

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД «ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені К. Д. УШИНСЬКОГО»

Кафедра математики і методики її навчання

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ, ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ ТА
ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ З ДИСЦИПЛІНИ
«МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ
СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ (ПРОФІЛЬНА ШКОЛА)»

для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти

Галузь знань 01 Освіта / Педагогіка

спеціальність 014.08 Середня освіта (Математика)

УДК: 378.147(046)::373.5.016:51

*Рекомендовано до друку вченою радою Державного закладу
«Південноукраїнський національний педагогічний
університет імені К. Д. Ушинського»
протокол від «25» січня 2024 року № 8.*

Рецензенти:

Ордановська О. І. - доктор педагогічних наук, доцент кафедри інноваційних технологій та методики навчання природничих дисциплін Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Мітельман І. М. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри методики викладання і змісту освіти КЗВО «Одеська академія неперервної освіти Одеської обласної ради»

Укладачі:

Моторіна В. Г. – доктор педагогічних наук, професор, доцент кафедри математики і методики її навчання Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Папач О. І. – кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики і методики її навчання Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Методичні рекомендації до проведення практичних, семінарських занять та організації самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)» для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти зі спеціальності 014 Середня освіта (Математика) / укладачі В. Г. Моторіна, О. І. Папач. – Одеса, Університет Ушинського, 2024. 57 с.

Методичні рекомендації розроблено відповідно до Положення про організацію самостійної роботи студентів Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» (наказ від 26 червня 2020 року № 139) і робочої програми дисципліни «Методика навчання математики в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)». Методичні рекомендації містять: передмову, теми лекційних занять, плани практичних і лабораторних занять, завдання для самостійної роботи, перелік індивідуальних науково-дослідних завдань, додатки.

ЗМІСТ

ВСТУП	4-6
РОЗДІЛ 1. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ СТЕРЕОМЕТРІЇ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ (Змістовий модуль 1)	7-13
1.1. Теми лекційних занять	7-8
1.2. Плани практичних, семінарських занять і завдання для самостійної роботи	9-13
РОЗДІЛ 2. РОЗГОРТАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЛІНІЇ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ. РОЗГОРТАННЯ СТОХАСТИЧНОЇ ЛІНІЇ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ (Змістовий модуль 2)	13-18
2.1. Теми лекційних занять.....	14-15
2.2 Плани практичних, семінарських занять і завдання для самостійної роботи	16-18
РОЗДІЛ 3. МЕТОДИЧНИЙ АНАЛІЗ ОСНОВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ (Змістовий модуль 3)	19-21
3.1. Теми лекційних занять.....	19
3.2 Плани практичних, семінарських занять і завдання для самостійної роботи	20-21
РОЗДІЛ 4. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ	22-23
Запитання до практичних занять.....	24-28
Теоретичні запитання до іспиту.....	29
Орієнтовний перелік проєктів з математики, спрямованих на формування компетентності продуктивної творчої діяльності учнів.....	30-31
Рекомендації щодо застосування методу проєктів на уроках математики в профільній школі.....	32
Конспект уроку у вигляді навчального проєкту на тему «Розв’язування ірраціональних рівнянь різними способами.....	33-44
Методичний аналіз теми «Вектори».....	45-55
РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА	55-57

ВСТУП

Предметом дисципліни «Методика навчання математики в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)» для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти зі спеціальності 014 Середня освіта (Математика) є освітній процес з математичних дисциплін в профільній школі.

Мета навчання – формування у магістрантів комплексу уявлень про методичні особливості викладання навчальної дисципліни «Математика» в профільній школі та ознайомлення з основними категоріями методики навчання математики.

Очікувані результати навчання дисципліни

знати:

- основні категорії методики навчання математики в профільній школі;
- логіко-дидактичну побудову курсів алгебри і початків аналізу та геометрії в профільній школі;
- методичні особливості викладання конкретних тем курсів алгебри і початків аналізу та геометрії в профільній школі;
- методичні особливості навчання математики в онлайн та офлайн режимах проведення уроків;
- особливості використання сучасних педагогічних та цифрових технологій навчання математики в профільній школі.

уміти:

- виконувати методичний аналіз основних тем алгебри і початків аналізу та геометрії;
- використовувати сучасні педагогічні та цифрові технології у навчанні математики в профільній школі;
- проводити уроки різних типів із застосуванням особистісно-орієнтованого, компетентнісного та діяльнісного підходів;
- проєктувати та моделювати уроки математики в профільній школі в онлайн та офлайн режимах;
- здійснювати рефлексію.

Відповідно до Положення про організацію освітнього процесу у Державному закладі «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» видами навчальних занять з дисципліни «Методика навчання математики в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)» є лекції, практичні, семінарські заняття, консультації, які можуть проводитися з використанням різних методів аудиторної роботи, зокрема:

- семінар – це форма групового навчального заняття, під час якої відбувається колективне обговорення наукової проблеми;

- обговорення – це форма групового навчального заняття, під час якої в кожній групі обговорюються різні аспекти запропонованої теми та фіксуються нароби у формі опорних схем, після завершення роботи групи обмінюються напрацюваннями;

- дискусія – метод проведення навчального заняття, який передбачає публічний розгляд спірного питання чи проблеми;

- круглий стіл – метод навчального заняття, який передбачає колективне обговорення актуальної проблеми викладачами, студентами, запрошеними фахівцями;

- моделювання – це наочно-практичний метод, пов'язаний з процесом створення моделей і подальшою роботою з ними;

- конструювання – метод навчального заняття, що передбачає свідоме та цілеспрямоване втілення ідей та принципів, кінцевим результатом якого є продукт, наприклад, алгоритм реалізації проєкту, уроку, позакласного заходу;

- вирішення практичних завдань – форма навчального заняття, при якій викладач організовує детальний розгляд студентами окремих теоретичних положень навчальної дисципліни та формує вміння і навички їх практичного застосування шляхом індивідуального виконання студентом відповідно сформульованих завдань.

Організація самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)» здобувачів другого (магістерського) рівня освіти відбувається згідно Положення про організацію самостійної роботи студентів Державного закладу «Південноукраїнський

національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» (наказ від 26 червня 2020 року № 139), розробленого на підставі Закону України «Про вищу освіту», Положення про організацію освітнього процесу у Державному закладі «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Правил внутрішнього розпорядку Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Статуту Університету Ушинського.

Самостійна робота студентів з дисципліни «Методика навчання математики в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)» є основним засобом засвоєння навчального матеріалу у вільний від аудиторних занять час і охоплює опрацювання навчального матеріалу, виконання індивідуальних завдань, науково-дослідну роботу тощо.

Індивідуальне навчально-дослідне завдання з дисципліни «Методика навчання математики в закладах загальної середньої освіти (профільна школа)» спрямоване на створення тематичного портфоліо з навчально-методичним забезпеченням до відповідної теми та профілю класу, серед яких конспекти уроків, конспекти факультативних занять, опорні конспекти, диференційовані самостійні роботи, підбірки задач компетентнісного спрямування, низки презентацій тощо.

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ УЧНІВ СТЕРЕОМЕТРИХ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ (Змістовий модуль 1)

1.1. Теми лекційних занять

ТЕМА 1. Основні категорії стереометрії. Методика вивчення тем «Паралельність прямих у просторі»

Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Методика формування в учнів вмінь розв'язувати задачі на застосування аксіом та їх наслідків, на доведення, конструктивні задачі (на побудову зображень геометричних тіл, побудову перерізів геометричних тіл), на доведення геометричних тверджень.

ТЕМА 2. Методика вивчення теми «Паралельність прямої і площини. Паралельність площин».

Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Методика формування в учнів вмінь розв'язувати задачі на доведення, конструктивні задачі (на побудову зображень геометричних тіл, побудову перерізів геометричних тіл), на доведення геометричних тверджень, на обчислення геометричних величин.

ТЕМА 3. Методика вивчення тем «Перпендикулярність прямих, прямих і площин у просторі. Перпендикуляр і похила. Перпендикулярність площин».

Методичний аналіз тем. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Методика формування в учнів вмінь розв'язувати задачі на доведення, конструктивні задачі на побудову зображень геометричних тіл, на доведення геометричних тверджень, на обчислення геометричних величин.

ТЕМА 4. Многогранники та їх елементи. Методика вивчення тем «Площі поверхонь призми та піраміди», «Об'єм призми та піраміди».

Методичний аналіз тем. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Методика формування в учнів вмінь розв'язувати задачі на доведення, конструктивні задачі на побудову зображень геометричних тіл, на доведення геометричних тверджень, на обчислення площ поверхонь та об'ємів призми та піраміди.

ТЕМА 5. Методика вивчення тем «Площа поверхні, об'єми тіл обертання».

Методичний аналіз тем. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Методика формування в учнів вмінь розв'язувати задачі на доведення, конструктивні задачі на побудову зображень геометричних тіл, на доведення геометричних тверджень, на обчислення площ та об'ємів тіл обертання.

ТЕМА 6. Методика вивчення теми «Координати та вектори в просторі».

Методичний аналіз тем. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Методика формування в учнів вмінь розв'язувати задачі на знаходження відстані між двома точками та координат середини відрізка у просторі; знаходження координат векторів та дій над ними, їх скалярного добутку. Методичні особливості застосування координатного та векторного методу для розв'язування задач з стереометрії та практика його міжпредметного використання.

Плани практичних, семінарських занять і завдання для самостійної роботи

ТЕМА 1. Основні категорії стереометрії. Методика вивчення тем «Паралельність прямих у просторі»

1. Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Методика формування в учнів вмінь розв'язувати задачі на застосування аксіом та їх наслідків, на доведення, конструктивні задачі (на побудову зображень геометричних тіл, побудову перерізів геометричних тіл), на доведення геометричних тверджень.

Практичні заняття

- 1.1. Семінар «Основні категорії стереометрії. Методика вивчення теми «Паралельність прямих у просторі».

Завдання для самостійної роботи

1. Ознайомитися зі змістовою структурою теми для різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. До теми «Основні категорії стереометрії. Методика вивчення теми «Паралельність прямих у просторі» розробити опорний конспект (профіль класу на вибір здобувача освіти).

ТЕМА 2. Методика вивчення теми «Паралельність прямої і площини.

Паралельність площин.

1. Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Методика формування в учнів вмінь розв'язувати задачі на доведення, конструктивні задачі (на побудову зображень геометричних тіл, побудову перерізів геометричних тіл), на доведення геометричних тверджень, на обчислення геометричних величин.

Практичні заняття

2.1. Семінар-модельовання на тему «Паралельність прямої і площини. Паралельність площин».

Завдання для самостійної роботи

1. Ознайомитися зі змістовою структурою теми для різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Відповідно до вибраного типу розробити основну частину уроку (засвоєння нових знань; формування умінь і навичок; застосування знань, умінь і навичок; узагальнення та систематизації знань; перевірки і корекції знань, умінь і навичок; комбінований урок).

ТЕМА 3. Методика вивчення тем «Перпендикулярність прямих, прямих і площин у просторі. Перпендикуляр і похила. Перпендикулярність площин.»

