

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД

**«ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ К. Д. УШИНСЬКОГО»**

ІВАНОВА С. В.

**МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗАКЛАДАХ ПЕРЕДВИЩОЇ І
ВИЩОЇ ОСВІТИ. МЕТОДИЧНИЙ АНАЛІЗ ТЕМ НАВЧАЛЬНОЇ
ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»**

Методичні рекомендації для організації самостійної роботи
здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня
галузі знань 01 Освіта/Педагогіка
спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)
денної та заочної форм навчання

Одеса

2024

*Рекомендовано до друку вченою радою Державного закладу
«Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського» (Протокол №9 від 29 лютого 2024 р.)*

Рецензенти:

Урум Г. Д., канд. техн. наук, доцент кафедри вищої математики та статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»,

Волкова М. Г., канд. фіз-мат. наук, доцент, в. о. зав. кафедри фізико-математичних наук Державного університету інтелектуальних технологій і зв'язку.

Іванова С. В. Методика навчання математики в закладах передвищої і вищої освіти. Методичний аналіз тем навчальної дисципліни «Вища математика» : Методичні рекомендації для організації самостійної роботи здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня галузі знань 01 Освіта/Педагогіка спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) денної та заочної форм навчання. Одеса : Університет Ушинського, 2024. 36 с.

Методичні рекомендації розроблено відповідно до освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)» другого магістерського рівня спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика), робочої програми з навчальної дисципліни «Методика навчання математики в закладах передвищої і вищої освіти» з метою посилення ефективності підготовки майбутніх фахівців. В методичних рекомендаціях представлено авторські розробки щодо методичного аналізу основних тем навчальної дисципліни «Вища математика», у якому деталізовано системи моделей навчання за цією дисципліною для різних спеціальностей технічних і економічних університетів.

ЗМІСТ

Вступ	4
1. Загальна схема методичного аналізу тем навчальної дисципліни «Вища математика»	
1.1 Мета і завдання методичного аналізу тем дисципліни	6
1.2 Основні етапи схеми методичного аналізу тем	8
1.3 Приклади окремих етапів методичного аналізу тем навчальної дисципліни «Вища математика»	10
2. Методичний аналіз теми «Невизначений інтеграл»	
2.1 Місце, значення теми «Невизначений інтеграл», її зв'язки з іншими темами; опорні знання та уміння; структура	15
2.2 Методика навчання здобувачів освіти основним поняттям та твердження теми «Невизначений інтеграл»	17
2.3 Методичні особливості формування у здобувачів освіти умінь розв'язувати вправи теми «Невизначений інтеграл»	21
Підсумки	26
Питання для самоперевірки	27
Завдання для самостійної роботи	29
Рекомендовані джерела інформації	34

ВСТУП

Методичні рекомендації для організації самостійної роботи магістрантів «Методика навчання математики в закладах передвищої і вищої освіти. Методичний аналіз основних тем навчальної дисципліни «Вища математика» - представляють собою другу частину комплексу методичних матеріалів з обов'язкової інтегрованої дисципліни «Методика навчання математики в закладах передвищої та вищої освіти» для здобувачів освіти спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика).

Цей комплект складається з методичних рекомендацій:

- «Загальні основи методики навчання математики в закладах вищої освіти»,
- «Методика навчання математики в закладах передвищої і вищої освіти.

Методичний аналіз тем навчальної дисципліни «Вища математика»,

- «Методика навчання математики в закладах передвищої і вищої освіти.

Методи, прийоми, форми і засоби навчання»,

- «Особливості методики навчання математики в закладах передвищої освіти».

Мета навчальної дисципліни «Методика навчання математики в закладах передвищої та вищої освіти» полягає у формуванні в магістрантів комплексу уявлень про методичні особливості викладання навчальної «Вища математика»; ознайомлення з основними категоріями методики навчання математики в закладах вищої освіти, сучасними технологіями навчання, формами контролю і оцінювання навчальних досягнень здобувачів вищої освіти, організацією методичних досліджень; усвідомлення методичних засад процесу навчання математики; визначення методичних особливостей викладання вищої математики у залежності від майбутньої спеціальності здобувачів вищої освіти.

У методичних рекомендаціях «Методика навчання математики в закладах передвищої і вищої освіти. Методичний аналіз тем навчальної дисципліни «Вища математика» представлено авторські розробки щодо уточнення підходів до визначення мети і завдань методичного аналізу тем дисципліни «Вища математика»,

удосконалення загальної схеми методичного аналізу тем і деталізації характеристики кожного етапу такого аналізу для технічних та економічних закладів вищої освіти залежно від спеціальності підготовки майбутніх фахівців.

Методичні рекомендації чітко структуровано. В них виокремлено проблемно-мотиваційний, основний інформаційний та додатковий інформаційний блоки. Крім того, методичні рекомендації містять підсумковий блок, питання для самоперевірки та завдання для самостійної роботи здобувачів освіти. Всі завдання для самостійної роботи даються більш ніж у 20 варіантах. Підсумковим є довготермінове завдання щодо розробки методичного аналізу однієї з тем навчальної дисципліни «Вища математика». Передбачається, проведення консультацій щодо виконання цього завдання та захист результатів представлених розробок.

Вважаємо, що проблеми деталізації і уточнення системи моделей навчальної дисципліни (цільової, змістової та процесуальної) під час розробки методичного аналізу основних тем навчальної дисципліни «Вища математика» будуть цікавими майбутнім педагогам і суттєво розширять їх світогляд у сфері математичної освіти. Бажаємо магістрантам наполегливості, наснаги та терпіння у набутті компетентностей щодо методичного аналізу тем вищої математики, орієнтованого на різні спеціальності закладів вищої освіти.

1. ЗАГАЛЬНА СХЕМА МЕТОДИЧНОГО АНАЛІЗУ ТЕМ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ПРОБЛЕМНО-МОТИВАЦІЙНИЙ БЛОК

Як відомо, система моделей навчальної дисципліни «Вища математика», яка містить цільову, змістову і процесуальні моделі, для різних спеціальностей конкретизується і деталізується у методичному аналізі кожної теми цієї навчальної дисципліни. Тому наступний етап вивчення «Методики математики в закладах вищої освіти» полягає у формуванні у магістрантів умінь виконувати методичний аналіз тем вищої математики.

Часто у здобувачів освіти виникають питання:

- для чого робити методичний аналіз теми, який потребує значних зусиль і часових витрат?;
- які складові такого методичного аналізу?;
- чи відрізняється структура методичного аналізу тем вищої математики від методичного аналізу тем шкільного курсу математики?

1.1 Мета і завдання методичного аналізу теми

ОСНОВНИЙ ІНФОРМАЦІЙНИЙ БЛОК

Розглянемо мету та завдання розробки методичного аналізу тем з вищої математики.

Мета методичного аналізу довільної теми навчальної дисципліни полягає у систематизації і структуруванні навчального, дидактичного та методичного матеріалу теми, що дозволяє створити підґрунтя для якісної розробки лекцій та практичних занять за цією темою.

