Усов В.В.

РІШЕННЯ ЗАДАЧ З МЕХАНІКИ ТА МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ

Методичні настанови для самостійної роботи студентів

Одесса 2012

ББК
У

Рецензенти:
А.А. Брюханов,
д-р т. н., професор кафедри фізики
Південноукраїнського національного
педагогічного університету
імені К.Д. Ушинського.

Друкується за рішенням Вченої ради Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К.Д. Ушинського
протокол № _____.от _________ 2012 г.,

Усов В.В.
Рішення задач з механіки та молекулярної фізики : метод. настанови. – Одесса, 2012. – 56 с.

ISBN

Викладені основні формули з механіки та молекулярної фізики в межах курсу загальної фізики педагогічних університетів. Запропоновані методичні настанови щодо рішення задач та приведені повні рішення деяких задач з усіх розділів механіки та молекулярної фізики, запропоновані задачі для самостійного рішення.

ББК

ISBN

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

Механіка

• **Кінематичне рівняння руху матеріальної точки уздовж осі x:**

$$x = f(t)$$

де f(t) - деяка функція часу.

• Середня швидкість:

$$\langle v_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

• Середня шляхова швидкість:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

де ΔS - шлях, пройдений точкою за інтервал Δt.

• Миттєва швидкість:

$$v_x = \frac{dx}{dt}.$$

• Середнє прискорення:

$$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

• Миттєве прискорення:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

• Кінематичне рівняння руху матеріальної точки по колу:

$$\varphi = f(t)\ ;\ r = const.$$

• Кутова швидкість (модуль):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

• Кутове прискорення (модуль):

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

• Зв'язок між лінійними і кутовими величинами, що характеризують рух по колу:

$$v = \omega R\ ;\ a_\tau = \varepsilon R\ ;\ a_n = \omega^2 R,$$

де v - лінійна швидкість; a_τ і a_n – тангенціальне і нормальне прискорення; ω - кутова швидкість; ε - кутове прискорення; R - радіус кола.

• Повне прискорення:

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2} \text{ або } a=R\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}\ .$$

• Кут між повним прискоренням a і нормальним a_n :

$$\alpha = arccos(a_n/a).$$

• Кінематичне рівняння гармонійних коливань матеріальної точки:

$$x = Acos(\omega t+\varphi)$$

де x - зсув, A - амплітуда коливань, ω - кругова або циклічна частота φ - початкова фаза.

• Швидкість матеріальної точки, що здійснює гармонійні коливання:

$$v = -A\omega\ sin(\omega t+\varphi).$$

• Прискорення матеріальної точки, що здійснює гармонійні коливання:

$$a = -A\omega 2cos(\omega t+\varphi).$$

• Період коливань математичного маятника:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ ,$$

де l - довжина маятника, g - прискорення вільного падіння.

• Період коливань фізичного маятника:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}\ ,$$

де J - момент інерції відносно осі коливань, m - маса тіла, a - відстань від осі обертання до центру мас тіла.

• Імпульс тіла:

$$\vec{p}=m\vec{v}\ ,$$

де m - маса тіла, v - швидкість тіла.

• Другий закон Ньютона:

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}\ ,$$

де F - сила, діюча на тіло, m - маса тіла.

• Сили, що розглядаються в механіці:

а) сила пружності $F = -kx$

де k - коефіцієнт пружності, x - абсолютна деформація;

б) сила тяжіння $F = mg$

в) сила тертя $F = fN$

де f - коефіцієнт тертя, N - сила нормального тиску.

• Закон збереження імпульсу:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const$$

• Кінетична енергія тіла, що рухається поступально:

$$T = \frac{mv^2}{2} \text{ або } T = \frac{p^2}{2m}.$$

• Потенційна енергія:

а) пружно деформованої пружини:

$$W = \frac{1}{2}kx^2,$$

б) тіла, що знаходиться в однорідному полі сили тяжіння:

$$\Pi = mgh$$

де h - висота тіла над рівнем, прийнятим за нульовий (формула справедлива за умови $h << R$, де R - радіус Землі).

• Закон збереження механічної енергії:

$$E = T + \Pi = const.$$

• Основне рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої осі:

$$M_z = J_z\varepsilon,$$

де M_z – проекція на вісь обертання z результуючого моменту зовнішніх сил, діючих на тіло, ε - кутове прискорення, J_z - момент інерції тіла відносно осі обертання.

• Моменти інерції деяких однорідних тіл маси m відносно осі, що проходить через центр мас:

а) стрижня довжини l відносно осі, перпендикулярної до стрижня:

$$J = \frac{1}{12}ml^2;$$

б) обруча (тонкостінного циліндра) відносно осі, перпендикулярної до площини обруча (співпадаючій з віссю циліндра):

$$J = mR^2$$

де R - радіус обруча (циліндра);

в) диска радіусом R відносно осі, перпендикулярної до площини диска (співпадаючій з віссю диска):

$$J = \frac{1}{2}mR^2.$$

• Момент інерції тіла відносно довільної осі (теорема Штейнера):

$$J = J_0 + ma^2$$

де J_0 - момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас паралельно заданої осі; m - маса тіла; a - відстань між осями.

• Момент імпульсу тіла, що обертається навкруги нерухомої осі z:

$$L_z = J_z\omega$$

де ω - кутова швидкість тіла навкруги осі обертання z .

• Закон збереження моменту імпульсу системи тіл, що обертаються навкруги нерухомої осі:

$$\sum_{i=1}^{N} J_i \omega_i = const\,.$$

• Кінетична енергія тіла, що обертається навкруги нерухомої осі:

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2}\,.$$

Молекулярна фізика і термодинаміка

• Кількість речовини однорідного газу (в молях):

$$\nu = \frac{N}{N_A} \text{ або}$$

де N - число молекул газу; N_A - число Авогадро; m - маса газу; μ - мольна маса газу.

• Рівняння Клапейрона-Менделєєва (рівняння стану ідеального газу):

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT\,,$$

де p - тиск газу, V - об'їм газу, m - маса газу; μ - мольна маса газу, R - універсальна газова постійна, $\nu = m/\mu$ - кількість речовини, T - термодинамічна температура Кельвіна.

• Експериментальні газові закони, що є окремими випадками рівняння Клапейрона-Менделєєва для ізопроцесів:

а) закон Бойля-Маріотта (ізотермічний процес $T = const$, $m = const$): $pV = const$

б) закон Гей-Люссака (ізобарний процес: $p = const,\ m = const$): $V/T = const$

в) закон Шарля (ізохорний процес: $V = const,\ m = const$): $p/T = const$.

Закон Дальтона, що визначає тиск суміші хімічно не взаємодіючих газів:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

де p_i - парціальний тиск компонентів суміші, n - число компонентів суміші.

• Концентрація молекул (число молекул в одиниці об'єму):

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A}{\mu}\rho,$$

де N - число молекул, що містяться в даній системі, ρ - густина речовини.

• Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів:

$$p = \frac{2}{3}n\langle w_n \rangle,$$

де $\langle w_n \rangle$ - середня кінетична енергія поступального руху молекули.

• Середня кінетична енергія поступального руху молекули:

$$w_n = \frac{3}{2}kT,$$

де k - стала Больцмана.

• Середня повна кінетична енергія молекули:

$$\langle w_i \rangle = \frac{i}{2}kT,$$

де i - число ступенів свободи молекули.

• Залежність тиску газу від концентрації молекул і температури:

$$p = nkT.$$

• Швидкості молекул:

а) середня квадратична $\langle v_{кв} \rangle =$

б) середня арифметична $\langle v_a \rangle$ $\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$

в) найбільш імовірна $\langle v_{ім} \rangle = \sqrt{\frac{2kT}{m_1}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$

де m_1 - маса однієї молекули.

• Питомі теплоємності газу при постійному об'ємі (c_v) і при постійному тиску (c_p):

$$c_v = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}, \qquad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}.$$

• Зв'язок між питомою (c) і мольній (C) теплоемкостями:

$$c = C/\mu.$$

• Рівняння Роберта Майєра:

$$Cp - Cv = R\ .$$

• Внутрішня енергія ідеального газу:

$$U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT = \frac{m}{\mu}C_\nu T$$

• Перший початок термодинаміки:

$$Q = \Delta U + A,$$

де Q - теплота, передана системі (газу); ΔU - зміна внутрішньої енергії системи; A - робота, виконана системою проти зовнішніх сил.

• Робота розширення газу:

а) в загальному випадку: $A = \int_{V_1}^{V_2} pdV$

б) при ізобарному процесі $A = p(V_2 - V_1)$

в) при ізотермічному процесі $A = \frac{m}{\mu}RT\,ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

г) при адіабатичному процесі $A = -\Delta U = -\frac{m}{\mu}C_\nu \Delta T$

або $$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{\mu}\left[1 - \left(\frac{V}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

де $\gamma = Cp/Cv$ - показник адіабати.

• Рівняння Пуассона, що зв'язує параметри ідеального газу при адіабатичному процесі: $pV^\gamma = const,\ .\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1},\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma},\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

• Термічний к.к.д. циклу:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

де Q_1 - теплота, отримана тілом від нагрівача; Q_2 - теплота, передана робочим тілом охолоджувачу.

• Термічний к.к.д. циклу Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

де T_1 і T_2 - термодинамічні температури нагрівача і охолоджувача.

РОЗДІЛ І. фізичні основи механіки

Тема 1. **Кінематика поступального і обертального руху**

Приклади рішення задач

Задача 1. Рівняння руху матеріальної точки уздовж осі x має вид $x = A + Bt + Ct^2$, де A = 3 м, B = 2 м/с, C = -0,5 м/с^2. Знайти координату x, швидкість v, прискорення точки у момент часу t = 4 с.

Рішення

Координату x знайдемо, підставивши в рівняння руху числові значення коефіцієнтів, B, C і часу t:

$$x = (3 + 2\ 4 + (-\ 0,5)\ 42) = 3 \text{ м}.$$

Миттєва швидкість є перша похідна від координати за часом:

$$v = dx/dt = B+2Ct.$$

У момент часу t = 4 с маємо v = 2+2 (-0,5) 4= -2м/с.

Прискорення точки знайдемо, узявши першу похідну від швидкості за часом:

$$a=dv/dt=2C.$$

У момент часу t = 4 с одержуємо a =2(-0,5)= -1 м/с^2.

Відповідь: x = 3 м, v = -2 м/с = -1 м/с^2 .

Задача 2. Тіло обертається навкруги нерухомої осі згідно із законом $\varphi = A+Bt+Ct^3$, де A=5 рад, B =15 рад/с, C =1 рад/с^3. Знайти повне прискорення точки, що знаходиться на відстані r = 0,2 м від осі обертання, для моменту часу t=2 с.

Рішення

Кутову швидкість тіла отримаємо, продиференціювавши залежність $\varphi(t)$ за часом:

$$\omega = B + 3Ct^2$$

Лінійна швидкість точки, що знаходиться на відстані r від осі обертання, буде рівна:

$$v = \omega\, r = (B + 3Ct^2)\, r.$$

Тангенціальне прискорення знайдемо, обчисливши похідну швидкості за часом:

$$a_\tau = dv/dt = 6Ct.$$

Нормальне (доцентрове) прискорення дорівнює:

$$a_n = v^2/r = (B + 3Ct^2)^2\, r.$$

Отримавши вирази для тангенціального і нормального прискорень, обчислимо повне прискорення:

$$a = ((a_\tau)^2 + (a_n)^2)^{1/2} = r\,(36\,C^2 t^2 + (B + 3Ct^2)^4)^{1/2}.$$

Підставивши чисельні значення для t = 2 с, отримаємо a = 145,8 м/с^2 .
Відповідь: a = 145,8 м/с^2.

Задача 3. На схилі гори тіло кинуто вгору під кутом α до поверхні гори. Визначити дальність польоту тіла, якщо його початкова швидкість v_0 і кут нахилу гори β. Опір повітря не ураховувати.

Рішення

Рух тіла можна представити як результат накладення двох прямолінійних рівноприскорених рухів: уздовж поверхні гори і перпендикулярно їй. Виберемо систему координат так, як показано на малюнку.

Будемо вважати, що рух тіла почався у момент часу t = 0. Запишемо початкові умови задачі: $x_0=0,\ y_0=0,\ V_{0x} = V_0 \cos\alpha,\ V_{0y} = V_0 \sin\alpha$. Для проекцій прискорення на осі x і y отримаємо:

$a_x = -g\sin\beta$, $a_y = -g\cos\beta$. Рівняння руху можна записати таким чином:

$$x = V_0 t\cos\alpha - g\sin\beta\, t^2/2,$$

$$y = V_0 t\sin\alpha - g\cos\beta\, t^2/2.$$

В точці падіння каменя на землю y = 0 і, отже, можна записати:

$$0 = V_0 t\sin\alpha - g\cos\beta\, t^2/2$$

Визначивши з останнього рівняння час руху тіла до падіння і підставивши отриманий вираз в рівняння руху уздовж осі x, отримаємо для дальності польоту L вираз

$$L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g\cos\beta}\left(1 - tg\alpha\ tg\beta\right)$$

Задача 4. Колесо обертається з постійним кутовим прискоренням ε = 2 рад/с^2. Через t = 0,5 с після початку руху повне прискорення колеса стало рівно a =13,6 см/с^2. Знайти радіус колеса R.

Рішення

Оскільки кутове прискорення постійно, а початкова кутова швидкість рівна нулю, кутову швидкість ω залежно від часу можна обчислити таким чином: $\omega = \varepsilon t$. Лінійна швидкість точок на краю колеса буде рівна:

$$v = \omega R = \varepsilon R t.$$

Повне прискорення точок на ободі колеса буде рівне:

$$a = ((dv/dt)^2 + (v^2/R)^2)^{1/2} = ((\varepsilon R)^2 + \varepsilon^4 R^2 t^4)^{1/2} = R\varepsilon(1+\varepsilon^2 t^4)^{1/2}.$$

Звідки одержуємо:

$$R = a/(\varepsilon(1+\varepsilon^2 t^4)^{1/2}.$$

Підставляючи чисельні значення, знаходимо: $R = 0{,}061$ м.