1. Методичний аналіз тем. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

2. Методика формування в учнів вміння розв'язувати задачі на доведення, конструктивні задачі на побудову зображень геометричних тіл, на доведення геометричних тверджень, на обчислення геометричних величин.

Практичні заняття

3.1., 3.2. Семінар-конструювання конспектів уроків до теми «Перпендикулярність прямих, прямих і площин у просторі. Перпендикуляр і похила. Перпендикулярність площин».

Завдання для самостійної роботи

1. Ознайомитися зі змістовою структурою теми для різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. До теми «Перпендикулярність прямих, прямих і площин у просторі. Перпендикуляр і похила. Перпендикулярність площин» створити підбірку вступних, пробних та тренувальних вправ до первинного застосування набутих знань (профіль класу на вибір здобувача освіти).

ТЕМА 4. Многогранники та їх елементи. Методика вивчення тем «Площі поверхонь призми та піраміди», «Об'єм призми та піраміди».

1. Методичний аналіз тем. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Методика формування в учнів вмінь розв'язувати задачі на доведення, конструктивні задачі на побудову зображень геометричних тіл, на доведення геометричних тверджень, на обчислення площ поверхонь та об'ємів призми та піраміди.

Практичні заняття

4.1. Круглий стіл на тему «Многогранники та їх елементи. Методика вивчення тем «Площі поверхонь призми та піраміди», «Об'єм призми та піраміди».

Завдання для самостійної роботи

1. Ознайомитися зі змістовою структурою теми для різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Розробити диференційовану самостійну роботу (тема і профіль класу на вибір здобувача освіти).

ТЕМА 5. Методика вивчення тем «Площа поверхні, об'єми тіл обертання».

1. Методичний аналіз тем. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

2. Методика формування в учнів вмінь розв'язувати задачі на доведення, конструктивні задачі на побудову зображень геометричних тіл, на доведення геометричних тверджень, на обчислення площ та об'ємів тіл обертання.

Практичні заняття

5.1. Обговорення на тему «Методика вивчення тем «Площа поверхні, об'єми тіл обертання».

Завдання для самостійної роботи

1. Ознайомитися зі змістовою структурою теми для різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Підготуйте підбірку задач на комбінацію геометричних тіл

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. До теми «Методика вивчення тем «Площа поверхні, об'єми тіл обертання» зробити підбірку задач компетентнісного спрямування.

ТЕМА 6. Методика вивчення теми «Координати та вектори в просторі».

1. Методичний аналіз тем. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Методика формування в учнів вмінь розв'язувати задачі на знаходження відстані між двома точками та координат середини відрізка у просторі; знаходження координат векторів та дій над ними, їх скалярного добутку.
3. Методичні особливості застосування координатного та векторного методу для розв'язування задач з стереометрії та практика його міжпредметного використання.

Практичні заняття

6.1. Дискусія на тему «Методика вивчення теми «Координати та вектори в просторі».

Завдання для самостійної роботи

1. Ознайомитися зі змістовою структурою теми для різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Підготувати підбірку задач (не менше 5), в яких застосовується координатний та векторний методи розв'язання.

РОЗДІЛ 2. РОЗГОРТАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЛІНІЇ В КУРСІ АЛГЕБРИ ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ. РОЗГОРТАННЯ СТОХАСТИЧНОЇ ЛІНІЇ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ (Змістовий модуль 2)

2.1. Теми лекційних занять

ТЕМА 7. Методика вивчення степеневі функції в профільній школі.

Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Методика формування в учнів вмінь здійснювати тотожні перетворення ірраціональних виразів, розв'язувати ірраціональні рівняння і нерівності.

ТЕМА 8. Методика вивчення тригонометричних функцій в профільній школі.

Методика формування в учнів вмінь здійснювати тотожні перетворення тригонометричних виразів, розв'язувати тригонометричні рівняння і нерівності, системи тригонометричних рівнянь.

ТЕМА 9. Методика вивчення показникової і логарифмічної функцій в профільній школі.

Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Методика навчання учнів показникової та логарифмічної функцій, їх властивостей та графіків.

Методика формування в учнів вмінь здійснювати тотожні перетворення логарифмічних виразів, розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

ТЕМА 10. Методика навчання учнів елементів комбінаторики.

Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Методика формування в учнів уявлень про впорядковані множини, вмінь застосовувати основні формули комбінаторики до розв'язання задач та рівнянь різних рівнів складності.

Методичні особливості введення бінома Ньютона, знаходження біноміальних коефіцієнтів, загального члену розкладу степеня бінома.

ТЕМА 11. Методика навчання учнів основних понять теорії ймовірностей та елементів статистики.

Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Методика введення поняття випадкової події і випадкового експерименту, статистичного означення ймовірності.

Особливості формування в учнів вмінь виявляти незалежні події та здійснювати операції над ними, розв'язувати задачі різного рівня складності.

Методика опрацювання генеральної сукупності і вибірки, формування навичок оперування статистичними характеристиками рядів даних.

2.2. Плани практичних, семінарських занять і завдання для самостійної роботи

ТЕМА 7. Методика вивчення степеневі функції в профільній школі.

1. Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Методика формування в учнів вмінь здійснювати тотожні перетворення ірраціональних виразів, розв'язувати ірраціональні рівняння і нерівності.

Практичні заняття

- 7.1. Вирішення практичних завдань до теми «Методика вивчення степеневі функції в профільній школі».

Завдання для самостійної роботи

1. Ознайомитися зі змістовою структурою теми для різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Розробити опорний конспект до теми.

ТЕМА 8. Методика вивчення тригонометричних функцій в профільній школі.

1. Методика формування в учнів вмінь здійснювати тотожні перетворення тригонометричних виразів, розв'язувати тригонометричні рівняння і нерівності, системи тригонометричних рівнянь.

Практичні заняття

- 8.1. Вирішення практичних завдань до теми «Методика навчання тригонометричних функцій в профільній школі».

Завдання для самостійної роботи

1. Ознайомитися зі змістовою структурою теми для різних рівнів навчання математики в профільній школі

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Створити презентацію, присвячену геометричним перетворенням графіка обраної функції (на вибір здобувача освіти) (профіль класу та цифровий інструмент побудови графіків на вибір здобувача освіти).

ТЕМА 9. Методика вивчення показникової і логарифмічної функцій в профільній школі.

1. Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

2. Методика навчання учнів показникової та логарифмічної функцій, їх властивостей та графіків.

3. Методика формування в учнів вмінь здійснювати тотожні перетворення логарифмічних виразів, розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

Практичні заняття

9.1. Вирішення практичних завдань до теми «Методика навчання показникової і логарифмічної функцій в профільній школі».

Завдання для самостійної роботи

1. Ознайомитися зі змістовою структурою теми для різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Підготувати диференційовану контрольну роботу до теми.

ТЕМА 10. Методика навчання учнів елементів комбінаторики.

1. Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Методика формування в учнів уявлень про впорядковані множини, вмінь застосовувати основні формули комбінаторики до розв'язання задач та рівнянь різних рівнів складності.
3. Методичні особливості введення бінома Ньютона, знаходження біноміальних коефіцієнтів, загального члену розкладу степеня бінома.

Практичні заняття

- 10.1. Семінар-моделювання на тему «Методика навчання учнів елементів комбінаторики».

Завдання для самостійної роботи

1. Ознайомитися зі змістовою структурою теми для різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Створити конспект уроку (тип уроку та профіль класу на вибір здобувача освіти).
2. Підготувати підбірку задач з використанням формул комбінаторних сполук.

ТЕМА 11. Методика навчання учнів основних понять теорії ймовірностей та елементів статистики.

1. Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Методика введення поняття випадкової події і випадкового експерименту, статистичного означення ймовірності.
3. Особливості формування в учнів вмінь виявляти незалежні події та здійснювати операції над ними, розв'язувати задачі різного рівня складності.

4. Методика опрацювання генеральної сукупності і вибірки, формування навичок оперування статистичними характеристиками рядів даних.

Практичні заняття

11.1. Дискусія на тему «Методика навчання учнів основних понять теорії ймовірностей та елементів статистики».

Завдання для самостійної роботи

1. Ознайомитися зі змістовою структурою теми для різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. На основі аналізу матеріалів ЗНО та НТМ презентуйте 10 завдань на статистику.

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИЧНИЙ АНАЛІЗ ОСНОВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ (Змістовий модуль 3)

3.1. Теми лекційних занять

ТЕМА 12. Методика вивчення та застосування похідної в шкільному курсі математики.

Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Методика навчання учнів застосуванню похідної до дослідження функцій та побудови ескізу її графіка.

Методика розв'язування текстових задач на знаходження найбільших і найменших значень.

ТЕМА 13. Методика вивчення теми «Первісна та її властивості».

Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Методика формування в учнів поняття та основних властивостей первісної, вмінь користуватися правилами знаходження первісної.

ТЕМА 14. Методика вивчення теми «Визначений інтеграл та його застосування».

Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Особливості введення поняття інтегралу та його геометричного змісту, формування учнів вмінь його застосування для знаходження площ та об'ємів криволінійних фігур.

3.2. Плани практичних, семінарських занять і завдання для самостійної роботи

ТЕМА 12. Методика вивчення та застосування похідної в шкільному курсі математики.

1. Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Методика навчання учнів застосуванню похідної до дослідження функцій та побудови ескізу її графіка.
3. Методика розв'язування текстових задач на знаходження найбільших і найменших значень.

Практичні заняття

- 12.1. Семінар-моделювання на тему «Методика вивчення та застосування похідної в шкільному курсі математики».

Завдання для самостійної роботи

1. Ознайомитися зі змістовою структурою теми для різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Підготувати підбірку індивідуальних завдань високого рівня з теми.

ТЕМА 13. Методика вивчення теми «Первісна та її властивості».

1. Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Методика формування в учнів поняття та основних властивостей первісної, вмінь користуватися правилами знаходження первісної.

Практичні заняття

13.1. Круглий стіл на тему «Методика вивчення теми «Первісна та її властивості».

Завдання для самостійної роботи

1. Ознайомитися зі змістовою структурою теми для різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Підготувати підбірку завдань для усного визначення первісної.

ТЕМА 14. Методика вивчення теми «Визначений інтеграл та його застосування».

1. Методичний аналіз теми. Порівняння цільових, процесуальних і змістових аспектів вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

2. Особливості введення поняття інтегралу та його геометричного змісту, формування учнів вмінь його застосування для знаходження площ та об'ємів криволінійних фігур.

Практичні заняття

14.1. Вирішення практичних завдань до теми «Методика вивчення теми «Визначений інтеграл та його застосування».

Завдання для самостійної роботи

1. Ознайомитися зі змістовою структурою теми для різних рівнів навчання математики в профільній школі.

Індивідуальні навчально-дослідні завдання

1. Створіть конспект факультативного заняття до теми (профіль класу на вибір здобувача освіти).