Завдання методичного аналізу довільної теми навчальної дисципліни :

1) **зафіксувати зв'язки** навчального матеріалу даної теми з іншими темами і, можливо, з іншими навчальними дисциплінами;

2) **виділити опорні знання та уміння**, встановити можливості простішої перевірки їх наявності у здобувачів освіти і передбачити, у випадку необхідності, варіанти короткого повторення опорних теоретичних відомостей і розв'язання простіших вправ;

3) **повторити, виокремити і ранжувати теоретичний матеріал теми** (поняття та твердження);

4) **виокремити і ранжувати типові вправи** теми, розробити на цій основі навчальні системи (серії) вправ для формування в студентів умінь розв'язувати вправи і навчальні системи (серії) вправ для проведення відповідного контролю щодо виконання студентами цих вправ;

5) **удосконалити особисті уміння розв'язувати вправи і виділити методичні особливості навчання** студентів розв'язуванню типових вправ;

6) **наочно представити структуру навчального матеріалу** теми і зв'язки його окремих компонентів.

Зрозуміло, що ґрунтовний методичний аналіз теми дає майбутньому викладачу можливість щодо повторення, систематизації, структуризації і ранжування її змісту; встановлення методичних особливостей навчання поняттям теми та їх властивостям, удосконалення особистих умінь розв'язування вправ теми і визначення методичних особливостей формування у здобувачів освіти умінь розв'язувати ці вправи.

Зауважимо, що якісне виконання методичного аналізу теми особливо важливо для викладачів-початківців, які не мають значного досвіду навчання вищій математики.

Під час виконання методичного аналізу тем навчальної дисципліни «Вища математика» необхідно керуватися

- освітньо-професійною програмою для здобувачів освіти першого (бакалаврського) рівня конкретної галузі знань і спеціальності;

- відповідною робочою програмою навчальної дисципліни «Вища математика»;

- рекомендованими джерелами інформації, які вказано у цій робочій програмі.

1.2 Загальна схема методичного аналізу теми навчальної дисципліни «Вища математика»

ОСНОВНИЙ ІНФОРМАЦІЙНИЙ БЛОК

Вважаємо, що загальна схема методичного аналізу довільної теми повинна містити шість основних складових, які будемо називати *етапами методичного аналізу* (табл. 1).

Таблиця 1

Загальна схема методичного аналізу навчальної теми

№ п/п	Назви етапів методичного аналізу теми
1.	<i>Місце і значення теми</i> у змістовій моделі навчальної дисципліни “Вища математика” для підготовки майбутніх фахівців заданої спеціальності; <i>Зв’язки даної теми</i> з іншими темами навчальної дисципліни.
2.	<i>Опорні знання і уміння</i> , якими повинні володіти студенти перед вивченням заданої теми.
3.	<i>Структура теми</i> , яку представлено у вигляді <i>інтелект-карти</i> , або <i>блок-схеми</i> , або <i>таблиці</i> .
4.	<i>Основні поняття</i> теми і методичні особливості навчання студентів цим поняттям.
5.	<i>Основні твердження</i> теми і методичні особливості навчання студентів цим твердженням.
6.	<i>Основні види вправ</i> теми. Специфічні особливості формування в учнів/студентів умінь розв’язувати окремі види вправ теми.

Викладачам з певним досвідом навчання студентів тем вищої математики корисно продумати і розробити додатковий сьомий етап, в якому вказати основні типові утруднення і помилки здобувачів освіти під час вивчення теоретичного і практичного навчального матеріалу теми.

Розглянемо особливості кожного етапу методичного аналізу теми навчальної дисципліни «Вища математика».

Етап 1. Місце і значення теми у навчальній дисципліні; її зв'язки з іншими темами. Визначення місця і значення теми проводиться на основі аналізу «Робочої програми» даної дисципліни для студентів, які навчаються за певною спеціальністю. А також підручників, навчальних посібників та методичних матеріалів з дисципліни «Вища математика», в першу чергу, вказаних у цій «Робочій програмі». Крім того можна використати й інші підручники, навчальні посібники та методичні рекомендації з «Вищої математики» для здобувачів освіти .

Важливо розглянути дану тему у контексті вивчення інших тем цього розділу та інших розділів дисципліни «Вища математика» для встановлення внутрішньо предметних зв'язків.

На **етапі 2** виокремлюють **опорні знання і уміння**, якими повинні володіти студенти перед вивченням теми.

Мета даного етапу методичного аналізу полягає у виділенні основних знань і умінь без яких неможливе оволодіння навчальним матеріалом теми. Такі знання та уміння називають опорними.

Етап 3 передбачає вирішення питань, пов'язаних із **структуруванням і візуалізацією** основних складових теми. Тут передбачено виокремити основні структурні компоненти теми і їхні взаємозв'язки. Результати виконання цього блоку доцільно оформити у вигляді **інтелект-карти карти**, або **блок-схеми**, або **таблиці**.

На **етапі 4** треба систематизувати і ранжувати **основні поняття теми** і визначити їх методичні особливості. На цьому етапі необхідно розглянути означення основних понять теми, підібрати відповідні приклади та з'ясувати методику навчання студентів цим поняттям.

Етап 5 містить **основні твердження теми** і методичні особливості навчання студентів цим твердженням. Тут треба виділити основні твердження теми і з'ясувати можливі рівні обґрунтування цих тверджень. Якщо передбачено розглянути доведення окремих тверджень, то треба визначитися з методикою навчання студентів цим доведенням.

Етап 6 присвячено **основним типам вправ теми та специфічним особливостям формування у здобувачів освіти умінь розв'язувати ці вправи.**

На даному етапі необхідно виділити основні типи вправ, які будуть запропоновано студентам для розв'язування під час вивчення теми. Треба встановити можливі методи/способи розв'язування цих типових вправ, розробити методичку формування умінь розв'язувати такі вправи (застосування алгоритмів, приписів, методичних порад). Будуть корисними зразки оформлення розв'язання цих вправ.

Також доцільно вказати навчальні системи (серії) вправ, розроблені з метою формування умінь у студентів відповідних умінь та навичок і навчальні системи (серії) для проведення самоконтролю здобувачів освіти і контролю з боку викладача.

Дуже корисною є робота з виділення помилок, яких часто припускаються здобувачі освіти під час виконання вказаних вправ. Спочатку ці помилки виділяємо на основі застосування рефлексії власного досвіду розв'язування вправ теми, а потім на основі отриманого досвіду навчання студентів.

1.3 Приклади реалізації окремих етапів методичного аналізу тем навчальної дисципліни «Вища математика»

ОСНОВНИЙ ІНФОРМАЦІЙНИЙ БЛОК

Етап 1. Місце і значення теми у навчальній дисципліні; її зв'язки з іншими темами.

Приклад 1. **Тема «Матриці і визначники»** є першою темою розділу «Лінійна та векторна алгебра». Після цієї теми розглядаються теми «Системи лінійних рівнянь» та «Вектори» і у кожній з цих тем використовуються відомості щодо матриць та визначників. Наприклад, одним з методів розв'язування систем рівнянь є матричний метод.

Приклад 2. **Тема «Пряма на площині та у просторі»** є другою темою розділу «Аналітична геометрія». Перед цією темою розглядається тема «Площини», а після - тема «Криви другого порядку». Зрозуміло, що тема «Пряма на площині та у

просторі» дуже тісно пов'язана з темою «Площини». Крім того, у цій темі використовуються відомості з тем «Матриці і визначники» та «Вектори», які вивчалися у попередній темі «Основи лінійної та векторної алгебри».

