\mathrm{S}_2)$ скінченовимірний. Якщо система S_2 не є базисом векторного підпростору U, то існує вектор $\vec{a_3}$ такий, що $\vec{a_3} \neq \vec{0}, \vec{a_3} \in \mathrm{U}$,

$\overrightarrow{a_3} \notin L(S_2)$. Доведемо методом від супротивного,що система векторів $S_3 = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}\}$ лінійно незалежна. Припустимо,що вона лінійно залежна. За означенням 3.2 існують скаляри $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, хоча б один з яких ненульовий, такі, що $\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \alpha_3 \cdot \overrightarrow{a_3} = \vec{0}$ **(6.3)**. Припустимо,що в цій рівності $\alpha_3 = 0$. Тоді з рівності 6.3 буде: $\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} = \vec{0}$,при чому $\alpha_1 \neq 0$ або $\alpha_2 \neq 0$. Це означає,що система S_2 лінійно залежна. Але вище було доведено,що система векторів S_2 лінійно незалежна. Отже, $\alpha_3 \neq 0$, а тому з рівності 6.3 маємо:$\overrightarrow{a_3} = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right) \cdot \overrightarrow{a_1} + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right) \cdot \overrightarrow{a_2}$. Звідси випливає, що

$\overrightarrow{a_3} \in L(S_2)$,що суперечить вибору вектора $\overrightarrow{a_3}$. З цього протиріччя заключаємо,що система S_3 лінійно незалежна.

Якщо система векторів S_3 базис векторного підпростору U,то підпростір $U = L(S_3)$ скінченовимірний. Інакше,аналогічно будуємо лінійно незалежну систему векторів S_4 і т.д. Процес не може бути нескінченим, оскільки за наслідком 2 теореми 6.1 лінійно незалежна система векторів простору V не може мати більше ніж n векторів.

Таким чином,існує натуральне число $k, k \leq n$,таке, що система векторів $S_k = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_k}\}$ лінійно незалежна, U= $L(S_k)$. За означенням 6.2 система векторів S_k є базисом векторного підпростору U,при чому $\boldsymbol{dimU} = k$

Δ

<u>Наслідки</u>

1. Нехай U ненульовий підпростір n - вимірного векторного простору V. Підпростір $U = V$ тоді і тільки тоді,коли $dim\, U = dim\, V$.
2. k- вимірний підпростір U n - вимірного векторного простору V є його власним підпростором тоді і тільки тоді,коли $0 < k < n$.

∇ 1.*<u>Необхідність </u>*очевидна.

Достатність. Якщо $dim\, U = dim\, V$, то за наслідком 3 теореми 6.1 базис B підпростору U є також базисом простору V. За означенням 6.2 – $U = L(B)$, $V = L(B)$, а тому $U = V$.

2. Випливає з наслідку 1.

Δ

<u>Теорема 6.3.</u>Будь-яку лінійну незалежну систему векторів n - вимірного векторного простору V можна доповнити до базису цього простору.

∇ Нехай $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ базис векторного простору V, а $S = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_k}\}$ лінійно незалежна система векторів цього простору,що не є його базисом, $1 \le k < n$. Нехай система $S_0 = \{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_k}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$. Зрозуміло,що система векторів S_0 також породжує простір V.

За наслідком 1 теореми 6.1 система S_0 лінійно залежна, тому що $n + k > n$. За властивістю 3 пункт 3.2 один з векторів системи S_0 є лінійною комбінацією попередніх векторів цієї системи. Ясно,що ним не може бути вектор підсистеми S тому, що ця підсистема лінійно незалежна. Отже,в системі S_0 існує вектор $\overrightarrow{e_j}$, який лінійно виражається через вектори цієї системи:

$$\overrightarrow{e_j} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k} + \beta_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \beta_{j-1} \cdot \overrightarrow{e_{j-1}}. \quad \mathbf{(6.4)}$$

Викресливши цей вектор з системи S_0, отримаємо систему векторів S_1.

Система векторів S_1 також породжує простір V тому,що в будь-якій лінійній комбінації векторів системи S_0,яка містить вектор $\overrightarrow{e_j}$,цей вектор можна замінити на його вираз з рівності 6.4. Якщо кількість векторів системи S_1,тобто $n + k - 1 > n$,то ця система векторів лінійно залежна. Тоді як і вище в ній існує вектор $\overrightarrow{e_l}$, який лінійно виражається через вектори системи S_1 . Викресливши цей вектор з системи S_1, отримаємо систему векторів S_2, і т.д.

Нарешті отримаємо систему векторів S_k,яка містить n векторів і породжує простір V. Доведемо методом від супротивного,що ця система векторів лінійно незалежна. Припустимо,що вона лінійно залежна. Система S_k містить ненульові вектори тому,що в ній є лінійно незалежна підсистема S. За теоремою 3.8 система векторів S_k володіє базисом B',який складається з r векторів,$r < n$. За теоремою 6.1 пункт 1 система векторів B'є базисом простору V,що неможливо. Дійсно,за теоремою 6.1 пункт 2 всі базиси простору V повинні складатися з n векторів. З цього протиріччя випливає,що система векторів S_k лінійно незалежна. Вона породжує простір V. За означенням 6.2 система векторів S_k є базисом простору V.

Δ

<u>Наслідки.</u>

*1.*Базис будь-якого підпростору скінченовимірного векторного простору *V* можна доповнити до базису цього простору.

*2.*Будь-який ненульовий вектор скінченовимірного вектрного простору *V* можна включити в деякий базис цього простору.

∇

1. Базис B' підпростору U простору V є лінійною незалежною системою векторів цього простору, а тому за теоремою 6.3 його можна доповнити до базису простору V.
2. Нехай $\vec{a}$ довільний ненульовий вектор простору V. За теоремою 3.1 система $S = \{\vec{a}\}$ лінійно незалежна. За теоремою 6.3 її можна доповнити до базису простору V.

Δ

<u>Теорема 6.3.</u>Будь-яку лінійну незалежну систему векторів n - вимірного векторного простору V можна доповнити до базису цього простору.

∇ Нехай $\dim V = n$. Якщо $U_1 = \langle\vec{0}\rangle$, то $U_2 = V$,якщо $U_1 = V$,то $U_2 = \langle\vec{0}\rangle$. Якщо U_1 власний підпростір простору V, то за теоремою 6.2 цей підпростір володіє базисом $B_1 = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_k}\}$,за наслідком 2 теореми 6.2 $0 < k < n$. Враховуючи теорему 6.3 доповнимо систему векторів B_1 до базису B простору V: $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{e_{k+1}}, \overrightarrow{e_{k+2}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$. За властивістю 1 пункт 3.2 система векторів $B_2 = \{\overrightarrow{e_{k+1}}, \overrightarrow{e_{k+2}}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ лінійно незалежна. За теоремою 3.3 $U_2 = L(B_2)$ векторний підпростір простору V .

Доведемо,що векторний простір V є сумою підпросторів U_1 і U_2. Нехай $\vec{a}$ довільний вектор простору V. За означенням 6.2 він є лінійною комбінацією векторів базису B:

$$\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{e_k} + \alpha_{k+1} \cdot \overrightarrow{e_{k+1}} + \alpha_{k+2} \cdot \overrightarrow{e_{k+2}} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{e_n}.$$

Нехай

$\vec{a}_1 = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{e_k}$,

$\vec{a}_2 = \alpha_{k+1} \cdot \overrightarrow{e_{k+1}} + \alpha_{k+2} \cdot \overrightarrow{e_{k+2}} + \cdots + +\alpha_n \cdot \overrightarrow{e_n}$.Тоді $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{a}_1 \in U_1, \vec{a}_2 \in U_2$. Оскільки $\vec{a}$- довільний вектор простору V, то $V = U_1 + U_2$.