Відповідь: $R = 0{,}061$м

Задача 5. Куля випущена з початковою швидкістю v_0=200 м/с під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту. Визначити максимальну висоту H_{max} підйому, дальність S польоту і радіус R кривизни траєкторії кулі в її щонайвищій точці. Опором повітря нехтувати.

Рішення

Виберемо систему координат так, як показано на малюнку. В будь-якій точці траєкторії на тіло буде діяти тільки сила тяжіння, спрямована вертикально вниз. Отже, вздовж осі x рух буде рівномірним, а вздовж осі y - рівноприскореним. Так як в початковий момент часу координати тіла дорівнюють нулю, то рівняння руху тіла можуть бути записаними у вигляді:

$$x = V_{0x}t\ ,\ y = V_{0y}t - gt^2/2\ ,$$

де позначено $V_x = V_0 cos\alpha$ і $V_y = V_0 sin\alpha$ - проекції швидкості у момент часу t на осі x і y. Коли тіло досягне максимальної висоти, то V_y =0. Отже $V_0 sin\alpha = g\cdot t_{max}$, звідки знаходимо час t_{max}, за який куля досягне верхньої точки: $t_{max} = V_0 sin\alpha/g$. У верхній точці $y = H_{max}$. Підставляючи в рівняння рухи уздовж осі y знайдене значення t_{max}, одержуємо:

$$H_{\max} = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

В точці падіння кулі на землю $y = 0$. Підставляючи в рівняння рухи уздовж осі у значення $y = 0$ і скорочуючи на t, одержуємо:

$$0 = V_0 \sin\alpha - \frac{gt_s}{2},$$

де t_s – повний час руху кулі. Звідси знаходимо

$$t_s = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}.$$

Підставляючи знайдене значення в рівняння руху уздовж *x*, одержуємо:

$$S = V_0 t_s \cos\alpha = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Для визначення радіусу кривизни траєкторії в щонайвищій точці помітимо, що в кожній точці траєкторії повне прискорення дорівнює прискоренню сили тяжіння. У верхній точці траєкторії воно дорівнює доцентровому прискоренню, тобто :

$$g = \frac{V_x^2}{R} = \frac{V_0^2 \cos^2\alpha}{R},$$

звідки витікає, що

$$R = \frac{V_0^2 \cos^2\alpha}{g}.$$

Підставляючи чисельні значення у вирази для R, S і H_{max}, отримаємо R = 1,02 км, S = 3,53 км, H_{max} = 1,53 км

Відповідь: H_{max} = 1,53 км, S =3,53 км, R =1,02 км

Задачі для самостійного вирішення

Задача 6. Вентилятор обертається з частотою n = 900 об/хв. Після виключення вентилятор, обертаючись рівноуповільнено, зробив до зупинки N = 75 обертів. Який час t пройшов з моменту виключення вентилятора до повної його зупинки? (Відповідь: t = 10 с).

Задача 7. Камінь, кинутий горизонтально, через час t =0,5 с після початку руху мав швидкість v, в 1,5 рази більше швидкості v_x у момент кидання. З якою швидкістю v_x кинутий камінь? (Відповідь: v_x = 4,4 м/с)

Задача 8. Дві матеріальні точки рухаються згідно рівнянням: $x_1 = A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3$ и $x_2 = A_2 t + B_2 t^2 + C_2 t^3$, где A_1=4 м/с, B_1=8м/с, C_1=-16 м/с, A_2=2м/с, B_2=-4 м/с^2, C_2=1 м/с^3. В який момент часу t прискорення цих крапок будуть однакові? Знайти швидкості v_1 і v_2 точок у цей момент. (Відповідь: t =0,235 с, v_1 = 5,1 м/с, v_2 = 0,29 м/с.)

Задача 9. Рівняння руху матеріальної точки уздовж осі x має вид $x = At + Bt^2 + Ct^3$, де A = 2 м/с, B = -3 м/с^2, C = 4 м/с^3. Знайти залежність швидкості v і прискорення точки від часу t; координату x, швидкість v і прискорення точки через t =2 з після початку руху. (Відповідь: x =24 м, v = 38 м/с, a =42 м/с^2.)

Задача 10. Рух точки по прямой заданий рівнянням $x = At + Bt^2$, де A =2 м/с, B = -0,5 м/с^2. Визначити середню путню швидкість $\langle v \rangle$ рухи точки в інтервалі часу від t_1 =1 с до t_2=3 с. (Відповідь: $\langle v \rangle$ = 0,5 м/с.)

Задача 11 Точка рухається по прямой згідно рівнянню $x = At + Bt^3$, де A = 6 м/с, B = -0,125 м/с^3. Визначити середню путню швидкість $\langle v \rangle$ точки в інтервалі часу від t_1 =2 с до t_2 = 6 с. (Відповідь:$\langle v \rangle$=3 м/с.).

Задача 12. Точка рухається по колу радіусом R = 4 м. Закон її руху виражається рівнянням $\xi = A + Bt^2$, где A = 8 м, B = -2 м/с^2. Знайти момент часу t, коли нормальне прискорення точки a_n =9 м/с^2, а також швидкість v, тангенціальне прискорення a_τ і повне прискорення $a_{полн}$ точки у цей момент. (Відповідь: t = 1,5 с, v = -6 м/с, a_τ = -4 м/с^2, $a_{полн}$ = 9,84 м/с^2.)

Задача 13. Точка рухається по колу радіусу R = 10 см з постійним тангенціальним прискоренням a_τ. Знайти a_τ, якщо відомо, що до кінця п'ятого обороту після початку руху швидкість точки стала рівна v = 79,2 см/с. (Відповідь: a_τ = 0,1 м/с^2.)

Задача 14. В першому наближенні можна вважати, що електрон в атомі водню рухається по круговій орбіті з лінійною швидкістю v. Знайти кутову швидкість ω обертання електрона навкруги ядра і його нормальне прискорення a_n. Прийняти радіус орбіти електрона рівним $R = 0{,}5\cdot 10^{-10}$ м і лінійну швидкість електрона на цій орбіті $v = 2{,}2\cdot 10^6$ м/с.

(Відповідь: $\omega = 4{,}4\cdot 10^{16}$ рад/с, $a_n = 9{,}7\cdot 10^{22}$ м/с^2.)

Задача 15. З висоти h = 2 м вниз під кутом $\alpha = 30^0$ до вертикалі кинутий м'яч з початковою швидкістю v_0 = 8,7 м/с. Знайти відстань S між двома послідовними ударами м'яча об землю. (Відповідь: S = 8,7 м.)

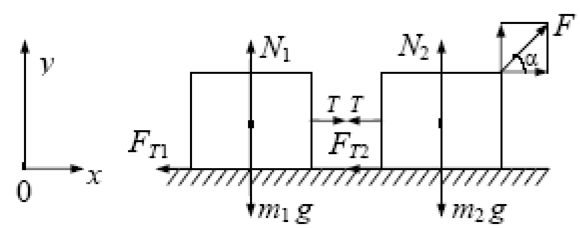
Тема 2. **Динаміка матеріальної точки. Закон збереження імпульсу**

Приклади рішення задач

Задача 1. На горизонтальній площині знаходяться зв'язані невагомою і нерозтяжною ниткою двоє тіла, маси яких m_1 і m_2. До тіла масою m_2 прикладена сила F, направлена під кутом α до горизонту. Коефіцієнт тертя між вантажами і площиною рівний f. Визначити натягнення нитки і прискорення тел.

Рішення

На тіло масою m_1 діють: сила тяжіння m_1g, сила реакції опори N_1, сила натягнення нитки T_1, сила тертя $F_{т1}$. На тіло масою m_2 діють: сила тяжіння m_2g, сила реакції опори N_2, сила натягнення нитки T_2, сила тертя $F_{т2}$ і сила F. Направимо вісь x системи координат уздовж площини, а вісь y - перпендикулярно площини, як показано на малюнку.



Оскільки по умові задачі нитка нерастяжима і невагома, то $T_1 = T_2 = T$ і прискорення обох тіл однакові. Рівняння руху в проекціях на координатні осі можуть бути записані таким чином:

$$m_1 a = T - F_{т1},$$

$$m_2 a = F\cos\alpha - T - F_{т2},$$

$$0 = N_1 - m_1 g,$$

$$0 = N_2 - m_2 g + F\sin\alpha .$$

Оскільки коефіцієнт тертя f відомий, то отримаємо:

$$F_{т1} = fN_1 ,\ F_{т2} = fN_2 .$$

Підставляємо отримані вирази в рівняння руху, маємо:

$$m_1 a = T - fN_1,$$

$$m_2 a = F\cos\alpha - T - fN_2 ,$$

$$N_1 = m_1 g ,$$

$$N_2 = m_2 g - F\sin\alpha .$$

Вирішуючи цю систему рівнянь, отримаємо відповідь до задачі:

$$a = \frac{F(f\sin\alpha + \cos\alpha)}{m_1 + m_2} - fg, \qquad T = \frac{m_1 F(f\sin\alpha + \cos\alpha)}{m_1 + m_2}.$$

Задача 2. Потяг масою m = 500 т, рухаючись рівноуповільнено, протягом часу t = 1 хв. зменшує свою швидкість від v_1 = 40 км/година до v_2 = 28 км/година. Знайти силу гальмування F.

Рішення

Оскільки прискорення тіла постійно, воно може бути знайдено із співвідношення $a = \frac{v_2 - v_1}{t}$. $F = ma = \frac{m(v_2 - v_1)}{t}$.

Підставляючи чисельні значення, отримаємо F = 27,8 кН.

Відповідь: F = 27,8 кН.

Задача 3. Горизонтально розташований диск обертається навкруги вертикальної осі, роблячи n = 25 оборотів за хвилину. На якій відстані R від осі обертання диска може утриматися тіло, що знаходиться на ньому, якщо коефіцієнт тертя f = 0,2?

Рішення

Єдиною силою, діючою на тіло в горизонтальному напрямі і перешкоджаючій його зісковзуванню з диска, є сила тертя F. У вертикальному напрямі на тіло діють дві рівні по величині але протилежно направлені сили - сила тяжіння mg і сила реакції опори N. Оскільки диск рівномірно обертається, повне прискорення тіла рівно нормальному прискоренню $a_n = \omega^2 R$, де ω - кутова швидкість обертання тіла. Рівняння руху тіла у момент початку зісковзування може бути записано таким чином: $m\omega^2 R = F$. Ураховуючи, що $F = fmg$, і $\omega = 2\pi n$, одержуємо

$$R = \frac{fg}{4\pi^2 n^2}.$$

Підставляючи чисельні значення, знаходимо R = 0,29 м.

Відповідь: R = 0,29 м.

Задача 4. На невагомій і нерозтяжній нитці, перекинутій через нерухомий блок, підвішені два вантажі масами m_1 = 3 кг і m_2 = 5 кг як показано на малюнку. Визначити прискорення вантажів і сили натягнення ниток. Масою блоку і силою тертя в блоці нехтувати.

Рішення

Оскільки нитка нерозтяжна і невагома, а масою блоку і силою тертя можна нехтувати, то обидва вантажі будуть рухатися з рівними по модулю прискореннями, і модулі сил натягнення нитки T_1 і T_2 по обидві сторони блоку будуть рівні між собою. Виберемо позитивний напрям осі х зверху вниз (див. малюнок). На кожний з вантажів діють дві сили: сила тяжіння і сила натягнення нитки. Рівняння руху вантажів можуть бути записані таким чином:

$$m_2 a = m_2 g - T_1,\ - m_1 a = m_1 g - T_2,\ T_1 = T_2 .$$

Вирішуючи отриману систему рівнянь, знаходимо:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2} \qquad T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Підставляючи чисельні значення, отримаємо a = 2,45 м/с^2, Т = 36,75 Н.

Відповідь: a = 2,45 м/с^2, T =36,75 Н.

Задача 5. Снаряд розривається у верхній точці траєкторії на два рівні уламки. Перший уламок впав на відстані s від місця розриву (по горизонталі), другий уламок впав вертикально вниз. Визначити швидкість снаряда у момент розриву, якщо відомо, що вибух відбувся на висоті H, а уламок, що впав по вертикалі, падав час T .

Рішення

Рух осколків відбувається під дією тільки сили тяжіння. Направимо вісь x по горизонталі, а вісь y по вертикалі (див. малюнок). За початок відліку часу приймемо момент вибуху. Координати осколків в початковий момент часу будуть рівні:

$$x_{10}=0,\ x_{20}=0,\ y_{10}= H,\ y_{20}= H.$$

Проекція швидкості другого уламка на вісь х рівна $v_{20x}= 0$. Закон руху осколків може бути записаний таким чином:

$$x_1 = v_{10x} t,\ y_1 = H + v_{10y} t - gt^2/2,$$

$$x_2 = 0,\ y_2 = H - v_{20y} t - gt^2/2.$$

У момент падіння на землю $y_1 = y_2 = 0,\ x_1 = s$, тобто можна записати:

$$s = v_{10x} T_1, \tag{1}$$

$$0 = H + v_{10y} T_1 - gT^2/2 \tag{2}$$

$$0 = H - v_{20y} T - gT^2/2 \qquad (3)$$

Тут час польоту першого уламка позначений T_1.