Важлива особливість даної теми полягає в тому, що окремі питання даної теми значний час вивчаються у дисциплінах «Алгебра» та «Геометрія» загальноосвітніх навчальних закладів. Відповідно, компетентності набуті здобувачами освіти у цей час, стають підґрунтям для продовження вивчення теми у закладах вищої освіти.

Приклад 3. **Тема «Границя послідовностей та функцій»** є першою темою розділу «Вступ до математичного аналізу». Після цієї теми вивчається тема «Неперервні функції», яка базується на понятті «границя функції», оскільки означення поняття «неперервність функції» ґрунтується на понятті «границя функції». У темі «Границя послідовностей та функцій» розглядаються основні правила знаходження границь, які потім використовуються під час вивчення неперервності функції.

Питання, які вивчаються у темі «Границя послідовностей та функцій» є основою не тільки теми «Неперервні функції», але й наступного розділу «Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних», оскільки поняття «похідна» - базове для даного розділу, вводиться за допомогою поняття «границя функції». Загалом, тема «Границя послідовностей та функцій» є ключовою темою математичного аналізу, бо одне з центральних означень «похідна функції» визначається на основі поняття «границя функції».

Зауважимо, що означення поняття «границя послідовності» і, побудоване на його основі означення поняття «границя функції», вважаються найскладнішими у математичному аналізі.

Етап 2. Опорні знання і уміння, якими повинні володіти студенти перед вивченням теми.

Приклад 1. Опорні поняття і уміння, якими повинні володіти здобувачі освіти перед вивченням **теми «Границя послідовностей та функцій»** визначаються залежно від того, на якому рівні здобувачі освіти вивчали дисципліну «Алгебра і початки аналізу» у загальноосвітніх середніх навчальних закладах. Відповідно до

«Програми з математики для профільної школи», означення границі послідовності передбачено вивчати лише на профільному рівні, тому здобувачів освіти, які навчалися за рівнем стандарту, з цим поняттям не було ознайомлено. Таким чином, перед навчання теми «Границя послідовностей та функцій» викладач повинен

з'ясувати, на якому рівні більшість здобувачів освіти даної групи вивчала дисципліну «Алгебра і початки аналізу» у середніх закладах освіти, і відповідно до цього планувати навчання даної теми.

Приклад 2. *Тема «Матриці і визначники»*, у певному сенсі, є винятковою, бо неможливо виокремити конкретні опорні знання та вміння, які характерні саме для неї.

Приклад 3. Опорні знання і вміння, якими повинні володіти студенти перед вивченням *теми «Невизначений інтеграл»*, формуються у профільній школі під час вивчення теми «Інтеграл і його застосування». Центральним опорним поняттям для теми «Невизначений інтеграл» є поняття первісної.

До опорних віднесемо також наступні твердження і формули теми:

1) основну властивість первісної та її геометричний зміст;

2) таблицю первісних;

3) правила знаходження первісних (первісна суми дорівнює сумі первісних доданків; сталий множник можна виносити при знаходженні первісної; якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, а k і b – сталі, то $1/k \cdot F(kx+b)$ є первісною для $f(kx+b)$;

4) формулу Ньютона-Лейбниця.

Здобувачі освіти повинні уміти застосовувати ці теоретичні відомості під час виконання вправ:

а) на знаходження первісної у загальному вигляді,

б) на знаходження первісної, яка проходить через задану точку.

Це опорні вміння для даної теми.

Етап 3. Структура теми.

Приклад 1, Розглянемо *тему «Матриці і визначники»*, яку структуровано за двома блоками:

- 1) основні поняття та твердження теми;
- 2) основні вправи теми (табл. 2).

Таблиця 2

Структура теми «Матриці і визначники»

Матриці	Визначники	Ранг матриці
Основні поняття та твердження теми		
1. Матриці, їх види.	1. Визначники другого та третього порядків та правила їх обчислення.	Мінори прямокутної матриці. Ранг матриці.
2. Операції над матрицями та їх властивості.	2. Властивості визначників.	
3. Транспонування матриць, Елементарні перетворення матриць та їх властивості.	3. Мінори і алгебраїчні доповнення до елементів визначника. Розкладання визначника за елементами рядка або стовпця.	
4. Матриця обернена до даної.		
Основні вправи теми		
Виконання дій з матрицями.	Обчислення визначників другого та третього порядків.	Знаходження рангу матриці методом елементарних перетворень.
	Обчислення визначників вищих порядків.	
Знаходження матриці оберненої до заданої.		
Розв'язування матричних рівнянь.		

Приклад 2. *Структуру теми «Границя послідовностей та функцій»* доцільно представити у вигляді таблиці, яка містить такі блоки:

- «Границя послідовності»,
- «Границя функції»,
- схематичний блок «Види невизначеності» (табл. 3).

Виокремлення останнього блоку пояснюється тим, що значна кількість вправ на обчислення границь послідовностей та функцій пов'язана із розкриттям невизначеності вказаних видів. Важлива методична особливість даної теми – тісний зв'язок між означеннями поняття «границя послідовності» і «границя функції», який обумовлює можливість використання аналогії при навчанні властивостям границь послідовності та границь функції.

Таблиця 3

Структура теми «Границя послідовностей та функцій»

Границя послідовності		Границя функції				
Означення	Властивості	Означення	Властивості	Чудові границі		
границі послідовності та її геометричний зміст	1) єдиність границі	границі функції за Коши та за Гейне	1) єдиність границі	перша чудова границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ друга чудова границя $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$		
	2) обмеженість збіжної послідовності		2) локальна обмеженість			
	3) арифметичні дії		3) арифметичні дії			
	4) границя стаціонарної послідовності		4) границя константи			
	5) теорема про три послідовності		5) критерій Коши			
Види невизначеності						
$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	1^∞	∞^0	0^0

Приклад 3. У структурі теми «Невизначений інтеграл» доцільно виокремити три блоки:

- 1) основні поняття та їх властивості;
- 2) загальні методи інтегрування;
- 3) специфічні особливості знаходження невизначених інтегралів окремих видів (табл. 4).

2. МЕТОДИЧНИЙ АНАЛІЗ ТЕМИ «НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ»

ПРОБЛЕМНО-МОТИВАЦІЙНИЙ БЛОК

Традиційно, починаючи з часів Колмогоровської реформи навчання математики, поняття «невизначений інтеграл» не вивчається у закладах профільної середньої освіти. У темі «Інтеграл та його застосування» передбачено навчати здобувачів освіти поняттям «первісна» і «визначений інтеграл», їх властивостям. Щодо формування умінь та навичок з техніки інтегрування, то використовується лише метод безпосереднього інтегрування за таблицею первісних і трьома правилами знаходження первісних. У зв'язку з цим, викликають інтерес питання: які методичні підходи щодо навчання здобувачів освіти іншим методам інтегрування рекомендовано використовувати?, як організувати ефективне набуття здобувачами освіти техніки інтегрування?

2.1 Місце, значення, зв'язки з іншими темами, опорні знання та уміння, структура теми «Невизначений інтеграл»

ОСНОВНИЙ ЗМІСТОВИЙ БЛОК

Етап 1. Місце і значення теми у навчальній дисципліні «Вища математика»; її зв'язки з іншими темами.