Доведемо методом від супротивного,що ця сума пряма. Припустимо,що вона непряма. За наслідком теореми 5.6 існує вектор $\vec{a} \neq 0$, $\vec{a} \in U_1 \cap U_2$. За означенням 6.2 вектор $\vec{a}$ є лінійною комбінацією базисів кожного з підпросторів U_1 і U_2: $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{e_k}$,

$\vec{a} = \alpha_{k+1} \cdot \overrightarrow{e_{k+1}} + \alpha_{k+2} \cdot \overrightarrow{e_{k+2}} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{e_n}$. Віднімаючи одну рівність від іншої отримаємо:

$$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{e_k} + (-\alpha_{k+1}) \cdot \overrightarrow{e_{k+1}} + (-\alpha_{k+2}) \cdot \overrightarrow{e_{k+2}} + \cdots + (-\alpha_n) \cdot \overrightarrow{e_n} = \vec{0}$$

. Оскільки, базис B - це лінійно незалежна система векторів,то всі коефіцієнти в останній рівності дорівнюють нулю. Ми довели,що $\vec{a} = \vec{0}$, а тому $V = U_1 \oplus U_2$.

Δ

<u>Теорема 6.5.</u>Якщо скінченовимірний векторний простір V є сумою своїх підпросторів: $V = U_1 + U_2$, то $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_1 \cap U_2$ (6.5)

∇ За теоремою 5.3 $U_1 \cap U_2$ підпростір простору V. Спочатку будемо вважати,що він ненульовий,$U_1 \cap U_2 \neq \langle\vec{0}\rangle$.За теоремою 6.2 він скінченовимірний. За теоремою 6.1 підпростір $U_1 \cap U_2$ володіє базисом $\mathrm{B}' = \{\overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+1}}, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+2}}, \cdots, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+\mathrm{s}}}\}$. За наслідком 1 теореми 6.3 система векторів B' можна доповнити до базисів B_1 і B_2 підпросторів U_1і U_2 відповідно:

$\mathrm{B}_1 = \{\overrightarrow{\mathrm{e}_1}, \overrightarrow{\mathrm{e}_2}, \cdots, \overrightarrow{\mathrm{e}_k}, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+1}}, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+2}}, \cdots, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+\mathrm{s}}}\}$,

$\mathrm{B}_2 = \{\overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+1}}, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+2}}, \cdots, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+\mathrm{s}}}, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+\mathrm{s}+1}}, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+\mathrm{s}+2}}, \cdots, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathbf{n}}}\}$. Доведемо,що система векторів $\mathrm{B} = \{\overrightarrow{\mathrm{e}_1}, \overrightarrow{\mathrm{e}_2}, \cdots, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}}}, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+1}}, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+2}}, \cdots, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+\mathrm{s}}}, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+\mathrm{s}+1}}, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+\mathrm{s}+2}}, \cdots, \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathbf{n}}}\}$ є базисом векторного простору V.

Спочатку доведемо,що ця система векторів лінійно незалежна. Для цього запишемо нульову лінійну комбінацію векторів системи B:

$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \cdots + \alpha_{\mathrm{k}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_k} + \alpha_{\mathrm{k}+1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{k+1}} + \alpha_{\mathrm{k}+2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{k+2}} + \cdots + \alpha_{k+s} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+\mathrm{s}}} +$
$+\alpha_{\mathrm{k}+\mathrm{s}+1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+\mathrm{s}+1}} + \alpha_{\mathrm{k}+\mathrm{s}+2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+\mathrm{s}+2}} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathbf{n}}} = \vec{0}$
(6.6) і вияснимо чому дорівнюють її коефіцієнти. Нехай $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \cdots + \alpha_{\mathrm{k}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_k} + \alpha_{\mathrm{k}+1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{k+1}} + \alpha_{\mathrm{k}+2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{k+2}} + \cdots + \alpha_{k+s} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{k+s}}$
(***6.7***). З рівності 6.6 випливає,що

$\vec{a} = -(\alpha_{\mathrm{k}+\mathrm{s}+1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+\mathrm{s}+1}} + \alpha_{\mathrm{k}+\mathrm{s}+2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+\mathrm{s}+2}} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathbf{n}}})$ (***6.8***). Таким чином, вектор $\vec{a}$ можна одночасно подати у виді лінійних комбінації векторів базисів B_1 і B_2. Звідси випливає,що $\vec{a} \in \mathrm{U}_1$, $\vec{a} \in \mathrm{U}_2$,а тому $\vec{a} \in U_1 \cap U_2$. За означенням 6.2 вектор $\vec{a}$ є лінійною комбінацією векторів базису B' підпростору $U_1 \cap U_2$. Отже,існують скаляри $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \cdots, \beta_{k+s}$ такі, що $\vec{a} = \beta_{\mathrm{k}+1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{k+1}} + \beta_{\mathrm{k}+2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{k+2}} + \cdots + \beta_{k+s} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{k+s}}$(***6.9***). Віднявши від цієї рівності рівність 6.8 отримаємо:

$\beta_{\mathrm{k}+1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{k+1}} + \beta_{\mathrm{k}+2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{k+2}} + \cdots + \beta_{k+s} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+\mathrm{s}}} + \alpha_{\mathrm{k}+\mathrm{s}+1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+\mathrm{s}+1}} +$

$+\alpha_{\mathrm{k}+\mathrm{s}+2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathrm{k}+\mathrm{s}+2}} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_{\mathbf{n}}} = \vec{0}$. Ми отримали нульову лінійну комбінацію лінійно незалежної системи векторів B_2, а тому $\alpha_i = \beta_j = 0$,

$i=\overline{k+s+1,\cdots,n}, j=\overline{k+1,\cdots,k+s}$. З рівності 6.9 випливає,що $\vec{a}=0$. Тоді рівність 6.7 є лінійною комбінацією векторів базису B_1.За означення 3.3 всі її коефіцієнти дорівнюють нулю, $\alpha_i=0$, $i=\overline{1,\cdots,k+s}$. Це означає,що всі коефіцієнти рівності 6.6 дорівнюють нулю. За означенням 3.3 система векторів B лінійно незалежна.

