

ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

імені К. Д. УШИНСЬКОГО

кафедра загальнотехнічних дисциплін та технологічної освіти

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

ДО РОЗДІЛУ «КІНЕМАТИКА» З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА»

для студентів спеціальності «Технологічна освіта»

Одеса - 2011

Укладачі: к.т.н., доцент Масліч Н.Я.,

студент 4 курсу Мрук М.М.

Рецензенти: к.т.н, доцент Полторак В.С.

к.т.н., доцент Козлов М.А.

Методичні рекомендації складені на основі робочої навчальної програми «Технічна механіка» для студентів напряму «Технологічна освіта».

Методична розробка обговорена та затверджена на засіданні кафедри загально технічних дисциплін та технологічної освіти, протокол № 1 від 29 серпня 2011 р.

Рекомендована Вченою радою Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К.Д. Ушинського протокол №__ від _____2011 р.

Зміст

1. Пояснювальна записка.....	4
2. Вступ.....	8
3. Розділ 1. Кінематика точки.....	11
4. 1.1. Траєкторія, шлях, переміщення, швидкість, прискорення точки.....	11
5. 1.2. Прямолінійний рух в проекціях.....	15
6. 1.3. Криволінійний рух точки.....	17
7. 1.4. Рух вертикально кинутою точки.....	19
8. 1.5. Рух точки, кинутої під кутом до горизонту.....	20
9. 1.6. Кінематика рівномірного руху точки по колу	21
10. 1.7. Засоби опису руху точки.....	23
11. 1.8. Інерційні системи відліку. Принцип відносності Галілея.....	31
12. 1.9. Контрольні питання до розділу «Кінематика точки».....	34
13. 1.10. Тести до розділу «Кінематика точки».....	39
14. 1.11. Розрахунково-графічні завдання.....	42
15. Розділ 2. Кінематика твердого тіла.....	43
16. 2.1. Ступені вільності твердого тіла.....	43
17. 2.2. Поступальний рух твердого тіла.....	44
18. 2.3. Обертальний рух твердого тіла.....	46
19. 2.4. Зв'язок між кутовими та лінійними змінними.....	48
20. 2.5. Розклад руху на складові: поступальний та обертальний	49
21. 2.6. Кути Ейлера. Рух тіла з однією закріпленою точкою.....	53
22. 2.7. Контрольні питання до розділу «Кінематика тіла».....	57
23. 2.8. Тести до розділу «Кінематика тіла».....	58
24. 2.9. Питання та задачі для самостійної роботи.....	60
25. Література.....	105

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Зміни, які відбуваються за останній час в нашому суспільстві ставлять нові критерії до рівня освіти, науки та виробництва.

Науково-технічний прогрес є необхідною умовою подальшого розвитку нашої країни і це, в свою чергу, ставить все більші вимоги до середньої та вищої школи по підготовці висококваліфікованих фахівців технічного профілю.

Рішення даної проблеми можливе тільки за умови забезпечення цілеспрямованого навчального процесу на всіх рівнях освіти.

Якісна підготовка випускників середніх навчальних закладів повністю залежить від високої кваліфікації вчителя, їх рівня теоретичної підготовки. При цьому значна роль підготовки вчителів в педагогічних вузах відводиться теоретичним технічним дисциплінам, до яких належить технічна механіка. Робоча програма курсу включає чотири розділи, які в фахових технічних вузах є окремими автономними дисциплінами і побудована на урахуванні наукових досягнень та науково – методичних розробок кафедри загально технічних дисциплін та технологічної освіти.

Необхідність вивчення матеріалу по технічній механіці продиктована вимогами професійно-кваліфікаційної характеристики вчителя даного профілю.

Курс технічної механіки традиційно читається у такій послідовності – 1. Теоретична механіка (ТМ). 2. Теорія механізмів та машин (ТММ). 3. Опір матеріалів (ОМ). 4. Деталі машин (ДМ).

В ході вивчення курсу студенти повинні опанувати знання, придбати навички та вміння основні з яких є:

- Знання та глибоке розуміння теорії дисципліни, основних законів, положень, гіпотез; умінь використовувати їх для розв'язування практичних задач;
- Умінь здійснювати логічні операції зрівняння, аналогії, протиставлення, аналізу, узагальнення, переносу, класифікації; оперування поняттями;
- Формування політехнічного кругозору як поняття про призначення, класифікацію, способи виготовлення та з'єднання деталей;
- Придбати політехнічні навички та умінь – виконувати обміри, робити розрахунки, працювати з довідковою літературою, проводити експериментальні дослідження;
- Встановлення взаємозв'язків з окремими частинами курсу технічної механіки, міжгалузевих зв'язків з іншими дисциплінами технічного циклу та з різними галузями науки і виробництва;
- Формулювати творчі риси, що характеризуються самостійністю, гнучкістю, критичністю, оригінальністю мислення і проявляються:
 - Баченні складу об'єкта, його нової функції, альтернативи;
 - Здібності самостійно здійснювати перенос знань та комбінування;
 - Бачені нової проблеми та побудови способу її рішення.

- Формулювання технічного мислення як комплексної якості, яка містить всі перелічені вище компоненти.

Програма курсу технічна механіка розрахована на 432 години, з яких 284 години аудиторних занять та 148 годин відводиться на самостійну роботу студентів. Починається курс після вивчення фізики та математики і охоплює 3, 4, 5 і 6 семестри.

Розподіл аудиторного навчального часу між окремими частинами курсу технічна механіка приведений в таблиці 1.

Таблиця 1. Розподіл аудиторного навчального часу дисципліни технічна механіка.

Частина курсу	Семестр	Кількість годин				Форма контролю			
		всього	лекції	практ.	самост.	ргр	тести	курсова	іспит
ТМ	3	72	36	36	37	+	+		+
ТММ	4	72	36	36	37	+	+		+
ОМ	5	72	26	36	37	+	+		+
ДМ	6	68	32	36	37	+	+	1	+
всього		284	140	144	148				

Розподіл навчального часу за темами програми є орієнтовним та може змінюватись в залежності від рівня підготовки студентів.

Курс технічної механіки побудований за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу у вищих навчальних закладах та узгоджений з примірною структурою змісту навчального курсу, рекомендованою Європейською Кредитно – трансферною Системою (ECTS).

Технічна механіка починається з вивчення першою частини – теоретичної механіки, яка містить згідно ECTS 1 кредит, 1 модуль та 3 змістовних модуля та повинна мати 4 тижневих години.

Орієнтована структура 1 залікового кредиту курсу технічної механіки приведена в таблиці 2.

Таблиця 2. Структура 1 залікового кредиту (Теоретична механіка) дисципліни «Технічна механіка»

Теми	Лекції	Практ.	Самост.	РГР
1	2	3	4	5
1 Змістовний модуль. Статика				
1. Предмет «Технічна механіка», задачі, структура, значення в науці і техніці	2			

2.Визначення і аксіоми статички.	2		2	
3.Система збіжних сил.	2	2	4	
4.Площина система сил.	2	4	2	+
5.Теорія моментів	2	2	2	+
6. Приведення площинної системи сил до заданого центру.	2	2	2	+
7. Умови рівноваги довільної площинної системи сил	2	4	4	
8. Просторова система сил	2	2	2	
9. Основна терема статички	2	2	2	
10. Центр ваги	2	2	2	
Всього	20	20	22	
2 Змістовний модуль. Кінематика				
11.Прямолінійний рух точки	2	2	2	+
12. Криволінійний рух точки	2	2	2	+
13. Найпростіші види руху тіла	2	2	2	
14. Плоский рух тіла	2	2	2	+
всього	8	8	8	
3 Змістовний модуль. Динаміка				
15.Динаміка точки	2	2	2	+
16.Робота сили	2	2	2	
17.Динаміка механічної системи	2	2	2	+
18. Момент інерції. Динаміка обертального руху системи	2	2	2	+
Всього	8	8	8	

Традиційно курс «Теоретичної механіки» викладається в наступній послідовності – статика, кінематика та динаміка точки і механічної системи.

В даній методичній розробці пропонується курс лекцій до другого змістовного модуля «Кінематика». Хоча подібні питання розглядаються в курсі фізики середньої і вищої школи, але, як показав досвід, студенти потребують більш розширеного вивчення даного матеріалу і на ньому базується вивчення наступних частин курсу технічної механіки.

Частина лекцій, що не ввійшла до приведеної вище структури змістовного модулю винесена на самостійне вивчення.

Для перевірки знань умінь та навичок студентів в методичній розробці приведені також контрольні питання, тести та варіанти розрахунково-графічних робіт.

В таблиці 3 пропонується наступний розподіл балів оцінювання знань, умінь та навичок студентів за заліковим кредитом 1 «Теоретична механіка».

Таблиця 3. Розподіл балів за кредитом 1 по дисципліні «Технічна механіка».

Модуль 1 (поточне тестування)	Σ	ρ	ε	..	υ	>
-------------------------------	---	---	---	----	---	---

Змістовний модуль 1									Змістовний модуль 2				Змістовний модуль 3						
T1 ,2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T 1 0	T 1 1	T 1 2	T 1 3	T 1 4	T 1 5	T 1 6	T 1 7	T 1 8	0- 40	0- 20	0- 100
0- 2	0- 2	0- 2	0- 2	0- 2	0- 4	0- 2	0- 2	0- 2	0- 2	0- 3	0- 2	0- 2	0- 3	0- 2	0- 2	0- 4			

ШКАЛА ОЦІНЮВАННЯ:

90 – 100 балів – відмінно (A);

75-89 балів – добре (BC);

60-74 бала – задовільно (DE);

35-59 бала – незадовільно з можливістю повторного складання (FX);

1-34 бала – незадовільно з обов'язковим повторним курсом (F).

ВСТУП

В ході вивчення дисципліни «Технічна механіка» студенти спеціальності «Технологічна освіта» повинні засвоїти фундаментальні поняття і визначення класичної механіки, принципи використання математичних методів аналізу та опису механічних явищ, в першу чергу математичного апарату диференціальних рівнянь: зформулювати у студентів науковий світогляд і сучасне мислення, практичні навички раціонального використання знань, одержаних при вивченні теоретичної механіки для рішення прикладних: розвинути у студентів прагнення до самостійного придбання нових знань, здібність логічно мислити, створювати математичні моделі досліджуваних процесів: дати змогу студентам, не виходячи за межі понять класичної механіки, ознайомитись з багатьма математичними методами, необхідними для проведення різноманітних інженерних розрахунків.

В результаті вивчення дисципліни студенти повинні

ЗНАТИ

1. Основні поняття, визначення, методи та моделі теоретичної механіки.
2. Сучасний стан і перспективи розвитку механіки.
3. Основні закони, теореми і принципи класичної механіки та їх світоглядне значення.
4. Методи дослідження механічних систем, що знаходяться у стані спокою або руху

ВМІТИ

1. Застосувати отримані знання з теоретичної механіки при вивченні професійно-орієнтованих та інженерно-технічних дисциплін.
2. Застосувати методи теоретичної механіки при розв'язуванні прикладних задач різноманітних механічних систем

БУТИ ОЗНАЙОМЛЕНІ

- 1 З основними історичними етапами розвитку теоретичної механіки і внеском вітчизняних науковців у розвиток науки і механіки

Механіка – це наука, яка має велику історію. Вона вивчає механічний рух матеріальних тіл, а також взаємодію між ними; відповідає на питання коли, як і чому тіла рухаються або не рухаються; Якісно і кількісно опису стан механічного руху.

Для полегшення опису тих чи інших явищ та законів в механіці існує багато абстрагованих понять і термінів.

Основні терміни механіки:

Механічний рух – зміна з бігом часу взаємного положення тіл або їх частин у просторі.

Говорити про механічний рух має сенс тільки по відношенню до деякого довільного тіла, яке називається **тілом відліку**. Тіло відліку, як правило, є нерухомим.

Сукупність системи координат, яка жорстко зв'язана з тілом відліку та обраним виміром часу називають **системою відліку**. Простір, в якому відбувається рух є трьохмірний, однорідний та ізотропний (тобто однаковим по всім напрямкам), час – одномірний та однорідний.

В ході механічного руху змінюються координати тіла в вибраній системі координат.

При вивченні механічного руху в ряді випадків доцільно відволіктися від розмірів та форми тіла та розглядати його як точку. **Матеріальна точка** (абстракція) – тіло розмірами та формою, якого можна знехтувати в умовах даної задачі. Наприклад, літак на полі в аеропорту – матеріальне тіло, його розмірами не можливо нехтувати при розгляді таких явищ як виліт, посадка, опір повітря та таке інше. Але, той же літак на екрані радару – матеріальна точка. Або планета Земля для нас - її мешканців – це величезне матеріальне тіло, але Земля - це матеріальна точка при розгляді її руху в сонячній системі.

Під **матеріальним тілом** в механіці розуміють сукупність матеріальних точок, відстані між яким є незмінними. Це абстракція, тому що дійсне тіло під дією зовнішніх навантажень обов'язково деформується – скручується, розтягується, вкорочується і таке інше, тобто, відстані між окремими точками тіла змінюються.

Кінематика описує геометрії руху, без вивчення причин, що приводять до цього руху.

Основною задачею кінематики є визначення положення точки (тіла) в будь-який момент часу. Дану задачу можливо розв'язати, коли визначені **основні кінематичні характеристики** – **траєкторія руху; шлях, що пройшла точка (тіло); переміщення, швидкість; прискорення; час руху.**

Статика вивчає рівновагу тіла та системи тіл та умови, які приводять до рівноваги.

Динаміка вивчає причини, які приводять до руху чи рівноваги тіла (системи тіл).

З основною термінологією, методами, задачами, що розв'язуються при вивченні даних розділів класичної механіки ми будемо знайомитись поступово в ході вивчення курсу теоретичної механіки. При цьому, будемо йти від простого до складного поступово. Почнемо вивчення механіки з кінематики окремої точки, який є найпростішим, а потім перейдемо до кінематики тіла – розглянемо спочатку прості, а потім складні рухи тіла.

Розділ 1. Кінематика точки.

***Траєкторія, шлях, переміщення, швидкість, прискорення.
Прямолінійний рівномірний та нерівномірний рух (рух
вертикально кинutoї точки, рух точки під кутом до
горизонту).***

***Кінематика рівномірного руху точки по колу. Засоби опису
руху.***

***Інерційна система відліку. Принцип відносності та
перетворення Галілея.***

1.1. Траєкторія, шлях, переміщення, швидкість, прискорення точки.

Вивчення кінематики та визначення кінематичних характеристик почнемо з кінематики матеріальної точки, як найпростішого виду кінематики, а потім перейдемо до більш складного руху – до кінематики тіла. Кінематичними характеристиками точки є – переміщення, шлях, швидкість, прискорення та час руху. Шлях і час руху – є скалярним величинами, всі інші – векторні.

Почнемо з визначень основних кінематичних характеристик точки.

Траєкторія – лінія вздовж якої рухається точка (автомобільна дорога, залізнична дорога, шлях на небі від літака). Форма траєкторії залежить від вибору системи відліку. Дійсно, нехай тіло падає зверху до низу в вагоні потягу, який рухається відносно Землі. Відносно вагону потягу траєкторія – пряма лінія, відносно Землі траєкторія буде крива. Тобто, **форма траєкторії відносна**, вона залежить від вибору системи відліку. Тобто, мова повинна йти про форму траєкторії в даної системі відліку, а не в загальному випадку – такого не буває.

В залежності від виду траєкторії руху бувають – **прямолінійні та криволінійні**.

Довжина траєкторії є **шлях**, що пройшла точка. Шлях, як правило, позначається буквою S і є величиною позитивною при русі точки.

Переміщення – це направлений відрізок прямої, який з'єднує точку початку руху з подальшими її положеннями на траєкторії (Рис.1). Наприклад, якщо відомо початок руху матеріальної точки B – точка A та те, що вона пройшла по прямі переміщення 20 м, визначити де буде знаходитися матеріальна точка B – не можливо! Тобто, вона може бути в будь - де на колі радіусом 20 м з центром в точці A .

Щоб однозначно визначити точне положення точки B необхідно ще обов'язково знати напрям руху.

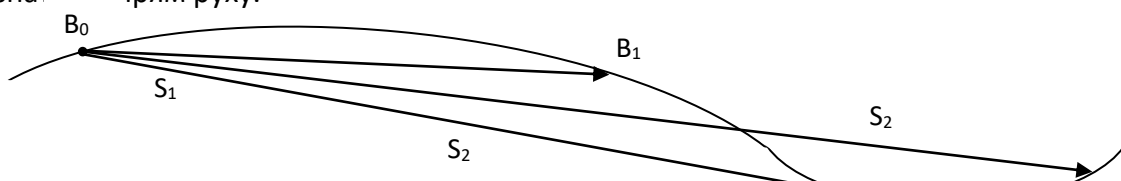


Рис. 1. Переміщення точки.

Переміщення, як правило, теж позначається буквою **S**, але це вектор. Переміщення дорівнює шляху по модулю при рівномірному прямолінійному русі (Рис. 2. а), та менше шляху по модулю при криволінійному русі (Рис. 2.б.) . Одиницею переміщення і шляху в СІ є метр.

Векторною величиною є і швидкість точки **v**. **Середньою швидкістю точки ($v_{\text{ср}}$)** називають величину, яка дорівнює відношенню переміщення $\Delta \vec{S}$, що тіло в середньому пройшло за час Δt , до проміжку часу Δt , за який це переміщення сталося:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t}.$$

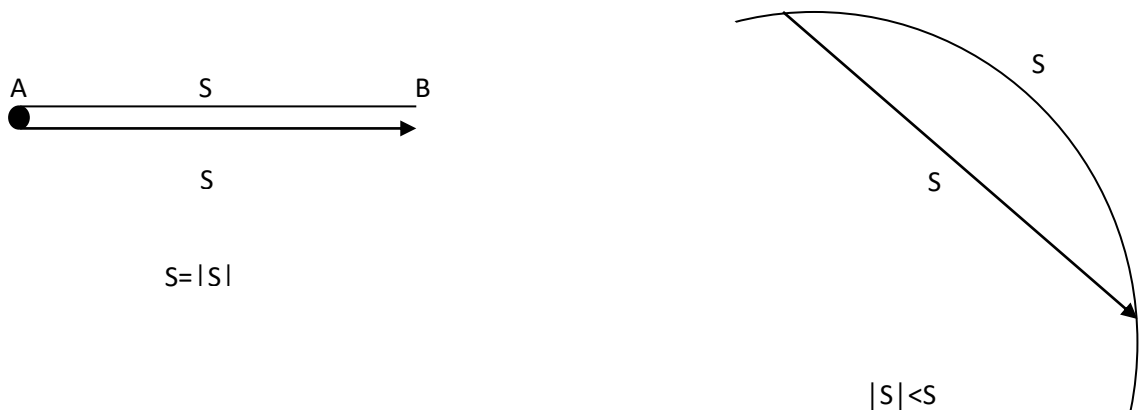


Рис. 2.а Переміщення і шлях

при прямолінійному русі

В залежності від швидкості рух може бути:

- **рівномірним** (швидкість не змінюється з бігом часу, швидкість не змінюється з напрямком Руху, ні за напрямком Руху. Рис. 3а.);

- **рівноприскореним** (швидкість зростає з бігом часу Рис. 3б.) -

рівносповільненим (швидкість зменшується з бігом часу рис. 3в.) .

В системі СІ швидкість вимірюється в м/с, тобто показує скільки метрів пройшла точка за 1 секунду. Наприклад, швидкість точки А 5 м/с. Це означає, що за кожен секунду вона проходить відстань 5 метрів.

Як швидко змінюється сама швидкість показує кінематична характеристика, що називається прискоренням точки.

Середнім прискоренням точки $a_{\text{ср}}$ - називають величину, яка дорівнює відношенню зміни швидкості Δv , до проміжку часу Δt , за який ця зміна сталася:

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

Прискорення в СІ вимірюється в м/с^2 .

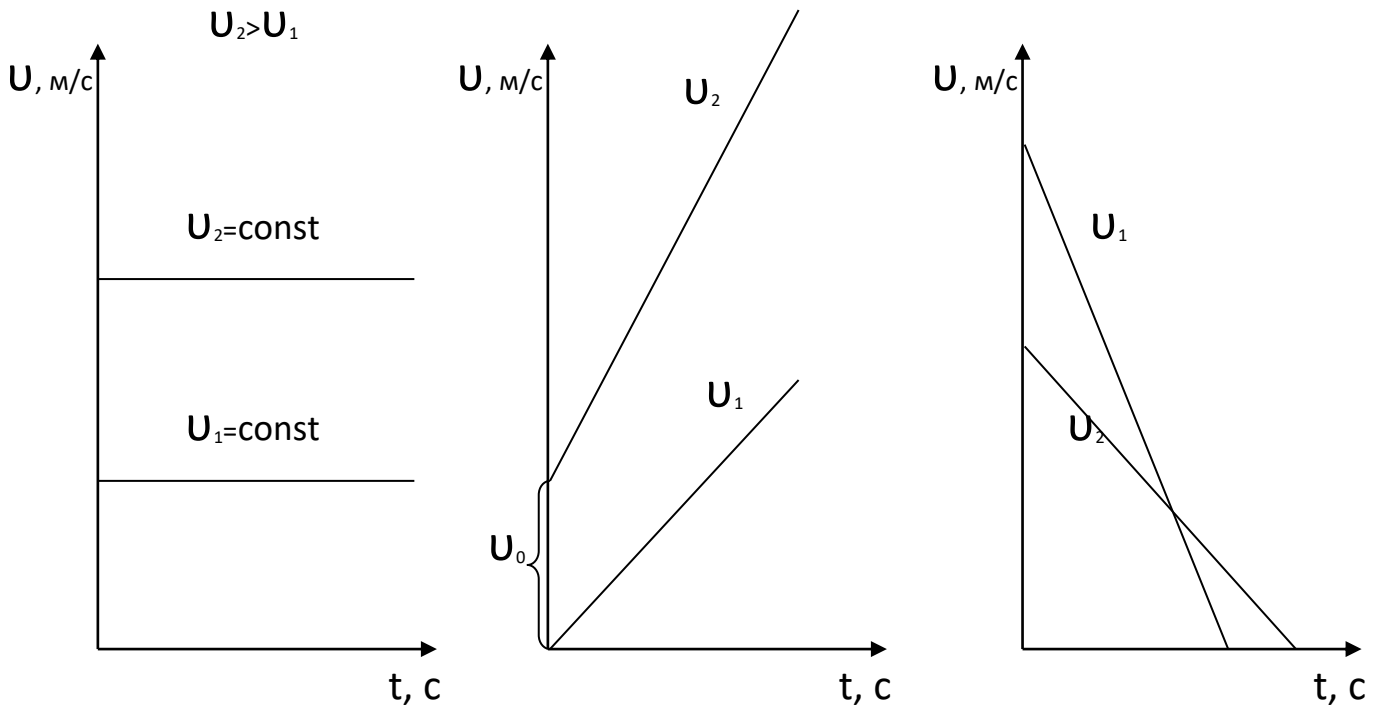


Рис. 3. Графіки швидкості при різних видах руху точки.

Наприклад, нехай прискорення точки 5 м/с^2 , то це означає, що за 1 секунду швидкість змінилася (збільшилася чи зменшилася) на 5 м/с .

З даної формули видно:

- при зростанні швидкості $\Delta v > 0$ (коли рух рівноприскорений) прискорення позитивне $a_{\text{ср}} > 0$ (Рис. 4.а);
- при зменшенні швидкості (коли рух рівносповільнений) прискорення – від’ємне $a_{\text{ср}} < 0$ (Рис.4.б);

- при рівномірному русі ($\Delta v = 0$, $a = 0$) прискорення у точки немає.

Таким чином, **рівномірний прямолінійний рух** – це рух без прискорення.

Крім середніх значень швидкості та прискорення в кінематиці використовують поняття їх **миттєвих значень**, тобто ті значень, які ці величини мають в даний момент часу. Для цього, як відомо з математики, в виразах (1.1) та (1.2) потрібно перейти до межових значень, при яких проміжок часу Δt прагне до нуля та отримати похідні величини.

