МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад

«Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського»

Олена Синюкова, Ольга Чепок

ПЛОЩИНА І ПРЯМА
У ПРОСТОРІ
В КУРСІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник з дисципліни «Аналітична геометрія» для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Одеса – 2023

Рекомендовано до друку ученою радою Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» (протокол №4 від 30 листопада 2023 року)

РЕЦЕНЗЕНТИ

Євтухов В. М., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь Одеського національного університету імені І. І. Мечникова

Страхов Є. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри оптимального керування та економічної кібернетики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова

Синюкова О. М., **Чепок О. О.** Площина і пряма у просторі в курсі аналітичної геометрії: навчальний посібник з дисципліни «Аналітична геометрія» для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика). Одеса, Університет Ушинського, 2023, 246 с.

Даний навчальний посібник спрямовано на спрощення самостійного опанування здобувачами вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем за спеціальністю 014.04 «Середня освіта (Математика)» теоретичних та практичних аспектів теми «Площина і пряма у тривимірному евклідовому просторі» стандартного курсу аналітичної геометрії, допомогу у виконанні відповідних індивідуальних завдань, завдань курсового проєктування. Представлений у посібнику матеріал може також бути корисним для здобувачів вищої освіти за спеціальністю 111 Математика, для вчителів математики закладів загальної середньої освіти та учнів старших класів таких закладів, для викладачів математики закладів передвищої освіти та студентів відповідних закладів.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛІНИ

Структура навчальної дисципліни

<table>
<tr><th rowspan="3">Назви змістових модулів і тем</th><th colspan="6">Кількість годин</th></tr>
<tr><th colspan="6">Денна форма</th></tr>
<tr><td>усього</td><td>л</td><td>п</td><td>лаб.</td><td>інд.</td><td>с.р.</td></tr>
<tr><td colspan="7">Змістовий модуль І. Основи векторної алгебри</td></tr>
<tr><td>Тема 1. Поняття про вектор. Лінійні операції над векторами</td><td>10</td><td>2</td><td>4</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>Тема 2. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів</td><td>16</td><td>2</td><td>4</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>Тема 3. Поняття про числову вісь. Поняття про афінну систему координат на евклідовій площині та у евклідовому просторі. Прямокутна декартова система координат як окремий випадок довільної афінної. Метод координат як основний метод аналітичної геометрії</td><td>22</td><td>2</td><td>4</td><td></td><td></td><td>16</td></tr>
<tr><td>Разом за змістовим модулем І</td><td>48</td><td>6</td><td>12</td><td></td><td></td><td>30</td></tr>
<tr><td colspan="7">Змістовий модуль ІІ. Аналітична теорія прямої та площини у евклідовому просторі</td></tr>
<tr><td>Тема 4. Основи аналітичної теорії прямої на евклідовій площині та у евклідовому просторі</td><td>8</td><td rowspan="2">2</td><td>2</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>Тема 5. Аналітична теорія прямої на евклідовій площині</td><td>8</td><td>2</td><td></td><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td>Тема 6. Аналітична теорія площини у евклідовому просторі. Взаємне розташування прямих і площин.</td><td>16</td><td>2</td><td>4</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
</table>

Разом за змістовим модулем ІІ	**32**	**4**	**8**			**20**
ІНДЗ	10				10	
Усього годин	**90**	**10**	**20**		**10**	**50**

ПЕРЕДМОВА

Європейський вибір України, нагальні вимоги освіти сьогодення викликали значні зміни як у змісті вищої освіти, так і у формах оволодіння цим змістом. Натепер, навіть студенти першого курсу денної форми навчання повинні самостійно опановувати більш ніж половину програмного матеріалу з кожного навчального предмету. Для студентів заочної форми навчання кількість виділених аудиторних навчальних годин взагалі є достатньою лише для стислого знайомства зі змістовим наповненням відповідного курсу.

Навчальний посібник спрямовано на спрощення самостійного опанування здобувачами вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем за спеціальністю «Середня освіта (Математика)» теоретичних та практичних аспектів теми «Площина і пряма у тривимірному евклідовому просторі» стандартного курсу аналітичної геометрії, допомогу у виконанні відповідних індивідуальних завдань.

Матеріал навчального посібника поділено на чотири параграфи.

Перший параграф носить базовий характер. Тут всебічно розкрито сутність методу координат як основного для аналітичної геометрії методу дослідження геометричних фігур евклідового простору. Це, фактично, конспект лекції з відповідної теми, у якому необхідні теореми наведено без доведень.

У другому і третьому параграфах роботи розглянуто основи афінної теорії прямої і площини у тривимірному евклідовому просторі за умови задання прямої і площини різного виду рівняннями відносно довільним чином обраної афінної системи координат.

Прямокутна декартова система координат у тривимірному евклідовому просторі є окремим випадком афінної системи координат. Вона є найбільш природною для людини, історично, виникла першою. Із різних систем координат тривимірного евклідового простору виключно прямокутну декартову систему координат розглядають у стандартних курсах математики закладів загальної середньої освіти. Відносно прямокутної декартової системи координат найбільш компактним чином розв'язуються всі метричні задачі евклідового простору, зокрема метричні задачі, пов'язані з теорією прямої і площини. Саме тому у останньому, четвертому, параграфі роботи основні метричні питання теорії прямої і площини у тривимірному евклідовому просторі розглянуто виключно по відношенню до прямокутної декартової системи координат.

Структура кожного з останнії трьох параграфів відрізняється від структури першого. Параграфи поділено на підрозділи. Необхідні теоретичні питання підрозділів викладено без доведень. Мається на увазі, що з відповідними доведеннями студенти можуть ознайомитися з інших інформаційних джерел (перелік рекомендованих інформаційних джерел наведено наприкінці роботи) або провести їх самостійно на підставі теоретичних міркувань першого параграфу. Кожний підрозділ закінчується переліком теоретичних питань і завдань для самоконтролю. Знаходження відповідей на всі питання і завдання представляється критерієм опанування відповідного контенту. Кожний з останніх трьох параграфів закінчується зразками розв'язків відповідних типових практичних завдань та умовами практичних завдань для самостійного розв'язання.

Наприкінці навчального посібника вміщено тестові завдання для самоконтролю за усією темою і відповіді на них, а також перелік рекомендованих інформаційних джерел.

§1. БАЗОВІ ПОНЯТТЯ

Якщо поставити за мету найбільш точно у повній мірі охарактеризувати той курс, який для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем за спеціальністю Середня освіта (Математика) традиційно має назву «Аналітична геометрія», то треба було би використати таку назву як «Елементи аналітичної геометрії тривимірного евклідового простору». Певні теми даного курсу входять до стандартних курсів геометрії закладів загальної середньої освіти. Але більшу частину останніх представляють собою складові так званої «Елементарної геометрії тривимірного евклідового простору». Принципово важливим є те, що у обох курсах мова йде про дослідження геометричних фігур одного й того ж математичного об'єкту - тривимірного евклідового простору. Різниця полягає саме у тих методах дослідження, які застосовують.

У аналітичній геометрії основним методом дослідження фігур тривимірного евклідового простору є так званий **метод координат**. При цьому під тривимірним евклідовим простором розуміють математичну теорію, побудовану на основі тієї аксіоматики евклідової геометрії, яку було розглянуто у курсах геометрії закладів загальної середньої освіти. Згідно цієї теорії, **геометричною фігурою тривимірного евклідового простору** називають будь-яку непорожню підмножину множини всіх його точок.

Нехай у евклідовому просторі обрано деяку афінну систему координат $Oxyz$ (рис. 1.1).

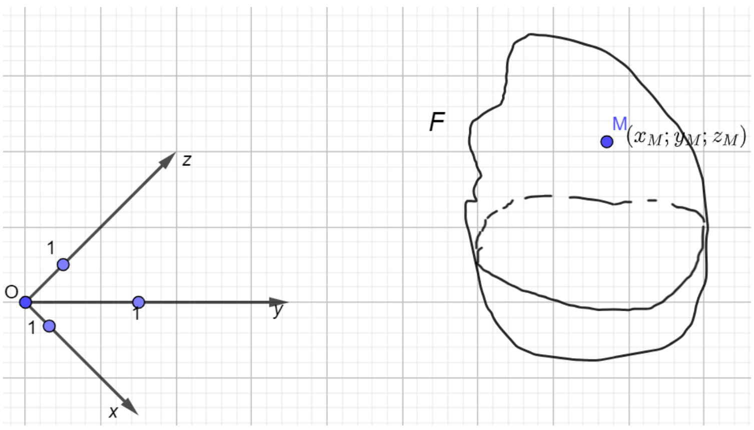

Рис 1.1.

Аналітичними або **алгебраїчними умовами, що визначають** певну **фігуру** F **відносно** даної **афінної системи координат**, називають таку сукупність чи систему γ рівнянь чи нерівностей, або рівнянь і нерівносте разом, відносно змінних x ; y ; z , для якої справедливими є наступні твердження.

I. Якщо точка M належить фігурі F, то координати цієї точки відносно обраної афінної системи координат утворюють розвязок γ.

II. Якщо впорядкована трійка дійсних чисел утворює розв'язок γ, то точка M , відповідними координатами якої відносно обраної афінної системи координат є дані дійсні числа, належить фігурі F.

Метод координат дослідження геометричних фігур тривимірного евклідового простору, **у** своєму **першому, класичному, варіанті,** який й історично сформувався як перший, передбачає реалізацію наступних етапів.

1. У евклідовому просторі задано, або визначено за допомогою характеристичних властивостей елементарного характеру, певну геометричну фігуру F, яка є об'єктом дослідження.
2. Обирають афінну систему координат $Oxyz$.
3. Знаходять аналітичні умови, що визначають дану фігуру F відносно даної системи координат.
4. Досліджують визначені аналітичні умови у аналітичній геометрії - головним чином методами алгебри, у інших розділах геометрії – ще йц іншими методами, зокрема, методами математичного аналізу, отримують певні, відповідного характеру висновки.
5. Використовуючи конструкцію афінної системи координат, серед отриманих висновків виокремлюють ті, які не залежать від вибору афінної системи координат, усвідомлюють їх геометричне тлумачення і тим самим отримують нові відомості про фігуру F, що досліджують.

Зрозуміло, що у вищенаведеному розумінні метод координат виступає як метод дослідження геометричних фігур, вже відомих з геометричної точки зору. Але та взаємно однозначна відповідність, яка за допомогою обраної афінної системи кординат встановлюється між множиною точок евклідового простору і множиною R^3 всіх впорядкованих трійок дійсних чисел, дозволяє, як було обгрунтовано раніше, надавати, визначати, з'ясовувати геометричний зміст, фактично, будь-яких співвідношень між елементами множини R^3. Цей факт став підставою для того, щоб у процесі розвитку аналітичної геометрії як науки, у ній сформувався й інший, можна сказати «алгебраїчний» підхід до встановлення дещо інших етапів впровадження методу координат. Цей підхід передбачає реалізацію вже трішки інших послідовних етапів.

1. Формулюють певну сукупність чи систему γ рівнянь чи нерівностей, або рівнянь і нерівностей разом, відносно змінних x; y; z.

2. У евклідовому просторі обирають довільну афінну систему координат $Oxyz$.

3. Означують геометричну фігуру F як фігуру, яку відносно обраної афінної системи координат задано за допомогою аналітичних умов γ.

4. Досліджують аналітичні умови γ у першу чергу методами алгебри, отримують певні алгебраїчні висновки.

5. Використовуючи конструкцію афінної системи координат, серед отриманих висновків виокремлюють ті, які не залежать від обрання афінної системи координат, усвідомлюють їх геометричне тлумачення і, як результат, отримують інформацію про геометричні властивості означеної фігури F.

У підсумку, наразі описано класичний для аналітичної геометрії підхід до дослідження геометричних фігур тривимірного евклідового простору, що сформувався у математиці починаючи з середини сімнадцятого століття. Всі твердження, які на даний час складають змістове наповнення аналітичної геометрії як окремого розділу математики, можуть бути отриманими виключно на його основі.

У той же час, десь із другої половини дев’ятнадцятого століття, у математиці почали розглядати і дещо іншого характеру аналітичні умови, що визначають ту чи іншу геометричну фігуру відносно обраної афінної системи координат – так звані **параметричні рівняння** і **нерівності.**

Зупинимося зараз лише на тих видах параметричних рівнянь, які знайшли своє доцільне застосування у сучасних стандартних курсах аналітичної геометрії.

1. Нехай у тривимірному евклідовому просторі обрано певну афінну систему координат $Oxyz$. Нехай задано систему рівнянь виду

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t), \quad t \in T, \quad T \subset R, \quad T \neq \varnothing \\ z = f_3(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

Дана система є системою трьох рівнянь з чотирма невідомими: x, y, z і t. Рівняння є «розв’язаними» відносно невідомих x; y; z, тобто, мають вигляд рівностей, у яких, відповідно, невідомі x; y; z однозначно виражено через невідому t. Для невідомої t вказано область її зміни – непорожню підмножину T множини R всіх дійсних чисел. Отже, невідомі x; y; z представлено у вигляді функцій відносно змінної t, заданих аналітично, які мають множину T у якості спільної області визначення.

Відповідно до означення, вважають, що геометричну фігуру F відносно обраної системи координат $Oxyz$ задано за допомогою системи рівнянь (1.1) у випадку, коли виконано наступні дві умови:

1) якщо точка M належить фігурі F, то у множині T існує таке число t_0, яке разом з координатами x_M, y_M, z_M цієї точки відносно системи координат $Oxyz$ утворює розв’язок системи (1.1), тобто, вірними є тотожності:

$$\begin{cases} x_M \equiv f_1(t_0) \\ y_M \equiv f_2(t_0) \\ z_M \equiv f_3(t_0) \end{cases};$$

2) для кожного числа t_1, $t_1 \in T$, числа $x_N = f_1(t_1)$; $y_N = f_2(t_1)$; $z_N = f_3(t_1)$ відносно обраної системи координат $Oxyz$ є координатами такої точки N, яка належить фігурі F (рис 1.2).

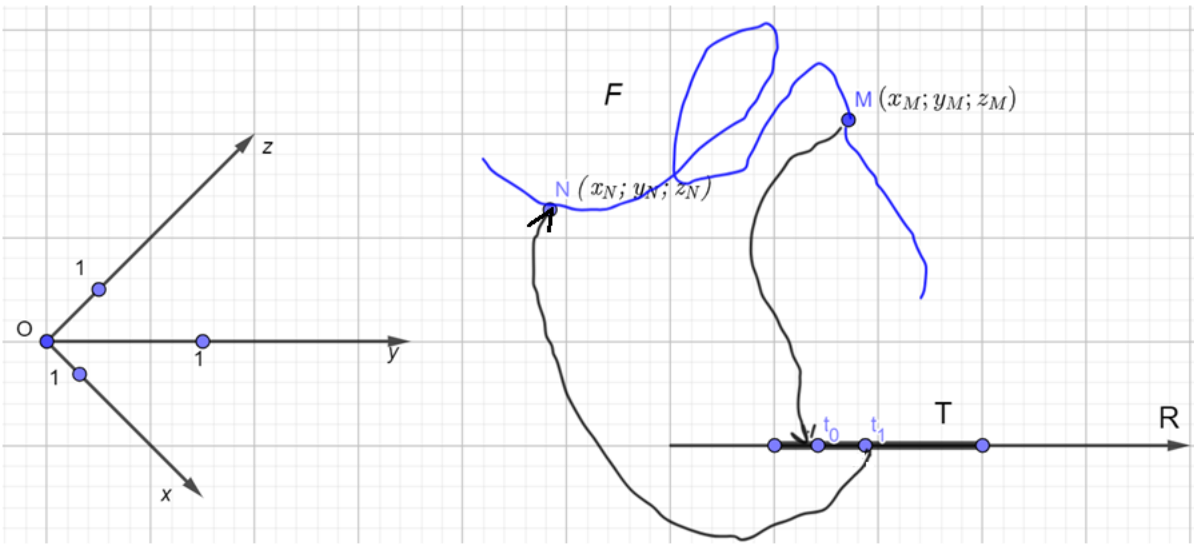

Рис 1.2.

У випадку виконання обох умов, рівняння (1.1) називають **однопараметричними рівняннями геометричної фігури** F **відносно афінної системи координат** $Oxyz$, параметром при цьому, зрозуміло, вважають змінну t, множина T представляє собою область зміни параметру.

2. У курсах аналітичної геометрії розглядають і параметричні рівняння іншого виду – виду (1.2):

$$\begin{cases} x = f_1(u,v) \\ y = f_2(u,v) \\ z = f_3(u,v) \end{cases}; \ (u,v) \in G,\ G \subset R^2,\ G \neq \varnothing . \qquad (1.2)$$

Система рівнянь (1.2) є системою трьох рівнянь з п'ятьма невідомими: x; y; z, u, v. Рівняння є «розв'язаними» відносно невідомих x, y, мають вигляд рівностей, у яких невідомі x; y; z, x однозначно виражено через невідомі u і v. Для невідомих u і v вказано область зміни – впорядкована пара дійсних чисел $\left(u,v\right)$ може приймати будь-які значення із заданої непорожньої підмножини G множини R^2 всіх впорядкованих пар дійсних чисел. Отже, невідомі x; y; z представлено у вигляді функцій від двох змінних, заданих аналітично, які мають множину G у якості спільної області визначення.

Аналогічно до попереднього варіанту задання геометричних фігур, вважають, що геометричну фігуру F (рис. 1.3) відносно афінної системи координат $Oxyz$ задано за допомогою системи рівнянь (1.2) у тому випадку, коли є виконаними дві наступні умови:

1) Якщо точка M з координатами x_M, y_M, z_M відносно системи координат $Oxyz$ належить фігурі F, то у множині G існує така впорядкована пара дійсних чисел $\left(u_0,v_0\right)$, що числа x_M, y_M, z_M, u_0, v_0 утворюють розв'язок системи (1.2), тобто, вірними є тотожності

$$\begin{cases} x_M \equiv f_1\left(u_0,v_0\right) \\ y_M \equiv f_2\left(u_0,v_0\right) \\ z_M \equiv f_3\left(u_0,v_0\right) \end{cases};$$

2) для кожної впорядкованої пари дійсних чисел $\left(u_1,v_1\right)$, $\left(u_1,v_1\right)\in G$, числа $x_N = f_1\left(u_1,v_1\right)$, $y_N = f_2\left(u_1,v_1\right)$, $z_N = f_3\left(u_1,v_1\right)$ відносно системи координат $Oxyz$ є координатами такої точки N, яка належить фігурі F (рис. 1.3).

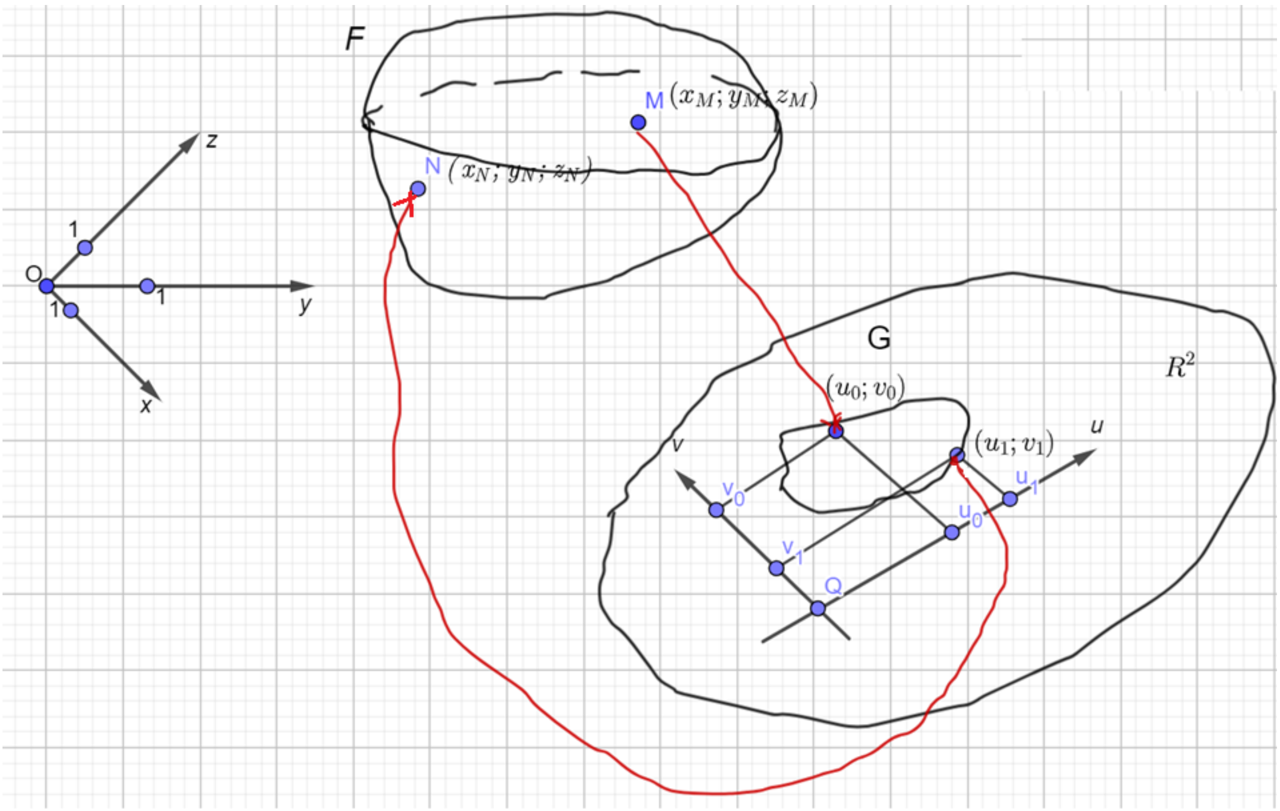

Рис. 1.3.

У випадку виконання обох умов рівняння (1.2) називають

двопараметричними рівняннями фігури F **відносно афінної системи координат** $Oxyz$, параметрами при цьому, зрозуміло, вважаються змінні u і v, множина G представляє собою множину зміни параметрів.

Зрозуміло, що задання геометричних фігур евклідового простору за допомогою параметричних рівнянь виду (1.1) або (1.2) є можливим лише за умови обрання у евклідовому просторі певної афінної системи координат. Отже, наявність у евклідовому просторі афінної системи координат представляє собою необхідну передумову задання геометричної фігури як за допомогою аналітичних умов (умов алгебраїчного характеру), так і за допомогою параметричних рівнянь. В силу цього говорять, що для геометричних фігур афінна система координат утворює **апарат** обох цих способів задання.