Доведемо тепер,що будь-який вектор $\vec{a}\in V$є лінійною комбінацією векторів системи B. Оскільки $V=U_1+U_2$, то існують вектори $\vec{a}_1\in U_1$, $\vec{a}_2\in U_2$такі,що $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2$.Розкладемо вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ за базисами підпросторів U_1і U_2 відповідно: $\vec{a}_1=\alpha_1\cdot\overrightarrow{e_1}+\alpha_2\cdot\overrightarrow{e_2}+\cdots+\alpha_k\cdot\overrightarrow{e_k}+\alpha_{k+1}\cdot\overrightarrow{e_{k+1}}++\alpha_{k+2}\cdot\overrightarrow{e_{k+2}}+\cdots+\alpha_{k+s}\cdot\overrightarrow{e_{k+s}}$

, $\vec{a}_2=\beta_{k+1}\cdot\overrightarrow{e_{k+1}}+\beta_{k+2}\cdot\overrightarrow{e_{k+2}}+\cdots+$

$+\beta_{k+s}\cdot\overrightarrow{e_{k+s}}+\beta_{k+s+1}\cdot\overrightarrow{e_{k+s+1}}+\beta_{k+s+2}\cdot\overrightarrow{e_{k+s+2}}+\cdots+\beta_n\cdot\overrightarrow{e_n}$. Тоді

$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2=\alpha_1\cdot\overrightarrow{e_1}+\alpha_2\cdot\overrightarrow{e_2}+\cdots+\alpha_k\cdot\overrightarrow{e_k}+(\alpha_{k+1}+\beta_{k+1})\cdot\overrightarrow{e_{k+1}}+$
$+(\alpha_{k+2}+\beta_{k+2})\cdot\overrightarrow{e_{k+2}}+\cdots+(\alpha_{k+s}+\beta_{k+s})\cdot\overrightarrow{e_{k+s}}+\beta_{k+s+1}\cdot\overrightarrow{e_{k+s+1}}+\beta_{k+s+2}\cdot\overrightarrow{e_{k+s+2}}+\cdots+\beta_n\cdot\overrightarrow{e_n}$

. За означенням 6.2 система векторів B є базисом векторного простору V. Тепер в справедливості рівності 6.5 не важко переконатись.

Нехай тепер $U_1\cap U_2=\langle\vec{0}\rangle$.За наслідком 2 теореми 5.6 $V=U_1\oplus U_2$. Ми вважаємо підпростори U_1і U_2 ненульовими,а тому за теоремою 6.2 вони володіють базисами $B_1=\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_k}\}$,$B_2=\{\overrightarrow{e_{k+1}},\overrightarrow{e_{k+2}},\cdots,\overrightarrow{e_n}\}$.Доведемо,що система векторів $B=\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{e_{k+1}},\overrightarrow{e_{k+2}},\cdots,\overrightarrow{e_n}\}$ є базисом векторного простору V. Спочатку доведемо,що ця система векторів лінійно незалежна. Випишемо нульову лінійну комбінацію векторів системи B:

$\alpha_1\cdot\overrightarrow{e_1}+\alpha_2\cdot\overrightarrow{e_2}+\cdots+\alpha_k\cdot\overrightarrow{e_k}+\alpha_{k+1}\cdot\overrightarrow{e_{k+1}}+\alpha_{k+2}\cdot\overrightarrow{e_{k+2}}+\cdots+\alpha_n\cdot\overrightarrow{e_n}=\vec{0}$

(6.10) і вияснимо чому дорівнюють її коефіцієнти. Нехай

$\vec{a}=\alpha_1\cdot\overrightarrow{e_1}+\alpha_2\cdot\overrightarrow{e_2}+\cdots+\alpha_k\cdot\overrightarrow{e_k}$ ***(6.11)***. З рівності 6.10 випливає, що

$\vec{a} = -(\alpha_{k+1} \cdot \overrightarrow{e_{k+1}} + \alpha_{k+2} \cdot \overrightarrow{e_{k+2}} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{e_n})$ ***(6.12)***. Отже, вектор $\vec{a}$ можна одночасно подати у виді лінійних комбінацій базисів B_1 і B_2. Звідси випливає,що $\vec{a} \in U_1$, $\vec{a} \in U_2$,а тому $\vec{a} \in U_1 \cap U_2$.З того,що $U_1 \cap U_2 = \langle \vec{0} \rangle$ заключаємо,що $\vec{a} = \vec{0}$. Оскільки B_1 і B_2 лінійно незалежні системи векторів,то в рівностях 6.11 і 6.12 всі коефіцієнти дорівнюють нулю, $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, \cdots, n}$. З рівності 6.10 і означення 3.3 випливає,що система векторів B лінійно незалежна.

Доведемо тепер,що будь-який вектор $\vec{a} \in V$є лінійною комбінацією векторів системи B. Оскільки $V = U_1 \oplus U_2$, то існують вектори $\vec{a}_1 \in U_1$, $\vec{a}_2 \in U_2$ такі,що $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$. Розклавши вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ за базисами підпросторів U_1і U_2 легко отримати розклад вектора $\vec{a}$ за векторами системи B.За означенням 6.2 система векторів B є базисом векторного простору V. За означенням 6.3 $dim\, V$=n,$dim\, U_1 = k$,$dim U_2 = n - k$, $dim\, U_1 \cap U_2 = 0$, а тому рівність 6.5 знову справедлива.

Δ

<u>Наслідок.</u> Якщо $V = U_1 \oplus U_2$,то $dim V = dim U_1 + dim U_2$.

Випливає з наслідку теореми 5.6 та теореми 6.5.

§7.Координати вектора у данному базисі

7.1.Існування та властивості координат вектора у данному базисі

Теорема 7.1.Нехай V векторний простір над полем скалярів F, $\mathbf{B} = \{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}\}$ базис цього простору,тоді для будь-якого вектора $\vec{\mathbf{a}} \in \mathbf{V}$ існує єдиний порядкований набір скалярів $(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_n})$ такий,що $\vec{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\alpha_1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e_1}} + \boldsymbol{\alpha_2} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e_2}} + \cdots + \boldsymbol{\alpha_n} \cdot \overrightarrow{\mathbf{e_n}}$ (7.1).

∇ Існування розкладу 7.1 вектора $\vec{a}$ за базисом B випливає з умови 2 означення 6.2.

Єдиність цього розкладу доведемо методом від супротивного. Припустимо,що існує інший розклад вектора $\vec{a}$ за базисом B: $\vec{a} = \beta_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \beta_n \cdot \overrightarrow{e_n}$. Віднявши цей розкладу від розкладу 7.1 отримаємо: $(\alpha_1 - \beta_1) \cdot \overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot \overrightarrow{e_n} = \vec{0}$. Оскільки система векторів B лінійно незалежна,то в останній рівності всі коефіцієнти повинні дорівнювати нулю,а тому $\alpha_i = \beta_i, i = \overline{1, \cdots, n}$. Єдиність розкладу 7.1 доведено.

Δ

Означення 7.1.*Нехай V векторний простір над полем скалярів F, $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ базис цього простору, $\vec{a}$- довільний вектор простору V. Коефіцієнти розкладу 7.1 вектора $\vec{a}$ за базисом B називаються* ***координатами*** *вектора $\vec{a}$ в базисі B і позначаються: $\vec{a}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$.*

При переміні місцями векторів базису простору *V* буде отриманий інший базис цього ж простору. Таким чином,вектори базису не можна міняти місцями, а тому не можна міняти місцями і координати вектора. Координати вектора у даному базисі нумерують порядку їх запису в координатному рядку: перша,друга,і т.д. Іноді при потребі координати вектора записують не в рядок, а в стовпець. Розклад 7.1 вектора $\vec{a}$ за базисом B це не тільки спосіб знаходження координат вектора у даному базисі,а і навпаки – спосіб знаходження вектора $\vec{a}$ за його координатами. Основна роль координат вектора у даному базисі у тому, що операції над векторами зводяться до операції над їх координатами і навпаки. Це дозволяє застосовувати алгебраїчні методи дослідження в геометрії.

<u>Теорема 7.2.</u> Нехай V векторний простір над полем скалярів F, $\mathbf{B} = \{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}\}$ базис цього простору, тоді в цьому базисі:

1. Координати суми (різниці) векторів $\vec{\mathbf{a}}$ і $\vec{\mathbf{b}}$ простору V у даному базисі дорівнюють сумам (різницям) відповідних координат цих векторів.