РОЗДІЛ 4. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

Вид роботи	Бали	Критерії
Практичні завдання	0 балів	Здобувач не бере участі в практичному занятті, є лише спостерігачем.
	1 бал	Здобувач самостійно розв'язує запропоновані завдання, вміє аналізувати педагогічний, цифровий та методичний інструментарій, необхідний для проектування та моделювання уроку математики та математичних дисциплін в умовах НУШ, дає відповідь на поставлені теоретичні запитання, припускаючись невеликих помилок. Знання здобувача є достатньо повними; він самостійно застосовує відповідний навчальний матеріал, виконуючи практичні завдання; аналізує, робить висновки.
	2 бали	Здобувач бере активну участь у практичному занятті. Правильно підбирає педагогічний, цифровий та методичний інструментарій, необхідний для проектування та моделювання уроку математики та математичних дисциплін в умовах НУШ та обґрунтовує власний вибір, наводить доцільні приклади, спираючись на відповідні документи нормативно-правового характеру.
Самостійна робота	0 балів	Здобувач має фрагментарні уявлення з предмета вивчення; не може виконати елементарні завдання.
	1 бал	Здобувач здатен самостійно опанувати запропонований матеріал і виконати завдання прикладного змісту; виявляє здатність елементарно висловлювати думку; знає послідовність виконання завдання; при виконанні самостійної роботи потребує допомоги викладача.
	2 бали	Здобувач впевнено і аргументовано відтворює матеріал самостійного опрацювання, вільно їм володіє і вміє його застосувати при підготовці уроку.
Індивідуальне навчально-дослідне завдання (доповідь)	0 балів	Завдання не виконано; доповідь має копійлятивний характер; висловлювання ні за змістом, ні за формою не відповідає вимогам. Презентація відсутня.
	1-2 бали	<p>Зміст доповіді відповідає заявленій темі, проте тема розкрита частково. Наведені дані і факти обґрунтовують чи ілюструють сформульовані тези лише частково. Достовірність інформації у доповіді має зауваження до точності, обґрунтованості, наявності посилань на джерела первинної інформації. Робота характеризується змістовою цілісністю, зв'язністю і послідовністю викладу, допущено не більше 1 логічної помилки. Здобувач веде себе скуто, невпевнено і напружено, має небагатий набір засобів утримання уваги слухачів.</p> <p>Мультимедійна презентація значною мірою не відповідає вимогам: відсутнє логічне завершення презентації. Слайди наповнені текстовою інформацією, однак не сформульовані тези, ключові чи опорні слова та фрази. Спостерігаються порушення вимог до дизайну презентації: невідповідність кольору і фону; використання шрифтів, що утруднюють сприйняття тексту; наявність граматичних помилок.</p>
	3-4 бали	Зміст доповіді відповідає заявленій темі, проте тема розкрита неповно, натомість наявні фрагменти, які не відповідають темі. Наведені дані і факти

	<p>обґрунтовують чи ілюструють сформульовані тези частково (не більше 2 зауважень). До достовірності інформації у доповіді є зауваження. Здобувач володіє навичками доцільної побудови промови, однак відтворює підготовлений текст без врахування особливостей усного мовлення, може втрачати контроль з аудиторією.</p> <p>Не дотримано всіх вимог до створення мультимедійної презентації: спостерігається незначна надмірність тексту презентації, та/або перевантаженість ілюстративним матеріалом. Є незначні недоліки дизайну презентації.</p>
5 балів	<p>Зміст доповіді відповідає заявленій темі. Здобувач глибоко, повно й обґрунтовано розглядає предмет дослідження, подає узагальнення альтернативних теоретичних підходів в межах досліджуваної проблеми.</p> <p>Текст характеризується цілісністю та композиційною грамотністю. Використано достатній обсяг високо якісних інформаційних джерел. Здобувач демонструє вміння будувати розгорнутий монолог з фахової проблематики, логічно, правильно, точно, етично й емоційно висловлювати думку.</p> <p>Студент володіє технікою і культурою мовлення, використовує цитування, вдало імпровізує. Доповідь викликає велике зацікавлення й жваве обговорення у студентському середовищі, наявні позитивні коментарі. Навчальна презентація виконана з дотриманням усіх вимог. Презентація повністю ілюструє й унаочнює доповідь.</p>

ЗАПИТАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

1. Семінар «Основні категорії стереометрії. Методика вивчення теми «Паралельність прямих у просторі».

1. Назвіть основні категорії стереометрії.
2. Порівняйте цільові, процесуальні і змістові аспекти вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
3. Які ідеї заплановано до впровадження в профільній школі?
4. Які утруднення можуть виникати у учнів під час ознайомлення з загальними положеннями стереометрії?
5. Чому при введенні поняття паралельність прямих у просторі варто пригадати означення паралельних прямих з планіметрії?
6. В чому на ваш погляд полягає специфіка завдань на засвоєння означуваних та неозначуваних понять, аксіом стереометрії та наслідків з них?
7. Якою є роль задачного матеріалу для формування вмінь класифікувати взаємне розміщення прямих, встановлювати їх паралельність, зображати фігури в просторі? (навести приклади)

2. Семінар-моделювання на тему «Паралельність прямої і площини. Паралельність площин».

1. Порівняйте цільові, процесуальні і змістові аспекти вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Чому при введенні понять паралельності прямої і площини доцільним є використання методу аналогії?
3. Які рекомендації можете дати для введення поняття «паралельність площин»?
4. Які форми роботи вважаєте найбільш ефективними при вивченні даної теми?

3. Семінар-конструювання конспектів уроків до теми «Перпендикулярність прямих, прямих і площин у просторі. Перпендикуляр і похила. Перпендикулярність площин».

1. Порівняйте цільові, процесуальні і змістові аспекти вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Дайте методичну схему вивчення теми.
3. Який матеріал з планіметрії слід повторити для вдалого засвоєння теми?
4. Охарактеризуйте роль наочності при вивченні теми.

4. Круглий стіл на тему «Многогранники та їх елементи. Методика вивчення тем «Площі поверхонь призми та піраміди», «Об'єм призми та піраміди».

1. Порівняйте цільові, процесуальні і змістові аспекти вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Дайте методичну схему побудови перерізів многогранників на прикладі куба.
3. Які засоби рекомендуєте використовувати для кращого усвідомлення означень і властивостей кожного многокутника?
4. Запропонуйте тему окремого уроку, який можна провести за технологією перевернутого класу.

5. Обговорення на тему «Методика вивчення тем «Площа поверхні, об'єми тіл обертання».

1. Порівняйте цільові, процесуальні і змістові аспекти вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Дайте методичну схему вивчення теми.
3. Дайте рекомендації щодо унаочнення теоретичного матеріалу теми.
4. Охарактеризуйте методику розв'язування задач на комбінацію геометричних тіл.

6. Дискусія на тему «Методика вивчення теми «Координати та вектори в просторі».

1. Порівняйте цільові, процесуальні і змістові аспекти вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Дайте методичну схему вивчення теми.
3. В чому полягає суть координатного методів?
4. В чому полягає суть векторного методів?

7. Вирішення практичних завдань до теми «Методика вивчення степеневі функції в профільній школі».

1. Порівняйте цільові, процесуальні і змістові аспекти вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Дайте алгоритм тотожних перетворень виразів, які містять корені n -го степеня.
3. Дайте алгоритм розв'язування ірраціональних рівнянь.

8. Вирішення практичних завдань до теми «Методика навчання тригонометричних функцій в профільній школі».

1. Порівняйте цільові, процесуальні і змістові аспекти вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Дайте алгоритм побудови графіків тригонометричних функцій.
3. Дайте алгоритм ознайомлення учнів з правилом зведення кутів тригонометричних функцій до гострих.
4. Підготуйте опорний конспект до теми «Розв'язування тригонометричних рівнянь».

9. Вирішення практичних завдань до теми «Методика навчання показникової і логарифмічної функцій в профільній школі».

1. Порівняйте цільові, процесуальні і змістові аспекти вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

2. Дайте методичні рекомендації щодо розв'язання завдань, пов'язаних з властивостями показникової та логарифмічної функцій.

3. Підготуйте опорний конспект щодо розв'язування показникових рівнянь і нерівностей.

4. Підготуйте опорний конспект щодо розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей.

10. Семінар-модельовання на тему «Методика навчання учнів елементів комбінаторики».

1. Порівняйте цільові, процесуальні і змістові аспекти вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

2. Дайте алгоритм розв'язування комбінаторних задач на використання правил множення і додавання.

3. Дайте методичні рекомендації щодо введення бінома Ньютона та обчислення біноміальних коефіцієнтів.

4. Дайте методичні рекомендації щодо розв'язання рівнянь з використанням формул комбінаторики.

11. Дискусія на тему «Методика навчання учнів основних понять теорії ймовірностей та елементів статистики».

1. Порівняйте цільові, процесуальні і змістові аспекти вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.

2. Дайте методичні рекомендації щодо формування в учнів уявлень про основні поняття теорії ймовірностей.

3. Охарактеризуйте типові задачі з теорії ймовірностей.

4. Дайте методичну схему вивчення елементів математичної статистики.

5. Аргументуйте можливості формування наскрізного вміння критично мислити на навчальному матеріалі елементам статистики.

12. Семінар-моделювання на тему «Методика вивчення та застосування похідної в шкільному курсі математики».

1. Порівняйте цільові, процесуальні і змістові аспекти вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Дайте методичну схему вивчення теми.
3. Дайте алгоритм дослідження функції та побудови ескізу її графіка із застосуванням похідної.
4. Запропонуйте теми бінарних уроків з використанням теми «Похідна».
5. Охарактеризуйте типові утруднення учнів при вивченні теми.

13. Круглий стіл на тему «Методика вивчення теми «Первісна та її властивості».

1. Порівняйте цільові, процесуальні і змістові аспекти вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Дайте методичну схему вивчення теми.
3. Запропонуйте теми інтегрованих уроків з використанням теми «Первісна та її застосування».
4. Підготуйте довідниковий матеріал до теми.

14. Вирішення практичних завдань до теми «Методика вивчення теми «Визначений інтеграл та його застосування».

1. Порівняйте цільові, процесуальні і змістові аспекти вивчення теми відповідно до різних рівнів навчання математики в профільній школі.
2. Дайте методичну схему вивчення теми.
3. Дайте алгоритм обчислення визначеного інтеграла на основі побудови графіків.
4. Охарактеризуйте типові утруднення учнів при вивченні теми.

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАПИТАННЯ ДО ІСПИТУ

1. Вкажіть методичні особливості вивчення теми «Основні категорії стереометрії. Паралельність прямих у просторі».
2. Дайте методичний аналіз теми «Паралельність прямої і площини. Паралельність площин».
3. Дайте методичний аналіз теми «Перпендикулярність прямих, прямих і площин у просторі. Перпендикуляр і похила. Перпендикулярність площин».
4. Дайте методичний аналіз теми «Площі поверхонь призми та піраміди», «Об'єм призми та піраміди».
5. Дайте методичний аналіз теми «Площа поверхні, об'єми тіл обертання».
6. Дайте методичний аналіз теми «Координати та вектори в просторі».
7. Дайте методичний аналіз теми «Степенева функція».
8. Дайте методичний аналіз теми «Тригонометричні функції».
9. Дайте методичний аналіз теми «Показникова функція, її властивості та графіки».
10. Дайте методичний аналіз теми «Логарифмічна функція, її властивості та графіки».
11. Дайте методичний аналіз теми «Елементи комбінаторики».
12. Дайте методичний аналіз теми «Теорія ймовірностей та елементи статистики».
13. Дайте методичний аналіз теми «Похідна та її застосування».
14. Дайте методичний аналіз теми «Первісна та її властивості».
15. Дайте методичний аналіз теми «Визначений інтеграл та його застосування».