За своєю математичною сутністю параметричні рівняння, фактично, представляють собою окремий випадок означених аналітичних умов. Тобто, для дослідження геометричних фігур цілком можливою є реалізація всіх етапів обох варіантів імплементації методу координат і у випадках, коли замість означених аналітичних умов, які характеризують дану фігуру відносно даної афінної системи координат, вести мову про параметричні рівняння, що задають цю фігуру відносно визначеної афінної системи координат.

Одночасно, розвиток векторного числення, який розпочався у математиці наприкінці дев'ятнадцятого століття, дозволив характеризувати положення точок тривимірного евклідового простору і за допомогою їх радіус-векторів відносно обраного початку відліку. Очевидно, що, якщо у евклідовому просторі обрати довільну точку O , кожній точці M цього простору поставити у відповідність її радіус-вектор $\overrightarrow{r_M}$, $\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{OM}$, відносно обраної точки, то таким чином буде встановлено взаємно однозначну відповідність між множиною всіх точок цього простору і множиною всіх його вільних векторів.

Отже, нехай у евклідовому просторі у якості початку відліку обрано деяку точку O (рис. 1.4).

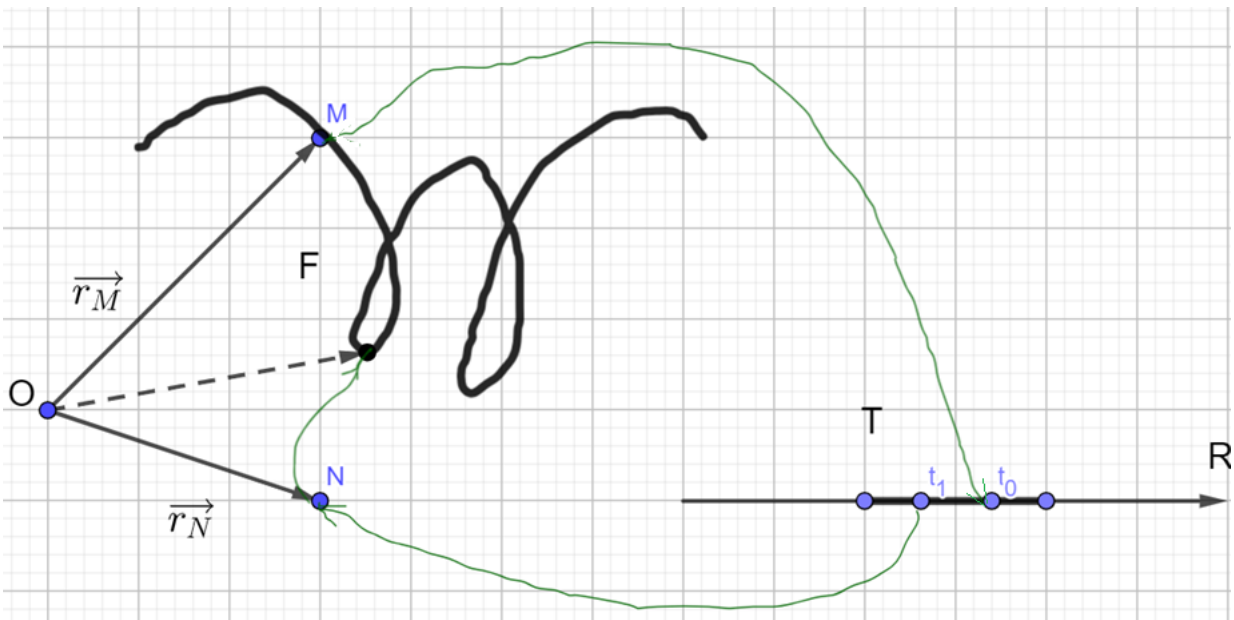

Рис. 1.4.

Векторними умовами, що визначають певну **геометричну фігуру** F **відносно початку відліку** O називають таку сукупність чи систему γ векторних рівнянь чи нерівностей (рівнянь виду $\overrightarrow{f(\vec{r})}=\vec{0}$, $f(\vec{r})=0$, нерівностей виду $f(\vec{r})>0$, $f(\vec{r})\geq 0$, $f(\vec{r})<0$, $f(\vec{r})\leq 0$, де $\overrightarrow{f(\vec{r})}$ - векторний вираз, що містить векторну змінну $\vec{r}$, $f(\vec{r})$ - скалярний вираз, що містить векторну змінну $\vec{r}$), або рівнянь і нерівностей разом, відносно векторної змінної $\vec{r}$, для якої справедливими є наступні твердження.

I. Якщо точка M належить фігурі F, то радіус-вектор $\overrightarrow{r_M}=\overrightarrow{OM}$ цієї точки відносно початку відліку O утворює розв'язок γ.

II. Якщо вектор $\overrightarrow{r_0}$ утворює розв'язок γ, то точка N, радіус-вектор якої відносно початку відліку O дорівнює $\overrightarrow{r_0}$ ($\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{r_0}$), належить фігурі F.

У векторному численні, одночасно з суто векторними рівняннями, розглядають і так звані **векторно-параметричні рівняння.** У найпростіших випадках такі рівняння мають вид

$$\vec{r}=\overrightarrow{f(t)},\ t\in T,\ \ T\subset R,\ \ T\neq\varnothing; \qquad (1.3)$$

$$\vec{r}=\overrightarrow{f(u,v)},\ (u,v)\in G,\ G\subset R^2,\ G\neq\varnothing\ . \qquad (1.4)$$

Рівняння (1.3) є векторним рівнянням з двома невідомими – векторною невідомою $\vec{r}$ і скалярною невідомою t, для якої вказано область зміни – непорожню підмножину T множини R всіх дійсних чисел. $\overrightarrow{f(t)}$ є заданою вектор-функцією відносно скалярної змінної t, визначеною на множині T. Рівняння (1.3) є «розв'язаним» відносно векторної невідомої $\vec{r}$.

Рівняння (1.4) є векторним рівнянням з трьома невідомими – векторною невідомою $\vec{r}$ і скалярними невідомими u і v, для яких вказано область зміни - впорядковані пари дійсних чисел (u,v) приймають будь-які значення із заданої непорожньої підмножини G множини R^2 всіх впорядкоаваних пар дійсних чисел. $\overrightarrow{f(u,v)}$ є заданою вектор-функцією відносно скалярних змінних u і v, визначеною на множині G. Рівняння (1.4) є «розв'язаним» відносно векторної невідомої $\vec{r}$.

Нехай у евклідовому просторі обрано довільну точку O. За означенням, вважають, що геометричну фігуру F відносно точки O як початку відліку задано за допомогою рівняння (1.3) тоді, коли виконано наступні умови:

1) якщо точка M належить фігурі F, то у множині T існує таке число t_0, що вектор $\overrightarrow{r_M}$, $\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{OM}$ і число t_0 утворюють розвязок рівняння (1.3), тобто, є справедливою векторна тотожність $\overrightarrow{r_M} \equiv \overrightarrow{f(t_0)}$;

2) для кожного числа t_1, $t_1 \in T$, точка N, яка є кінцем напрямленого відрізка $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{f(t_1)}$, належить фігурі F (рис. 1.4).

За означенням, вважають, що геометричну фігуру F відносно точки O як початку відліку задано за допомогою рівняння (1.4) тоді, коли виконано наступні умови:

1) якщо точка M належить фігурі F, то у множині G існує така впорядкована пара дійсних чисел (u_0,v_0), що вектор $\overrightarrow{r_M}$, $\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{OM}$ і числа u_0, v_0 утворюють розвязок рівняння (1.4), тобто, справедливою є векторна тотожність $\overrightarrow{r_M} \equiv \overrightarrow{f(u_0,v_0)}$;

2) для кожної впорядкованої пари дійсних чисел (u_1,v_1), $(u_1,v_1) \in G$, точка N, яка є кінцем напрямленого відрізка $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{f(u_1,v_1)}$, належить фігурі F (рис. 1.4).

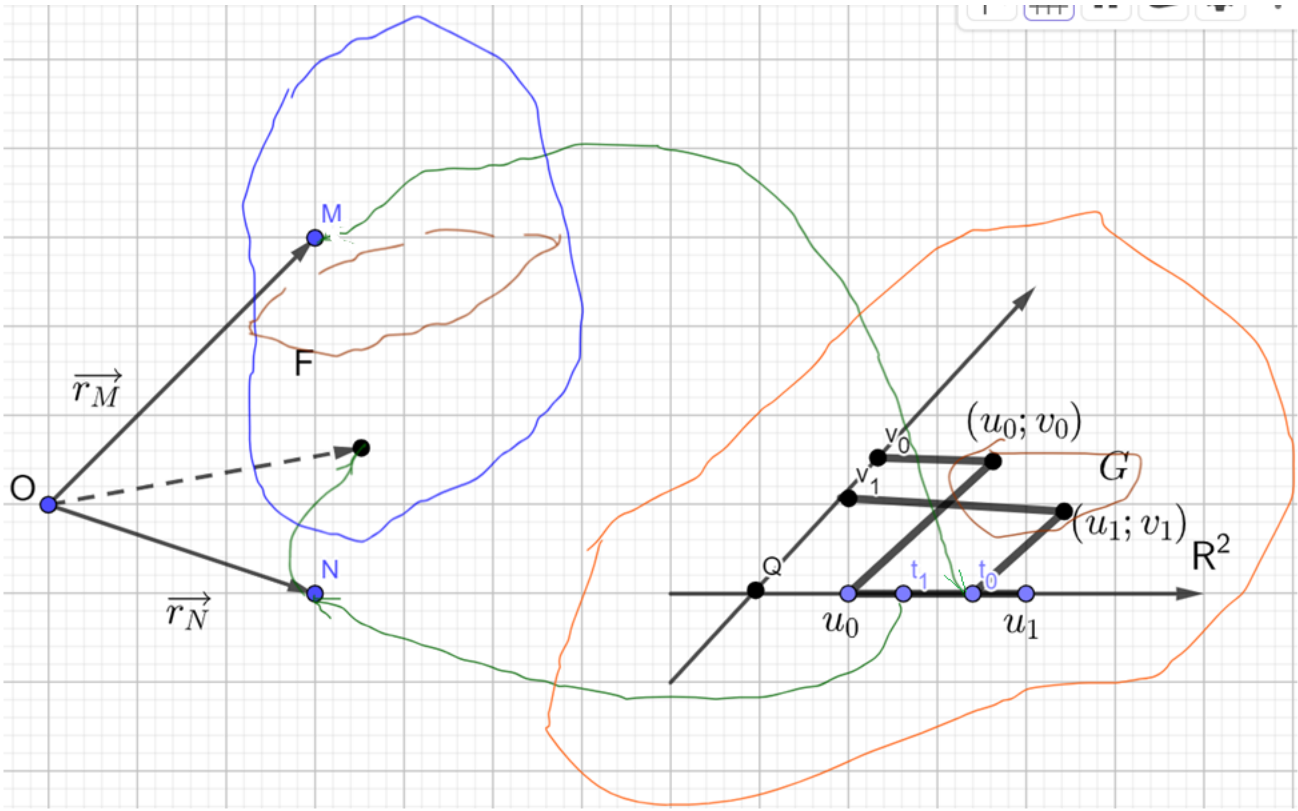

Рис 1.5.

З вищенаведеного зрозуміло, що обрання у евклідовому просторі певної точки у якості початку відліку є необхідною передумовою задання геометричної фігури як за допомогою векторних умов, так і за допомогою векторно-параметричних умов. Отже, у евклідовому просторі **апарат** усіх трьох вищевказаних способів задання геометричної фігури **утворює точка,** прийнята **у якості початку відліку.**

Відповідно до наведених означень, протягом двадцятого століття у аналітичній геометрії для дослідження геометричних фігур (у першу чергу для реалізації теоретичних аспектів таких досліджень) було розроблено **векторні аналоги обох варіантів традиційного методу координат.**

Аналог першого варіанту при цьому природним чином передбачає реалізацію наступних етапів міркувань.

1. Усвідомлюють, що у евклідовому просторі задано, або визначено за допомогою характеристичних властивостей елементарного характеру, певну геометричну фігуру F, яка є об’єктом дослідження.

2. Певну точку евклідового простору обирають у якості початку відліку.

3. Знаходять векторні умови або векторно-параметричні рівняння, що визначають дану фігуру F відносно обраного початку відліку.

4. Досліджують визначені умови або отримані рівняння методами векторної алгебри, отримують певні висновки алгебраїчного характеру.

5. Надають отриманим висновкам геометричного тлумачення, із отриманих тверджень виокремлюють ті, які не залежать від обрання у евклідовому просторі початку відліку, у підсумку, отримують нові відомості про фігуру F, яку досліджують.

Аналог другого віріанту, у свою чергу, передбачає реалізацію таких етапів міркувань, завдання яких сформульовано нижче.

1. Розглядають певну сукупність чи систему векторних рівнянь чи нерівностей, або рівнянь і нерівностей разом відносно векторної змінної $\vec{r}$, або векторно-параметричне рівняння виду (1.3) чи (1.4).

2. У евклідовому просторі у якості початку відліку обирають довільну точку O.

3. Означують геометричну фігуру F як фігуру, задану відносно обраного початку відліку O розглянутими векторними умовами чи векторно-параметричними рівняннями.

4. Досліджують вищевказані умови чи рівняння методами векторної алгебри, отримують певні висновки.

5. Надають отриманим висновкам геометричного тлумачення, виокремлюють з отриманих тверджень ті, які не залежать від обрання у евклідовому просторі початку відліку. Як підсумок, отримують інформацію про геометричні властивості означеної фігури F.

Варто також зазначити, що способи задання геометричних фігур евклідового простору за допомогою векторно-параметричних рівнянь найтіснішим чином пов’язані з параметричними способами їхнього задання.

Для розкриття змісту даного твердження наведемо необхідні означення й пояснення.

Нехай задано вектор-функцію $\overrightarrow{r(t)}$, $t \in T$, $T \subset R$, $T \neq \varnothing$, тобто, відображення множини T у множину всіх вільних векторів евклідового простору, згідно якого кожному дійсному числу t_0, $t_0 \in T$ ставиться у відповідність певний вільний вектор $\overrightarrow{r(t_0)}$. Нехай на множині вільних векторів евклідового простору обрано певний базис E: $\vec{e}_1$; $\vec{e}_2$; $\vec{e}_3$. Відносно цього базису вектор $\overrightarrow{r(t_0)}$ має однозначно визначені координати $\left(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\right)_E$, $\overrightarrow{r(t_0)} = x(t_0)\vec{e}_1 + y(t_0)\vec{e}_2 + z(t_0)\vec{e}_3$. Все це означає, що, при фіксованому базисі на множині вільних векторів простору, одночасно з вектор-функцією $\overrightarrow{r(t)}$, $t \in T$, заданими є три скалярні функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ зі спільною областю визначення T. При цьому має місце векторна рівність

$$\overrightarrow{r(t)} = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3. \tag{8.5}$$

Скалярні функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ називаються **координатними функціями вектор-функції** $\overrightarrow{r(t)}$ **відносно базису** E. Якщо **базис** E^*: $\vec{e}^{\,1}$; $\vec{e}^{\,2}$; $\vec{e}^{\,3}$ є **двоїстим до базису** E ($\vec{e}^{\,1} \cdot \vec{e}_1 = 1$; $\vec{e}^{\,1} \cdot \vec{e}_2 = 0$; $\vec{e}^{\,1} \cdot \vec{e}_3 = 0$; $\vec{e}^{\,2} \cdot \vec{e}_1 = 0$; $\vec{e}^{\,2} \cdot \vec{e}_2 = 1$; $\vec{e}^{\,2} \cdot \vec{e}_3 = 0$; $\vec{e}^{\,3} \cdot \vec{e}_1 = 0$; $\vec{e}^{\,3} \cdot \vec{e}_2 = 0$; $\vec{e}^{\,3} \cdot \vec{e}_3 = 1$), то

$$x(t) = \vec{e}^{\,1} \cdot \overrightarrow{r(t)}; \quad y(t) = \vec{e}^{\,2} \cdot \overrightarrow{r(t)}; \quad z(t) = \vec{e}^{\,3} \cdot \overrightarrow{r(t)} \tag{1.6}$$

Формули (1.6) у явному вигляді вказують на те, як координатні функції заданої вектор-функції однозначно виражаються через саму вектор-функцію.

Зрозуміло, що у випадку ортонормованого базису E : $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$ двоїстий базис E^* співпадає з базисом E і, в силу цього, формули (1.6) мають вид

$$x(t)=\vec{i}\cdot\overrightarrow{r(t)};\quad y(t)=\vec{j}\cdot\overrightarrow{r(t)};\quad z(t)=\vec{k}\cdot\overrightarrow{r(t)} \tag{1.7}$$

Формули (1.5) і (1.6) вказують на те, що задання вектор-функції є рівносильним до задання її координатних функцій відносно певного фіксованого базису. Цілком логічно, що при цьому мають місце наступні теореми.

Теорема 1.1. Нехай у тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$, базис E якої утворюють вектори $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$. Нехай відносно початку відліку O цієї системи координат геометричну фігуру F задано векторно-параметричним рівнянням

$$\vec{r}=\overrightarrow{r(t)},\quad t\in T,\quad T\subset R,\quad T\neq\varnothing. \tag{1.8}$$

Якщо скалярні функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ є координатними функціями вектор-функції $\overrightarrow{r(t)}$ відносно базису E, параметричні рівняння

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t),\quad t\in T \\ z=z(t) \end{cases} \tag{1.9}$$

є параметричними рівняннями фігури F відносно обраної системи координат.

І навпаки. Якщо геометричну фігуру F відносно афінної системи координат $Oxyz$ задано параметричними рівняннями (1.9), то відносно початку відліку цієї системи координат її задано векторно-параметричним рівнянням (1.8), $\overrightarrow{r(t)}=x(t)\overrightarrow{e_1}+y(t)\overrightarrow{e_2}+z(t)\overrightarrow{e_3}$, вектори $\overrightarrow{e_1}$; $\overrightarrow{e_2}$; $\overrightarrow{e_3}$ утворюють базис E даної афінної системи координат.

Теорема 1.2. Нехай у евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$, базис якої утворюють вектори $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$. Нехай відносно початку відліку O геометричну фігуру F задано векторно-параметричним рівнянням

$$\vec{r}=\overrightarrow{r(u,v)},\quad (u,v)\in G,\quad G\subset R^2,\quad G\neq\varnothing\ . \tag{1.10}$$

Якщо скалярні функції $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ є координатними функціями вектор-функції $\overrightarrow{r(u,v)}$ відносно базису E , то параметричні рівняння

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v), \quad (u,v)\in G, \\ z=z(u,v) \end{cases} \tag{1.11}$$

є параметричними рівняннями фігури F відносно обраної системи координат $Oxyz$.

І навпаки. Якщо геометричну фігуру F відносно афінної системи координат $Oxyz$ задано параметричними рівняннями (1.11), то відносно початку відліку O цієї системи координат її задано векторно-параметричним рівнянням (1.10), де $\overrightarrow{r(u,v)}=x(u,v)\cdot\overrightarrow{e_1}+y(u,v)\cdot\overrightarrow{e_2}+z(u,v)\cdot\overrightarrow{e_3}$.

Теоретичні питання і завдання для самоконтролю до §1

1.1. Чи мають стандартний курс аналітичної геометрії тривимірного евклідового простору і курси геометрії закладів загальної середньої освіти однаковий об’єкт дослідження? Відповідь обгрунтуйте.

1.2. Чи мають стандартний курс аналітичної геометрії тривимірного евклідового простору і курси геометрії закладів загальної середньої освіти однакові методи дослідження геометричних фігур? Відповідь обгрунтуйте.

1.3. Який метод є основним методом дослідження геометричних фігур тривимірного евклідового простору у аналітичній геометрії?

1.4. Що розуміють під геометричною фігурою у стандартних курсах аналітичної геометрії тривимірного евклідового простору?

1.5. Наведіть два еквівалентних між собою означення афінної системи координат тривимірного евклідового простору. У чому сутність їхньої еквівалентності?

1.6. Наведіть два еквівалентних між собою означення прямокутної декартової системи координат тривимірного евклідового простору. У чому сутність їхньої еквівалентності?

1.7. Наведіть означення аналітичних умов, що визначають геометричну фігуру тривимірного евклідового простору відносно афінної системи координат. Наведіть відповідні приклади.

1.8. Поясніть сутність історично першого, класичного, методу координат дослідження геометричних фігур тривимірного евклідового простору.

1.9. Поясніть сутність «алгебраїчного» варіанту методу координат дослідження геометричних фігур тривимірного евклідового простору.

1.10. Вкажіть основні види параметричних рівнянь, які розглядають у стандартних курсах аналітичної геометрії тривимірного евклідового простору. Для вказаних видів рівнянь наведіть алгебраїчні характеристики.

1.11. Роз'ясніть сутність твердження про те, що певну геометричну фігуру тривимірного евклідового простору відносно певної афінної системи координат задано за допомогою певної стандартної системи однопараметричних рівнянь.

1.12. Роз'ясніть сутність твердження про те, що певну геометричну фігуру тривимірного евклідового простору відносно певної афінної системи координат задано за допомогою певної стандартної системи двопараметричних рівнянь.

1.13. Вкажіть геометричний апарат алгебраїчного і параметричного способів задання геометричної фігури у тривимірному евклідовому просторі. Відповідь обгрунтуйте.

1.14. Наведіть означення радіус-вектора точки тривимірного евклідового простору відносно певного початку відліку.

1.15. Наведіть означення векторних умов, що визначають геометричну фігуру тривимірного евклідового простору відносно початку відліку. Наведіть відповідні приклади.

1.16. Вкажіть основні види векторно-параметричних рівнянь, які розглядають у стандартних курсах аналітичної геометрії тривимірного евклідового простору. Для вказаних видів рівнянь наведіть характеристики з точки зору векторної алгебри.

1.17. Роз'ясніть сутність твердження про те, що певну геометричну фігуру тривимірного евклідового простору відносно певного початку відліку задано за допомогою певного однопараметричного векторно-параметричного рівняння.

1.18. Роз'ясніть сутність твердження про те, що певну геометричну фігуру тривимірного евклідового простору відносно певного початку відліку задано за допомогою певного двопараметричного векторно-параметричного рівняння.