2. Координати добутку вектора $\vec{\mathbf{a}}$ на скаляр α дорівнюють добуткам координат вектора $\vec{\mathbf{a}}$ на цей скаляр.

∇

1. Нехай у базисі B вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають координати: $\vec{a}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n), \vec{b}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$, $\alpha \in \mathrm{F}$ - довільний скаляр. Запишемо розклади цих векторів за базисом B: $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_n}$, $\vec{b} = \beta_1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \beta_2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \cdots + \beta_n \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_n}$. Тоді $\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_1} + (\alpha_2 + \beta_2) \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_n}$. Звідси видно,що вектор $\vec{a} + \vec{b}$ має у базисі B координати: $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_n + \beta_n)$.

2. Аналогічно, $\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\alpha_1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_n}) =$ $= (\alpha \cdot \alpha_1) \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_1} + (\alpha \cdot \alpha_2) \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \cdots + (\alpha \cdot \alpha_n) \cdot \overrightarrow{\mathrm{e}_n}$. Отже,вектор $\alpha \cdot \vec{a}$ має у базисі B координати: $(\alpha \cdot \alpha_1, \alpha \cdot \alpha_2, \cdots, \alpha \cdot \alpha_n)$.

Δ

<u>Наслідок.</u> Координати лінійної комбінації векторів простору V у базисі B дорівнюють лінійним комбінаціям відповідних координат тих ж векторів з тим ж коефіцієнтами.

Зауваження 7.1.Вектори базису $\mathrm{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ простору V мають у базисі B такі координати: $\overrightarrow{e_1}(1,0,\cdots,0), \overrightarrow{e_2}(0,1,\cdots,0), \cdots, \overrightarrow{e_n}(0,0,\cdots,1)$ ***(7.2).***

∇ Випливає з того,що вектори базису B мають за цим базисом наступні розклади:

$$\overrightarrow{e_1} = 1 \cdot \overrightarrow{e_1} + 0 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + 0 \cdot \overrightarrow{e_n},$$
$$\overrightarrow{e_2} = 0 \cdot \overrightarrow{e_1} + 1 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + 0 \cdot \overrightarrow{e_n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad (7.3)$$
$$\overrightarrow{e_n} = 0 \cdot \overrightarrow{e_1} + 0 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + 1 \cdot \overrightarrow{e_n}.$$

Δ

<u>7.2.Зв`язок між базисами векторного простору</u>

Нехай у векторному просторі V над полем F вибрані два базиси: $\mathrm{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$, $\mathrm{B}' = \left\{\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \cdots, \overrightarrow{e_n}'\right\}$. Розкладемо кожний з векторів базису B' за базисом B:

$$\overrightarrow{e_1}' = \tau_{11} \cdot \overrightarrow{e_1} + \tau_{21} \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \tau_{n1} \cdot \overrightarrow{e_n},$$
$$\overrightarrow{e_2}' = \tau_{12} \cdot \overrightarrow{e_1} + \tau_{22} \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \tau_{n2} \cdot \overrightarrow{e_n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (7.4)$$
$$\overrightarrow{e_n}' = \tau_{1n} \cdot \overrightarrow{e_1} + \tau_{2n} \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \tau_{nn} \cdot \overrightarrow{e_n}.$$

Рівності 7.4 і виражають зв'язок між базисами B і B' векторного простору V. Далі нам знадобляться матриці над довільним полем.

Нагадаю,що матрицею розмірності m на n називається прямокутна таблиця, що складається з m рядків та n стовбців дійсних чисел. Аналогічно вводять матриці і над довільним полем F, тобто коли елементами матриці є елементи поля F. Для матриць над полем F справедливі всі результати теорії визначників та обернених матриць з урахуванням властивостей поля F. Вводять і системи лінійних рівнянь над довільним полем.

Означення 7.2. *Нехай B і B' базиси n-вимірного векторного простору V. Матриця $\mathrm{T} = (\tau_{ij}), i, j = \overline{1, \ldots, n},$ стовпцями якої є стовпці координат векторів базису B' у базисі B називається* ***матрицею переходу*** *від базиса B до базиса B'.*

Тепер вияснимо, як пов'язані три базиси векторного простору.

<u>Теорема 7.3.</u>Нехай у векторному просторі V над полем F вибрані три базиси:$\mathbf{B} = \{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}\}$, $\mathbf{B}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e_1}'}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}'}, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}'}\right\}$, $\mathbf{B}'' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e_1}''}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}''}, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}''}\right\}$. Нехай $\mathrm{T} = (\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{ij}})$- матриця переходу від базиса B до базиса $\mathbf{B}'$,$S = (\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ij}})$- матриця переходу від базиса $\mathbf{B}'$ до базиса $\mathbf{B}''$,$\mathbf{R} = (\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{ij}}) -$ матриця переходу від базиса B до базиса $\mathbf{B}''$, $\mathbf{i}, \mathbf{j} = \overline{\mathbf{1}, \dots, \mathbf{n}}$. Тоді $\mathbf{R} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}$ (7.5).

∇ Вектори базису B' розкладаються за векторами базису B за формулами 7.4. Розклади векторів базису B'' за базисом B' за допомогою матриці переходу S мають вид: $\overrightarrow{e_j''} = \sigma_{1j} \cdot \overrightarrow{e_1'} + \sigma_{2j} \cdot \overrightarrow{e_2'} + \cdots + \sigma_{nj} \cdot \overrightarrow{e_n'}, j = \overline{1, \dots, n}$, тому що координати вектора $\overrightarrow{e_j''}$ знаходяться у j-му стовпці матриці S. Замінимо в останніх рівностях вектори базису B'їх розкладами за векторами базису B з рівностей 7.4. Отримаємо:

$$\overrightarrow{e_j''} = \sigma_{1j} \cdot (\tau_{11} \cdot \overrightarrow{e_1} + \tau_{21} \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \tau_{n1} \cdot \overrightarrow{e_n}) + \sigma_{2j} \cdot (\tau_{12} \cdot \overrightarrow{e_1} + \tau_{22} \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \tau_{n2} \cdot \overrightarrow{e_n}) + \cdots + \sigma_{nj} \cdot (\tau_{1n} \cdot \overrightarrow{e_1} + \tau_{2n} \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \tau_{nn} \cdot \overrightarrow{e_n}) = (\tau_{11} \cdot \sigma_{1j} + \tau_{12} \cdot \sigma_{2j} + \cdots + \tau_{1n} \cdot \sigma_{nj}) \cdot \overrightarrow{e_1} + (\tau_{21} \cdot \sigma_{1j} + \tau_{22} \cdot \sigma_{2j} + \cdots + \tau_{2n} \cdot \sigma_{nj}) \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + (\tau_{n1} \cdot \sigma_{1j} + \tau_{n2} \cdot \sigma_{2j} + \cdots + \tau_{nn} \cdot \sigma_{nj}) \cdot \overrightarrow{e_n}$$

(7.6).

Тепер одразу розкладемо вектори базису B'' за векторами базису B за допомогою матриці переходу R. Отримаємо:

$\overrightarrow{e_j''} = \rho_{1j} \cdot \overrightarrow{e_1} + \rho_{2j} \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \rho_{nj} \cdot \overrightarrow{e_n}, j = \overline{1, \dots, n}$. Порівнюючи цю рівність з рівністю 7.6 знаходимо: $\rho_{ij} = \tau_{i1} \cdot \sigma_{1j} + \tau_{i2} \cdot \sigma_{2j} + \cdots + \tau_{in} \cdot \sigma_{nj}$. За означенням операції множення матриць отримаємо: $R = T \cdot S$.