У верхній точці траєкторії швидкість снаряда направлена по горизонталі. Отже, на підставі закону збереження імпульсу, вертикальні складові швидкостей осколків відразу після вибуху рівні по величині і протилежні по напряму, тобто:

$$v_{10y} = -v_{20y}. \qquad (4)$$

Для горизонтального направлення із закону збереження імпульсу слід: $mv = (m/2)v_{10x}$, де m - маса снаряда до вибуху, v - швидкість снаряда. Скорочуючи на m, одержуємо $v=v10x/2$. Використовуючи вираз (1), одержуємо: $v = \frac{s}{2T_1}$ (5)

З рівняння (3) знаходимо, що

$$v_{20y} = \frac{H}{T} - \frac{gT}{2}.$$

Підставляючи отриманий вираз в (2), одержуємо квадратне рівняння для визначення T1 - часу польоту першого уламка:

$$gTT_1^2 - (2H-gT^2)T_1 - 2HT = 0.$$

Вирішуючи це рівняння і відкидаючи негативний корінь, одержуємо:

$$T_1 = \frac{2H}{gT}.$$

Підставивши отримане значення для T_1 в (5), знаходимо шукану швидкість снаряда.

Задачі для самостійного вирішення

Задача 6. Два бруски масами m_1= 1 кг і m_2 = 4 кг, сполучені шнуром, лежать на столі. З яким прискоренням будуть рухатися бруски, якщо до одного з них прикласти силу F = 10 Н, направлену горизонтально? Яка буде сила натягнення T шнура, що сполучає бруски, якщо силу F прикласти до першого бруска? До другого? Тертям нехтувати. (Відповідь: a =2 м/с^2, T_1=8 Н, T_2=2 Н.)

Задача 7. Похила площина, що створює кут α = 25° з площиною горизонту, має довжину L = 2 м. Тіло, рухаючись рівноприскорено, зісковзнуло з цієї площини за час t = 2 с. Визначити коефіцієнт тертя f тіла об площину. (Відповідь: f = 0,35.)

Задача 8. На верхньому краю похилої площини укріплений блок, через який перекинута нитка. До одного кінцю нитки прив'язаний вантаж масою m_1= 2 кг, лежачий на похилій площині. На іншому кінці висить вантаж масою m_2 = 1 кг. Похила площина утворює з горизонтом кут α = 20°; коефіцієнт тертя між вантажем і похилою площиною f = 0,1.Считая нитка і блок невагомими, знайти прискорення, з яким рухаються вантажі, і силу натягнення нитки T. (Відповідь: a = 0,42 м/с^2, T = 9,36 Н.)

Задача 9. На горизонтальній дошці лежить вантаж. Коефіцієнт тертя між дошкою і вантажем f = 0,2. Яке прискорення в горизонтальному напрямі слід повідомити дошці, щоб вантаж міг з неї зісковзнути? (Відповідь: a > 0,2g.).

Задача 10. Невелике тіло ковзає з вершини сфери вниз. На якій відстані h від вершини тіло відірветься від поверхні сфери і полетить вниз? Тертя нікчемо мало. Радіус сфери R =1 м. (Відповідь: h =0,33 м.).

Задача 11. З якою максимальною швидкістю може їхати по горизонтальній площині мотоцикліст, описуючи дугу радіусом R = 90 м, якщо коефіцієнт тертя гуми об грунт f = 0,4? На який кут α від вертикального напряму він повинен при цьому відхилитися. (Відповідь: v =19 м/с α = 21,8°).

Задача 12. Куля масою m_1 = 10 кг стикається з кулею масою m_2 = 4кг.Скорость першої кулі v_1 = 4 м/с, другої - v_2 = 12 м/с. Знайти загальну швидкість u куль після удару в двох випадках: 1) коли друга куля наганяє перший, що рухається в тому ж напрямі; 2) коли кулі рухаються назустріч один одному. Удар вважати прямим, центральним, непружним. (Відповідь: u_1 = 6,28 м/с, u_2 = -0,57 м/с.)

Задача 13. В човні масою M =240 кг стоїть людина масою m = 60 кг. Човен пливе із швидкістю v = 2 м/с. Людина стрибає з човна в горизонтальному напрямі із швидкістю u = 4 м/с (щодо човна). Знайти швидкість човна після стрибка людини: 1) вперед по руху човна; 2) убік, протилежну руху човна. (Відповідь: v_1 = 1 м/с, v_2 = 3 м/с).

Задача 14. На залізничній платформі встановлено знаряддя. Маса платформи із знаряддям M = 15 т. Знаряддя стріляє вгору під кутом α

$= 60^0$ до горизонту у напрямі шляху. З якою швидкістю u покотиться платформа унаслідок віддачі, якщо маса снаряда m = 20 кг і він вилітає із швидкістю v_2 = 600 м/с? (Відповідь: u = 0,4 м/с).

Задача 15. З гармати масою M =1.5 т, що вільно зісковзує по похилій площині і пройшла вже шлях L = 16 м, робиться постріл в горизонтальному напрямі. Снаряд вилітає із швидкістю v = 600 м/с, при цьому гармата після пострілу зупиняється. Кут нахилу площини до горизонту $\alpha = 30°$. Знайти масу снаряда m. (Відповідь: m =36 кг).

Тема 3. **Закон збереження повної механічної енергії. Робота сил.**

Приклади рішення задач.

Задача 1. Куля масою m = 20 г, що летить з горизонтальною швидкістю v = 500 м/с, потрапляє в мішок з піском масою M = 5 кг, що висить на довгому шнурі, і застряє в ньому. Знайти висоту H, на яку підніметься мішок, і частку з кінетичної енергії, яка буде витрачена на пробиття піску.

Рішення

В результаті попадання кулі, мішок придбаває початкову швидкість u і підіймається на висоту H. Для знаходження швидкості скористаємося законом збереження імпульсу системи куля-мішок. Протягом короткочасної взаємодії двох цих тіл зовнішні сили - сила тяжіння і сила натягнення шнура вертикальна, тому проекція імпульсу на горизонтальну вісь постійна. Отже, виконується закон збереження імпульсу:

$$mv = (m+M)u. \qquad (1)$$

Розглянемо рух мішка в полі тяжіння Землі. Сила натягнення шнура роботи не здійснює, оскільки під час руху вона перпендикулярна переміщенню. Отже, до системи ”мішок з кулею - Земля“ можна застосувати закон збереження повної механічної енергії:

$$[(m+M)u^2]\,/2 = (m+M)gH. \qquad (2)$$

Енергія, що затрачує на пробиття піску, тобто на здійснення роботи проти сил непружної деформації, рівна:

$$A = T_1 - T_2 = mv^2/2 - (m+M)u^2/2. \qquad)$$

Частка кінетичної енергії, витрачена на цю роботу:

$$\eta = A/T_1. \tag{4}$$

З рівнянь (1-4) маємо:

$$H = u^2/2g = 0{,}2 \text{ м}, \ \eta = [M/(M+m)]\ 100\ \% = 96{,}5\ \% . \tag{5}$$

Відповідь: $H = 0{,}2$ м, $\eta = 96{,}5$ %.

Задача 2. Бойок (ударна частина) молота палі масою $m = 500$ кг падає на палю масою $M = 100$ кг із швидкістю $v_1 = 4$ м/с. Визначити: 1) кінетичну енергію T_1 бойку у момент удару; 2) енергію T_2, що затрачує на поглиблення палі в грунт; 3) кінетичну енергію T, що перейшла у внутрішню енергію системи; 4) ККД удару бойку об палю. Удар бойку об палю розглядати як непружний.

Рішення

Кінетичну енергію бойку у момент удару об палю знаходимо по формулі:

$$T_1 = mv_1^2/2 = 4 \text{ кДж}. \tag{1}$$

Щоб визначити енергію, що затрачується на поглиблення палі, заздалегідь знайдемо швидкість системи бойок-паля безпосередньо після удару. Для цього застосуємо закон збереження імпульсу, який у разі непружного удару виражається формулою:

$$mv_1 + Mv_2 = (M+m)u \tag{2}$$

де v_2 - швидкість палі перед ударом, u - швидкість бойку і палі безпосередньо після удару. Паля перед ударом знаходилася в стані спокою, тому $v_2 = 0$. Оскільки удар непружний, то бойок і паля після удару рухаються як одне ціле, тобто з однаковою швидкістю u. В результаті опору грунту швидкість бойку і палі після удару швидко гаситься, а кінетична енергія, якою володіє система бойок-паля, затрачується на поглиблення палі в грунт. Цю енергію знаходимо по формулі:

$$T_2 = [(m+M)u^2]/2. \tag{3}$$

Підставивши (1) і (2) в (3), одержуємо:

$$T_2 = [m/(m+M)]T_1 = 3{,}33 \text{ кДж}.$$

Бойок до удару володів енергією T_1; T_2 - енергія, що затрачується на поглиблення палі в грунт. Отже, у внутрішню енергію, пов'язану з непружною деформацією палі, перетворилася енергія:

$$T = T_1 - T_2 = 0{,}67 \text{ кДж}.$$

Молот палі служить для забивання палі в грунт; отже, енергію T_2 слід вважати корисною. ККД удару бойку об палю виразиться як відношення енергії T_2, що затрачується на поглиблення палі в грунт, до всієї енергії T_1, що затрачується:

$$\eta = T_2 / T_1. \tag{4}$$

Підставивши (3) в (4), маємо $\eta = m/(m+M) = 83{,}3\ \%$.

Відповідь: $T_1 = 4$ кДж, $T_2 = 3{,}33$ кДж, $T = 0{,}67$ кДж, $\eta = 83{,}3\ \%$.

Задача 3. Кулька маси m, підвішена на нитці, довжина якої r. В положенні рівноваги кульці надали в горизонтальному напрямі таку швидкість v_0, при якій кулька відхилилась на кут, більший 90^0. Запасеної кулькою енергії недостатньо для здійснення повного обороту у вертикальній площині. На яку максимальну висоту підніметься кулька?

Рішення

Поки кулька не зійшла з кругової траєкторії, на неї діє сила тяжіння mg і сила натягнення нитки T (див. малюнок т. В). Рівняння руху кульки в цьому випадку буде мати вигляд:

$$\frac{mv^2}{r} = T + mg\sin\alpha .$$

Якщо в точці В кулька зійшла з кругової траєкторії, то сила натягнення нитки, починаючи з цього моменту, стає рівною нулю і рівняння приймає вигляд:

$$\frac{mv^2}{r} = mg\sin\alpha . \tag{1}$$

Із закону збереження енергії випливає:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgH .$$

З геометричних міркувань можна записати

$$H = r + r\,sin\alpha . \tag{3}$$

Вирішуючи систему рівнянь (1), (2) і (3), отримаємо відповідь до задачі:

$$H = \frac{v_0^2 + gr}{3g} \ .$$

Задача 4. На яку величину x стисне пружину гиря, кинута вниз з початковою швидкістю v з висоти H, якщо та ж гиря, встановлена на верхній край пружини, стискає її на величину L?

Рішення

Оскільки тертя відсутнє, повна механічна енергія системи повинна зберігатися. Візьмемо нульовий рівень відліку потенційної енергії на рівні верхнього краю стислої пружини після попадання в неї гирі, що летить. В цьому випадку в початковий момент часу енергія системи E_1 може бути обчислена таким чином:

$$E_1 = \frac{mV^2}{2} + mg(H + x),$$

де m - маса гирі. В кінцевому стані швидкості гирі і пружини будуть рівні нулю, і вся енергія перейде в енергію пружної деформації пружини

$$E_2 = \frac{kx^2}{2}.$$

Для визначення коефіцієнта пружності пружини k скористаємося тією умовою, що встановлена на пружину гиря стискає її на величину L. Це означає, що виконується умова рівноваги $kL = mg$, звідки відразу слідує $k = mg/L$.

З умови збереження енергії $E_1 = E_2$. Підставляючи в це співвідношення приведені вище вирази, одержуємо рівняння щодо невідомої величини x:

$$\frac{mV^2}{2} + mg(x + H) = \frac{mgx^2}{2L}.$$

Вирішуючи це рівняння, одержуємо відповідь до задачі:

$$x = L + \sqrt{L^2 + 2LH + \frac{V^2 L}{g}}.$$

Задача 5. Тіло масою m падає з висоти H і заглиблюється в грунт на глибину L. Яка сила опору грунту F, якщо тіло почало падати з початковою швидкістю v_0?

Рішення

Будемо вважати, що потенційна енергія тіла в кінцевому положенні (у момент зупинки) дорівнює нулю. При русі в грунті на тіло окрім сили тяжіння діє сила опору. Робота сили опору дорівнює $A = FLcos\alpha = = -FL$, оскільки кут α між напрямом дії сили і переміщенням рівний 180^0. Початкова енергія тіла E_1 дорівнює сумі його кінетичної і потенційної енергій:

$$E_1 = \frac{mV_0^2}{2} + mg(H+L).$$

Різниця між кінцевим і початковим значеннями механічної енергії буде рівна роботі сили опору грунту, тобто:

$$\frac{mV_0^2}{2} + mg(H+L) = FL.$$

Звідси одержуємо відповідь до задачі:

$$F = \frac{m}{L}\left(\frac{V_0^2}{2} + g(H+L)\right).$$

Задачі для самостійного вирішення.

Задача 6. Куля, що рухається із швидкістю v1=10 м/с, пружно стикається з кулею, що покоїться і має в $n = 5$ раз велику масу, і відлітає в напрямі, перпендикулярному напряму його первинного руху. Визначити швидкості u_1 і u_2 куль після удару. (Відповідь: u_1 = 8,16 м/с, u_2 = 2,58 м/с.)

Задача 7. З пружинного пістолета вистрілили кулею, маса якої m = 5 г. Жорсткість пружини k = 1,25 кН/м. Пружина була стиснута на Δx = 8 см. Визначити швидкість кулі v при вильоті її з пістолета. (Відповідь: v =40 м/с).

Задача 8. Куля масою m = 1,8 кг стикається з кулею більшої маси M, що покоїться. В результаті прямого пружного удару куля втратила частку η = 0,36 своїй кінетичній енергії T_1. Визначити масу більшої кулі. (Відповідь: M = 16,2 кг.)