Тема «Невизначений інтеграл» є першою темою розділу «Інтегральне числення». Після цієї теми розглядаються визначені інтеграли і інтеграли інших видів. У темі «Невизначений інтеграл» поширюється, поглиблюється та удосконалюється техніка інтегрування, яка потім застосовується під час обчислення інтегралів інших видів.

Тема «Невизначений інтеграл» тісно пов'язана з темою «Диференціальне числення», бо інтегрування і диференціювання – взаємно обернені операції. Саме тому після знаходження невизначеного інтегралу завжди є можливість зробити перевірку диференціюванням.

Етап 2. Опорні поняття теми і уміння, якими повинні володіти студенти перед її вивченням. Опорні поняття і уміння, якими повинні володіти студенти перед вивченням теми «Невизначений інтеграл», формуються у профільній школі під час вивчення теми «Інтеграл і його застосування». Так, центральним опорним поняттям для теми «Невизначений інтеграл» є поняття первісної.

Означення. Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо для будь-якого x з цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Важливі також наступні твердження і формули: 1) основна властивість первісної та її геометричний зміст; 2) таблиця первісних; 3) три правила знаходження первісних; 4) формула Ньютона-Лейбниці.

Студенти повинні уміти застосовувати ці теоретичні відомості під час виконання вправ на знаходження первісної у загальному вигляді та такої, що проходить через задану точку.

Етап 3. Структура теми.

У структурі теми доцільно виокремити такі блоки: основні поняття, твердження та формули теми; методи інтегрування; особливості інтегрування раціональних дробів, біномів, тригонометричних функцій та ін. (табл. 4).

Таблиця 4

Структура теми «Невизначений інтеграл»

Основні поняття та їх властивості		Методи інтегрування	
Означення	Властивості		
первісна	1) похідна від невизначеного інтегралу	1) безпосереднього інтегрування	
невизначений інтеграл	2) диференціал від невизначеного інтегралу	2) заміни змінної	
	3) невизначений інтеграл від диференціалу функції	3) інтегрування частинами	
	4) сталий множник можна виносити за знак інтегралу		
	5) невизначений інтеграл суми функцій		
Специфічні особливості інтегрування			
раціональних дробів	біномів	тригонометричних функцій	ірраціональних функцій

2.2 Методика навчання здобувачів освіти основним поняттям та твердженнями теми «Невизначений інтеграл»

ОСНОВНИЙ ІНФОРМАЦІЙНИЙ БЛОК

Етап 4. Основні поняття теми і методичні особливості навчання здобувачів освіти цим поняттям.

До основних понять теми відносять поняття «первісна» та «невизначений інтеграл».

Означення. Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо для будь-якого $x \in (a;b)$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Означення первісної відоме здобувачам освіти з відповідної теми дисципліни «Алгебра і початки аналізу» профільної школи, але доцільно його нагадати. Якщо здобувачі освіти мають низький рівень математичної підготовки, то треба привести приклади первісних для кількох заданих функцій.

Означення. Множина всіх первісних $F(x) + C$ для $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом** від функції $f(x)$ і позначається $\int f(x)dx$, тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{де функція } f(x) \text{ - підінтегральна функція.}$$

Перед введенням означення невизначеного інтегралу, доцільно поставити питання про кількість первісних, які можна знайти для заданої функції.

Відповідь на це питання дає теорема, яка у шкільному курсі має назву основної властивості первісної.

Теорема. Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, то множина всіх первісних для $f(x)$ має вигляд $F(x) + C$, де C — довільна стала.

Якщо студенти мають низький рівень математичної підготовки, то треба привести приклади для ілюстрації даної теореми і лише після цього ввести означення невизначеного інтегралу.

Етап 5. Основні твердження теми і методичні особливості навчання здобувачів освіти цим твердженням.

До основних тверджень теми віднесемо **властивості невизначеного інтегралу**.

1) Похідна від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральній функції

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2) Диференціал від невизначеного інтегралу дорівнює виразу, що стоїть під знаком інтегралу

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

3) Невизначений інтеграл від диференціалу деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої

$$\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = F(x) + C$$

4) Сталій множник можна виносити за знак невизначеного інтегралу

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

5) Невизначений інтеграл від суми або різниці двох функцій дорівнює сумі або різниці невизначених інтегралів від цих функцій

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Якщо студенти мають низький рівень математичної підготовки і/або кількість годин на вивчення теми незначна, то можна обмежитися властивостями 1, 4 і 5, які часто застосовуються при розв'язуванні вправ.

Зауважимо, що доведення цих властивостей базується на використанні відповідних властивостей первісних, які вивчалися у курсі алгебри і початків аналізу старшої школи.

Наприклад. Доведемо, що первісна для суми дорівнює сумі первісних для доданків. Нехай $F(x)$ первісна для функції $f(x)$, тому $F'(x)=f(x)$ (за означенням первісної), аналогічно $G(x)$ первісна для функції $g(x)$, тому $G'(x)=g(x)$.

За правилом обчислення похідної суми маємо

$(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$, а це і означає, що $F(x) \pm G(x)$ є первісною для $f(x) \pm g(x)$.

Використовуючи означення невизначеного інтеграла цю властивість можна записати у вигляді

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

До теоретичних відомостей даної теми відносять також **таблицю інтегралів**. Фактично, таблиця первісних, відома з шкільного курсу алгебри і початків аналізу, стає основою для створення таблиці інтегралів, яка доповнюється такими інтегралами:

$$1) \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C ; \quad 2) \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C ;$$

$$3) \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C ; \quad 4) \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C ;$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C ; \quad 6) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + s}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + s} \right| + C \text{ («довгий логарифм»);}$$

$$7) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C ; \quad 8) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \text{ («високий логарифм»).$$

Теоретичними відомостями вважають **загальні методи інтегрування**:

- **безпосереднього інтегрування**;
- **заміни змінної**;
- **інтегрування частинами**.

ДОДАТКОВИЙ ІНФОРМАЦІЙНИЙ БЛОК

Загальні методи інтегрування

Метод інтегрування, при якому підінтегральна функція з використанням тотожних перетворень і властивостей невизначеного інтегралу зводиться до одного або декількох табличних інтегралів, називається **методом безпосереднього інтегрування**.

Метод заміни змінної полягає в тому, що під знак невизначеного інтегралу вводиться нова змінна. При цьому заданий інтеграл зводиться до нового інтегралу, який або є табличним або відомі методи його розв'язання.

Нехай потрібно обчислити інтеграл $\int f(x)dx$. Зробимо заміну змінної $x = g(t)$, де $g(t)$ — диференційована функція, тоді $dx = g'(t)dt$. Підставляючи останній вираз у заданий інтеграл, отримаємо формулу заміни змінної під знаком невизначеного інтеграла:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

Після знаходження інтегралу у правій частині останньої рівності слід повернутися до початкової змінної x . Зауважимо, що методом заміни змінної розв'язується значна частина невизначених інтегралів, але загального прийому для вибору доцільної заміни не існує.

Обчислення невизначених інтегралів **методом інтегрування частинами** полягає у використанні формули

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

де u та v — функції змінної x ; $du = u'(x) dx$, $dv = v'(x) dx$.