∆

<u>Наслідки</u>

1. Матриця переходу від одного базису скінченовимірного векторного простору V до іншого його базису – невироджена.

2. Якщо T матриця переходу від базису B до базису B' скінченовимірного векторного простору V,то T^{-1}- це матриця переходу від базису B' до базису B.

∇ Доведемо одразу обидва наслідки. Для цього будемо вважати,що в позначеннях попередньої теореми базиси B і B'' співпадають, тобто T - матриця переходу від базису B до базису B', а S - матриця переходу від базису B' до базису B. Тоді R - матриця переходу від базису B до базису B. Рівності 7.3 дають розклад векторів базису B за векторами того ж базису B. З цих розкладів видно,що $R = \mathrm{E}$ - одинична матриця,яка є матрицею переходу від базису B до базису B. З рівності 7.5 та означення оберненої матриці випливає,що $S = T^{-1}$. Умовою існування оберненої матриці до матриці T є невиродженність матриці T.

Δ

7.3.Зв`язок координат вектора у двох базисах векторного простору. Лінійні перетворення координат

Зрозуміло, що один і тойже вектор в різних базис векторного простору має різні порядковані набори координат, вияснимо зв'язок між ними.

Теорема 7.4.Нехай у векторному просторі V над полем F вибрані два базиси: $\mathbf{B} = \{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}\}$ **,** $\mathbf{B}' = \left\{\overrightarrow{\mathbf{e_1}'}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}'}, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}'}\right\}$**,** $\mathrm{T} = (\boldsymbol{\tau}_{ij})$**- матриця переходу від базиса B до базиса** $\mathbf{B}'$**,** $\mathbf{i}, \mathbf{j} = \overline{\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}}$**. Нехай вектор** $\vec{\mathbf{a}}$ **простору V в базисі B має координатний стовпець** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$**, а той же вектор** $\vec{\mathbf{a}}$ **в базисі** $\mathbf{B}'$ **має координатний стовпець** $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \cdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix}$**. Тоді** $\mathbf{A} = \mathrm{T} \cdot \mathbf{A}'$**. (7.7)**

∇ Вектор $\vec{a}$ в базисі B має розклад $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{e_n}$ ***(7.8)***.В базисі B' той же вектор $\vec{a}$ має розклад $\vec{a} = \alpha_1' \cdot \overrightarrow{e_1'} + \alpha_2' \cdot \overrightarrow{e_2'} + \cdots + \alpha_n' \cdot \overrightarrow{e_n'}$. Заміняючи в останній рівності вектори базису B' їх розкладами за базисом B з рівностей 7.4,отримаємо:

$$\vec{a} = \alpha_1' \cdot (\tau_{11} \cdot \overrightarrow{e_1} + \tau_{21} \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \tau_{n1} \cdot \overrightarrow{e_n}) + \alpha_2' \cdot (\tau_{12} \cdot \overrightarrow{e_1} + \tau_{22} \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \tau_{n2} \cdot \overrightarrow{e_n}) + \cdots + \alpha_n' \cdot (\tau_{1n} \cdot \overrightarrow{e_1} + \tau_{2n} \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \tau_{nn} \cdot \overrightarrow{e_n}).$$

Звідси:

$$\vec{a} = \left(\tau_{11} \cdot \alpha_1' + \tau_{12} \cdot \alpha_2' + \cdots + \tau_{1n} \cdot \alpha_n'\right) \cdot \overrightarrow{e_1} + \left(\tau_{21} \cdot \alpha_1' + \tau_{22} \cdot \alpha_2' + \cdots + \tau_{2n} \cdot \alpha_n'\right) \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \left(\tau_{n1} \cdot \alpha_1' + \tau_{n2} \cdot \alpha_2' + \cdots + \tau_{nn} \cdot \alpha_n'\right) \cdot \overrightarrow{e_n}$$

. Порівнюючи останню рівність з розкладом 7.8 вектора $\vec{a}$ по базису B отримаємо:

$\alpha_i = \tau_{i1} \cdot \alpha_1' + \tau_{i2} \cdot \alpha_2' + \cdots + \tau_{in} \cdot \alpha_n', \quad i = \overline{1, \ldots, n}$. За означенням операції множення матриць отримаємо рівність 7.7.

∆

<u>Наслідок.</u> Зв'язок між координатними стовпцями вектора $\vec{a}$ при переході від базису B' до базису B буде наступним: $A' = T^{-1} \cdot A$. ***(7.9)***

∇ В тих же позначеннях за наслідком 2 теореми 7.3 матрицею переходу від базису B' до базису B буде матриця T^{-1}. Далі застосовується теорема 7.4.

∆

<u>Теорема 7.5.</u>Нехай V n-вимірний векторний простір над полем скалярів F. Будь-яка невироджена матриця порядку n над полем F може бути матрицею переходу від деякого базису простору V до його іншого базису.

∇ Нехай $T = \left(\tau_{ij}\right), i, j = \overline{1, \ldots, n}$ довільна матриця з елементам з поля F, $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ - базис векторного простору V. Доведемо,що система векторів $B' = \left\{\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}, \cdots, \overrightarrow{e_n'}\right\}$,отримана за формулами 7.4 за допомогою нашої матриці T є також базисом векторного простору V. Враховуючи наслідок 3 теореми 6.1 потрібно довести,що система векторів B' лінійно незалежна. Доведемо це методом від супротивного. Припустимо,що вона лінійно залежна.Тоді за означенням 3.2 в рівності

$\alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1'} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2'} + \dots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{e_n'} = \vec{0}$ не всі коефіцієнти дорівнюють нулю. Замінимо в цій рівності вектори системи B' їх розкладами з рівностей 7.4.Отримаємо:

$\alpha_1 \cdot (\tau_{11} \cdot \overrightarrow{e_1} + \tau_{21} \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \tau_{n1} \cdot \overrightarrow{e_n}) + \alpha_2 \cdot (\tau_{12} \cdot \overrightarrow{e_1} + \tau_{22} \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \tau_{n2} \cdot \overrightarrow{e_n}) + \dots + \alpha_n \cdot (\tau_{1n} \cdot \overrightarrow{e_1} + \tau_{2n} \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + \tau_{nn} \cdot \overrightarrow{e_n}) = \vec{0}$

. Розкриваючи дужки та збираючи подібні біля базисних векторів матимемо:

$(\alpha_1 \cdot \tau_{11} + \alpha_2 \cdot \tau_{12} + \dots + \alpha_n \cdot \tau_{1n}) \cdot \overrightarrow{e_1} + (\alpha_1 \cdot \tau_{21} + \alpha_2 \cdot \tau_{22} + \dots + \alpha_n \cdot \tau_{2n}) \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + (\alpha_1 \cdot \tau_{n1} + \alpha_2 \cdot \tau_{n2} + \dots + \alpha_n \cdot \tau_{nn}) \cdot \overrightarrow{e_n} = \vec{0} = 0 \cdot \overrightarrow{e_1} + 0 \cdot \overrightarrow{e_2} + \dots + 0 \cdot \overrightarrow{e_n}$

. Таким чином $\alpha_1 \cdot \tau_{i1} + \alpha_2 \cdot \tau_{i2} + \dots + \alpha_n \cdot \tau_{in} = 0$, $i = \overline{1, \dots, n}$. При чому, серед коефіцієнтів α_i не всі дорівнюють нулю. З останніх рівностей випливає,що нульовий стовпець дорівнює лінійній комбінації стовпців матриці T, при чому не всі коефіцієнти цієї лінійній комбінації дорівнюють нулю. Це означає,що система стовпців матриці T лінійно залежна.За властивістю 3 пункт 3.2 один зі стовпців матриці T є лінійною комбінацією її інших стовпців.За властивостями визначників $|T| = 0$. Але за умовою матриця T невироджена. З цього протиріччя випливає,що система векторів B' лінійно незалежна,а тому є базисом простору V.

