ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД «ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені К. Д. УШИНСЬКОГО»

Кафедра прикладної математики та інформатики

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРЕТИЧНА ФІЗИКА (ЕЛЕКТРОДИНАМІКА)»

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

спеціальності 014 Середня освіта (Фізика)

ОДЕСА 2024

УДК: 537.8

Рекомендовано до друку вченою радою
Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний
університет імені К. Д. Ушинського»
протокол від «25» травня 2023 року №

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Йовчев С. І. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики, фізики та астрономії Одеського національного морського університету

Брюханов А. О. – доктор технічних наук, доцент, професор кафедри інноваційних технологій та методики навчання природничих дисциплін Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського

Укладач:
Шкатуляк Н. М. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики та інформатики

Методичні рекомендації до проведення практичних занять та організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Теоретична фізика» / укладач Н. М. Шкатуляк – Одеса, Університет Ушинського, 2024. 34 с.

Методичні рекомендації до практичних занять та організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Теоретична фізика (Електродинаміка)» мають на меті допомогти студентам засвоїти теоретичний матеріал та знайти підходи до Розв'язання типових задач та завдань підвищеної складності з теми «Рівняння Максвелла», в яку входять питання математичної теорії електромагнітного поля.

В роботі представлено методичні рекомендації щодо Розв'язання задач з питань «теорії поля», які викликають у студентів певні труднощі. *Наведено алгоритми та приклади Розв'язання задач, завдання для самостійної роботи та теоретичні відомості до їх розв'язання.*

Рекомендовано для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 014 Середня освіта (Фізика) з метою закріплення, поглиблення й узагальнення знань, одержаних під час навчання.

ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні рекомендації присвячені рішенню задач з математичної теорії поля.

Питання теорії поля є базовим питанням при вивченні електродинаміки для здобувачів вищої освіти спеціальності 014 Середня освіта (Фізика) ІНН природничо-математичних наук, інформатики та менеджменту. Для володіння відповідними компетентностями з даної теми є важливим не тільки теоретична підготовка, але й практика рішення задач. Питання «теорії поля» викликають у студентів певні труднощі, тому розробка методичних рекомендацій по даній темі є актуальною.

В методичних рекомендаціях розглянуті такі питання:

1. Огляд деяких відомостей з теорії електромагнітного поля;
2. Підбір типових задач з математичної теорії електромагнітного поля;
3. Методичні рекомендації до Розв’язання цих задач;
4. Підбір задач до самостійного Розв’язання.

Методичні рекомендації пропонуються для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 014 Середня освіта (Фізика) з метою закріплення, поглиблення й узагальнення знань, одержаних під час навчання.

1. СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Питання математичної теорії поля входять до змістового модуля 1 робочої програми навчальної дисципліни ОК 11. ТЕОРЕТИЧНА ФІЗИКА ОПП Середня освіта (Фізика) спеціальності 014 Середня освіта (Фізика).

Змістовий модуль 1. Рівняння Максвелла. Стаціонарні поля.

Тема 1. Експериментальні основи класичної електродинаміки.

Предмет електродинаміки. Математичний апарат. Експериментальні основи електродинаміки та їх узагальнення. Закон Кулона і рівняння електростатики у вакуумі. Закон Біо-Савара-Лапласа і рівняння для стаціонарного магнітного поля в вакуумі. Електромагнітна індукція і закон Фарадея. Закон збереження електричного заряду і гіпотеза Максвела про струм зміщення. Загальні властивості електромагнітного поля у вакуумі. Класифікація задач електродинаміки.

Тема 2. Рівняння Максвелла.

Система рівнянь Максвела для електромагнітного поля в вакуумі у інтегральній та диференціальній формах. Фізичний зміст кожного рівняння. Властивості системи рівнянь Максвела.

Потенціали електромагнітного поля як змінні його стану. Калібрована інваріантність, умова Лоренца. Рівняння для потенціалів.

Густина енергії і густина потоку енергії електромагнітного поля. Закон збереження енергії у системі частинка-поле.

Імпульс електромагнітного поля. Тиск світла.

Структура навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Рівняння Максвелла. Стаціонарні поля.											
Тема 1. Експериментальні основи класичної електродинаміки	30	6	6		18						

Тема 2. Рівняння Максвелла.	30	6	6		18							
Тема 3. Електростатичне поле.	28	4	6		18							
Тема 4. Магнітостатичне поле.	26	4	4		18							
Тема 5. Квазістаціонарне електромагнітне поле.	26	4	4		18							
ІНДЗ	10				10							
Разом за змістовим модулем 1	150	24	26	22	100							

2. ДЕЯКІ ПИТАННЯ З ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ.

Електродинаміка вивчає властивості електромагнітного поля, яке проявляє себе за допомогою сил, що діють на частинки речовини, які володіють електричним зарядом. Оскільки електромагнітне поле характеризується силами, що діють на заряди, які знаходяться в області існування поля, а сили, у свою чергу, представляються векторами, то електромагнітне поле описують за допомогою абстрактних математичних моделей – векторних полів.

Електромагнітне поле представляють як суму електричних і магнітних полів, але це означає визнання їх внутрішньої єдності та взаємообумовленості.

Фундаментальною задачею теорії електромагнетизму є узагальнення численних експериментальних результатів, які стосуються електричних і магнітних явищ.

Ця задача була вирішена в 70-х роках XIX століття видатним англійським фізиком Джеймсом Клерком Максвеллом, який сформулював чотири диференціальні рівняння, які повно та однозначно описують всю сукупність електромагнітних явищ в макроскопічних масштабах. Ці рівняння називають рівняннями Максвелла. Рівняння Максвелла в теорії електромагнетизму грають таку ж важливу роль, як закони Ньютона у механіці.

Теорія поля є диференціальне та інтегральне обчислення функцій векторного аргументу. Розділ математики, що вивчає теорію поля, називається векторним аналізом.

Теорія електромагнітного поля була створена шотландським та англійським вченим Джеймсом Клерком Максвеллом (1831–1879) на основі математичного узагальнення основних експериментальних законів електрики і магнетизму, відомих на той час, таких як закон електромагнітної індукції Фарадея, закон Біо-Савара-Лапласа, теорема Гаусса для електростатики, закон збереження електричного заряду, закон повного струму [1, 2].

Максвелл Джеймс Кларк

Максвелл заклав основи сучасної класичної електродинаміки, ввів у фізику поняття струму зміщення, та електромагнітного поля, показав, що електромагнітне поле поширюється з кінцевою швидкістю, яка дорівнює 3×10^{10}м/с, що світло є електромагнітною хвилею тощо.