Якщо потрібно обчислити інтеграл $\int f(x) dx$, то підінтегральний вираз $f(x) dx$ треба представити у вигляді $u dv$ таким чином, щоб інтеграл у правій частині формули був простішим за заданий $\int f(x) dx = \int u dv$. Зауважимо, що функція v , яка фігурує у правій частині, знаходиться за формулою $v = \int v'(x) dx = \int dv$, яка означає, що функція $v(x)$ є первісною своєї похідної $v'(x)$.

2.3 Методичні особливості формування у здобувачів освіти умінь розв'язувати вправи теми «Невизначений інтеграл»

ОСНОВНИЙ ІНФОРМАЦІЙНИЙ БЛОК

Етап 6. Основні типи вправ теми. Специфічні особливості формування у здобувачів освіти умінь розв'язувати ці вправи. У даній темі, на відміну від інших, розглядаються лише вправи одного типу - **на знаходження невизначеного інтегралу**. Для розв'язання цих вправ застосовуються 3 методи (безпосереднього інтегрування, заміни змінної та інтегрування частинами).

Розглянемо приклади знаходження невизначених інтегралів безпосереднім інтегруванням.

$$1) \int \sin(3x-1) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x-1) + C$$

$$2) \int \frac{x^2 + 3\sqrt[3]{x} + 1}{x} dx = \int \left(x + 3x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} \right) dx = \int x dx + 3 \int x^{-\frac{2}{3}} dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + 9x^{\frac{1}{3}} + \ln|x| + C.$$

$$3) \int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{x}-2} = \int \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} dx = \int (\sqrt{x}+2) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x + C.$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - \frac{1}{5}} \right| + C.$$

$$5) \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Розглянемо методичні особливості використання даних вправ. Вправи 1-3 і 5 представляють собою, за суттю, вправи профільного рівня шкільного курсу алгебри і початків аналізу. Вправа 4 – на використання формули «довгого логарифма». Під час розв'язування цих вправ застосовуються властивості невизначеного інтегралу 4 і 5.

Для формування у здобувачів освіти умінь знаходити невизначені інтеграли безпосереднім інтегруванням може бути корисно така навчальна система (серія) вправ:

$$\int \frac{dx}{9-x^2}; \quad \int (4x^3 + 5 \cos x) dx; \quad \int \left(4x - \frac{5}{x^2} + \frac{3^x}{2} \right) dx;$$

$$\int \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx; \int (\sqrt{t^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}) dt; \int \frac{x-16}{\sqrt{x+4}} dx; \int \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{6-\varphi^2}}; \int \sin^2 \frac{x}{2} dx; \int \frac{d\varphi}{\sqrt{6-\varphi^2}} \text{ тощо.}$$

Зрозуміло, що при необхідності цю навчальну систему (серію) вправ корисно доповнити аналогічними вправами-дублерами.

Розглянемо приклади застосування інтегрування *методом заміни змінної* при обчисленні інтегралів.

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. Ураховуючи, що $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, маємо

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$$

2) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$. Ураховуючи, що $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, отримаємо

$$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{tg} x} + C$$

3) $\int \frac{x dx}{x^2 - 1}$. Ураховуючи, що $(x^2 - 1)' = 2x$, і виконуючи тотожне перетворення підінтегральної функції, дістанемо

$$\int \frac{x dx}{x^2 - 1} = \int \frac{2x dx}{2(x^2 - 1)} = \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + C.$$

4) Нехай $t = \ln x$, тоді $\int \frac{\ln^2 x - 5 \ln x + 1}{x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right] = \int (t^2 - 5t + 1) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{5}{2} t^2 + t + C =$

$$= \frac{1}{3} (\ln x)^3 - \frac{5}{2} (\ln x)^2 + \ln x + C.$$

Для формування у здобувачів освіти умінь знаходити невизначені інтеграли методом заміни змінної доцільно використати таку навчальну систему (серію) вправ, доповнивши її аналогічними вправами за потреби:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}; \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx; \int \frac{x dx}{x^2 - 1};$$

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^2}; \int \frac{\cos x}{\sin x} dx; \int \frac{\cos x}{\sin x} dx; \int x 5^{x^2} dx; \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx; \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)}.$$

Розглянемо приклади застосування **методу інтегрування частинами**:

1) $\int x \cos 2x dx$. Нехай $u = x$, а $dv = \cos 2x dx$, тоді $du = (x)' dx = 1 \cdot dx = dx$

$$v = \int dv = \int \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2}, \text{ за формулою інтегрування частинами:}$$

$$\begin{aligned} \int x \cos 2x dx &= x \cdot \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} dx = \\ &= \frac{x \sin x}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos 2x}{2} \right) + C = \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

2) $\int (5x-2)e^x dx$. Нехай $u = 5x-2$, $dv = e^x dx$.

Тоді $du = (5x-2)' dx = 5dx$, $v = \int dv = \int e^x dx = e^x$. Застосовуючи формулу

інтегрування частинами, дістанемо:

$$\begin{aligned} \int (5x-2)e^x dx &= (5x-2)e^x - \int e^x 5 dx = (5x-2)e^x - 5 \int e^x dx = \\ &= (5x-2)e^x - 5e^x + C = e^x(5x-7) + C. \end{aligned}$$

ДОДАТКОВИЙ ІНФОРМАЦІЙНИЙ БЛОК

Методом інтегрування частинами знаходять інтеграли таких видів:

1) $\int P_n(x) \cos(ax+b) dx$, $\int P_n(x) \sin(ax+b) dx$, $\int P_n(x) e^{ax+b} dx$, де

$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ – многочлен. В цьому випадку обирають за u многочлен, а всі інші множники за dv .

$$2) \quad \int P_n(x) \arcsin x dx, \quad \int P_n(x) \arccos x dx, \quad \int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx, \\ \int P_n(x) \operatorname{arcctg} x dx, \quad \int P_n(x) (\ln x)^m dx.$$

У таких інтегралах необхідно позначити $dv = P_n(x) dx$, а інші множники - через u .

3) $\int e^{ax+b} \cos(kx+l) dx$ і $\int e^{ax+b} \sin(kx+l) dx$. Для знаходження цих інтегралів потрібно **застосувати формулу інтегрування частинами двічі**, обираючи за u функцію e^{ax+b} , та розв'язати лінійне рівняння відносно початкового інтегралу.

$$\text{Наприклад. } \int x^2 \cos(3x-1) dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \quad dv = \cos(3x-1) dx \\ du = 2x dx \quad v = \frac{1}{3} \sin(3x-1) \end{array} \right] = \frac{x^2}{3} \sin(3x-1) -$$

$$-\frac{2}{3} \int x \sin(3x-1) dx = \left[\begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin(3x-1) dx \\ du = dx \quad v = -\frac{1}{3} \cos(3x-1) \end{array} \right] = \frac{x^2}{3} \sin(3x-1) -$$

$$-\frac{2}{3} \left(-\frac{x}{3} \cos(3x-1) + \frac{1}{3} \int \cos(3x-1) dx \right) = \frac{x^2}{3} \sin(3x-1) + \frac{2x}{9} \cos(3x-1) - \frac{1}{27} \sin(3x-1) + C$$

Для формування у здобувачів освіти умінь знаходити невизначені інтеграли інтегруванням частинами доцільно використати таку навчальну систему (серію)

вправ: $\int \arcsin x dx$;

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad \int x 5^x dx \quad \int \arcsin 2x dx \quad \int (2x-1)e^{3x} dx \quad \int (7x-1) \cos 5x dx$$

Зрозуміло, що цю навчальну систему (серію) вправ треба доповнити аналогічними вправами, з урахуванням рівня підготовки здобувачів освіти і розроблених цільової і змістової моделі навчальної дисципліни «Вища математика».