Δ

Враховуючи останні дві теореми можна ввести наступне перетворення координат вектора.

Означення 7.3.*Нехай* $\vec{a}$ *довільний вектор* n*-вимірного векторного простору V над полем F,який в деякому базисі* B *простору V має координати* $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, *і* $T = (\tau_{ij})$, $i, j = \overline{1, \dots, n}$ *довільна невироджена матриця над* *полем F. Вирази* $\alpha_i' = \alpha_1 \cdot \tau_{1i} + \alpha_2 \cdot \tau_{2i} + \dots + \alpha_n \cdot \tau_{ni}$ ***(7.10)*** *називають* ***лінійними перетворення координат*** *вектору.*

Те,що в цих перетвореннях елементи матриці беруть з рядків, а не з стовпців,не принципово.

§8.Гомоморфізми і ізоморфізми векторних просторів

8.1.Гомоморфізми векторних прострів

Як ми вже знаємо гомоморфізми і ізоморфізми алгебраїчних систем визначають міру схожості і навіть співпадання алгебраїчних властивостей цих алгебраїчних систем.

Означення 8.1.*Нехай V і* V' *векторні простори над одним і тим же полем F. Відображенням* φ *векторного простору V у векторний простір* V' *називається* ***гомоморфізмом*** *або* ***лінійним відображенням*** *векторного простору V у векторний простір* V'*, якщо для довільних векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *простору V і довільного скаляра* α *з поля F виконується:*

$\varphi(\vec{a} + \vec{b}) = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b})$ ***(8.1)***, $\varphi(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{a})$. ***(8.2)***

Рівність 8.1 називається адитивністю,а рівність 8.2 однорідністю гомоморфізма φ.Зрозуміло,що операції у просторах *V* і V'різні. Вони тільки для зручності позначаються однаковими знаками. Якщо для відображення φ виконуються рівності 8.1 і 8.2,то кажуть,що це відображення зберігає операції.

<u>Теорема 8.1.</u>Нехай $\boldsymbol{\varphi}$ гомоморфізм скінченовимірного векторного простору V у скінченовимірний простір $\mathbf{V'}$,$\vec{\mathbf{0}}$ і $\overrightarrow{\mathbf{0'}}$ - нуль вектори цих просторів відповідно, $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \cdots, \vec{\mathbf{a}}_k$ - довільні вектори простору V, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ - довільні скаляри,тоді:

1. $\boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{0}}) = \overrightarrow{\mathbf{0'}}$;
2. $\boldsymbol{\varphi}(-\vec{\mathbf{a}}) = -\boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{a}})$;
3. $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}_1} + \boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}_2} + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_k \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}_k}) = \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}(\overrightarrow{\mathbf{a}_1}) + \boldsymbol{\alpha}_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}(\overrightarrow{\mathbf{a}_2}) + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_k \cdot \boldsymbol{\varphi}(\overrightarrow{\mathbf{a}_k})$.

∇

1. За властивістю 4 пункт 2.3 $\vec{0} = 0 \cdot \vec{a}$. Тоді рівністю 8.2 отримаємо: $\varphi(\vec{0}) = \varphi(0 \cdot \vec{a}) = 0 \cdot \varphi(\vec{a}) = \overrightarrow{0'}$. В останніх двох частинах цієї рівності множення відбувається у просторі V'.
2. З властивості 7 пункт 2.3 маємо:$-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$. Тоді за рівністю 8.2 отримаємо: $\varphi(-\vec{a}) = \varphi((-1) \cdot \vec{a}) = (-1) \cdot \varphi(\vec{a}) = -\varphi(\vec{a})$. Виясніть самостійно у якому просторі відбувається кожне множення.
3. За властивістю 2 пункт 2.3 сума векторів не залежить від кількості та розташування дужок,а тому враховуючи рівності 81 і 8.2 маємо:

$$\varphi(\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k}) = \varphi(\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + (\alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k})) =$$
$$\varphi(\alpha_1 \cdot \overrightarrow{a_1}) + \varphi(\alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k}) = \alpha_1 \cdot \varphi(\overrightarrow{a_1}) + \varphi(\alpha_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \overrightarrow{a_k})$$

. Пункт 3 цієї теореми легко довести далі продовжуючи процес.

Δ

Таким чином,з цієї теореми випливає,що гомоморфізм векторних просторів переводить нуль вектор простору $\boldsymbol{V}$ тільки у нуль вектор простору V';образом вектора протилежного до $\vec{a}$ є протилежний вектор до образу вектора $\vec{a}$; лінійна комбінація векторів переводиться в лінійну комбінацію їх образів тим ж коефіцієнтами. Лінійним відображенням в теорії векторних просторів присвячується окремий розділ, а тому вивчимо детальніше їх ізоморфізми.

8.2. Ізоморфізм векторних просторів

Ізоморфізм векторних просторів – це один з типів їх гомоморфізмів.

Означення 8.2.*Нехай V і $V^{'}$ векторні простори над одним і тим же полем F. Взаємно однозначне відображенням φ векторного простору V на векторний простір $V^{'}$ називається* ***ізоморфізмом*** *векторного простору V на векторний простір $V^{'}$, якщо для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ простору V і довільного скаляра α з поля F виконується:*$\varphi(\vec{a}+\vec{b})=\varphi(\vec{a})+\varphi(\vec{b})$ ***(8.1),***

$\varphi(\alpha\cdot\vec{a})=\alpha\cdot\varphi(\vec{a})$ ***(8.2).****При цьому,векторні простори V і $V^{'}$ називають ізоморфними і позначають $V\equiv V^{'}$.*

Ізоморфні векторні простори мають абсолютно однакові алгебраїчні властивості. Абстрагуючись від природи елементів ізоморфних векторних просторів V і V' можна вважати ці простори однією і тією ж алгебраїчною системою.

<u>Теорема 8.2.</u>Відношення ізоморфізму є відношенням еквівалентності на множині всіх векторних просторів над одним і тим же полем F(див.[5]).

∇ Відношення еквівалентності – це рефлексивне,симетричне і транзитивне відношення на тій множині на якій воно задане.