ОРІЄНТОВНИЙ ПЕРЕЛІК ПРОЄКТІВ З МАТЕМАТИКИ, СПРЯМОВАНИХ НА ФОРМУВАННЯ КОМПЕТЕНТНОСТІ ПРОДУКТИВНОЇ ТВОРЧОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ У ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ

Клас	Тема, що вивчається	Теми проєктів, для позакласної роботи				Теми проєктів, для включення до уроку
		Дослідницькі	Інформаційні	Творчі	Практичні	
Алгебра 10 клас	Тригонометричні функції	«Метод математичної індукції», «Періодичні процеси та коливальний рух», «Спіралі», «Як створювались перші таблиці тригонометричних величин?»	«Історія розвитку тригонометрії», «Тригонометричні функції у мінімальному, максимальному та загальному прибутках»	«Тригонометрія в артилерії»	«Періодичний рух більярдної кулі», «Гвинтова лінія» (розробка макетів)	«Обернені тригонометричні функції»
Алгебра 10 клас	Показникові і логарифмічна функції	«Побудова ліній в полярних та сферичних системах координат», «Діофантові рівняння», «Обчислення прибутку на акцію за допомогою логарифма»	«Логарифмічна функція у банківській справі», «Логарифм і показникові функції у географії», «Зачатки логарифмічних таблиць та їх походження»	Розробка сайту «Ейлерики» (теореми та задачі, пов'язані з ім'ям Ейлера)	«Виведення ознак подільності у різних системах числення»	«Нестандартні способи розв'язання логарифмічних рівнянь»

Геометрія 10 клас	Аксиоми стереометрії та їх найпростіші наслідки	«Геометрія задач лінійного програмування», «Альбрехт Дюрер та наближена побудова многокутників»	«Геометрія Лобачевського», «Евклідова геометрія»	«Геометрія на папері», «Математичні прислів'я»	Розробка електронного посібника «Ілюстровані кросворди з математики»	«Аксиоми елементарної геометрії»
Алгебра 11 клас	Інтеграл та його застосування	«Фізичні задачі, які приводять до диференційний рівнянь», «Застосування визначеного інтеграла в економіці», «Наближене обчислення інтегралів: формули прямокутників, трапецій та парабол»	«Алгебра та початки аналізу у плануванні виробництва», «Інтегрування частинами. Теорема про середнє значення», «Ніколо Тарталья та Фіорі – чому стали ворогами через кубічне рівняння?»	Свято «Дні Європи в математичній країні», «Розробка контролюючої програми по формулам тригонометрії та похідних»	Розробка збірки задач на рух, «Розв'язання задач на суміші та процентний склад», «Обчислення дуги плоскої кривої»	«Задачі механічного походження», «Обчислення вигоди споживачів та виробників»
Геометрія 11 клас	Тіла обертання	«Різноманітність геометричних форм у різних архітектурних стилях»	«Математики Одещини»	«Колекція софізмів, неможливих математичних об'єктів та цікавих чисел»	«Побудова креслень тіл обертання, які перерізано площиною»	«Вивчення перерізів в стереометрії за допомогою комп'ютера»

**РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРОЄКТІВ НА
УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ.**

Тип уроку	Тип проекту	Форма презентації результатів виконання проекту
Урок засвоєння нових знань	Інформаційний Дослідницький	Доповідь, презентація, аналіз, порівняльний аналіз
Урок формування навичок і вмінь	Інформаційний Дослідницький Творчий	Доповідь, презентація, аналіз, порівняльний аналіз, виготовлення газет, журналів, буклетів, довідників
Урок узагальнення і систематизації знань	Інформаційний Дослідницький Творчий	Доповідь, презентація, аналіз, порівняльний аналіз, виготовлення газет, журналів, буклетів, довідників, розробка збірки, е-посібника, навчального посібника, сайту, відеоролику
Урок практичного застосування знань, умінь і навичок	Творчий Практичний	Виготовлення моделі, плакатів, макетів, виставка робіт, газет, журналів, буклетів, довідників, розробка збірки, е-посібника, навчального посібника, сайту, відеоролику, рольова гра, бізнес-план, реклама
Урок контролю і корекції знань, умінь і навичок	Дослідницький Творчий	Доповідь, презентація, аналіз, порівняльний аналіз, виготовлення газет, журналів, буклетів, довідників, розробка збірки, е-посібника, навчального посібника, сайту, відеоролику

КОНСПЕКТ УРОКУ У ВИГЛЯДІ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЄКТУ НА ТЕМУ «РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РІЗНИМИ МЕТОДАМИ»

Проект «Розв'язування ірраціональних рівнянь різними методами» полягає у самостійному опрацюванні методів розв'язання рівнянь.

УРОК-ПРОЄКТ

Тема. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РІЗНИМИ МЕТОДАМИ

Мета:

Навчальна:

- узагальнити і систематизувати знання, здобуті учнями в процесі розв'язування ірраціональних рівнянь;
- провести корекцію знань і вмінь учнів;
- ознайомити з нестандартними способами розв'язування ірраціональних рівнянь.

Розвиваюча:

- розвивати способи і прийоми мислення, індивідуальні здібності учнів, їх пізнавальні інтереси;
- навички колективної та групової роботи;
- уміння використовувати сформовані знання, навички й уміння в нових ситуаціях.

Виховна:

- виховувати розумову культуру;
- культуру усного та писемного мовлення та міжособистісного спілкування;
- працьовитість, старанність, охайність ведення записів;
- уміння об'єктивно оцінювати свої результати та результати інших.

Тип уроку: урок узагальнення і систематизації знань, умінь і навичок

Формувати компетентності (на основі ключових компетентностей, визначених в Державному стандарті базової середньої освіти (2020):

- 1) вільне володіння державною мовою (здійснювати комунікацію в усній та письмовій формі);

- 2) математичну компетентність (розвиток та застосування математичних знань);
- 3) Інформаційно-комунікаційну компетентність (безпечне застосування інформаційно-комунікаційні засоби в навчанні з дотриманням академічної доброчесності);
- 4) навчання впродовж життя (визначати ресурси для розвитку компетентностей, знаходити можливості для навчання та саморозвитку);
- 5) громадянські та соціальні компетентності (виявлення поваги до інших, толерантність уміння конструктивно співпрацювати);
- б) підприємливість і фінансова грамотність (здатність до активної участі в житті суспільства, керування власним життям і кар'єрою)

Задачі:

- формулювати означення кореня n -го степеня, властивості коренів;
- обчислювати, оцінювати та порівнювати значення виразів, які містять корені;
- розв'язувати ірраціональні рівняння;
- застосовувати властивості функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь.

Обладнання: дошка, роздатковий матеріал для учнів, мультимедійні засоби, презентація.

Рекомендації до підготовки і проведенню уроку:

Такий урок доцільно проводити в класах з поглибленим вивченням математики або на факультативному занятті і відвести на нього 2 години.

Підготовка до уроку може тривати до двох тижнів. Учитель заздалегідь оголошує тему, пропонує список рекомендованої літератури. Протягом усього часу вчитель проводить консультації: допомагає визначитись із літературою, розібратися у складному матеріалі, пояснює розв'язування рівнянь тощо.

Під час уроку вдало поєднується використання ІКТ (створення презентацій, онлайн-розв'язники, відеоматеріали, тощо) та інтерактивних методів навчання. Учитель об'єднує клас в чотири групи. Кожній групі доручає конкретне завдання – розібратися у способі розв'язування певного ірраціонального рівняння. На уроці біля дошки відповідатиме лише один представник від кожної групи (за вибором учителя).

Хто буде захищати роботу, учні не знають. Тому всі вони намагаються старанно виконувати домашнє завдання, за потребою відвідують консультації.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ МОМЕНТ.

Добрий день, шановні друзі!

*Проникаючи в зоряні далі,
В таємниці земної кори,
Математика всіх закликає:
Ти міркуй, фантазуй і твори!*

Міркувати, творчо працювати ми будемо над темою «**Розв'язування ірраціональних рівнянь різними методами**».

(вчитель оголошує мету та структуру уроку)

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ.

1). Під час підготовки до уроку кожна група отримала завдання розв'язати рівняння $\sqrt[3]{8x+4} - \sqrt[3]{8x-4} = 2$ різними способами. Один учень із кожної групи пояснює хід розв'язування (*розв'язки заздалегідь підготовлені на дошці*).

1-й спосіб: Піднесення обох частин рівняння до куба, використовуючи формулу: $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$.

Піднесемо обидві частини рівняння до кубу:

$$8 - 3 \cdot \sqrt[3]{8x+4} \cdot \sqrt[3]{(8x-4)(\sqrt[3]{8x+4} - \sqrt[3]{8x-4})} = 8,$$

Враховуючи, що за умовою

$$\sqrt[3]{8x+4} - \sqrt[3]{8x-4} = 2,$$

дістанемо рівняння:

$$-3 \cdot 2 \sqrt[3]{8x+4} \cdot \sqrt[3]{8x-4} = 0,$$

$$x = -\frac{1}{2},$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

Перевірка:

1) Якщо $x = -\frac{1}{2}$, то

$$\sqrt[3]{8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4} - \sqrt[3]{8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4} = 0 - \sqrt[3]{-8} = 2.$$

2) Якщо $x = \frac{1}{2}$, то

$$\sqrt[3]{8 \cdot \frac{1}{2} + 4} - \sqrt[3]{8 \cdot \frac{1}{2} - 4} = \sqrt[3]{8} - 0 = 2.$$

2-й спосіб: Введенням однієї допоміжної змінної.

Нехай $\sqrt[3]{8x + 4} = u$, звідси

Тоді дістанемо таке рівняння:

$$u - \sqrt[3]{u^3 - 8} = 2,$$

$$\sqrt[3]{u^3 - 8} = u - 2.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до куба:

$$u^3 - 8 = (u - 2)^3,$$

$$u^3 - 8 = u^3 - 3u^2 \cdot 2 + 3u \cdot 4 - 8,$$

$$u^3 - 8 = u^3 - 6u^2 + 12u - 8,$$

$$u = 0 \quad \text{або} \quad u = 2.$$

Повертаючись до заміни, маємо:

$$\sqrt[3]{8x + 4} = 0 \quad \text{або} \quad \sqrt[3]{8x + 4} = 2,$$

$$x = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Перевіркою переконуємося, що обидва значення змінної x є коренями даного рівняння.

3-й спосіб: Введенням двох допоміжних змінних.

Нехай $\sqrt[3]{8x + 4} = u$, $\sqrt[3]{8x - 4} = w$.