Поля поділяють на два види: векторні й скалярні [1-4]. Векторним (скалярним) полем називають деякий простір, в кожній точці якого визначений деякий вектор $\vec{a}(\overrightarrow{R})$ (скаляр $\varphi(\overrightarrow{R})$), де $\vec{R}$ – радіус-вектор точки.

Прикладами скалярних полів можуть бути: поле розподілених у просторі мас, поле густин тіла, поле тисків, поле температур тощо. Прикладами векторних полів можуть бути: поле напруженостей електричного поля, поле швидкостей рідини, що протікає, поле напруженостей магнітного поля, поле імпульсів, поле прискорень, тощо.

Векторною (силовою) лінією векторного поля $\vec{c}(\vec{r})$ називається крива, в кожній точці якої дотична збігається з напрямком поля в цій точці. Векторна лінія визначається рівнянням:

$$\frac{dx}{c_x} = \frac{dy}{c_y} = \frac{dz}{c_z},$$

Розглянемо основні поняття і деякі формули векторного аналізу.

Вектор елементарної площадки представлений на рисунку 1.

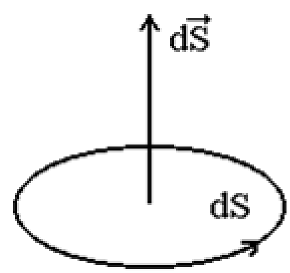

Рис. 1. Вектор елементарної площадки

Складові базисного вектора $d\vec{S}\left(dS_x, dS_y, dS_z\right)$:

$dS_x = dydz$, $dS_y = dxdz$, $dS_z = dxdy$.

Потоком вектора $\vec{A}$ через площадку dS називають величину $dJ = \left(\vec{A}d\vec{S}\right)$, а потік $J = \int_s \left(\vec{A}d\vec{S}\right)$, який можна представити як $J = \iint A_x dydz + \iint A_y dxdz + \iint A_z dxdy$, потоком вектора $\vec{A}$ через поверхню S [1,2].

Знайдемо потік векторного поля через замкнуту поверхню, яка представляє собою поверхню елементарного паралелепіпеда (рисунок 2).

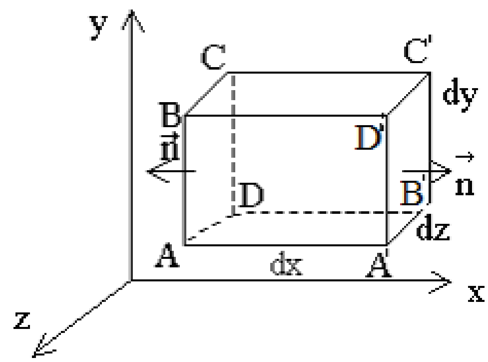

Рис. 2. До визначення потоку векторного поля

через замкнену поверхню

Перпендикуляри до бічних поверхонь паралелепіпеду позначено стрілками (див. рис. 2). Перпендикуляри, що спрямовані від фігури, є позитивними, а ті, що входять у фігуру, – негативні.

Обчислимо потік через грань *ABCD*: $dJ_{ABCD} = -A_x(x, y, z)dydz$. Знак «мінус» означає, що нормаль до грані спрямована проти осі *x*.

Аналогічно: $dJ_{A'B'C'D'} = A_x(x + dx, y, z)dydz$.

Розкладемо $A_x(x+dx)$ в ряд, отримаємо:

$$A_x(x) + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx + \ldots \approx A_x(x + dx).$$

Загальний потік через грані *ABCD* і $A'B'C'D'$:

$$dJ_{ABCD} + dJ_{A'B'C'D'} = \left(A_x(x) + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx - A_x(x) \right) dydz = \frac{\partial A_x}{\partial x} dxdydz.$$

Аналогічно знайдемо потік векторного поля через інші грані.

Знайдемо потік через всю поверхню:

$$dJ = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Дивергенцією називається величина, що дорівнює:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = div\vec{A}.$$

А величина $dxdydz = dV$. Тому

$$dJ = div\vec{A}dV\ . \qquad (1)$$

З рівняння (1) випливає математичний сенс дивергенції.

Дивергенцією називається границя відношення потоку вектору $\vec{A}$ через поверхню, що обмежує деякий об’єм, до величини цього об'єму, коли останній прагне до нуля:

$$div\vec{A} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S \left(\vec{A}d\vec{S}\right)}{V}\ .$$

Дивергенція дорівнює питомій потужності джерел поля. Якщо $div\vec{A} > 0$ то вважається, що векторне поле має джерело. Якщо $div\vec{A} < 0$, то вважається, що векторне поле має негативні джерела або стоки. Векторні лінії поля завжди починаються на позитивних джерелах і закінчуються на негативних. Якщо $div\vec{A} = 0$, то поле не має ні джерел ні стоків. Таке поле називається вихровим, і його векторні лінії замкнуті [5,6].

Розглянемо деякий об'єм. Цей об'єм можна розбити на елементарні паралелепіпеди. Для кожного елементарного паралелепіпеду буде справедлива формула (1). Якщо підсумувати (1) за всіма такими паралелепіпедами, то отримаємо:

$$\oint_S \left(\vec{A}d\vec{S}\right) = \int_V div\vec{A}dV \qquad (2)$$

Вираз (2) - один з найважливіших інтегральних законів векторного аналізу. Цей закон називається теоремою Остроградського – Гаусса: потік векторного поля через довільну замкнуту поверхню, що обмежує деякий об'єм, (або простір), дорівнює інтегралу від дивергенції вектора за цим об'ємом.

Розглянемо деякий замкнутий контур L. Знайдемо скалярний добуток $\left(\vec{A}d\vec{L}\right)$ відповідно вибраного нами обходу цим контуром.

Циркуляцією вектора $\vec{A}$ за заданим контуром називається вираз

$$C = \oint_L \left(\vec{A}d\vec{L}\right) = \int \left(A_x dx + A_y dy + A_z dz\right). \qquad (3)$$

Обчислимо циркуляцію за замкнутим контуром ABCD (рис.3).

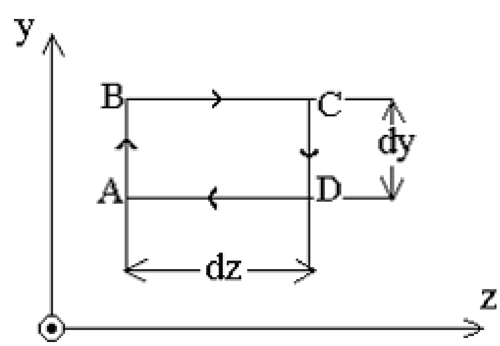

Рис. 3. Замкнутий елементарний контур

$$dC_{ABCD} = A_y\left(x,y,z\right)dy + A_z\left(x,y+dy,z\right)dz - A_y\left(x,y,z+dz\right)dy - A_z\left(x,y,z\right)dz\,.$$

Розкладемо доданки в ряди:

$$dC_{ABCD} = \left(A_y\left(z\right) - A_y\left(z\right) - \frac{\partial A_y}{\partial z}dz\right)dy + \left(A_z\left(y\right) + \frac{\partial A_z}{\partial y}dy - A_z\left(y\right)\right)dz = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)dydz\,.$$

де $dydz = dS_x$, а $\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} = B_x$.