1. Рефлексивність цього відношення випливає з того,що $V\equiv V$. Їх ізоморфізмом є тотожне відображення ε, яке відображає кожний елемент простору V на себе:для $\forall\vec{a}\in V\ \varepsilon(\vec{a})=\vec{a}$. Дійсно це відображення взаємно однозначне. Перевіримо для нього рівності 8.1 і 8.2:

$\varepsilon(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}+\vec{b}=\varepsilon(\vec{a})+\varepsilon(\vec{b}), \varepsilon(\alpha\cdot\vec{a})=\alpha\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\varepsilon(\vec{a}).$

2. Доведемо симетричність цього відношення. Нехай $V\equiv V'$ і φ-ізоморфізм простору V на V'. Потрібно довести,що $V'\equiv V$. Оскільки φ

взаємно однозначне відображення простору V на V', то за критерієм оборотності відображень до нього існує обернене відображення φ^{-1} яке є взаємно однозначним відображенням простору V' на V. Доведемо,що для відображення φ^{-1} виконуються рівності 8.1 і 8.2, враховуючи,що вони виконуються для ізоморфізму φ. Маємо:

$$\vec{a}+\vec{b}=\varepsilon(\vec{a})+\varepsilon(\vec{b})=\varphi\left(\varphi^{-1}(\vec{a})\right)+ +\varphi(\varphi^{-1}(\vec{b}))=\varphi(\varphi^{-1}(\vec{a})+\varphi^{-1}(\vec{b})).$$

Подієємо на обидві частини рівності $\vec{a}+\vec{b}=\varphi(\varphi^{-1}(\vec{a})+\varphi^{-1}(\vec{b}))$ відображенням φ^{-1}. Отримаємо:

$$\varphi^{-1}(\vec{a}+\vec{b})=\varphi^{-1}\left(\varphi\left(\varphi^{-1}(\vec{a})+\varphi^{-1}(\vec{b})\right)\right)=\varepsilon\left(\varphi^{-1}(\vec{a})+\varphi^{-1}(\vec{b})\right)=$$

$=\varphi^{-1}(\vec{a})+\varphi^{-1}(\vec{b})$. Рівність 8.1 для відображення φ^{-1} доведено.

Доведемо для нього рівність 8.2: $\alpha\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\varepsilon(\vec{a})=\alpha\cdot\varphi\left(\varphi^{-1}(\vec{a})\right)=$ $=\varphi(\alpha\cdot\varphi^{-1}(\vec{a}))$. Подієємо на обидві частини рівності $\alpha\cdot\vec{a}=\varphi(\alpha\cdot\varphi^{-1}(\vec{a}))$ відображенням φ^{-1}. Отримаємо:$\varphi^{-1}(\alpha\cdot\vec{a})=\alpha\cdot\varphi^{-1}(\vec{a})$. Ми довели,що φ^{-1} ізоморфізм простору V' на V.

3. Доведемо транзитивність відношення ізоморфізму векторних просторів. Нехай φ- ізоморфізм векторного простору V на V', χ - ізоморфізм векторного простору V' на V''. Доведемо,що композиція відображень $\varphi\cdot\chi$ є ізоморфізмом векторного простору Vна V''. Однією з властивостей композиції є те,що композиція взаємно однозначних відображень також є взаємно однозначним відображенням. Доведемо для відображення $\varphi\cdot\chi$ рівності 8.1 і 8.2,враховуючи,що вони виконуються для кожного з відображень φ і χ. Ми вважаємо,що при композиції $\varphi\cdot\chi$ першим,як відображення,діє перший множник. Таким чином:

$$\varphi\cdot\chi(\vec{a}+\vec{b})=\chi\left(\varphi(\vec{a}+\vec{b})\right)=\chi\left(\varphi(\vec{a})+\varphi(\vec{b})\right)=\chi(\varphi(\vec{a}))+\chi\left(\varphi(\vec{b})\right)=\varphi\cdot\chi(\vec{a})+$$

$+\varphi\cdot\chi(\vec{b})$. Рівність 8.2 доводиться аналогічно.

Δ

Наслідки

1. Тотожне відображення ε є ізоморфізмом векторного простору V на себе. Він називається одиничним ізоморфізмом простору V.
2. Якщо φ ізоморфізм простору V на V',то φ^{-1}- ізоморфізм простору V' на V.
3. Якщо φ- гомоморфізм векторного простору V у V', χ - гомоморфізм векторного простору V' у V'',то $\varphi\cdot\chi$ є гомоморфізмом векторного простору V у V''.
4. Відношення ізоморфізму розбиває множину всіх скінчено вимірних векторних просторів над одним і тим же полем F на класи попарно ізоморфних між собою векторних просторів,при чому ці класи попарно не перетинаються.

Таким чином, взявши тільки по одному векторному простору з кожного з цих класів і вивчивши їх можна дослідити всі ізоморфні векторні простори. Вибрати простір з кожного з цих класів можна за допомогою наступної теореми.

Теорема 8.3.Будь-який n-вимірний векторний простір V над довільним полем скалярів F ізоморфний n-вимірному арифметичному векторному простору F^n(див. зауваження 2.1).

∇ Нехай B деякий базис *n*-вимірного векторного простору V і $\vec{a}\in V$ - довільний вектор, який у базисі B має координати $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. За теоремою 7.1 кожному вектору простору V відповідає єдиний порядкований набір його координат у даному базисі, а тому рівність $\varphi(\vec{a})=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ (***8.3)*** задає відображення простору V у простір F^n. Це відображення кожному вектору $\vec{a}$ простору V ставить у відповідність його координатний рядок у базисі B.Доведемо,що воно є ізоморфізмом простору V на простір F^n.

Спочатку доведемо сюр'єктивність відображення φ. Нехай $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ довільний вектор простору $F^{\boldsymbol{n}}$. Записавши за допомогою його компонент рівність 7.1 отримаємо вектор $\vec{a}$ який є прообразом вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ у просторі V при відображені φ.

Доведемо тепер ін'єктивність цього відображення. Нехай $\varphi(\vec{a}) = \varphi(\vec{b}) == (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. Отже,вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у базисі В мають однакові порядковані набори координат. Виписавши для кожного з цих векторів рівність 7.1 отримаємо: $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{e_n}, \vec{b} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots +$ $+\alpha_n \cdot \overrightarrow{e_n}$. Оскільки операції у будь-якому векторному просторі однозначні,то $\vec{a} = \vec{b}$. Таким чином,відображення φ ін'єктивне і сюр'єктивне,а тому воно є взаємно однозначним відображенням простору V на простір $F^{\boldsymbol{n}}$.

Тепер доведемо,що для відображення φ виконуються рівності 8.1 і 8.2. Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ довільні вектори простору V і $\alpha \in F$- довільний скаляр,при чому $\varphi(\vec{a}) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), \varphi(\vec{b}) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$. Враховуючи теорему 7.2 та рівність 8.3 маємо: $\varphi(\vec{a} + \vec{b}) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_n + \beta_n) =$

$= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b})$,

$\varphi(\alpha \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \alpha_1, \alpha \cdot \alpha_2, \cdots, \alpha \cdot \alpha_n) = \alpha \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \alpha \cdot \varphi(\vec{a})$.

Δ

<u>Теорема 8.4.</u>Нехай $\boldsymbol{\varphi}$ ізоморфізм векторного простору V на простір $\mathbf{V}'$ і $\mathbf{B} = \{\overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}}, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{e_n}}\}$ - базис векторного простору V. Тоді система векторів $\mathbf{B}' = \{\boldsymbol{\varphi}(\overrightarrow{\mathbf{e_1}}), \boldsymbol{\varphi}(\overrightarrow{\mathbf{e_2}}), \cdots, \boldsymbol{\varphi}(\overrightarrow{\mathbf{e_n}})\}$ є базисом векторного простору $\mathbf{V}'$.