Задача 9. Ковзаняр, стоячи на льоду, кинув вперед гирю масою m = 5кг і унаслідок віддачі покотився назад із швидкістю v = 1 м/с. Маса ковзаняра M = 60 кг. Визначити роботу A, виконану ковзанярем при киданні гирі. (Відповідь: A = 390 Дж.)

Задача 10. Тіло масою m = 0,1 кг падає з висоти H = 0,1 м на горизонтальну пластинку масою M = 0,2 кг, лежачу на верхньому кінці вертикально розташованої пружини, коефіцієнт жорсткості якої k = 20 Н/м. В результаті абсолютно непружного зіткнення пластинка опустилася на відстань h від свого первинного положення. Стиснення пружини відбувається в області пружної деформації. Визначити h. (Відповідь: h=0,13 м.)

Задача 11. Обчислити роботу, виконану на шляху S = 12 м рівномірно зростаючою силою, якщо на початку шляху сила була рівна F_1 = 10 Н, а в кінці шляху - F_2 = 46 Н. (Відповідь: A = 336 Дж.)

Задача 12. Сталева кулька масою m = 20 г, падаючи з висоти h = 1 м на сталеву плиту, відскакує від неї на висоту H = 81 см. Знайти імпульс p, отриманий плитою за час удару, і кількість теплоти Q, що виділилася при ударі. (Відповідь: p = 0,17 кгм/с, Q = 37,2 мДж.)

Задача 13. Знайти роботу A, яку треба здійснити, щоб збільшити швидкість руху тіла масою m = 1 кг від v_1 = 2 м/с до v_2 = 6 м/с на шляху завдовжки S = 10 м. На всьому шляху діє сила тертя F = 2 Н. (Відповідь: A = 36 Дж.)

Задача 14. З гори заввишки h = 2 м і завдовжки підстави b = 5 м з'їжджають санки, які потім зупиняються, пройшовши по горизонталі відстань L = 35 м від підстави гори. Знайти коефіцієнт тертя f. (Відповідь: f = 0,05.)

Задача 15. Локомотив масою M = 8,6 т починає рухатися із станції так, що його швидкість міняється згідно із законом, $v = b\sqrt{s}$ де b = 0,22 м/с, s - пройдений шлях, узятий в метрах. Знайти сумарну роботу A всіх сил, діючих на локомотив за перші t = 5 хвилин після початку руху. (Відповідь: A = 226 кДж).

Тема 4. **Динаміка твердого тіла. Основне рівняння динаміки обертального руху.**

Приклади рішення задач.

Задача 1. Вал у вигляді суцільного циліндра масою m_1 = 10 кг насаджений на горизонтальну вісь. На циліндр намотаний шнур, до вільного кінця якого підвішена гиря масою m_2 = 2 кг. З яким прискоренням a буде опускатися гиря, якщо її надати самій собі?

Рішення

Лінійне прискорення гирі рівно тангенціальному прискоренню точок валу, що лежать на його циліндровій поверхні, і пов'язано з кутовим прискоренням валу співвідношенням:

$$a = \varepsilon r \qquad (1)$$

де r -радиус валу.

Кутове прискорення валу виражається основним рівнянням динаміки тіла, що обертається:

$$\varepsilon = M/J \qquad (2)$$

де M - обертаючий момент, діючий на вал; J -момент інерції валу щодо осі обертання. Розглядаємо вал як однорідний циліндр. Тоді його момент інерції щодо геометричної осі рівний:

$$J = m_1 r^2 /2 \,. \qquad (3)$$

Обертаючий момент M, діючий на вал, рівний добутку сили натягнення T шнура на радіус валу:

$$M = Tr \,. \qquad (4)$$

Силу натягнення шнура знайдемо з наступних міркувань. На гирю діють дві сили: сила тяжіння m_2g, направлена вниз, і сила натягнення T шнура, направлена вгору. Рівнодіюча цих сил викликає рівноприскорений рух гирі. По другому закону Ньютона:

$$m_2g - T = m_2a. \qquad (5)$$

Підставивши (3-5) в (2), одержуємо кутове прискорення е валу:

$$\varepsilon = 2m_2(g-a)/m_1r^2 \,. \qquad (6)$$

Для визначення лінійного прискорення гирі підставимо останній вираз у формулу (1) і отримаємо: $a = 2m2g/(m_1+2m_2) = 2{,}80$ м /с^2 .

Відповідь: $a = 2{,}80$ м/с^2.

Задача 2. До обода однорідного диска радіусом $R = 0{,}5$ м і масою $m = 50$ кг прикладена дотична сила $F = 200$ Н. При обертанні на диск діє момент сил тертя $M_{тр}$= 25 Н·м. Знайти кутове прискорення диска ε і момент часу t після початку руху, коли диск буде мати частоту обертання $n = 10$ об/с.

Рішення

Згідно основному рівнянню динаміки обертального руху:

$$J\varepsilon = FR - M_{тр} \qquad (1)$$

де $J = mR^2/2$ - момент інерції диска. Результуючий момент сил, під дією якого обертається диск рівний: $(FR\text{-}M_{тр})$, оскільки момент сили F і момент сили тертя направлений протилежно.

З (1) знаходимо кутове прискорення:

$$\varepsilon = 2(FR\text{-}M_{тр})/(mR^2) = 12 \text{ рад/с}^2 \,. \qquad (2)$$

Оскільки кутове прискорення постійно, то шуканий час визначимо з рівняння:

$$t = \omega/\varepsilon = 2\pi n/\varepsilon = 5{,}23 \text{ с} \qquad (3)$$

де $\omega = 2\pi n$ - кутова швидкість .

Відповідь: $\varepsilon = 12$ рад/с^2, $t = 5{,}23$ с.

Задача 3. Знайти момент інерції системи з трьох вантажів масою m = 1кг кожний, розміщених у вершинах невагомого рівностороннього трикутника із стороною a = 1 м, відносно осі, що перпендикуляра площини трикутника і проходе через третю частину одній з його сторін.

Рішення

Момент інерції системи буде рівний сумі моментів інерції окремих її частин. Розглянемо трикутник ABC (див. малюнок). З малюнка видно, що відстань двох вантажів від осі обертання буде рівна:

$$OC = r_1 = a/3,\ OB = r_2 = 2a/3.$$

Для визначення відстані між віссю і третім вантажем розглянемо трикутник AOD. В цьому трикутнику $OD = a/2 - a/3 = a/6$, $AD = a$ і відстань від третього вантажу до осі :

$$OA = r_3 = (a^2/36 + 3a^2/4)^{1/2} = a\sqrt{7}/3.$$

Момент інерції системи вантажів рівний

$$J = m\,r_1^2 + m\,r_2^2 + m\,r_3^2 = 4/3\ ma^2.$$

Підставляючи чисельні значення, отримаємо відповідь: $J = 1{,}3$ кг·м^2 .

Задача 4. Знайти момент інерції плоского рівнобедреного прямокутного трикутника із стороною a = 0,2 м і масою m = 1 кг відносно осі, співпадаючої з однією з його сторін.

Рішення

Направимо вісь x уздовж одного з катетів, за початок відліку приймемо вершину трикутника (див. малюнок). Розіб'ємо площу трикутника на нескінченно малі шари шириною dx, перпендикулярні осі обертання. Розглянемо один з таких шарів, розташований на відстані x від початку координат. Оскільки момент інерції тіла відносно якої-небудь осі рівний сумі моментів інерції його частин відносно цієї осі, то момент інерції трикутника буде рівний сумі моментів інерції виділених шарів. Кожний шар є стрижнем з довжиною, рівній x (оскільки кут при вершині трикутника рівний 45^0, довжина кожного шару рівна відстані від шару до початку координат). Момент інерції стрижня завдовжки x відносно осі, що перпендикулярна до стрижня і проходе через його кінець, дорівнює

$$dJ = 1/3 \cdot x^2 dm,$$

де dm - маса шару завдовжки x і шириною dx. Щоб знайти величину dm, потрібно площа шару помножити на масу одиниці площі. Оскільки площа трикутника рівна $S = a^2/2$, а площа шару рівна xdx, то маса шару виражається як:

$$dm = \frac{m}{S} x dx = \frac{2m}{a^2} x dx.$$

Момент інерції шару буде рівний

$$dJ = \frac{2m}{3a^2} x^3 dx.$$

Тоді для моменту інерції трикутника одержуємо вираз:

$$J = \int dJ = \frac{2m}{3a^2} \int_0^a x^3 dx = \frac{ma^2}{6}.$$

Підставляючи чисельні значення, знаходимо $J = 0{,}0067$ кг·м^2.

Відповідь: $J = 0{,}0067$ кг·м^2.

Задача 5. Знайти момент інерції J плоского кільця масою $m = 1$ кг щодо осі, перпендикулярної площини кільця і проходячій через точку, що лежить на зовнішньому краї кільця. Внутрішній радіус кільця рівний $r = 10$ см, зовнішній – $R = 20$ см.

Рішення

Згідно теоремі Штейнера, момент інерції кільця J відносно осі, перпендикулярної його площини і проходячій через точку на краю кільця, може бути обчислений таким чином:

$$J = J_0 + ma^2,$$

де J_0 - момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас (центр кільця), - відстань між віссю і центром мас. В нашому випадку $a = R$. Для знаходження моменту інерції J_0 візьмемо до уваги, що момент інерції будь-якого тіла рівний сумі моментів інерції його частин. Відповідно, момент інерції J_1 суцільного диска радіусом R відносно його осі рівний сумі моменту інерції J_2 суцільного диска радіусу r відносно цієї осі, і моменту інерції кільця J_0 . Моменти інерції дисків рівні, відповідно: $J_1 = M_1R^2/2$ і $J_2 = M_2 r^2/2$, де M_1 і M_2 - маси дисків. Тоді можна записати:

$$\frac{M_1R^2}{2} = \frac{M_2r^2}{2} + J_0.$$

З останнього виразу одержуємо:

$$J_0 = \frac{M_1R^2 - M_2r^2}{2}.$$

Якщо густина матеріалу кільця ρ, а його товщина d, то $M_1 = \rho\pi d R^2$, $M_2 = \rho\pi d r^2$ і маса кільця $m = \rho\pi d(R^2 - r^2)$, звідки

$$\rho = \frac{m}{\pi d(R^2 - r^2)}.$$

Підставляючи знайдені значення ρ, M_1 і M_2 у вираз для J_0, одержуємо:

$$J_0 = m(R^2 + r^2)/2,$$

звідки випливає:

$$J = J_0 + mR^2 = \frac{m(3R^2 + r^2)}{2}.$$

Підставляючи чисельні значення, остаточно знаходимо J = 0,065 кг·м^2.

Відповідь: J = 0,065 кг м^2.

Задачі для самостійного вирішення

Задача 6. Однорідний стрижень завдовжки L = 1 м і масою m = 0,5 кг обертається у вертикальній площині навкруги горизонтальної осі, що проходить через середину стрижня. З яким кутовим прискоренням ε обертається стрижень, якщо на нього діє момент сил M = 0,098 Н·м?

(Відповідь: ε = 2.35 рад/с^2.)

Задача 7. Колесо, момент інерції якого J = 245 кг·м^2, обертається з частотою n =20 об/с. Через час t = 1 хв. після того, як на колесо перестав діяти момент сил M, воно зупинилося. Знайти момент сил тертя M_1 і число оборотів N, яке зробило колесо до повної зупинки після припинення дії сил. Колесо вважати однорідним диском. (Відповідь: M_1 = 513 Н·м, N =600об.)

Задача 8. Дві гирі з масами m_1 = 2 кг і m_2 = 1 кг сполучено ниткою, перекинутою через блок масою m = 1кг. Знайти прискорення, з яким рухаються гирі, і сили натягнення T_1 і T_2 ниток, до яких підвішені гирі. Блок вважати однорідним диском. Тертям нехтувати. (Відповідь: a = 2,8 м/с^2, T1 = 14 Н, T_2 = 12,6 Н.)

Задача 9. На барабан радіусом R = 20 см, момент інерції якого J = 0,1 кг·м^2, намотаний шнур, до кінця якого прив'язаний вантаж масою m = 0,5кг. До початку обертання барабана висота вантажу над підлогою була рівна h = 1 м. Через який час t вантаж опуститься до підлоги? Знайти кінетичну енергію E_k вантажу у момент удару об підлогу і силу натягнення нитки T. Тертям нехтувати. (Відповідь: t = 1,1 с, E_k = 0,81 Дж, T = 4,1 Н.)

Задача 10. Однорідний диск радіусом R = 0,2 м і масою m = 5 кг обертається навкруги осі, що проходить через його центр перпендикулярно до площини диска. Залежність кутової швидкості ω обертання диска від часу t дається рівнянням $\omega = A + Bt$, де B = 8 рад/с^2. Знайти дотичну силу F, прикладену до обода диска. Тертям нехтувати. (Відповідь: F = 4 Н.)

Задача 11. Дві маленькі кульки масою m = 10 г кожна скріпляють тонким невагомим стрижнем завдовжки L = 20 см. Визначити момент інерції J системи відносно осі, що перпендикулярна до стрижня і проходе через центр мас системи.

(Відповідь: J = 0,0002 кг·м^2.)

Задача 12. Визначити момент інерції J тонкого однорідного стрижня завдовжки L = 30 см і масою m = 100 г відносно осі, що перпендикулярна до стрижня і проходе через: 1) його кінець; 2) його середину; 3) точку, віддалену від кінця стрижня на 1/3 його довжини.

(Відповідь : J_1=0,003 кг·м^2, J_2= 0,00075 кг·м^2, J_3 = 0,001 кг·м^2.)