1.19. Вкажіть геометричний апарат векторного та векторно-параметричного способів задання геометричної фігури тривимірного евклідового простору. Відповідь обгрунтуйте.

1.20. Охарактеризуйте сутність векторних аналогів обох варіантів традиційного методу координат дослідження геометричних фігур тривимірного евклідового простору.

1.21. Наведіть означення координатних функцій заданої вектор-функції відносно заданого базису множини вільних векторів тривимірного евклідового простору.

1.22. Наведіть означення двоїстого базису до заданого базису множини вільних векторів тривимірного евклідового простору.

1.23. Поясніть, чому ортонормований базис множини вільних векторів тривимірного евклідового простору є двоїстим сам до себе.

1.24. Поясніть сутність взаємозв’язків між векторно-параметричним і параметричним способами задання геометричної фігури тривимірного евклідового простору.

§2. ОСНОВИ АФІННОЇ ТЕОРІЇ ПЛОЩИНИ У ТРИВИМІРНОМУ ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ ЗА УМОВИ ЗАДАННЯ ПЛОЩИНИ РІЗНОГО ВИДУ РІВНЯННЯМИ ВІДНОСНО ДОВІЛЬНОЇ АФІННОЇ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

2.1. Векторно-параметричне рівняння площини. Параметричні рівняння площини. Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

Для того, щоб площину α тривимірного евклідового простору можна було задати векторно-параметричним рівнянням, треба, щоб у евклідовому просторі у якості початку відліку було фіксовано певну точку, яку, найчастіше, позначають через O. Ця точка може бути цілком довільною (рис.2.1.).

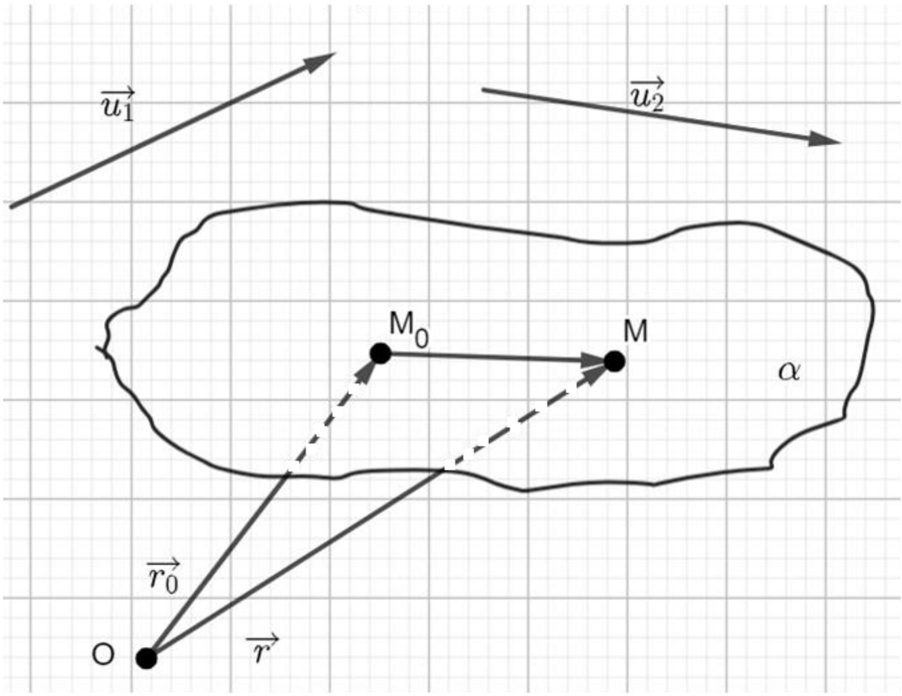

Рис. 2.1.

Далі, треба, щоб для площини α відомою була певна точка M_0, $M_0 \in \alpha$, (тоді відомим буде радіус-вектор $\vec{r}_0$, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ цієї точки відносно обраного початку відліку O) і два вектора – $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$, які є колінеарними до площини α, але не є колінеарними між собою. З геометричної точки зору, точка M_0 і вектори $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$, визначають площину α однозначно, бо у евклідовій геометрії через задану точку паралельно до двох заданих, не колінеарних між собою векторів, проходить площина і лише тільки одна.

За вищевказаних умов **векторно-параметричне рівняння площини** α відносно початку відліку O має вид

$$\vec{r} = \vec{r_0} + u \cdot \vec{u_1} + v \cdot \vec{u_2}, \quad (u,v) \in R^2 \tag{2.1}$$

При цьому варто зауважити, що, відповідно до загальної домовленості, одночасно з рівнянням (2.1) область зміни параметрів u і v, як правило, не вказують виходячи з того, що вона відповідає області допустимих значень змінних u і v у його правій частині.

Кожну площину відносно будь-якого початку відліку можна задати векторно-параметричним рівнянням виду (2.1) тому, що кожна площина містить безліч точок, для кожної площини можна знайти (і не однозначно, існує безліч варіантів) такі вектори $\vec{u_1}$ і $\vec{u_2}$, що є колінеарними до неї, але не є колінеарними між собою.

Кожне векторно-параметричне рівняння виду (2.1), у якому вектори $\vec{u_1}$ і $\vec{u_2}$ не є колінеарними між собою, відносно будь-якого початку відліку O є рівнянням певної площини. Ця площина є визначеною однозначно. Вона проходить через точку, радіус-вектор якої відносно даного початку відліку дорівнює $\vec{r_0}$, паралельно до векторів $\vec{u_1}$ і $\vec{u_2}$.

Нехай у евклідовому просторі задано довільну афінну систему координат $Oxyz$ базис E якої утворюють вектори $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, для певної площини α відносно даної системи координат відомими є координати певної точки M_0 : $M_0 \in \alpha$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Нехай також відомими є координати відносно базису E таких векторів $\vec{u_1}$ і $\vec{u_2}$, які обидва є колінеарними до площин α , але не є колінеарними між собою: $\vec{u_1}\ \left(m_1,n_1,k_1\right)_E$, $\vec{u_2}\ \left(m_2,n_2,k_2\right)_E$. Зрозуміло, що при цьому виконано умову

$$rang\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{pmatrix}=2 \qquad (2.2)$$

Як відомо, відносно початку відліку O, площина α задається векторно-параметричним рівнянням виду (2.1), у якому вектор $\vec{r_0}$ представлений напрямленим відрізком $\overrightarrow{OM_0}$, $\vec{r_0}=\overrightarrow{OM_0}$, $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ де M - довільна, поточна, точка площини α . Але координати кожної точки M відносно афінної системи координат $Oxyz$ співпадають з координатами її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ відносно базису даної системи координат, тобто, якщо точка M_0 має координати $\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ відносно даної афінної системи координат $Oxyz$, то вектор $\overrightarrow{OM_0}$ відносно базису E даної системи координат має координати $\left(x_0,y_0,z_0\right)_E$. Аналогічно, якщо точка M відносно даної афінної системи координат має координати $\left(x,y,z\right)$, то вектор $\overrightarrow{OM}$ відносно базису E даної системи координат має координати $\left(x,\ y,\ z\right)_E$.

У рівнянні (2.1) вектор $\vec{r}$ представлено у вигляді лінійної комбінації векторів $\vec{r_0}$, $\vec{u_1}$ і $\vec{u_2}$. Відомо, що існування певної лінійної залежності між векторами є рівносильним до існування аналогічних лінійних залежностей між однойменними координатами цих векторів відносно довільного базису. В силу цього векторно-параметричне рівняння (2.1) з геометричної точки зору є рівносильним до системи параметричних рівнянь:

$$\begin{cases} x=x_0+u\cdot m_1+v\cdot m_2 \\ y=y_0+u\cdot n_1+v\cdot n_2 \ , \qquad \left(u,v\right)\in R^2 \\ z=z_0+u\cdot k_1+v\cdot k_2 \end{cases} \qquad (2.3)$$

В силу даної рівносильності, рівняння (2.3) є аналітичними умовами, що визначають площину α, відносно афінної системи координат $Oxyz$. Їх називають **векторно-параметричними рівняннями** даної **площини**. Це три рівняння відносно п'яти невідомих, змінних x, y, z, u, v, у якості параметрів розглядають змінні u і v. При цьому, відповідно до загальної домовленості, для рівнянь (2.3) область зміни параметрів u і v, як правило, не вказують – вона співпадає з областю допустимих значень змінних u і v у правих частинах цих рівнянь.

Із попереднього випливає, що кожну площину α, відносно кожної афінної системи координат $Oxyz$, можна задати параметричними рівняннями виду (2.3), для коефіцієнтів яких виконано умову (2.2). З іншого боку, довільні рівняння виду (2.3), для яких виконано умову (2.2), відносно довільної афінної системи координат $Oxyz$ є параметричними рівняннями певної площини. Ця площина проходить через точку M_0 з координатами (x_0, y_0, z_0) відносно даної афінної системи координат, паралельно до векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$, які, відповідно, мають координати $\left(m_1, n_1, k_1\right)_E$ і $\left(m_2, n_2, k_2\right)_E$ відносно базису E даної афінної системи координат.

Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

1. Які геометричні конструкції повинні бути заданими у тривимірному евклідовому просторі для того, щоб довільну площину цього простру можна було задати векторно-параметричним рівнянням?

2. Які геометричні відомості про площину є необхідними й достатніми для того, щоб можна було скласти векторно-параметричне рівняння цієї площини відносно певного початку відліку?

3. Який вигляд має векторно-параметричне рівняння площини відносно певного початку відліку?

4. Справедливість яких тверджень треба обґрунтувати, щоб довести, що задане рівняння є векторно-параметричним рівнянням заданої площини відносно заданого початку відліку? Відповідь обґрунтуйте.

5. У просторі задано певний початок відліку O. Для площини α відомими є точка M_0, $M_0 \in \alpha$, ($\vec{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$), вектори $\vec{u_1}$ і $\vec{u_2}$, які є колінеарними до площини α, але не є колінеарними між собою. Який вигляд має векторно-параметричне рівняння площини α відносно початку відліку O? Відповідь обґрунтуйте.

6. Чи кожну площину α відносно довільного початку відліку можна задати векторно-параметричним рівнянням?

7. Чи кожне векторно-параметричне рівняння виду (2.1) є векторно-параметричним рівнянням певної площини відносно довільного початку відліку? Відповідь обґрунтуйте.

8. Які геометричні фігури тривимірного евклідового простору утворюють математичний апарат для складання параметричних рівнянь площини?

9. Які геометричні характеристики площини повинні бути відомими для того, щоб, за умови задання відповідного математичного апарату, можна було скласти параметричні рівняння цієї площини? Чи визначають ці характеристики площину однозначно? Чи визначаються однозначно подібні характеристики площини даною площиною? Відповідь обґрунтуйте.

10. Як пов’язані між собою векторне-параметричне рівняння площини і параметричні рівняння площини за умови узгодженості відповідних математичних апаратів їхнього задання? Відповідь обґрунтуйте.

11. Чому у параметричних рівняннях площини, як правило, не вказують області зміни параметрів? Які області зміни параметрів маються на увазі? Чому?

5. Чи кожну площину відносно довільної афінної системи координат евклідового простору можна задати параметричними рівняннями? Відповідь обґрунтуйте.

2.2. Векторне і алгебраїчне рівняння площини, яка проходить через задану точку паралельно до двох заданих, не колінеарних між собою векторів. Рівняння площини, яка проходить через три задані точки, що не лежать на одній прямій. Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

Векторне рівняння площини складають за умови задання у тривимірному евклідовому просторі початку відліку – певної точки, для позначення якої, найчастіше, обирають літеру O. За початок відліку може бути обрано довільну точку простору.

Для того, щоб відносно визначеного початку відліку O площину α можна було задати векторним рівнянням, достатньо, щоб для цієї площини була відомою певна точка M_0, яка їй належить, (точніше радіус-вектор $\vec{r_0}$ цієї точки відносно обраного початку відліку O) та два вектори $\vec{u_1}$ і $\vec{u_2}$, які є колінеарними до даної площини, але не є колінеарними між собою. З геометричної точки зору, точка точка M_0 та вектори $\vec{u_1}$ і $\vec{u_2}$, визначають площину α однозначно.

Векторне рівняння площини α відносно початку відліку O має вид

$$\left(\vec{r}-\vec{r_0}\right)\cdot\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0 \tag{2.4}$$

Зрозуміло, що кожну площину, відносно будь-якого початку відліку O, можна задати векторним рівнянням виду (2.4) і, до того ж, не однозначно, бо кожна площина містить безліч точок, для кожної площини існує безліч пар колінеарних векторів, які не є колінеарними між собою. Також можна легко обгрунтувати, що будь-яке рівняння виду (2.4), у якому вектори $\vec{r_0}$, $\vec{u_1}$ та $\vec{u_2}$

є заданими, вектор $\overrightarrow{u_1}$ не є колінеарним до вектора $\overrightarrow{u_2}$, відносно будь-якого початку відліку представляє собою векторне рівняння певної площини, плошини, яка проходить через точку, радіус-вектор якої відносно даного початку відліку дорівнює вектору $\overrightarrow{r_0}$, паралельно до векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$.

Нехай у тривимірному евклідовому просторі задано довільну афінну систему координат $Oxyz$ базис E якої утворюють вектори $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$.

Нехай відносно даної системи координат відомими є координати певної точки M_0, $M_0:(x_0, y_0, z_0)$, яка належить площині α , і, відносно базису E даної системи координат, координати векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$. які є колінеарними до площини α , але не є колінеарними між собою: $\overrightarrow{u_1}\left(m_1,n_1,k_1\right)_E$, $\overrightarrow{u_2}\left(m_2,n_2,k_2\right)_E$. Зрозуміло, що при цьому виконано умову (2.2) (рис.2.2.).

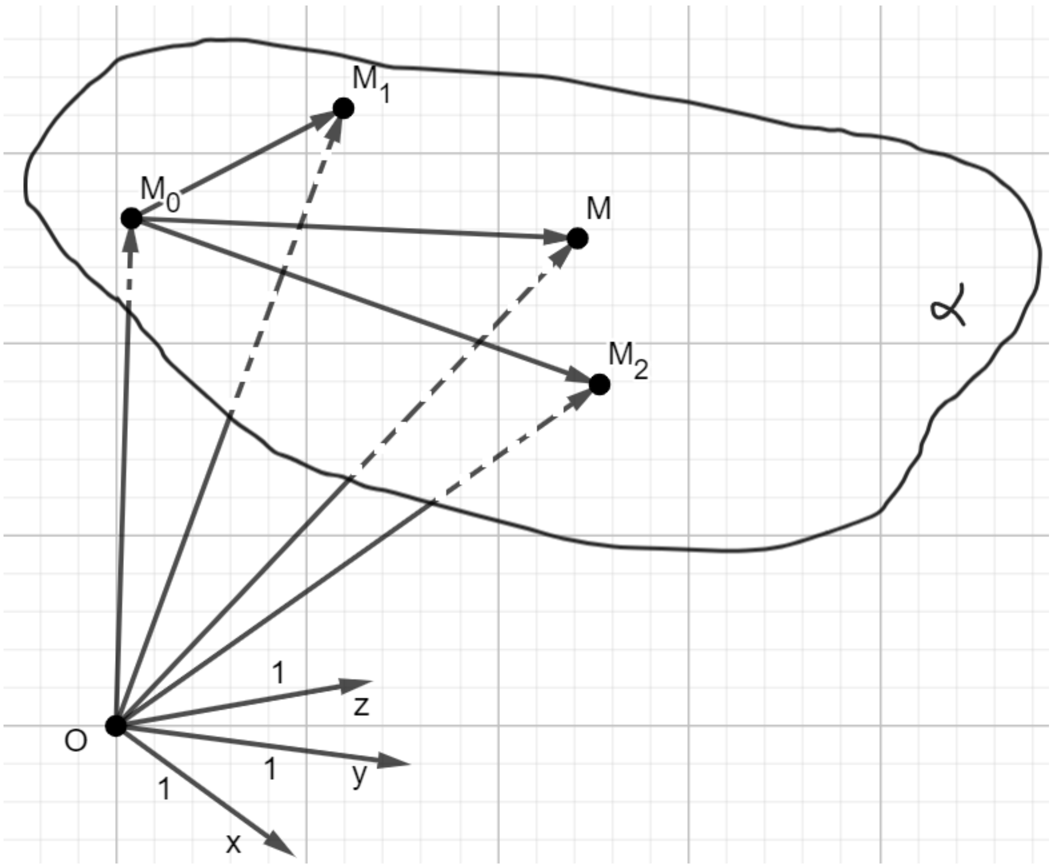

Рис. 2.2.

Наступне рівняння є рівнянням площини α відносно даної системи координат:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (2.5)$$

Таке рівняння називають **алгебраїчним рівнянням площини, що проходить через задану точку, паралельно до двох заданих, не колінеарних між собою, векторів**.

Зрозуміло, що будь-яке рівняння виду (2.5), для якого виконано умову (2.2), відносно довільної афінної системи координат $Oxyz$ з базисом E є рівнянням певної площини. Ця площина проходить через точку M_0 з координатами (x_0, y_0, z_0) відносно даної системи координат паралельно до векторів $\overrightarrow{u_1}\ (m_1,n_1,k_1)_E$ і $\overrightarrow{u_2}\ (m_2,n_2,k_2)_E$. В силу умови (2.2) вектори $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$ не є колінеарними. Зрозуміло, що за рівнянням (2.5) така площина є визначеною однозначно.

Легко обґрунтувати також, що довільну площину α відносно довільної афінної системи координат $Oxyz$ можна задати рівнянням виду (2.5), для якого виконано умову (2.2).

У евклідовій геометрії три точки, які не належать одній прямій, однозначно визначають площину, що їх містить. Одночасно, три точки площини, які не належать одній прямій, визначають три попарно не колінеарних вектора, які є колінеарними до даної площини. Отже, якщо у тривимірному евклідовому просторі задано довільну афінну систему координат $Oxyz$ базис E якої утворюють вектори $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$, відомо, що точки M_0, M_1, M_2 належать певній площині α, не лежать на одній прямій і мають відносно заданої системи координат, відповідно, координати

$\left(x_0, y_0, z_0\right)$, $\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $\left(x_2, y_2, z_2\right)$ то вектори $\overrightarrow{M_0M_1}$ і $\overrightarrow{M_0M_2}$ є колінеарними до площини α, не колінеарними між собою, відносно базису E даної системи координат, відповідно, мають координати $\left(x_1 - x_0, y_1 - x_0, z_1 - z_0\right)_E$, $\left(x_2 - x_0, y_2 - x_0, z_2 - z_0\right)_E$, згідно (2.5), відносно даної системи координат площина α задається рівнянням

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.6)$$

Рівняння (2.6) називають **рівнянням площини, що проходить через три задані точки, які не лежать на одній прямій.**

Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

1. Які геометричні фігури тривимівного евклідового простору утворюють математичний апарат для складання векторного рівняння площини?

2. Які геометричні характеристики площини є достатніми для того, щоб можна було скласти векторне рівняння цієї площини відносно певного початку відліку? Чи визначають ці характеристики площину однозначно? Чи однозначно визначає площина такі характеристики?

3. Чи кожну площину тривимірного евклідового простору відносно довільного початку відліку можна задати векторним рівнянням? Відповідь обґрунтуйте.

4. Які геометричні фігури тривимірного евклідового простору утворюють математичний апарат для складання алгебраїчного рівняння площини, що проходить через задану точку паралельно до двох заданих, не колінеарних між собою, векторів?

5. Які геометричні характеристики площини повинні бути відомими для того, щоб можна було скласти алгебраїчне рівняння площини, яка проходить

через задану точку паралельно до двох заданих, не колінеарних між собою, векторів? Чи визначають ці характеристики площину однозначно? Чи визначаються однозначно подібні характеристики площини даною площиною? Відповідь обґрунтуйте.

6. Який вигляд відносно довільної афінної системи координат $Oxyz$ має алгебраїчне рівняння площини, що проходить через задану точку паралельно до двох заданих, не колінеарних між собою, векторів? Яким є геометричний зміст коефіцієнтів такого рівняння? Яку умову повинні задовольняти ці коефіцієнти? Чому? Відповідь обґрунтуйте.

7. Чи кожну площину відносно довільної афінної системи координат тривимірного евклідового простору можна задати за допомогою рівнянням площини, яка проходить через задану точку паралельно до двох заданих, не колінеарних між собою, векторів? Відповідь обґрунтуйте.

8. Який вигляд відносно довільної афінної системи координат $Oxyz$ має рівняння площини, що проходить через три задані точки, які не належать одній прямій?

9. Чи кожну площину відносно довільної афінної системи координат тривимірного евклідового простору можна задати за допомогою рівнянням площини, що проходить через три задані точки, які не належать одній прямій? Відповідь обґрунтуйте.

2.3. Загальне рівняння площини. Лема про колінеарність вектора до площини. Аналітичні умови, що визначають півпростір відносно обраної афінної системи координат. Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

Нехай у тривимірному евклідовому просторі обрано довільну афінну систему координат $Oxyz$. Як відомо, відносно даної системи координат довільну площину α можна задати рівнянням виду (2.5). При цьому буде виконано умову (2.2). Рівняння (2.5) є рівносильним до рівняня

$$\begin{vmatrix} n_1 & k_1 \\ n_2 & k_2 \end{vmatrix} \cdot \left(x - x_0 \right) - \begin{vmatrix} m_1 & k_1 \\ m_2 & k_2 \end{vmatrix} \cdot \left(y - y_0 \right) + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \cdot \left(z - z_0 \right) = 0 .$$

Покладемо

$$A = \begin{vmatrix} n_1 & k_1 \\ n_2 & k_2 \end{vmatrix}, \qquad B = -\begin{vmatrix} m_1 & k_1 \\ m_2 & k_2 \end{vmatrix}, \qquad C = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}.$$

Тоді матимемо рівняння $A \cdot \left(x - x_0 \right) + B \cdot \left(y - y_0 \right) + C \cdot \left(z - z_0 \right) = 0$, або

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0, \tag{2.7}$$

у якому $D = -A \cdot x_0 - B \cdot y_0 - C \cdot z_0$.