∇ Спочатку доведемо,що ізоморфізм векторних просторів переводить будь-яку лінійну незалежну систему векторів $S = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_k\}$ в лінійну незалежну систему їх образів $S' = \{\varphi(\vec{a}_1), \varphi(\vec{a}_2), \cdots, \varphi(\vec{a}_k)\}$. Нехай система векторів S лінійна незалежна. За означенням 3.3 запишемо нульову лінійну комбінацію векторів системи S': $\alpha_1 \cdot \varphi(\vec{a}_1) + \alpha_2 \cdot \varphi(\vec{a}_2) + \cdots + \alpha_k \cdot \varphi(\vec{a}_k) = \vec{0'}$ (***8.4***) і виясними чому дорівнюють її коефіцієнти. За теоремою 8.1 пункти 1 і 3 маємо: $\varphi(\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_k \cdot \vec{a}_k) = \varphi(\vec{0})$. Так,як ізоморфізм є взаємно однозначним відображенням,то образи векторів співпадають тільки у випадку,коли співпадають самі вектори. Звідси випливає,що: $\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_k \cdot \vec{a}_k = \vec{0}$. Оскільки система векторів S лінійно незалежна,то в останній рівності всі коефіцієнти $\alpha_i = 0, i = \overline{1, \cdots, k}$. Ми довели,що рівність 8.4 виконується тільки тоді,коли вона має нульові коефіцієнти, а тому система векторів S' векторного простору V' також лінійно незалежна.

З вище доведеного твердження випливає,що система векторів B' векторного простору V' лінійно незалежна. Доведемо,що будь-який вектор $\overrightarrow{a'}$ простору V' є лінійною комбінацією векторів системи B'. Оскільки φ взаємно однозначне відображення,то у просторі V існує єдиний вектор $\vec{a}$ такий,що $\varphi(\vec{a}) = \overrightarrow{a'}$. Розкладемо у просторі V вектор $\vec{a}$ за базису B. Цей розклад матиме вид: $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{e_n}$. Подіє")мо на обидві його частини ізоморфізмом φ. Отримаємо:

$$\overrightarrow{a'} = \varphi(\vec{a}) = \varphi(\alpha_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \alpha_2 \cdot \overrightarrow{e_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \overrightarrow{e_n}) = \alpha_1 \cdot \varphi(\overrightarrow{e_1}) + \alpha_2 \cdot \varphi(\overrightarrow{e_2}) + \cdots$$

$+\alpha_n \cdot \varphi(\overrightarrow{e_n})$. За означенням 6.2 B' - базис векторного простору V'.

Δ

<u>Наслідок .</u> Ізоморфізм φ векторних просторів V ***і*** V' відображає будь-яку лінійну незалежну систему векторів S простору V на лінійну незалежну систему їх образів S' простору V'.

Випливає з доведення попередньої теореми.

<u>Теорема 8.5 (критерій ізоморфізму векторних просторів)</u>

Скінчено вимірні векторні простори V і V' над одним і тим же полем F ізоморфні тоді і тільки тоді,коли співпадають їх розмірності.

∇ *<u>Необхідність.</u>* Нехай φ ізоморфізм векторного простору V на простір V'. Якщо $\mathrm{V} = \langle\vec{0}\rangle$,то враховуючи взаємну однозначність ізоморфізму φ отримаємо,що $\mathrm{V}' = \langle\overrightarrow{0'}\rangle$, а тому $dimV = dimV' = 0$.

Якщо V ненульовий скінчено вимірний векторний простір,то за теоремою 6.1 він володіє базисом $\mathrm{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$. За теорею 8.4 система векторів $\mathrm{B}' = \left\{\varphi(\overrightarrow{e_1}), \varphi(\overrightarrow{e_2}), \cdots, \varphi(\overrightarrow{e_n})\right\}$ є базисом векторного простору V', а тому $dimV = dimV' = n$.

<u>Достатність .</u> Нехай тепер $dimV = dimV'$. Якщо $dimV = 0$,то за означенням 6.2 $\mathrm{V} = \langle\vec{0}\rangle$ і $\mathrm{V}' = \langle\overrightarrow{0'}\rangle$. Відображення $\varphi(\vec{0}) = \overrightarrow{0'}$ є ізоморфізмом векторного простору V на V'.

Якщо векторний простір V ненульовий і $dimV = n$,то за теоремою 8.3: $\mathrm{V} \equiv F^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{V}' \equiv F^{\mathrm{n}}$. За теоремою 8.2 відношення ізоморфізму симетричне та транзитивне, а тому $\mathrm{V} \equiv F^{\mathrm{n}}$, $F^{\mathrm{n}} \equiv \mathrm{V}'$.Звідси випливає,що $\mathrm{V} \equiv \mathrm{V}'$.

Δ

Література

1. Архангельский А.В.Конечномерные векторные пространства. – М.:Изд-во МГУ,1982. – 248 с.
2. Воеводин В.В. Линейная алгебра. – М.:Наука,1975.- 176 с.
3. Гельфанд И.М.Лекции по линейной алгебре.- М.:Наука,1966. – 245 с.
4. Головина Л.И.Линейная алгебра и некоторые её приложения. – М.:Наука, 1975. – 480 с.
5. Драганюк С.В.Елементи теорії множин: навч.пос./ С.В.Драганюк, О.Б.Перець – Одесса,ПНПУ,2013. – 141 с.
6. Драганюк С.В.Матриці та визначники/Сергії Володимирович Драганюк. – О.:[навч.посіб.для студ.вищ.навч.закл.],2012.-112 с.
7. Ефимов Н.В.Линейная алгебра и многомерная геометрия/Ефимов Н.В.,Розендорн Э.Р. – М.:Наука,1970. – 247 с.
8. Завало С.Т.Алгебра і теорія чисел:В 2 –х ч./ Завало С.Т.,Костарчук В.М.,Хацет Б.І. – К.:Вища школа,1974.Ч.1. – 464 с.
9. Завало С.Т.Алгебра і теорія чисел:В 2 –х ч./ Завало С.Т.,Костарчук В.М.,Хацет Б.І. – К.:Вища школа,1977.Ч.1. – 400 с.
10. Ильин В.А.Линейная алгебра/ Ильин В.А.,Позняк Э.Г. – М.: Наука,1974. – 296 с.
11. Кострикин А.И.Введение в алгебру. – М.:Наука,1977. – 236 с.
12. Кострикина А.И.Сборник задач по алгебре.– М.:Наука,1987. – 352 с.
13. Куликов Л.Я. Алгебра и теорія чисел. – М.:Высш.школа,1979. – 559 с.
14. Курош А.Г.Курс высшей алгебры. – М.:Наука,1971. – 432 с.
15. Мальцев А.И.Основы линейной алгебры. - М.:Наука,1975. – 400 с.
16. Практикум.Алгебра і теорія чисел/[Завало С.Т.,Левіщенко С.С.,Пилаєв В.В.,Рокицький І.О.]. – К.:Вищ.школа,1983.Ч.1. – 232 с.
17. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебры. – М.: Наука,1974. – 384 с.
18. Тышкевич Р.И.Линейная алгебра и аналитическая геометрия/ Тышкевич Р.И.,Феденко А.С. – Мн.:Выс.школа,1976. – 544 с.

19.Фадеев Д.К.Лекции по алгебре. – М.:Наука,1984. – 416 с.
20.Шилов Г.Е.Введение в теорию линейных пространств. – М.: Государственное изд.технико- теоретической литературы,1956. – 303 с.