Тоді $dC_{ABCD} = B_x dS_x$.

Аналогічно, для інших координатних площин.

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\,,\ B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\,.$$

Тоді вектор $\vec{B}$:

$$\vec{B}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z};\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x};\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

Нехай $\vec{B} = rot\vec{A}$. Тоді

$$dC = \left(rot\vec{A}d\vec{S}\right) = rot_n\vec{A}dS\,, \qquad (4)$$

де $\vec{n}$ – орт-нормаль до елементу поверхні dS .

З Формули (4) маємо:

$$rot_n\vec{A} = \lim_{S\to 0}\frac{\oint_L\left(\vec{A}d\vec{L}\right)}{S}\,,$$

З останньої формули витікає, що нормальна складова ротора $\vec{A}$ дорівнює границі відношення циркуляції цього вектора за деяким контуром до поверхні, яка обмежена цим контуром, коли ця поверхня стягується в точку.

Будь-який контур можна розбити на елементарні прямокутні контури (рис. 5) [1,2].

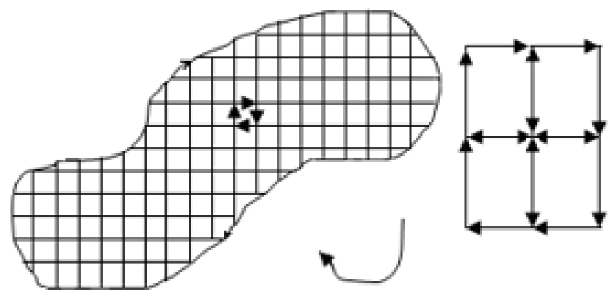

Рис. 5. Елементарні прямокутні контури

З формули (4) випливає:

$$\oint_L \left(\vec{A} d\vec{L}\right) = \int_S \left(rot\vec{A} d\vec{S}\right) \tag{5}$$

Вираз (5) є одною з основних теорем векторного аналізу, теорема Стокса. Циркуляція вектора за замкнутим контуром дорівнює потоку ротора цього вектора через довільну поверхню, що обмежується цим контуром.

Якщо ротор векторного поля не дорівнює нулю, то поле називається вихровим. Таке поле має замкнуті векторні лінії. Якщо $rot\vec{A} = 0$, то поле називається потенціальним. Векторні лінії потенціального поля не замкнуті.

Градієнтом скалярного поля називають вектор з компонентами:

$$grad\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \frac{\partial\varphi}{dy}; \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Введемо векторний диференціальний оператор ∇ (набла) [7, 8], який має компоненти $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$. Цей оператор називається оператор набла, чи оператор Гамільтона. Тобто

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Оператор набла фізичного сенсу не має. Він має сенс разом зі скалярною чи векторною функцією, яка стоїть за ним.

Якщо справа від ∇ знаходиться скаляр φ, то такий «добуток» є вектор:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k},$$

який називається градієнтом функції φ [9,10].

Якщо після ∇ стоїть вектор, тобто добуток є скалярною величиною, то

$$\left(\nabla\vec{a}\right) = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Цей вираз називається дивергенцією вектора $\vec{a}$.

Якщо вектор набла ∇ «помножити» векторно на $\vec{a}$, отримаємо вектор [1,2]:

$$\left[\nabla\vec{a}\right]_x = \nabla_y a_z - \nabla_z a_y = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\ldots,$$

Який є вектором з компонентами ротора.

$$rot\vec{a} = \left[\nabla\vec{a}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Напишемо градієнт, дивергенцію і ротор через вектор набла:

$$\nabla\varphi = grad\varphi$$

$$(\nabla\overrightarrow{a}) = div\vec{a}$$

$$\left[\nabla\vec{a}\right] = rot\vec{a}$$

Видатний вчений В. Р. Гамільтон у 1853 році ввів цей оператор і вигадав для нього символ ∇. На вигляд цей символ був схожий на перевернуту грецьку літеру Δ (дельта). У Гамільтона вістря символу вказувало ліворуч, пізніше в роботах Гамільтон назвав цей символ словом «атлед» (слово «дельта», прочитане навпаки). Пізніше англійські вчені стали називати цей символ «набла» через схожість з давньо- ассірійським музичним інструментом набла. Ще одна гіпотеза, що ∇ - літера фінікійського алфавіту, походження якої пов'язане з музичним інструментом типу арфи. «ναβλα» (набла) давньогрецькою означає «арфа».

Рис. 6. Давньо-ассірійська арфа

Еквіпотенціальна поверхня (поверхня однакового потенціалу) визначається для скалярного поля $\varphi(\vec{r})$ рівнянням:

$$\varphi(x, y, z) = const.$$

∇ – диференціальний оператор. Оператор набла діє на всі функції, що стоять справа від нього. При перетворенні виразів, у які входить оператор набла (∇), треба користуватись правилами і диференціального числення, і векторної алгебри [3].

Теорему Остроградського-Гаусса і теорему Стокса можна записати за допомогою оператора набла:

$$\oint_S \left(\vec{A} d\vec{S}\right) = \int_V \left(\nabla \vec{A}\right) dV$$ (теорема Остроградського-Гаусса),

$$\oint_L \left(\vec{A} d\vec{L}\right) = \int_S \left(\left[\nabla \vec{A}\right] d\vec{S}\right)$$ (теорема Стокса).