Тоді дістанемо рівняння:

$$u - w = 2.$$

Легко бачити, що

$$u^3 - w^3 = 8.$$

Тому маємо систему:

$$\begin{cases} u - w = 2, \\ u^3 - w^3 = 8. \end{cases}$$

Її можна розв'язувати такими способами: підстановкою, перетворенням другого рівняння системи, піднесенням першого рівняння системи до кубу.

Розв'яжемо її способом підстановки.

З першого рівняння маємо: $u = 2 + w$. Підставимо значення u в друге рівняння:

$$(2 + w)^3 - w^3 = 8,$$

$$8 + 12w + 6w^2 + w^3 - w^3 = 8,$$

$$w(2 + w) = 0,$$

$$w = 0 \quad \text{або} \quad w = -2.$$

Повертаючись до заміни, маємо:

$$\sqrt[3]{8x - 4} = 0 \quad \text{або} \quad \sqrt[3]{8x - 4} = -2,$$

$$x = \frac{1}{2}, \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Перевіркою переконуємося, що обидва значення змінної x є коренями даного рівняння.

4-й спосіб: Графічний.

Запишемо рівняння у вигляді:

$$\sqrt[3]{8 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)} - \sqrt[3]{8 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)} = 2,$$

$$2 \cdot \sqrt[3]{\left(x + \frac{1}{2}\right)} - 2 \cdot \sqrt[3]{\left(x - \frac{1}{2}\right)} =$$

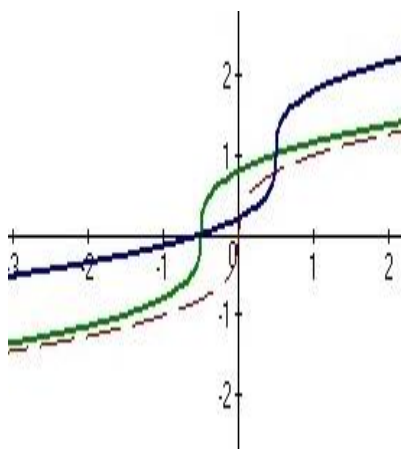
$$\sqrt[3]{\left(x + \frac{1}{2}\right)} - \sqrt[3]{\left(x - \frac{1}{2}\right)} = 1,$$

$$\sqrt[3]{\left(x + \frac{1}{2}\right)} = 1 + \sqrt[3]{\left(x - \frac{1}{2}\right)}.$$

Щоб розв'язати це рівняння графічно, треба знайти абсциси точок перетину графіків функцій

$$y = \sqrt[3]{\left(x + \frac{1}{2}\right)} \quad \text{та} \quad y = 1 + \sqrt[3]{\left(x - \frac{1}{2}\right)}.$$

Побудову графіків указаних функцій будемо виконувати за допомогою геометричних перетворень, зокрема паралельного перенесення графіка $y = \sqrt[3]{x}$.



З графіка бачимо, що $x \approx \frac{1}{2}$ та $x \approx -\frac{1}{2}$.

Перевіркою переконуємося, що ці числа є коренями рівняння.

Відповідь: $-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$.

2). Учням по варіантах пропонується розв'язати рівняння:

1 варіант: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} = 2$;

2 варіант: $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1$.

Розв'язання

1 варіант: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} = 2$;

2 варіант: $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1$.

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$.

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

$$3x+1+x+1-2\sqrt{(3x+1)(x+1)} = 4,$$

$$\sqrt{(3x+1)(x+1)} = 2x-1,$$

$$3x^2 + 4x + 1 = 4x^2 - 4x + 1,$$

$$x^2 - 8x = 0,$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 8. \end{cases}$$

Перевірка: $x=0$ – сторонній корінь

$$1 - 1 \neq 2,$$

$$x = 8: \quad 5 - 3 = 2.$$

$$\text{В.: } x = \{8\}.$$

$$x+2+2x-3-2\sqrt{(x+2)(2x-3)} = 1,$$

$$2\sqrt{(x+2)(2x-3)} = 3x-2,$$

$$8x^2 + 4x - 24 = 9x^2 - 12x + 4,$$

$$x^2 - 16x + 28 = 0,$$

$$\begin{cases} x = 14, \\ x = 2. \end{cases}$$

Перевірка: $x=14$ – сторонній корінь

$$4 - 5 \neq 1,$$

$$x = 2: \quad 2 - 1 = 1.$$

$$\text{В.: } x = \{2\}$$

Слід зупинитися на розв'язку, у якому працюють з ОДЗ. Наголосити, що при піднесенні до парного степеня обох частин рівняння, межі ОДЗ – розширюються. І тому

необхідно виконати перевірку.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ.

Запитання до класу: (метод незакінчених речень)

- 1) Ірраціональним рівнянням називається.....(рівняння, що містить змінну під знаком кореня або змінна із дробовим показником).
- 2) Розв'язати рівняння означає(знайти усі його корені або довести, що їх немає).
- 3) Основними методами розв'язування ірраціональних рівнянь є(через ОДЗ, піднесення обох частин рівняння до одного і того самого степеня; заміна змінної; графічний і т.д.).
- 4) При піднесенні обох частин рівняння до **непарного** степеня завжди отримуємо(рівняння, рівносильне даному).
- 5) При піднесенні обох частин рівняння до **парного** степеня завжди отримуємо(рівняння – наслідок).

Отже, давайте пригадаємо теореми рівносильності.

$$1. \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$2. \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

$$3. \sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) = 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$4. \sqrt[3]{f(x)} \cdot g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

$$5. \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

$$6. \sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^3(x).$$

IV. ЗАКРІПЛЕННЯ ТА ВІДПРАЦЮВАННЯ УМІНЬ І НАВИЧОК.

1. Усно.

- 1) Знайти корені рівняння.

$\sqrt{x} = -2$	$\sqrt[3]{x} = -2$	$\sqrt{x^2} = 9$
$\sqrt{x+4} = 5$	$\sqrt{1-x} = 2$	$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{7}$
$\sqrt{ x+1 } = 0$	$\sqrt{x-10} = 10-x$	$\sqrt{5+\sqrt{x-1}} = -4$

2) Не розв'язуючи рівняння з'ясувати, чи може воно мати розв'язки.

$\sqrt{x+3} + 1 = 0$	$\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = -2$	$\sqrt{3x^2 - 2x + 3} = -4$
$\sqrt{x-4} + \sqrt{4-x} = 5$	$\sqrt{x-5} + \sqrt{2x-1} = 2$	$\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x-1} = -3$

2. Розв'язування вправ.

У кожного на парті роздатковий матеріал. Учні за бажанням виходять до дошки і розв'язують ірраціональні рівняння, коментуючи розв'язок. Всі працюють на місцях. При потребі аналізуємо детально. У кожного учня індивідуальна **карточка самоконтролю**, в якій ведеться облік, що зрозуміло, а над чим ще потрібно попрацювати).

1. Розв'язати ірраціональні рівняння:

1) $x - 5 + \sqrt{x^2 - 14x + 13} = 0$;

2) $\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2} = 4$;

3) $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{-2x}$;

4) $(x^2 - 9)\sqrt{-15 + 8x - x^2} = 0$;

2. Розв'язати рівняння шляхом введення нової змінної:

1) $\sqrt{\frac{3-x}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{3-x}} = 4\frac{1}{4}$;

2) $\frac{\sqrt[3]{x+1}}{2} + \frac{9}{\sqrt[3]{x+2}} = 4$;

3) $\sqrt[3]{x+6} + \sqrt{x+2} = 4$;

Карточка самоконтролю та бланк відповідей мають такий вигляд:

Ірраціональні рівняння

КАРТОЧКА САМОКОНТРОЛЮ	БЛАНК ВІДПОВІДЕЙ																																																																																																						
Прізвище _____	Прізвище <input style="width: 100px;" type="text"/> Ім'я <input style="width: 100px;" type="text"/>																																																																																																						
	Дата заповнення <input style="width: 100px;" type="text"/> Клас <input style="width: 100px;" type="text"/>																																																																																																						
	Варіант <input style="width: 100px;" type="text"/>																																																																																																						
	Завдання 1.1-1.4 Завдання 2.1																																																																																																						
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">Зрозуміло</th> <th style="text-align: center;">Не зрозуміло</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><i>Домашнє завдання</i></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td><i>Завдання для самоконтролю</i></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td><i>Усне розв'язування</i></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td><i>Вправи 1.1</i></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><i>1.2</i></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><i>1.3</i></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><i>1.4</i></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><i>2.1</i></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><i>2.2</i></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><i>2.3</i></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td><i>Самостійна робота</i></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td><i>Нестандартні методи</i></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><i>Примітка</i></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		Зрозуміло	Не зрозуміло	<i>Домашнє завдання</i>			<i>Завдання для самоконтролю</i>			<i>Усне розв'язування</i>			<i>Вправи 1.1</i>			<i>1.2</i>			<i>1.3</i>			<i>1.4</i>			<i>2.1</i>			<i>2.2</i>			<i>2.3</i>			<i>Самостійна робота</i>			<i>Нестандартні методи</i>			<i>Примітка</i>			<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">А</th> <th style="text-align: center;">Б</th> <th style="text-align: center;">В</th> <th style="text-align: center;">Г</th> <th style="text-align: center;">Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">1.1</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1.2</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1.3</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1.4</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">А</th> <th style="text-align: center;">Б</th> <th style="text-align: center;">В</th> <th style="text-align: center;">Г</th> <th style="text-align: center;">Д</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">3</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">4</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		А	Б	В	Г	Д	1.1						1.2						1.3						1.4							А	Б	В	Г	Д	1						2						3						4					
	Зрозуміло	Не зрозуміло																																																																																																					
<i>Домашнє завдання</i>																																																																																																							
<i>Завдання для самоконтролю</i>																																																																																																							
<i>Усне розв'язування</i>																																																																																																							
<i>Вправи 1.1</i>																																																																																																							
<i>1.2</i>																																																																																																							
<i>1.3</i>																																																																																																							
<i>1.4</i>																																																																																																							
<i>2.1</i>																																																																																																							
<i>2.2</i>																																																																																																							
<i>2.3</i>																																																																																																							
<i>Самостійна робота</i>																																																																																																							
<i>Нестандартні методи</i>																																																																																																							
<i>Примітка</i>																																																																																																							
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																		
1.1																																																																																																							
1.2																																																																																																							
1.3																																																																																																							
1.4																																																																																																							
	А	Б	В	Г	Д																																																																																																		
1																																																																																																							
2																																																																																																							
3																																																																																																							
4																																																																																																							
	Завдання 3.1 _____																																																																																																						
	Завдання 3.2 _____																																																																																																						
	Оцінка <input style="width: 50px;" type="text"/>																																																																																																						

V. ПЕРЕВІРКА ЗАСВОЄННЯ ЗНАНЬ І ВМІНЬ УЧНІВ.

Самостійна робота у вигляді завдань ЗНО на два варіанти.

Самостійна робота

Варіант 1

Завдання 1.1-1.4 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на Вашу думку, відповідь і позначте її у бланку.