Специфіку знаходження невизначених інтегралів окремих видів, наприклад, раціональних дробів, розглянемо для інтегралу виду: $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$. Якщо $A=0$,

$$B=1, \text{ то } \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{D}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{D}}{2ax+b+\sqrt{D}} \right| + C, \text{ якщо } D = b^2 - 4ac > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{|D|}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{|D|}} + C, \text{ якщо } D = b^2 - 4ac < 0 \end{cases}.$$

У загальному випадку:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \int \frac{(Ax+B)dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}} = \left[\begin{array}{l} t = x + b/(2a) \\ dt = dx \\ x = t - b/(2a) \end{array} \right] = \frac{1}{a} \int \frac{\left(A\left(t - \frac{b}{2a}\right) + B\right) dt}{t^2 - \frac{D}{4a^2}} =$$

$$= \frac{A}{a} \int \frac{t dt}{t^2 - \frac{D}{4a^2}} + \frac{2Ba - Ab}{2a^2} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{D}{4a^2}} = \frac{A}{2a} \ln \left| t^2 - \frac{D}{4a^2} \right| + \frac{2Ba - Ab}{2a^2} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{D}{4a^2}} =$$

$$= \frac{A}{2a} \ln \left| x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right| + \frac{2Ba - Ab}{2a^2} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}}.$$

Наприклад, $\int \frac{(-3x+5)dx}{2x^2-7x+1}$.

$$\int \frac{(-3x+5)dx}{2x^2-7x+1} = \frac{1}{2} \int \frac{(-3x+5)dx}{x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{-3\left(x - \frac{7}{4}\right) - \frac{1}{4}}{\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{41}{16}} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{\left(x - \frac{7}{4}\right) dx}{\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{41}{16}} -$$

$$-\frac{1}{8} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{41}{16}} = -\frac{3}{4} \ln \left| \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{41}{16} \right| - \frac{1}{8\sqrt{41}} \ln \left| \frac{x - \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{41}}{4}}{x - \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{41}}{4}} \right| + C =$$

$$= -\frac{3}{4} \ln \left| x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{8\sqrt{41}} \ln \left| \frac{4x - 7 - \sqrt{41}}{4x - 7 + \sqrt{41}} \right| + C.$$

Зауваження. У залежності від специфіки теми навчальної дисципліни «Вища математика» етапи 4-6 можуть бути розроблені різною мірою деталізації.

Треба усвідомити, що у кінцевому рахунку, методичний аналіз теми, розроблений здобувачем освіти/викладачем, представляє собою особистий

інструментарій, який стане основою для розробки якісної системи лекцій і практичних занять за даною темою. А тут багато чого залежить від особистості здобувача освіти/викладача і набутих ним у ході навчання професійних компетентностей.

ПІДСУМКИ

1. **Мета** методичного аналізу - систематизувати і структурувати навчальний, дидактичний та методичний матеріал теми для подальшої якісної розробки лекцій та практичних занять.

2. **Завдання** методичного аналізу:

- 1) зафіксувати зв'язки навчального матеріалу даної теми з іншими темами;
- 2) виділити опорні знання та уміння,;
- 3) повторити, виокремити і ранжувати теоретичний матеріал теми;
- 4) виокремити і ранжувати типові вправи теми;
- 5) удосконалити особисті уміння розв'язувати вправи і виділити методичні особливості навчання студентів розв'язуванню типових вправ;
- 6) наочно представити структуру навчального матеріалу теми і зв'язки його окремих компонентів.

3. Якісний методичний аналіз теми дає майбутньому викладачу можливості щодо повторення, систематизації, структуризації, ранжування та поглиблення її змісту; вивчення та удосконалення методики його навчання; розвиток особистих умінь з розв'язування вправ теми і визначення методичних особливостей формування у здобувачів освіти умінь розв'язувати ці вправи.

4. **Загальна схема методичного аналізу** теми складається з таких етапів:

- 1) **місце і значення** теми, її **зв'язки** з іншими темами;
- 2) **опорні** знання і уміння;

- 3) *структура* теми представлена таблицею або інтелект-картою;
- 4) основні *поняття*, їх методичні особливості;
- 5) основні *твердження*, їх методичні особливості;
- 6) основні *види вправ*, їх методичні особливості.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. З якою метою виконується методичний аналіз теми навчальної дисципліни?
2. Які завдання методичного аналізу теми?
3. Які можливості отримує здобувач вищої освіти або викладач виконавши якісний методичний аналіз теми навчальної дисципліни “Вища математика”?
4. Які етапи складають схему методичного аналізу теми?
5. У чому полягає сутність кожного етапу? Дайте коротку характеристику.
6. Яке місце і значення теми “Пряма на площині та у просторі” у навчальній дисципліні “Вища математика”?
7. Які зв’язки теми “Пряма на площині та у просторі” з іншими темами вищої математики?
8. Назвіть опорні знання та уміння для теми “Пряма на площині та у просторі”.
9. Які структурні блоки доцільно виділити у темі “Пряма на площині та у просторі”?
10. Які основні поняття теми “Пряма на площині та у просторі”?
11. Які основні твердження теми “Пряма на площині та у просторі”?
12. Які методичні підходи виділяють під час вивчення різних видів рівнянь прямої на площині та у просторі?
13. Які основні види вправ теми “Пряма на площині та у просторі”?
14. Яких типових помилок припускаються здобувачі освіти під час вивчення теми “Пряма на площині та у просторі”?
15. Яке місце і значення теми “Границя послідовності та функції” у навчальній дисципліні “Вища математика”?

16. Які зв'язки теми “Границя послідовності та функції” з іншими темами вищої математики?
17. Назвіть опорні знання та уміння для теми “Границя послідовності та функції” у залежності від рівня математичної підготовки здобувачів освіти у закладах загальної середньої освіти.
18. Які структурні блоки доцільно виділити у темі “Границя послідовності та функції”?
19. Які основні поняття теми “Границя послідовності та функції”?
20. Які основні твердження теми “Границя послідовності та функції”?
21. Які методичні особливості навчання означенню границі послідовності по Коши та по Гейне?
22. Які основні види вправ теми “Границя послідовності та функції”?
23. Яких типових помилок припускаються здобувачі освіти під час вивчення теми “Границя послідовності та функції”?
24. Яке місце і значення теми “Границя послідовності та функції” у навчальній дисципліні “Вища математика”?
25. Які зв'язки теми “Невизначений інтеграл” з іншими темами вищої математики?
26. Назвіть опорні знання та уміння для теми “Невизначений інтеграл”.
27. Які структурні блоки доцільно виділити у темі “Невизначений інтеграл”?
28. Які основні поняття теми “Невизначений інтеграл”?
29. Які основні твердження теми “Невизначений інтеграл” ?
30. Які методичні особливості навчання основним методам інтегрування заміни змінної та інтегрування частинами ?
31. Які основні види вправ теми “Невизначений інтеграл”?
32. Яких утруднень та типових помилок припускаються здобувачі освіти під час вивчення теми “Невизначений інтеграл”?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Порівняти за двома робочими програмами різних технічних закладів вищої освіти для двох різних спеціальностей:

1) місце і зв'язки заданої теми з іншими темами навчальної дисципліни “Вища математика”;

2) структуру теми.