Алгебраїчні властивості векторного аналізу

Таблиця 1

Представлення	Опис
$[\mathrm{a}, \mathrm{b}] = -[\mathrm{b}, \mathrm{a}]$	Властивість антикомутативності
$[(\alpha \mathrm{a}), \mathrm{b}] = [\mathrm{a}, (\alpha \mathrm{b})] = \alpha\, [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$	Властивість асоціативності
$[(\mathrm{a}+\mathrm{b}), \mathrm{c}] = [\mathrm{a}, \mathrm{c}] + [\mathrm{b}, \mathrm{c}]$	Властивість дистрибутивності
$\big[[\mathrm{a}, \mathrm{b}], \mathrm{c}\big] + \big[[\mathrm{b}, \mathrm{c}], \mathrm{a}\big] + \big[[\mathrm{c}, \mathrm{a}], \mathrm{b}\big] = 0$	Тотожність Якобі, виконується в R^3
$[\mathrm{a}, \mathrm{a}] = 0$	
$\big[\mathrm{a}, [\mathrm{b}, \mathrm{c}]\big] = \mathrm{b}(\mathrm{a}, \mathrm{c}) - \mathrm{c}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$	Формула «бац» мінус «цаб», тотожність Лагранжа
$\lvert[\mathrm{a}, \mathrm{b}]\rvert^2 + (\mathrm{a}, \mathrm{b})^2 = \lvert\mathrm{a}\rvert^2 + \lvert\mathrm{b}\rvert^2$	Частинний випадок мультиплікативності $\lvert\mathbf{vw}\rvert = \lvert\mathbf{v}\rvert\lvert\mathbf{w}\rvert$ норми кватерніонів
$([\mathrm{a}, \mathrm{b}], \mathrm{c}) = (\mathrm{a}, [\mathrm{b}, \mathrm{c}])$	Змішаний добуток векторів

Правила роботи з оператором Гамільтона ∇

1. Замість операцій *grad*, *div*, *rot* і Δ вводимо операції з використанням оператора набла:

$$\mathrm{grad} f \equiv \nabla f$$

$$\operatorname{div}\vec{A} \equiv \nabla\vec{A}$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} \equiv [\nabla\vec{A}]$$

$$\Delta \equiv (\nabla, \nabla)$$

2. Аналізуємо, на які функції оператор набла діє як диференційний оператор. За визначенням ці функції повинні розташовуватись у виразі справа від оператора набла. Якщо таких функцій дві і вони перемножуються, представимо оператор набла у вигляді суми двох операторів, кожен з яких діє на «свою» функцію. Наприклад:

$$\operatorname{rot}[\vec{A}\,\vec{B}] = [\nabla[\vec{A}\,\vec{B}]\,] = [\nabla^{(A)}[\vec{A}\,\vec{B}]\,] + [\nabla^{(B)}[\vec{A}\,\vec{B}]\,]$$

3. Перетворимо отриманий вираз користуючись методами векторної алгебри. При цьому не звертаємо уваги на диференційний характер оператора і вважаємо його звичайним вектором. В прикладі, що розглядається:

$$[\nabla^{(A)}[\vec{A}\,\vec{B}]\,] = \vec{A}(\nabla^{(A)}\vec{B}) - \vec{B}(\nabla^{(A)}\vec{A})$$

$$[\nabla^{(B)}[\vec{A}\,\vec{B}]\,] = \vec{A}(\nabla^{(B)}\vec{B}) - \vec{B}(\nabla^{(B)}\vec{A})$$

4. Використовуючи стандартні правила векторної алгебри, перетворимо отримані вирази з тим розрахунком, щоб оператори набла стояли зліва від тих функцій на які вони діють і справа від тих функцій, на які вони не діють. Так:

$$\vec{A}(\nabla^{(A)}\vec{B}) - \vec{B}(\nabla^{(A)}\vec{A}) = (\vec{B}\nabla^{(A)})\vec{A} - \vec{B}(\nabla^{(A)}\vec{A})$$

$$\vec{A}(\nabla^{(B)}\vec{B}) - \vec{B}(\nabla^{(B)}\vec{A}) = \vec{A}(\nabla^{(B)}\vec{B}) - (\vec{A}\nabla^{(B)})\vec{B}$$

5. Оскільки оператори набла опиняються у позиціях, де вони автоматично правильно діють як диференційні оператори, забираємо позначки у операторів набла і вводимо при необхідності позначення grad, div, rot і Δ. В прикладі, що розглядається, остаточно отримуємо:

$$\operatorname{rot}[\vec{A}\,\vec{B}] = (\vec{B}\nabla^{(A)})\vec{A} - \vec{B}(\nabla^{(A)}\vec{A}) - (\vec{A}\nabla^{(B)})\vec{B} =$$

$$= (\vec{B}\nabla)\vec{A} - \vec{B}(\vec{A}\nabla) + \vec{A}(\nabla\vec{B}) - (\vec{A}\nabla)\vec{B} =$$

$$= \vec{A}\mathrm{div}\vec{B} - \vec{B}\mathrm{div}\vec{A} + (\vec{B}\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\nabla)\vec{B}$$

де

$$(\vec{A}\nabla)\vec{B} = \left(A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right) =$$

$$= \left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\vec{i} +$$

$$+ \left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\vec{k}.$$

Взагалі під вектором $(\vec{A}\nabla)\vec{B}$ розуміють вектор

$$(\vec{A}\nabla)\vec{B} = A_x\frac{\partial\vec{B}}{\partial x} + A_y\frac{\partial\vec{B}}{\partial y} + A_z\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}, \tag{7}$$

який називається градієнтом вектору $\vec{A}$ по вектору $\vec{B}$.

Якщо вектор $\vec{B}$ має теж напрямлення, що і одиничний вектор $\vec{\imath} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, так, що $\vec{A} = |\vec{A}|\vec{\imath}$, то маємо

$$A_x = |\vec{A}|\cos\alpha, A_y = |\vec{A}|\cos\beta, A_z = |\vec{A}|\cos\gamma.$$

Тому

$$(\vec{A}\nabla)\vec{B} = |\vec{A}|\left(\cos\alpha\frac{\partial\vec{B}}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial\vec{B}}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\right) = |\vec{A}|(\vec{\imath}\nabla)\vec{B} = |\vec{A}|\frac{\partial\vec{B}}{\partial\vec{\imath}}.$$

На підставі формули (7) виводимо, компоненти градієнта вектору $\vec{A}$ по вектору $\vec{B}$ обчислюються по формулам:

$$\{(\vec{A}\nabla)\vec{B}\}_x = \mathrm{A}_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \mathrm{A}_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + \mathrm{A}_z \frac{\partial B_x}{\partial z} = (\vec{A}, \nabla B_x), \tag{7а}$$

$$\{(\vec{A}\nabla)\vec{B}\}_y = \mathrm{A}_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + \mathrm{A}_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + \mathrm{A}_z \frac{\partial B_y}{\partial z} = (\vec{A}, \nabla B_y), \tag{7б}$$

$$\{(\vec{A}\nabla)\vec{B}\}_z = \mathrm{A}_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + \mathrm{A}_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + \mathrm{A}_z \frac{\partial B_z}{\partial z} = (\vec{A}, \nabla B_z), \tag{7в}$$

Маємо, зокрема, для радіуса-вектору $\vec{r}$ точки (x,y,z)

$$(\vec{A}\nabla)\vec{r} = \vec{A}. \tag{7г}$$

2. ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Розглянемо деякі приклади розв’язання задач.

Приклад 1.

Нехай $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки. Знайти $\mathrm{grad}|\vec{r}, \vec{c}|^3$, $\vec{c}$ – постійний вектор.