Отже, кожну площину, відносно довільної афінної системи координат можна задати рівнянням виду (2.7). Рівняння (2.7) називають **загальним рівнянням площини.**

Можна довести, що у рівнянні (2.7) принаймні один з коефіцієнтів при невідомих не дорівнює нулю, тобто, коефіцієнти при невідомих цього рівняння задовольняють умову

$$A^2 + B^2 + C^2 > 0 \tag{2.8}$$

Одночасно, легко обгрунтувати, що кожне рівняння виду (2.7), для коефіцієнтів якого виконано умову (2.8), відносно будь-якої афінної системи координат є рівнянням певної однозначно визначної площини α , вектори $\overrightarrow{u_1}\left(B, -A, 0 \right)_E$, і $\overrightarrow{u_2}\left(C, 0, -A \right)_E$ зі вказаними координатами відносно базису E цієї системи координат є колінеарними до даної площини, але не колінеарними між собою.

Зрозуміло, що загальне рівняння кожної конкретної площини відносно кожної фіксованої афінної системи координат не є визначеним однозначно. Воно є визначеним з точністю до постійного числового множника, відмінного від нуля.

Наступна лема часто дозволяє суттєвим чином спростити необхідні міркування у випадках, коли при дослідженні теоретичних питань або під час розв'язування певних задач розглядають площини тривимірного евклідового простору, задані загальними рівняннями відносно афінної системи координат.

Лема (про колінеарність вектора до площини). Нехай у тривимірному евклідовому просторі обрано довільну афінну систему координат $Oxyz$ базис E якої утворюють вектори $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$. Нехай відносно даної афінної системи координат площину α задано загальним рівнянням (2.7), для якого, зрозуміло, виконано умову (2.8). Вектор $\vec{u}$ з координатами $\left(m, n, k\right)_E$ відносно базису E даної афінної системи координат є колінеарним до площини α тоді та тільки тоді, коли виконано умову

$$A \cdot m + B \cdot n + C \cdot k = 0 \qquad (2.9)$$

Наслідок. Нехай у тривимірному евклідовому просторі обрано довільну афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Нехай відносно даної афінної системи координат площину α задано загальним рівнянням (2.7), для якого, зрозуміло, виконано умову (2.8). Вектор $\vec{u}$ з координатами $\left(A, B, C\right)_E$ не є колінеарним до даної площини (рис. 2.3).

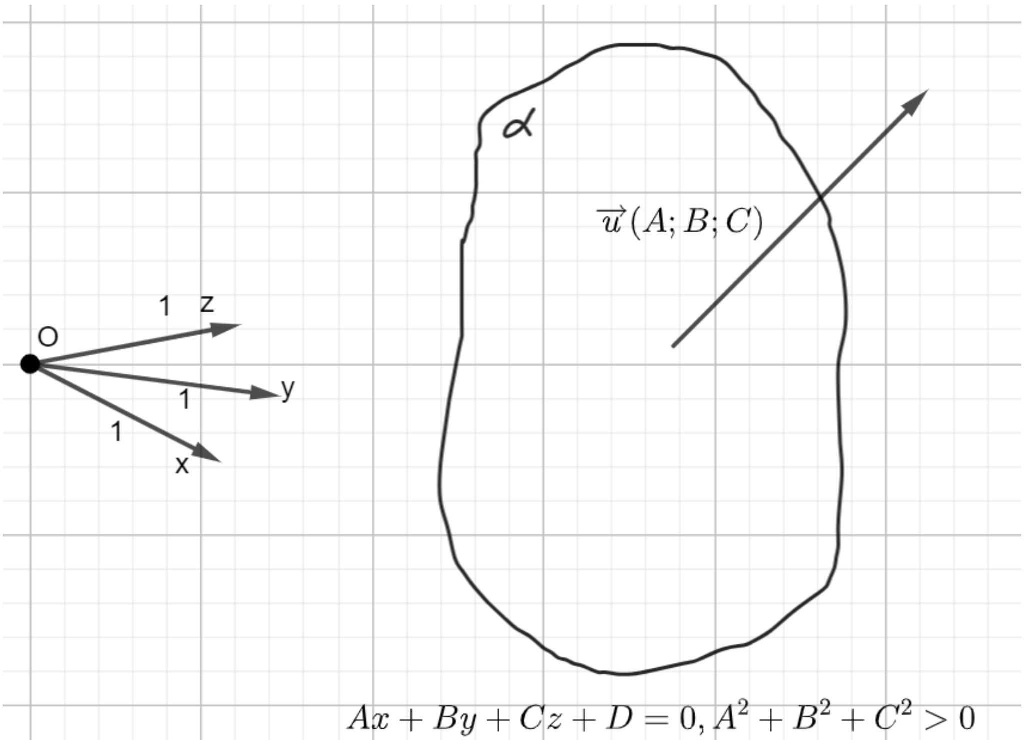

Рис.2.3.

Як відомо, у евклідовій геометрії кожна площина розділяє простір на два півпростіри. Для кожного з цих півпростерів ця площина є межевою площиною, межею. У різних аксіоматичних теоріях евклідової геометрії ця площина, за означенням, або належить кожному з цих півпросторів, або не належить жодному з них. Будемо вважати, що у нашому випадку межева площина не належить до жодного з двох даних півпросторів.

Має місце наступна

Теорема 2.1. Якщо у тривимірному евклідовому просторі відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ площину α задано за допомогою загального рівнянням (2.7), для якого виконано умову (2.8), то аналітичні умови, що характеризують один з півпросторів, визначених даною площиною, мають вигляд нерівності

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D > 0, \tag{2.10}$$

а другий – нерівності

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D < 0 . \tag{2.11}$$

Справедливими також є наступні наслідки даної теореми.

Наслідок 1. Нехай у евклідовому просторі обрано певну афінну систему координат $Oxyz$, відносно даної системи координат площину α задано за допомогою загального рівнянням (2.7) для якого виконано умову (2.8). Точки N і K, відповідно, з координатами $\left(x_N, y_N, z_N\right)$ і $\left(x_M, y_M, z_M\right)$ відносно даної системи координат лежать по один бік відносно площини α тоді та тільки тоді, коли числа $n = A\cdot x_N + B\cdot y_N + C\cdot z_N + D$ і $k = A\cdot x_K + B\cdot y_K + C\cdot z_K + D$ одночасно є або додатними, або від'ємними ($n\cdot k > 0$).

Наслідок 2. Нехай у евклідовому просторі обрано певну афінну систему координат $Oxyz$, відносно даної системи координат площину α задано за допомогою загального рівняння (2.7), для якого виконано умову (2.8). Точки N і K, відповідно, з координатами $\left(x_N, y_N, z_N\right)$ і $\left(x_M, y_M, z_M\right)$ відносно даної системи координат лежать по різні боки відносно площини α тоді та тільки тоді, коли числа $n = A\cdot x_N + B\cdot y_N + C\cdot z_N + D$ і $k = A\cdot x_K + B\cdot y_K + C\cdot z_K + D$ мають різні знаки ($n\cdot k < 0$).

Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

1. Які геометричні фігури евклідового простору утворюють математичний апарат для складання загального рівняння площини?

2. Який вигляд має загальне рівняння площини відносно афінної системи координат $Oxyz$? Яку обов’язкову умову задовольняють коефіцієнти цього рівняння?

3. Чи кожну площину відносно довільної афінної системи координат тривимірного евклідового простору можна задати загальним рівнянням? Відповідь обґрунтуйте.

4. Чи кожне рівняння виду $A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0$, коефіцієнти при невідомих якого задовольняють умову $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, є рівнянням певної

площини відносно довільної афінної системи координат $Oxyz$? Відповідь обґрунтуйте.

5. Чи є загальне рівняння кожної конкретної площини відносно кожної фіксованої афінної системи координат визначеним однозначно? Відповідь обгрунтуйте.

6. У якому випадку вектор називають колінеарним до площини?

7. Як формулюється лема про колінеарність вектора до площини? Чи носить ця лема характер критерію?

8. Обґрунтуйте справедливість леми про колінеарність вектора до площини.

9. Яким чином у геометрії тривимірного евклідового простору, як правило, визначають півпростір?

10. У тривимірному евклідовому просторі обрано довільну афінну систему координат $Oxyz$. Площину α відносно цієї системи координат задано загальним рівнянням. Який вигляд мають аналітичні умови, що задають ті півпростори, на які площина α розділяє простір? Відповідь обґрунтуйте.

11. У евклідовому просторі обрано довільну афінну систему координат. Площину α відносно цієї системи координат задано загальним рівнянням. Як за координатами двох точок відносно даної системи координат з'ясувати належать ці точки площині α, чи ні, а якщо ні, то чи розташовані вони по одну сторону, чи по різні сторони відносно цієї площини? Відповідь обґрунтуйте.

2.4. Повне загальне рівняння площини. Рівняння площини «у відрізках на осях». Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

Нехай у тривимірному евклідовому просторі відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ площину α задано загальним рівнянням виду (2.7), для якого виконано умову (2.8).

Рівняння (2.7) називається **повним загальним рівнянням площини** α, якщо кожний з його коефіцієнтів A, B, C та D є відмінним від нуля. Якщо принаймні один з коефіцієнтів дорівнює нулю, то рівняння (2.7) називається **неповним**. При цьому, зрозуміло, що, завдяки умові (2.8) серед коефіцієнтів A, B та C є принаймні один, відмінний від нуля.

Як відомо, будь-яку площину α відносно будь-якої афінної системи координат можна задати за допомогою безлічі різних загальних рівнянь, кожне з яких має вид рівняння (2.7), для якого виконано умову (2.8); при цьому одне рівняння утворюється з іншого за допомогою множення обох його частин на певне дійсне число, відмінне від нуля. Зрозуміло, що, якщо одне загальне рівняння площини є повним, то всі інші загальні рівняння цієї площини відносно тієї ж самої афінної системи координат також є повними. Отже, у випадку повного загального рівняння виду (2.7) завжди можна перейти до спеціального виду повного загального рівняння, яке називають **рівнянням площини «у відрізках на осях».**

У повному загальному рівнянні (2.7) коефіцієнт D є відмінним від нуля. Тому це рівняння є рівносильним до рівняння $\frac{A}{D}\cdot x+\frac{B}{D}\cdot y+\frac{C}{D}\cdot z+1=0$ або

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{2.12}$$

де $a=\frac{-D}{A}$, $b=\frac{-D}{B}$, $c=\frac{-D}{C}$. Рівняння (2.12) називається **рівнянням площини «у відрізках на осях».** Як вже було підкреслено, це окремий випадок повного загального рівняння площини: 1 ≠ 0, коефіцієнтами при змінних x, y, z, є числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, жодне з цих чисел не дорівнює нулю.

Назва рівняння (2.12) має очевидні пояснення. Якщо площину α відносно афінної системи координат $Oxyz$ задано рівнянням виду (2.12), то легко обґрунтувати, що площина α перетинає кожну з координатних осей, і знайти координати відповідних точок перетину. Дійсно, очевидно, площина α перетинає вісь Ox у точці M з координатами $(a, 0, 0)$, вісь Oy у точці $N(0, b, 0)$ і вісь Oz у точці $K(0, 0, c)$. У підсумку, якщо площину α відносно афінної системи координат $Oxyz$ задано рівнянням виду (2.12), то наперед відомо, що ця площина перетинає осі координат у трьох різних точках, без спеціальних обчислень відомими є координати цих точок.

Справедливим є й обернене твердження: якщо площина α перетинає осі координат Ox, Oy, Oz афінної системи координат $Oxyz$, відповідно, у точках $M(a, 0, 0)$, $N(0, b, 0)$, $K(0, 0, c)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, то єдина площина α, що ці точки містить, відносно даної афінної системи координат задається загальним рівнянням (2.1).

Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

1. У якому випадку загальне рівняння площини називають повним?

2. У якому випадку загальне рівняння площини називають не повним?

3. Яке рівняння площини називають рівнянням «у відрізках на осях»?

4. Чи є рівняння площини «у відрізках на осях» окремим випадком загального рівняння площини? Якщо так, то якого саме?

5. У якому випадку від загального рівняння площини можна перейти до рівняння площини «у відрізках на осях»? Як це зробити у випадку можливості?

6. Як можна пояснити назву «рівняння площини «у відрізках на осях»?

2.5. Неповні загальні рівняння площини. Особливості розташування площини відносно афінної системи координат у випадках задання цієї площини відносно даної системи координат неповним загальним рівнянням. Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

Нехай, відносно афінної системи координат $Oxyz$ площину α задано неповним загальним рівнянням виду (2.7) за умови справедливості нерівнеості (2.8). Згідно попередніх означень, тоді принаймні один з чотирьох коефіцієнтів даного загального рівняння дорівнює нулю. При цьому можливими є різні випадки.

1. У рівнянні (2.7) $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D = 0$, рівняння (2.7) має вигляд:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = 0 \tag{2.13}$$

Трійка чисел $(0, 0, 0)$ утворює розв'язок рівняння (2.13). Це означає, що площина α проходить через початок відліку O даної афінної системи координат. Одночасно, площина α не містить жодної з координатних осей, перетинає кожну координатну площину за певною прямою, що проходить через початок відліку.

2. У рівнянні (2.7) $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, рівняння (2.7) має вигляд:

$$B \cdot y + C \cdot z + D = 0 \tag{2.14}$$

Площина α є паралельною до осі Ox, отже, не проходить через початок відліку, осі Oy і Oz перетинає, відповідно, у точках $B\left(0, \dfrac{-D}{B}, 0\right)$ і $C\left(0, 0, \dfrac{-D}{C}\right)$, координатну площину Oyz перетинає за прямою BC, координатні площини Oxy і Oxz - за прямими, які, відповідно, проходять через точки B і C паралельно до осі Ox.

3. У рівнянні (2.7) $A \neq 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, рівняння (2.7) має вигляд:

$$A \cdot x + C \cdot z + D = 0 \qquad (2.15)$$

Площина α є паралельною до осі Oy, отже, не проходить через початок відліку, осі Ox і Oz перетинає, відповідно, у точках $A\left(\frac{-D}{A}, 0, 0\right)$ і $C\left(0, 0, \frac{-D}{C}\right)$, координатну площину Oxz перетинає за прямою AC , координатні площини Oxy і Oyz - за прямими, які, відповідно, проходять через точки A і C паралельно до осі Oy.

4. У рівнянні (2.7) $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$, $D \neq 0$, рівняння (2.7) має вигляд:

$$A \cdot x + B \cdot y + D = 0 \qquad (2.16)$$

Площина α є паралельною до осі Oz, отже, не проходить через початок відліку, осі Ox і Oy перетинає, відповідно, у точках $A\left(\frac{-D}{A}, 0, 0\right)$ і $B\left(0, \frac{-D}{B}, 0\right)$, координатну площину Oxy перетинає за прямою AB , координатні площини Oyz і Oxz - за прямими, які, відповідно, проходять через точки A і B паралельно до осі Oz.

5. У рівнянні (2.7) $A = 0$, $D = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, рівняння (2.7) має вигляд:

$$B \cdot y + C \cdot z = 0 \qquad (2.17)$$

Очевидно, координати початоку відліку O задовольняють рівняння (2.17). отже, $O \in \alpha$. Одночасно, площина α містить координатну вісь Ox , координатну площину Oyz перетинає за прямою, яка проходить через початок відліку і не співпадає ані з координатною віссю Oy, ані з координатною віссю Oz.

6. У рівнянні (2.7) $A \neq 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, $D = 0$, воно має вигляд

$$A \cdot x + C \cdot z = 0, \qquad (2.18)$$

площина α проходить через початок відліку O, містить координатну вісь Oy, координатну площину Oxz перетинає по прямій, яка проходить через початок відліку, але не співпадає ані з координатною віссю Ox, ані з координатною віссю Oz.

7. У рівнянні (2.7) $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$, $D = 0$, воно має вигляд

$$A \cdot x + B \cdot y = 0, \qquad (2.19)$$

площина α проходить через початок відліку O, містить координатну вісь Oz, координатну площину Oxy перетинає по прямій, яка проходить через початок відліку, але не співпадає ані з координатною віссю Ox, ані з координатною віссю Oy.

8. У рівнянні (2.7) $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, рівняння (2.7) має вигляд:

$$C \cdot z + D = 0 \qquad (2.20),$$

Той факт, що $D \neq 0$, означає, що площина α не проходить через початок відліку O. Одночасно, вона є паралельною до координатних осей Ox та Oy і, в силу цього, до координатної площини Oxy, перетинає координатну вісь Oz у точці $C\left(0,\, 0,\, \frac{-D}{C}\right)$, координатні площини Oxz і Oyz за прямими, які у цих площинах проходять через точку C, відповідно, паралельно до координатних осей Ox та Oy.

9. У рівнянні (2.7) $A = 0$, $B \neq 0$, $C = 0$, $D \neq 0$, рівняння (2.7) має вигляд:

$$B \cdot y + D = 0 \qquad (2.21),$$

Аналогічно попередньому випадку, це означає, що площина α не проходить через початок відліку O. Одночасно, вона є паралельною до координатних осей Ox та Oz і, в силу цього, до координатної площини Oxz, перетинає координатну вісь Oy у точці $B\left(0, \dfrac{-D}{B}, 0\right)$, координатні площини Oxy, і Oyz за прямими, які у цих площинах проходять через точку B, відповідно, паралельно до координатних осей Ox та Oz.

10. У рівнянні (2.7) $A \neq 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D \neq 0$, рівняння (2.7) має вигляд:

$$A \cdot x + D = 0, \tag{2.21}$$

За повною аналогією з двома попередніми випадками, це означає, що площина α не проходить через початок відліку O, є паралельною до координатних осей Oy та Oz і, в силу цього, до координатної площини Oyz, перетинає координатну вісь Ox у точці $B\left(0, \dfrac{-D}{B}, 0\right)$, координатні площини Oxy, і Oxz за прямими, які у цих площинах проходять через точку A, відповідно, паралельно до координатних осей Oy та Oz.

11. Згідно умови (2.8), коефіцієнти A, B, C загального рівняння (2.7) площини α одночасно не можуть дорівнювати нулю, тобто, наступним випадком неповного загального рівняння (2.7), може бути, наприклад, випадок, згідно якого $A \neq 0$, $B = C = D = 0$. Це означає, що рівняння (2.7) має вид $A \cdot x = 0$, або, у рівносильному варіанті, просто $x = 0$. Отже, маємо рівняння координатної площини Oyz, $\alpha \equiv Oyz$.

12. Аналогічним чином, якщо у рівнянні (2.7) $B \neq 0$, $A = C = D = 0$, площина α співпадає з координатною площиною Oxz.

13. У випадку коли $C \neq 0$, $A = B = D = 0$, площина α співпадає з координатною площиною Oxy.

Завдяки справедливості умови (2.8), інші варіанти неповного загального рівняння виду (2.7) є неможливими.

Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

1. У якому випадку загальне рівняння площини відносно афінної системи координат називається неповним?

2. Які існують види неповних загальних рівнянь площини? Для кожного із можливих видів неповного загального рівняння площини вкажіть особливості розміщення відповідної площини відносно обраної афінної системи координат.

3. Площину α відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ задано за допомогою загального рівняння $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$, $A^2+B^2+C^2>0$. Що можна стверджувати про характер розміщення площини α відносно даної афінної системи координат, якщо для коефіцієнтів цього равняння мають місце твердження $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, $D=0$?

4. Площину α відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ задано за допомогою загального рівняння $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$, $A^2+B^2+C^2>0$. Що можна стверджувати про характер розміщення площини α відносно даної афінної системи координат, якщо для коефіцієнтів цього равняння мають місце твердження $A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$?

5. Площину α відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ задано за допомогою загального рівняння $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$, $A^2+B^2+C^2>0$. Що можна стверджувати про характер розміщення площини α відносно даної афінної системи координат, якщо для коефіцієнтів цього равняння мають місце твердження $A\neq 0$, $B=0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$?

6. Площину α відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ задано за допомогою загального рівняння $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$, $A^2+B^2+C^2>0$. Що можна стверджувати про характер розміщення

площини α відносно даної афінної системи координат, якщо для коефіцієнтів цього равняння мають місце твердження $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$, $D \neq 0$?

7. Площину α відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ задано за допомогою загального рівняння $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Що можна стверджувати про характер розміщення площини α відносно даної афінної системи координат, якщо для коефіцієнтів цього равняння мають місце твердження $A \neq 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, $D = 0$?

8. Площину α відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ задано за допомогою загального рівняння $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Що можна стверджувати про характер розміщення площини α відносно даної афінної системи координат, якщо для коефіцієнтів цього равняння мають місце твердження $A = 0$, $D = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$?

9. Площину α відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ задано за допомогою загального рівняння $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Що можна стверджувати про характер розміщення площини α відносно даної афінної системи координат, якщо для коефіцієнтів цього равняння мають місце твердження $C \neq 0$, $A = B = D = 0$?

2.6. Взаємне розташування двох площин. Аналітичні умови, що задають пряму у просторі як лінію перетину двох площин. Жмуток та в'язка площин Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

Дві різні **площини** тривимірного евклідового простору або **є паралельними** (не мають спільних точок), або **перетинаються за** певною **прямою** (множина їх спільних точок утворює пряму) – рис. 2.4.

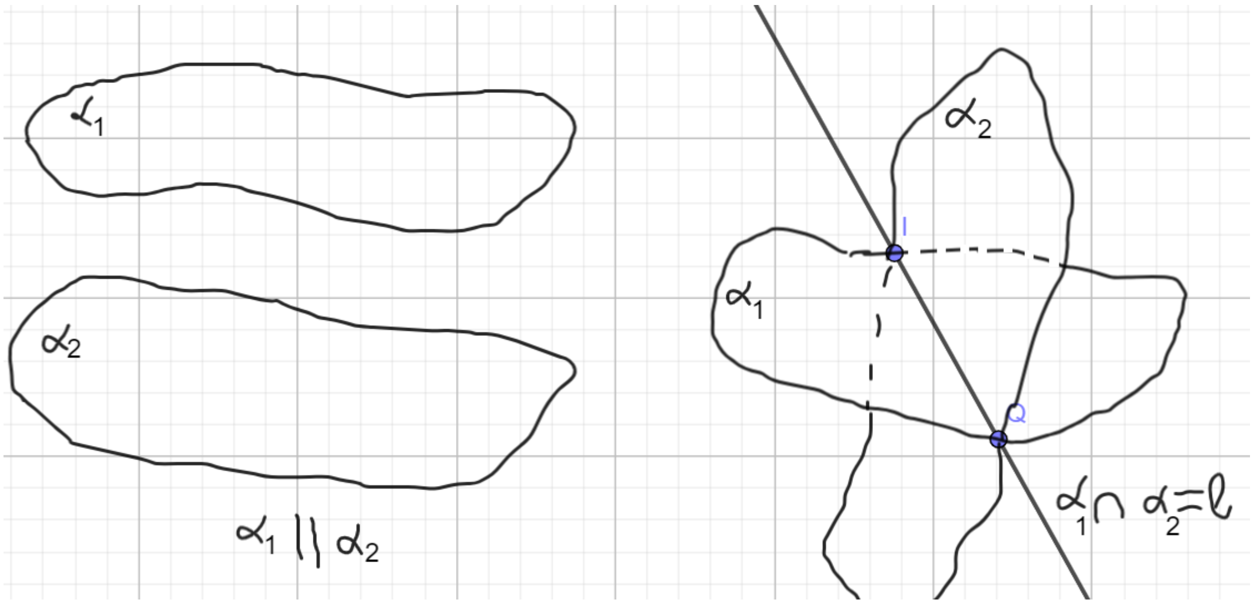

Рис. 2.4.