Теми для порівняння здобувачам освіти пропонує викладач за варіантами (табл. 5), а заклади вищої освіти і спеціальності магістранти вибирають самостійно. Результати порівняння необхідно оформити у вигляді таблиці (табл. 6).

Таблиця 5

Варіанти тем для порівняння

Варіанти	Назва теми
1.	Матриці і визначники.
2.	Системи лінійних рівнянь.
3.	Вектори.
4.	Площина.
5.	Пряма на площині та у просторі.
6.	Криві та поверхні другого порядку.
7.	Границя послідовностей та функцій.
8.	Неперервність функцій. Точки розриву.
9.	Похідна функцій однієї та багатьох змінних.
10.	Диференціал функцій однієї та багатьох змінних.
11.	Застосування похідних.
12.	Комплексні числа та дії з ними.
13.	Многочлени у комплексній області.
14.	Невизначений інтеграл.
15.	Визначений інтеграл.
16.	Подвійні та потрійні інтеграли, криволінійні та поверхневі інтеграли.
17.	Диференціальні рівняння першого порядку.
18.	Диференціальні рівняння вищих порядків.
19.	Лінійні диференціальні рівняння та їх системи.
20.	Числові ряди та методи визначення їх збіжності.

21.	Функціональні, степеневі та ряди Тейлора.
22.	Елементи теорії ймовірності.
23.	Елементи математичної статистики.

Таблиця 6

Особливості теми вищої математики для студентів

Заклад вищої освіти 1	Заклад вищої освіти 2
Місце теми і її зв'язки з іншими темами дисципліни “Вища математика”	
...	...
Основні структурні блоки теми	
...	...

2. Порівняти за двома робочими програмами довільного технічного або економічного закладу вищої освіти для двох різних спеціальностей:

1) місце і зв'язки заданої теми з іншими темами навчальної дисципліни “Вища математика”;

2) структуру теми.

Теми для порівняння здобувачам освіти пропонує викладач за варіантами (табл. 5), а заклади вищої освіти і спеціальності магістранти можуть вибрати самостійно. Результати порівняння необхідно оформити у вигляді таблиці (табл. 6).

3. Розробити третій етап методичного аналізу теми дисципліни «Вища математика» щодо структурування її навчального матеріалу у вигляді таблиці та у вигляді інтелект-карти. Описати позитивні і негативні сторони візуалізації даної теми у цих виглядах. Тему пропонує викладач за варіантами поданими у таблиці 5.

Як цю таблицю та інтелект-карту можна використати під час навчання здобувачів освіти даній темі?

4. Розробити третій етап методичного аналізу теми дисципліни «Вища математика» щодо структурування її навчального матеріалу у вигляді двох таблиць або двох інтелект-карт, які відрізняються різною мірою деталізації. Описати позитивні і негативні сторони візуалізації даної теми у цих виглядах. Тему пропонує викладач за варіантами поданими у таблиці 5.

Яким чином ці таблиці та інтелект-карти можна використати під час навчання здобувачів освіти даній темі?

5. Розробити методичний аналіз основних понять і особливостей навчання здобувачів освіти цим поняттям (четвертий етап загального методичного аналізу теми дисципліни «Вища математика») з різною мірою деталізації.

Тему пропонує викладач за варіантами поданими у таблиці 5, а майбутню спеціальність здобувачів освіти, які вивчають дану тему, магістранти можуть вибрати на свій розсуд

Продумайте варіанти використання цих розробок під час навчання здобувачів освіти даній темі.

6. Розробити п'ятий етап методичного аналізу теми дисципліни «Вища математика» щодо висвітлення основних її тверджень і методики навчання здобувачів освіти цим твердженням з різною мірою деталізації. Тему пропонує викладач за варіантами поданими у таблиці 5. Продумайте варіанти використання цих розробок під час навчання здобувачів освіти даній темі.

7. Розробити методичний аналіз основних видів вправ теми та методику формування умінь у здобувачів освіти розв'язувати ці вправи (шостий етап методичного аналізу теми дисципліни «Вища математика»). Тему для методичного аналізу вправ пропонує викладач за варіантами поданими у таблиці 5. Продумайте варіанти використання цих розробок під час навчання здобувачів освіти даній темі.

8. (Довготермінове завдання). Розробити методичний аналіз теми дисципліни «Вища математика». Тему пропонує викладач за варіантами поданими у таблиці 7, а майбутню спеціальність здобувачів освіти, які вивчають дану тему, магістранти можуть вибрати на свій розсуд.

**Варіанти для доповіді за темами змістової моделі дисципліни
“Вища математика” для технічних спеціальностей ЗВО**

Варіанти	Основні поняття тем
1. Елементи лінійної та векторної алгебри	
1.	Матриці і визначники. Матриці, дії над матрицями, визначники довільного прядку, мінори і алгебраїчні доповнення, обернена матриця, ранг матриці.
2.	Системи лінійних рівнянь. Неоднорідні і однорідні системи лінійних рівнянь. Сумісні і несумісні системи. Розв'язування систем лінійних рівнянь методами Гауса, Крамера та матричним.
3.	Вектори. Системи координат, вектори, координати вектору, лінійні операції над векторами, скалярний, векторний та змішаний добутки.
2. Елементи аналітичної геометрії	
4.	Площина. Рівняння площини; взаємне розміщення площин, кут між площинами, умови паралельності і перпендикулярності площин.
5.	Пряма на площині та у просторі. Рівняння прямої в просторі, взаємне розміщення прямих у просторі, взаємне розміщення прямої і площини у просторі, кут між двома прямими, умови паралельності і перпендикулярності прямих, кут між прямою і площиною, умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.
6.	Криві та поверхні другого порядку. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола; поверхні обертання.
Вступ до математичного аналізу	
7.	Границі послідовностей та функцій, їх властивості. Множини, дії з ними, відображення множин, функція; числові послідовності, поняття границі послідовності, обчислення границь; розкриття невизначеностей; поняття границі функції, обчислення границь; нескінченно малі та нескінченно великі послідовності і функції, визначні границі.
8.	Неперервність функцій. Точки розриву. Неперервність функції, точки розриву та їх класифікація, дії з неперервними функціями, Функції багатьох змінних, їх неперервність.
4. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних	
9.	Похідна функцій однієї та багатьох змінних. Похідна, практичні тлумачення та застосування, техніка диференціювання; похідні параметрично заданих та неявно заданих функцій; похідні вищих порядків.
10.	Диференціал функцій однієї та багатьох змінних. Диференціал; властивості диференційованих функцій.