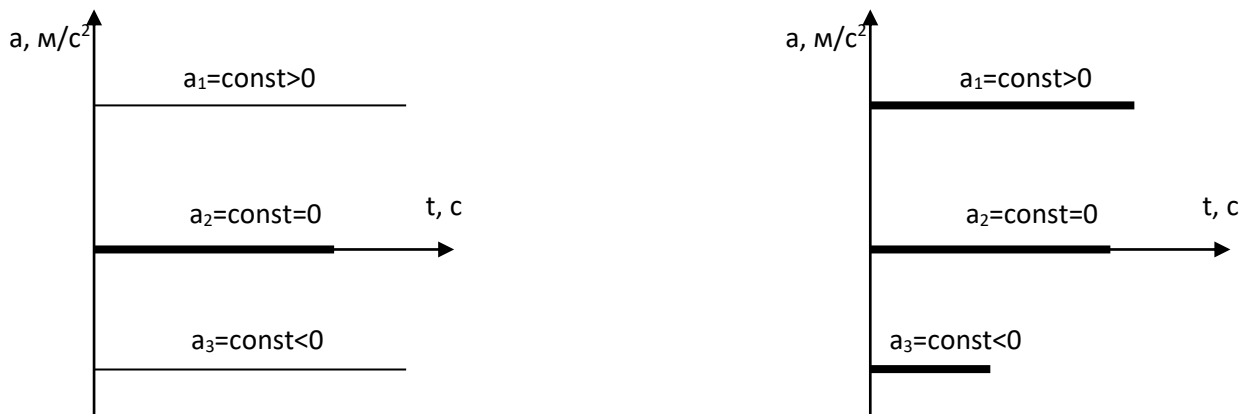


Рис. 4. Графік прискорення при різних видах руху точки.

Миттєва швидкість – це перша похідна від переміщення, **миттєве прискорення** – це перша похідна від швидкості або друга похідна від переміщення:

$$v = \frac{dS}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}. \quad (1.3)$$

Швидкість як вектор завжди направлена по дотичній до траєкторії в сторону руху точки як це показано на рисунку 5.

Оскільки при криволінійному русі швидкість обов'язково змінюється від точки до точки траєкторії по напрямку, то **криволінійний рух** – це завжди рух з змінною швидкістю, а значить – це обов'язково рух з прискоренням.

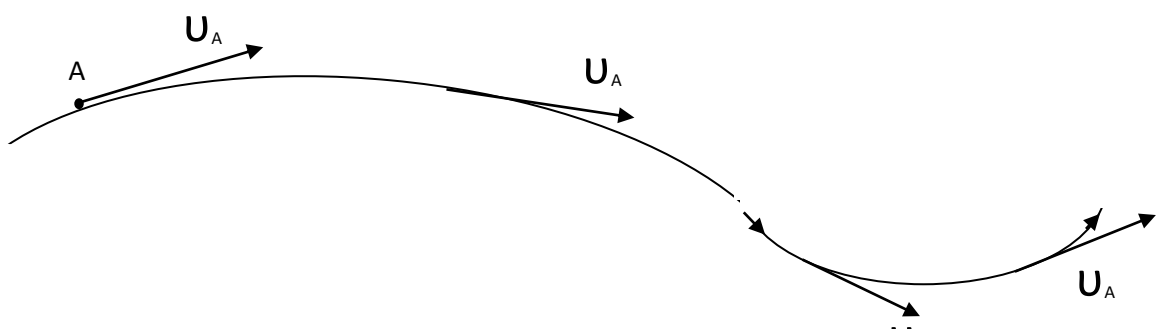


Рис. 5. Напрямок вектору швидкості

1.2. Прямолінійний рух в проекціях

Рис. 5. Напрямок швидкості в кожній точці траєкторії.

1.2. Прямолінійний рух в проекціях

При русі точка здійснює переміщення і її координати змінюються. Проекції вектора переміщення на координатні вісі дорівнюють різниці координат кінцевого і початкового положення точки

$$S_x = X - X_0; \quad S_y = Y - Y_0; \quad S_z = Z - Z_0$$

Якщо рух прямолінійний, то можна одну з координатних осей направити вздовж траєкторії, наприклад X . Тоді положення точки, яка рухається в кожний момент часу визначиться координатою x , яка є функцією часу $x = f(t)$.

Якщо x_0 - початкова координата точки, а x - її координата в момент часу t , то її переміщення в проекції на вісь X :

$$S_x = x - x_0$$

Якщо точка рухається прямолінійно вздовж осі X , то її шлях буде дорівнювати переміщенню (при умові, що напрям не змінювався).

Якщо за будь-які рівні проміжки часу точка здійснює однакові переміщення, то такий рух точки називається рівномірним.

Швидкість при рівномірному прямолінійному русі дорівнює відношенню переміщення до проміжку часу, за яке дане переміщення сталося - $\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t}$. Якщо точка рухається вздовж осі X , то проекція вектора швидкості на цю вісь дорівнює:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \quad (1.4)$$

Для такого виду руху матеріальної точки напрям вектора швидкості і переміщення співпадають, тобто вектор швидкості паралельний осі координат X , а проекція вектора швидкості дорівнює модулю швидкості. Залежність швидкості рівномірного прямолінійного руху від бігу часу показана на рисунку 6. Як видно з рисунку 6, площа

фігури, обмеженої графіком швидкості, віссю часу, та ординатами крайніх точок чисельно дорівнює проекції переміщення за проміжок часу t .

Для початкового моменту часу ($t_i = 0$) закон рівномірного руху буде:

$$x - x_0 = v_x t \quad (1.5)$$

Якщо рух прямолінійний та нерівномірний, то проекція прискорення на вісь X буде визначатися за формулою:

$$a_o = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x - v_{ox}}{t - t_o} \quad (1.6)$$

Рівняння швидкості для прямолінійного нерівномірного руху отримаємо з умови, що в початковий момент $t_o = 0$:

$$\vec{v} = \vec{v}_o \pm \vec{a} t \quad (1.7)$$

«+» - для рівноприскореного руху, «-» - для рівносповільного руху.

Це рівняння в проекції на координатну вісь:

$$v_x = v_{ox} \pm a_x t \quad (1.8)$$

Останнє рівняння є рівнянням виду $y = kx + b$. Графік такої функції приведений на рисунку 6.

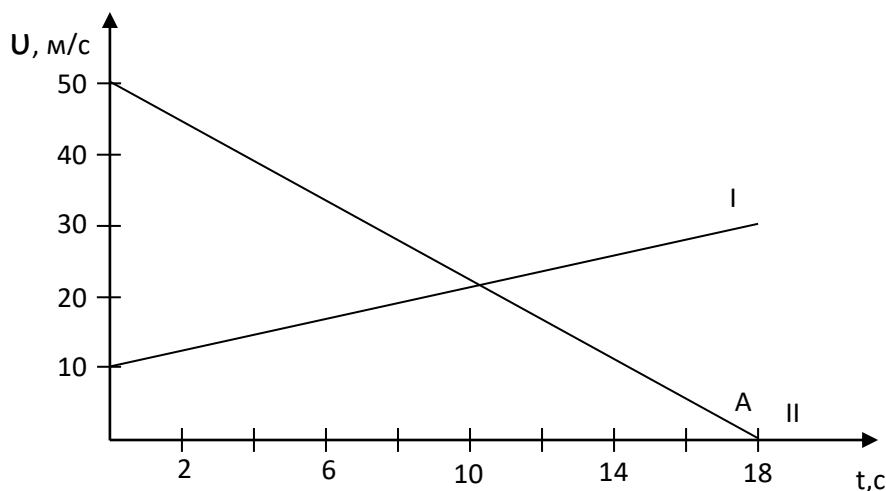


Рис.6. Графік швидкості при рівноприскореному русі.

При нерівномірному русі переміщення точки, як і при рівномірному дорівнює чисельно площині фігури під графіком швидкості, тобто, це площа обмежена графіком, ординатами крайніх точок та віссю часу. Як видно з рисунку 7, фігура є трапецією, а її площа визначається за формулою:

$$\frac{v_x + v_{ox}}{2} t = x - x_o.$$

З останнього рівняння отримаємо закон нерівномірного прямолінійного руху точки:

$$x = x_o + v_{ox} t \pm \frac{a_x t^2}{2} \quad (1.9)$$

З рівнянь 1.8 та 1.9 маємо:

$$v_x^2 - v_{ox}^2 = \pm 2(x - x_o) a_x \quad (1.10)$$

Сталі величини x_o , v_{ox} , що є значеннями координати і швидкості в початковий момент часу t_o називаються **початковими умовами**.

Рівняння 1.8 та 1.9 демонструють закони зміни швидкості та координати при прямолінійному та нерівномірному русі. Як видно - швидкість залежить від бігу часу лінійно, а координата – параболічно.

1.3. Криволінійний рух точки

Оскільки прискорення характеризує зміну швидкості, а швидкість є вектором, то як вектор швидкості може змінюватися і по величині (модулю) і по напрямку, а тому вектор повного прискорення точки залежить від того, як змінюються ці параметри.

Існує два прискорення точки – тангенційне, яке відповідає за зміну модуля швидкості та нормальне, яке відповідає за зміну напрямку швидкості. Тому, **при криволінійному русі загальне прискорення точки складається з векторної суми двох прискорень – тангенційного та нормального**.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\tau} + \mathbf{a}^n \quad (1.11)$$

За модулем

$$\dot{a} = \sqrt{\dot{a}_n^2 + a_{\tau}^2} \quad (1.12)$$

При цьому, **вектор тангенційного прискорення направлений по дотичній до траєкторії** (співпадає з напрямком швидкості при рівноприскореному русі (Рис. 8а) та направлений в сторону протилежну напрямку швидкості (Рис. 8б) при рівносповільненому русі **та характеризує зміну швидкості за величиною (модулем). За модулем тангенційне прискорення дорівнює першій похідній від швидкості:**

$$a^{\tau} = \frac{dv}{dt} \quad (1.13)$$

Вектор нормального прискорення завжди направлений по радіусу до центри кривизни траєкторії та характеризує зміну швидкості за напрямком (Рис. 8). По модулю нормальне прискорення дорівнює відношенню квадрата швидкості до радіусу кривизни траєкторії.

$$a^n = \frac{v^2}{\rho} \quad (1.14)$$

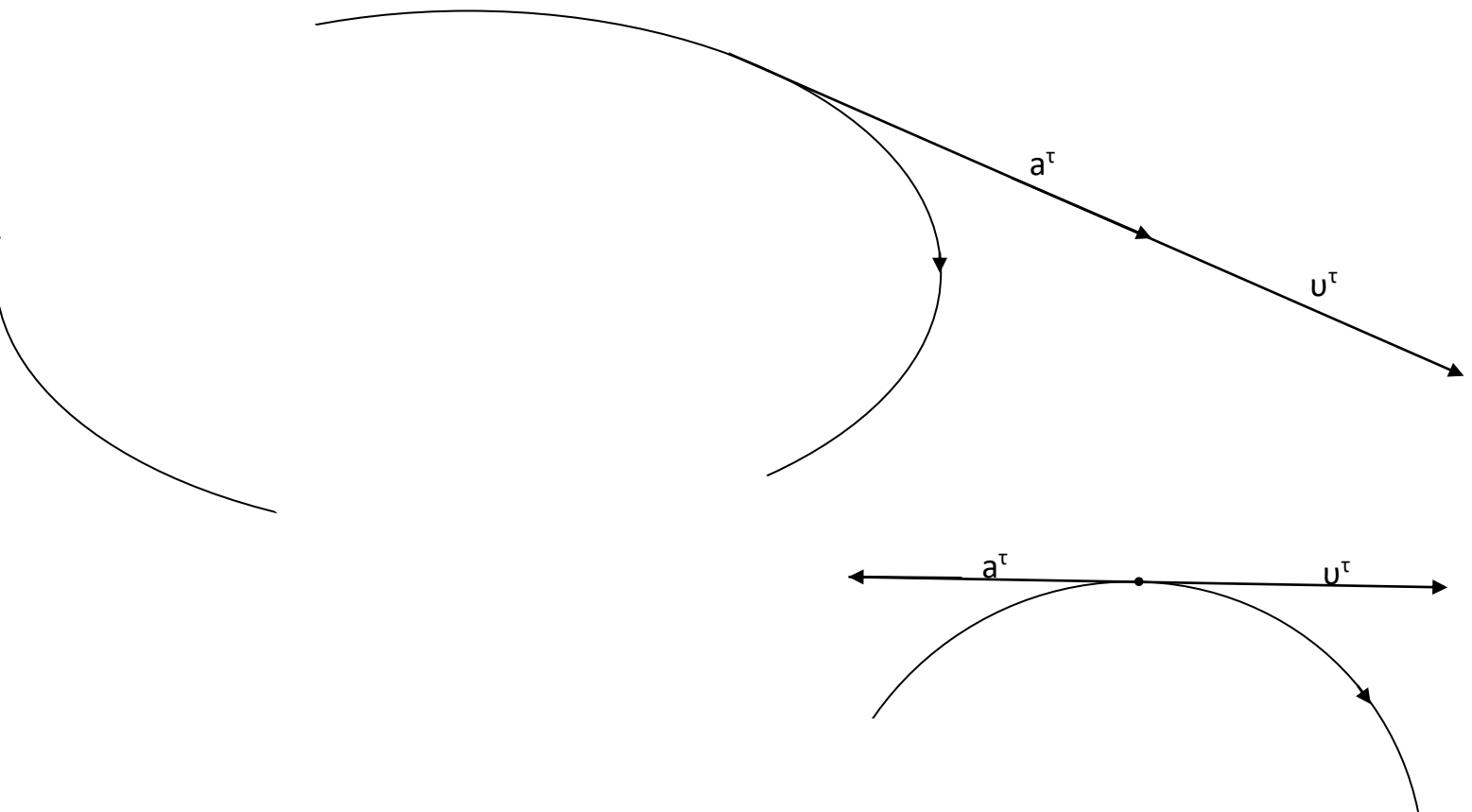


Рис. 8. Напрям прискорень при криво.

1.4. Рух вертикально кинutoї точки.

Рух точки, яку кинули вертикально доверху є прямолінійним та нерівномірним. При русі вгору її швидкість зменшується від максимальної на початку руху до нуля в вищій точці. При русі донизу її швидкість зростає від нульової нагорі до максимальної біля поверхні землі.

Шлях, що пройшла точка в цьому випадку є висотою її підйому – H , а прискоренням буде прискорення вільного падіння – g .

Рівнянням руху точки при її русі нагору, згідно формули 1.9 є:

$$H = v_o t - \frac{g t^2}{2} \quad (1.15)$$

Коли точка досягає вершини, її швидкість стає нульовою і вона починає рухатись до землі рівноприскоренно. В момент удару швидкість максимальна. Рівняння руху в цьому випадку:

$$H = \frac{g t^2}{2} \quad (1.16)$$

Закон зміни швидкості згідно до рівняння (1.10) є:

$$v^2 - v_o^2 = \pm 2gH \quad (1.17)$$

Якщо час підйому невідомий, висоту підйому можливо знайти, використовуючи останнє рівняння:

$$H = \sqrt{\frac{v_o^2}{2g}} \quad (1.18)$$

1.5. Рух точки , кинутої під кутом до горизонту.

В якості криволінійного нерівномірного руху розглянемо кінематику руху точки, що кинули з деякою початковою швидкістю під кутом до горизонту, як показано на рисунку 9. Дану швидкість розкладемо на складові так, щоб

$$\vec{v}_O = \vec{v}_x + \vec{v}_y \quad v_x = v_o \cos \alpha, \quad v_y = v_o \sin \alpha$$

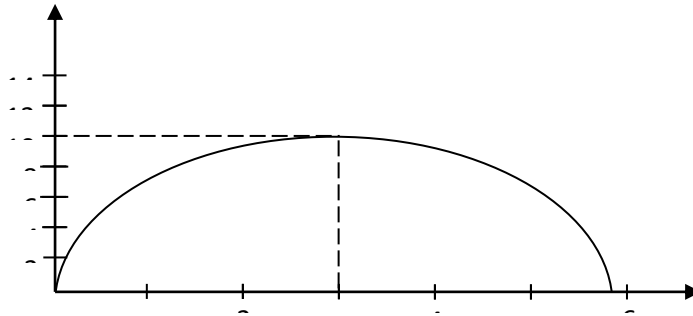


Рис. 9. Кінематика точки, кинутої під кутом до горизонту.

При розв'язанні даної задачі кінематики необхідно визначити наступні кінематичні характеристики – траєкторію руху, висоту та дальність польоту, час підйому до найвищої точки, повний час руху.

Розглянемо закон зміни швидкості.

Швидкість направлена по дотичній до траєкторії. При підйомі до вищої точки вертикальна складова швидкості зменшується за законом:

$$v_y = v_{oy} - gt$$

В найвищій точці ця складова дорівнює нулю.

Тобто, час підйому до найвищої точки буде:

$$t_{\uparrow} = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{v_o \sin \alpha}{g}$$

Зрозуміло, що час польоту до падіння точки на землю буде в два рази більше.

Тобто повний час польоту точки є:

$$t_{\uparrow\downarrow} = 2t_{\uparrow} = \frac{2v_o \sin \alpha}{g}$$

В горизонтальному напрямку швидкість точки не змінюється ні за модулем ні за напрямом, тобто в цьому напрямку рух точки рівномірний та прямолінійний, а це означає, що максимальна дальність польоту точки визначиться за формулою:

$$S_{MAX} = v_x t_{\uparrow\downarrow} = v_o \cos \alpha \frac{2v_o \sin \alpha}{g} = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Оскільки, в вертикальній площині рух точки є рівносповільним до максимальної висоти, в якій складова v_y дорівнює нулю. То максимальна висота підйому згідно до

рівняння 1.17 буде:

$$H_{MAX} = \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

1.6. Кінематика рівномірного руху точки по колу.

Рух по колу - це криволінійний рух, якщо при цьому швидкість точки не змінюється по модулю ($v = \text{Const}$), то, як видно з формули 1.13, тангенційного прискорення не буде. Воно дорівнює нулю. З формули 1.12 бачимо, що повне прискорення точки дорівнює, в цьому випадку, його нормальному прискоренню за модулем та напрямком. Тобто, повне прискорення направлено по радіусу до центру кола. Це означає, що точка рухається рівномірно по колу.

При рівномірному русі точки по колу введемо її нові кінематичні характеристики - **кутову швидкість - ω , кутове прискорення - ε , період - T та частоту обертання - ν (n).**

Час одного повного оберту (T) точки по колу називається **періодом** її обертання. Зрозуміло, що період вимірюється в секундах.

Число обертань точки за одну секунду (n, ν) називається її **частотою** обертання. Одиницями частоти обертання є – 1/с.

З даних визначень легко знайти зв'язок між цими величинами. Зрозуміло, що

$$T = \frac{1}{\nu} \quad (1.19)$$

Якщо при русі точки по колу з його центру провести до точки радіус-вектор, який буде обертатися разом з точкою, то **законом руху** точки по колу буде залежність кута повороту радіуса вектора від бігу часу:

$$\varphi = f(t) \quad (1.20)$$

Кутова швидкість показує швидкість зміни кута повороту з бігом часу, тобто

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_o}{t - t_o} .$$

Якщо перейти до межових значень при $\Delta t \rightarrow 0$, отримаємо похідну

$$w = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.21)$$

З даної формули маємо одиниці вимірювання кутової швидкості. Оскільки в системі СІ кут вимірюється в радіанах, то одиницею вимірювання кутової швидкості в СІ є рад/с або 1/с. Як бачимо одиниці кутової швидкості та частоти обертання співпадають, тому між T , w та ν (n) існує простий зв'язок:

$$T = \frac{1}{\nu}; \quad w = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (1.22)$$

Не складно знайти **зв'язок між швидкостями v і w** (лінійною та кутовою швидкістю точки):

$$v = wR, \quad (1.23)$$

де R - радіус кола, по якому обертається точка.

Якщо кутова швидкість точки змінюється з бігом часу, тобто $w = f(t)$, то точка обертається з кутовим прискоренням - ε . **Кутове прискорення** показує зміну кутової швидкості з бігом часу:

$$\varepsilon = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{w - w_0}{t - t_0}$$

Якщо перейти до межових значень при $\Delta t \rightarrow 0$, отримаємо похідну, тобто кутове прискорення **дорівнює першій похідній від кутової швидкості по часу або другі похідні від кута повороту точки**:

$$\varepsilon = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (1.24)$$

З даної формули отримаємо, що кутове прискорення вимірюється в рад/с² або 1/с².

Зв'язок між лінійними та кутовим прискоренням отримаємо використовуючи формули 1.23 та формули зв'язку – 1.12-1. Тангенційне прискорення:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(wR)}{dt} = R \frac{dw}{dt} = \varepsilon R \quad (1.25)$$

Нормальне прискорення:

$$a^n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = \frac{w^2 R^2}{R} = w^2 R \quad (1.26)$$

Повне прискорення:

$$\dot{a} = \sqrt{\dot{a}_n^2 + a_\tau^2} = R \sqrt{w^4 + \varepsilon^2} \quad (1.27)$$

1.7. Засоби опису руху точки.

Розв'язати основну задачу кінематики – визначити положення точки в будь-який момент часу можливо, якщо відомий закон руху точки. Розглянемо детально векторний і координатний спосіб завдання закону руху точки.

Почнемо з векторного способу. Для цього визначимося з термінологією. **Радіусом вектором** точки називається рухомий вектор, початок якого закріплений в початку координат, а кінець - співпадає в кожен момент часу з положенням точки на траєкторії, як показано на рисунку 10.

Зрозуміло, якщо в будь-який момент часу буде відомо значення радіус-вектор точки, то цим самим буде відомо, де знаходиться точка, тому **при векторному способу завдання руху точки законом руху є завдання її радіус-вектору як функції часу:**

$$\mathbf{r}_A = f(t) \quad (1.28)$$

Визначимо основні кінематичні характеристики точки при даному способі опису руху – траєкторію, швидкість та прискорення.

Очевидно, що траєкторію руху описує кінець рухомого радіусу - вектора точки. З математики відомо, що це є **годограф** вектора. Тому, **траєкторією** руху при векторному способі завдання руху є **годограф радіуса-вектора точки**

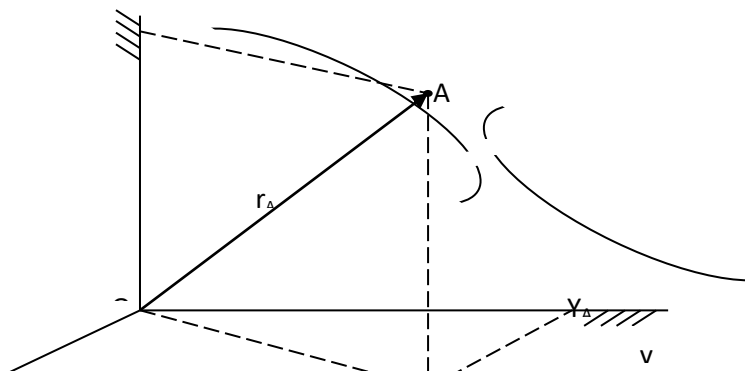


Рис. 10. Векторний і координатний спосіб завдання положення точки

Оскільки, переміщення є різниця двох послідовних значень радіуса-вектора (Рис.10), то посилаючись на формули 1.3 можна стверджувати, що при векторному способі опису руху **швидкість є перша похідна від радіусу-вектора точки, а прискорення є першою похідною від швидкості або другою похідною від радіусу-вектора:**

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt}, \quad \vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2}. \quad (1.29)$$

Розглянемо детально координатний спосіб завдання руху.

Як видно з рисунку 10 кожному значенню кінця радіуса-вектора точки у просторі відповідають три координати - X_A, Y_A, Z_A . При русі точки ці координати змінюються і коли вони відомі, то відомо де знаходиться точка в будь - який момент часу. Тому, **законом руху точки при координатному засобі завдання руху є залежність її координат від бігу часу :**

$$X_A = f_1(t), \quad Y_A = f_2(t), \quad Z_A = f_3(t). \quad (1.30)$$

Визначимо основні кінематичні характеристики точки при даному способі опису руху.

Не виконуючи математичних викладок, а тільки використаємо наслідками векторної алгебри та приведемо кінцеві результати:

Модуль переміщення при координатному засобі завдання руху визначиться за формулою:

$$S = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} \quad (1.31)$$

Модуль швидкості при координатному засобі завдання руху визначиться за формулою:

$$v_A = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2} \quad (1.32)$$

де V_X, V_Y, V_Z - проекції вектора швидкості на відповідні вісі координат. Вони визначаються з закону руху. Для цього необхідно знайти перші похідні від відповідних координат, а саме:

$$V_x = \frac{dX}{dt}, \quad V_y = \frac{dY}{dt}, \quad V_z = \frac{dZ}{dt}. \quad (1.33)$$

Аналогічно швидкості точки визначається її прискорення.