Розв’язання:

Введемо декартову прямокутну систему координат $0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

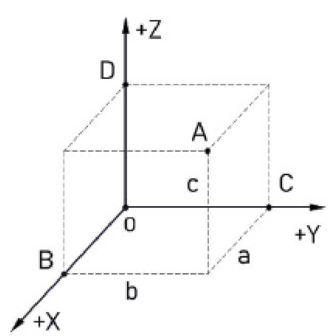

Рис. 7. Декартова система координат

В нашому прикладі $\vec{k} = \frac{\mathrm{c}}{|\vec{\mathrm{c}}|}$.

Тоді

$$\vec{c} = (0,0,|\vec{c}|), \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k},$$

$$[\vec{r},\vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & |\vec{c}| \end{vmatrix} = |\vec{c}|(y\vec{\imath} - x\vec{\jmath}),$$

$$|[\vec{r},\mathrm{c}]| = |\vec{c}|(x^2+y^2)^{1/2}, |[\vec{r},\vec{c}]|^3 = |\vec{c}|^3(x^2+y^2)^{3/2}.$$

Знаючи ці вирази, можна знайти $\mathrm{grad}|[\vec{r},\vec{c}]|^3$:

$$\mathrm{grad}|[\vec{r},\vec{c}]|^3 = 3|\vec{c}|^3(x^2+y^2)^{1/2}(y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}) = 3|\vec{c}|^2|[\vec{r},\vec{c}]|\left(\vec{r} - z\vec{k}\right).$$

Оскільки $z = \left(\vec{r},\vec{k}\right) = \left(\vec{r},\frac{\vec{c}}{|\mathrm{c}|}\right)$, то маємо

$$\mathrm{grad}|[\vec{r},\vec{c}]|^3 = 3|\vec{c}|^2|[\vec{r},\mathrm{c}]|\left(\vec{r} - \left(\vec{r},\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right)\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right) = 3|[\vec{r},\vec{c}]|\left(\vec{r}(\vec{c},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{c},\vec{r})\right).$$

Скористаємось формулою подвійного вектору добутку

$$\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}b).$$

Остаточно отримаємо

$$\mathrm{grad}|[\vec{r},\vec{c}]|^3 = 3|[\vec{r},\vec{c}]|\left[\vec{c}[\vec{r},\vec{c}]\right].$$

Приклад 2.

Нехай $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки і $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Обчисліть grad *f(r)*, де *f(r)* – функція, що диференціюється.

Розв’язання:

За визначенням

$$grad\ f(r) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Знайдемо похідну функції по x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{x}{r}.$$

Дійсно,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

Аналогічно можна обчислити похідні $\frac{\partial r}{\partial y}$ і $\frac{\partial r}{\partial z}$.

Тому $grad\, f(r) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$,

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки (x, y, z).

Розглянемо окремі випадки прикладу 2.

Приклад 3.

Нехай $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки і $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Обчисліть grad *f(r)*, де *f(r)* – функція, що диференціюється. *f (r)* = r.

Розв’язання: grad *f (r)* = grad *r* = $\frac{\vec{r}}{r}$.

Приклад 4.

Нехай $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки і $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Обчисліть grad *f(r)*, де *f(r)* – функція, що диференціюється. $f(r) = \frac{1}{r}$.

Розв’язання: $grad\, f(r) = grad\, \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$.

Приклад 5.

Доказати, що вектор $grad\, \varphi$ напрямлений перпендикулярно еквіпотенціальній поверхні ($\varphi = const$).

Доказ:

Маємо $\partial\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = grad\varphi d\vec{r},$ де $d\vec{r} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$.

Нехай вектор $d\vec{r}$ напрямлений вздовж поверхні $\varphi = const$. В цьому випадку очевидно, що $d\varphi = 0$. Тому (grad$\varphi d\vec{r}$) = 0. Це означає, що gradφ є перпендикулярним до $d\vec{r}$, тобто до поверхні $\varphi = const$. Що й потрібно було довести.

Приклад 6.

Нехай $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки і $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Обчислити дивергенцію радіуса-вектора $\vec{r}$.

Розв’язання:

$$div\vec{r} = \frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + \frac{\partial r_z}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Приклад 7.

Нехай $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки і $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

а) Обчислити div(grad *f(r)*), де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, *f(r)* – функція, яка диференціюється;

б) В якому випадку div(grad *f(r)*) = 0?

Розв’язання:

а) Визначимо grad *f(r)* = (P, Q, R).

Маємо P = $\frac{\partial f(r)}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{x}{r} \Rightarrow$ grad f =$f'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$,

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки (x, y, z). (Приклад 2).

Для обчислення div grad *f* знайдемо спочатку $\frac{dP}{dx}$.

$$\frac{dP}{dx} = \frac{f'}{r} + x^2\left(\frac{f''}{r^2} - \frac{f'}{r^3}\right).$$

Змінюючи в отриманому вигляді послідовно x на y, потім на z, отримаємо аналогічні форму для $\frac{\partial Q}{dx}$ і $\frac{\partial R}{dx}$. Отже,

$$\operatorname{div}\big(\operatorname{grad} f(r)\big) = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} = f'' + \frac{f'}{r}.$$

б) Розв'яжемо диференціальне рівняння $f'' + \frac{f'}{r} = 0$.

Для цього позначимо $u = f'$, тоді $u' + \frac{u}{r} = 0$,

$\frac{\partial u}{u} = -2\frac{\partial r}{r}, u = f' = \frac{C_0}{r^2}. f = \frac{C_1}{r} + C_2,$

де $C_i = const, i = 0, 1, 2, \ldots$

Отже,

$$\operatorname{divgrad}\left(\frac{C_1}{r} + C_2\right) = 0 \tag{8}$$

Відповідь: $\operatorname{div}\big(\operatorname{grad} f(r)\big) = f'' + \frac{f'}{r}$; $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{C_1}{r} + C_2\right) = 0$.

Приклад 8.

Обчислити, вважаючи, що f скалярна функція:

а) div $(f\vec{a})$

б) div $\big(f(r)\vec{a}(r)\big)$, $r = |\vec{r}|$, $\vec{r}$ – радіус-вектор точки (x, y, z).

Розв'язання:

а) div $(f\vec{a}) = (\nabla, f\vec{a}) = \left(\nabla, \underset{f}{\downarrow}\vec{a}\right) + \left(\nabla, f\underset{\vec{a}}{\downarrow}\right) = (\vec{a}, \nabla f) + f(\nabla, \vec{a}) =$ $(\vec{a}, gradf) + fdiv\vec{a}$

б) Обчислимо $\operatorname{div}\vec{a}(r)$. Враховуючи, що компоненти вектору $\vec{a}(r)$ залежать від r, аналогічно формулі $grad\ f = f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$ (приклад 2) отримаємо

$$div\vec{a}(r) = \left(\frac{d\vec{a}}{dr}, \frac{\vec{r}}{r}\right),$$

де $\frac{d\vec{a}}{dr}$ – вектор компоненти якого є похідні по r від компонент вектору $\vec{a}(r)$.