Задача 13. Знайти момент інерції J плоскої однорідної прямокутної пластини масою m=800 г відносно осі, співпадаючої з однією з її сторін, якщо довжина іншої сторони дорівнює L = 40 см. (Відповідь: J = 0,0427 кг·м^2).

Задача 14. Визначити момент інерції J тонкого однорідного диска масою m = 100 г і радіусом R = 30 см відносно осі, що перпендикулярна до диска і проходе через середину його радіусу. (Відповідь: J = 0,00675кг·м^2).

Задача 15. Визначити момент інерції J кільця масою m = 50 г і радіусом R = 10 см відносно осі, що лежить в площині кільця і дотичній до нього. (Відповідь: J = 0,00075кг·м^2).

Тема 5. **Закон збереження моменту імпульсу. Енергія обертального руху.**

Приклади рішення задач.

Задача 1. Платформа у вигляді диска радіусом R = 1,5 м і масою M = 180 кг обертається за інерцією біля вертикальної осі з частотою n = 10 об/хв. В центрі платформи стоїть людина масою m = 60 кг. Яку лінійну швидкість відносно підлоги приміщення буде мати людина, якщо він відійде від центру платформи на відстань, рівну половині радіусу платформи?

Рішення

Використовуючи закон збереження моменту імпульсу, можна записати:

$$(J_1+J_2)\omega_1 = (J_1+J\,)\omega_2\,, \tag{1}$$

де J_1 - момент інерції платформи; J_2 - момент інерції людини, що стоїть в центрі платформи; ω_1 - кутова швидкість платформи з людиною, що стоїть в центрі; J - момент інерції людини, що знаходиться від краю платформи на відстані R/2; ω_2 - кутова швидкість платформи з людиною, що знаходиться від краю платформи на відстані R/2. Лінійна швидкість людини, віддаленої від краю платформи на R/2, пов'язана з кутовою швидкістю співвідношенням :

$$v = \omega_2 R/2. \tag{2}$$

Визначивши ω_2 з рівняння (1) і підставивши отриманий вираз у формулу (2), будемо мати:

$$v = [(J_1+J_2)\omega_1 R]/(J_1+J). \tag{3}$$

Момент інерції платформи розраховуємо як для диска. Отже, $J_1=MR^2/2$. Момент інерції людини розраховуємо як для матеріальної точки. Тому: J_2= 0, J = $mR^2/4$. Кутова швидкість платформи до переходу людини рівна $\omega_1 = 2\pi n$. Підставивши J_1, J_2, J і ω_1 в співвідношення (3), отримаємо:

$$v = 2\pi nMR/(2M+m) = 0{,}67 \text{ м/с}.$$

Відповідь; $v = 0{,}67$ м/с.

Задача 2. Стрижень завдовжки $L = 1{,}5$ м і масою $M = 10$ кг може обертатися навкруги нерухомої осі, що проходить через верхній кінець стрижня. В нижній край стрижня ударяє куля масою $m = 10$ г, що летить в горизонтальному напрямі із швидкістю $v = 500$ м/с, і застряє в стрижні. На який кут α відхилиться стрижень після удару?

Рішення

Удар кулі слід розглядати як непружний: після удару куля і відповідна точка стрижня будуть рухатися з однаковими швидкостями. Спочатку куля, ударившись об стрижень, за нікчемо малий проміжок часу приводить його в рух з кутовою швидкістю ω і вітдає йому кінетичну енергію :

$$T = J\omega^2/2, \tag{1}$$

де J - момент інерції стрижня щодо осі обертання. Потім стрижень повертається на шуканий кут ?, причому центр мас стрижня підіймається на висоту $h = (L/2)(1-\cos\phi)$. У відхиленому положенні стрижень буде володіти потенційною енергією:

$$П = Mg(L/2)(1 - \cos\phi) . \tag{2}$$

Потенційна енергія отримана за рахунок кінетичної енергії і рівна їй за законом збереження енергії. Прирівнявши праві частини рівності (1) і (2), і підставивши вираз для моменту інерції стрижня щодо осі, що проходить через край стрижня і перпендикулярній йому ($J=ML^2/3$), отримаємо:

$$\cos\phi = 1 - L\omega^2/(3g), \tag{3}$$

Застосувавши закон збереження моменту імпульсу, можемо написати:

$$mvL = (J + mL^2)\omega. \tag{4}$$

Підставивши щ з (4) в (3), отримаємо:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{3m^2v^2}{gL(M+3m)^2}.$$

Підставляючи числові значення, знаходимо $\cos\alpha = 0{,}95$, звідки $\alpha \approx 18°$.

(Відповідь: $\alpha \approx 18°$.)

Задача 3. Дві кулі різного діаметра починають котитися з однаковою швидкістю v = 100 см/с вгору по похилій площині під кутом $\alpha = 30^0$ до горизонту. Менша куля зроблена з алюмінію, інший із сталі. Який шлях пройде кожну з куль до зупинки?

Рішення

Хай маса одного з куль рівна m, а радіус його R. Енергія кулі, що рухається, рівна $W = mv^2/2+J\omega^2/2$, де $J = 2/5mR^2$-момент інерції кулі, ω - кутова швидкість обертання. Оскільки куля рухається без прослизання, то $\omega = v/R$. Висоту підйому кулі по похилій площині h знаходимо із закону збереження енергії:

$$mv^2/2 + J\omega^2/2 = mgh.$$

Підставляючи в цей вираз значення моменту інерції кулі і кутової швидкості, одержуємо $mv^2/2 + mv^2/5 = mgh$, звідки слідує $h = 7v^2/(10g)$. Шлях, пройдений кулею уздовж похилої площини до зупинки, зв'язаний у висотою підйому співвідношенням:

$$S = h/\sin\alpha = \frac{7V^2}{10g\sin\alpha}.$$

З отриманого виразу видно, що висота підйому і, відповідно, шлях, пройдений кулею до зупинки, не залежить від маси і діаметра кулі, а визначається лише значенням його швидкості. Таким чином, для куль, виготовлених з різних матеріалів, пройдений шлях буде однаковий. Підставляючи чисельні значення, отримаємо S = 14 см.

Відповідь: S = 14 см.

Задача 4. Свинцевий диск, що обертається з частотою n = 100 об/с, радіусом R = 10 см і завтовшки h =1 см опустили в судину з водою об'ємом V = 10 літрів. Знайти зміну температури води ΔT в судині унаслідок гальмування диска. Початкові значення температури диска і води однакові, густина свинцю $\rho_с$ = 11300 кг/м^3, густина води $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, питомі теплоємності свинцю і води рівні $C_с$ =130 Дж/(кг·К), $C_в$ = 4,2 кДж/(кг·К).

Рішення

Зміну температури води в судині знайдемо виходячи з рівняння теплового балансу:

$$W = m_с C_с \Delta T + m_в C_в \Delta T$$

де W - енергія диска, що обертається, $m_с$ і $m_в$ - маси свинцю і води.

З цього рівняння одержуємо:

$$\Delta T = W/(m_с C_с + m_в C_в).$$

Енергію W знаходимо із співвідношення $W=J\omega^2/2$, де J - момент інерції диска, ω - його кутова швидкість. Для диска $J = m_с R^2/2$. Кутова швидкість пов'язана з кількістю оборотів в одиницю часу як $\omega = 2\pi n$. Маса тіла рівна добутку його густини на об'єм:

$$m_с = \rho_с \pi R^2 h, \; m_в = \rho_в V.$$

Підставляючи знайдені значення, одержуємо розрахункову формулу:

$$\Delta T = \frac{\rho_с \pi^3 R^4 h n^2}{\rho_с \pi R^2 h C_с + \rho_в V C_в}.$$

Підставляючи сюди чисельні значення параметрів, знайдемо $\Delta T = 0{,}08$ K.

Відповідь: $\Delta T = 0{,}08$ K.

Задача 5. Два горизонтальні диски вільно обертаються навкруги вертикальної осі, що проходить через їх центри. Моменти інерції дисків щодо цієї осі рівні $J_1 = 0{,}25$ кг· м^2 і $J2 = 0{,}40$кг· м^2, а кутові швидкості $\omega_1 = 6$ рад/с і $\omega_2 = 3$ рад/с. Після падіння верхнього диска на нижній, обидва диски, завдяки тертю між ними, почали через деякий час обертатися з однаковою кутовою швидкістю. Знайти роботу сили тертя.

Рішення

Робота сил тертя буде рівна різниці кінетичної енергії двох дисків, що обертаються, до їх зіткнення і кінетичної енергії системи, що утворилася, після того, як обидва диски почали обертатися разом. Знайдемо енергію першого W_1 і другого W_2 дисків: $W_1 = J_1\omega_1^2/2$, $W = J_2\omega_2^2/2$. Момент інерції системи, що утворилася, рівний $J = J_1 + J_2$, а кутова швидкість обертання рівна ω. Тоді енергія системи буде рівна $W = J\omega^2/2$. Робота сил тертя знаходиться із співвідношення:

$$A = W_1 + W_2 - W \tag{1}$$

Для знаходження кутової швидкості обертання системи дисків скористаємося законом збереження моменту імпульсу (з умови задачі витікає, що система є замкнутою, і, отже, момент імпульсу не змінюється). Маємо: $J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = (J_1 + J_2)\omega$, звідки слід:

$$\omega = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}.$$

Підставляючи знайдені значення W, W_1, W_2 і щ в рівняння (1), отримаємо:

$$A = \frac{J_1 J_2(\omega_1 - \omega_2)^2}{2(J_1 + J_2)}.$$

Підставивши сюди чисельні значення, знайдемо роботу A = 0,69 Дж.
Відповідь: A = 0,69 Дж.

Задачі для самостійного вирішення

Задача 6. Людина масою m = 70 кг знаходиться на нерухомій платформі масою M = 30 кг. З якою кутовою швидкістю ω буде обертатися платформа, якщо людина почне рухатися по колу радіусу r = 0,7 м навкруги осі обертання. Швидкість руху людини щодо платформи рівна v =1,2 м/с. Радіус платформи R = 1,5 м. Вважати платформу круглим однорідним диском, а людини точковою масою. (Відповідь: ω = 0,75 рад/с.)

Задача 7. Хлопчик котить обруч по горизонтальній дорозі із швидкістю v = 2 м/с. На яку висоту H може вкотитися обруч на гору за рахунок своєї кінетичної енергії? (Відповідь: H = 0,4 м.)

Задача 8. Однорідний стрижень завдовжки L = 60 см підвішений на горизонтальній осі, що проходить через верхній кінець стрижня. Кулька, що летить перпендикулярно до осі стрижня, ударяє в його середину і пружно відскакує без втрати швидкості. Знайти швидкість v кульки, якщо стрижень відхилився на прямий кут. Маса стрижня в n =10 раз більше маси кульки: $M = 10m$. (Відповідь: v = 14 м/с.)

Задача 9. Дві маленькі кульки масами m_1 = 40 г і m_2 = 120 г сполучені стрижнем завдовжки l = 20 см, маса якого нікчемо мала. Система обертається біля осі, що перпендикулярна до стрижня і проходе через центр інерції системи. Визначити імпульс p і момент кількості руху L системи. Частота обертання системи рівна n = 3 об/с. (Відповідь: p=0, L = 0,0226 кг·м^2/с.)

Задача 10. Платформа у вигляді диска обертається за інерцією біля вертикальної осі з частотою n_1 = 15 об/хв. На краю платформи стоїть людина. Коли людина перейшла в центр платформи, частота зросла до n_2 = 25 об/хв. Маса людини m = 70 кг. Визначити масу M

платформи. Момент інерції людини розраховувати як для матеріальної точки. (Відповідь: M=210 кг).

Задача 11. З похилої площини скачуються без ковзання суцільний і порожнистий циліндри. Знайти відношення швидкостей їх центрів тяжіння: 1) після закінчення часу t від початку руху; 2) в результаті скачування з висоти H. [Відповідь: 1) v_1/v_2 = 4/3; 2) $v_1/v_2 = \sqrt{4/3}$].

Задача 12. Знайти лінійні прискорення a_1, a_2 і a_3 центрів кулі, диска і обруча, що скачується без ковзання з похилої площини. кут нахилу площини $\alpha = 30°$, початкова швидкість всіх тіл $v = 0$. Порівняти знайдені прискорення з прискоренням тіла, що зісковзує з похилої площини за відсутності тертя. (Відповідь: a_1 = 3,50 м/с^2, a_2 = 3,27 м/с^2, a_3 = 2,44 м/с^2, a = 4,9 м/с^2).

Задача 13. Вертикальний стовп заввишки h = 5 м підпилюється у підстави і падає на землю. Визначити лінійну швидкість v його верхнього кінця у момент удару об землю. (Відповідь: v = 12 м/с).

Задача 14. Куля масою m = 10 г летить із швидкістю v = 800 м/с, обертаючись біля подовжньої осі з частотою n = 3000 об/с. Приймаючи кулю за циліндр діаметром d = 8 мм, визначити повну кінетичну енергію T кулі. (Відповідь: T = 3,21 кДж.)

Задача 15. До обода диска масою m = 5 кг прикладена дотична сила F = 19,6 Н. Яку кінетичну енергію E буде мати диск через час t = 5 с після початку дії сили? (Відповідь: E=1,92 кДж.)

Тема 6. **Механічні коливання.**

Приклади рішення задач.

Задача 1. Однорідний стрижень завдовжки L = 0,5 м здійснює малі коливання у вертикальній площині біля горизонтальної осі, що проходить через його верхній кінець. Найти період коливань T стрижня.

Рішення.

Для періоду коливань T фізичного маятника маємо вираз:

$$T = 2\pi\sqrt{J/mga}$$

Відповідь: T=1,16 с.

Задача 2. Обчислити період малих коливань поплавця - вертикально розташованого циліндра, якому повідомили невеликий поштовх у вертикальному напрямі. Маса поплавця m=50 г, його радіус R =3,2 мм, густина рідини ρ = 1,00 г/см^3. В'язкість рідини вважати рівною нулю.