11.	Застосування похідних. Дослідження функцій за допомогою похідної (асимптоти, монотонність і екстремуми, опуклості і точки перегину; екстремум функції багатьох змінних; умовний екстремум).
5. Елементи вищої алгебри	
12.	Комплексні числа та дії з ними. Алгебраїчна та тригонометрична форми. Дії з комплексними числами.
13.	Многочлен у комплексній області (основна теорема алгебри; розкладання многочлена на множники; розкладання правильного раціонального дробу на елементарні).
6. Первісна, невизначений інтеграл	
14.	Первісна, невизначений інтеграл та його властивості. Первісна функції, її властивість; невизначений інтеграл, таблиця інтегралів. Основні методи інтегрування.
15.	Техніка інтегрування. Інтегрування раціональних дробів; інтегрування тригонометричних виразів; інтегрування ірраціональних виразів.
7. Визначений інтеграл	
16.	Визначений інтеграл та його властивості. Геометричні (площа плоскої фігури, довжина лінії, об'єми тіл) та фізичні застосування визначеного інтеграла. Невласні інтеграли. Інтеграли, залежні від параметра.
17.	Подвійні та потрійні інтеграли. Подвійні інтеграли, їх обчислення, геометричні (площа, об'єм) та фізичні (моменти, центри мас) застосування, заміна змінних. Потрійні інтеграли, обчислення застосування.
18.	Криволінійні та поверхневі інтеграли. Криволінійні інтеграли, їх обчислення та застосування. Поверхневі інтеграли, обчислення.
8. Звичайні диференціальні рівняння	
19.	Диференціальні рівняння першого порядку. Диференціальні рівняння: порядок, розв'язки, класифікація. Рівняння першого порядку, задача Коши. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними, рівняння з однорідною функцією, лінійні рівняння першого порядку.
20.	Диференціальні рівняння вищих порядків. Лінійна залежність і незалежність функцій, визначник Вронського. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку.
21.	Лінійні диференціальні рівняння та їх системи. Лінійні диференціальні рівняння другого та вищих порядків. Системи диференціальних рівнянь. Застосування диференціальних рівнянь у прикладних задачах.

10. Числові і функціональні ряди	
22.	Числові ряди та методи визначення їх збіжності. Ряд, збіжність, сума. Необхідна умова збіжності. Ознаки збіжності рядів з додатними членами. Знакозмінні ряди, їх збіжність.
23.	Функціональні, степеневі та ряди Тейлора. Функціональні ряди. Загальні властивості функціональних рядів. Ряди Тейлора та Маклорена. Стандартні розвинення функцій у степеневі ряди. Застосування степеневих рядів.
11. Елементи теорії ймовірності та математичної статистики	
24.	Події. Ймовірність. Алгебра подій. Елементи комбінаторики. Класифікація подій. Означення ймовірності. Формула повної ймовірності. Формула ймовірності гіпотез. Послідовність незалежних випробувань.
25.	Випадкові величини та закони їх розподілу. Випадкові величини. Інтегральна та диференціальна функції, числові характеристики випадкових величин. Основні закони розподілу випадкових величин та їхні числові характеристики. Закон великих чисел та його застосування.
26.	Основні задачі математичної статистики. Статистичні числові характеристики. Вибірка. Медіана, мода, середнє значення. Стандартне відхилення. Асиметрія. Варіаційний розмах вибірки.

РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

Основна література

1. Теорія і методика викладання в вищій школі. Конспект лекцій з навчальної дисципліни : навч. посіб.; укладач І. О. Козак. Київ : КПІ ім. Ігоря Сикорського, 2018. 116 с. URL : https://cpsm.kpi.ua/Doc/pvsh_lek_phd.pdf
2. Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика для економістів : навч. посіб. Київ: Центр навчальної літератури, 2019. 448 с.
3. Клепко В., Голець В. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. Київ: Центр навчальної літератури, 2019. 594 с.
4. Найко Д.А. Шевчук О. Ф. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посібн. Вінниця : ВНАУ, 2020. 382 с.
5. Налєва Г. В., Івахненко Т. М. Вища математика : методичні вказівки для виконання розрахунково-графічних робіт. Одеса : НУ «ОМА», 2018. 96 с.

6. Налева Г. В., Сіденко С. М., Івахненко Т. М. Елементи дискретної математики: навч. посіб. для курсантів і студентів вищих морських навч. закл. Одеса: ОНМА, 2016. 196 с.

7. Макаренко В. О. Вища математика для економістів : навч. посіб. Київ : Знання, 2008. 517с.

8. Попов В.Г., Кирилова О. І. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія: навч. посібник Одеса : ОНМА, 2016. 223 с.

9. Попов В. Г., Кирилова О. І. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних : навч. посібник. Одеса: НУ «ОМА», 2017. 236 с.

10. Попов В. Г., Кирилова О. І. Інтегральне числення та його застосування. Навчальний посібник. Одеса: НУ «ОМА», 2019. 136 с.

Допоміжна

1. Іванова С. В., Налева Г. В., Іванов В. В. Навчальні дослідні завдання як засіб реалізації компетентнісно-зорієнтованої підготовки студентів з математики. In Міжнародна науково-практична конференція присвячена пам'яті професорів Фоміна Ю., Семенова В.(FS–2019), Istanbul, 2019. С. 396-398.

2. V. Ivanov, L. Dimitrov, S. Ivanova and O. Olefir, "Creativity enhancement method for STEM education," *2019 II International Conference on High Technology for Sustainable Development (HiTech)*, Sofia, Bulgaria, 2019, pp. 1-5, <https://doi.org/10.1109/HiTech48507.2019.9128255>

3. S. Ivanova, L. Dimitrov, V. Ivanov, G. Naleva "The Performance of Project Teams Selected Based on Student Personality Types: A Longitudinal Study", *Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal*, vol. 6, no. 1, pp. 1128-1136 (2021). <https://doi.org/10.25046/aj060112610.25046/aj0601126>

4. Ivanova, S., Dimitrov, L., Ivanov, V., & Prokopovych, L. (2021, May). Using Role-playing Game for Professional Skills Formation of Prospective Teachers. in *Society, Integration, Education. Proceedings of the International Scientific Conference (Vol. 1, pp. 195-206)*. DOI: <https://doi.org/10.17770/sie2021voll1.6180>

5. Ivanova, S., Dimitrov, L., Ivanov, V., Urum, G., & Olefir, O. (2023, May). Mind

Maps for Key Points of a Reverse Engineering Project. In *International Conference “New Technologies, Development and Applications”* (pp. 170-181). Cham: Springer Nature Switzerland

6. Налева Г. В., Сіденко С. М., Івахненко Т. М. Елементи дискретної математики : навч. посіб. для курсантів і студентів вищих морських навч. закл. Одеса: ОНМА, 2016. 196 с.

7. Макаренко В. О. Вища математика для економістів : навч. посіб. Київ : Знання, 2008. 517с.

Інформаційні ресурси

1. Міністерство науки і освіти України: офіційний сайт. URL : <http://www.mon.gov.ua>

2. Український центр оцінювання якості освіти: офіційний сайт. URL : <http://testportal.gov.ua>

3. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського : офіційний сайт. URL : <http://www.nbuv.gov.ua>

4. Одеська національна наукова бібліотека : офіційний сайт. URL : <http://odnb.odessa.ua/>

5. Бібліотека Університету Ушинського: офіційний сайт. URL : <https://library.pdpu.edu.ua>

6. Дистанційна освіта: URL : <https://osvita-omr.gov.ua/diialnist/napriamky-roboty/ikt/dystantsiina-osvita/>