У аналітичній геометрії тривимірного евклідового простору ставиться задача встановлення характеру взаємного розташування двох площин за аналітичними умовами, що визначають ці площини відносно певного однакового апарату для визначення подібних умов. З геометричної точки зору зрозуміло, що, завдяки наявності саме аналітичних умов, така задача завжди має однозначно визначений розв'язок.

Подалі, у якості відповідного апарату будемо розглядати афінну систему координат.

Нехай у тривимірному евклідовому просторі обрано довільну афінну систему координат $Oxyz$. Для кожної площини відносно цієї афінної системи координат можна знайти, до того ж не однозначно, а з точністю до постійного не нульового множника, загальне рівняння виду (2.7), коефіцієнти якого задовлольняють умову (2.8), що цю площину відносно обраної системи координат визначає. Кожне рівняння виду (2.7), для коефіцієнтів якого виконано умову (2.8), однозначно задає певну площину відносно довільним чином обраної афінної системи координат. Це означає, що за загальними рівняннями площин α_1 і α_2 відносно фіксованої афінної системи координат для цих площин можна визначити характер їхнього взаємного розташування.

Але у першу чергу, зрозуміло, треба з'ясуватити, чи є ці площини різними, чи співпадають.

Нехай відносно афінної системи координат $Oxyz$, площину α_1 задано за допомогою загального рівняння

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \qquad (2.\ 22)$$

При цьому, зрозуміло, виконано умову

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0\ . \qquad (2.23)$$

Нехай площину α_2 задано загальним рівнянням

$$A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0, \qquad (2.24)$$

одночасно виконано умову

$$A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0. \qquad (2.25)$$

Встановлення характеру взаємного розташування площин α_1 і α_2 зводиться до характеристики множини їх спільних точок. Отже, з алгебраїчної точки зору, задача встановлення характеру взаємного розташування площин α_1 і α_2 зводиться до дослідження наступної системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома змінними.

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (2.26)$$

Згідно теореми Кронекера – Капеллі потужність множини розв'язків системи (2.26) залежить від співвідношення між рангами r_1 і r_2, відповідно, основної і поширеної матріці цієї системи:

$$r_1 = rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \qquad r_2 = rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

При цьому, зрозуміло, що $0 \le r_1 \le r_2 \le 2$. В силу умов (2.23), (2.25), $r_1 \ne 0$ і насправді, справедливою є нерівність $1 \le r_1 \le r_2 \le 2$. Звідси випливає, що можливими є лише наступні випадки.

I. $r_1 = r_2 = 1$. За теоремою Кронекера-Капеллі система (2.26) має розв'язки, множина її розв'язків співпадає з множиною розв'язків кожного з рівнянь цієї системи. З геометричної точки зору, це означає, що у данному випадку кожна точка площини α_1 належить площині α_2 і навпаки, $\alpha_1 \equiv \alpha_2$.

II. $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, тобто, $r_1 \neq r_2$. За теоремою Кронекера – Капеллі, система (2.26) не має розв'язків. З геометричної точки зору це означає, що площини α_1 і α_2 не мають спільних точок, є паралельними.

III. $r_1 = r_2 = 2$. За теоремою Кронекера-Капеллі система (2.26) має розв'язки, таких розв'язків безліч, ця безліч залежить від одного параметру, який може приймати довільні дійсні значення. З геометричної точки зору, це означає, що площини α_1 і α_2 перетинаються за певною прямою l. Пряма l відносно даної афінної системи координат $Oxyz$ повністю характеризується системою рівнянь (2.26). Це означає, що система рівнянь (2.26), для коефіцієнтів якої виконано умову $r_1 = 2$, являє собою аналітичні умови, що задають пряму l відносно даної афінної системи координат. Говорить, що пряму l задано як лінію перетину площин α_1 і α_2. Іноді систему (2.26), для коефіцієнтів якої виконано умову $r_1 = 2$, називають **загальними рівняннями прямої** l **відносно** обраної **афінної системи координат.**

У підсумку, має місце наступна теорема.

Теорема 2.2. Нехай відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ площини α_1 і α_2 задано, відповідно, загальними рівняннями (2.22) і (2.24), виконано умови (2.23) і (2.25). Якщо для системи рівнянь (2.26) вірними є рівності $r_1 = r_2 = 1$, то $\alpha_1 \equiv \alpha_2$, якщо для системи (2.26) вірними є рівності $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, то площини α_1 і α_2 є паралельними, у випадку справедливості рівностей $r_1 = r_2 = 2$ площини α_1 і α_2 перетинаються за певною прямою: існує така пряма l, що $\alpha_1 \cap \alpha_2 = l$.

Теорема 2.2 є теоремою типу «Перебору основ». Для подібної теореми завжди справедливою є обернена теорема. В силу цього, отримані висновки, найчастіше, формулюють у вигляді однієї теореми, яка носить характер відповідного критерію:

Теорема 2.3. Нехай відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ площини α_1 і α_2 задано, відповідно, загальними рівняннями (2.22) і (2.24), для яких, відповідно, виконано умови (2.23) і (2.25). $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ тоді та тільки тоді, коли для системи (2.26) вірними є рівності $r_1 = r_2 = 1$; площина α_1 є паралельною до площини α_2 тоді та тільки тоді, коли для системи (2.26) вірними є рівності $r_1 = 1$, $r_2 = 2$; площини α_1 і α_2 перетинаються за певною прямою тоді і тільки тоді, коли вірною є рівність $r_1 = 2$.

Жмутком площин з віссю l у тривимірному евклідовому просторі називають сукупність всіх площин простору, які містять пряму l. Зрозуміло, що такий жмуток є однозначно визначеним як своєю віссю, так і будь-якими геометричними фігурами, що однозначно визначають цю вісь, зокрема, двома площинами, що перетинаються за прямою l (і, в силу цього, є складовими даного жмутка) – рис. 2.5.

Нехай відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ евклідового простору площини α_1 і α_2, відповідно, задано загальними рівняннями (2.22) і (2.24), для яких виконано умови (2.23) і (2.25). Відомо, що площини α_1 і α_2 перетинаються за певною прямою l, тобто, для відповідних матриць виконано умову $r_1 = r_2 = 2$.

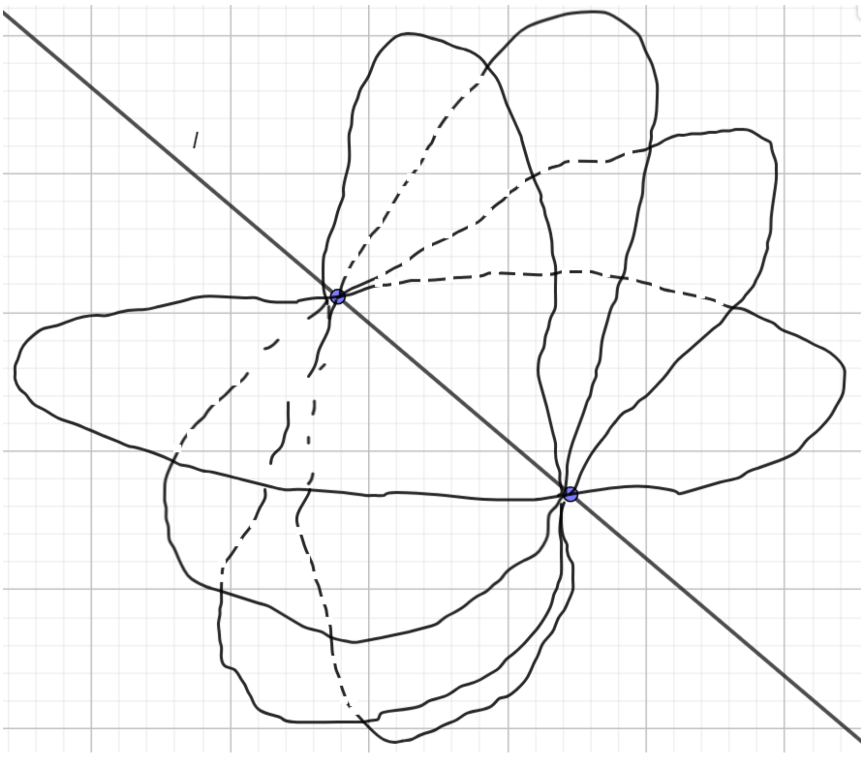

Рис. 2.5.

Жмуток площин з віссю l відносно даної системи координат характеризується рівнянням

$$\mu\cdot\left(A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1\right)+\vartheta\cdot\left(A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2\right)=0, \qquad (2.27)$$

у якому числа μ і ϑ приймають довільні дійсні значення, але одночасно не дорівнюють нулю: $\mu^2+\vartheta^2>0$. При цьому, з алгебраїчної точки зору, рівняння (2.27) розглядають як рівняння з невідомими x, y, z і параметрами μ і ϑ, впорядкована пара (μ,ϑ) може приймати усі значення із множини всіх впорядкованих пар дійсних чисел, за виключенням значення $(0,0)$. Вірними є наступні твердження. Кожну площину, що містить пряму l, відносно зазначеної системи координат $Oxyz$ можна задати рівнянням виду (2.27) – з точністю до постійного ненульового множника знайдуться відповідні числа μ і ϑ, для яких $\mu^2+\vartheta^2>0$. І навпаки – для довільних дійсних чисел μ і ϑ, таких, що $\mu^2+\vartheta^2>0$, відносно системи координат

$Oxyz$ рівняння (2.27) є рівнянням певної площини, яка проходить через пряму l.

Жмутком паралельних площин у тривимірному евклідовому просторі називають сукупність всіх площин простору, паралельних до певної однієї площини, цю площину включно. Зрозуміло, що жмуток паралельних площин є однозначно визначеним будь-якою однією площиною, яка йому належить, або іншими геометричними фігурами, які таку площину визначають – рис. 2.6.

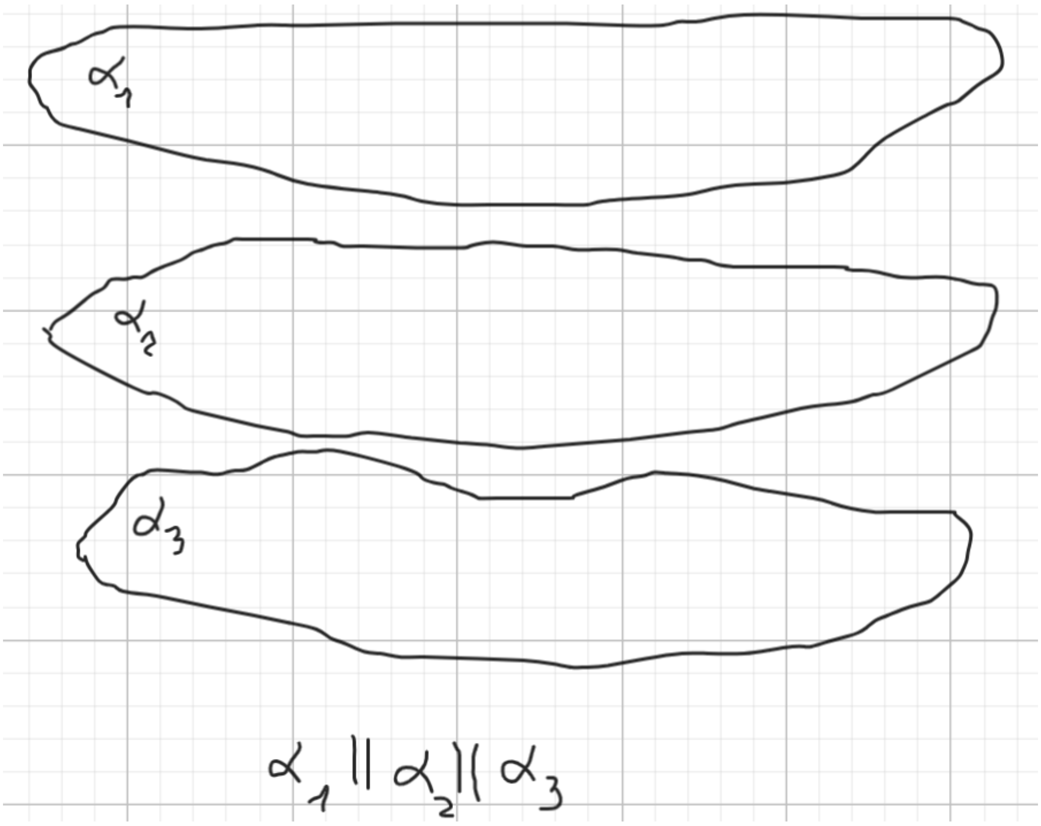

Рис. 2.6.

Якщо відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ евклідового простору паралельні між собою площини α_1 і α_2, відповідно, задано загальними рівняннями (2.22) і (2.24), для яких виконано умови (2.23) і (2.25), то жмуток паралельних площин, який містить площини α_1 і α_2 відносно даної системи координат також, у вищезазначеному розумінні, характеризується рівнянням (2.27), у якому числа μ і ϑ приймають довільні дійсні значення, але одночасно не дорівнюють нулю: $\mu^2 + \vartheta^2 > 0$. (Відміна полягає лише у тому, що, у випадку жмутка площин з певною віссю, рівняння (2.27) містить ліві частини загальних рівнянь площин α_1 і α_2, які перетинаються, а у випадку жмутка паралельних площин – ліві частини загальних рівнянь таких площин α_1 і α_2, які є паралельними).

У той же час, очевидно, що відносно довільної афінної системи координат $Oxyz$ жмуток паралельних площин, до складу якого входить площина α, задана відносно даної афінної системи координат загальним рівнянням (2.7) за умови (2.8), у повній мірі характеризується рівнянням

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + \lambda = 0, \qquad (2.28)$$

у якому число λ приймає довільні дійсні значення. З алгебраїчної точки зору рівняння (2.28) розглядають як рівняння з невідомими x, y, z і параметром λ, областю зміни якого є уся множина дійсних чисел. Кожну площину, що є паралельною до площини α, як і саму площину α, відносно зазначеної системи координат $Oxyz$ можна задати рівнянням виду (2. 28), параметр λ у якому приймає певне дійсне значення; для кожного дійсного значення параметру λ рівняння (2.28) відносно системи координат $Oxyz$ є рівнянням певної площини, яка є паралельною до площини α або з цією площиною співпадає.

Власною в'язкою площин у тривимірному евклідовому просторі називають сукупність всіх площин простору, які проходять через певну точку M_0. Точку M_0 у даному випадку називають **центром в'язки**. Зрозуміло, що, з геометричної точки зору, власна в'язка площин є однозначно визначеною своїм центром, або тими геометричними фігурами, що, у свою чергу, цей центр однозначно визначають, насамперед, трьома площинами, які перетинаються у одній точці.

Нехай відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ евклідового простору точка M_0 має координати $\left(x_0, y_0, z_0\right)$. В'язка площин з центром у точці M_0 відносно даної системи координат характеризується рівнянням

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0\ , \qquad (2.29)$$

З алгебраїчної точки зору рівняння (2.29) розглядають як рівняння з невідомими x, y, z і параметрами A, B, C, які, незалежно один від одного, можуть приймати довільні дійсні значення, лише не повинні одночасно дорівнювати нулю, тобто, обов'язково вірною повинна бути нерівність $A^2+B^2+C^2>0$. Кожну площину, що проходить через точку $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, відносно зазначеної системи координат $Oxyz$ можна задати рівнянням виду (2. 29), у якому параметри A, B, C приймають певні дійсні значення, але одночасно не дорівнюють нулю; для будь-яких дійсних значень параметрів A, B, C, $A^2+B^2+C^2>0$, рівняння (2.29) відносно системи координат $Oxyz$ є рівнянням певної площини, що проходить через точку M_0.

Якщо в'язка площин є визначеною площинами α_1 , α_2 , α_3 , які перетинаються у одній точці та, відповідно, задані відносно системи координат $Oxyz$ загальними рівняннями α_1 : $A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1=0$, $A_1^2+B_1^2+C_1^2>0$, α_2 : $A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0$, $A_2^2+B_2^2+C_2^2>0$, α_3 : $A_3\cdot x+B_3\cdot y+C_3\cdot z+D_3=0$, $A_3^2+B_3^2+C_3^2>0$ (зрозуміло, що при цьому $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\neq 0$ бо система рівнянь $\begin{cases} A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1=0 \\ A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0 \\ A_3\cdot x+B_3\cdot y+C_3\cdot z+D_3=0 \end{cases}$ відносно змінних x , y , z має єдиний розвязок), то відповідна в'язка площин відносно даної системи координат характеризується рівнянням

$$\mu\cdot(A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1)+\vartheta\cdot(A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2)+$$
$$+\sigma\cdot(A_3\cdot x+B_3\cdot y+C_3\cdot z+D_3)=0. \qquad (2.30)$$

Рівняння (2.30) при цьому розглядають як рівняння з невідомими x, y, z і параметрами μ, ϑ, σ, останні незалежно один від одного можуть приймати довільні дійсні значення, лише не повинні одночасно дорівнювати нулю, тобто, обов'язково повинна бути вірною нерівність $\mu^2+\vartheta^2+\sigma^2>0$.

Невласною в'язкою площин у тривимірному евклідовому просторі називають сукупність всіх площин простору, які проходять через певну пряму l. Пряму l при цьому називають **віссю невласної в'язки** або **прямою, що задає напрямок невласної в'язки.** З геометричної точки зору, невласна в'язка площин є однозначно визначеною своєю віссю або тими геометричними фігурами, що, у свою чергу, цю вісь однозначно визначають. Останніми, наприклад, є спрямовуючий вектор осі, дві площини, що перетинаються, або три площинами, які належать одній в'язці але не належать одному жмутку. За аналогією до попередніх міркувань, можна визначити параметричні рівняння, які відносно заданої афінної системи координат характеризують невласну в'язку площин.

Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

1. Як дві площини тривимірного евклідового простору можуть бути розташовані одна відносно одної?

2. Як у аналітичній геометрії формулюють задачу встановлення характеру взаємного розташування двох площин за рівняннями цих площин відносно певної афінної системи координат? Чому саме так?

3. Як у математичній логіці формулюється теорема «Перебору підстав»? Як ця теорема допомагає визначити характер взаємного розташування двох площин тривимірного евклідового простору за рівняннями цих площин відносно певної афінної системи координат?

4. У тривимірному евклідовому просторі дві площини відносно певної афінної системи координат задано загальними рівняннями. Вкажіть критерій співпадання цих площин.

5. У тривимірному евклідовому просторі дві площини відносно певної афінної системи координат задано загальними рівняннями. Вкажіть критерій паралельності цих площин.

6. У тривимірному евклідовому просторі дві площини відносно певної афінної системи координат задано загальними рівняннями. Вкажіть критерій того, що ці площини перетинаються за певною прямою.

7. Для тривимірного евклідового простору наведіть означення жмутка площин з віссю l. Що представляє собою вісь такого жмутка?

8. Яким чином жмуток площин з віссю l тривимірного евклідового простору може бути визначеним геометрично?

9. Вкажіть вид стандартного рівняння, що характеризує жмуток площин з віссю l тривимірного евклідового простору відносно довільної афінної системи координат. Як характеризують таке рівняння з алгебраїчної точки зору?

10. У якому розумінні стандартне рівняння жмутка площин з віссю l тривимірного евклідового простору відносно певної афінної системи координат характеризує цей жмуток?

11. Для тривимірного евклідового простору наведіть означення жмутка паралельних площин.

12. Яким чином жмуток паралельних площин тривимірного евклідового простору може бути визначеним геометрично?

13. Вкажіть стандартні види рівнянь, що характеризують жмуток паралельних площин тривимірного евклідового простору відносно довільної афінної системи координат. Як характеризують такі рівняння з алгебраїчної точки зору?

14. У якому розумінні кожне з двох стандартних рівнянь жмутка паралельних площин тривимірного евклідового простору відносно певної афінної системи координат характеризує цей жмуток?

15. Для тривимірного евклідового простору наведіть означення власної в'язки площин. Що називають центром такої в'язки?

16. Яким чином власна в'язка площин тривимірного евклідового простору може бути визначеною геометрично?

17. Вкажіть види стандартних рівнянь, що характеризують власну в'язку площин тривимірного евклідового простору відносно довільної афінної системи координат. Як характеризують такі рівняння з алгебраїчної точки зору?

18. У якому розумінні кожне з двох стандартних рівнянь власної в'язки площин тривимірного евклідового простору відносно певної афінної системи координат характеризує цю в'язку?

19. Для тривимірного евклідового простору наведіть означення невласної в'язки площин. Що називають віссю такої в'язки?

20. Яким чином невласна в'язка площин тривимірного евклідового простору може бути визначеною геометрично?

2.7. Приклади розв'язків типових практичних завдань

Задача 2.1. У тривимірному евклідовому просторі задано афінну систему координат $Oxyz$. Скласти загальне рівняння площини, яка проходить через початок відліку і точки $A(1,-3,2)$, $B(4,2,-1)$.

Розв'язання. Для розв'язання даної задачі достатньо підставити координати точок O , A і B у рівняння (2.6) та розкрити відповідний визначник. Як підсумок, будемо мати наступні рівняння.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & -3-0 & 2-0 \\ 4-0 & 2-0 & -1-0 \end{vmatrix} = 0$$

або $x \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$,

$$x \cdot (3-4) - y \cdot (-1-8) + z \cdot (2+12) = 0,\ -x + 9 \cdot y + 14 \cdot z = 0,$$

$$x - 9 \cdot y - 14 \cdot z = 0.$$

Останнє рівняння є шуканим.