Рішення

На поплавець діють дві сили: сила тяжіння і сила, що виштовхує F_a. В положенні рівноваги ці сили рівні по величині і протилежні по напряму. Якщо тіло змістити вниз від положення рівноваги у вертикальному напрямі на величину x, то виникне, згідно закону Архімеда, сила, направлена убік, протилежний зсуву, і рівна $F_A = -\rho g V$, де V - об'їм рідини, витиснений тілом при його відхиленні від положення рівноваги, $m = \rho V$ - маса витисненої рідини.

Об'їм $V = \rho R2x$, і тому $F_A = -\rho g\pi R^2x$. Знак “-” указує, що напрям дії сили протилежно напряму зсуву x. Тоді рівняння руху поплавця можна записати таким чином:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\rho g\pi R^2 x$$

чи

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Порівнюючи отриманий вираз з диференціальним рівнянням незгасаючих коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

де ω - кругова частота, одержимо

$$\omega^2 = \frac{\rho g\pi R^2}{m}.$$

Так як $T = 2\pi/\omega$, то період коливань дорівнює:

$$T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{m}{\rho g\pi}}.$$

Подставляя численные значения, находим, что T = 2,5 с.

Відповідь: Т=2,5 с.

Задача 3. Амплітуда коливань математичного маятника завдовжки L = 1 м за час t=10хв. зменшилася в n = 2 рази. Визначити логарифмічний декремент коливань θ.

Рішення

Залежність амплітуди затухаючих коливань від часу має вигляд $A(t)=A_0\exp(-\delta t)$, де A_0 - амплітуда коливань у момент часу $t = 0$, δ - коефіцієнт загасання. Логарифмічний декремент коливань θ визначається таким чином:

$$\Theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T,$$

де $A(t)$ і $A(t+T)$ - амплітуди двох послідовних коливань, віддалених за часом один від одного на час T, рівне періоду коливань.

По умові задачі $A(t)=A_0/N$, звідки одержуємо: $\exp(-\delta t)=1/N$ і $\delta = (\ln N)/t$/ Період коливань математичного маятника рівний:

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}.$$

Підставляючи величини T і δ, знаходимо логарифмічний декремент коливань:

$$\Theta = \delta T = \frac{2\pi\ln N}{t}\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Використовуючи чисельні значення, одержуємо $\theta = 0{,}00232$.

Відповідь: $\theta = 0{,}00232$.

Задача 4. Визначити максимальні значення швидкості і прискорення точки, що здійснює гармонійні коливання з амплітудою $A = 3$ см і кутовою частотою $\omega = \pi/2$ с$^{-1}$.

Рішення

Рівняння гармонійних коливань має вигляд: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, де φ - початкова фаза коливань. Швидкість руху точки v і її прискорення a знайдемо, обчисливши похідні:

$v = dx/dt = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$ і $a = dv/dt = -A\omega^2\cos(\omega t+\phi)$. Максимальні значення функцій $\sin x$ і $\cos x$ рівні 1. Відповідно, максимальні значення модулів швидкості і прискорення точки будуть рівні: $v_{max}=A\omega$, $a_{max}=A\omega^2$. Підставляючи чисельні значення, отримаємо $v_{max} = 4{,}71$см/с, $a_{max} = 7{,}40$ см/с^2.

Відповідь: $v_{max} = 4{,}71$см/с, $a_{max} = 7{,}40$ см/с^2.

Задача 5. Складаються двоє коливання однакового напряму, описуваного рівняннями $x_1=A_1\cos\omega t$ и $x_2=A_2\cos(\omega t+\pi/3)$, де $A_1 = 4$ см, $A_2 =2$ см. Знайти амплітуду результуючого коливання.

Рішення

Для вирішення задачі зручніше всього використовувати метод векторних діаграм. Діаграма складання коливань показана на малюнку. Оскільки початкова фаза першого коливання рівна нулю, то вектор, відповідний цьому коливанню, направлений уздовж осі абсцис. Вектор, відповідний другому коливанню, складає з віссю x кут π/3, рівний початковій фазі другого коливання. Амплітуду результуючого коливання знаходимо з трикутника AA_1O по теоремі косинусів:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi-\pi/3).$$

Підставляючи чисельні значення, отримаємо A = 5,3 см.

Відповідь: A = 5,3 см.

Задачі для самостійного вирішення.

Задача 6. Точка здійснює гармонійні коливання. Найбільший зсув точки рівний 10 см, найбільша швидкість дорівнює 20 см/с. Знайти кутову частоту ω коливань і максимальне прискорення a_{max} точки. (Відповідь: ω = 2 с$^{-1}$, a_{max} = 40 см/с^2).

Задача 7. Визначити період коливань маятника годинника, що є закріпленим на невагомому стрижні диском радіусу 10 см, що коливається навкруги горизонтальної осі, що проходить через кінець стрижня і перпендикулярної площини диска. Відстань між центром диска і віссю 0,8 м. (Відповідь: T = 1,8 с).

Задача 8. Гиря, підвішена до пружини, коливається по вертикалі з амплітудою A=4см. Визначити повну енергію E коливань гирі, якщо жорсткість k пружини рівна 1 кН/м (Відповідь: E =0,8 Дж).

Задача 9. Диск радіусом R = 24 см коливається біля горизонтальної осі, що проходить через середину одного з радіусів перпендикулярно до площини диска. Визначити приведену довжину L і період коливань T такого маятника. (Відповідь: L = 36 см, T = 1,2 с).

Задача 10. Визначити період T затухаючих коливань, якщо період T_o власних коливань системи рівний 1с і логарифмічний декремент коливань θ = 0,628. (Відповідь: T = 1,005 с).

Задача 11. З яким прискоренням і в якому напрямі повинна рухатися кабіна ліфта, щоб математичний маятник, що знаходиться в ній, період коливань якого в нерухомій системі рівний T = 1 с, за час t = 2 хв. 30 с вчинив N = 100 коливань?

(Відповідь: a = 5,4 м/с^2, напрям руху - будь-який).

Задача 12. Однорідний стрижень маси m здійснює малі коливання навкруги горизонтальної осі, що проходить через точку O, як показано на малюнку.

Правий кінець стрижня підвішений на невагомій пружині жорсткості k. Знайти період коливань стрижня, якщо в положенні рівноваги він горизонтальний.

(Відповідь: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$.).

Задача 13. Матеріальна точка бере участь в двох взаємно перпендикулярних коливаннях, описуваних рівняннями $x = A\cos(\omega t)$ і $y = B\sin(\omega t)$, де A =2 м, B =1 м. Знайти траєкторію руху точки. (Відповідь: $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$, $x^2/4 + y^2/1 = 1$).

Задача 14. Два гармонійних коливання, що направлені вздовж одній прямій і мають однакові амплітуди і періоди, складаються в одне коливання тієї ж амплітуди. Знайти різницю фаз $\Delta\varphi$ коливань, що складаються. (Відповідь: $\Delta\varphi$ =2π/3 або $\Delta\varphi$ =4π/3 рад).

Задача 15. Складаються два гармонійного коливання одного напряму з однаковими періодами T_1 = T_2 = 1,5 с і однаковими амплітудами A_1 = A_2 = 2 см. Початкові фази коливань $\varphi_1 = \pi/2$ і $\varphi_2 = \pi/3$. Визначити амплітуду A і початкову фазу φ результуючого коливання. (Відповідь: A = 3,86 см φ = 0,417π рад).

РОЗДІЛ II. **молекулярна фізика і термодинаміка**

Тема 7. **Молекулярна будова речовини. Рівняння стану. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії**

Приклади рішення задач

Задача 1. Знайти мольну масу μ сірчаної кислоти H_2SO_4.

Рішення

Мольна маса речовини визначається по формулі $\mu = kM_r$. Тут позначено k = 10кг/моль, Mr - відносна молекулярна маса речовини, рівна,

$$M_r = \sum n_i A_{ri},$$

де n_i - число атомів i-го хімічного елемента, A_{ri} - відносна атомна маса хімічного елемента з таблиці Менделєєва. Для сірчаної кислоти маємо:

$$M_r = 2 + 32 + 64 = 98.$$

Остаточно одержуємо $\mu = 98 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.
Відповідь: $\mu = 98 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Задача 2. Визначити кількість речовини ν число N молекул азоту масою m = 0,2 кг.

Рішення

Мольна маса азоту $\mu = kM_r = k(2A_r) = 28\ 10^{-3}$ кг/моль. Кількість речовини азоту $\nu = m/\mu = 0{,}2/(28 \cdot 10^{-3}) = 7{,}14$ моль. В одному молі речовини міститься число молекул, рівне числу Авогадро. Тому, для шуканого числа молекул азоту одержуємо $N = \nu N_A = 4{,}3\ 10^{24}$ молекул.
Відповідь: $\nu = 7{,}14$ моль; $N = 4{,}3\ 10^{24}$ молекул.

Задача 3. В балонах місткістю V_1 = 20 л і V_2 = 44 л міститься газ. Тиск в першому балоні p_1=2,4 МПа, в другому p_2 = 1,6 МПа. Визначити загальний тиск p і парціальні тискі p'_1 і p'_2 після з'єднання балонів, якщо температура газу залишилася колишньою.

Рішення

Рівняння стану газів до їх змішування можна записати у вигляді:

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu} RT, \qquad p_2 V_2 = \frac{m_2}{\mu} RT.$$

Рівняння стану газів після змішування записуються у вигляді:

$$p'_1 (V_1 + V_2) = \frac{m_1}{\mu} RT, \ p'_2 (V_1 + V_2) = \frac{m_2}{\mu} RT.$$

Помічаючи, що праві частини відповідних рівнянь співпадають, одержуємо для парціальних тисків вирази:

$$p'_1 = \frac{p_1 V_1}{V_1 + V_2} = 0{,}75 \text{ Мпа} \quad \text{и} \qquad p'_2 = \frac{P_2 V_2}{V_1 + V_2} = 1{,}1 \text{ МПа}$$

Згідно закону Дальтона, повний тиск рівно сумі парціальних тисків $p = p'_1 + p'_2$ = 1,85 МПа.
Відповідь: p'_1 = 0,75 МПа, p'_2 = 1,1 МПа і p = 1,85 МПа.

Задача 4. Визначити кількість речовини ν і концентрацію n молекул газу, що міститься в колбі місткістю V = 240 см^3 при температурі T = 290 K і тиску p = 50 кПа.

Рішення

Концентрацію n молекул газу можна знайти з рівняння стану записаного у вигляді $p = nkT$, де k - постійна Больцмана:

$$n = \frac{p}{kT} = 1{,}25 \cdot 10^{25}\,\text{м}^{-3}.$$

З рівняння стану Клапейрона-Менделєєва $pV = \nu RT$ одержуємо для кількості речовини наступний вираз Відповідь: $\nu = 4{,}98 \cdot 10^{-3}$ моль.

Задача 5. Середня квадратична швидкість молекул деякого газу рівна vкв=450 м/с. Тиск газу рівно р=5 104 Па. Знайти густину газу за цих умов.

Рішення

Запишемо основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії у вигляді:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m v_{кв}^2}{2}$$

де m - маса молекули, $v_{\text{кв}}$ - середня квадратична швидкість, n – концентрація молекул. Густина речовини за визначенням є $\rho = nm$. Тоді вираз для тиску приймає вигляд

$$p = \frac{1}{3} \rho v_{кв}^2 .$$

Звідси для густини газу остаточно одержуємо

$$\rho = \frac{3p}{v_{кв}^2} = 0{,}74\,\text{кг/м}^3 .$$

Відповідь: ρ = 0,74 кг/м3.

Задача для самостійного вирішення.

Задача 6. В балоні місткістю V = 3 л знаходиться кисень масою m = 4г. Визначити кількість речовини ν і число N молекул газу. (Відповідь: ν = 0,125 моль, $N = 7{,}52 \cdot 10^{22}$ молекул.)

Задача 7. Кисень за нормальних умов заповнює судину місткістю V = 11,2 л. Визначити кількість речовини газу і його масу. (Відповідь: ν = 0,5 моль; m =16 г.)

Задача 8. Газ при температурі T = 309 K і тиску p = 0.7 МПа має густину ρ = 12 кг/м^3. Визначити відносну молекулярну масу M_r газу. (Відповідь: M_r = 44).

Задача 9. В балоні міститься газ при температурі t_1 = 1000 C. До якої температури t потрібно нагрівати газ, щоб його тиск збільшився в двічі? (Відповідь: t = 4730 C).

Задача 10. В балоні місткістю V = 25 л знаходиться водень при температурі T = 290 К. Після того, як частину водню витратили, тиск в балоні знизився на Δp = 0,4 МПа. Визначити масу m витраченого водню. (Відповідь: m = 8,33 г).

Задача 11. В судині місткістю V = 0,01 м^3 міститься суміш газів - азоту масою m_1 = 7 г і водню масою m_2 = 1 г при температурі T = 280 К. Визначити тиск суміші газів. (Відповідь: p=175 кПа).

Задача 12. В колбі місткістю V = 100 см^3 міститься деякий газ при температурі T=300К. На скільки знизиться тиск p газу в колбі, якщо унаслідок витоку з колби вийде N = 1020 молекул ? (Відповідь: Δp = 4,14 кПа).

Задача 13. Знайти масу повітря, що заповнює аудиторію заввишки 5 м і площею підлоги 200 м^2. Тиск повітря 750 мм рт. ст., температура в приміщення 170^0 C. Масу одного киломоля повітря прийняти рівнім 29 кг/кмоль. (Відповідь: m = 1200 кг).