Далі по формулі div $(f\vec{a}) = (\vec{a}, grad\ f) + fdiv\vec{a}$ і, враховуючи, що

$$grad\ f = f'(r)\frac{\vec{r}}{r} \text{ і } div\vec{a}(r) = \left(\frac{d\vec{a}}{dr}, \frac{\vec{r}}{r}\right),$$

маємо:

$$div\big(f(r)\vec{a}(r)\big) = \frac{f'}{r}(\vec{r}, \vec{a}) + \frac{f}{r}\left(\vec{r}, \frac{da}{dr}\right).$$

Приклад 9.

Обчислити:

а) $div[\vec{A}\vec{B}]$;

б) $div[\vec{a}(r), \vec{b}], r = |\vec{r}|, \vec{r}$ – радіус-вектор точки (x, y, z).

в) $rot(\varphi\vec{a}), \varphi$ – скалярна функція.

Розв’язання:

а) Маємо $div[\vec{A}\vec{B}] = \left(\nabla[\vec{A}\,\vec{B}]\right) = \left(\nabla^{(A)}[\vec{A}\,\vec{B}]\right) + \left(\nabla^{(B)}[\vec{A}\,\vec{B}]\right)$.

Виконаємо циклічну перестановку змішаного добутку векторів, перетворимо доданок $\left(\nabla^{(A)}[\vec{A}\,\vec{B}]\right)$ до виду $\left(\vec{B}\,[\nabla^{(A)}\,\vec{A}\,]\right)$. Додаток $\left(\nabla^{(B)}[\vec{A}\,\vec{B}]\right)$ перетворимо аналогічно і якщо попередньо поміняти місцями вектори $\vec{A}$ і $\vec{B}$, отримаємо – $\left(\vec{A}[\nabla^{(B)}\,\vec{B}]\right)$.

Остаточно

$$div[\vec{A}\vec{B}] = \vec{B}rot\vec{A} - \vec{A}rot\vec{B}. \qquad (9)$$

б) Обчислимо $rot\vec{a}(r)$.

За визначенням ротору, якщо задано векторне поле $\vec{a} = (P, Q, R)$, то координати вектора $rot\vec{a}$:

$$rot\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Враховуючи, що компоненти вектору $\vec{a}(r)$ залежить від r, отримаємо $rot\vec{A}(r) = \left[R'(r)\frac{y}{r} - Q'(r)\frac{z}{r}\right]\vec{\imath} - \left[R'(r)\frac{x}{r} - P'(r)\frac{z}{r}\right]\vec{\jmath} + \left[Q'(r)\frac{x}{r} - P'(r)\frac{y}{r}\right]\vec{k} =$ $\frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ P'(r) & Q'(r) & R'(r) \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\left[\vec{r}, \frac{d\vec{a}}{dr}\right].$

Тоді по формулі (9) маємо $div\left[\vec{a}(r), \vec{b}\right], r = \left(\frac{\vec{b}}{r}, \left[\vec{r}, \frac{d\vec{a}}{dr}\right]\right) - \left(\vec{a}(r), rot\vec{b}\right).$

в) Маємо

$rot(\varphi\vec{a}) = [\nabla, \varphi\vec{a}] = \left[\nabla, \overset{\downarrow}{\varphi}\,\vec{a}\right] + \left[\nabla, \varphi\overset{\downarrow}{\vec{a}}\right] = [\nabla\varphi, \vec{a}] + \varphi[\nabla, \vec{a}] = [grad\varphi, \vec{a}] +$ $\varphi rot\vec{a}.$

Приклад 10.

Обчислити: а) $rot\left[\vec{a}\vec{b}\right]$; б) $div\left[\vec{r}[\vec{c}\vec{r}]\right]$; в) $rot\left[\vec{r}[\vec{c}\vec{r}]\right]$, де $\vec{c}$ – постійний вектор, $\vec{r}$ – радіус вектор точки (x, y, z)

Розв’язання:

а) Маємо

$$rot\left[\vec{a}\vec{b}\right] = \left[\nabla\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right] = \left[\nabla^{(a)}\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right] + \left[\nabla^{(b)}\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right].$$

Застосуємо правило подвійного векторного добутку,

$$\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a}, \vec{b}\right),$$

Тоді:

$$\left[\nabla^{(a)}\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right] = \vec{a}\left(\nabla^{(a)}\vec{b}\right) - \vec{b}\left(\nabla^{(a)}\vec{a}\right) = \left(\vec{b}\nabla^{(a)}\right)\vec{a} - \vec{b}\left(\nabla^{(a)}\vec{a}\right)$$

$$\left[\nabla^{(b)}\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right] = \vec{a}\left(\nabla^{(b)}\vec{b}\right) - \vec{b}\left(\nabla^{(b)}\vec{a}\right) = \vec{a}\left(\nabla^{(b)}\vec{b}\right) - \left(\vec{a}\nabla^{(b)}\right)\vec{b}$$

$$\mathrm{rot}\left[\vec{a}\vec{b}\right] = \left(\vec{b}\,\nabla^{(a)}\right)\vec{a} - \vec{b}\left(\nabla^{(a)}\vec{a}\right) + \vec{a}\left(\nabla^{(b)}\vec{b}\right) - \left(\vec{a}\nabla^{(b)}\right)\vec{b} = \left(\vec{b}\nabla\right)\vec{a} - \vec{b}div\vec{a} + \vec{a}div\vec{b} - (\vec{a}\nabla)\,\vec{b}.$$

Звідки

$$\mathrm{rot}\left[\vec{a}\vec{b}\right] = \left(\vec{b}\nabla\right)\vec{a} - \vec{b}div\vec{a} + \vec{a}div\vec{b} - (\vec{a}\nabla)\,\vec{b}. \qquad (10)$$

б) Позначимо $[\vec{c},\vec{r}] = \vec{R}$.

З формули (9) маємо $div[\vec{c}\vec{r}] = \vec{R}rot\vec{r} - \vec{r}rot\vec{R} = -(\vec{r}rot)[\vec{c},\vec{r}]$, оскільки за визначенням $rot\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$

Це також впливає із потенціальності поля виду $\vec{a} = f(r)\vec{r}, f \equiv 1$.