Модуль прискорення визначається за формулою

$$\dot{a}_A = \sqrt{\dot{a}_x^2 + \dot{a}_y^2 + \dot{a}_z^2} \quad (1.34)$$

де $\dot{a}_x, \dot{a}_y, \dot{a}_z$ - проекції вектора прискорення на відповідні вісі координат. Вони визначаються з закону руху як перші похідні від відповідних проекцій швидкості, або другі похідні від відповідних координат, а саме:

$$\dot{a}_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2 X}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2 Y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2 Z}{dt^2} \quad (1.35)$$

Розглянемо знаходження швидкості і прискорення точки на прикладі. Наприклад, точка рухається по площині таким чином, що закон її руху є: $X = 2 t^2 + 4$ (м); $Y = 1.5 t^2 - 2$ (м). Необхідно визначити швидкість та прискорення в момент часу $t = 6$ с.

Знайдемо перші похідні і швидкість за модулем:

$$V_x = \frac{dX}{dt} = 4t \text{ (м/с)}, \quad V_y = \frac{dY}{dt} = 3t \text{ (м/с)}, \quad V = \sqrt{16t^2 + 9t^2} = 5t = 30 \text{ (м/с)}$$

Знайдемо другі похідні і прискорення за модулем:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 4 \text{ (м/с}^2\text{)}, \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = 3 \text{ (м/с}^2\text{)}, \quad a = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Осталось визначитися траєкторію її руху.

Траєкторію, як і всі характеристики можна знайти з закону руху. Для цього, в параметричних рівняннях руху (1.30) необхідно позбавитися аргументу - часу та знайти рівняння залежності між координатами $f(X, Y, Z) = 0$, з якого визначити вид траєкторії.

Для того, щоб при координатному способі завдання руху точки перейти від рівнянь руху до рівняння траєкторії необхідно в параметричних рівняннях позбавитись часу.

Для попереднього приклада маємо: $X = 2 t^2 + 4$ (м); $Y = 1.5 t^2 - 2$ (м). Якщо знайти t^2 з першого рівняння і підставити його в друге, отримаємо:

$$Y = 1.5 t^2 - 2 = 1.5 \left(\frac{X}{2} - 2 \right) - 2 = 0.75 X - 5.$$

Це рівняння виду $y = kx + b$, тобто траєкторією є пряма лінія.

Отже, роблячи висновки по даній задачі, бачимо:

1. Точка рухається по прямій лінії рівноприскоренно;
2. Прискорення точки 5 м/с^2 ;
3. В момент часу 6 секунд точка має швидкість 30 м/с .

Таким чином, задача кінематики точки розв'язана повністю.

При природному способу завдання руху відомо:

- траєкторія руху ;
- напрям руху по траєкторії;
- точка початку руху на траєкторії.

Для такого виду руху законом руху є залежність криволінійної координати S від бігу часу t :

$$S = f(t) \quad (1.36)$$

Під *криволінійною координатою* розуміють відстань, яку пройшла точка по траєкторії від моменту початку руху до даного моменту часу (Рис. 11.)

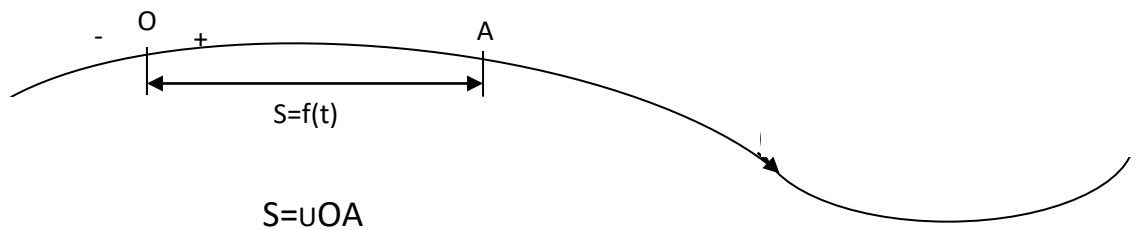


Рис. 11. Криволінійна координата.

Швидкість при природному засобу визначається як перша похідна від криволінійної координати:

$$v_A = \frac{dS_A}{dt} \quad (1.37)$$

За напрямком швидкість, як звичайно, направлена по дотичній до траєкторії в сторону руху точки.

Прискорення при природному способу завдання руху точки визначається як векторна сума прискорень тангенційного та нормального:

$$a_A = a_A^{\tau} + a_A^n$$

Розглянемо часткові випадки завдання природних законів руху:

1) рух прямолінійний та рівномірний, тобто – швидкість є сталою величиною за модулем та напрямком ($v = \text{Const}$, $a = 0$), тоді законом руху є:

$$S = v t,$$

тобто, координата пропорційна часу, коефіцієнт пропорційності – швидкість. Чим більше швидкість – тим більше кут нахилу прямої до осі абсцис.

Наприклад, $v = 6 \text{ м/с}$, тоді $S = 6t$; $v = 2 \text{ м/с}$, тоді $S = 2t$

Графіки координат (шляху) таких рухів представлені на рисунку 12.

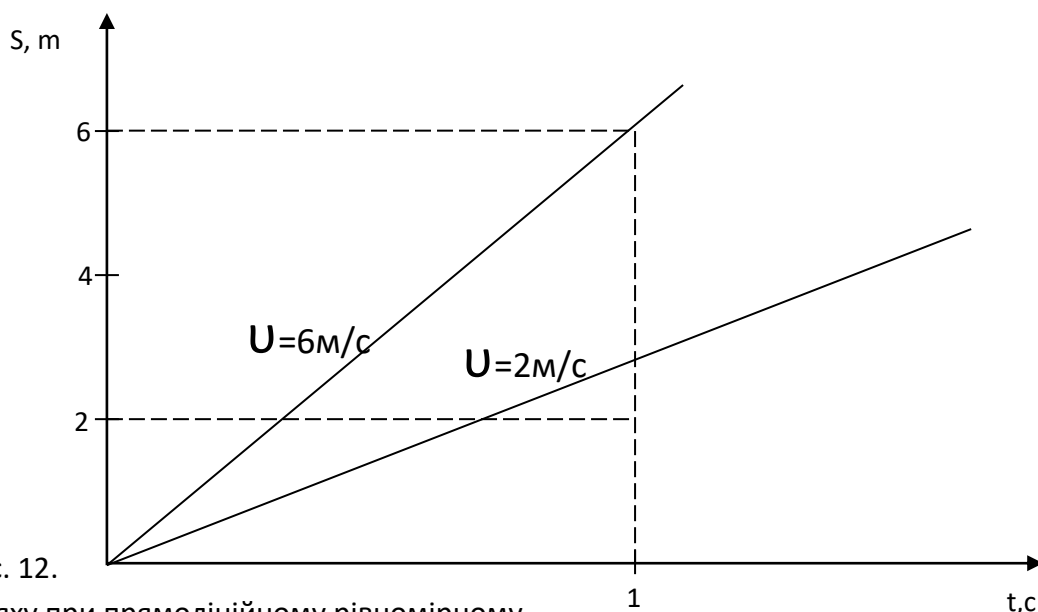


Рис. 12.

шляху при прямолінійному рівномірному

Графіки
русі

Прискорення при такому русі визначається за формулою:

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

з останньої формули швидкість визначається:

$$v = v_0 \pm at \quad (1.38)$$

де «+» - для рівноприскореного руху, а «-» - для рівносповільного руху точки.

З рівняння 1.36 маємо:

$$dS = v dt$$

Якщо в дане рівняння підставити значення швидкості з останнього рівняння а потім проінтегрувати його – отримаємо закон руху точки для випадку її руху прямолінійного та нерівномірного:

$$S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2} \quad (1.39)$$

де «+» - для рівноприскореного руху, а «-» - для рівносповільного руху точки.

Рівняння 1.38 та 1.39 демонструють закони зміни швидкості та координати при прямолінійному та нерівномірному русі, які графічно представлені на рисунках 13 та 14.

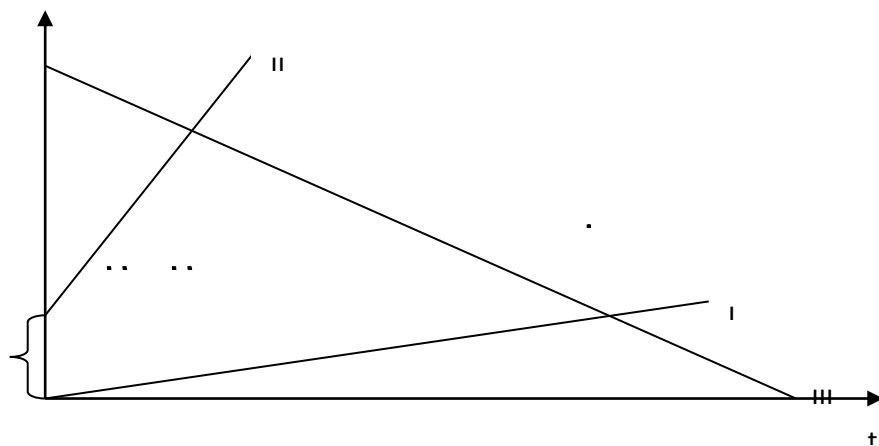


Рис. 13. Залежність швидкості від часу при прямолінійному та нерівномірному русі точки

Рис. 14. Залежність координати від часу при прямолінійному та нерівномірному русі точки

2) Розглянемо рівномірний рух по колу.

Оскільки, тангенційне прискорення характеризує зміну швидкості за модулем, то в даному випадку воно буде дорівнювати нулю, а повне прискорення буде дорівнювати нормальному, тобто направлено по радіусу до центру кола.

При рівномірному русі точки по колу введемо нові кінематичні характеристики – *кутову швидкість* – w , *кутове прискорення* – ε , *період обертання* – T та *частоту обертання* – n (ν)

Визначимо дані характеристики:

Час одного повного обертання точки по колу називається періодом її обертання. Період вимірюється в секундах.

Число обертань точки за одну секунду називається її частотою обертання. Вимірюється частота обертання в 1/с.

Зрозуміло, що зв'язок між періодом і частотою обертання наступна

$$T = \frac{1}{n}.$$

Що при русі точки по колу з його центру провести до точки радіус – вектор, який буде обертатися разом з точкою, то законом руху точки по колу буде залежність кута обертання повороту радіуса – вектора від бігу часу:

$$\varphi = f(t).$$

Кутова швидкість показує швидкість зміни кута обертання з бігом часу, тобто

$$w = \frac{d\varphi}{dt}$$

З даної формули отримаємо одиниці вимірювання кутової швидкості в СІ – 1/рад або 1/с.

Між періодом, кутовою швидкістю та частотою обертання існує простий зв'язок:

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}$$

Не складно знайти зв'язок між лінійною (v) і кутовою швидкістю (ω) точки:

$$v = \omega R,$$

де R – радіус кола по якому обертається точка.

Якщо кутова швидкість змінюється з бігом часу, тобто $\omega = f(t)$, то характеристикою такої зміни є кутове прискорення ε . *Кутове прискорення показує зміну кутової швидкості і дорівнює першій похідній від швидкості по часу або другій похідній від кута обертання:*

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

З даної формули отримаємо одиниці вимірювання кутового прискорення – $1/\text{с}^2$.

Зв'язок між лінійними та кутовими прискореннями отримаємо з їх визначень:

$$a^{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon$$

$$a^n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

Повне прискорення точки

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

1.8. Інерційні системи відліку. Принцип відносності Галілея.

Основні закони механіки були встановлені італійським фізиком і астрономом Г.Галілеєм (1564-1642) та доведені до завершеності англійським вченим І. Ньютоном (1643-1727). Механіка, яка описується в цих законах носить назву **класичної механіки** або механіки Галілея-Ньютона. Як буде показано пізніше дана механіка є частковим випадком більш узагальненої механіки – **релятивістської**, що основана на **спеціальній теорії відносності**, яку сформулював А. Ейнштейн (1879-1955). Для опису законів руху мікрочастинок (електронів, атомів, елементарних частинок) закони класичної механіки застосовувати не можливо. Такий рух описується законами **квантової механіки**.

Класична механіка описує закони руху тіл з швидкостями набагато меншими ніж швидкість світла, тобто це рух звичайних тіл, з якими ми зустрічаємось на кожному кроці в нашому повсякденному житті.

Будь – який рух обов’язково відбувається в просторі і в часі. Тому, для опису руху точки (тіла) потрібно знати в яких місцях простору і в які моменти часу точка (тіло) знаходилося в тому чи іншому положенні.

Положення точки визначається по відношенню по якомусь іншому тілу, довільно вибраного, яке називається **тілом відліку**. Як правило, тіло відліку є нерухомим. З тілом відліку жорстко зв’язують **систему відліку** – сукупність системи координат і часу.

Системи відліку можуть бути різними – декартовими, сферичними, циліндричними та іншими. В класичній механіці найбільш поширене використання має декартова системи координат, в якій положення точки А в даний момент часу визначається трьома координатами - X_A, Y_A, Z_A або радіусом-вектором - $\vec{r}_A$.

При русі точки її координати з бігом часу змінюються. В загальному випадку її рух визначається скалярними рівняннями:

$$X = f_1(t), \quad Y = f_2(t), \quad Z = f_3(t),$$

що є еквівалентними рівнянню $\vec{r} = f(t)$. Дані рівняння є кінематичними рівняннями руху точки або законом її руху.

Число незалежних величин, які повністю визначають положення точки у просторі називаються **числом її ступенів свободи**. Якщо точка вільно рухається у просторі, то, як показано вище, вона має три незалежні координати (x, y, z), тобто має три ступені свободи.

Якщо точка буде рухатись по площині – то, зрозуміло, що ступенів свободи буде дві; при русі по лінії точка має одну ступінь свободи.

Як **рух** так і **спокій** точки є **величинами відносними**, які залежать від того, в якій системі відліку вони визначаються.

Наприклад, пасажир, що сидить в вагоні потягу відносно системи відліку, що зв’язана з потягом буде знаходитись у стані спокою, але якщо цей потяг рухається відносно вокзалу, то і пасажир і потяг будуть рухатися відносно вокзалу і будуть мати однакову швидкість – швидкість потягу. Якщо цей же самий пасажир підніметься і піде по вагону, то відносно вагону він буде мати свою швидкість, а відносно вокзалу на його швидкість накладеться ще й швидкість потягу.

Виникає питання – з яким тілом відліку належить зв’язати систему відліку? Чи всі системи однакові чи є біль зручні ?

Насправді рух можна описувати відносно будь-якої системи відліку, однак найпростіше механічний рух описувати відносно **інерційної системи відліку** – це такі системи відліку, відносно яких всі тіла, які не взаємодіють з іншими тілами рухаються прямолінійно і рівномірно. Це насправді абстракція, але у першому наближенні систему відліку, яка зв’язана з Землею можна вважати інерційною.

Інерційних систем існую безліч, тому що будь-яка система відліку, яка рухається відносно даної інерційної системи рівномірно і прямолінійно теж являється інерційною. А це, в свою чергу, означає, що ніяким експериментом не можливо виділити з сукупності

інерційних систем будь яку переважну систему. А це, в свою чергу, означає, що не можливо говорити про абсолютний спокій або абсолютний рух точки (тіла), а можливо говорити тільки про їх відносний рух чи спокій.

Останнє ствердження відоме як принцип відносності Галілея: **у всіх інерційних системах відліку закони механіки однаково справедливі або всі інерційні системи відліку рівноправні.**

Цей принцип являється одним з основ сучасного фізичного миро сприяння.

Питання як зв'язані між собою рух (спокій) в різних системах відліку, які самі рухаються одна по відношенню до другою було розв'язано Г.Галілеєм. Його ідея полягає в тому, що розглядається рух по відношенню до двох систем відліку – системи К (з координатами x, y, z), яку умовно будемо вважати нерухомою та рухомої системи K^I (з координатами x^I, y^I, z^I). Будемо вважати, що система координат K^I рухається по відношенню до системи координат К рівномірно та прямолінійно зі швидкістю $\vec{u}$ ($\vec{u} = \text{const}$). Відлік часу почнемо з того моменту, коли початки координат обох систем відліку співпадали.

Нехай в момент часу t рухома та нерухома системи відліку

Швидкість $\vec{u}$ направлена вздовж відрізка OO^I , а радіус-вектор початку відліку рухомої системи по відношенню до нерухомої (точки O^I) визначається як $\vec{r}_{O^I} = \vec{u}t$.

Знайдемо зв'язок між координатами довільної точки А в обох системах відліку.

$$\vec{r} = \vec{r}^I + \vec{r}_{O^I} = \vec{r}^I + \vec{u}t \quad (1.40)$$

Дане рівняння можна записати в проекціях на координатні осі:

$$x = x^I + u_x t, \quad y = y^I + u_y t, \quad z = z^I + u_z t \quad (1.41)$$

Рівняння 1.40 та 1.41 носять назву **рівняння перебудови координат Галілея.**

В класичній механіці вважається, що біг часу не залежить від відносності руху системи координат, тобто у всіх системах координат не залежно від того рухаються вони чи ні час протікає однаково. Тобто, до рівнянь перебудови 1.36 та 1.37 необхідно додати ще одне рівняння:

$$t = t^I \quad (1.42)$$

Якщо взяти першу похідну від виразу 1.36 по часу, отримаємо рівняння, згідно до формули 1.29:

$$\vec{v} = \vec{v}^I + \vec{u} \quad (1.43)$$

Цей вираз являє собою **правило складання швидкостей в класичній механіці.**

Прискорення в системі К:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}^I + \vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{v}^I}{dt} = \vec{a}^I.$$

Таким чином, прискорення в системах координат, які рухаються по відношенню одна до одної рівномірно і прямолінійно однакові.

1.9. Контрольні питання до розділу «Кінематика точки».

1. В чому різниця шляху і переміщення ?

1. При криволінійному русі що більше шлях чи переміщення ?
2. Матеріальна точка вийшла з точки А та пройшла по прямій 40 м, потім повернулась назад в точку А. Чому дорівнює шлях ? Переміщення ? Потім точка пройшла в зворотному напрямку по прямій 30 м. Чому дорівнює загальний шлях ? Загальне переміщення ?
3. Як називається рух при якому швидкість зростає ? Який знак має прискорення при такому русі ?
4. Чому дорівнює прискорення при прямолінійному рівномірному русі ?
5. Чи можна стверджувати, що при зміні швидкості точки по напрямку дана точка рухається з прискоренням ?
6. Рух точки по криволінійній траєкторії може бути без прискорення ?
7. Чи залежить напрям нормального прискорення від напрямку швидкості ?
8. Вектор тангенційного прискорення направлений проти вектору швидкості. Як рухається точка ?
9. Коли нормальне і повне прискорення точки співпадають ?
10. Чому дорівнює нормальне прискорення при прямолінійному русі точки ?
11. На рисунку 1, що означає точка перетину графіків 1 і 2 ?
12. Яку відстань до зустрічі пройшла точка 1 (точка 2) рисунок 1.

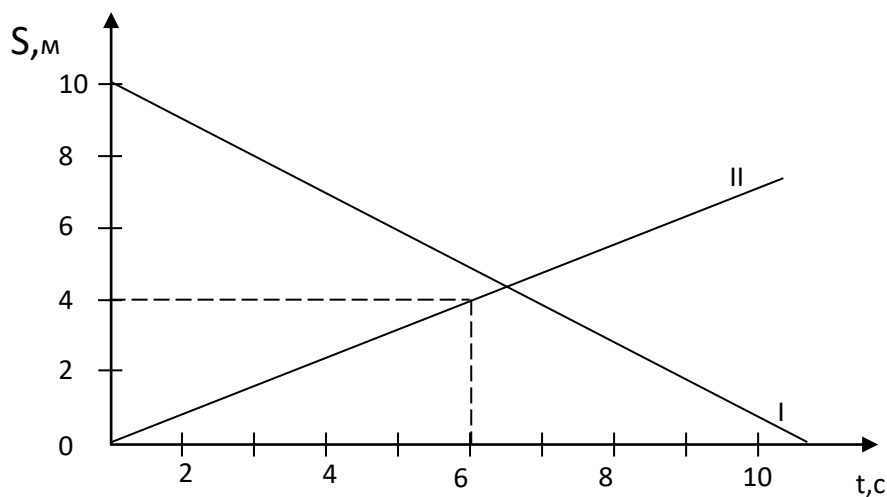


Рис.1.

13. Який шлях та переміщення пройшла точка на рисунку 2?

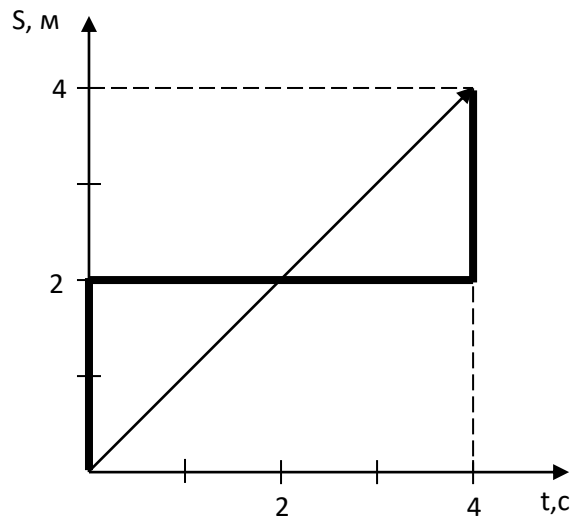


Рис. 2.

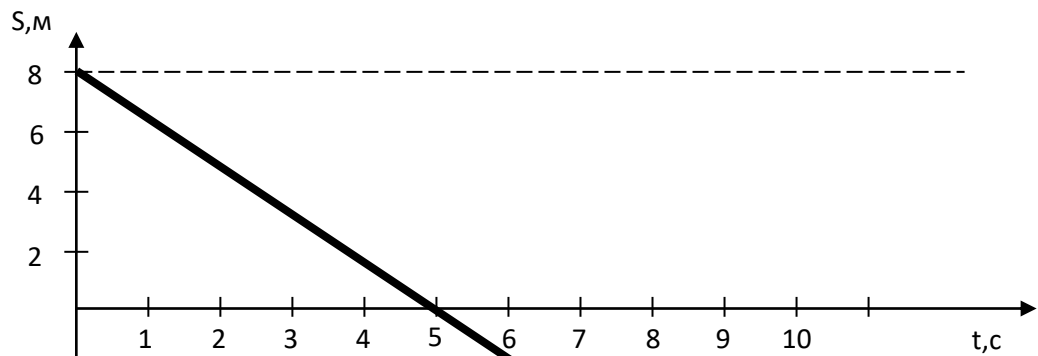


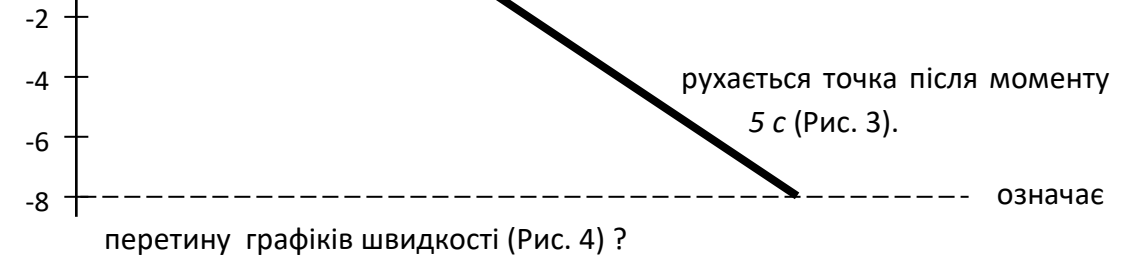
Рис.3.