Задача 2.2. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Точки A, B, C, D задані своїми координатами відносно даної системи координат: $A(1,-1,1)$, $B(0,2,4)$, $C(1,3,3)$, $D(4,0,-3)$. Перевірити, чи існує площина, якій ці точки разом належать. Якщо так, то скласти загальне рівняння цієї площини.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ відносно базису обраної системи координат: $\overrightarrow{AB}(-1,3,3)$, $\overrightarrow{AC}(0,4,2)$, $\overrightarrow{AD}(3,1,-4)$. Задані точки A, B, C , D належать одній площині тоді та тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ є компланарними. Вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ є компланарними тоді та тільки тоді, коли визначник, складений з їхніх координат відносно довільного базису множини векторів евклідового простору дорівнює нулю. Отже, обчислимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 16 + 18 - 36 + 2 = 0.$$

Отримана рівність означає, що вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ є компланарними, існує певна площина α, якій належать задані точки $A, B, C\ , D$. Рівняння площини α зручніше усього, здається, скласти у вигляді рівняння виду (2.5) - рівняння площини, яка проходить, припустимо, через точку A паралельно до векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Зрозуміло, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ не є колінеарними, бо їх відповідні координати не є пропорційними. У підсумку, будемо мати:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Для переходу від отриманого рівняння площини α до її загального рівняння достатньо розкрити ориманий визначник і звести подібні доданки:

$$(x-1)\cdot(6-12) - (y+1)\cdot(-2) + (z-1)\cdot(-4) = 0,$$

$$-6\cdot(x-1) + 2\cdot(y+1) - 4\cdot(z-1) = 0, \quad 3\cdot(x-1) - (y+1) + 2\cdot(z-1) = 0,$$

$$3\cdot x - y + 2\cdot z - 3 - 1 - 2 = 0,\ 3\cdot x - y + 2\cdot z - 6 = 0.$$

Отже, маємо шукану відповідь.

Задача 2.3. Площину α відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ задано за допомогою рівняння $2\cdot x + 4\cdot z + 7 = 0$. Вказати особливості розташування цієї площини відносно даної афінної системи координат.

Визначити рівняння слідів даної площини у відповідних координатних площинах. Виконати ілюстративний рисунок.

Розв'язання. Задане рівняння площини α є неповним загальним рівнянням. У цьому рівнянні лише один коефіцієнт, коефіцієнт при змінній y, дорівнює нулю. Це означає, що дана площина є паралельною до координатної осі Oy, не є паралельною до інших координатних осей і, зрозуміло, не є паралельною до жодної з координатних площин.

Рівняння $2\cdot x+4\cdot z+7=0$ у координатній площині Oxz є повним загальним рівнянням прямої l_1 перетину площини α з даною координатною площиною, сліду площини α у координатній площині Oxz. Зведемо дане рівняння до виду рівняння «у відрізках на осях»:

$$2\cdot x+4\cdot z+7=0 \Leftrightarrow 2\cdot x+4\cdot z=-7 \Leftrightarrow -\frac{2}{7}\cdot x-\frac{4}{7}\cdot z=1 \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{7}{2}}+\frac{z}{-\frac{7}{4}}=1.$$

За отриманим рівнянням легко знаходяться координати точок перетину площини α з координатними осями Ox і Oz:

$$\alpha\cap Ox=A, \quad A\left(\frac{-7}{2}, 0, 0\right); \quad \alpha\cap Oz=B, \quad B\left(0, 0, -\frac{7}{4}\right).$$

Оскільки площина α є паралельною до координатної осі Oy, то площина α перетинає координатну площину Oxy за прямою l_2, яка проходить через точку A паралельно до осі Oy. Рівняння цієї прямої у площині Oxy має вид

$x=-3{,}5$. Аналогічно, площина α перетинає координатну площину Oyz за прямою l_3, яка проходить через точку B паралельно до осі Oy і має у координатній площині Oyz рівняння $z=-1{,}75$.

$$l_1: \begin{cases} \frac{x}{-3{,}5}+\frac{z}{-1{,}75}=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$l_2:\begin{cases} x=-3{,}5 \\ z=0 \end{cases}$$

$$l_3:\begin{cases} z=-1{,}75 \\ x=0 \end{cases}$$

Отриманий розв’язок проілюстровано на рис. 2.7 .

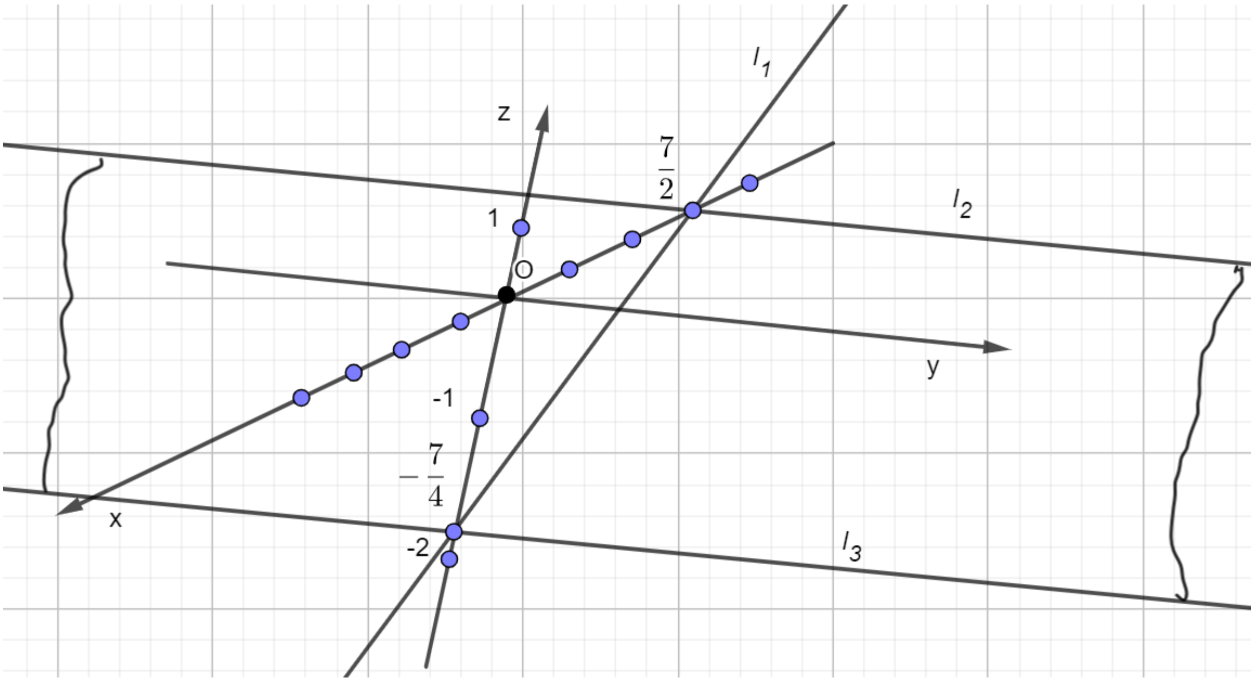

Рис.2.7.

Задача 2.4. Площину α відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ задано за допомогою рівня $y+2\cdot z=0$. Вказати особливості розташування цієї площини відносно даної афінної системи координат. Визначити рівняння слідів даної площини у відповідних координатних площинах. Виконати ілюстративний рисунок.

Розв’язання. Задане рівняння площини α є неповним загальним рівнянням. У цьому рівнянні коефіцієнт при змінній x і вільний член дорівнюють нулю. Це означає, що дана площина проходить через початок відліку даної системи координат і є колінеарною до напрямлюючого вектора координатної осі Ox . Звідси випливає, що площина α містить вісь Ox , координатну площину Oyz перетинає за прямою l, що проходить через початок відліку.

Рівняння $y+2\cdot z=0$ у координатній площині Oyz є рівнянням прямої l, пряма l є слідом площини α у площині Oyz, координатна вісь Ox є спільним слідом площини α у координатних площинах Oxy і Oxz. Для побудови ілюстративного рисунку знайдемо координати якої-небудь, відмінної від початку відліку, точки A прямої l. Зрозуміло, що $x_A=0$. Покладемо $z_A=-1$, тоді $y_A=2$. Отже, точка A з координатами $x_A=0$, $y_A=2$, $z_A=-1$ належить прямій l. Побудова зображення цієї точки на зображенні системи координат $Oxyz$ дозволяє виконати необхідний ілюстративний рисунок (рис. 2.8.).

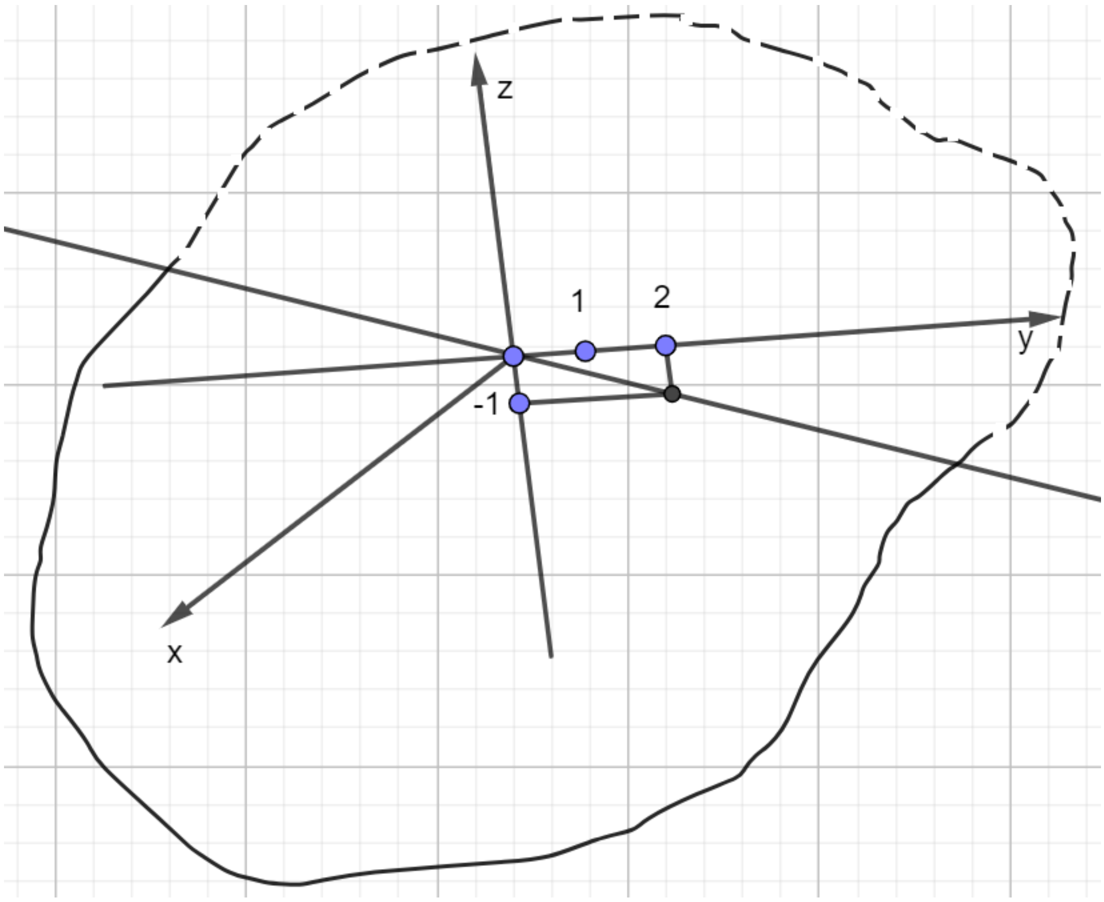

Рис. 2.8.

Задача 2.5. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат площину α_1

задано рівнянням $2\cdot x-3\cdot y+z=0$. Написати рівняння площини α_2, яка проходить через точку $M\left(1,\ 3,\ -1\right)$ паралельно до площини α_1.

Розв'язання. По-перше, переконаємося у тому, що точка M не належить площині α_1. Це дійсно так, бо $2\cdot 1-3\cdot 3-1=-8\neq 0$.

Оскільки за умови задачі площина α_2 повинна бути паралельною до площини α_1, в силу справедливості теореми 2.3 рівняння площини α_2 можна шукати у виді $2\cdot x-3\cdot y+z+D=0$. В силу того, що $M\in\alpha_2$, вірною повинна бути тотожність $2\cdot 1-3\cdot 3-1+D\equiv 0$. Звідси випливає, що $D=8$. Отже, шукане рівняння площини α_2 має вид $2\cdot x-3\cdot y+z+8=0$.

Задача 2.6. У тривимірному евклідовому просторі задано афінну систему координат $Oxyz$. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M\left(6,8,10\right)$, не проходить через початок відліку, перетинає координатні осі у точках, координати яких на цих осях є однаковими.

Розв'язання. Зрозуміло, що зручніше за все шукати рівняння визначеної площини у виді рівняння «у відрізках на осях». Згідно умови задачі, воно повинне мати вигляд $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$. Координати точки M повинні утворювати роз'вязок цього рівняння, тобто, повинна мати місце тотожність $\frac{6}{a}+\frac{8}{a}+\frac{10}{a}=1$. Звідси знаходимо, що $a=24$. Отже, шукане рівняння площини запишеться як $\frac{x}{24}+\frac{y}{24}+\frac{z}{24}=1$ або $x+y+z-24=0$.

Задача 2.7. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат задано координати вершин трикутника ABC : $A\left(2,5,-1\right)$, $B\left(1,-5,-15\right)$, $C\left(-2,1,3\right)$. З'ясувати, які з сторів даного трикутника перетинаються кожною із координатних площин.

Розв'язання. Перевіримо, спочатку, що точки A , B , C дійсно утворюють вершини трикутника, тобто, не належать одній прямій. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\left(-1,-10,-14\right)$, $\overrightarrow{AC}\left(-4,-4,4\right)$. В силу того, що $\frac{-1}{-4}\neq\frac{-10}{-4}$, вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ не є колінеарними. Це й означає, що точки A, B, C не є колінеарними, трикутник ABC існує.

Відносно афінної системи координат $Oxyz$ загальні рівняння координатних площин мають вид: Oxy : $z=0$, Oxz : $y=0$, Oyz : $x=0$. Зрозуміло, що сторони трикутника представляють собою відрізки. Площина перетинає сторону трикутника тоді та тільки тоді, коли вершини трикутника, що є кінцями даної сторони, лежать по різні сторони відносно цієї площини. Згідно теореми 2.3, дві точки лежать по різні сторони відносно певної площини тоді та тільки тоді, коли числа, отримані унаслідок підстановки координат цих точок відносно певної афінної системи координат у загальне рівняння даної площини відносно тієї ж самої системи координат, мають різні знаки. Отже, дві вершини трикутника лежать по різні сторони відносно певної координатної площини, тоді та тільки тоді, коли відповідні координати ціх вершин відносно заданої системи координат мають різні знаки. У даному випадку, перші координати точок A і B мають однакові знаки (є додатними), отже, координатна площина Oyz не перетинає сторону AB , стоона AB не перетинається всіма координатними площинами; другі координати точок A і C мають однакові знаки (є додатними), координатна площина Oxz не перетинає сторону AC , сторона AC також не перетинається всіма координатними площинами; всі відповідні координати точок B і C мають різні знаки і, в силу цього лежать по різні сторони відносно кожної координатної площини. Отже, лише сторона BC трикутника ABC перетинається кожною координатною площиною обраної афінної системи координат.

Задача 2.8. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Площини α_1 і α_2 відносно даної системи координат задано загальними рівняннями: α_1 : $5\cdot x-y+z+1=0$, α_2: $x+y-5\cdot z+1=0$. Перевірити, що ці площини перетинаються за певною прямою і, в силу цього, ділять множину всіх точок евклідового простору, які їм не належать, на чотири двогранні кути. Визначити систему нерівностей, що визначають внутрішню область того двограного кута, якому належить точка $A\left(3,1,2\right)$.

Розв'язання. У загальних рівняннях площин α_1 і α_2 вже коефіцієнти при змінних x і y не є пропорційними ($\frac{5}{1}\neq\frac{-1}{1}$), отже, площини α_1 і α_2 не співпадають і не є паралельними, перетинаються за певною прямою. Знайдемо, нерівність якого знаку визначає ту півплощину відносно площини α_1, якій належить задана точка A. $5\cdot 3-1+2+1=17$, $17>0$, отже, відповідну півплощину відносно обраної системи координат задано нерівністю $5\cdot x-y+z+1>0$. По відношенню до площини α_2 будемо мати: $3+1-5\cdot 2+1=-5$, $-5<0$, $x+y-5\cdot z+1<0$. У підсумку, внутрішня область двограного кута, утвореного унаслідок перетину площин α_1 і α_2, якому належить задана точка A, визначається наступною системою нерівностей: $\begin{cases}5\cdot x-y+z+1>0\\ x+y-5\cdot z+1<0\end{cases}$. Дана система нерівностей представляє собою аналітичні умови, які задають цю внутрішню область відносно обраної афінної системи координат.

Задача 2.9. Довести, що у довільному тетраедрі шість площин, кожна з яких проходить через ребро і середину протилежного до нього ребра, перетинаються у одній точці.

Розв'язання. Розглянемо довільний тетраедр $OABC$. У якості афінної системи координат $Oxyz$ тривимірного евклідового простору оберемо систему E, утворену точкою O, обраною у якості початку відліку, і базисними векторами $\vec{e_1}$, $\vec{e_1}=\overrightarrow{OA}$; $\vec{e_2}$, $\vec{e_2}=\overrightarrow{OB}$; $\vec{e_3}$, $\vec{e_3}=\overrightarrow{OC}$. Зрозуміло, що відносно даної системи координат точки A, B і C будуть, відповідно, мати координати $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ (рис. 2.9.).

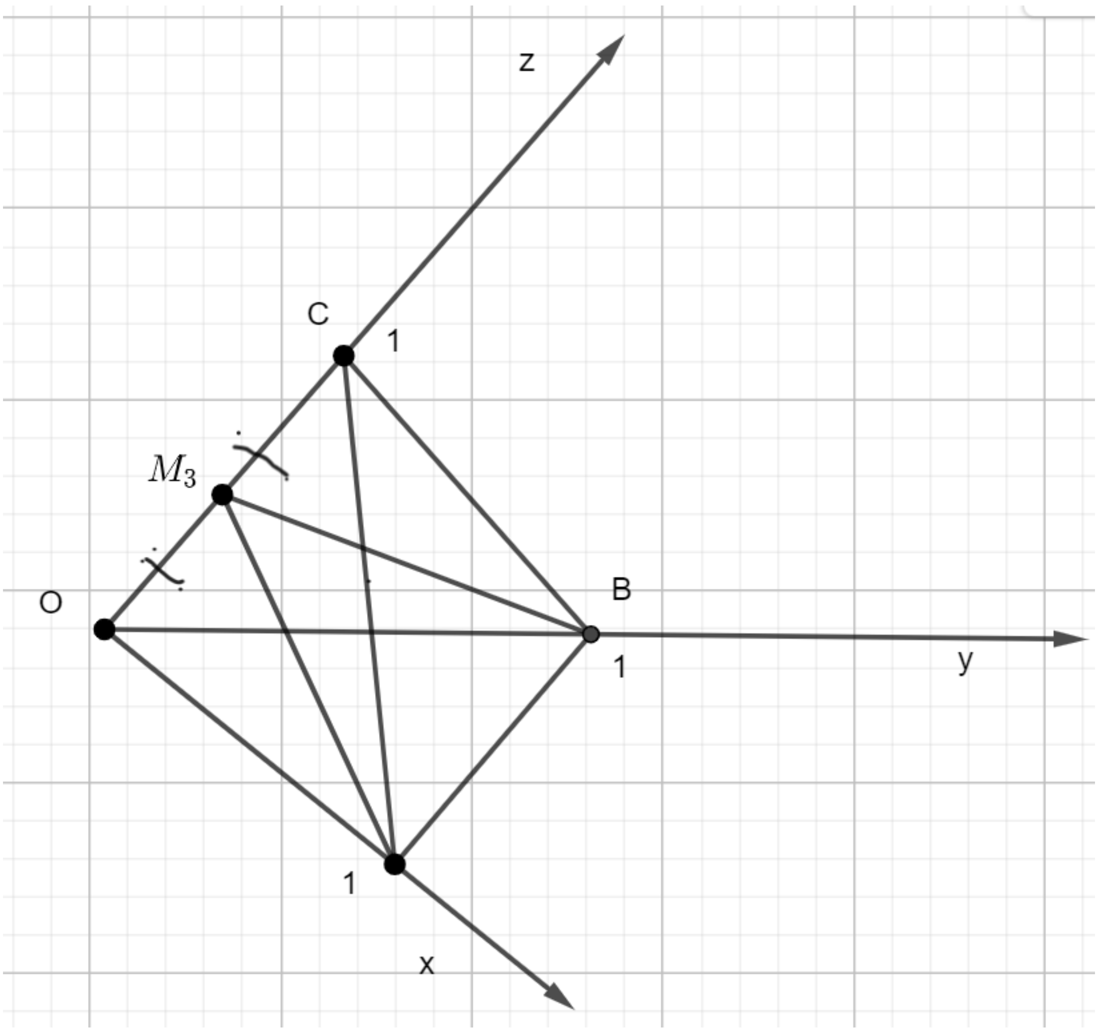

Рис. 2.9.

Позначимо середини ребер OA, OB, OC, AB, BC, AC даного тетраедра, відповідно, через M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6. точки M_1, M_2, M_3 матимуть координати $M_1\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $M_2\left(0,\frac{1}{2},0\right)$, $M_3\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$. $\overrightarrow{OM_4}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{e_1}+\vec{e_2})$ і, в силу цього, точка M_4 матиме координати $M_4\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$. Аналогічно, $\overrightarrow{OM_5}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{e_2}+\vec{e_3})$, $M_5\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{OM_6}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{e_1}+\vec{e_3})$, $M_6\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$. Використовуючи рівняння (2.6), можна легко знайти рівняння всіх шести вказаних за умови задачі площин: (OAM_5) : $y-z=0$, (OBM_6) : $x-z=0$, (OCM_4) : $x-y=0$, (ABM_3) : $x+y+2\cdot z-1=0$, (BCM_1) : $2\cdot x+y+z-1=0$, (ACM_2): $x+2\cdot y+z-1=0$. Можна перевірити, що кожна з цих шести площин проходить через точку Q з координатами $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$. Інших спільних точок ці площини не мають. Дійсно, координати точки Q задовольняють рівняння всіх шести площин. З іншго боку, площини (OAM_5), (OBM_6), (ABM_3) мають єдину спільну точку, бо система рівнянь

$$\begin{cases} y-z=0 \\ x-z=0 \\ x+y+2\cdot z-1=0 \end{cases}$$ має єдиний розвязок – її визначник $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$,

тобто, є відмінним від нуля. Звідси і випливає, що всі шість площин не можуть мати більш ніж одну спільну точку.