Таким чином,

$$div\left[\vec{c}\vec{R}\right] = -(\vec{r}rot)[\vec{c},\vec{r}] \qquad (11)$$

З формули (10) отримаємо

$$rot[\vec{c}\vec{r}] = (\vec{r}\nabla)\vec{c} - \vec{r}div\vec{c} + \vec{c}div\vec{r} - (\vec{c}\nabla)\vec{r} = 3\vec{c} - \vec{c} = 2\vec{c},$$

оскільки $(\vec{r}\nabla)\vec{c} = 0,\ div\vec{c} = 0,\ div\vec{r} = 3, (\vec{c}\nabla)\vec{r} = \vec{c}$.

Згідно з (11) $div\left[\vec{r}[\vec{c}\vec{r}]\right] = -2\vec{r}\vec{c}$.

в) За формулою (10)

$$rot\left[\vec{r}\vec{R}\right] = \left(\vec{R}\nabla\right)\vec{r} + \vec{r}div\vec{R} - \vec{R}div\vec{r} - (\vec{r}div)\vec{R}, \qquad (12)$$

де $\vec{R} = [\vec{c},\vec{r}];\ \vec{c} = (c_1, c_2, c_3), c_i = 1, 2, 3.$

Обчислимо доданки, що стоять у правій частині формули (12)

$(\vec{R}\nabla)\vec{r} = \vec{R}$ (див.(7г))

$$\vec{R} = [\vec{c},\vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (c_2 z - c_3 y)\vec{i} - (c_1 z - c_3 x)\vec{j} + (c_1 y - c_2 x)\vec{k};$$

$(\vec{r}\nabla)\vec{R} = x\frac{\partial \vec{R}}{\partial x} + y\frac{\partial \vec{R}}{\partial y} + z\frac{\partial \vec{R}}{\partial z} = \vec{R}$ (див. 7а, б, в).

Тому з (12) випливає, що

$rot\,\big[\vec{r}[\vec{c}\vec{r}]\big] = \vec{R} - \vec{R} - 3\vec{R} = -3[\vec{c}\vec{r}] = 3[\vec{r}\vec{c}]$.

Відповідь: $rot\,\big[\vec{r}[\vec{c}\vec{r}]\big] = 3[\vec{r}\vec{c}]$.

Приклад 11.

Для скалярного поля $\varphi(x,y,z), \varphi$ – двічі неперервно диференціюємо функція. Обчислити а) $rot\ grad\varphi$; б) $divgrad\varphi$.

Розв’язання:

а) Оскільки поле $\vec{a} = grad\varphi$ потенціальне, то

$$rot\vec{a} = rot\ grad\varphi = 0.$$

Таку ж відповідь можна отримати, якщо користуватись символічним вектором ∇:

$$rot\ grad\varphi = [\nabla,\nabla\varphi] = [\nabla,\nabla]\varphi = 0,$$

оскільки векторний добуток однакових векторів дорівнює нулю. За визначенням векторного добутку: $\big|[\vec{a}\vec{b}]\big| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|sin\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$. Для однакових векторів $sin\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = 0$, оскільки $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = 0$.

б) $div\ grad\varphi = div\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi,$

тобто

$$div\ grad\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi \tag{13}$$

де Δ – оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Оскільки і *div* і *grad* не залежить від вибору системи координат, то і $\Delta\varphi$ залежить лише від самого поля, а не від системи координат.

Приклад 12.

Для векторного поля $\vec{a} = \left(\vec{a}_x, \vec{a}_{y,}\vec{a}_z\right)$ обчислити а) $div\ rot\vec{a}$; б)$rot\ rot\vec{a}$.

Розв’язання:

За визначенням, якщо задане векторне поле $\vec{a} = (P, Q, R)$, то $rot\vec{a}$ має координати

$$rot\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Тоді для дивергенції такого вектора маємо

$$div\ rot\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = 0.$$

Можна отримати таку ж відповідь якщо оперувати з вектором ∇ . Тобто

$$div\ rot\vec{a} = (\nabla, [\nabla, \vec{a}]).$$

Скористуємось циклічною перестановкою у змішаному добутку, отримаємо:

$$div\ rot\vec{a} = (\nabla, [\nabla, \vec{a}]) = (\vec{a}[\nabla, \nabla]) = 0.$$

б) Користуючись правилом обчислення подвійного векторного добутку, $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, отримаємо

$$rot\,rot\vec{a} = (\nabla, [\nabla, \vec{a}]) = \nabla(\nabla, \vec{a}) - (\nabla, \nabla)\vec{a}.$$

Але $\nabla(\nabla, \vec{a}) = grad\ div\vec{a}$, а $(\nabla, \nabla)\vec{a} = \Delta\vec{a}$. Остаточно маємо:

$$rot\,rot\vec{a} = (\nabla, [\nabla, \vec{a}]) = grad\ div\vec{a} - \Delta\vec{a}. \tag{14}$$

Приклад 13.

Нехай $\vec{r}$ – радіус-вектор точки *(x, y, z)* тоді $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ – орт-вектори, які спрямовані по осям координат. Обчислити $rot\,rot\,rot\ \frac{\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}}{r}$,

Розв’язання:

Позначимо $\frac{\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}}{r} = \vec{a}$. Застосуємо формулу (14) до $rot\,rot\ \vec{a}$. Отримаємо $rot\,rot\,rot\ \vec{a} = rotgrad\ div\vec{a} - rot\Delta\vec{a}$.

Із прикладу 11а маємо $rotgrad\ div\vec{a} = 0$. Знайдемо $\Delta\vec{a}$:

$$\Delta\vec{a} = \left(\frac{\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}}{r}\right) = \Delta\left(\frac{1}{r}\right)\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}\right).$$

Але $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = div\ grad\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \Rightarrow \Delta\vec{a} = 0 \Rightarrow rot\Delta\vec{a} = 0$ (див. формули (13) і (8)). Тобто

$$rot\,rot\,rot\ \frac{\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}}{r} = 0.$$

Відповідь: $rot\,rot\,rot\ \frac{\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}}{r} = 0.$

У разі потенційного поля, напруженість поля **E** може бути представлена таким чином

$$div(grad\varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{15}$$

Цей вираз містить подвійну диференціальну операцію: дивергенцію від градієнта. Для декартової системи координат можна записати цю операцію через відповідні похідні. Дійсно, подаючи у цю формулу складові градієнту:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Отримаємо (див. формулу 13)

$$div\ grad\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi$$

Операція (div grad) називається лапласіаном і позначається знаком Δ (як це було представлено вище). Використовуючи оператор набла, отримаємо

$$\Delta\varphi \equiv div\ grad\varphi \equiv \nabla(\nabla\varphi) \equiv \nabla^2\varphi$$

У декартових координатах та у застосуванні до скалярної функції можна вважати операції ∇^2 та Δ тотожними.