15. Як

часу $t =$

16. Що

точка

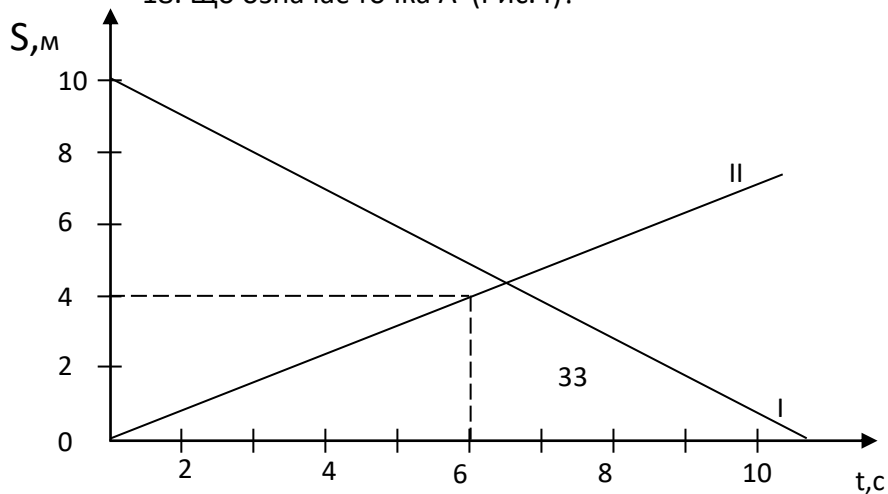


рухається точка після моменту 5 с (Рис. 3).

перетину графіків швидкості (Рис. 4) ?

17. Як рухається точка 1 і точка 2 на рисунку 4?

18. Що означає точка А (Рис.4)?



33

Рис.4.

19. Які початкові швидкості мала точка 1 і 2 (Рис. 4)?
20. Скільки часу пройшло до зупинки точки 2 (Рис.4) ?
21. Пояснити як рухалась точка (Рис.5).

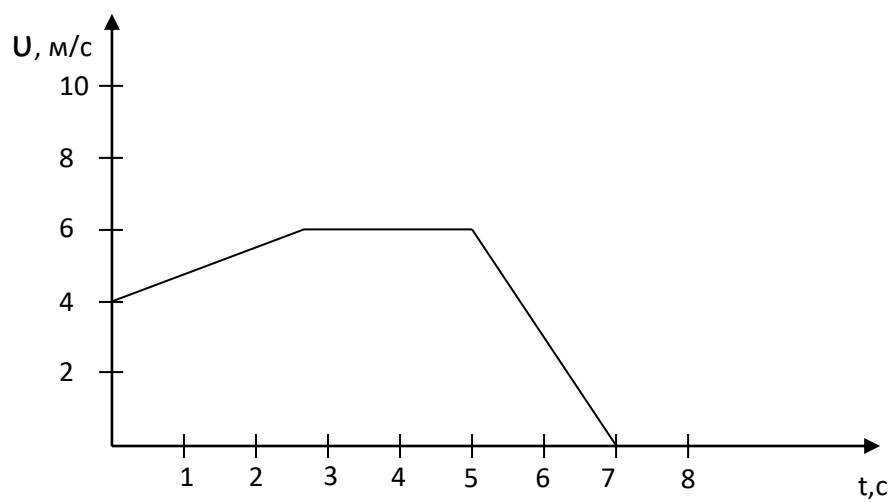


Рис.5.

22. Пояснити як рухалась точка (Рис.6) ?

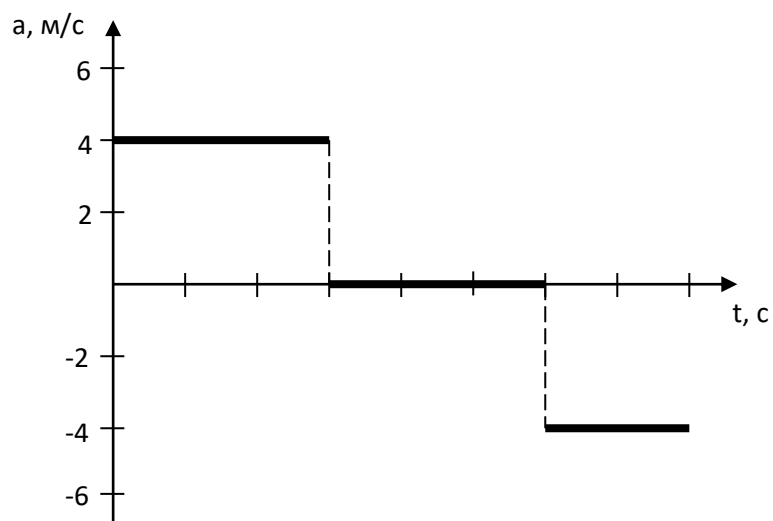


Рис.6.

23. Знайти по графіку на рисунку 7 максимальну висоту польоту точки? Час підйому до максимальної висоти? Повний час руху. ?
24. Якщо точка немає тангенційного прискорення, а тільки нормальне, то як вона рухається?
25. Чому дорівнює тангенційне прискорення точки в перегині А (Рис. 7) ?

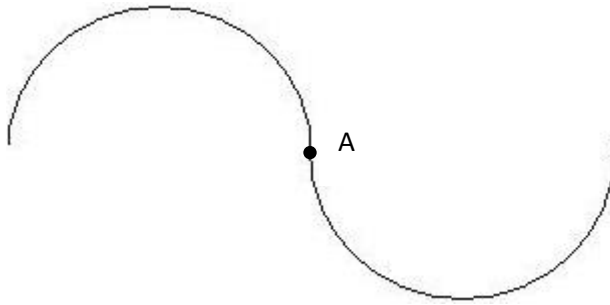


Рис.7.

26. Якщо у точки немає нормального прискорення, а тільки тангенційне, то як вона рухається?
27. Яке тіло можна назвати вільним і скільки ступенів свободи воно має ?
28. Чому кінематика тіла при його поступальному русі зводиться до кінематики його однієї точки?
29. Назвати кінематичні характеристики тіла при його обертальному русі навколо нерухомої осі.
30. Записати закон рівномірного (нерівномірного) обертання.
31. Всі точки тіла при його обертальному русі мають однакову кутову швидкість чи ні ?
32. Всі точки на одному радіусі мають однакову лінійну швидкість чи ні ?
33. Як залежить швидкість окремих точок тіла від радіусу обертання ?
34. Які кінематичні характеристики однакові у всього тіла при його обертальному русі, а які різні ?
35. Який рух називається плоско паралельним ?
36. До чого можна звести плоско паралельних рух тіла ?

37. Які і скільки рівнянь описують плоско паралельний рух тіла?
38. Чи залежать рівняння, що описують поступальну частину руху при плоскому русі тіла від вибору основної точки (полюса) ?
39. Чи залежать рівняння, що описують обертальну частину руху при плоскому русі тіла від вибору основної точки ?
40. Скільки ступенів вільності має тіло, що рухається по лінії ? площині ? у просторі ? плоско паралельно ? з однією закріпленою точкою ?
41. Яка кінематика руху тіла з однією закріпленою точкою?
42. Співпадають по напрямку кутова швидкість і кутове прискорення при русі тіла з однією закріпленою точкою ?
43. Всі точки мають однакову кутову швидкість при русі тіла з однією закріпленою точкою ?
44. Всі точки мають однакові лінійні швидкості при русі тіла з однією закріпленою точкою ?
45. Як направлений вектор кутої швидкості при русі тіла з однією закріпленою точкою ?
46. Які види найпростішого виду руху тіла вам відомі ?

1.10. Тести до розділу «Кінематика точки»

1. Кінематика вивчає ...

- А.** Геометрію руху.
- Б.** Рух точки без врахування сил, що на неї діють.
- В.** Обидві попередні відповіді вірні.

2. Основною задачею кінематики є ...

3. Перерахувати векторні характеристики точки...

4. Перерахувати скалярні характеристики точки...

5. Точка пройшла по прямій 20 метрів та повернулась назад до початку. Чому дорівнює шлях/переміщення ?

- А.** 40 метрів/0 метрів.
- Б.** 0 метрів/ 40 метрів.
- В.** 0 метрів/ 0 метрів

6. Точка пройшла по прямій 20 метрів та повернулась назад і в зворотному напрямку пройшла ще 40 метрів. Чому дорівнює шлях/переміщення ?

- А.** 0 метрів/ 60 метрів
- Б.** 60 метрів / 0 метрів
- В.** 80 метрів / 40 метрів
- Г.** 40 метрів / 80 метрів

7. Графік шляху при прямолінійному рівномірному русі це

- А.** Пряма паралельна вісі часу.
- Б.** Пряма під кутом до вісі часу.
- В.** Парабола.

8. Графік шляху при прямолінійному нерівномірному русі це

- А.** Пряма паралельна вісі часу.
- Б.** Пряма під кутом до вісі часу.
- В.** Парабола.

9. Точка перетину графіків на графіку швидкостей двох тіл означає, що

- А.** Обидва тіла зупинилися.
- Б.** Швидкості обох тіл стали однаковими.
- В.** Тіла зустрілися.
- Г.** Тіла почали рухатися в зворотному напрямку.

10. Точка перетину графіку швидкості з віссю часу означає, що

- А.** Тіло почало рухатись в зворотному напрямку.
- Б.** Тіло зустрілося з іншим тілом.
- В.** Тіло зупинилося.

11. Графік швидкості при прямолінійному нерівномірному русі це

- А.** Пряма паралельна вісі часу.
- Б.** Пряма під кутом до вісі часу.
- В.** Парабола.

12. Графік прискорення при прямолінійному нерівномірному русі це

- А. Пряма паралельна вісі часу.
- Б. Пряма під кутом до вісі часу.
- В. Парабола.

13. Вектор швидкості точки

- А. Завжди направлений по дотичній до траєкторії в сторону руху точки.
- Б. Завжди направлений по нормалі до траєкторії в сторону руху точки.
- В. Збігається з напрямом переміщення.
- Г. Всі попередні відповіді вірні.

14. При криволінійному русі повне прискорення точки дорівнює геометричній сумі ...

15. Тангенційне (дотичне) прискорення точки показує зміну швидкості

- А. За модулем.
- Б. За напрямком.

16. Нормальне прискорення точки показує зміну швидкості

- А. За модулем.
- Б. За напрямком.

17. Тангенційне (дотичне) прискорення точки

- А. Направлено по дотичній до траєкторії.
- Б. Направлено по радіусу до центру кривизни.

18. Нормальне прискорення точки направлено по

- А. Дотичній до траєкторії.
- Б. Радіусу до центру кривизни.

19. При прямолінійному русі нормальне прискорення дорівнює нулю

- А. Так.
- Б. Ні.

20. Рух точки по колу з постійною по модулю швидкістю можна вважати рівномірним (без прискорення)

А. Так.

Б. Ні.

1.11. Розрахунково-графічна робота на визначення кінематичних характеристик точки

Зміст завдання: Точка рухається по площині таким чином, що рівняннями її руху є $x = f(t)$ $y = f(t)$. Визначити 1) траєкторію руху точки; 2) координати початку руху; 3) напрям руху по траєкторії; 4) , координати, швидкість та прискорення точки в момент часу t .

Таблиця 1. Варіанти завдань для визначення кінематичних характеристик точки.

Номер варіанту	$x = f(t), м$	$y = f(t), м$	$t, с$
1			3
2			4
3			3
4			5
5			6
6			8
7			3
8			4
9			7
10			5
11			2
12			3
12			4
14			4
15			5
16			3
17			2
18			1
19			6
20			3

Розділ 2. Кінематика твердого тіла

Ступені свободи твердого тіла.

Найпростіші види руху тіла.

Розклад руху твердого тіла на складові:

поступальний та обертальний.

Кути Ейлера. Рух у площині.

Обертальний рух.

Зв'язок між лінійними та кутовими змінними.

2.1. Ступені свободи твердого тіла.

Вивчення будь-якої дисципліни йде шляхом ускладнення – тобто від простого до складного. Знаючи кінематику однієї точки та користуючись методами знаходження кінематичних характеристик точки, законами опису її руху ми переходимо до більш складної кінематики – кінематики твердого тіла. Зрозуміло, що опис руху тіла значно складніший ніж однієї точки.

Під твердим тілом в механіці розуміють сукупність матеріальних точок, відстані між якими вважаються незмінними. Це вже об'ємна субстанція і кожна точка тіла при його русі може рухатись за своїми законами, а саме - по своїй траєкторії, зі своєю швидкістю та прискоренням. Тому, **основна задача кінематики тіла** – визначення положення твердого тіла в будь-який момент часу є складною задачею.

При вивченні рухів твердого тіла ми теж підемо по шляху ускладнення, а саме, почнемо з найпростіших двох видів рухів – поступального та обертального руху тіла навколо нерухомої осі та покажемо, що будь-який інший – складний рух можливо звести до комбінації цих двох найпростіших. При цьому введемо чергову абстракцію – абсолютно вільного тіла.

Вільним тілом називають таке тіло рух, якого у просторі нічим не обмежений. Зрозуміло – це абстракція, тому що у будь - якому віддаленому куточку всесвіту на будь – яке тіло обов'язково діють гравітаційні сили, які впливають на його рух.

В класичній механіці вільне тіло може рухатись вздовж кожної з трьох координатних осей та може обертатися навколо кожної з осей. Ці рухи є незалежними вони називаються **ступенями свободи тіла**. Таким чином, **вільно тіло має шість ступенів свободи** – три поступальні та три обертальні (Рис. 17.).

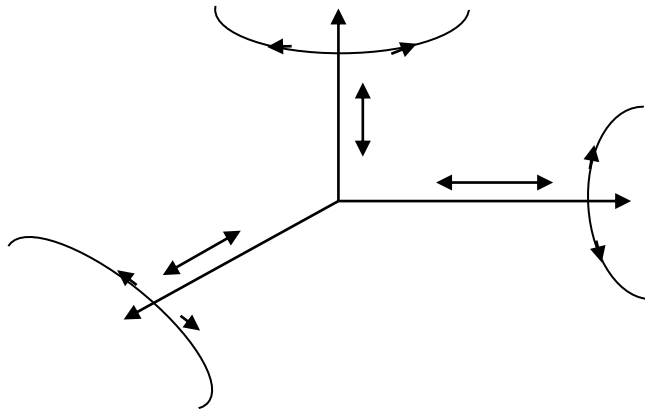


Рис. 17. Ступені свободи вільного тіла.

Для однозначного завдання положення тіла у просторі необхідно задати три координати якоїсь його точки (її, як правило називають полюсом), та три кута, що характеризують його орієнтацію у просторі. Тобто, в загальному вигляді рівняннями руху у просторі для вільного тіла є:

$$\{X_A = f_1(t), Y_A = f_2(t), Z_A = f_3(t), \alpha = f_4(t), \varphi = f_5(t), \theta = f_6(t)\} \quad (1.40)$$

2.2. Поступальний рух твердого тіла.

Якщо з бігом часу орієнтація тіла у просторі не змінюється, то умовно провівши у тілі пряму лінію ми побачимо, що ця лінія при його русі переноситься весь час паралельно сама собі. Рух тіла при якому лінія, що проведена в тілі переноситься під час руху паралельно сама собі називається **поступальним**.

Легко доказати, що при такому русі всі точки тіла рухаються по однаковим траєкторіям, з однаковими швидкостями, та однаковими прискореннями. Для цього, оберемо векторний спосіб завдання руху – тобто виберемо довільну точку О та з'єднаємо її радіусами-векторами з довільними точками тіла А і В (Рис. 18.), а також відрізок АВ розглянемо як вектор. З побудови видно, що переміщення точки В є вектор $\vec{R}_{BB'}$, а переміщення точки А є вектор $\vec{R}_{AA'}$.

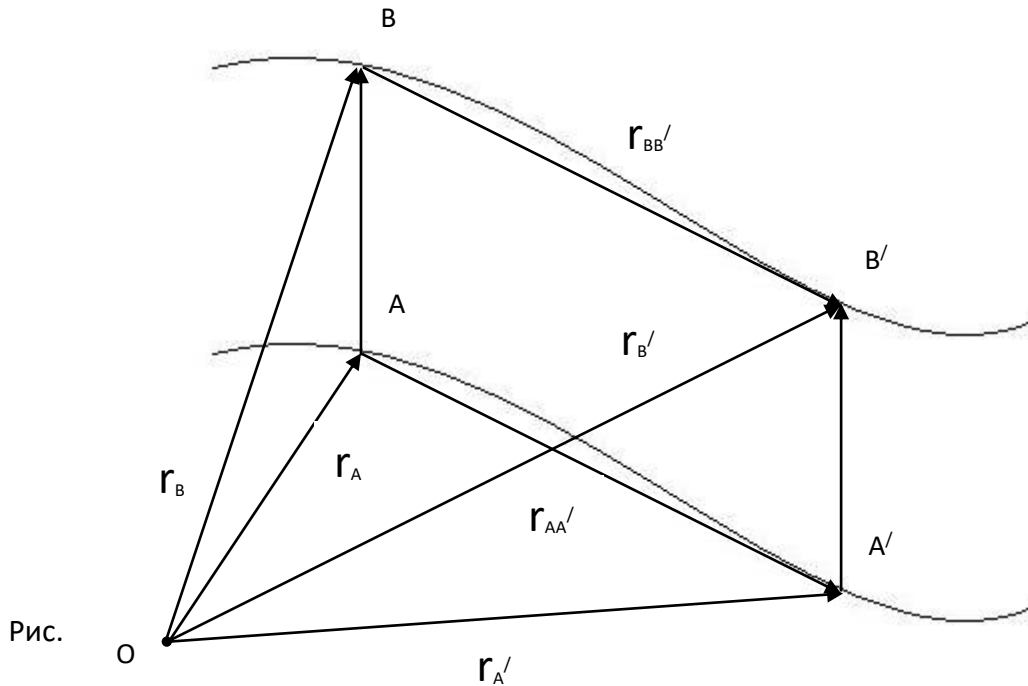


Рис. 18. Поступальний рух тіла.

За правилами складання векторів, як бачимо з побудови:

$$\vec{R}_{BB'} = \vec{R}_{B'} - \vec{R}_B \quad \vec{R}_{AA'} = \vec{R}_{A'} - \vec{R}_A \quad (1.41)$$

З іншого боку з побудови також видно, що

$$\begin{aligned} \vec{R}_{AB} &= \vec{R}_B - \vec{R}_A \\ \vec{R}_{AB} &= \vec{R}_{B'} - \vec{R}_{A'} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Але, відстань AB є незмінною із умови того, що у нас абсолютно тверде тіло, тобто

$\vec{R}_B - \vec{R}_A = \vec{R}_{B'} - \vec{R}_{A'}$ або $\vec{R}_{B'} - \vec{R}_B = \vec{R}_{A'} - \vec{R}_A$. Порівнюючи останнє рівняння з рівнянням 1.41, бачимо, що вектори $\vec{R}_{BB'}$ і $\vec{R}_{AA'}$ однакові, тобто переміщення будь-яких точок тіла при його поступальному русі – однакові.

Якщо взяти першу похідну від рівняння 1.42, то ми отримаємо що швидкості точок A і B однакові ($\vec{v}_A = \vec{v}_B$), а якщо взяти другу похідну від цього рівняння, то ми отримаємо, що і прискорення будь-яких двох точок при поступальному русі тіла теж однакові ($\vec{a}_A = \vec{a}_B$).

Таким чином, можливо зробити висновок, що **при поступальному русі тіла всі його точки рухаються як одна, а саме - по однаковим траєкторіям, з однаковими швидкостями та однаковими прискореннями**, а це в свою чергу означає, що **рух тіла**

можна замінити рухом однієї його точки. Знаючи кінематичні характеристики однієї точки ми будемо знати кінематичну картину руху всього тіла.

2.3. Обертальний рух твердого тіла.

Зовсім інша кінематична картина руху при обертальному русі тіла навколо нерухомої осі.

Якщо в тілі є дві нерухомі точки, то крізь них завжди однозначно можна провести нерухому вісь і єдиним видом руху тіла в цьому випадку буде обертання навколо даної нерухомої вісі. При цьому, **кінематика (тобто кінематичні характеристики) всього тіла і окремих його точок будуть різними.** Будемо розрізняти кінематичні характеристики всього тіла – це кутові характеристики, та кінематичні характеристики окремих його точок – так звані лінійні характеристики точок.

Зрозуміло, що при обертальному русі тіла всі його точки повертаються на один і той же кут.

Законом обертального руху тіла навколо нерухомої осі є залежність кута обертання тіла від бігу часу:

$$\varphi = f(t) \quad (1.43)$$

Оскільки обертання описується одним рівнянням, то воно має одну ступень свободи.

Якщо взяти першу похідну від цього виразу, отримаємо кутову швидкість обертання тіла навколо нерухомої осі:

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.44)$$

Кутова швидкість величина векторна. Оскільки всі точки тіла мають однакову кутову швидкість за модулем і напрямком, то достатньо показати один вектор. Вектор кутової швидкості прикладають до осі у вигляді рівної стрілки, направленої доверху при обертання за бігом часової стрілки, або у вигляді круглої стрілки навколо осі.

Якщо обертання рівномірне (швидкість постійна за модулем і напрямком), то законом руху тіла згідно до 1.43 буде лінійна залежність кута обертання від часу:

$$\varphi = \omega t \quad (1.45)$$

- де коефіцієнт пропорційності – кутова швидкість.

Якщо ж обертання буде нерівномірним, тобто з кутовим прискоренням, то це прискорення будуть мати всі точки тіла і воно визначиться за формулами:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (1.46)$$

Кутове прискорення є вектором і він також прикладається до осі обертання. При цьому, якщо обертання буде рівноприскореним, то вектори кутової швидкості і прискорення будуть направлені в одну сторону – обидва донизу чи обидва доверху. Якщо ж обертання буде рівносповільне, то ці вектори будуть направлені в різні сторони (Рис.19.).

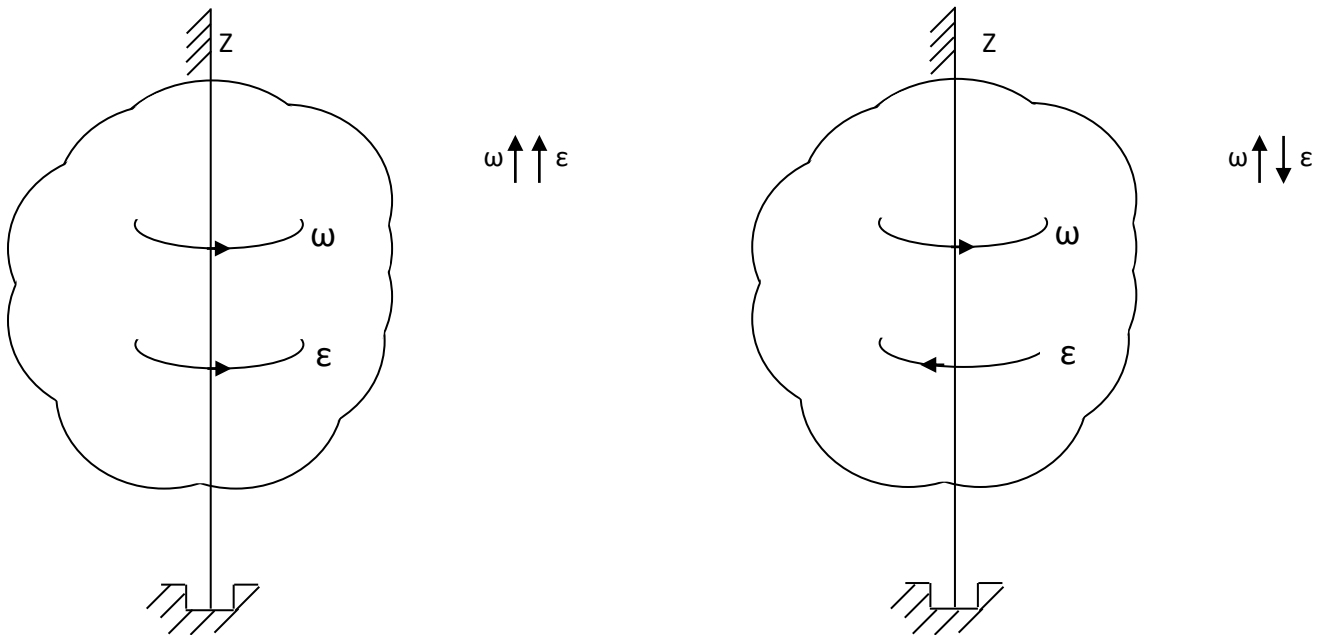


Рис. 19. Напрямок векторів кутової швидкості та прискорення.