1.1. Вказати рівняння, яке не має коренів:

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{x+1} = -2$	$\sqrt{x+1} = -2$	$\sqrt{x+4} + \sqrt{x} = 2$	$\sqrt{x+1} = 0$	$-\sqrt{x+1} = -\sqrt{x}$

1.2. Сума коренів рівняння $x - 6 = \sqrt{3-x}$ дорівнює:

А	Б	В	Г	Д
3	5	7	9	рівняння не має коренів

1.3. Вказати проміжок, якому належить більший корінь рівняння $\sqrt[3]{x^2 - 28} = 2$.

А	Б	В	Г	Д
(- 6; - 3)	(- 3; 0)	(0; 3)	(3; 7)	інша ВІДПОВІДЬ

1.4. Корінь рівняння $\frac{x+1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{x-1}$ є дільником числа:

А	Б	В	Г	Д
56	42	33	26	15

Завдання 2.1 передбачає установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в *бланку* на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

2.1. Установити відповідність між заданими рівняннями (1-4) та множинами їх коренів (А-Д).

- | | |
|--------------------------|---------------|
| 1. $\sqrt{x-2} = -2$ | А { -64 } |
| 2. $\sqrt{x^2} = 16$ | Б { 2 } |
| 3. $\sqrt[4]{-4x} = 4$ | В \emptyset |
| 4. $(x-1)\sqrt{x-2} = 0$ | Г { 16 } |
| | Д { -16; 16 } |

Розв'яжіть завдання 3.1 та 3.2. Одержані відповіді запишіть у *бланку*.

3.1. Розв'язати рівняння: $x^2 + 3x + 2 = 2\sqrt{x^2 + 3x + 5}$.

3.2. Розв'язати рівняння: $(x^2 - 6x + 5)\sqrt{2x + 8 - x^2} = 0$.

Варіант 2

Завдання 1.1-1.4 мають по п'ять варіантів відповіді, серед яких лише ОДИН ПРАВИЛЬНИЙ. Виберіть правильну, на Вашу думку, відповідь і позначте її у *бланку*.

1.1. Вказати рівняння, яке не має коренів:

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[5]{x-1} = -2$	$1 - \sqrt{x} = 0$	$\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 0$	$\sqrt{x-5} + \sqrt{4-x} = 2$	$-\sqrt{2x+1} = -\sqrt{x}$

1.2. Корінь рівняння $\sqrt{x+1} = x-5$ належить проміжку:

А	Б	В	Г	Д
[4;5]	[5;6]	[6;7]	[7;8]	рівняння не має

				коренів
--	--	--	--	---------

1.3. Сума коренів рівняння $x - 2 = \sqrt[3]{x^2 - 8}$ дорівнює:

А	Б	В	Г	Д
3	5	7	9	11

1.4. Найбільший дільник кореня рівняння $\sqrt{\sqrt{x^2 - 16} + x} = 2$ дорівнює:

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

Завдання 2.1 передбачає устанавлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки в *бланку* на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

2.1. Установити відповідність між заданими рівняннями (1-4) та множинами їх коренів (А-Д).

1. $\sqrt{\frac{x-2}{x-6}} = 0$ А $\{-32\}$

2. $\sqrt{x} - 4 = 0$ Б $\{2\}$

3. $\sqrt[3]{-2x} = 4$ В $\{-2; 1\}$

4. $(x+2)\sqrt{x-1} = 0$ Г $\{16\}$

Д $\{1\}$

Розв'яжіть завдання 3.1 та 3.2. Одержані відповіді запишіть у *бланку*.

3.1. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$.

3.2. Розв'язати рівняння: $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{5x - 2 - 2x^2} = 0$.

(Результати заносяться у бланк відповідей)

(Визначається експертна комісія у складі двох учнів, які перевіряють роботи, виставляють оцінки та оголошуються учням. Учні, що працювали біля дошки пояснюють розв'язання рівнянь)

VI. РЕФЛЕКСІЯ

Сьогодні на уроці ми використовували нам уже відомі такі способи

розв'язування ірраціональних рівнянь:

- 1) піднесення обох частин рівняння до одного степеня;
- 2) заміна змінної в рівнянні;
- 3) використання властивостей функції $y = \sqrt[n]{x}$;
- 4) графічний метод.

Крім названих методів розглянули ще нестандартні способи розв'язування ірраціональних рівнянь.

Кожен учень робить самооцінку вмінь і навичок застосування різних методів розв'язування ірраціональних рівнянь, а також працює із карточкою самоконтролю, де фіксує позитивні та негативні результати певних етапів уроку.

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ.

Розв'язати рівняння:

$$1) \quad \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x^2 - x}} - \sqrt{\frac{x^2 - x}{x^2 + 2}} = \frac{8}{3};$$

$$2) \quad \sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 + 3} = 3x;$$

$$3) \quad \sqrt{x - 2 + \sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 6}} = 5\sqrt{2}.$$

VIII. ПІДСУМОК УРОКУ.

Вчитель разом з учнями підводять підсумки уроку та роблять висновки, аналізуючи свою картку самоконтролю.

МЕТОДИЧНИЙ АНАЛІЗ ТЕМИ «ВЕКТОРИ» (виконала студентка 51 М Цісар К.А., 2023 рік)

1. Місце і значення теми, зв'язки з іншими темами.

Місце і значення теми "Вектори" в навчальній програмі університету залежить від спеціальності та рівня освіти, який здобувають студенти. Тема "Вектори" є важливою складовою математичного курсу у багатьох дисциплінах.

Ця тема пов'язана з такими предметами **в математиці**:

- «Лінійна алгебра» - векторні простори, підпростори, базис, лінійна незалежність векторів;

- «Геометрія» - описання точок, відрізків, відстань між точками, кут між прямими, перпендикулярність та паралельність прямих;

- «Аналітична геометрія» - встановлення рівняння прямих, площин, просторових та кривих поверхонь, розв'язання задач на взаємне розташування прямих, площин, точок та фігур у просторі;

- «Диференціальна та інтегральна математики» - градієнт векторного поля для визначення напрямку та швидкості зміни функції, векторна інтегральна теорема Стокса, граничні теореми Гауса-Остроградського.

Крім того, існують і **міжпредметні зв'язки** цієї теми з:

- Фізикою – вивчення фізичних величин: сила, швидкість, прискорення, момент сили. Вектори дозволяють правильно розраховувати числову величину і напрямок фізичних величин при моделюванні;

- Інженерними дисциплінами (механіка, електроніка, машинобудування) – визначення сили, напруги, струми та інші фізичні величини, що виникають у технічних системах;

- Комп'ютерними науками – робота з графічними об'єктами, обробка зображень, комп'ютерна графіка, робота штучного інтелекту;

- Астрономією – опис руху планет, зірок, комет та інших космічних об'єктів.

Вивчення теми "Вектори" допомагає студентам розвинути математичні навички, геометричне мислення, абстрактне мислення та підготуватися до подальшого вивчення більш складних математичних і наукових концепцій.

2. Базові знання і уміння студентів перед вивченням теми.

Тема «Вектори на площині» вже розглядалася учнями в на початку 9 класу, тому вони вже мають базові знання про вектори. Учні повинні розуміти:

✓ Поняття вектора, початок і кінець вектора;

✓ Види векторів (нульовий вектор, колінеарні вектори, співнапрямлені та протилежно напрямлені вектори, рівні вектори);

- ✓ Координати вектора (вміти знаходити координати вектора за координатами початку та кінця вектора, довжину вектора);
- ✓ Вміння виконувати лінійні операції з векторами (сума, різниця, добуток на число);
- ✓ Правило трикутника, правила паралелограма;
- ✓ Скалярний добуток векторів (в координатній формі, скалярний квадрат, кут між векторами);
- ✓ Умова перпендикулярності векторів.

Крім того студенти повинні бути знайомими з темами «Прямокутна декартова система координат», «Тригонометрія» та «Розв'язування рівнянь».

3. Структура теми.

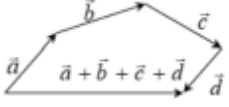
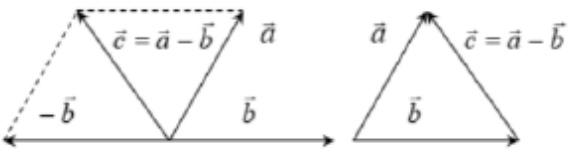
Тема складається з чотирьох основних розділів:

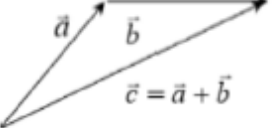
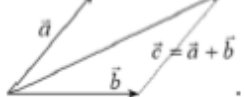
- Поняття про вектор, лінійні операції над векторами
- Скалярний добуток векторів
- Векторний добуток векторів
- Мішаний добуток векторів

Пропоную **докладний список** порядку вивчення матеріалу з теми: «Вектори» для спеціальності «Розробка програмного забезпечення»:

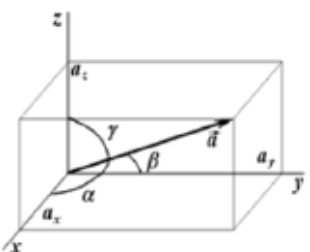


4. Методичні особливості навчання основним поняттям теми. Основні поняття:

Сума кількох векторів	Додавання кількох векторів здійснюється за правилом замикання ланцюжка векторів.	
Різниця векторів \vec{a} і \vec{b}	Називається сума вектора \vec{a} і вектора $(-\vec{b})$, протилежного вектору \vec{b} . $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$	

Поняття	Означення	
Вектор \overrightarrow{AB}	це напрямлений відрізок із початком у точці A і кінцем у точці B . Вектори позначаються як двома великими літерами, так і однією малою зі стрілкою, наприклад, \overrightarrow{AB} , \vec{a} .	
Довжина (модуль) вектора $ \overrightarrow{AB} $	Довжину відрізка, що зображає вектор \overrightarrow{AB} .	
Нульовий вектор, $\vec{0}$	Вектор, довжина якого дорівнює 0, $ \vec{a} = 0$.	
Одиничний вектор, орт	Вектор \vec{a} називається одиничним, якщо $ \vec{a} = 1$.	
Колінеарні вектори	Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, $\vec{a} \parallel \vec{b}$.	
Компланарні вектори	Вектори, які паралельні одній площині.	
Рівні вектори	Вектори, які мають однакові довжини та однакові напрями.	
Добуток вектора \vec{a} на число α , $\alpha \cdot \vec{a}$	Називається вектор $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ з довжиною $ \vec{b} = \alpha \vec{a} $ і напрямом, який збігається з вектором \vec{a} , якщо $\alpha > 0$, і протилежним напрямку \vec{a} , при $\alpha < 0$.	
Сума векторів \vec{a} і \vec{b} (правило трикутника)	Називається вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, початок якого збігається з початком вектора \vec{a} , а кінець – з кінцем вектора \vec{b} , за умови, що початок вектора \vec{b} збігається з кінцем вектора \vec{a} .	
Сума векторів \vec{a} і \vec{b} (правило паралелограма)	вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b}	

Лінійна незалежність векторів:

Лінійна комбінація векторів	Називається вираз виду, $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_n\vec{a}_n$, де c_1, c_2, \dots, c_n - числа, а $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ - вектори.		
Лінійно незалежні вектори	Називаються вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, якщо їхня лінійна комбінація дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.		
Базис	Упорядкована сукупність n лінійно незалежних векторів n -вимірного простору R^n .		
Базисом на прямій R^1	Базисом на площині R^2	Базисом в просторі R^3	
називається будь який ненульовий вектор.	називаються два упорядковані неколінеарні вектори	називаються три упорядковані некомпланарні вектори	
Ортонормований базис	Базис, вектори якого взаємно перпендикулярні та одиничні.		
Розклад вектора за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	Подання вектора \vec{a} у вигляді лінійної комбінації базисних векторів $\vec{a} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$.		
Координати вектора	Якщо розклад вектора $\vec{a} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$, то c_1, c_2, c_3 - координати вектора. $\vec{a} = (c_1, c_2, c_3)$		
Напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$	<p>Називаються косинуси кутів α, β, γ, які утворює вектор з координатними осями.</p> $\cos \alpha = \frac{a_x}{ \vec{a} }, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{ \vec{a} }, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{ \vec{a} }$ <p>Вони задовольняють умову:</p> $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$		

Добуток векторів:

Скалярним добутком векторів \vec{a} і \vec{b}	<p>Називається число, що дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними.</p> $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi).$
Права (ліва) трійка векторів	Упорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо після зведення до спільного початку найкоротший поворот від вектора \vec{a} до вектора \vec{b} , що спостерігається з кінця вектора \vec{c} , здійснюється проти обернення стрілки (за стрілкою) годинника.
Векторним добутком векторів \vec{a} і \vec{b}	<p>Називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, що задовольняє умови:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) довжина вектора \vec{c} дорівнює добутку довжин векторів \vec{a} і \vec{b} на синус кута між ними $\vec{c} = \vec{a} \vec{b} \sin \varphi$; 2) вектор \vec{c} перпендикулярний кожному із векторів \vec{a} і \vec{b}, тобто $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$; 3) вектор \vec{c} напрямлений так, що вектори \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} утворюють праву трійку.
Мішаним добутком векторів \vec{a}, \vec{b} і \vec{c}	Називається число, яке дорівнює векторному добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ помноженому скалярно на вектор \vec{c} : $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

5. Методичні особливості навчання основним твердженням теми.

Істинні твердження лінійної незалежності

1. Будь-які два колінеарні вектори лінійно залежні.
2. Будь-які три компланарні вектори лінійно залежні.
3. Будь-які чотири вектори у тривимірному просторі лінійно залежні.

	Тримірний простір	n-вимірний простір
Координати вектора	якщо задані координати початку й кінця вектора \vec{AB} $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$	якщо задані координати початку й кінця вектора \vec{AB} $A(x_1, x_2, \dots, x_n), B(y_1, y_2, \dots, y_n)$, то $\vec{AB} = (y_1 - x_1; y_2 - x_2; \dots; y_n - x_n)$
Відстань між двома точками	$ \vec{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$	$ \vec{AB} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$

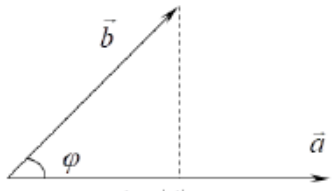
Лінійні операції над векторами		
	Тримірний простір	n-вимірний простір
	Нехай дано вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$	Нехай дано вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ та $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$
Добуток на число α	$\alpha\vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$	$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$
Сума векторів \vec{a} і \vec{b}	$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$	$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$
Різниця векторів \vec{a} і \vec{b}	$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$	$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$
Довжина вектора	$ \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$	$ \vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$
Координати середини відрізка т.М	$M = \left(\frac{a_x + b_x}{2}; \frac{a_y + b_y}{2}; \frac{a_z + b_z}{2} \right)$	$M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}; \dots; \frac{a_n + b_n}{2} \right)$

Координати точки, що поділяє відрізок у заданому відношенні

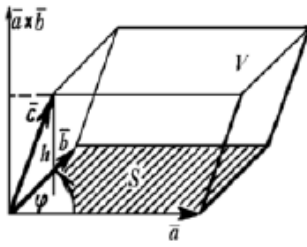
Координати точки $M(x, y, z)$, яка поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні $\alpha = \frac{M_1M}{MM_2}$, визначаються через координати точок $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

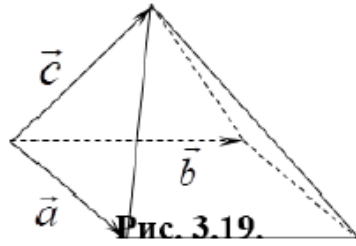
Вид добутку векторів	Алгебраїчні властивості	Геометричні властивості	В ортонормованому базисі
Скалярний добуток векторів	<ol style="list-style-type: none"> $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$ $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \vec{a} ^2 \geq 0$ 	<ol style="list-style-type: none"> $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ – умова перпендикулярності. $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow \varphi$ – гострий кут $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \varphi$ – тупий кут 	Нехай дано вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тоді $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
Деякі важливі формули скалярного добутку	<ol style="list-style-type: none"> косинус кута між векторами \vec{a} і \vec{b}: $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} } = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$ 		

	<p>2. Необхідна і достатня умова колінеарності двох векторів: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$</p> <p>3. Проекція вектора \vec{b} на вектор \vec{a} $\text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{b} \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} } = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$ $\text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{a}_0 \cdot \vec{b}$, де $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{ \vec{a} }$</p>	 <p>$\text{Пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{b} \cos \varphi$</p>	
<p><u>Векторний добуток векторів</u></p>	<p>1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ 2. $\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b})$ 3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ 4. $\vec{a} \times \vec{a} = 0$</p>	<p>1. $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ – умова колінеарності двох векторів 2. $S = \vec{a} \times \vec{b}$ – площа паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b}. 3. $S = \frac{1}{2} \vec{a} \times \vec{b}$ – площа трикутника, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b}.</p>	<p>Нехай дано вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тоді</p> $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$
<p><u>Мішаний добуток векторів</u></p>	$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}$	<p>1. Мішаний добуток некопланарних векторів \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} дорівнює модулю об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. $V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$</p> <p>2. Об'єм чотирикутної піраміди: $V = \frac{1}{3} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$</p> <p>3. Об'єм трикутної піраміди: $V = \frac{1}{6} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$</p>	<p>Нехай дано вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, та $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, тоді</p> $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

<p>Деякі важливі формули мішаного добутку</p>	<p>1. Необхідна і достатня умова компланарності трьох векторів: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow$ вектори \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} – компланарні. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ і \vec{c} – компланарні.</p> <p>2. Якщо $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$ – трійка векторів \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} – права; Якщо $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$ – трійка векторів \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} – ліва.</p>
---	--



Паралелепіпед



Чотирикутна піраміда

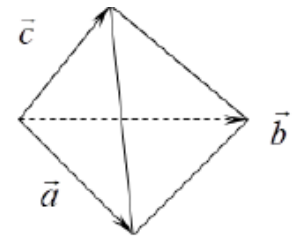


Рис. 3.20.
Трикутна піраміда

6. Методичні особливості навчання розв'язуванню основних видів вправ теми. Лінійна залежність векторів

Приклад 1. Визначити, чи є лінійно залежними вектори: $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (-1, 5, 6)$, $\vec{c} = (5, 1, -4)$.

► Вектори лінійно залежні, якщо існують такі, одночасно не рівні нулю числа c_1, c_2, c_3 , що $c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c} = \vec{0}$.

Маємо:

$$\begin{aligned} c_1(2, 3, 1) + c_2(-1, 5, 6) + c_3(5, 1, -4) &= (0, 0, 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2c_1 - c_2 + 5c_3, 3c_1 + 5c_2 + c_3, c_1 + 6c_2 - 4c_3) &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Звідси отримаємо систему лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} 2c_1 - c_2 + 5c_3 = 0, \\ 3c_1 + 5c_2 + c_3 = 0, \\ c_1 + 6c_2 - 4c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -40 - 1 + 90 - (25 + 12 + 12) = 0.$$

Однорідна система має ненульові розв'язки, якщо її визначник дорівнює нулю. Отже, вектори лінійно залежні. ■

Базис вектора

Приклад 2. Показати, що вектори $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 3, 1)$, $\vec{c} = (1, 2, 1)$ утворюють базис у R^3 і знайти координати вектора $\vec{d} = (3, 7, 5)$ у цьому базисі.

► Вектори \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} утворюють базис, якщо вони лінійно незалежні, тобто якщо рівність $c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c} = \vec{0}$ можлива лише при $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Аналогічно прикладу 1 отримаємо однорідну систему:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 3, \\ 2c_1 + 3c_2 + 2c_3 = 7, \\ 3c_1 + c_2 + c_3 = 5, \end{cases} \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Визначник $\Delta \neq 0$ – система має лише нульовий розв'язок, вектори \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} лінійно незалежні й утворюють базис у просторі R^3 .

Розкладемо вектор \vec{d} за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{d} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases} &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim e_2 - 2e_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array} \right) \sim e_3 / (-2) \sim \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim e_3 - e_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim e_1 - e_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Лінійні операції з векторами

Приклад 3. Дано вектори $\vec{a} = (1, -2, 4)$, $\vec{b} = (3, 5, 6)$. Знайти $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

$$\blacktriangleright \vec{a} + \vec{b} = (1, -2, 4) + (3, 5, 6) = (1+3, -2+5, 4+6) = (4, 3, 10),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1, -2, 4) - (3, 5, 6) = (1-3, -2-5, 4-6) = (-2, -7, -2),$$

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(1, -2, 4) - 3(3, 5, 6) = (2, -4, 8) - (9, 15, 18) = (-7, -19, -10). \blacksquare$$

Напрявні косинуси вектора

Приклад 4. Чи може вектор складати з координатними осями кути: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$?