Задача 14. Газ масою 12 г займає об'єм $4\cdot10^{-3}$ м^3 при температурі 70^0C. Після нагрівання газу при постійному тиску, його густина стала рівною $6\cdot10^{-4}$ г/см^3. До якої температури нагрівали газ? (Відповідь: t = 11270^0 C).

Задача 15. Знайти середню квадратичну швидкість молекул газу, густина якого при тиску 750 мм рт. ст. рівна $8{,}2\cdot10^{-5}$ г/см^3. Чому дорівнює маса одного киломоля цього газу, якщо значення густини дано для температури 170^0C? (Відповідь: $v_{кв}$ = 1900м/с, μ=2 кг/кмоль.)

Тема 8. Статистика ідеального газу. Теплоємність.

Приклади рішення задач

Задача 1. Визначити середню кінетичну енергію $w_п$ поступального руху і середнє значення $w_і$ повної кінетичної енергії молекули водяного пару при температурі T = 600 К. Знайти кінетичну енергію W поступального руху всіх молекул пару, що містить кількість речовини ν = 1 кмоль.

Рішення

Середня кінетична енергія поступального руху молекули знаходиться по формулі:

$$w_п = \frac{3}{2}kT,$$

де k - постійна Больцмана. Тоді $w_п$ = 1,24·10^{-20} Дж. Для середнього значення w_i повної енергії маємо $w_i = (i/2)kT$ = 2,48·10^{-20} Дж, де i = 6 - число ступенів свободи трьохатомної молекули водяного пару. В одному молі речовини міститься N_A молекул, отже в ν молей буде νN_A молекул. Тоді кінетична енергія W поступального руху всіх молекул пару знаходиться як:

$$W = w_п\nu\, N_A = (3/2)kT\nu N_A = (3/2)RT\nu = 7{,}48 \text{ МДж}.$$

Відповідь: $w_п$ = 1,24 10^{-20} Дж; w_i =2,48 10^{-20} Дж; W = 7,48 МДж.

Задача 2. В скільки разів середня квадратична швидкість порошинки, зваженої в повітрі, менше середньої квадратичної швидкості молекул повітря? Маса порошинки m =10^{-8} г. Повітря вважати однорідним газом, маса одного киломоля якого рівна μ = 29 кг/кмоль.

Рішення

Використовуємо відомі вирази для середньої квадратичної швидкості частинки

$$v_{кв} = \sqrt{3kT/m}$$

або

$$v_{кв} = \sqrt{3RT/\mu}.$$

Маса порошинки відома, тому її середня квадратична швидкість

$$v_1 = \sqrt{3kT/m}.$$

Для повітря задана мольна маса, тому середня квадратична швидкість молекул повітря

$$v_2 = \sqrt{3RT/\mu}.$$

З цих виразів знаходимо шукане відношення

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{N_A m}{\mu}} = 1{,}44 \cdot 10^7.$$

Відповідь: $v_2/v_1 = 1{,}44 \cdot 10^7$.

Задача 3. Чому рівні питомі теплоємності c_v і c_p деякого двоатомного газу, якщо густина цього газу за нормальних умов рівна $\rho = 1{,}43$ кг/м^3?

Рішення

Питомі теплоємності пов'язані з мольними теплоемкостями формулами

$$c_v = \frac{C_v}{\mu} \quad \text{и} \quad c_p = \frac{C_p}{\mu}.$$

Для мольних теплоемкостей справедливі вирази

$$C_v = \frac{i}{2}R \quad \text{и} \quad C_p = \frac{i+2}{2}R.$$

З рівняння Клапейрона-Менделєєва

$$pV = \frac{m}{\mu}RT$$

одержуємо вираз для тиску

$$p = \frac{\rho}{\mu}RT,$$

де $\rho = \frac{m}{V}$. За нормальних умов $p = p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па, $T = T_0 = 273$ К. Тоді, для мольної маси м маємо

$$\mu = \rho R \frac{T_0}{p_0}.$$

Остаточно, для теплоемкостей одержуємо вирази:

$$c_v = \frac{ip_0}{2T_0\rho} = 646{,}8 \text{ Дж/(кг·К)} \quad \text{и} \quad c_p = \frac{(i+2)p_0}{2T_0\rho} = 905{,}5 \text{ ДЖ/(кг К)}.$$

Відповідь: $c_v = 646{,}8$ Дж/(кг·К), $c_p = 905{,}5$ Дж/(кг·К).

Задача 4. При якому тиску p середня довжина вільного пробігу $l_{ср}$ молекул азоту рівна 1 м, якщо температура газу $T = 300$ К?

Рішення

Середня довжина вільного пробігу молекул газу

$$l_{cp} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

де d - ефективний діаметр молекул (для азоту d = 0,38 нм), n - концентрація молекул. Зв'язок між тиском газу, концентрацією і температурою визначається формулою $p = nkT$, де k - постійна Больцмана. З цих формул для шуканого тиску слід

$$p = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 l_{cp}}$$

$$p = 6,47 \text{ мПа.}$$

Відповідь: p = 6,47 мПа.

Задача 5. Знайти середнє число зіткнень в 1 секунду молекул деякого газу, якщо середня довжина вільного пробігу за цих умов рівна $5\cdot10^{-4}$ см, а середня квадратична швидкість його молекул рівна $v_{кв}$ = 500 м/с.

Рішення

Середнє число зіткнень, випробовуваних однією молекулою газу в одиницю часу дається виразом

$$z = \sqrt{2}\pi d^2 n v.$$

Середня довжина вільного пробігу знаходиться по формулі

$$l_{cp} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

З цих двох виразів слід. що

$$z = \frac{v}{l_{cp}}.$$

Для отримання остаточної відповіді треба виразити v через $v_{кв}$, де середня арифметична швидкість записується як

$$v = \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}}.$$

Звідси знаходимо

$$v = v_{кв}\sqrt{\frac{8}{3\pi}}.$$

Отже, одержуємо вираз для середнього числа зіткнень молекул газу в секунду

$$z = \frac{v_{кв}}{l_{cp}}\sqrt{\frac{8}{3\pi}} = 9,2\ 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Відповідь: z = 9,2 107 с$^{-1}$.

Задачі для самостійного вирішення

Задача 6. Знайти середню квадратичну, середню арифметичну і найбільш імовірну швидкості молекул водню. Обчислення виконати для трьох значень температури: 1) Т =20К; 2) T = 300К; 3) T = 5000К. [Відповідь: 1) 500 м/с, 462 м/с, 407 м/с; 2) 1,94 км/с, 1,79 км/с, 1,58 км/с; 3) 7,90 км/с, 7,30 км/с, 6,48 км/с].

Задача 7. Суміш гелію і аргону знаходиться при температурі T = 1200К. Визначити середню квадратичну швидкість і середню кінетичну енергію атомів гелію і аргону. (Відповідь: для гелію: $v_{кв}$ = 2,73 км/с і w =2,48 10^{-20} Дж; для аргону: $v_{кв}$ = 864 м/с і w=$2{,}48 \cdot 10^{-20}$ Дж.)

Задача 8. Визначити середнє значення повної кінетичної енергії однієї молекули гелію, кисню і водяного пару при температурі Т = 400К. (Відповідь: $w(He)$ = 8,28 10^{-21} Дж; $w(O)$=$13{,}8 \cdot 10^{-21}$ Дж і $w(H_2O)$=$16{,}6 \cdot 10^{-21}$ Дж.)

Задача 9. Колба місткістю V = 4 л містить деякий газ масою m = 0,6 г під тиском p = 200 кПа. Визначити середню квадратичну швидкість молекул газу. (Відповідь: $v_{кв}$ =2 км/с.)

Задача 10. Знайти середню довжину вільного пробігу молекул водню при тиску p =0,1 Па і температурі T =100К. (Відповідь: $l_{ср}$= 4 см)

Задача 11. Знайти число N всіх зіткнень, які відбуваються протягом t = 1 с між всіма молекулами водню, що займає за нормальних умов об'їм V = 1 мм^3. (Відповідь: N = $2{,}08 \cdot 10^{26}$).

Задача 12. Обчислити питомі теплоємності c_v і c_p газів: 1) гелію, 2) водню, 3) вуглекислого газу. (Відповідь: 1) 3,12 кДж/(кг К), 5,19 кДж/(кг К), 2) 10,4 кДж/(кг К), 14,6 кДж/(кг К), 3) 567 Дж/(кг К), 756 Дж/(кг К).)

Задача 13. Різниця питомих теплоемкостей c_p-c_v деякого двоатомного газу рівна 260 Дж/(кг К). Знайти мольну масу μ газу і його питомі теплоємності c_v і c_p. (Відповідь: μ = 0,032 кг/моль, c_v = 650 Дж/(кг·К), c_p =910Дж/(кг К)).

Задача 14. Які питомі теплоємності c_v і c_p суміші газів, що містить кисень масою m_1=10 г і азот масою m_2 = 20 г ? (Відповідь: c_v =715 Дж/(кг К) і c_p =1,01 кДж/(кг К)).

Задача 15. Суміш газів складається з хлору і криптону, узятих за однакових умов і в рівних об'ємах. Визначити питому теплоємність c_p суміші. (Відповідь: c_p =323 Дж/(кг К)).

Тема 9. **Перший закон термодинаміки. Процеси в газах.**

Приклади рішення задач

Задача 1. Азот масою 12 г знаходиться в закритій судині об'ємом 2 л при температурі 10^0С. Після нагрівання тиск в судині став рівним 10^4 мм рт.ст. Яка кількість тепла була повідомлена газ при нагріванні?

Рішення.

Перший початок термодинаміки для ідеального газу має вигляд $\delta Q = \nu c_v dT + pdV$. По умові задачі процес ізохорний, тому це рівняння приймає вигляд $\delta Q = \nu c_v dT$. Отже, $\Delta Q = \nu c_v \Delta T$, де $\Delta T = T - T_0$. З рівняння стану після нагрівання $pV = \nu RT$, знаходимо кінцеву температуру газу $T = pV/(\nu R)$. Отже, зміна температури в процесі нагрівання дорівнює

$$\Delta T = \frac{pV}{R\nu} - T_0 .$$

Використовуючи вирази для кількості речовини $\nu = m/\mu$ і мольної теплоємності при постійному об'ємі

$$C_v = \frac{i}{2} R = \frac{5}{2} R ,$$

одержуємо шуканий вираз для кількості тепла $\Delta Q = 4{,}15$ кДж.

Відповідь: $\Delta Q = 4{,}15$ кДж.

Задача 2. Кисень масою 10 г знаходиться під тиском $3\ 10^5$ Па при температурі 10^0 С. Після нагрівання при постійному тиску газ зайняв об'єм V 10 л. Знайти: 1) кількість тепла, що отримана газом, 2) зміну внутрішньої енергії газу, 3) роботу, виконану газом при розширенні.

Рішення

Кількість тепла, отримана газом при адіабатичному нагріванні, визначається виразом

$$Q = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T ,$$

де $Cp=\frac{i+2}{2}R$ – мольна теплоємність при постійному тиску. З рівнянь стану для початкового і кінцевого станів газу знаходимо:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{\mu}{mR}p(V_2 - \frac{mR}{\mu}\frac{T_1}{p}).$$

Отже, для кількості тепла, отриманого газом, остаточно маємо

$$Q=\frac{i+2}{2}p(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu p}) = 7927{,}5 \text{ Дж.}$$

Зміну внутрішньої енергії знаходимо з виразу

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}C_v\Delta T = \frac{i}{2}p(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu p}) = 5662{,}5 \text{ Дж.}$$

Нарешті робота, досконала газом при його розширенні визначається як:

$$A = p\Delta V = p(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu p}) = 2265 \text{ Дж.}$$

Відповідь: Q = 7927,5 Дж, ΔU = 5662,5 Дж і A = 2265 Дж.

Задача 3. Яка робота A здійснюється при ізотермічному розширенні водню масою m = 5 г, узятого при температурі T = 290 К, якщо об'їм газу збільшується в три рази ?

Рішення

Елементарна робота, що здійснюється газом при його розширенні $dA = pdV$. Виразимо вхідний сюди тиск за допомогою рівняння стану $p = \nu RT/V$. Тоді для роботи одержуємо вираз

$$dA = \nu RT\frac{dV}{V}.$$

Інтегруючи цей вираз за об'ємом, остаточно одержуємо:

$$A = \nu RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \nu RT\ln 3 = 6{,}62 \text{ кДж.}$$

Відповідь: A = 6,62 кДж.

Задача 4. В циліндрі під поршнем знаходиться водень масою m = 0,02 кг при температурі T_1 = 300 К. Водень спочатку розширився адіабатично, збільшивши свій об'єм в п'ять разів, а потім був стиснутий ізотермічно, причому об'їм газу зменшився в п'ять разів. Знайти температуру в кінці адиабатного розширення і повну роботу A, виконану газом. Зобразити процес графічно.

Рішення

Для знаходження температури в кінці адіабатичного процесу використовуємо рівняння адиабаты в змінних T і V:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1},$$

де γ - показник адіабати. Звідси одержуємо вираз для температури T_2:

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1 n^{1-\gamma} = 157 \text{ К}.$$

Знайдемо роботу, виконану газом на окремих ділянках процесу. Робота, виконана газом при адіабатному розширенні знаходиться як:

$$A_1 = -\frac{m}{\mu} C_v \Delta T = -\frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R(T_2 - T_1).$$

Робота, виконана при ізотермічному стисненні дається виразом:

$$A_2 = \frac{m}{\mu} R T_2 \ln\frac{V_1}{V_2} = -\frac{m}{\mu} R T_2 \ln n.$$

Повна робота, виконана газом, дорівнює алгебраїчної сумі всіх робіт. Після підстановки чисельних даних остаточно одержуємо $A = A_1 + A_2 =$ -8,7 кДж.

Відповідь: A = -8,7 кДж.

Задача 5. Вуглекислий газ масою 7 г був нагрітий на 10 К в умовах вільного розширення. Знайти роботу розширення газу і зміну його внутрішньої енергії.