Якщо про інтегрувати вираз 1.46, отримаємо **закон нерівномірного обертання тіла навколо нерухомої осі**:

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad (1.47)$$

Де «+» - для рівноприскореного обертання

Швидкість при цьому визначиться за формулою:

$$w = w_0 \pm \varepsilon t$$

(1.48)

Кутові характеристики тіла – кут повороту, кутова швидкість і кутове прискорення є однаковими для всіх точок тіла. Інакше бути не може, тому що тіло – це суцільне середовище і в ньому не може одна частина обертатися на один кут, а друга – на інший, а також різні частини тіла не можуть рухатися з різними кутовими швидкостями чи прискореннями

2.4. Зв'язок між лінійними та кутовими змінними.

Якщо розглядати окремі точки тіла при його обертанні навколо нерухомої осі то зрозуміло, що всі вони рухаються по своїм окремим колам, центри яких знаходяться на осі обертання. Швидкість кожної окремої точки (лінійна швидкість) буде направлена по дотичній до кола (перпендикулярно до його радіусу), і буде тим більше, чим далі точка розташована від осі обертання. Тобто, швидкість кожної окремої точки буде різною (Рис. 20.). Знайдемо кінематичний зв'язок між лінійними характеристиками окремих точок тіла та кутовими характеристиками усього тіла в цілому.

Щоб знайти швидкість за модулем, бачимо (Рис.20.) що довжина дуги АВ, яку пройшла точка по колу (або криволінійна координата точки) дорівнює добутку кута повороту тіла на радіус кола, на якому знаходиться дана точка:

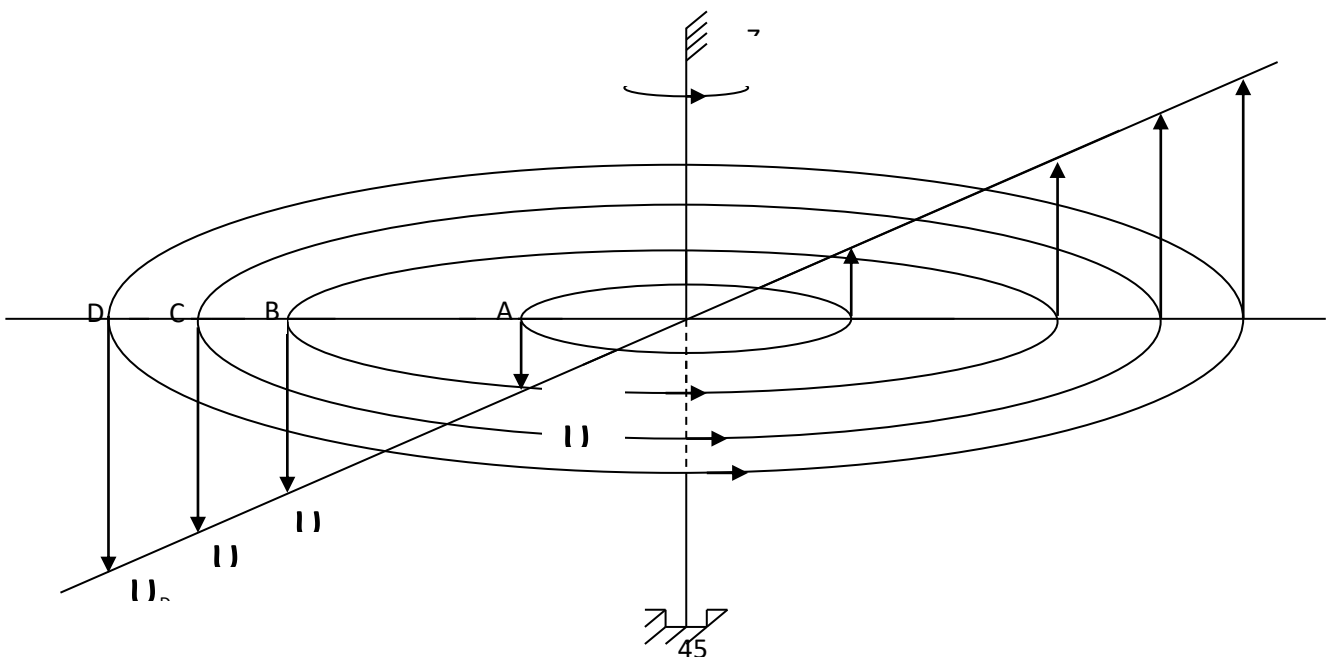


Рис.20. Залежність швидкостей точок тіла від радіусу обертання.

Зв'язок лінійних і кутових характеристик.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Якщо взяти похідну від цього виразу, то отримаємо зв'язок між лінійною швидкістю точки та кутовою швидкістю тіла:

$$v = \omega R \quad (1.49)$$

Зв'язок лінійних прискорень точок з кутовим прискоренням тіла знаходимо, використовуючи зв'язок 1.39

$$a^{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon R$$

$$a^n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R \quad (1.51)$$

$$\dot{a} = \sqrt{\dot{a}_n^2 + a_{\tau}^2} = R \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (1.52)$$

Таким чином, з формул 1.49-1.52 видно, що лінійні характеристики точок при обертальному русі тіла навколо нерухомої осі зв'язані з кутовими характеристиками тіла через радіус обертання та лінійні характеристики точок зростають по модулю при віддалені від осі обертання, так як зростає радіус.

2.5. Розклад руху твердого тіла на складові: поступальний та обертальний

Тверде тіло може рухатись у просторі будь-яким складним рухом, наприклад, **плоско паралельно** – це такий вид руху, при якому тіло рухаючись у просторі весь час остається паралельним деякої нерухомої площині. Так, наприклад, рухається колесо автомобіля, кабінки на колесі обзору, більшість деталей в механізмах та машинах виконують саме такий вид руху.

Розглянемо кінематику такого руху на прикладі циліндру, який котиться по площині ZOY , так що обертається весь час навколо своєї осі ZZ^I і остається паралельним площині XOY (Рис.17).

Зведемо цей складний рух до простих. Для цього умовно проведемо в циліндрі лінії паралельні осі ZZ^I (Рис. 17.). При русі тіла вся сукупність ліній рухається з однаковою швидкістю, прискоренням та по однаковим траєкторіям, тобто ці лінії рухаються поступально, а це означає, що можливо на кожній лінії взяти по одній точці, яка повністю замінить рух умовної лінії.

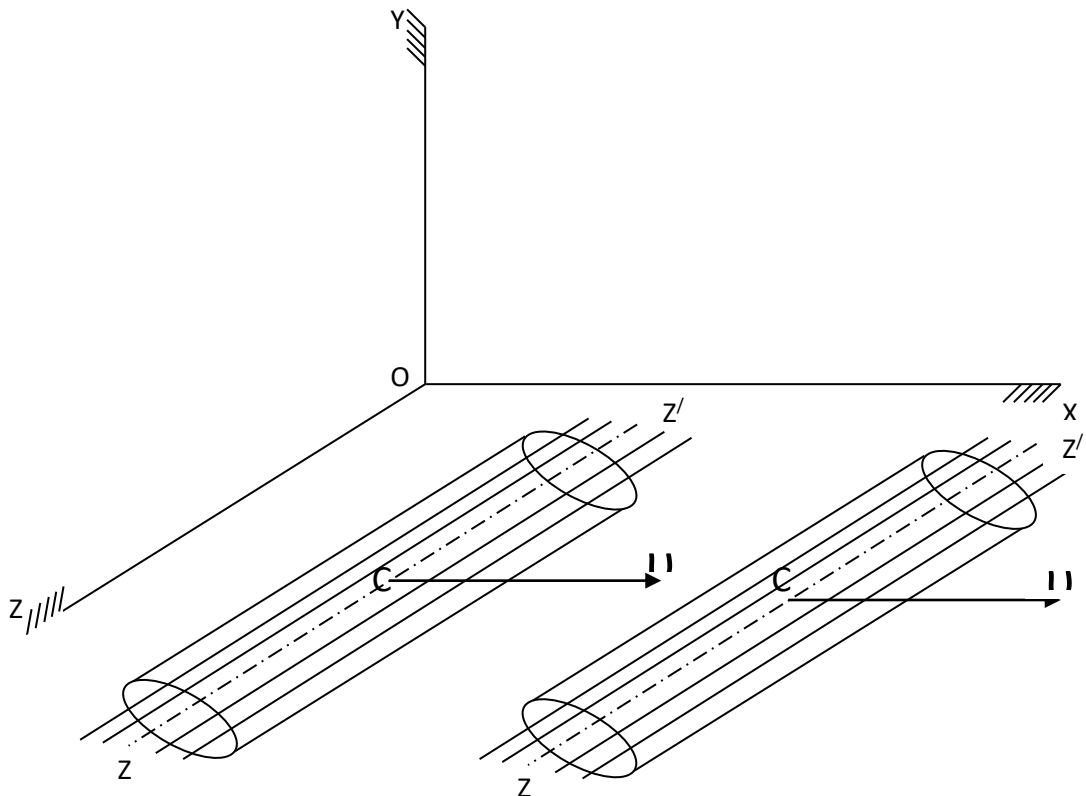


Рис.21. Плоский рух тіла

Дана сукупність точок утворить якусь площину, яка буде рухатись паралельно площині XOY (Рис. 22.) Рух даної площини буде повністю співпадати з рухом тіла, тобто ми звели рух тіла до руху площини.

Для того щоб описати рух площини достатньо знати, як рухаються хоча б будь-які дві точки площини. Але через дві точки завжди можливо провести тільки один відрізок прямої. Таким чином, ідучи шляхом спрощення руху ми звели складний плоско паралельний рух твердого тіла до руху відрізка AB , що проведений в даному тілі.

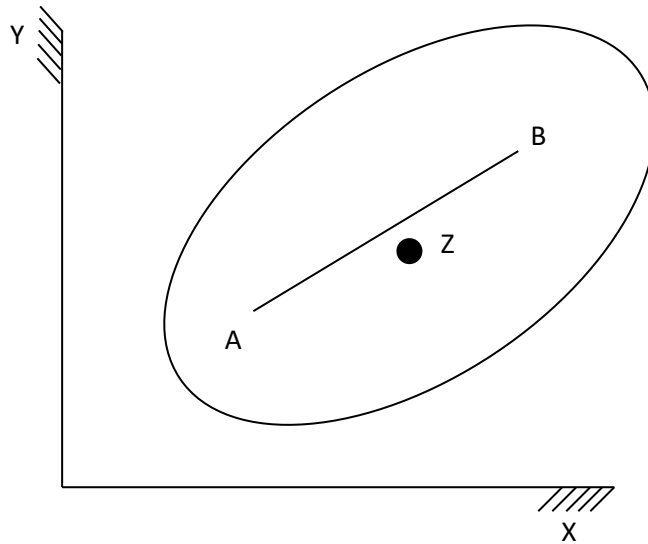


Рис. 22. Рух площини

Розглянемо як може рухатися відрізок AB. Нехай його перше положення $\vec{A}_I B_I$, а друге положення - $\vec{A}_{II} B_{II}$ (Рис. 23.). Процес руху з першого положення в друге завжди можна представити як паралельний рух відрізка до положення $\vec{A}_{II} B_{II}^I$, а потім обертання відрізка $\vec{A}_{II} B_{II}^I$ навколо точки A_{II} до положення $\vec{A}_{II} B_{II}$. Перша частина руху – паралельний перенос відрізка – то є поступальний рух, друга частина руху – то є обертання навколо точки A. Таким чином, посилаючись на все вище сказане можливо зробити наступний висновок: **плоско паралельний (плоский) рух твердого тіла завжди можна представити як комбінацію поступального руху тіла разом з будь-якою точкою (точкою A в даному випадку), та обертанням навколо даної точки.**

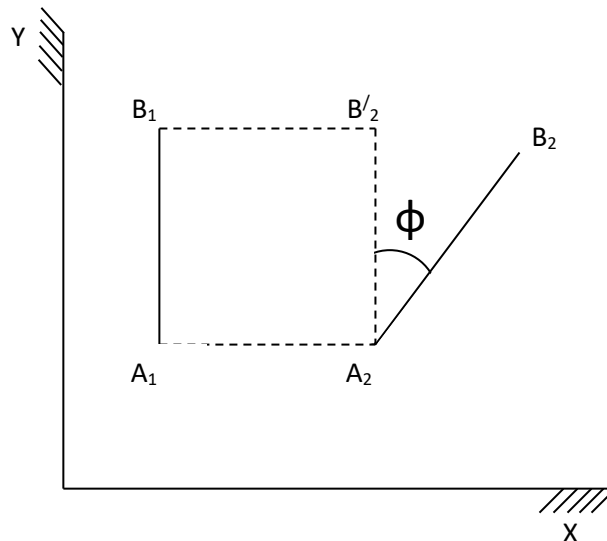


Рис.23. Рух відрізка.

Точку А називають як правило полюсом, при цьому вона не обов'язково повинна належати самому тілу.

Знайдемо рівняння плоского руху тіла.

Оскільки полюс рухається в площині, то при русі тіла змінюються його дві координати X_A і Y_A . Тобто, рівняння, які описують поступальну частину руху є - $X_A = f(t)$ $Y_A = f(t)$. При обертанні тіла навколо точки А рівнянням його руху є залежність кута обертання від бігу часу - $\varphi = f(t)$. Таким чином, рівняннями, що описують плоский рух тіла будуть:

$$\begin{cases} X_A = f_1(t) \\ Y_A = f_2(t) \\ \varphi = f_3(t) \end{cases} \quad (1.53)$$

Якщо візьмемо першу похідну від даних рівнянь, то отримаємо лінійну швидкість точки А, та кутову швидкість обертання. Візьмемо ще раз похідну – отримаємо лінійне прискорення точки А, та кутове прискорення обертання.

Аналізуючи рівняння 1.53 бачимо три наслідки:

- 1) якщо кут є незмінним, а змінюються тільки координати точки А, то відрізок АВ (а значить і все тіло) рухається паралельно сам собі, тобто поступально;
- 2) якщо координати точки А є незмінними, а змінюється кут обертання – то тіло виконує обертання навколо точки А;
- 3) якщо змінюється і кут і координати точки А, то тіло рухається плоско.

Таким чином, **плоско паралельний рух** дійсно складається з **поступального руху разом з основною точкою (полюсом)** та **обертального руху навколо полюса** і його завжди можна розкласти на ці два види простих рухів тіла.

2.6. Кути Ейлера. Рух тіла з однією закріпленою точкою.

З складних рухів твердого тіла інтерес представляє такий рух, при якому одна його точка є закріпленою. Такий рух, наприклад, виконує будь-яке тіло, що закріплене шаровим шарніром.

Розглянемо кінематику такого руху.

Для цього, розглянемо дві системи координат – нерухому K з осями $OXYZ$, та рухому K^I з осями OX^I, Y^I, Z^I , яка жорстко зв'язана з тілом. Для того, щоб знати положення тіла у просторі необхідно знати його положення по відношенню до нерухомих осей $OXYZ$ (Рис. 20).

Рис. 20. Положення у просторі тіла, що закріплено в одній точці.

Положення тіла у просторі для цього випадку буде задано трьома кутами, які називаються кутами Ейлера – це **кут власного обертання** - φ , **кут прецесії** - ψ та **кут нутації** - θ . Назва кутів взята з небесної механіки, а утворюються вони таким чином – площини OX^I, Y^I та OXY перетинаються по лінії OK , яка називається лінією вузлів (Рис.20). Кут власного обертання φ – це кут між лінією вузлів та віссю OX . Кут прецесії - ψ , то кут між віссю OX^I та лінією вузлів OK . Кут нутації θ - це кут між вісьми OZ та OZ^I .

При зміні кута власного обертання - φ , як видно з рисунку 20 тіло здійснює обертання навколо осі OZ (власне обертання), при зміні кута прецесії - ψ тіло обертається навколо осі OZ^I (прецесія), якщо ж змінюється кут нутації - θ , то тіло обертається навколо лінії вузлів OK . Тому рівняннями, що описують однозначно рух тіла з однією закріпленою точкою будуть наступні залежності:

$$\varphi = f_1(t), \quad \psi = f_2(t), \quad \theta = f_3(t) \quad (1.54)$$

Ці три рівняння, які є законами руху тіла показують, що тіло з однією закріпленою точкою має три ступені свободи.

Рух такого тіла складається з елементарних поворотів тіла навколо **миттєвої осі** OP , яка в свою чергу постійно змінює своє положення і в тілі, і в просторі (Рис.21).

Так, обертаючись навколо миттєвої осі OP в сусіднє положення, тіло переміщується, обертаючись навколо нової миттєвої осі OP_I і т.д. тобто, весь **рух тіла з однією закріпленою точкою є серія послідовних елементарних поворотів миттєвих осей обертання, що проходять через дану точку закріплення.**

Рис. 21. Рух тіла з однією закріпленою точкою.

Кінематичні характеристики, що описують даний вид руху тіла будуть - **миттєва кутова швидкість** $\vec{\omega}$ та **миттєве кутове прискорення** $\vec{\varepsilon}$.

Вектор миттєвої швидкості лежить на миттєвій осі обертання, а тому разом з нею постійно переміщується у просторі (Рис.21) та змінюється і по модулю, і по напрямку, а його кінець – точка А буде описувати у просторі криву лінію АВ, яка є годографом вектора миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega}$.

Миттєве кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ є перша похідна від миттєвої кутової швидкості, тобто

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Оскільки, вектор $\vec{\omega}$ змінюється і по величині і по напрямку, то порівнюючи останній вираз з виразом $\vec{v} = d\vec{r} / dt$, можна стверджувати, що **миттєве кутове прискорення можна розрахувати як швидкість, з якою кінець вектора $\vec{\omega}$ переміщується вздовж кривої АВ – годографу вектора миттєвої швидкості**. А значить напрям вектора $\vec{\varepsilon}$ співпадає з напрямом дотичної до кривої АВ в відповідній точці. Таким чином, на відміну від обертання тіла навколо нерухомої осі для випадку обертання тіла навколо нерухомої точки напрями векторів $\vec{\varepsilon}$ та $\vec{\omega}$ не співпадають.

Вектори $\vec{\varepsilon}$ та $\vec{\omega}$ є основними кінематичними характеристиками тіла, їх можна розрахувати з основних рівнянь руху (1.54). Але, крім цих характеристик кожна точка тіла має свої лінійні характеристики – швидкість $\vec{v}$ та прискорення $\vec{a}$, так як це було у тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

Лінійна швидкість точки М знаходиться як векторний добуток кутової швидкості тіла на радіус вектор даної точки (Рис.22), де під радіусом вектором розуміється її відстань до точки закріплення:

Рис.22. Швидкості окремих точок тіла.

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M$$

Щоб знайти лінійне прискорення даної точки необхідно взяти похідну від останнього виразу по часу. Оскільки, в цьому виразі обидві величини є змінними, то отримуємо, що прискорення точки М складається з двох прискорень:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_M^{ob} + \vec{a}_M^{oc}$$

де $\vec{a}_M^{ob}$ називається обертальним прискоренням. Воно дорівнює векторному добутку кутового прискорення на радіус вектор точки:

$$\vec{a}_M^{ob} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_M$$

Направлений вектор $\vec{a}_M^{ob}$ перпендикулярно площині, що проходить через точку М та вектор $\vec{\varepsilon}$ (Рис.23).

Рис. 23. Прискорення окремих точок тіла.

$\vec{a}_M^{oc}$ називається осепрагнущим прискоренням. Воно дорівнює векторному добутку кутової швидкості тіла на лінійну швидкість даної точки та по напрямку перпендикулярно до цих двох векторів одночасно (Рис...):

$$\vec{a}_M^{oc} = \vec{\omega} \times \vec{v}_M$$

Так знаходяться всі кінематичні характеристик окремих точок тіла та кутові характеристики всього тіла, а значить розв'язується основна задача кінематики тіла з однією закріпленою точкою.

2.7. Контрольні питання по розділу «Кінематика тіла»:

1. Яке тіло можна назвати вільним і скільки ступенів свободи воно має ?
2. Чому кінематика тіла при його поступальному русі зводиться до кінематики його однієї точки?
3. Назвати кінематичні характеристики тіла при його обертальному русі навколо нерухомої осі.
4. Записати закон рівномірного (нерівномірного) обертання.
5. Всі точки тіла при його обертальному русі мають однакову кутову швидкість чи ні ?
6. Всі точки на одному радіусі мають однакову лінійну швидкість чи ні ?
7. Як залежить швидкість окремих точок тіла від радіусу обертання ?
8. Які кінематичні характеристики однакові у всього тіла при його обертальному русі, а які різні ?
9. Який рух називається плоско паралельним ?
10. До чого можна звести плоско паралельний рух тіла ?
11. Які і скільки рівнянь описують плоско паралельний рух тіла?
12. Скільки ступенів свободи має тіло яке рухається плоско паралельно ?
13. Чи залежать рівняння, що описують поступальну частину руху при плоскому русі тіла від вибору основної точки (полюса) ?
14. Чи залежать рівняння, що описують обертальну частину руху при плоскому русі тіла від вибору основної точки ?

2.8. Тести до розділу «Кінематика тіла»

1. Кінематика тіла, що рухається поступально може бути зведена до кінематики точки

А. Так.

Б. Ні.

2. При поступальному русі тіла траєкторії його точок можуть бути не прямими лініями?

А. Так.

Б. Ні

3. Кутові характеристики тіла, що обертається навколо нерухомої осі (кут повороту, кутова швидкість, кутове прискорення) однакові для всіх точок тіла.

А. Так.

Б. Ні.

4. Визначити характер обертання твердого тіла навколо нерухомої осі в наступних випадках :

1) кутове прискорення дорівнює 5 рад/с в квадраті;

2)) кутове прискорення дорівнює нулю;

3) кутова швидкість дорівнює 150 рад/с в секунду;

4) $\omega = 20 t$ рад /с, де t - час.

5. Яка складова прискорення будь – якої точки твердого тіла дорівнює нулю при його обертанні навколо нерухомої осі?

А. Нормальне прискорення.

Б. Тангенційне прискорення.

В. Повне прискорення.

6. Лінійні характеристики точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі (швидкості, прискорення) однакові для всіх точок тіла.

А. Так.

Б. Ні.

7. На які види руху можна розкласти плоский рух тіла ...

8. Скільки рівнянь описує плоский рух тіла

А. Одне.

Б. Два.

В. Три.

Г. Чотири.

9. Миттєвий центр швидкостей (МЦШ) це

А. Точка, швидкість якої в даний момент дорівнює нулю.

Б. Точка, швидкість якої завжди дорівнює нулю.

В. Точка тіла з ненульовою швидкістю.

10. Відносна швидкість обертання даної точки відносно основної (полюса)

А. Перпендикулярна до відрізка, що їх поєднує та направлена в сторону кутової швидкості.

Б. Перпендикулярна до відрізка, що їх поєднує та направлена в сторону протилежну кутової швидкості.

В. Дотична до відрізка, що їх поєднує.

11.1. Миттєвий центр швидкостей знаходиться

А. На перетину перпендикулярів до відомих швидкостей точок.

Б. На вісі обертання.

В. В точці дотику колеса з землею.

Г. Всі попередні відповіді вірні.

Д. Серед відповідей немає вірних.

12. Щоб знайти швидкість точки за допомогою МЦШ потрібно

А. Поєднати точку з МЦШ та показати перпендикуляр до даного відрізка в сторону обертання.

Б. Поєднати точку з МЦШ та показати перпендикуляр до МЦШ.

13. Якщо МЦШ відсутнє, то

А. Тіло обертається навколо нерухомої осі.

Б. Тіло рухається плоскопаралельно.

В. Тіло рухається поступально.

Питання і задачі для самостійної роботи

Механічний рух і механічна взаємодія.

Об'єкти - абсолютне тверде тіло, система тел. Сила, системи сил, пара сил.

Еквівалентна система сил. **Рівнодіюча** системи сил.

Урівноважена система сил.

Яка система сил називається зрівноваженою?

Яка сила називається **рівнодіючою**

Аксиома інерції про **стан** рівноваги тіла .

Аксиома про дві сили

Аксиома про приєднання системи сил еквівалентної нулю. Наслідок

Аксиома паралелограма. сил

Аксиома дії і протидії тел.

Аксиома про зв'язки або принцип **звільнення** тіла від в'язей.

Аксиома про затвердіння тіла, відкидання або накладення нових в'язей.

Вільне і сковане тіло, механічні зв'язки, реакція зв'язку, точка **додатку** і **напрям** .(1)

Що таке зв'язок? Що таке реакція зв'язку?