Рівняння (15) є основним рівнянням потенціального електричного поля і називається рівнянням Пуассона. Його можна записати ще таким чином:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

У сфері поля, де заряди відсутні (тобто ρ = 0), рівняння (15) спрощується, оскільки у його правої частини виявляється нуль:

$$div(grad\varphi) = 0.$$

Тобто $\Delta\varphi = 0$.

У цьому випадку це рівняння називають рівнянням Лапласа.

Рівняння

$$\nabla^2 \varphi = \begin{cases} -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ 0 \end{cases}$$

називають диференціальним рівнянням електричного потенціального поля.

Приклад 14.

У деякій області електричного поля потенціал змінюється за законом

$$\varphi = \sum_n A_n \cos nx\, ch\, ny$$

Чи міститься в цьому просторі об'ємний заряд. Чому він дорівнює?

Розв’язання:

Продиференціюємо двічі даний вираз. Отримаємо:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} =$$
$$\sum_n A_n n^2 \left(-\cos nx\, ch\, ny + \cos nx\, ch\, ny\right) = 0$$

Рівняння Лапласа задовольняється (об'ємний заряд дорівнює нулю).

Тобто в даному просторі нема об'ємного заряду.

Приклад 15.

У деякій області електричного поля потенціал змінюється за законом

$$\varphi = \sum_n A_n \cos nx \sin ny$$

Чи міститься в цьому просторі об'ємний заряд і чому він дорівнює?

Розв’язання:

Продиференціюємо двічі даний вираз. Отримаємо:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

$$\nabla^2\varphi = -2\sum_n A_n n^2 \cos nx \sin ny$$

З рівняння випливає, що права частина цієї рівності в загальному випадку не дорівнює нулю.

Аналізуючи приклади 14 і 15, можна зробити такий загальний висновок: Добутки типу:

$$\begin{Bmatrix}\cos \\ \sin\end{Bmatrix} nx \begin{Bmatrix} ch \\ sh \end{Bmatrix} ny$$

завжди задовольняють рівнянню Лапласа (перший множник у формулі *cos* чи *sin*, а другий ch чи sh).

Приклад 16.

Задана функція $z=xy$. Знайти ∇z.

Розв’язання:

$\nabla z=(\partial z/\partial x)\vec{i} +(\partial z/\partial y)\vec{j} =y\vec{i} +x\vec{j}$.

Приклад 17.

Деяка функція дорівнює $z=30yx^3$. Знайти ∇z.

Розв’язання:

$$\nabla z=(\partial z/\partial x)\vec{i} +(\partial z/\partial y)\vec{j} =90yx^2\vec{i} +30x^3\vec{j}$$

3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Користуючись визначеннями ротора і градієнта в декартових координатах довести, що $rot\ grad\varphi = 0$.
2. Користуючись властивостями оператора набла, довести, що
   $rot\ grad\varphi = 0$.
3. Користуючись визначеннями ротора і градієнта в декартових координатах довести, що $div\ rot\vec{a} = 0$.
4. Користуючись властивостями оператора набла, довести, що
   що $div\ rot\vec{a} = 0$.
5. Замінити оператор набла операціями *grad, div, rot* і Δ у наступних виразах:

   5.1 $\left(\nabla\left[\vec{A}\,\vec{B}\right]\right)$

   5.2 $\nabla\left(\vec{A}\,\vec{B}\right)$

   5.3 $\left[\nabla\left[\vec{A}\,\vec{B}\right]\right]$

   5.4 $\left(\nabla f\vec{A}\right)$

   5.5 $\left[\nabla f\vec{A}\right]$

   5.6 $\nabla(fg)$

   5.7 $\left(\nabla, \nabla(fg)\right)$

   5.8 $\left[\nabla\ [\vec{\omega}\,\vec{r}]\right]$

   5.9 $(\nabla\ [\vec{\omega}\,\vec{r}])$

   5.10 $\nabla\left(\nabla\vec{A}\right)$

6. Обчислити:

   а) $\Delta\frac{1}{r}\quad (r \neq 0)$; б) $div(\varphi(r)\vec{r})$; $rot(\varphi(r)\vec{r})$; в) $\vec{\nabla}(\vec{A}\vec{r})$, де $\vec{A} = const$;

   г) $\vec{\nabla}(\vec{A}(r)\vec{r})$; д) $grad(\vec{A}(r)\vec{B}(r))$; $div(\varphi(r)\vec{A}(r))$; $rot(\varphi(r)\vec{A}(r))$

   е) $div[\vec{r}[\vec{A}\vec{r}]]$; $rot[\vec{r}[\vec{A}\vec{r}]]$; $div[\vec{A}\vec{r}]$; $rot[\vec{A}\vec{r}]$; $div\{(\vec{A}\vec{r})\vec{r}\}$; $rot\{(\vec{A}\vec{r})\vec{r}\}$;

   $div\{\varphi(r)[\vec{A}\vec{r}]\}$; $rot\{\varphi(r)[\vec{A}\vec{r}]\}$, $\vec{A} = const$;

ЛІТЕРАТУРА

1.Теоретична електродинаміка: навч. посіб. / Багацька О. В., Бутрим О. Ю., Колчигін М. М. та ін. Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2017. 132 с.

2. Клубіс Я. Д., Шкатуляк Н. М. Основи електродинаміки: навч. посіб. Одеса: ПНПУ імені К, Д. Ушинського, 2020. 208 с.

3. Клубіс Я. Д. , Шкатуляк Н. М. Збірник задач з електродинаміки: навч. посіб. Одеса: Фенікс, 2014. 284 с.

4. Трохимчук П. П. Теоретична фізика. Луцьк: Вежа-Друк, 2017. 256 с.

5. Головацький В. А. Електродинаміка. Чернівці: ЧНУ ім. Ю. Федьковича, 2015. 281 с.

6. Жданов В. С., Пономаренко С. М., Долгошей В. Б. Класична електродинаміка. Збірник задач [Електронний ресурс]: навчальний посібник. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 98 с.

7. Електродинаміка: навч. посібник для студ. ВНЗ фізико-математичних спеціальностей / Дудик М. В., Діхтяренко Ю. В., Краснобокий Ю. М., Побережець І. І. Умань: Жовтий О. О., 2015. 120 с.

8. Скіцько І.Ф., Скіцько О.І Фізика: підручник: Київ: НТУУ КПІ імені Ігоря Сікорського, 2017. 513 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/19035?mode=full

9. Тамм И.Е. Основы теории электричества: М.: Физматлит, 2003. 616 с.

10. Trokhimchuck P. P. Relaxed Optics: Realities and Perspectives. Saarbrukken: Lambert Academic Publishing, 2016. 260 p.

11. Збірник задач з електродинаміки: навч. посіб./ Блажиєвська М. В. та ін. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2015. 112 с.