Рішення

Зміна внутрішньої енергії ідеального газу визначається виразом

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} C_v \Delta T = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2} R \Delta T.$$

Підставляючи сюди чисельні значення, одержуємо ΔU = 33 Дж. Робота розширення газу знаходиться таким чином:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \frac{m}{\mu} R \int_{T_1}^{T_1+\Delta T} dT = \frac{m}{\mu} R \Delta T = 13{,}2 \text{ Дж}.$$

Відповідь: A = 13,2 Дж.

Задачі для самостійного вирішення.

Задача 6. Азот об'ємом 2 л знаходиться під тиском 10^5 Па. Яку кількість тепла треба повідомити азоту, щоб: 1) при p = const його об'єм збільшився удвічі, 2) при V = const його тиск збільшився удвічі ? (Відповідь: Q_1 = 700 Дж; Q_2 = 500 Дж.)

Задача 7. Водень масою m = 4 г був нагрітий на ΔT = 10 К при постійному тиску. Визначити роботу A розширення газу. (Відповідь: A = 166,2 Дж.)

Задача 8. Газ, що займав об'єм V_1 = 12 л під тиском p_1 = 100 кПа, був ізобарний нагрітий від температури T_1 = 300 К до T_2 = 400 К. Визначити роботу A розширення газу. (Відповідь: A = 400 Дж.)

Задача 9. Азот масою m = 5 г, нагрітий на ΔT = 150 К, зберіг незмінний об'єм V. Знайти: 1) кількість теплоти Q, переданого газу, 2) зміну ΔU внутрішньої енергії газу, 3) роботу A, виконану газом. (Відповідь: Q = 556,5 Дж, ΔU = 556,5 Дж, A =0.)

Задача 10. Водень займає об'єм V_1 = 10 м^3 при тиску p_1 = 100 кПа. Газ нагрівали при постійному об'ємі до тиску p_2 = 300 кПа. Визначити: 1) зміну внутрішньої енергії газу, 2) роботу, виконану газом, 3) кількість теплоти, переданої газу. (Відповідь: ΔU = 5 МДж, A =0, Q =5 МДж.)

Задача 11. Азот нагрівався при постійному тиску, причому йому було повідомлено кількість теплоти Q = 21 кДж. Визначити роботу А, яку вчинив при цьому газ, і зміна ДU його внутрішньої енергії. (Відповідь: А = 6 кДж, ΔU = 15 кДж.)

Задача 12. Азот масою m = 200 г розширяється ізотермічно при температурі T = 280 К, причому об'їм газу збільшується в двічі. Знайти: 1) зміну ΔU внутрішньої енергії газу, 2) виконану при розширенні газу роботу A, 3) кількість теплоти Q, отриману газом. (Відповідь: ΔU = 0; A = 11,5 кДж; Q = 11,5 кДж).

Задача 13. Гелій масою m = 1 г був нагрітий на ΔT = 100 К при постійному тиску p. Визначити: 1) кількість теплоти Q, передану газу; 2) роботу A розширення газу; 3) приріст ΔU внутрішньої енергії газу. (Відповідь: Q = 520 Дж; A = 208 Дж; ΔU = 312 Дж.)

Задача 14. При адіабатному розширенні кисню з початковою температурою $\mathbf{T}_1$ = 320 К внутрішня енергія зменшилася на ΔU = 8,4 кДж, а його об'єм збільшився в n = 10 разів. Визначити масу m кисню. (Відповідь: m = 67,2 г.)

Задача 15. Повітря, що займало об'єм V_1 = 10л при тиску p_1 = 100 кПа, був адіабатно стислий до об'єму V_2 = 1 л. Під яким тиском p_2 знаходиться повітря після стиснення? (Відповідь: p_2 = 2,52 МПа.)

Тема 10. **Цикл Карно. Другий закон термодинаміки. Рідини.**

Приклади рішення задач

Задача 1. Ідеальна теплова машина, що працює по циклу Карно, виконує за один цикл роботу $7{,}35\cdot 10^4$ Дж. Температура нагревателя 100^0 С, температура холодильника 0^0С. Знайти: 1) к.к.д. машини; 2) кількість тепла, одержувану машиною за один цикл від нагревателя; 3) кількість тепла, що віддається за один цикл холодильнику.

Рішення.

К.к.д. машини розраховуємо як

$$\eta = 1 - T_2/T_1 = 0{,}268.$$

Для η справедливий також вираз η = A/Q, де А - робота, виконана за один цикл. Звідси для кількості тепла, одержуваного машиною за один цикл, одержуємо 27,4 10^4 Дж. Знаходимо кількість тепла, що віддається за один цикл холодильнику $Q_2 = Q_1 - A$ = 2 10^5 Дж.

Відповідь: η =0,268, Q_1 = 27,4?10^4 Дж, Q_2 = 2 10^5 Дж.

Задача 2. Ідеальний газ виконує цикл Карно. Робота A_1 ізотермічного розширення газу рівна 5Дж. Визначити роботу A_2 ізотермічного стиснення, якщо термічний к.к.д. циклу η= 0,2.

Рішення

З виразу для термічного к.п.д.

$$\eta = 1 - T_2/T_1$$

знаходимо температуру холодильника

$$T_2 = (1-\eta)T_1$$

Використовуємо вирази для роботи газу при ізотермічних процесах:

$$A_1 = \nu RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} \quad \text{и} \quad A_2 = \nu RT_2 \ln\frac{V_3}{V_4}.$$

В цих виразах процес 1-2 відповідає ізотермічному розширенню, процес 2-3 - адіабатичному розширенню, процес 3-4 - ізотермічному стисненню, процес 4-1 - адіабатичному стисненню. Використовуючи зв'язок між початковими і кінцевими значеннями параметрів стану газу при адіабатних процесах:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} \qquad \text{и} \qquad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1},$$

одержуємо, що

$$\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1}.$$

Відповідь: A_2 = 4 Дж.

Задача 3. Знайти зміну ентропії під час переходу 8 г кисню від об'єму в 10 л при температурі 800 С до об'єму в 40 л при температурі 300^0 С.

Рішення

Вираз для елементарної зміни ентропії ідеального газу має вигляд

$$dS = \frac{dQ}{T} = \nu C_v \frac{dT}{T} + \frac{pdV}{T} = \nu C_v \frac{dT}{T} + \nu R\frac{dV}{V},$$

де тиск p виключений за допомогою рівняння стану $p = \nu RT/V$. Для знаходження шуканої зміни ентропії треба проінтегрувати останній вираз по всьому діапазону зміни температури. Зробивши це, одержуємо:

$$\Delta S = \nu C_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \nu R\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu C_v \ln\frac{T_2}{T_1} + \nu R\ln\frac{V_2}{V_1} = 5{,}4\,\text{Дж/К}.$$

Відповідь: ΔS = 5,4 Дж/К.

Задача 4. На скільки нагріється крапля ртуті, отримана від злиття двох крапель радіусом r = 1 мм кожна?

Рішення.

Поверхневий шар рідини знаходиться в стані натягнення і володіє запасом потенційної енергії. Відношення зміни цієї потенційної енергії до зміни площі поверхні $\sigma = \Delta E/\Delta S$ називається коефіцієнтом поверхневого натягнення. Отже, виділення енергії при злитті двох крапель ртуті $\Delta E = \sigma\Delta S$, де $\Delta S = 8\pi Rr^2 - 4\pi Rr^2$ і R – радіус великої краплі. Сумарний об’єм двох маленьких крапель дорівнює об’єму великої краплі:

$$2\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Звідси одержуємо

$$R = r2^{1/3}.$$

Тоді зміна площі $\Delta S = 4\pi r^2\left(2-4^{1/3}\right)\Delta S$ і зміна енергії $\Delta E = \sigma\Delta S = \sigma 4\pi r^2\left(2-4^{1/3}\right)$. Виділена енергія іде на нагрівання краплі $\Delta E = cm\Delta T = c\rho\frac{4}{3}\pi R^3\Delta T = c\rho\frac{8}{3}\pi r^3\Delta T$, де c – питома теплоємність ртуті, ρ - її густина, m - маса. Прирівнюючи вирази для енергії $\sigma 4\pi r^2\left(2-4^{1/3}\right) = c\rho\frac{8}{3}\pi r^3\Delta T$, одержуємо для зміни температури наступну формулу:

$$\Delta T = \frac{3\sigma\left(2-4^{1/3}\right)}{2cr\rho} = 1{,}65\cdot 10^{-4}\,K$$

При розрахунку використані табличні значення для ртуті: густина ρ = 13,6 г/см, коефіцієнт поверхневого натягнення σ = 0,5 Н/м, питома теплоємність c = 138 Дж/(кг К).

Відповідь: $\Delta T = 1{,}65\cdot 10^{-4}$ К.

Задача 5. Визначити тиск повітря (в мм рт. ст.) в повітряному пухирці діаметром d=0,01 мм, що знаходиться на глибині h = 20 см під поверхнею води. Зовнішній тиск прийняти рівним p_1 = 765 мм рт. ст.

Рішення

Додатковий тиск, викликаний кривизною поверхні рідини, визначається формулою Лапласа (для сферичної поверхні): $p = 2\sigma/R$, де R - радіус сфери (для води $\sigma = 73\ 10^{-3}$ Н/м). Тиск повітря в пухирці складається з атмосферного тиску, гідростатичного тиску води на глибині h і додаткового тиску, викликаного кривизною поверхні, і знаходиться по формулі:

$$p = p_1 + \rho gh + \frac{2\sigma}{r} = 999 \text{ мм рт. ст}$$

Відповідь: p = 999 мм рт. ст.
Задачі для самостійного вирішення.

Задача 6. Здійснюючи замкнутий процес, газ одержує від нагрівача кількість теплоти Q_1 = 4 кДж. Визначити роботу A газу при протіканні циклу, якщо його термічний к.к.д. η=0,1. (Відповідь: A = 400 Дж.)

Задача 7. В результаті кругового процесу газ вчинив роботу A = 1 Дж і передав охолоджувачу кількість теплоти Q_2 = 4,2 Дж. Визначити термічний к. к. д. циклу. (Відповідь η = 0,19.)

Задача 8. Ідеальний газ, що здійснює цикл Карно, 2/3 кількості теплоти Q_1, отриманої від нагрівачеві, віддає охолоджувачу. Температура T_2 охолоджувача дорівнює 280 К. Визначити температуру T_1 нагрівача. (Відповідь: T_1 = 420 К)

Задача 9. Якнайменший об'єм V_1 газу, що здійснює цикл Карно, рівний 153 л. Визначити найбільший об'єм V_3, якщо об'єм V_2 в кінці ізотермічного розширення і об'їм V_4 в кінці ізотермічного стиснення рівні відповідно 600 л і 189 л. (Відповідь: V_3 = 740 л.)

Задача 10. В результаті изохорного нагрівання водню масою m = 1 г тиск p газу збільшився вдвічі. Визначити зміну ΔS ентропії газу. (Відповідь: ΔS = 7,2 Дж/К.)

Задача 11. Знайти зміну ΔS ентропії при ізобарному розширенні азоту масою m = 4 г від об'єму в 5 л до об'єму в 9 л. (Відповідь: ΔS = 2,44 Дж/К.)

Задача 12. Водень масою 6,6 г розширяється ізобарно до подвоєного об'єму. Знайти зміну ентропії при цьому розширенні. (Відповідь: ΔS = 66,3 Дж/К.)

Задача 13. Яку роботу проти сил поверхневого натягнення треба вчинити, щоб розбити сферичну краплю ртуті радіусом 3 мм на дві однакової краплі? (Відповідь: A = 1,47 10^{-5} Дж.)

Задача 14. Яку роботу проти сил поверхневого натягу треба вчинити, щоб видути мильний (σ = 0,043 Н/м) пузир діаметром 4 см? (Відповідь: $A = 4{,}32 \cdot 10^{-4}$ Дж.)

Задача 15. Тиск повітря усередині мильного пузиря на 1 мм рт. ст. більше атмосферного. Чому рівний діаметр пузиря? (Відповідь: d = 2,6 мм).

таблиця основних фізичних постійних

Фізична постійна	Позначення	Величина
Прискорення вільного падіння	g	9,81 м/с^2
Гравітаційна стала	γ	$6{,}67\times10^{-11}$ м^2/(кг с^2)
Число Авогадро	N_A	$6{,}02\times10^{23}$ моль$^{-1}$
Універсальна газова стала	R	8,31 Дж/(моль К)
Стала Больцмана	k	$1{,}38\times10^{-23}$ Дж/К
Елементарний заряд	e	$1{,}6\times10^{-19}$ Кл
Швидкість світла у вакуумі	c	$3{,}00\times10^{8}$ м/с
Постійна закону Стефана-Больцмана	σ	$5{,}67\times10^{-8}$ Вт/(м^2 К^4)
Постійна закону зміщення Віна	b	$2{,}90\times10^{-8}$ м К
Стала Планка	h	$6{,}63\times10^{-34}$ Дж с
Стала Планка, поділена на 2π		$1{,}054\times10^{-34}$ Дж с
Стала Рідберга	R	$1{,}097\times10^{7}$ м$^{-1}$

Радіус першої борівської орбіти	a_0	$0{,}529\times10^{-10}$ м
Комптонівська довжина хвилі електрона	Λ	$2{,}43\times10^{-12}$ м
Магнетон Бора	μ_B	$0{,}927\times10^{-23}$ А м^2
Енергія іонізації атома водню	E_i	$2{,}18\times10^{-18}$ Дж (13,6 эВ)
Атомна одиниця маси	а. о. м.	$1{,}66\times10^{-27}$ кг
Коефіціент пропорційності між енергією і масою	c^2	$9{,}00\times10^{16}$ Дж/кг (931 МэВ/а. е. м.)