\blacktriangleright Обчислимо косинуси кутів:

$$\cos \alpha = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2, \quad \cos \beta = \cos 135^\circ = -\sqrt{2}/2, \quad \cos \gamma = \cos 60^\circ = 1/2.$$

Сума квадратів напрямних косинусів дорівнює 1, тому:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1/2 + 1/2 + 1/4 = 5/4 \neq 1.$$

Вектор не може складати з координатними осями задані кути. \blacksquare

Поділ відрізка у заданому відношенні

Приклад 5. Знайти координати точки перетину медіан трикутника з вершинами

$$A(x_A, y_A, z_A), \quad B(x_B, y_B, z_B), \quad C(x_C, y_C, z_C).$$

\blacktriangleright Знайдемо координати точки D – середини відрізка BC :

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2}, \quad z_D = \frac{z_B + z_C}{2}.$$

Медіани трикутника перетинаються в точці M , яка поділяє відрізок AD у відношенні $\lambda = AM / MD = 2 / 1$. Координати точки M :

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_D}{1 + \lambda} = \frac{x_A + 2x_D}{1 + 2} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_D}{1 + \lambda} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3},$$

$$z_M = \frac{z_A + \lambda z_D}{1 + \lambda} = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}. \blacksquare$$

Приклад 6. Знайти координати кінців відрізка AB , який поділений на 3 рівні частини точками

$$P(1, 0, 3) \text{ і } Q(-1, 2, 6).$$

\blacktriangleright Точка P є серединою відрізка AQ , тому її координати:

$$x_P = \frac{x_A + x_Q}{2}, \quad y_P = \frac{y_A + y_Q}{2}, \quad z_P = \frac{z_A + z_Q}{2}.$$

Звідси знаходимо координати точки A :

$$x_A = 2x_P - x_Q = 2 \cdot 1 - (-1) = 3, \quad y_A = 2y_P - y_Q = 2 \cdot 0 - 2 = -2,$$

$$z_A = 2z_P - z_Q = 2 \cdot 3 - 6 = 0 \Rightarrow A(3, -2, 0).$$

Аналогічно знаходимо координати точки B :

$$x_B = 2x_Q - x_P = 2 \cdot (-1) - 1 = -3, \quad y_B = 2y_Q - y_P = 2 \cdot 2 - 0 = 4,$$

$$z_B = 2z_Q - z_P = 2 \cdot 6 - 3 = 9 \Rightarrow B(-3, 4, 9). \blacksquare$$

Скалярний добуток векторів

Приклад 7. Вектори \vec{a} і \vec{b} утворюють кут $\varphi = \pi/3$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$.

Знайти: 1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) \vec{a}^2 ; 3) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 4) $\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b}$.

► 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$;

2) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 2^2 = 4$;

3) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi + |\vec{b}|^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 = 19$;

4) $\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi = 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$. ■

Приклад 8. Дано вершини трикутника $A(1, -3, 0)$; $B(0, -1, -2)$; $C(-1, -2, 2)$. Визначити його внутрішній кут φ при вершині B .

► Знайдемо вектори $\vec{BA} = (1, -2, 2)$, $\vec{BC} = (-1, -1, 4)$ та їх довжини:

$$|\vec{BA}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3, \quad |\vec{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2} = 3\sqrt{2}.$$

За формулою (3.21) обчислимо косинус кута φ між векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 4}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ. \quad \blacksquare$$

Приклад 9. При якому m вектори $\vec{a} = (m, 3, -4)$, $\vec{b} = (-2, m, 1)$ взаємно перпендикулярні?

► Необхідна й достатня умова перпендикулярності двох векторів: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = -2m + 3m - 4 = m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4. \quad \blacksquare$$

Проекція вектора на вектор

Приклад 10. Дано три вектори $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (3, -4, 2)$, $\vec{c} = (8, -7, 2)$. Знайти $\text{Pr}_{2\vec{b}-\vec{c}}(\vec{a} + \vec{c})$.

► Введемо вектори:

$$\vec{d} = 2\vec{b} - \vec{c} = 2(3, -4, 2) - (8, -7, 2) = (-2, -1, 2),$$

$$\vec{g} = \vec{a} + \vec{c} = (1, 2, 3) + (8, -7, 2) = (9, -5, 5).$$

Обчислимо довжину й орт вектора \vec{d} :

$$|\vec{d}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3, \quad \vec{d}_0 = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

За формулою (3.23) знайдемо проекцію вектора $\vec{g} = \vec{a} + \vec{c}$ на вектор $\vec{d} = 2\vec{b} - \vec{c}$:

$$\text{Pr}_{2\vec{b}-\vec{c}}(\vec{a} + \vec{c}) = \text{Pr}_{\vec{d}} \vec{g} = \vec{g} \cdot \vec{d}_0 = 1 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) + 3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}. \quad \blacksquare$$

Векторний добуток векторів

Приклад 11. Знайти площу трикутника з вершинами $A(-1, -3, 0)$, $B(7, -13, 0)$, $C(-1, 1, -3)$ та довжину висоти h , опущеної з вершини B на сторону AC .

► Площа трикутника дорівнює половині модуля векторного добутку векторів

$$\overline{AB} = (8, -10, 0) \text{ і } \overline{AC} = (0, 4, -3).$$

$$\text{Оскільки } \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & -10 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 30\vec{i} + 24\vec{j} + 32\vec{k}, \text{ то}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{30^2 + 24^2 + 32^2} = \frac{\sqrt{2500}}{2} = 25 \text{ (од.}^2\text{)}.$$

З іншого боку, площу трикутника можна обчислити за формулою $S_{\Delta} = |\overline{AC}|h/2$, звідки знаходимо висоту трикутника:

$$h = \frac{2S_{\Delta}}{|\overline{AC}|} = \frac{50}{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2}} = 10. \blacksquare$$

Приклад 12. Вектор \vec{x} , перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (4, -2, -3)$ і $\vec{b} = (0, 1, 3)$, утворює з віссю Oy тупий кут. Знайти його координати, якщо $|\vec{x}| = 26$.

► Вектор \vec{x} колінеарний вектору $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, який перпендикулярний до векторів \vec{a} і \vec{b} , тому:

$$\vec{x} = \lambda \vec{c} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \lambda[-3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}].$$

Довжина вектора \vec{x} :

$$|\vec{x}| = |\lambda| \sqrt{(-3)^2 + (-12)^2 + 4^2} = 13|\lambda| = 26 \Rightarrow |\lambda| = 2.$$

Оскільки вектор \vec{x} утворює з віссю Oy тупий кут, то його проекція на вісь Oy повинна бути від'ємною, тому обираємо $\lambda = 2$.

$$\vec{x} = 2[-3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}] = -6\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}. \blacksquare$$

Мішаний добуток векторів

Приклад 13. Чи є компланарними вектори $\vec{a} = (1, -1, 4)$, $\vec{b} = (-2, 3, 2)$, $\vec{c} = (3, -4, 2)$?

► Три вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_2 + 2e_1 \\ e_3 - 3e_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -10 \end{vmatrix} = 0$$

– вектори компланарні. ■

– вектори компланарні. ■

Приклад 14. З'ясувати, праву чи ліву трійку утворюють вектори $\vec{a} = (2, 1, 4)$, $\vec{b} = (4, -1, 2)$, $\vec{c} = (3, -1, 4)$ і знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

► За формулою (3.35) обчислимо мішаний добуток векторів:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_2 + e_1 \\ e_3 + e_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 6 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -18.$$

Оскільки мішаний добуток від'ємний – трійка векторів \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ліва.

Об'єм паралелепіпеда обчислюємо за формулою (3.30):

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |-18| = 18 \text{ (од.}^3\text{)}. \blacksquare$$

Приклад 15. Дано вершини піраміди $A(1, 2, 3)$, $B(0, -1, 1)$, $C(2, 5, 24)$, $D(3, 0, -2)$. Знайти довжину висоти, опущеної з вершини D .

► Введемо вектори:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-1, -3, -2), \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} = (1, 3, -1), \quad \vec{c} = \overrightarrow{AD} = (2, -2, -5).$$

За формулою (3.35) обчислимо мішаний добуток векторів:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 + e_2 \\ e_3 - 2e_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = 24.$$

За формулою (3.32) обчислимо об'єм трикутної піраміди:

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6} |24| = 4 \text{ (од.}^3\text{)}.$$

Знайдемо площу основи піраміди – трикутника ABC , яка дорівнює половині модуля векторного добутку векторів \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{AC} :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9i - 3j + 0k,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{9^2 + (-3)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{90}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \text{ (од.}^2\text{)}.$$

Об'єм трикутної піраміди:

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h \Rightarrow h = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot 4}{3\sqrt{10}/2} = \frac{2}{\sqrt{10}}. \blacksquare$$

Приклад 16. Довести лінійну незалежність системи векторів:

$$\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \vec{a}_2 = (1, 1, 0, 0), \quad \vec{a}_3 = (1, 1, 1, 0), \quad \vec{a}_4 = (1, 1, 1, 1).$$

► Покажемо, що лінійна комбінація векторів дорівнює нулю тільки при нульових коефіцієнтах, тобто:

$$\begin{aligned} c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + c_3 \vec{a}_3 + c_4 \vec{a}_4 = \vec{0} &\Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0. \\ c_1(1, 0, 0, 0) + c_2(1, 1, 0, 0) + c_3(1, 1, 1, 0) + c_4(1, 1, 1, 1) &= (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (c_1, 0, 0, 0) + (c_2, c_2, 0, 0) + (c_3, c_3, c_3, 0) + (c_4, c_4, c_4, c_4) &= (0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (c_1, c_1 + c_2, c_1 + c_2 + c_3, c_1 + c_2 + c_3 + c_4) &= (0, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} c_1 &= 0, \\ c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 0, \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0. \end{aligned}$$

Отже, система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ лінійно незалежна. ■

РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА

1. Моторіна В.Г. Методика вивчення математичних понять, тверджень. Задачі як засіб навчання математики. Сучасна математична освіта: методологія, теорія, практика: колективна монографія / за загальною редакцією проф. Жерновникової О. А. Харків : ХНПУ імені Г. С. Сковороди, 2021. 250 с. С. 162-180.
2. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник / О. І. Огірко, Н. В. Галайко. – Львів: ДУВС, 2017. – 292 с. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: <https://goo.su/oQEzf>
3. Тарасенкова Н. А. Організація навчання математики у старшій профільній школі : монографія / Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, І. В. Лов'янова, 3. О. Сердюк; за ред. Н. А. Тарасенкової. – Черкаси: Видавець ФОП Гордієнко, 2017. – 216 с. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: <http://eprints.cdu.edu.ua/884/1/monogr.pdf>

Допоміжна література

1. Жерновникова О.А., Нелін Є.П., Штонда О.Г. Простакова Ю.С. Методичні особливості організації профільного навчання з математики в закладах загальної середньої освіти// Scientific notes of the pedagogical department. - №51. – 2022. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: <https://periodicals.karazin.ua/pedagogy/article/view/21629/20099>
2. Моторіна В. Г. Застосування інтеграла: [матеріали для орг. самот. навч.-пізнав. діяльності учнів та розвитку їх твор. здібностей] : навч.-метод. посіб. / В. Г. Моторіна, А. В. Озірна. - Харків : Вид-во Іванченка І. С., 2019. 57 с.
3. Моторіна В. Г. Формування математичної компетентності учнів базової школи у вчителя математики засобами ІКТ : метод. рек. / В. Г. Моторіна, А. В. Люта ; Харків. нац. пед. ун-т ім. Г. С. Сковороди. –Харків : Вид-во Іванченка І. С., 2021. – 85 с.
4. Моторіна В. Г., Савченко М. П. Організація групової навчальної діяльності учнів базової школи у вивченні математики засобами технології партнерства. Методичні рекомендації. Х. : Видавництво Іванченко І.С., 2021. 85 с.

5. Несялкова К. В., Тумбрукакі А. В. Формування вмінь майбутніх учителів математики оцінювати навчальні досягнення учнів: методичні рекомендації. Одеса: ТОВ «Рекламсервіс», 2020. 36 с.

6. Пацановська О.О., Ключник І.Г. Методичні особливості вивчення координат і векторів у старшій профільній школі// Наукові записки молодих вчених. № 4. – 2019. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1636/pdf>