Типи і реакції в'язей:

а). гладка поверхня, нитка, **стрижень**;

б). циліндровий і сферичний шарніри, підп'ятник, напольгливий підшипник;

в). шарнірно нерухома, **каткова** і ковзаюча опори

г). плоске і просторове **закладення** – жорстка, з однією і двома **ступенями** рухливості, реактивний момент(2)

Додаткові питання:

Які реакції виникають в нитці і шарнірному **стрижні**?

Які реакції виникають в нерухомому шарнірі?

Які реакції виникають в **рухомому** шарнірі?

Які реакції виникають в сферичному шарнірі?

Які реакції виникають в плоскому жорсткому **закладенні**

Найпростіші теореми статки про рівновагу тіла.

Теорема 1. Про рівновагу тіла при дії однієї сили або пари сил..

Теорема 2. Про **перенесенні** сили **уздовж** лінії її дії.

Теорема 3. Про три сили. **Висновок. Приклад використання** теореми про три сили.

Теорема 4. Про паралельне **перенесення** сили (лема Пуансо)

Система сил, що сходяться.

Побудова силового багатокутника.

Рівняння рівноваги для системи сил, що сходяться.

Умова рівноваги системи сил, що сходяться.

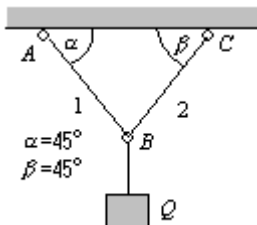
Запишіть рівняння рівноваги для плоскої системи сил, що сходяться.

Запишіть рівняння рівноваги для просторової системи сил, що сходяться.

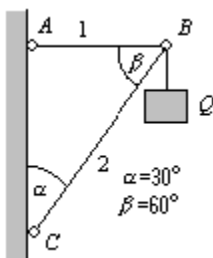
Задачі для самостійної **роботи**

Плоска система сил, що сходяться.

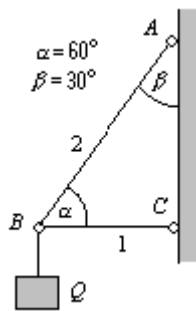
М. 2.7(2.8),**а**)(1). До вузла В підвішений **вантаж** Q вагою 1000 Н. Визначить зусилля в **стрижнях**.



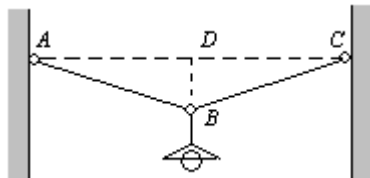
М. 2.7(2.8),**б**)(1). До вузла В підвішений **вантаж** Q вагою 1000 Н. Визначить зусилля в **стрижнях**.



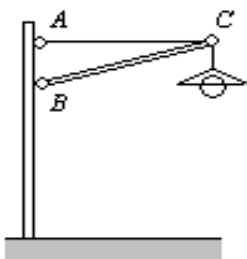
М. 2.7(2.8),**в**)(1). До вузла В підвішений **вантаж** Q вагою 1000 Н. Визначить зусилля в **стрижнях**.



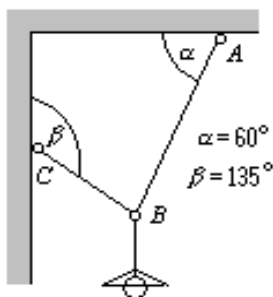
М. 2.8(2.9)(2). Ліхтар ваги 150 Н підвішений до середини троса ABC. Довжина троса ABC рівна 20 м. Відхилення точки підвісу від горизонталі $BD=0.1$ м. Визначити натягнення T_1 і T_2 в **частинах** троса -AB і BC.



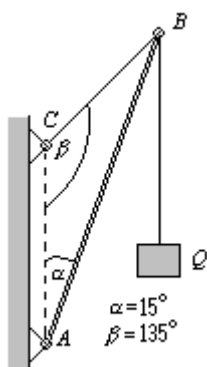
М. 2.9(2.10)(3). Вуличний ліхтар ваги 300 Н підвішений до вертикального стовпа за допомогою троса AC і підкошування BC. $AC = 1.2$ м, $BC = 1.5$ м. Визначити зусилля S_1 і S_2 в тросі AC і підкосу BC



М.2.10(2.11)(2). Електрична лампа має вагу 20 Н. Визначить натягнення T_1 і T_2 шнура AB і розтяжки BC.



М. 2.11(2.12)(3). Щогловий кран складається із стріли АВ і троса СВ. До кінця стріли підвішений **вантаж** вагою 2 **кН**. Визначити натягнення троса ВС і зусилля в стрілі АВ.

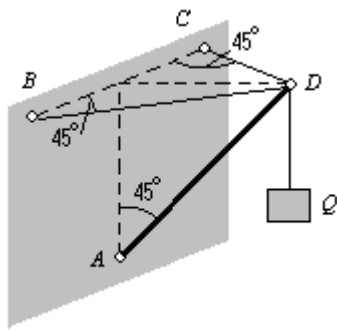


М. 5.3(2.58) (2). Вагон ваги 500 **кН**, що спускається по **ухилу** в 0.008, **рухається** рівномірно. Визначити опір руху. **Ухил** рівний тангенсу **кута** нахилу **шляху** до горизонту.

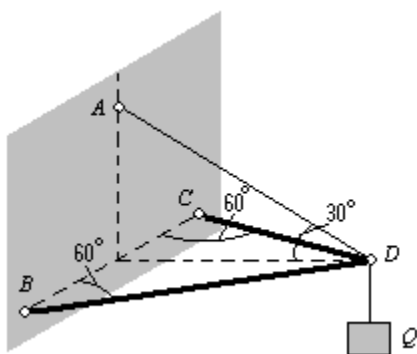
М. 5.4(2.59) (3). **Потяг** ваги 12000 **кН** (не рахуючи ваги електровоза) підіймається по прямолінійному **шляху**, що має **ухил** 0.008, з постійною швидкістю. Опір руху рівно 0.005 вага **потягу**. Визначити силу тяги електровоза. **Ухил** рівний тангенсу **кута** нахилу **шляху** до горизонту.

Просторова система сил, що сходяться.

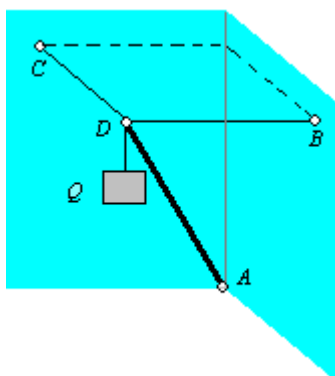
М. 6.3(6.3)(3). **Вантаж** вагою 100 Н підтримується брусом AD, шарнірно закріпленим в **точці** A, і двома горизонтальними тросами BD і CD. Знайти зусилля в брусі і тросах.



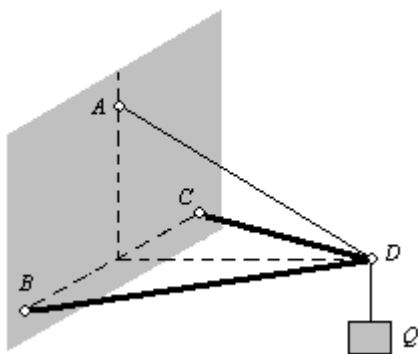
М. 6.4(6.4)(3). До вузла D підвішений **вантаж** Q вагою 300 Н. Визначить зусилля в **стрижнях** BD, CD і тросі AD.



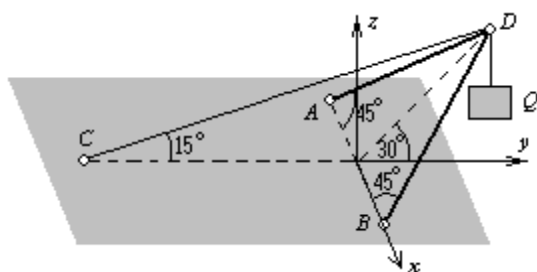
М. 6.5(6.5)(3). До вузла D підвішений **вантаж** Q вагою 420 Н. $AD=145$ см, $DB=80$ см, $DC=60$ див. Визначити зусилля в тросах DB, DC і в **стрижні** AD.



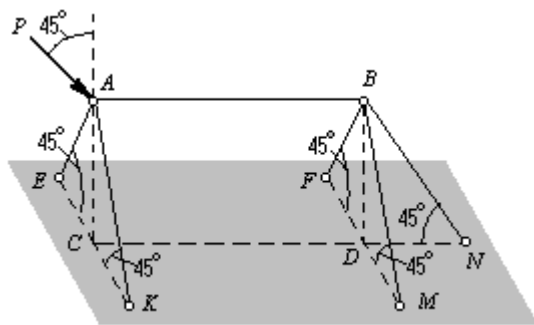
М. 6.6(6.6)(3). До вузла D підвішений **вантаж** Q вагою 180 Н. $BD=170$ см, $CD=BD=100$ см, $BC=120$ див. Визначити зусилля в **стрижнях** BD, CD і тросі AD.



М. 6.8(6.8)(3). До вузла D підвішений **вантаж** Q вагою 1 **кН**. Визначити реакції опор A, B і **3**.



М. 6.10(6.10)(3). До вузла A прикладена сила $P=1$ **кН**, **розташована** в **площині** прямокутника ABCD. **Стрижні** 1,2,4,5 однакової довжини **розташовані** у вертикальних **площинах**, перпендикулярних **площині** ABCD. Визначити зусилля в **стрижнях**.



Ферми.

Передумови до розрахунку ферм.

Метод вирізування вузлів (**приклад**).

Метод Ріттера.

Порівняння методів вирізування вузлів і методу Ріттера.

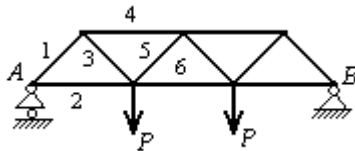
Порядок розрахунку ферми.

Як знаходиться моментна точка Ріттера?

В якому порядку вирішуються вузли у фермі.

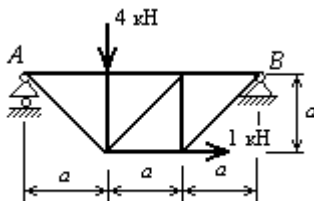
Задачі для самостійної роботи

М. 4.45(4.43) (1). Вертикальне навантаження $P=100$ кН. Знайти зусилля в стрижнях 1-6.

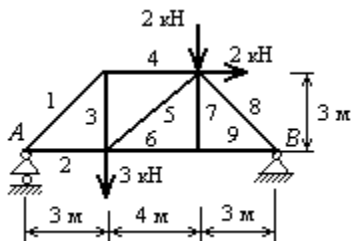


М. 4.46(4.45) (2). Вертикальне навантаження $P=100$ кН. Знайти зусилля в стрижнях 1-9.

М. 4.70(5.12) (1). Визначити опорні реакції і зусилля в стрижнях.



М. 4.71(5.613) (2). Визначити опорні реакції і зусилля в стрижнях.



Довільна плоска система сил.

Момент сили відносно точки.

Пара сил. Момент пари сил.

Теорема про перенесення пари сил на площині.

Теорема про складання пар на площині.

Зведення плоскої системи сил до простішого вигляду.

Рівняння рівноваги для плоскої системи сил (1 форма).

Три форми рівнянь рівноваги для плоскої системи сил.

Теорема Варіньона про момент **рівнодіючої відносно .точки на площині .**

Теорема про еквівалентність пар на **площині .**

Головний вектор довільної плоскої системи сил.

Головний момент довільної плоскої системи сил.

Поняття про статичну невизначеність системи.

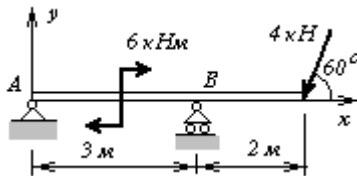
Рівновага зчленованих тіл.

Поняття про внутрішні сили.

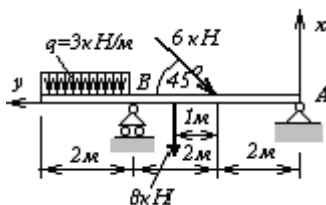
Задачі для самостійної **роботи**

Плоская довільна система сил.

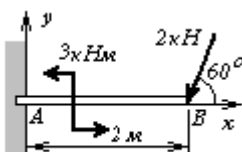
М. 4.25. Визначити реакції опор А і В.



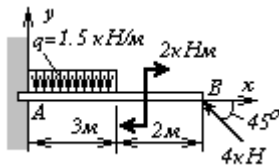
М. 4.26. Визначити реакції опор А і В.



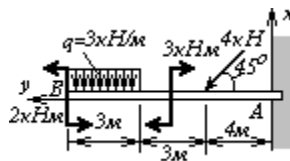
М. 4.27. Визначити реакції консольної балки.



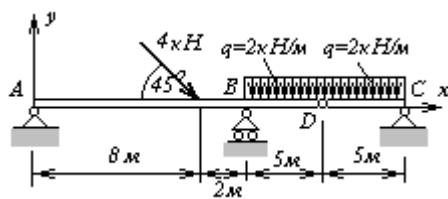
М. 4.28. Визначити реакції консольної балки.



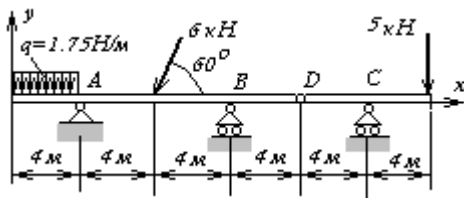
М. 4.29. Визначити реакції консольної балки.



М. 4.33. Визначити реакції складової балки.



М. 4.34. Визначити реакції складової балки.



Довільна просторова система сил.

Момент сили **відносно** осі .

Приведення просторової системи сил до центру.

Момент пари сил як вектор.

Теорема про **перенесення** пари сил в просторі .

Теорема про складання пар в просторі.

Рівняння рівноваги для просторової системи сил .

Теорема Варіньона про момент **рівнодіючої відносно осі** .

Теорема Варіньона про момент **рівнодіючої відносно точки** в просторі (**висновок**).

Теорема про еквівалентність пар в просторі (**висновок**).

Головний вектор довільної просторової системи сил.

Головний момент довільної просторової системи сил.

Рівняння рівноваги для системи паралельних сил.

Інваріанти системи сил.(2)

Головний мінімальний момент.

Момент сили **відносно точки** як векторний добуток.

Запишіть рівняння рівноваги для довільної плоскої системи сил.

Запишіть рівняння рівноваги для довільної просторової системи сил.

Чому дорівнює момент сили **відносно** центру на **площині**?

Чому дорівнює момент пари сил на **площині**?

Чому дорівнює момент сили **відносно** осі ?

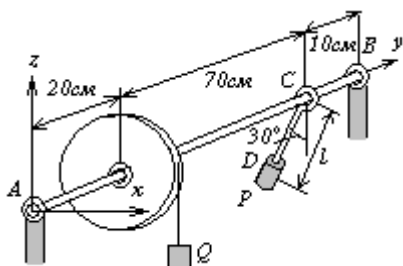
Що таке головний вектор?

Що таке головний момент?

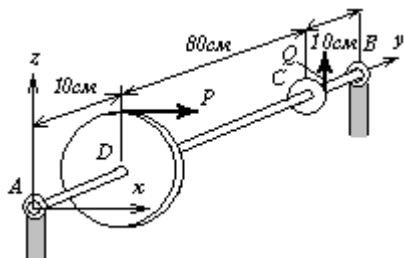
Задачі для самостійної роботи

Просторова довільна система сил.

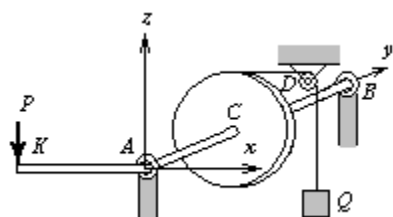
М.8.13. **Вантаж** $P=1$ **кН** **надітий** на **стрижень** CD, жорстко пов'язаний з валом АВ. **Стрижень** CD перпендикулярний осі валу і складає з вертикаллю 30° град. Вага **вантаж** $Q=250$ Н, радіус шківів $R=20$ див. Визначити реакції опор А, В і відстань l .



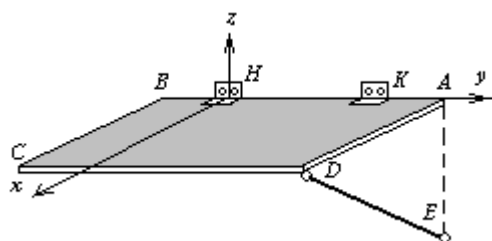
М.8.14(1). До шестерні 3 радіусу 10 см прикладена вертикальна сила Q . До **зубчатого** колеса D радіусу 1 м прикладена горизонтальна сила $P=100$ Н.. Визначити величину сили Q і реакції опор A і B в **положенні** рівноваги.



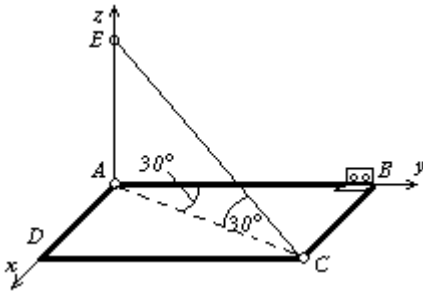
М.8.15. Барабан C з вантажем Q **утримується** вертикальною силою P , прикладеною до держака $AK=40$ см. Вага **вантаж**у $Q=800$ Н, радіус барабана $R=5$ см, $AC=CB=50$ см. Визначити силу P і реакції опор A і B .



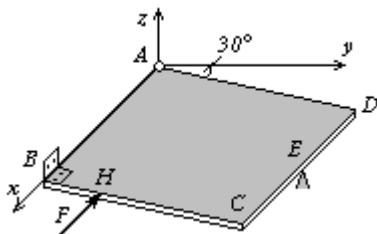
М.8.25. Вага полиці і лежачого на ньому **вантаж**у рівна 800 Н і прикладена в центрі прямокутника $ABCD$. $AB=150$ см, $AD=60$ см, $AK=BH=25$ см, $ED=75$ см. Визначити реакції петель D і H і зусилля в **стрижні** DE .



М.8.24. Однорідна прямокутна рама ваги 200 Н **прикріплена** до стіни за допомогою кульового шарніра А і петлі В і **утримується** тросом ЄС. Визначити натягнення троса і реакції опор.



М.8.26. Квадратна однорідна плита ABCD із стороною $a=30$ см і ваги $P=5$ Н **знаходиться** в рівновазі. В **точці** E плита **спирається** на вістря. Сила $F=10$ Н паралель осі x. $CE=ED$, $BH=10$ див. Визначити опорні реакції.



Тертя ковзання і тертя **кочення**

Причини виникнення сил тертя.

Які закони тертя ковзання ви знаєте?

Коефіцієнт тертя ковзання і способи його визначання.

Коефіцієнт тертя **качення**.і способи його визначення.

Закони тертя ковзання.

Кут тертя ковзання.

Конус тертя. Умови рівноваги тіла на шорсткій поверхні.

Максимальна сила тертя ковзання.

Способи визначення коефіцієнта тертя ковзання.

Закони тертя **кочення**.

Конус тертя ковзання.

Урахування сил тертя при розв'язанні задач на рівновагу тіла(приклад).

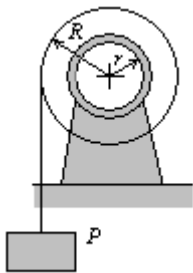
2.2. Задачі для самостійної роботи

Змістовий модуль С2.2 Рівновага тіла при наявності тертя ковзання .

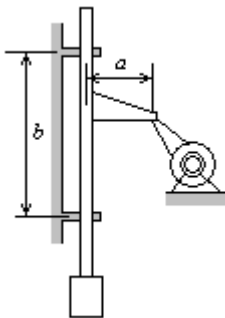
М. 5.5. По нерівній похилій поверхні під кутом 30° . спускається тіло з постійною швидкістю. Знайти коефіцієнт тертя.

М. 5.6. Знайти кут природного укосу насипи, якщо коефіцієнт внутрішнього зчеплення матеріал $f = 0.8$.

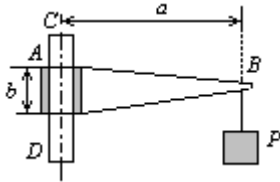
М. 5.23. Радіус цапфи валу $r = R/2$. Коефіцієнт тертя $f = 0.05$. Визначити відношення ваги валу Q до ваги вантажу P .



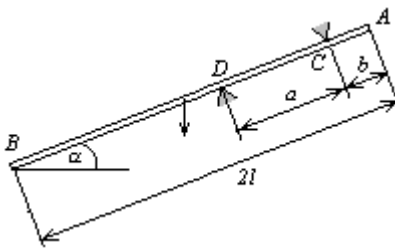
М. 5.25. Коефіцієнт тертя в направляючих товкача $f=0.15$. Відстань між ними $b=1.5\text{м}$. Величина виступу $a=0.15\text{м}$. Знайти Силу P , необхідну для підйому товкача.



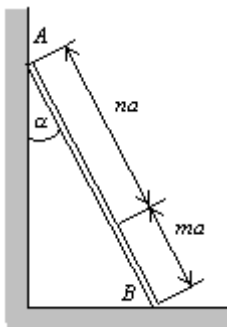
М. 5.26. Стрижень АВ одягнений отвором на вертикальну стійку CD. Ширина втулки $b = 2\text{ см}$. На відстані a підвішений вантаж P . Коефіцієнт тертя $f = 0.1$. Знайти відстань a , необхідне для рівноваги стрижня.



М. 5.31(4.69) (2). Важкий однорідний стрижень завдовжки $2l$ утримується в рівновазі на опорах B і D . $CD = a$, $AC = b$. Кут нахилу до горизонту 30° . Коефіцієнт тертя f . Знайти довжину стрижня.



М. 5.27. Вага сходи разом з що знаходиться на ній людиною рівна P і ділить її довжину відносно m/n . Коефіцієнти тертя сходів об стіну f_1 , об підлогу f_2 . Знайти кут нахилу сходів до вертикалі, а також нормальні реакції стіни і підлоги.



Центр ваги.

Центр паралельних сил.

Передумови до обчислення положення центру ваги.

Які гіпотези застосовуються при визначенні центру ваги тіл?

Способи визначення положення центру ваги.

Формули для центру ваги плоских фігур.

Формули для центру ваги просторових тел.

Які методи визначення положення центрів ваги ви знаєте?

Приклади визначення положення центру ваги.

Центр ваги прямокутника, паралелепіпеда.

Центр ваги кругового сектора (висновок).

Центр ваги трикутника (висновок)

Де знаходиться по висоті центр ваги трикутника?

Запишіть формулу визначення центру ваги кругового сектора.

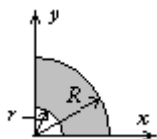
Запишіть формули для визначення центру ваги стрижньової конструкції.

Умови статичної стійкості твердого тіла.

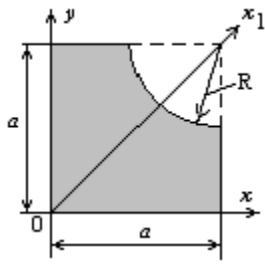
2.4. Задачі для самостійної роботи

Центр ваги.

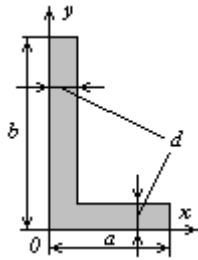
М. 9.5. Визначити координати центру ваги четверті кільця. $R=3$ см, $r=1$ див.



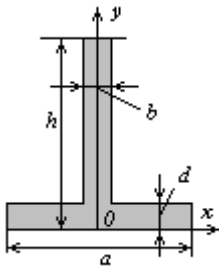
М. 9.6(9.6) (3). Визначити координату центру ваги плоскої фігури по осі x_1 . Радіус вирізу рівний $0.5a$.



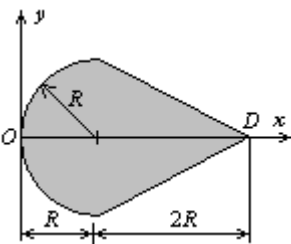
М. 9.8. Визначити координати центру ваги поперечного перетину **нерівнобокого кутника**.



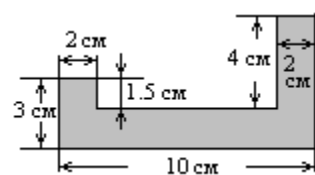
М. 9.9. Визначити координати центру ваги поперечного таврового перетину.



М. 9.2. Визначити координати центру ваги плоскої фігури. $OD=3R$.



М. 9.11. Визначити координату центру ваги плоскої фігури.



Відповіді до задач .. Статика

- 2.7а Відповідь: $\alpha=\beta=45^\circ$
- 2.7б Відповідь: $\alpha=30^\circ, \beta=60^\circ$
- 2.7в Відповідь: $\alpha=60^\circ, \beta=30^\circ$
- 2.8 Відповідь: $T_1=T_2=7,5 \text{ кН}$
- 2.9 Відповідь: $S_1=400 \text{ Н}, S_2=-500 \text{ кН}$
- 2.10 Відповідь: $T_A=14,6 \text{ Н}, T_C=10,4 \text{ Н}$
- 2.11 Відповідь: $T=1,04 \text{ кН}, Q=2,83 \text{ кН}$
- 4.25 Відповідь: $X_A=2 \text{ кН}, Y_A=-4,32 \text{ кН}, Y_B=7,78 \text{ кН}$
- 4.26 Відповідь: $X_A=2,6 \text{ кН}, Y_A=4,2 \text{ кН}, Y_B=15,6 \text{ кН}$
- 4.27 Відповідь: $X=1 \text{ кН}, Y=1,73 \text{ кН}, M=0,47 \text{ кНм}$
- 4.28 Відповідь: $X=2,8 \text{ кН}, Y=1,7 \text{ кН}, M=-5,35 \text{ кНм}$
- 4.29 Відповідь: $X=-9 \text{ кН}, Y=0, M=40 \text{ кНм}$
- 4.32 Відповідь: $R_A=53,75 \text{ кН}, R_B=6,25 \text{ кН}, M_A=205 \text{ к}$
- 4.33 Відповідь: $X_A=-2,8 \text{ кН}, Y_A=-4,4 \text{ кН}, Y_B=22,2 \text{ кН}, Y_C=5 \text{ кН}, X_D=0, Y_D=\pm 5 \text{ кН}$
- 4.34 Відповідь: $X_A=3 \text{ кН}, Y_A=13,8 \text{ кН}, Y_B=-6,6 \text{ кН}, Y_C=10 \text{ кН}, X_D=0, Y_D=\pm 5 \text{ кН}$
- 4.45 Відповідь: $S_1=-141 \text{ кН}, S_1=100 \text{ кН}, S_2=141 \text{ кН}, S_4=-200 \text{ кН}, S_5=0, S_6=200 \text{ кН}$
- 4.46 Відповідь: $S_1=-150 \text{ кН}, S_2=0, S_3=212 \text{ кН}, S_4=-150 \text{ кН}, S_5=-50 \text{ кН}, S_6=150 \text{ кН}, S_7=71 \text{ кН}, S_8=-200 \text{ кН}, S_9=0$
- 4.70 Відповідь: $X_A=-1 \text{ кН}, Y_A=3 \text{ кН}, Y_B=1 \text{ кН}$
- 4.71 Відповідь: $Y_A=2,1 \text{ кН}, X_B=-2 \text{ кН}, Y_B=2,9 \text{ кН}$
- 5.3 Відповідь: $R=4 \text{ кН}$
- 5.4 Відповідь: $P=156 \text{ кН}$
- 5.5 Відповідь: $f=\text{tg}\alpha$
- 5.23 Відповідь: $Q/P=39$
- 5.25 Відповідь: $P=186 \text{ Н}$
- 5.26 Відповідь: $a \geq 10 \text{ см}$

5.27 Відповідь: $\operatorname{tg} \alpha = (m+n)f_2 / (m-nf_1f_2)$, $N_A = Pf_2 / (1+f_1f_2)$, $N_B = P / (1+f_1f_2)$

5.31 Відповідь: $\operatorname{tg} \phi = 2 + 1/f$

6.3 Відповідь: $S = -141 \text{ Н}$, $T = 71 \text{ Н}$

6.4 Відповідь: $T = 600 \text{ Н}$, $S_1 = S_2 = -300 \text{ Н}$

6.5 Відповідь: $T_C = 320 \text{ Н}$, $T_D = 240 \text{ Н}$, $T_B = -580 \text{ Н}$

6.6 Відповідь: 204 Н , -60 Н

6.8 Відповідь: $R_A = R_B = 2,64 \text{ кН}$, $R_C = 3,35 \text{ кН}$

6.10 Відповідь: $S_1 = -0,5 \text{ кН}$, $S_2 = -0,5 \text{ кН}$, $S_3 = -0,707 \text{ кН}$, $S_4 = 0,5 \text{ кН}$, $S_5 = 0,5 \text{ кН}$, $S_6 = -1 \text{ кН}$

8.13 Відповідь: $l = 10 \text{ см}$, $Z_A = 300 \text{ Н}$, $Z_B = 950 \text{ Н}$, $X_A = X_B = 0$

8.14 Відповідь: $Q = 1 \text{ кН}$, $X_A = -10 \text{ Н}$, $X_B = -90 \text{ Н}$, $Z_A = -900 \text{ Н}$, $Z_B = -100 \text{ Н}$

8.15 Відповідь: $P = 100 \text{ Н}$, $X_A = 400 \text{ Н}$, $Z_A = -100 \text{ Н}$, $X_B = 400 \text{ Н}$, $Z_B = 0$

8.24 Відповідь: $T = 200 \text{ Н}$, $X_A = 86,6 \text{ Н}$, $Y_A = 150 \text{ Н}$, $Z_A = 100 \text{ Н}$, $X_B = Z_B = 0$

8.25 Відповідь: $S = 666,7 \text{ Н}$, $X_K = -666,7 \text{ Н}$, $Z_K = -100 \text{ Н}$, $X_H = 133,3 \text{ Н}$, $Z_H = 500 \text{ Н}$

8.26 Відповідь: $X_A = 10 \text{ Н}$, $Y_A = 2,35 \text{ Н}$, $Z_A = -0,11 \text{ Н}$, $Y_B = -3,34 \text{ Н}$, $Z_B = 3,23 \text{ Н}$, $R_E = 2,17 \text{ Н}$

9.2 Відповідь: $OC=R(3\pi+16)/(3\pi+12)=1,19R$

9.5 Відповідь: $x_c=y_c=1,38$ см

9.6 Відповідь: $x_c=0,61a$

9.8 Відповідь: $x=(a^2+bd-d^2)/2(a+b-d)$, $y=(b^2+ad-d^2)/2(b+a-d)$

9.9 Відповідь: $(ad^2+bh^2-bd^2)/2(ad+bh-bd)$

9.11 Відповідь: $x=50/13$ см, $y=10/13$ см

Задачі для самостійної роботи

Кінематика точки

М. 10.2. Дани рівняння руху точки: $x=3t-5$, $y=4-2t$. Визначити траєкторію точки і вказати напрям її руху.

М.10.2. Дани рівняння руху точки: $x=2t$, $y=8t^2$. Визначити траєкторію точки і вказати напрям її руху.

М.10.2. Дани рівняння руху точки: $x=5\sin(10t)$, $y=3\cos(10t)$. Визначити траєкторію точки і вказати напрям її руху.

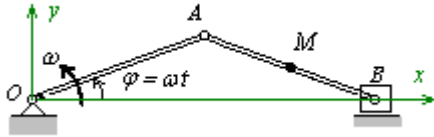
М.10.4. Дани рівняння руху точки: $x=3\sin(t)$, $y=3\cos(t)$. Визначити траєкторію точки і закон її руху ($s=s(t)$), відлічуючи від початкового положення..

М.10.4. Дани рівняння руху точки: $x=3t^2$, $y=4t^2$. Визначити траєкторію точки і закон її руху ($s=s(t)$), відлічуючи від початкового положення..

М.10.4. Дани рівняння руху точки: $x=a \cos^2(t)$, $y=a \sin^2(t)$. Визначити траєкторію точки і закон її руху($s=s(t)$), відлічуючи від початкового положення..

М.10.13. Визначити рівняння руху і траєкторію точки обода колеса $R=1$ м, що котиться по прямолінійному шляху з постійною швидкістю $V=20$ м/с.

М.10.1. Визначити рівняння руху, траєкторію середньої точки M шатуна AB і рівняння руху повзуна B . Кутова швидкість кривошипа OA : $\omega=10$ рад/с. $OA=AB=80$ см.



М.11.9 Визначить: 1). рівняння руху і траєкторію точки колеса $R=1$ м, що знаходиться на відстані $a=0.5$ м від осі, якщо колесо котиться по прямолінійному шляху з постійною швидкістю $V=10$ м/с.; 2). швидкості цієї точки в ті моменти часу, коли діаметр колеса, на якому вона знаходиться, займе горизонтальне і вертикальне положення.

М.11.11 Визначити рівняння руху і траєкторію точки реборді колеса вагону $R=0.5$ м, що знаходиться на відстані $a=0.6$ м від осі, якщо колесо котиться по прямолінійному шляху з постійною швидкістю $V=10$ м/с, а також швидкості цієї точки при її положеннях $y=(R-a)$, $(R+a)$.

М. 10.14. Дани рівняння руху снаряда: $x=V_0 \cos(\alpha)t$, $y=V_0 \sin(\alpha)t - gt^2/2$. Визначити траєкторію точки, висоту H , дальність L і час польоту снаряда.

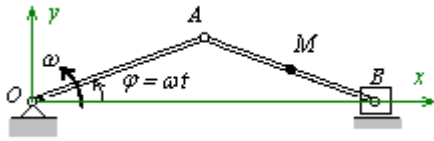
М. 12.17. Дани рівняння руху точки обода колеса, що котиться: $x=20t - \sin(20t)$, $y=1 - \cos(20t)$. Визначити швидкість, пришвидшення точки і радіус кривизни траєкторії руху точки при $t=0$.

М.12.1 Потяг рухається зі швидкістю 72 км/ч; при гальмуванні він отримує уповільнення 0.4 м/с². Знайти гальмівний шлях і час гальмування до повної зупинки.

М.12.7. Потяг, маючи початкову швидкість 54 км/ч, пройшов 600 м по кривій з радіусом $R=1$ км. в перших 30 с. Вважаючи рух потягу рівнозмінним визначити швидкість і пришвидшення потягу в кінці 30 -ої сек.

М.12.8. При відході від станції швидкість потягу зростає рівномірно і досягає величини 72 км/ч через 3 мин. Визначити дотичне, нормальне і повне пришвидшення потягу через 2 хв, якщо рух відбувається по кривій $R=800$ м.

М.12.18. Опред. рівняння руху, траєкторію точки М (AM=40 см) шатуна АВ. Кутова швидкість кривошипа ОА $\omega = \pi$ рад/с. ОА=АВ=60 див. Визначить швидкість, пришвидшення точки і радіус кривизни про $t=0$.



М. 12.21. Дани рівняння руху снаряда: $x = V_0 t \cos \alpha$, $y = V_0 (\sin \alpha) t - (gt^2)/2$. Знайти радіус кривизни у момент $t=0$ і у момент падіння на землю.

Найпростіші рухи твердого тіла

Назовите 5 видів руху твердого тіла. Які з них є простими?

2.1 Поступальна рух твердого тіла.

Теорема про траєкторії, швидкостях і пришвидшення точок тіла при поступальному русі.

Приклади поступального руху твердого тіла .

2.2 Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

Рівняння руху тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.

Кутова швидкість і кутове пришвидшення тіла, що обертається, щодо нерухомої осі.

Кутова швидкість і кутове пришвидшення тіла, що обертається навколо нерухомої осі, як вектори.

Рівномірне і рівнозмінне обертання твердого тіла.

Перетворення обертальних рухів твердого тіла.

Швидкість точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

Швидкість точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, як вектор.

Пришвидшення точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

Пришвидшення точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, як вектор.

Формула Ейлера для компонент швидкості тіла, що обертається навколо нерухомої осі, довільно розташованої у просторі.(3

2..Кінематика твердого тіла

2.1.Найпростіши рухи твердого тіла.

Які види рухів твердого тіла ви знаєте?

Сформулюйте теорему про поступальний рух твердого тіла?

Запишіть рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

Запишіть формули для кутової швидкості і кутового пришвидшення тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

Запишіть формули, що визначають рівнозмінне обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

Запишіть формулу для швидкості точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.

Запишіть формули для пришвидшень точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

Запишіть векторну формулу для швидкості точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.

Запишіть векторні формули для пришвидшень точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

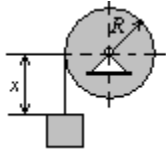
Які співвідношення мають місце для кутових швидкостей при перетворенні обертань ?

Задачі для самостійної роботи

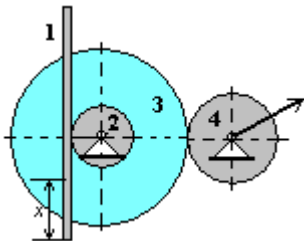
Обертальний рух тіла.

М.13.15. Маховик радіусу $R=2$ м обертається рівноприскорено із стану спокою. Через 10 з точка на ободі має швидкість $v=100$ м/с. Знайти швидкість і пришвидшення точки обода для $t=15$ с.

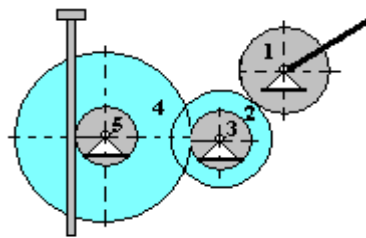
М.13.18. Вал радіусу $R=10$ см приводиться в обертання вантажем, підвішеного до нього на нитці. Рух вантажу описується рівнянням $x=100t^2$. Визначити кутову швидкість, кутове пришвидшення валу, а також повне пришвидшення точки поверхні валу у момент часу t .



М.14.4. Визначити кутову швидкість стрілки індикатора, жорстко зв'язаною шестернею 4, якщо мерительний штифт рухається згідно із законом $x=a \sin(kt)$. Радіуси зубчатих коліс відповідно рівні R_2 , R_3 і R_4 .



М.14.5. Визначити швидкість зубчатої рейки домкрата, якщо рукоятка має кутову швидкість 3.14 рад/с. Зубчаті колеса мають числа зубів: $z_1=6$, $z_2=24$, $z_3=8$, $z_4=32$. Радіус $R_5=4$ см.

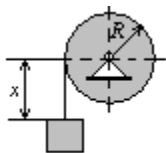


М.13.4. Тіло, починаючи обертатися рівноприскорено, робить 3600 обертів у перших 2 хв. Визначити кутове пришвидшення.

М.13.7. Тіло, що обертається, з початковою кутовою швидкістю 2π рад/с унаслідок тертя в підшипниках зупинилося, зробивши 10 обертів. Визначити кутове пришвидшення.

М.13.19(Вал радіусу R приводиться в обертання вантажем, підвішеною до нього на нитці.

Рух вантажу описується рівнянням $x=x(t)$. Пришвидження гирі постійне і рівне a_0 . Визначити повне пришвидшення точки поверхні валу у момент часу t .



М.13.6. Маховик починає обертатися рівноприскорено, і через 10 мін придбав швидкість 2π рад/с. Скільки оборотів зробив маховик?

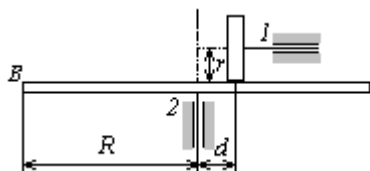
М.13.8. Пропелер літака, що обертася із швидкістю 30π , зробив до зупинки 80 оборотів. Визначити час обертання пропелера з моменту виключення мотора до зупинки. Обертання рахувати рівнозамедленим.

М.13.14. Точки А і В, лежачі на одному радіусі шківа мають швидкості 50 і 10 см/с. Точка А знаходиться на ободі, точка В відстоїть від неї на відстані 20 см.

Визначити діаметр і кутову швидкість шківа.

М.13.15. Маховик радіусу $R = 2$ м почав обертатися рівноприскорено. Швидкість точок на ободі через 10 із стала 100 м/с. Визначити швидкість і компоненти пришвидшення точок обода через 15 с.

М.14.10. Вал 1 обертається з кутовою швидкістю 20π рад/с і переміщається на ходу так, що d змінюється згідно із законом $d = 10 - 0.5t$. Визначити кутове пришвидшення валу 2 у функції від d . Визначити також пришвидження точки В в мить, коли $d = r = 5$ см, а $R = 15$ см.



2. Плоско-паралельний рух твердого тіла.

Плоско-паралельний рух твердого тіла. Теорема про плоско-паралельний рух твердого тіла

Рівняння руху плоскої фігури.

Розкладання руху плоскої фігури на поступальну і обертальну ходу

Незалежність кутової швидкості плоскої фігури від вибору полюса.

Теорема про складання швидкостей точки плоскої фігури.

Висновки з теореми про складання швидкостей точки плоскої фігури.

Миттєвий центр швидкостей (МЦС). Теорема.

Приклади знаходження положення МЦС і використання його для визначення швидкостей точок плоскої фігури.

Поняття про центроїди.

Теорема про складання пришвидшень точки плоскої фігури.

Слідство з теореми про складання пришвидшень точки плоскої фігури.

Миттєвий центр пришвидшень (МЦУ).

Найпростіші приклади знаходження положення МЦС і використання його для визначення швидкостей точок плоскої фігури.

2.2 Плоский рух тіла

Визначення плоского руху твердого тіла - ?

Запишіть рівняння руху плоскої фігури.

Запишіть теорему про складання швидкостей точки плоскої фігури.

Запишіть теорему про складання пришвидшень точки плоскої фігури.

Що таке миттєвий центр швидкостей?

Яке загальне правило знаходження положення МЦС?

Де знаходиться миттєвий центр швидкостей, якщо швидкості двох точок паралельні, направлені в один бік і рівні по модулю?

Як знайти положення миттєвого центру швидкостей, якщо швидкості двох точок паралельні, направлені в один бік і не рівні по модулю?

Як знайти положення миттєвого центру швидкостей, якщо швидкості двох точок паралельні і направлені в протилежні сторони?

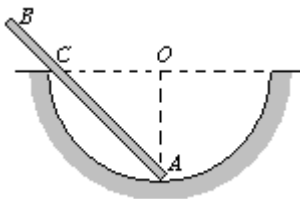
Де знаходиться миттєвий центр швидкостей, якщо швидкості двох точок паралельні, направлені в один бік і рівні по модулю?

Що таке миттєвий центр пришвидшень ?

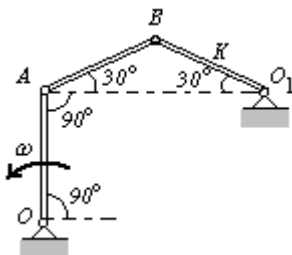
Задачі для самостійної роботи

Плоский рух тіла (швидкості).

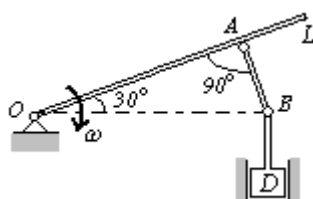
М.16.10. Стрижень АВ рухається в площині креслення так, що точка ковзає по колу. Швидкість точки А в даний момент $V_A=4$ м/с. Визначити швидкість точки в даному положенні.



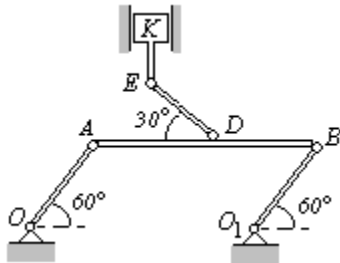
М.16.17. Визначити швидкість середньої точки К коромисла O_1B в даному положенні, якщо кутова швидкість кривошипа OA довжини 20 см у цей момент рівна 2 рад/с.



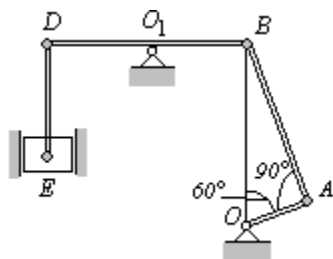
М.16.24. Визначити швидкість поршня D гідравлічного преса і кутову швидкість повідця АВ в даному положенні, якщо кутова швидкість важеля OL у цей момент рівна 2 рад/с. $OA=15$ см.



М.16.22. Визначити швидкість повзуна К і кутову швидкість повідця ED в даному положенні, якщо кутова швидкість кривошипа OA довжини 20 см у цей момент рівна 1 рад/с, $OA = O_1B = 2DE$

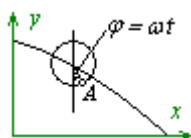


М.16.18. Визначити швидкість поршня Е механізму насоса в даному положенні, якщо кутова швидкість кривошипа OA довжини 20 см рівна 2 рад/с, $O_1B = O_1D$



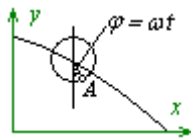
М.16.3. Рівняння руху центру диска, що обертається, на площині $x=10t$ і $y=100-4.9t^2$. Кутова швидкість обертання диска радіусу $r=20$ см постійна і рівна $\pi/2$ рад/с

Визначити швидкість точки на ободі диска при $t=0$ ($\phi=\omega t$).

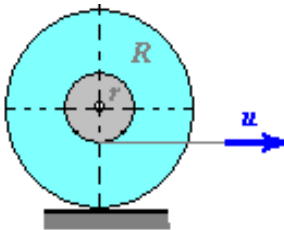


М.16.4. Рівняння руху центру диска, що обертається, на площині $x=10 \cdot t$ і $y=100-4.9 \cdot t^2$. Кутова швидкість обертання диска радіусу $r=20$ см постійна і рівна $\pi/2$.

Визначити швидкість точки на ободі диска при $t=1\text{с}$ ($\varphi=\omega t$).

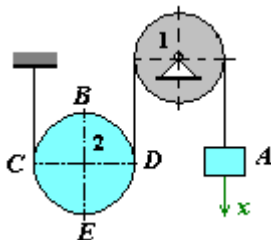


М.16.29. Нитка, намотана на середню циліндрову частину радіусу r котушки радіусу R , має швидкість u . Визначити швидкість переміщення осі котушки. Котушка котиться без ковзання.



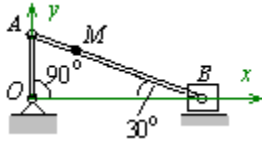
М.16.31. Колесо радіусу $R=0.5$ котиться без ковзання по прямолінійній ділянці з постійною швидкістю його центру $V_C=10$ м/с. Визначити швидкості точок, що лежачих на ободі, знаходяться на висоті $0, R, 2R$ від поверхні кочення.

М.16.33. Грузнув A опускається згідно із законом $x=2t^2$. Визначити швидкості точок B, C, D і E блоку 2 у момент часу $t=1$ с, якщо радіус цього блоку $r_2=0.2$ м.

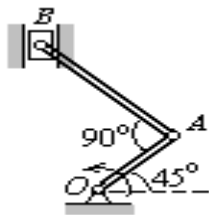


Плоский рух тіла (Пришвидження).

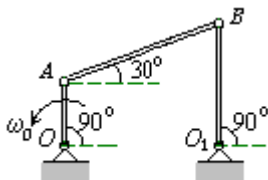
М.18.9.Кривошип ОА обертається рівномірно. Визначити положення точки шатуна АВ, пришвидження якої направлене уздовж шатуна у вказаному на кресленні положенні механізму.



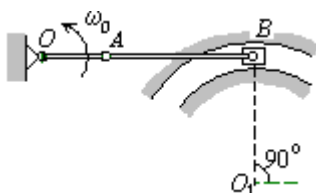
М.18.11.Кривошип ОА обертається рівномірно з кутовою швидкістю 10 рад/с. АВ=100см. Визначити кутову швидкість і кутове пришвидження шатуна АВ і пришвидження повзуна В у вказаному на рисунку положенні механізму.



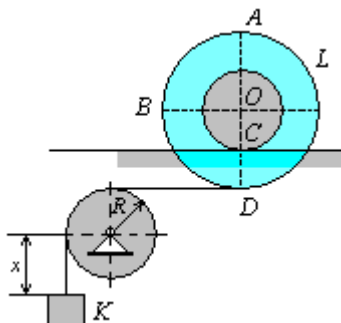
М.18.13. Кривошип ОА обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω_0 . АВ=2ОА=2а. Визначити кутову швидкість і кутове пришвидження ланки АВ і пришвидження шарніра В у вказаному на рисунку положенні механізму.



М.18.15.. ОА=10см. АВ=20см. Кутова швидкість і кутове пришвидження кривошипа ОА рівні $\omega=1$ рад/с і $\epsilon=0$ у даний момент часу. Визначити пришвидження повзуна В у вказаному на рисунку положенні механізму.



М.18.26. Грузув К опускається згідно із законом $x=t^2$. Котушка L котиться без ковзання. $OD=2OC=0.2$ м. Визначити у момент часу $t=0.5$ с кутову швидкість і кутове пришвидшення котушки і пришвидшення точок А, В і D.



М.18.37. Квадрат із стороною а здійснює плоский рух. Знайти пришвидшення вершин і D, якщо в даний момент пришвидшення двох вершин А і В рівні по модулю 10 см/с^2 і направлені по сторонах AD і BA відповідно.

М.18.37. Рівносторонній трикутник із стороною а здійснює плоский рух. Знайти пришвидшення вершин С, якщо в даний момент пришвидшення двох вершин А і В рівні по модулю 16 см/с^2 і направлені по сторонах AC і BA відповідно.

М.18.40. Квадрат із стороною а здійснює плоский рух. Знайти пришвидшення вершини і миттєву кутову швидкість і миттєве кутове пришвидшення, якщо в даний момент пришвидшення двох вершин А і В рівні по модулю 2 см/с^2 і $4\sqrt{2} \text{ см/с}^2$ направлені по стороні AD і діагоналі BD відповідно.

Зм-КЗ.Складний рух точки

Дайте визначення абсолютному, відносному і переносному руху точки.

Дайте визначення абсолютної, відносної і переносної швидкості точки.

Дайте визначення абсолютного, відносного і переносного пришвидшення точки.

Запишіть теорему про складання швидкостей при складному русі точки.

Запишіть теорему про складання пришвидшень при складному русі точки.

Причини виникнення пришвидшення Коріоліса?

Запишіть векторну формулу пришвидшення Коріоліса.

Як визначається модуль пришвидшення Коріоліса?

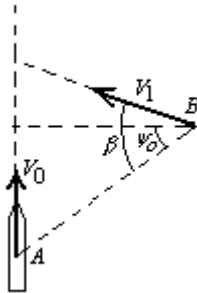
Як визначається напрям вектора пришвидшення Коріоліса?

У яких випадках пришвидження Коріоліса звертається в нуль?

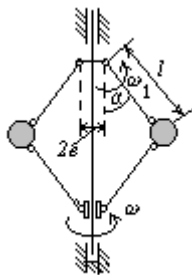
1.Складний рух точки (Швидкості).

М.22.1. Корабель рухається прямолінійно із швидкістю V_0 . На висоті h в цьому ж напрямі летить літак із швидкістю V_1 . Визначити відстань L по горизонталі, на якому з літака повинна бути скинута бомба, для поразення цілі (корабля).

М.22.3. Корабель рухається прямолінійно із швидкістю V_0 . Під яким кутом слід випустити торпеду з точки В для поразення цілі (корабля), якщо швидкість її V_1 і кут зсуву мети ψ_0 .

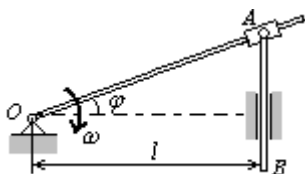


М.22.14. Регулятор Уатта обертається із швидкістю $\omega=10$ рад/с. У даному положенні кулі мають відносну швидкість $\omega_1=1.2$ рад/с. Визначити абсолютну швидкість куль, якщо кут нахилу підвісок $\alpha=30^\circ$, довжина підвісок $l=0.5$ м, зсув точок підвісу $e=0.05$ м.

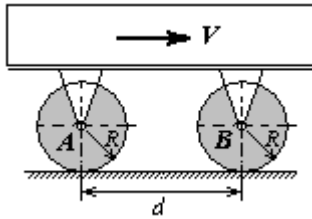


М.22.9.Траєкторії крапель дощивши на бічному склі автомашини, рухомої із швидкістю 72 км/ч, нахилені по вертикалі на кут 40° . Визначити абсолютну швидкість крапель прямовисно падаючого дощу (тертям нехтувати).

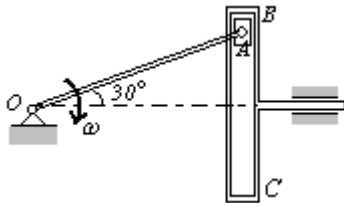
М.22.17. У кулісному механізмі відстань $OK=l$. Кутова швидкість і кут нахилу кривошипа ОС рівні ω і φ . Визначити швидкість руху каменя А відносно кривошипа ОС.



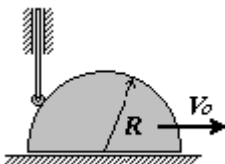
М.22.19. Екіпаж рухається по прямолінійному шляху із швидкістю V . Визначити швидкість центру колеса А щодо системи координат, жорстко пов'язаною з колесом В.



М.22.25. Довжина кривошипа $OA=0.2$ м. Кутова швидкість кривошипа постійна і рівна 3π рад/с. Визначити швидкість куліси ВС в даному положенні механізму.

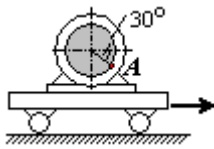


М.22.26(3). Кулачок у вигляді напівциліндра радіусу K рухається поступально з постійною швидкістю V_0 . Вертикальний стрижень, забезпечений роликem радіусу r , опускається з найвищого положення. Визначити швидкість стрижня у функції від часу.



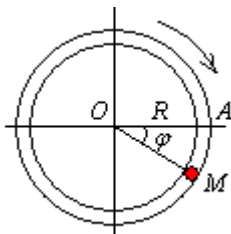
2.Складний рух точки (Пришвидження).

М.23.5. Ротор радіусу 0.2 м електричного мотора, встановлений на візку, обертається згідно із законом $\phi=t^2$ (рад). Візок рухається перпендикулярно осі ротора з пришвидшенням 0.492 м/с². Визначити при $t=1$ с абсолютне пришвидження точки А на ободі ротора, якщо точка знаходиться у вказаному на рисунку положенні.

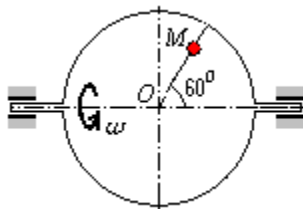


М.23.9. На подовжній вал автомобіля насаджений маховик радіусу $R=0.25$ м, що має в даний момент кутову швидкість 4 рад/с і кутове пришвидження 4 рад/с². Автомобіль рухається на прямолінійній ділянці шляху з пришвидженням 3 м/с². Визначити абсолютне пришвидження точки обода маховика.

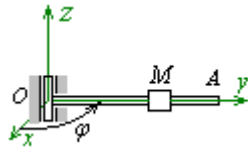
М.23.13. Кругла трубка радіусу $R=1$ м обертається навколо горизонтальної осі O за годинниковою стрілкою з постійною кутовою швидкістю 1 рад/с. У трубці щодо точки A коливається кулька M згідно із законом $\varphi=\sin(\pi t)$. Визначити абсолютні дотичне і нормальне пришвидження кульки у момент $t_1=13/6$ с.



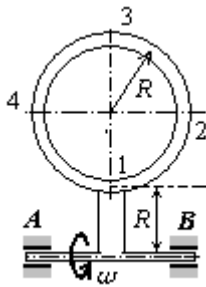
М.23.27. По радіусу диска, що обертається навколо осі O_1O_2 з кутовою швидкістю $2t$ рад/с, від його центру рухається точка M згідно із законом $OM=4t^2$. Визначити абсолютне пришвидження точки M у момент часу $t=1$ с.



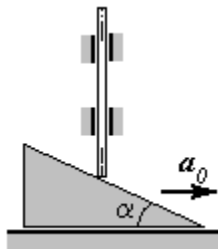
М.23.30. Стрижень OA обертається навколо осі z в даний момент з кутовою швидкістю 5 рад/с і кутовим пришвидженням -10 рад/с². Визначити абсолютне пришвидження шайби M , що в даний момент знаходиться на відстані $OM=0.6$ м і яка має швидкість і пришвидження уздовж стрижня 1.2 м/с і 0.9 м/с² відповідно.



М.23.47(3). Вал АВ обертається з постійною кутовою швидкістю ω . Рідина в порожнистому кільці радіусу R рухається з постійною відносною швидкістю U . Визначити абсолютні пришвидження частинок води в точках 1, 2, 3 і 4.



М.23.71(2). Призма рухається по горизонталі з постійним пришвидшенням a_0 . Визначити пришвидження вертикального стрижня, що спирається на гладку похилу поверхню призми.



Зразки тестів і задач . Кінематики точки і твердого тіла

11.1.Кінематика точки

Тести і задачі

Рівняння руху, траєкторія, швидкість і пришвидження точки.

I. Укажіть правильне означення дугової координати точки .

1). Шлях , пройдений точкою за час t .

- 2). Відстань до рухомої точки від початку відліку вздовж траєкторії.
 3). Відстань між рухомою точкою і початковим положенням точки.
 4). Відстань між двома точками на траєкторії.

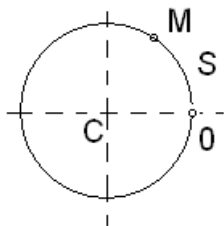
II. Який вигляд мають рівняння годографа швидкості?

$$\begin{array}{llll} x_1 = x(t) & x_1 = x(t) & x_1 = x(t) & \\ 1). y_1 = y(t) & 2). y_1 = y(t) & 3). V = \frac{dS}{dt} & 4). y_1 = y(t) \\ z_1 = z(t) & z_1 = z(t) & & z_1 = z(t) \end{array}$$

III. Укажіть формулу повного прискорення точки в даний момент часу.

$$1). a = \frac{dV}{dt}. \quad 2). a = \frac{V^2}{\rho}. \quad 3). \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}. \quad 4). \vec{a} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t}.$$

IV. Задача



Точка рухається по колу радіуса $R = 6$ см згідно з рівнянням $S = 3\pi \sin \frac{\pi t}{2}$. / S – у сантиметрах, t – у секундах/.

Визначіть швидкість і прискорення точки в момент часу $t = 4$ с.

Відповідь: $V = 1.5\pi^2$ см/с; $a = 0.38\pi^4$ см/с².

Бали за вірну відповідь на запитання:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Кінематика найпростіших рухів твердого тіла

Тести і задачі

Поступальний і обертальний рух твердого тіла.

I. Виберіть правильне закінчення твердження:

Поступальним називають такий рух твердого тіла, за якого....

- 1)довільна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно сама собі.
- 2)тільки одна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно сама собі.
- 3)усі точки тіла рухаються у площинах, паралельних деякій нерухомій площині.
- 4)у будь – який момент часу всі його точки мають однакові швидкості.

II. На якому рисунку зображено тіло, що обертається сповільнено?

III. Який векторний добуток виражає доцентрове прискорення точки тіла, що перебуває в обертальному русі?

1)

1) $\vec{a}^o = \vec{\omega} \cdot \vec{r}$.

2)

2) $\vec{a}^o = \vec{E} \cdot \vec{r}$.

3)

3) $\vec{a}^o = \vec{\omega} \cdot \vec{r}$.

4)

4) $\vec{a}^o = \vec{v} \cdot \vec{\omega}$.

IV. Задача.

За відомим рівнянням $x = 3 + 40t^2$ см

прямолінійного поступального руху

вантажу Р визначить повне прискорення

точки М механізму в той момент, коли

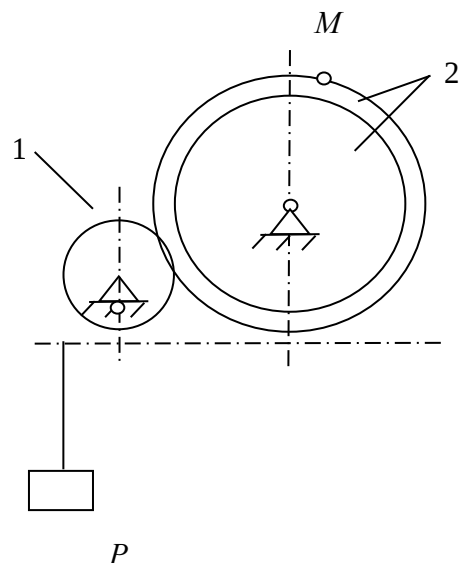
пройдений ним шлях дорівнюватиме

$$S = 7.5 \text{ см} / R_2 = 20 \text{ см}, r_2 = 15 \text{ см},$$

$$R_1 = 15 \text{ см} /.$$

Відповідь: $a_M = 75 \text{ см} / \text{с}^2$.

Бали за вірну відповідь на запитання



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Кінематика плоского руху твердого тіла.

Тести і задачі

Швидкість і пришвидження точки у плоскому русі тіла.

I. Укажіть кінематичні параметри руху плоскої фігури.

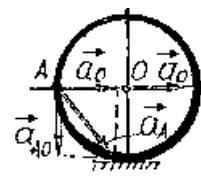
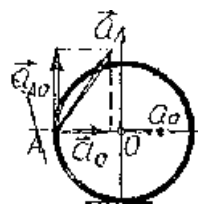
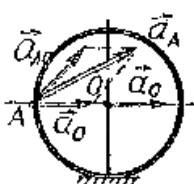
- 1) $\varphi = \varphi(t)$, $\omega = \omega(t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t)$.
- 2) $\vec{v}_A = \vec{v}_A(t)$, $\vec{a}_A = \vec{a}_A(t)$.
- 3) $\vec{v}_O = \vec{v}_O(t)$, $\vec{a}_O = \vec{a}_O(t)$, $\omega = \omega(t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t)$.
- 4) $x_O = x_O(t)$, $y_O = y_O(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.

II. Що називають миттєвим центром швидкостей? Це така точка, незмінно зв'язана з плоскою фігурою, швидкість якої.

- 1) ...дорівнює нулю в довільну мить.
- 2) ...у даний момент часу дорівнює нулю.
- 3) ...дорівнює швидкості полюса.
- 4) ...та прискорення у даний момент часу дорівнюють нулю.

III. Колесо радіуса r котиться без ковзання горизонтальною поверхнею. Відомо $\vec{a}_O$, ω , ε . На якій схемі правильно показано прискорення точки A?

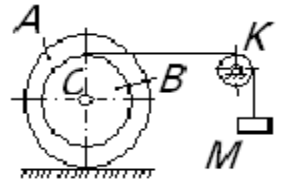
- 1).
- 2).
- 3).
- 4).





IV. Задача

Два циліндри A і B радіусами відповідно 15 і 5 см жорстко з'єднані між собою і мають спільну вісь C. Через блок A перекинута нитка, намотана на циліндр B. До кінця нитки прикріплено вантаж M, який, рухаючись, має прискорення 40 см/с^2 і швидкість у даний момент часу 40 см/с . Визначіть прискорення точки C.



Відповідь: $a_C = 0,3 \text{ м/с}^2$.

Бали за вірну відповідь на запитання:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Кінематика складного руху точки

Тести і задачі

Швидкість і пришвидження точки у складному русі.

I. Виберіть правильне закінчення означення:

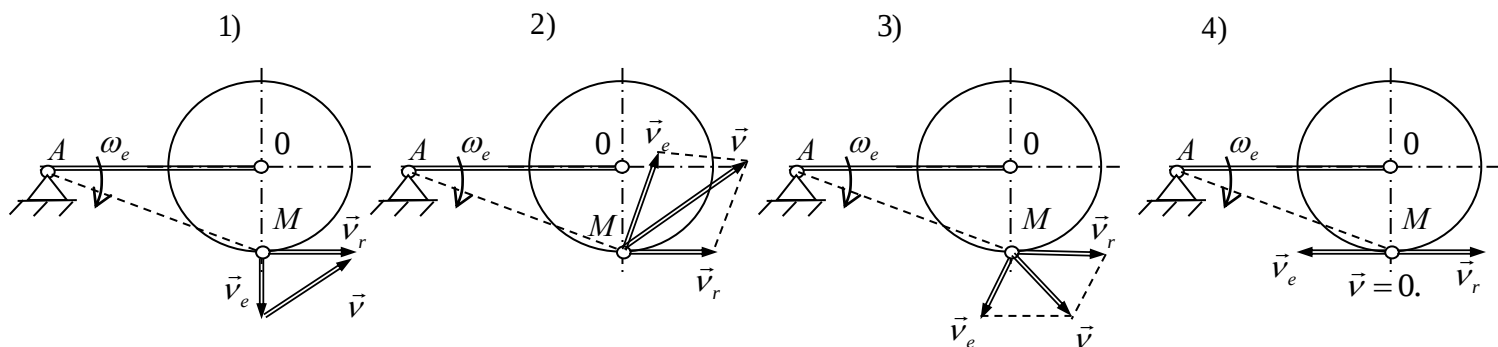
Переносною швидкістю точки M у складному русі називають....

- 1)швидкість точки відносно нерухомої системи відліку.
- 2)швидкість відносно нерухомої системи відліку тієї точки переносного середовища, з якою в даний момент збігається рухома точка M.
- 3)швидкість точки відносно рухомої системи відліку.
- 4)швидкість рухомої системи відліку відносно нерухомої.

II. Яка формула визначає вектор коріолісового прискорення точки?

- 1) $\vec{a}_c = 2\vec{v}_r \cdot \vec{\omega}_c$.
- 2) $\vec{a}_c = 2\vec{v}_e \cdot \vec{\omega}_r$.
- 3) $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_c \cdot \vec{v}_r$.
- 4) $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_c \vec{v}_r$.

III. Укажіть рисунок, на якому правильно показано вектор абсолютної швидкості точки М.



IV. Задача.

Точка М рухається вздовж діагоналі

прямокутної пластини за законом

$AM = 5t$ см. Пластина обертається

навколо сторони AD з постійною

кутовою швидкістю $\omega = 2$ с⁻¹.

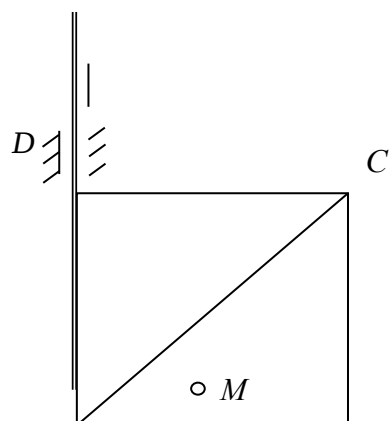
Визначить абсолютне прискорення

точки М у момент, коли вона

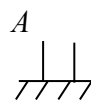
віддалена від осі обертання на 3 см;

$AB = 16$ см; $BC = 12$ см.

Відповідь: $a = 20$ см/с².



$\vec{a}_r$ B



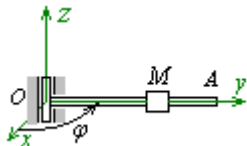
Бали за вірну відповідь на запитання

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Зразок питань і задач для модульного контролю з кінематики

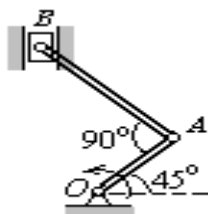
1. Складний рух точки. Абсолютний, відносний та переносний рух точки. Довести теорему про додавання швидкостей точки при складному русі

Задача.М.23.30. Стрижень ОА обертається навколо осі z в даний момент з кутовою швидкістю 5 рад/с і кутовим пришвидшенням -10 рад/с^2 . Визначити абсолютне пришвидження шайби М, що в даний момент знаходиться на відстані $OM=0.6\text{м}$ і яка має швидкість і пришвидження уздовж стрижня 1.2 м/с і 0.9 м/с^2 відповідно.



2.. Плоскопаралельний рух тіла. Завдання руху.Розподіл швидкостей точок. Теорема Ейлера

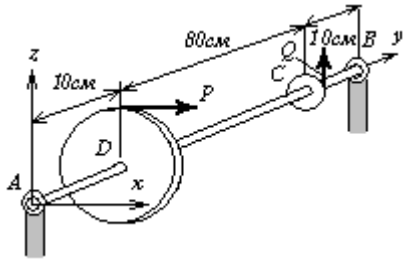
Задача.М.18.11.Кривошип ОА обертається рівномірно з кутовою швидкістю 10 рад/с. $AB=100\text{см}$. Визначити кутову швидкість і кутове пришвидження шатуна АВ і пришвидження повзуна В у вказаному на рисунку положенні механізму.



Статика твердого тіла

1.Сформулювати і довести дві основні теореми статки: теорему Пуансо і теорему Ейлера-Сомова.

Задача.(М.8.14). К шестерне С радиуса 10 см приложена вертикальная сила Q. К зубчатому колесу D радиуса 1 м приложена горизонтальная сила P=100 Н.. Определить величину силы Q и реакции опор A и B в положении равновесия.

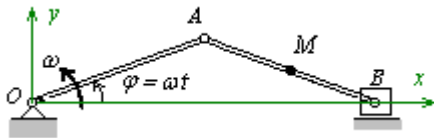


Відповідь: $Q=1 \text{ кН}$, $X_A=-10 \text{ Н}$, $X_B=-90 \text{ Н}$, $Z_A=-900 \text{ Н}$, $Z_B=-100 \text{ Н}$

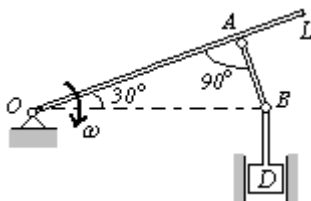
Кінематика точки і твердого тіла

1.Способи завдання руху точки.Швидкість і пришвидження точки

Задача(М.12.18).Составить уравнения движения точки M шатуна AB.Определить , скорость и ускорение точки M при $t = 0$, если $\omega = 4\pi \text{ рад/с}$, $AM = 2/3 AB$, $OA = AB = 60 \text{ см}$. Відповідь: 1) $X_M = 120 \cos 10t$; 2) $Y_M = 40 \sin 10t$; 3) $x^2/120^2 + y^2/40^2 = 1$; 3) $X_B(t) = 160 \cos 10t$.



2..Плоскопараллельный рух тіла. Способы визначення швидкостей точек плоской фигуры
Задача.(М.16.24). Определить скорость поршня D гидравлического пресса и угловую скорость поводка AB в рассматриваемом положении, если угловая скорость рычага OL в этот момент равна 2 рад/с.OA=15 см.



Відповідь : $u_D = 34,6 \text{ см/с}$, $\omega_{AB} = 2 \text{ рад/с}$, $\omega_{AB} = 2 \text{ рад/с}$.

Література

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – Київ.:Техніка,2002. – 512 с.
2. Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М. Теоретична механіка:підручник. – К. : Знання.2004. – Ч. 1-2 ;
Ч. 1.Статика. Кінематика. – 599 с.; Ч .2. Динаміка. – 500 с.
3. Цасюк В.В. Теоретична механіка. – Київ, Центр навчальної літератури,2004. – 402 с.
4. Макарова Т.В. Курс теоретичної механіки: Кінематика. Статика: навчальний посібник. – Одеса.Астропринт,2003. – 232 с.
5. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики.САН.СХВ : Спб.,2005. – 752 с.
6. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: учебник в 2-х т. – М. : Наука. – 2001. ; Динамика. Т. 1. – 544 с.
7. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: учебник для машиностр. спец. Вузов. – М.: Высш.шк.1998. – 607 с.
8. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. – М. : Высш.шк.,2001. – 416 с.
9. Березова О.А., Солодовніков В.В., Друшляк Г.Ю. Збірник задач з теоретичної механіки.- Київ: Вища шк.,1995. – 322 с.
10. Божідарник В.В.,Величко Л.Д. Методика розв'язування і збірник задач з теоретичної механіки : навч.посібн. – Луцьк: Надстир'я,2003. – 496 с.
11. Путята Т.В.,Фрадлін Б.М. Методика розв'язування задач з теоретичної механіки .- Київ : Рад шк.,1955. – 368 с.
12. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. - М. : Наука, 1986. – 448 с.
13. Березова О. В., Друшляк Г.Е.,Солодовніков В.В. Теоретична механіка : сб.задач. – Київ: Вища шк.,1980. – 324 с.
14. Бражниченко Н.А. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Судпромгиз,1996.
15. Сборник задач по теоретической механике / под ред. К.С.Колесникова . – М. : Наука, 1998. – 448 с.
16. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М.:Наука,1992; Т.1. – 672 с.; Т.2. – 640 с.