Задача 2.10. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A\left(2, -1, 3\right)$ і лінію перетину площин $2\cdot x+3\cdot y-z+4=0$, $x-2\cdot y-3\cdot z+6=0$.

Розв'язання. $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-2}$, отже, задані площини не співпадають і не є паралельними, перетинаються за певною прямою. Запишемо рівняння жмутка площин, яке проходить через дану пряму :

$$\lambda\cdot(2\cdot x+3\cdot y-z+4)+\mu\cdot(x-2\cdot y-3\cdot z+6)=0, \tag{2.27}$$

і знайдемо значення параметрів λ і μ, що відповідній шуканій площині. Зрозуміло, що ці значення є визначеними не однозначно, а з точністю до постійного, відмінного від нуля, множника.

Точка A належить шуканій площині, отже, її координати задовольняють рівняння (2.27), має місце тотожність

$$\lambda\cdot(2\cdot 2+3\cdot(-1)-3+4)+\mu\cdot(2-2\cdot(-1)-3\cdot 3+6)\equiv 0,$$

яка означає, що $2\cdot\lambda+\mu=0$, $\mu=-2\cdot\lambda$. Нехай $\lambda=1$. Тоді $\mu=-2$, після підстановки цих значень у рівняння (2.27) будемо мати

$2\cdot x+3\cdot y-z+4-2\cdot(x-2\cdot y-3\cdot z+6)=0$ або $7\cdot y+5\cdot z-8=0$. Отримане рівняння є шуканим.

2.8. Практичні завдання для самостійної роботи

1. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Площину α задано за допомогою параметричних рівнянь $\begin{cases} x = 7\cdot u - 2\cdot v \\ y = 3 + u + 5\cdot v \\ z = -2 + 3\cdot u - v \end{cases}$. Знайти

а) координати відносно обраної системи координат чотирьох точок, які належать площині α, жодні три з яких не лежать на одній прямій;

б) координати відносно базису E обраної системи координат чотирьох векторів, колінеарних до площини α але попарно не колінеарних між собою.

2. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Площину α задано за допомогою параметричних рівнянь $\begin{cases} x = 10 + 5\cdot u + 4\cdot v \\ y = -1 - 2\cdot u + 3\cdot v \\ z = -3 + 2\cdot u - 4\cdot v \end{cases}$. Визначити, які із заданих точок належать площині α: $A(0,-4,5)$, $B(11,-6,3)$, $C(13,7,-13)$, $D(1,0,-1)$, $E(-2,10,-13)$.

3. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Площину α задано за допомогою параметричних рівнянь $\begin{cases} x = -1 + 2\cdot u - 5\cdot v \\ y = -14 - u + 2\cdot v \\ z = 15 + 4\cdot u - 3\cdot v \end{cases}$. Визначити, які із заданих своїми координатами відносно базису E векторів є паралельними до площини

α : $\vec{a}\left(0,-2,3\right)_E$, $\vec{b}\left(3,12,-1\right)_E$, $\vec{c}\left(9,-4,12\right)_E$, $\vec{d}\left(-2,1,13\right)_E$, $\vec{e}\left(-17,7,-13\right)_E$, $\vec{f}\left(-7,7,-5\right)_E$.

4. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Скласти параметричні рівняння площини α, яка проходить через точку $A\left(0,2,3\right)$ паралельно до векторів $\overrightarrow{p_1}\left(1,0,1\right)_E$ і $\overrightarrow{p_2}\left(2,1,3\right)_E$.

5. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Площину α задано за допомогою параметричних рівнянь $\begin{cases} x=-3+5\cdot u-2\cdot v \\ y=-3\cdot u+2\cdot v \\ z=5+7\cdot u-4\cdot v \end{cases}$. Перевірити, чи належить точка $A\left(0,1,2\right)$ площині α.

Якщо ні, то скласти параметричні рівняння площини β, яка проходить через точку A паралельно до площини α.

6. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Точки A, B, C відносно даної системи координат, відповідно, мають координати $A\left(2,1,3\right)$, $B\left(2,4,0\right)$, $C\left(-3,\ 0,\ 4\right)$. У площині ABC, у свою чергу, обрано афінну систему координат з початком у точці A і базисними векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_1=\overline{AB}$ і $\vec{e}_2$, $\vec{e}_2=\overline{AC}$. Знайти

а) просторові координати точки M, яка належить площині ABC і має відносно обраної площинної системи координат координати $\left(5,3\right)$;

б) площинні координати відносно обраної площинної системи координат

точки E перетину площини ABC з координатною віссю Oz.

7. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. У вигляді алгебраїчного рівняння площини, що проходить через задану точку паралельно до двох заданих, не колінеарних між собою, векторів, скласти рівняння площини α,

а) яка проходить через точку $A(-2,13,-4)$ паралельно до векторів

$\overrightarrow{p_1}(-5,0,4)_E$ і $\overrightarrow{p_2}(-3,2,-13)_E$;

б) яка проходить через точки $M_1(1,2,3)$ і $M_2(2,-1,3)$ паралельно до

вектора $\overrightarrow{p}(1,2,2)_E$;

в) яка проходить через точки $M_1(1,\ 2,3)$, $M_2(2,\ 1,-3)$, $M_3(0,\ -1,2)$;

г) яка проходить через точки $M_1(0,\ 0,0)$, $M_2(1,\ 2,3)$, $M_3(0,\ 3,6)$.

8. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Площину α задано за допомогою параметричних рівнянь

$$\begin{cases} x=-2-4\cdot u-7\cdot v \\ y=-5+6\cdot u+2\cdot v \\ z=5+3\cdot u-v \end{cases}$$

. Відносно даної системи координат задати площину α за допомогою алгебраїчного рівняння площини, що проходить через задану точку паралельно до двох заданих, не колінеарних між собою, векторів.

9. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площину α задано за допомогою алгебраїчного рівняння площини, що проходить через задану точку паралельно до двох заданих, не колінеарних між собою, векторів: $\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z+10 \\ -3 & 0 & 7 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}=0$. Задати площину α за допомогою параметричних рівнянь.

10. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площину α задано за допомогою алгебраїчного рівняння площини, що проходить через задану точку паралельно до двох заданих, не колінеарних між собою, векторів: $\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-1 \\ -7 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix}=0$. Перевірити, чи належить точка $C(-5,\ -2,\ 4)$ площині α. Якщо ні, то скласти параметричні рівняння площини β, яка проходить через точку C паралельно до площини α.

11. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Скласти загальне рівняння площини α,

а) яка проходить через точку $A(0,\ 3,-6)$ паралельно до векторів $\vec{p}(-1,-2,2)_E$ і $\vec{q}(1,-5,4)_E$;

б) яка проходить через точки $A(0,\ -7,-10)$ і $B(2,\ -11,\ 1)$ паралельно до вектора $\vec{q}(-3,-8,0)_E$;

в) яка проходить через точки $A(0, -1, 3)$, $B(1, -2, 4)$, $C(-5, -2, 4)$

12. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно даної системи координат площину α задано рівнянням $2\cdot x-3\cdot y+z-12=0$. Знайти

а) координати відносно обраної системи координат трьох точок, які належать площині α, але не лежать на одній прямій;

б) координати відносно базису E обраної системи координат трьох векторів, колінеарних до площини α але попарно не колінеарних між собою.

13. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площину α задано за допомогою рівняння $3\cdot x+2\cdot y-4\cdot z+8=0$. Визначити, які із заданих точок належать площині α : $A(-5, 2, 4)$, $B(-3, 0, -3)$, $C(0, -2, 1)$, $D(1, 0, -1)$, $E(2, 1, 4)$.

14. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно даної системи координат площину α задано за допомогою загального рівняння $7\cdot x-2\cdot y+z-13=0$. Визначити, які із заданих своїми координатами відносно базису E векторів є паралельними до площини α : $\vec{a}(-1,-5,-3)_E$, $\vec{b}(-2,6,-3)_E$, $\vec{c}(10,-6,-4)_E$, $\vec{d}(1,6,5)_E$, $\vec{e}(-1,3,-8)_E$.

15. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площину α задано за допомогою параметричних рівнянь $\begin{cases} x = 2 + 3 \cdot u - 4 \cdot v \\ y = 4 - v \\ z = 5 + 6 \cdot u - v \end{cases}$. Знайти загальне рівняння площини α відносно даної системи координат.

16. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат відомими є координати вершин тетраедра $ABCD$: $A(0,\ 0,\ 2)$, $B(3,\ 0,\ 5)$, $C(1,\ 1,\ 0)$, $D(4,\ 1,\ 2)$. Скласти

а) рівняння всіх граней тетраедра,

б) площини, яка проходить через ребро AB і середину ребра CD,

в) площини, яка проходить через ребро AB паралельно до ребра CD.

17. У тривимірному евклідовому просторі задано тетраедр $ABCD$. Точку A прийнято за початок відліку афінної системи координат $Axyz$, базис якої утворюють вектори $\vec{e}_1 = \overline{AB}$, $\vec{e}_2 = \overline{AC}$, $\vec{e}_3 = \overline{AD}$. Відносно системи координат $Axyz$ скласти рівняння всіх граней тетраедра $ABCD$ і площини ECD, де точка E є серединою ребра AB.

18. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$, відносно даної системи координат відомими є координати точок A, B, C, D. Для кожного з наступних випадків перевірити, чи належать точки A, B, C, D одній площині:

а) $A(3,1,0)$, $B(0,1,2)$, $C(-1,0,-5)$, $D(4,1,5)$;

б) $A(2,1,-1)$, $B(1,-1,2)$, $C(0,4,-2)$, $D(3,1,-2)$;

в) $A(0,0,-1)$, $B(1,3,4)$, $C(5,0,-3)$, $D(4,4,1)$;

г) $A(0,0,2)$, $B(0,0,5)$, $C(1,1,0)$, $D(4,1,2)$.

19. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площину α задано за допомогою загального рівняння $2\cdot x-y+z+1=0$. Із заданих точок $M_1(2,5,12)$, $M_2(1,0,0)$, $M_3(-1,-5,4)$, $M_4(-14,22,0)$, $M_5(1,-5,12)$, $M_6(0,0,5)$ вказати ті, які знаходяться у тому ж самому підпросторі відносно площини α, що й початок відліку.

20. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площину α задано загальним рівнянням $2\cdot x-y+z+1=0$. Задано також координати точок наступних пар: а) $O(0,0,0)$ і $A(2,1,0)$; б) $A_1(2,1,0)$ і $A_2(5,15,-1)$; в) $B_1(-1,2,-5)$ і $B_2(-15,1,0)$; г) $C_1(1,\sqrt{2},5)$ і $C_2(1,15,-15)$.

Із заданих пар точок вказати ті, точки яких розташовані по одну сторону відносно заданої площини.

21. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$, відносно даної системи координат відомими є координати точок A, B, C : $A(5,-1,0)$, $B(1,-5,-15)$, $C(-2,1,3)$. Знайти аналітичні умови, які характеризують той півпростір відносно площини ABC , якому належить а) початок відліку; б) точка E з координатами $E(1,1,1)$.

22. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат задано координати вершин тетраедра $ABCD$: $A(1,1,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,0)$, $D(1,5,7)$. Записати лінійні нерівності, які характеризують внутрішню область даного тетраедра. Виконати ілюстративний рисунок.

23. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат задано координати вершин тетраедра $ABCD$: $A(-1,1,0)$, $B(-2,2,0)$, $C(-2,0,0)$, $D(-1,5,7)$. Визначити, які із вказаних нижче точок розташовані у внутрішній області даного тетраедра: $M_1(2,3,-1)$, $M_2(0,0,1)$, $M_3\left(-\frac{8}{6},\frac{10}{6},\frac{7}{6}\right)$, $M_4\left(-\frac{14}{9},\frac{19}{9},\frac{35}{18}\right)$.

24. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площину α задано загальним рівнянням $2\cdot x+3\cdot y-4\cdot z+12=0$. У площині α, у свою чергу, обрано афінну систему координат Cuv, початок відліку C якої є точкою перетину площини α з координатною віссю Oz, базисними векторами $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ якої є вектори $\vec{e}_1=\overrightarrow{CA}$ і $\vec{e}_2=\overrightarrow{CB}$, точки A і B при цьому є, відповідно, точками перетину площини α з координатними осями Ox і Oy. Знайти

а) просторові координати (координати у системі координат $Oxyz$) точки E, яка відносно обраної системи координат на площині α має координати $E(1,1)$;

б) відносно обраної системи координат Cuv на площині α рівняння прямих AB, AC і BC.

25. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$, відносно даної системи координат відомими є загальні рівняння площин α_1, α_2, α_3: а) $\alpha_1: \ 2\cdot x - y + 3\cdot z + 2 = 0$;

б) $\alpha_2: \ \frac{1}{2}\cdot x - 3\cdot y + z + 1 = 0$; в) $\alpha_3: \ x - 2\cdot y + 4\cdot z + 4 = 0$.

Записати рівняння площин α_1, α_2, α_3 у вигляді рівнянь «у відрізках на осях». Для кожної з площин α_1, α_2, α_3 1) визначити координати точок перетину з осями координат обраної афінної системи координат, 2) побудувати ілюстративне зображення довільні афінної системи координат $Oxyz$, зображення точок перетину відповідної площитни з осями координат, зображення слідів відповідної площини у координатних площинах.

26. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відомо, що площина α проходить через точку $M\left(1,-2,5\right)$, перетинає вісь абсцис у точці A з координатами $A\left(-3,0,0\right)$, а вісь аплікат – у точці C з координатами $C\left(0,0,1\right)$. Відносно даної системи координат знайти рівняння площини α у вигляді рівняння «у відрізках на осях».

27. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є загальні рівняння площин $\alpha_i, i = \overline{1-9}$: α_1 : $x - z + 1 = 0$; α_2 : $x + 2\cdot y + 3\cdot z = 0$; α_3 : $x - y + 2 = 0$; α_4 : $x + 2\cdot z = 0$; α_5 : $x - 3 = 0$; α_6 : $y + z + 1 = 0$; α_7 :

$3\cdot y+5=0$; $\alpha_8: 2\cdot y-z=0$; $\alpha_9: z=0$. Вказати особливості розташування площин $\alpha_i, i=\overline{1-9},$ по відношенню до обраної системи координат. Для кожної з площин $\alpha_i, i=\overline{1-9},$ побудувати ілюстративне зображення афінної системи координат $Oxyz$ та зображення слідів даної площини у координатних площинах.

28. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Визначити загальне рівняння площини

а) яка містить координатну вісь Ox і точку A з координатами $(1,1,1)$;

б) яка містить координатну вісь Oz і точку C з координатами $(-3,1,-2)$;

в) яка є паралельної до координатної осі Ox і проходить через точки A та B, відповідно, з координатами $(4, 0,-2)$ і $(5,1,7)$;

г) яка є паралельної до координатної осі Oy і проходить через точки B та P, відповідно, з координаиами $(0,2,9)$ і $(1,7,-8)$;

д) яка є паралельної до координатної осі Oz і проходить через точки M та N, відповідно, з координаиами $(7,0,3)$ і $(1,-3,2)$;

е) яка проходить через початок відліку і через точки $A(3,-2,1)$ та $B(1,4,0)$;

є) яка проходить через точку $A(2,-1,3)$ паралельно до координатної площини: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz;

ж) яка є паралельною до координатної осі Oz, перетинає координатну вісь Ox у точці з координатами $(3,0,0)$, а координатну вісь Oy - у точці з координатами $(0,-4,0)$.

з) яка є паралельною до координатної осі Ox, перетинає координатну вісь Oy у точці з координатами $\left(0,4,0\right)$, а координатну вісь Oz - у точці з координатами $\left(0,0,4\right)$.

29. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Задано координати вектора $\vec{p}$ відносно базису E даної системи координат: $\vec{p}\left(1,-2,3\right)_E$. Визначити загальне рівняння площини, яка є паралельною до вектора $\vec{p}$ і містить а) координатну вісь Ox; б) координатну вісь Oy; в) координатну вісь Oz.

30. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є загальні рівняння площин α_1 і α_2, β_1 і β_1, γ_1 і γ_2, σ_1 і σ_2, η_1 і η_2, μ_1 і μ_2, ν_1 і ν_2, ω_1 і ω_2, ξ_1 і ξ_2:

а) α_1: $x-3\cdot y+z+1=0$ і α_2: $2\cdot x+y-4\cdot z+2=0$;

б) β_1: $3\cdot x+y-z+2=0$ і β_1:$6\cdot x+2\cdot y-2\cdot z+3=0$;

в) γ_1:$\sqrt{2}\cdot x-y+3\cdot z+\sqrt{2}=0$ і γ_2:$2\cdot x-\sqrt{2}\cdot y+3\cdot\sqrt{2}\cdot z+2=0$;

г) σ_1: $x+y+z-1=0$ і σ_2:$x+y+z=0$;

д) η_1: $2\cdot x+3\cdot y+4\cdot z-12=0$ і η_2: $3\cdot x-6\cdot y+1=0$;

е) μ_1: $3\cdot x-4\cdot y+6\cdot z+9=0$ і μ_2: $6\cdot x-8\cdot y-10\cdot z+15=0$;

є) ν_1: $3\cdot x-2\cdot y-3\cdot z+5=0$ і ν_2: $9\cdot x-6\cdot y-9\cdot z-5=0$;

ж) ω_1: $x+y+z-1=0$ і ω_2: $2\cdot x+2\cdot y-2\cdot z+3=0$;

з) ξ_1: $2\cdot x-y-z-3=0$ і ξ_2: $10\cdot x-5\cdot y-5\cdot z-15=0$.

Встановити характер взаємного розташування площин кожної пари.

31. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Скласти рівняння площини, що проходить через початок відліку паралельно до площини:

а) $2\cdot x-4\cdot y+5\cdot z-3=0$; б) $2\cdot x-7\cdot y+6=0$.

32. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Скласти рівняння площини, що проходить

а) через точку $A(2,-1,5)$ паралельно до площини $12\cdot x-3\cdot y+5\cdot z-7=0$;

б) через точку $B(1,-3,5)$ паралельно до площини $3\cdot x-y+z+4=0$;

в) через точку $C(-2,-5,1)$ паралельно до площини $x-3\cdot y+7=0$;

г) через точку $D(-4,6,-1)$ паралельно до площини $3\cdot z-4=0$.

33. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Знайти значення параметрів A і C, за яких площини α_1 і α_2, відповідно задані відносно даної системи координат рівняннями $A\cdot x-2\cdot y+3\cdot z-1=0$ і $4\cdot x+y+C\cdot z+8=0$, будуть паралельними.

34. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Перевірити, що площини α_1 і α_2, задані відносно даної системи координат, відповідно, рівняннями $x-3\cdot y+2\cdot z+1=0$ і $2\cdot x-y+z=0$, перетинаються за певною прямою l. Знайти а) координати певної точки, що належить прямій l, б) координати певного напрямлюючого вектора прямої l. Представити пряму l як лінію перетину двох площин, а) одна з яких є паралельною до координатної осі Ox, а інша – до координатної осі Oy; б) одна з яких є паралельною до координатної осі Ox, а інша – до координатної осі Oz; в) одна з яких є паралельною до координатної осі Oy, а інша – до координатної осі Oz.

35. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є координати вершин тетраедра $ABCD$: $A(5,1,3)$, $B(1,6,2)$, $C(5,4,0)$, $D(4,0,6)$. Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно до ребра CD.

36. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є рівняння трьої граней певного паралелепіпеда: $2\cdot x+3\cdot y+4\cdot z-12=0$, $x+3\cdot y-6=0$, $z+5=0$ і координати однієї з його вершин: $(6,-5,1)$. Знайти рівняння трьох інших граней даного паралелепіпеда.

37. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Перевірити, що площини α_1 і α_2, задані відносно даної системи координат, відповідно, рівняннями $5\cdot x-y+z+1=0$ і $x+y-5\cdot z+1=0$, перетинаються за певною прямою і, в силу цього, ділять множину всіх точок простору, які їм не належать, на чотири двогранних кути. Знайти систему лінійних нерівностей, що визначають внутрішню область того двограного кута, якому належить точка $A(3,1,2)$.

38. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Перевірити, що площини α_1 і α_2, задані відносно даної системи координат, відповідно, рівняннями $x-y+z+1=0$ і $2\cdot x-2\cdot y+2\cdot z-5=0$, є паралельними між собою. Знайти систему лінійних нерівностей, що визначає область, точки якої розташовані між даними паралельними площинами.

39. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. За допомогою системи лінійних нерівностей записати аналітичні умови, що визначають відносно даної системи координат внутрішню область трикутної призми $ABOA_1B_1O_1$, якщо відомими відносно даної системи координат є координати вершин даної призми: $A\left(0,2,0\right)$, $B\left(0,0,2\right)$, $O\left(0,0,0\right)$, $A_1\left(5,2,0\right)$, $B_1\left(5,0,2\right)$, $O_1\left(5,0,0\right)$. Виконати ілюстративний рисунок.

40. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Перевірити, що площини α_1 і α_2, задані відносно даної системи координат, відповідно, рівняннями $4\cdot x-y+3\cdot z-1=0$ і $x+5\cdot y-z+2=0$, перетинаються за певною прямою. Знайти рівняння площини, яка проходить через пряму перетину площин α_1 і α_2 та а) містить початок відліку; б) містить точку $A\left(1,1,1\right)$; в) є паралельною до координатної осі Oy.

41. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. За допомогою рівняння

$$\lambda\cdot(7\cdot x+y-9\cdot z+3)+\mu\cdot(x+4\cdot y-2\cdot z+1)=0$$

задано жмуток площин. Вказати вид даного жмутка. Визначити, чи належить даному жмутку площина, задана рівнянням $3\cdot x-9\cdot y+1=0$.

42. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. За допомогою рівняння

$$4\cdot x-y+2\cdot z-6+\mu\cdot(6\cdot x+5\cdot y+3\cdot z-9)=0$$

задано жмуток площин. Визначити, які з координатних площин належить даному жмутку.

43. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Перевірити, чи належать площини α_1, α_2, α_3, задані відносно даної системи координат, відповідно, рівняннями $3\cdot x-4\cdot y+5=0$, $x-2\cdot z+1=0$ і $2\cdot y-3\cdot z-1=0$, одному жмутку.

44. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Визначити, за яких значень параметрів A і D площини α_1, α_2, α_3, задані відносно даної системи координат, відповідно, рівняннями $2\cdot x+y-z+3=0$, $x-3\cdot y+5=0$ і $A\cdot x+y-2\cdot z+D=0$, належать одному жмутку.

45. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α_1, α_2, α_3, α_4, відповідно, задані рівняннями: $x+2\cdot y-3\cdot z-6=0$, $2\cdot y+5\cdot z-4=0$, $3\cdot x+z+1=0$, $x+2\cdot y=0$. Відомо, що ці площини містять грані певного тетраедра. Знайти рівняння площини, що проходить через те ребро даного тетраедра, яке належить прямій перетину площин α_1 і α_2 та через середину того його ребра, що належить прямій перетину площин α_3 і α_4.

46. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α_1, α_2, α_3, відповідно, задані рівняннями: $2\cdot x-y+z-4=0$, $x+y-z-2=0$, $2\cdot x-y+3\cdot z-6=0$. Довести, що площини α_1, α_2, α_3 перетинаються у одній точці, тобто, належать певній власній в'язці площин. Знайти координати центру цієї в'язки.

47. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α_1, α_2, α_3, відповідно, задані рівняннями $x-y-z+4=0$, $3\cdot x-z+5=0$, $5\cdot x+y-z+1=0$. Довести, що площини α_1, α_2, α_3 перетинаються за трьома попарно паралельними прямими, тобто. належать певній невласній в'язці площин. Знайти певний напрямлюючий вектор осі цієї в'язки.

48. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α_1, α_2, α_3, відповідно, задані рівняннями

$$x+2\cdot y-z+3=0,\quad 3\cdot x-y+5\cdot z-1=0,\quad 2\cdot x+3\cdot y-4\cdot z+5=0.$$

Довести, що площини α_1, α_2, α_3 належать певній в'язці площин. Знайти рівняння такої площини цієї в'язки, яка містить а) вісь Ox; б) вісь Oy; в) вісь Oz.

49. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α_1, α_2, α_3, відповідно, задані рівняннями: $4\cdot x-y+5\cdot z-4=0$, $7\cdot x-2\cdot y+z+11=0$, $3\cdot x+y-3\cdot z+7=0$. Довести, що площини α_1, α_2, α_3 належать певній в'язці площин. Знайти рівняння такої площини цієї в'язки, яка є паралельною до а) площини Oxy; б) площини Oxz; в) площини Oyz.

50. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α_1, α_2, α_3, відповідно, задані рівняннями $x+y-z+2=0$, $4\cdot x-3\cdot y+z-1=0$, $2\cdot x+y-5=0$. Довести, що площини α_1, α_2, α_3 належать певній в'язці площин. Знайти рівняння такої площини цієї в'язки, яка проходить через початок відліку і точку P з координатами $(1,3,2)$.

51. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінні системт координат $Oxyz$ і $O'x'y'z'$. По відношенню до системи координат $Oxyz$ координатні площини системи координат $O'x'y'z'$ задано наступними рівняннями: $O'x'y'$: $x+2\cdot y+3\cdot z-6=0$, $O'y'z'$: $x+1=0$, $O'x'z'$: $2\cdot x-y=0$. Точка E з координатами $(1,3,5)$ відносно системи координат $Oxyz$ відносно системи координат $O'x'y'z'$ має координати $(1,1,1)$. Для довільної точки M простору знайти формули, що виражають її координати відносно системи координат $O'x'y'z'$ через її координати відносно системи координат $Oxyz$.

52. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінні системт координат $Oxyz$ і $O'x'y'z'$. По відношенню до системи координат $Oxyz$ координатну площину $O'x'y'$ системи координат $O'x'y'z'$ задано рівнянням $2\cdot x+3\cdot y-6\cdot z+6=0$, площини $O'y'z'$ і $O'x'z'$ співпадають, відповідно, з площинами Oyz і Oxz. Відомо, що точка A у обох системах координат має однакові координати $(2,4,6)$. Для довільної точки M простору знайти формули, що виражають її координати відносно системи координат $O'x'y'z'$ через її координати відносно системи координат $Oxyz$.

§3. ОСНОВИ АФІННОЇ ТЕОРІЇ ПРЯМОЇ У ТРИВИМІРНОМУ ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ ЗА УМОВИ ЗАДАННЯ ПРЯМОЇ РІЗНОГО ВИДУ РІВНЯННЯМИ ВІДНОСНО ДОВІЛЬНОЇ АФІННОЇ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

3.1. Векторно-параметричне і параметричні рівняння прямої, променя та відрізка. Теоретичні питання і завдання для самоконтролю.

Нехай у просторі фіксовано певний початок відліку O (рис.3.1), для прямої l відомою є певна точка M_0, яка їй належить $(M_0 \in l)$, та певний **спрямовуючий вектор (напрямний вектор)** $\vec{u}$, тобто, не нульовий вектор, колінеарний до прямої l. Зрозуміло, що точкою M_0 і вектором $\vec{u}$ пряма l є визначеною однозначно. Позначимо через $\vec{r_0}$ радіус-вектор точки M_0 відносно початку відліку O: $\vec{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$. **Векторно-параметричне рівняння прямої** l відносно початку відліку O має вид

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{u}, \quad t \in R. \tag{3.1}$$

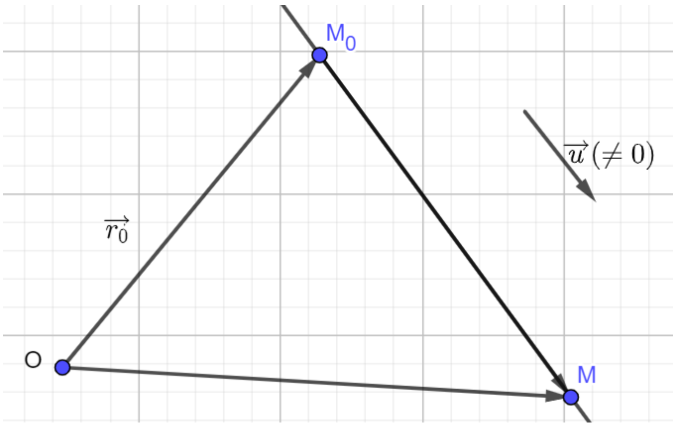

Рис. 3.1.

На відміну від векторно-параметричного рівняння площини (рівняння (2.1)), рівняння (3.1) містить лише один параметр, який у даному випадку позначено через t. Таке позначення використовують найчастіше. Так само, як і у випадку векторно-параметричного рівняння площини, для векторно-параметричного рівняння прямої l, згідно загальної домовленості, одночасно з рівнянням (3.1) область зміни параметру t, як правило, не вказують - вона співпадає з областю допустимих значень змінної t у правій частині цього рівняння.

Кожну пряму, відносно будь-якого початку відліку O, можна задати векторно параметричним рівнянням виду (3.1) і, до того ж не однозначно, бо кожна пряма містить безліч точок, для кожної прямої існує безліч спрямовуючих векторів. (При цьому зрозуміло, що всі останні є колінеарними між собою).

Кожне рівняння виду (3.1), у якому вектор $\vec{u}$ не є нульовим, відносно будь-якого початку відліку O представляє собою векторно-параметричним рівнянням певної прямої. Така пряма є визначеною однозначно. Вона проходить через точку, радіус-вектор якої відносно обраного початку відліку O дорівнює $\vec{r_0}$, паралельно до вектора $\vec{u}$.

Нехай у евклідовому просторі задано довільну афінну систему координат $Oxyz$ базис E якої утворюють вектори $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, для певної прямої l відносно даної системи координат відомими є координати певної точки M_0, що цій прямій належить: $M_0 \in l$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Нехай відомими також є координати відносно базису E певного ненульового вектору $\vec{u}$, який є колінеарним до прямої l: $\vec{u}\left(m, n, k\right)_E$. Зрозуміло, що при цьому виконано умову

$$m^2 + n^2 + k^2 > 0. \tag{3.2}$$

Відносно початку відліку O, пряма l задається векторно-параметричним рівнянням виду (3.1), у якому вектор $\vec{r_0}$ представлений напрямленим відрізком $\overrightarrow{OM_0}$: $\vec{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$, представником невідомого, змінного, вектору $\vec{r}$ є напрямлений відрізок $\overrightarrow{OM}$: $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, де M - довільна, поточна, точка прямої l. Але координати кожної точки M відносно афінної системи координат $Oxyz$ співпадають з координатами її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ відносно базису даної системи координат, тобто, якщо точка M_0 має координати $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ відносно даної афінної системи координат $Oxyz$, то вектор $\overrightarrow{OM_0}$ відносно базису E даної системи координат має координати $(x_0,y_0,z_0)_E$. Аналогічно, якщо точка M відносно даної афінної системи координат має координати (x,y,z), то вектор $\overline{OM}$ відносно базису E даної системи координат має координати $(x,y,z)_E$ (рис. 3.2.).

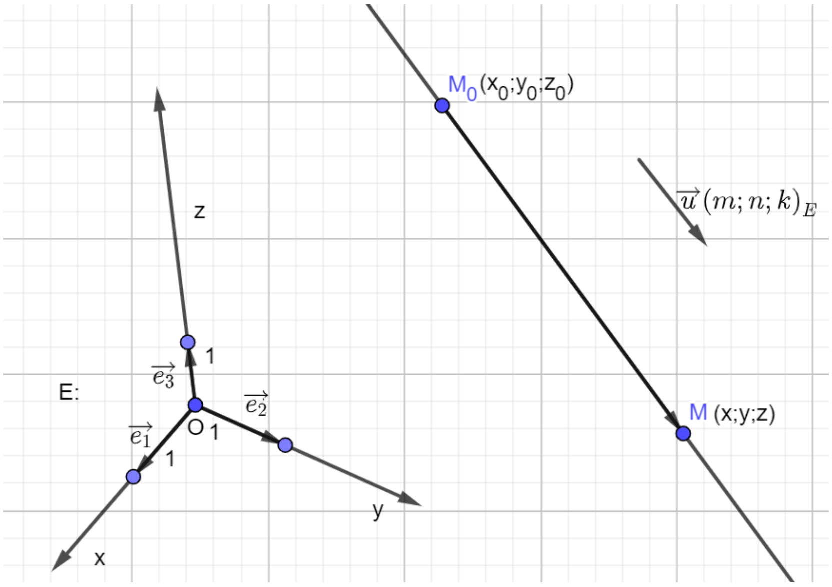

Рис. 3.2.

У рівнянні (3.1) вектор $\vec{r}$ представлено у вигляді лінійної комбінації векторів $\vec{r}_0$ і M_1. Існування певної лінійної залежності між векторами є рівносильним до існування аналогічних лінійних залежностей між однойменними координатами цих векторів відносно довільного базису. В силу цього векторно-параметричне рівняння (3.1) з геометричної точки зору є рівносильним до наступної системи параметричних рівнянь:

$$\begin{cases} x = x_0 + m\cdot t \\ y = y_0 + n\cdot t \quad , \qquad t \in R. \\ z = z_0 + k\cdot t \end{cases} \tag{3.3}$$

Така рівносильність означає, що рівняння (3.3) є аналітичними умовами, які визначають пряму l відносно заданої афінної системи координат $Oxyz$. Ці рівняння називають **параметричними рівняннями** даної **прямої**.

Рівняння (3.3) представляють собою систему трьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими, змінними, x, y, z і t, роль параметру виконує змінна t. Так само, як і для векторно-параметричного рівняння (3.1) прямої l, відповідно до загальної домовленості, для параметричних рівнянь (2.3) прямої l область зміни параметру t, як правило, не вказують - вона співпадає з областю допустимих значень змінної t у правих частинах цих рівнянь.

Кожну пряму l, відносно кожної афінної системи координат $Oxyz$, можна задати параметричними рівняннями виду (3.3), для коефіцієнтів яких виконано умову (3.2). Оскільки кожна пряма містить безліч різних точок, і для кожної прямої існує безліч різних спрямовуючих векторів, ту ж саму пряму можна задати різними параметричними рівняннями виду (3.3), для коефіцієнтів яких виконано умову (3.2). Для визначення спрямовуючого вектора $\vec{u}$ прямої зручніше за все обрати на цій прямій не лише точку M_0, а й певну іншу точку M_1 та покласти $\vec{u}=\overline{M_0M_1}$. Якщо відносно даної афінної системи координат точка M_1 має координати $\left(x_1, y_1, z_1\right)$, то відповідний вектор $\vec{u}$ відносно базису E даної системи координат має координати $\left(x_1-x_0, y_1,-y_0, z_1-z_0\right)_E$, відповідні параметричні рівняння прямої l мають вид

$$\begin{cases} x=x_0+(x_1-x_0)\cdot t \\ y=y_0+(y_1-y_0)\cdot t. \\ z= z_0+(z_1-z_0)\cdot t \end{cases} \qquad (3.4)$$

Рівняння виду (3.4) називають **параметричними рівняннями прямої, що проходить через дві задані точки (рис.3.3).**

З іншого боку, довільні рівняння виду (3.3), для яких виконано умову (3.2), відносно довільної афінної системи координат $Oxyz$ є параметричними рівняннями певної прямої. Ця пряма проходить через точку M_0 з координатами (x_0, y_0, z_0) відносно даної афінної системи координат, паралельно до вектора $\vec{u}$, який, відносно базису E даної системи координат, має координати $(m,n,k)_E$.

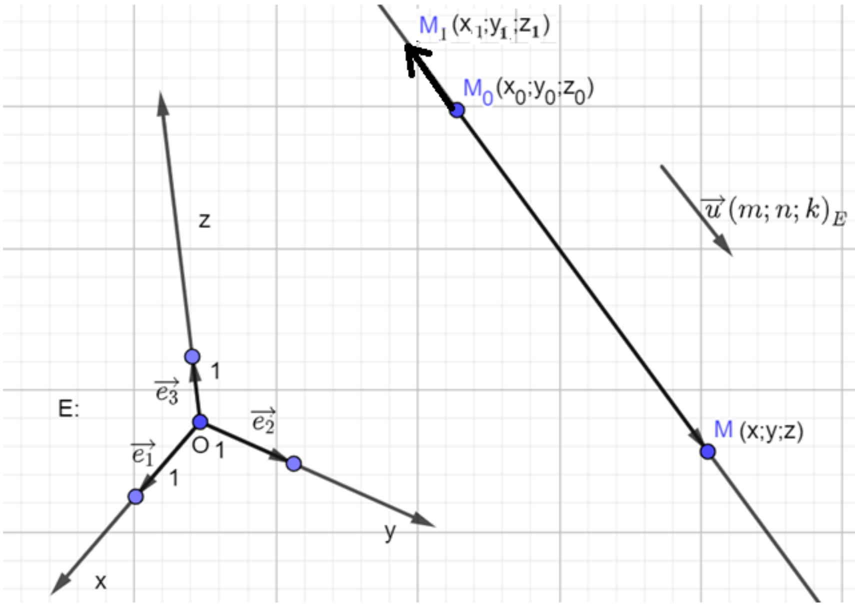

Рис. 3.3.

З геометричної точки зору найпростішими, відмінними від окремих точок, видами підмножин прямої є відрізки і промені.

Якщо у просторі фіксовано певний початок відліку O, для певного відрізка M_0M_1 відомими є радіус-вектри $\vec{r_0}$ і $\vec{r_1}$, відповідно, його кінців – точок M_0 і M_1, (точка M_0 не співпадає з точкою M_1), - то вектор $\vec{u}$, $\vec{u}=\vec{r_1}-\vec{r_0}=\overline{M_0M_1}$ є спрямовуючим вектором прямої M_0M_1, відносно початку відліку O відрізок M_0M_1 задається векторно-параметричним рівнянням

$$\vec{r}=\vec{r_0}+t\cdot(\vec{r_1}-\vec{r_0}),\quad t\in\left[0,1\right], \tag{3.5}$$

промінь M_0M_1 задається векторно-параметричним рівнянням

$$\vec{r}=\vec{r_0}+t\cdot(\vec{r_1}-\vec{r_0}),\ t\in\left[0,+\infty\right), \tag{3.6}$$

промінь M_1M_0 - векторно-параметричним рівнянням

$$\vec{r}=\vec{r_0}+t\cdot(\vec{r_1}-\vec{r_0}),\ t\in\left(-\infty,1\right]. \tag{3.7}$$

Якщо відносно початку відліку O пряму l задано за допомогою векторно-параметричного рівняння (3.1), у якому, зрозуміло, $\vec{u}\neq\vec{0}$, точки M_1 і M_2 є різними точками прямої l, $\overrightarrow{OM_1}=\vec{r}(t_1)$, $\overrightarrow{OM_2}=\vec{r}(t_2)$, $t_1\neq t_2$, для визначеності, $t_1<t_2$, то векторно-параметричне рівняння відрізка M_1M_2 відносно початку відліку O має вид $\vec{r}=\vec{r_0}+t\cdot\vec{u}$, $t\in\left[t_1,t_2\right]$; векторно-параметричне рівняння променю M_1M_2 відносно початку відліку O має вид $\vec{r}=\vec{r_0}+t\cdot\vec{u}$, $t\in\left[t_1,+\infty\right)$, променю M_2M_1 - вид $\vec{r}=\vec{r_0}+t\cdot\vec{u}$, $t\in\left(-\infty,t_2\right]$.

Аналогічно, якщо відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ для певного відрізка M_0M_1 відомими є координати його кінців, тобто, точок M_0 і M_1 (точка M_0 не співпадає з точкою M_1): $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$, $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$, то параметричні рівняння відрізка M_0M_1 відносно даної системи координат мають вид

$$\begin{cases} x=x_0+(x_1-x_0)\cdot t \\ y=y_0+(y_1-y_0)\cdot t,\quad t\in\left[0,1\right], \\ z=z_0+(z_1-z_0)\cdot t \end{cases} \tag{3.8}$$

параметричні рівняння променю M_0M_1 мають вид

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)\cdot t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)\cdot t, \ \ t \in \left[0, +\infty\right), \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)\cdot t \end{cases} \tag{3.9}$$

променю M_1M_0 - вид

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)\cdot t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)\cdot t, \ \ t \in \left(-\infty, 1\right]. \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)\cdot t \end{cases} \tag{3.10}$$

Якщо відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ пряму l задано за допомогою параметричних рівнянь (3.3), для яких, зрозуміло, виконано умову (3.2), точки M_1 і M_2 є різними точками прямої l, при заданні прямої l рівняннями (3.3) координати точки M_1 відповідають значенню t_1 параметра t: $x_1 = x_0 + m\cdot t_1$, $y_1 = y_0 + n\cdot t_1$, $z_1 = z_0 + k\cdot t_1$, координати точки M_2 відповідають значенню t_2 параметра t: $x_2 = x_0 + m\cdot t_2$, $y_2 = y_0 + n\cdot t_2$, $z_2 = z_0 + k\cdot t_2$, $t_1 \neq t_2$, для визначеності, $t_1 < t_2$, то параметричні рівняння відносно системи координат $Oxyz$ відрізка M_1M_2, променю M_1M_2, променю M_2M_1, взаємно доповняльних променів з початком у точці M_1, відрізняються від параметричних рівнянь прямої M_1M_2 лише областю зміни параметра t. Для відрізка M_1M_2 маємо - $t \in \left[t_1, t_2\right]$, $t_1 < t_2$, для променю M_1M_2 - $t \in \left[t_1, +\infty\right)$, для променю M_2M_1 - $t \in \left(-\infty, t_2\right]$, для взаємно доповняльних променів з початком у точці M_1, відповідно, $t \in \left[t_1, +\infty\right)$ і $t \in \left(-\infty, t_1\right]$.

Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

1. Який вектор називають спрямовуючим вектором прямої?

2. Чому довільна пряма l є однозначно визначеною певною своєю точкою M_0 і певним своїм спрямовуючим вектором $\vec{u}$?

3. Який геометричний апарат повинен бути заданим у тривимірному евклідовому просторі для того, щоб пряму, промінь або відрізок можна було задати векторно-параметричним рівнянням?

4. Який вигляд має векторно-параметричне рівняння прямої у просторі відносно певного початку відліку? Вкажіть геометричний зміст сталих векторів цього рівняння.

5. Чи кожну пряму відносно довільного початку відліку можна задати векторно-параметричним рівнянням?

6. За яких умов задане векторно-параметричне рівняння є векторно-параметричним рівнянням заданої прямої відносно фіксованого початку відліку?

7. За яких умов задане векторно-параметричне рівняння є векторно-параметричним рівнянням деякої прямої відносно фіксованого початку відліку?

8. Який вигляд має векторно-параметричне рівняння променю відносно фіксованого початку відліку? У чому полягає відміна між векторно-параметричними рівняннями променю і прямої? Чи кожний промінь відносно довільного початку відліку можна задати векторно-параметричним рівнянням?

9. Який вигляд має векторно-параметричне рівняння відрізка відносно фіксованого початку відліку? У чому полягає відміна між векторно-параметричними рівняннями прямої, променю і відрізка? Чи кожний відрізок відносно довільного початку відліку можна задати векторно-параметричним рівнянням?

10. Який геометричний апарат повинен бути заданим у тривимірному евклідовому просторі для того, щоб пряму, промінь або відрізок можна було задати параметричними рівняннями?

11. Який вигляд мають векторно-параметричні рівняння прямої у тривимірному евклідовому просторі відносно певної афінної системи координат $Oxyz$? Вкажіть геометричний зміст сталих цих рівнянь.

12. Чи кожну пряму відносно довільної афінної системи координат можна задати параметричними рівняннями?

13. За яких умов задані параметричні рівняння є параметричними рівняннями заданої прямої відносно певної афінної системи координат $Oxyz$?

14. За яких умов задані параметричні рівняння є параметричними рівнянням деякої прямої відносно певної афінної системи координат $Oxyz$?

15. Який вигляд мають параметричні рівняння променю відносно певної афінної системи координат $Oxyz$? У чому полягає відміна між параметричними рівняннями променю і прямої? Чи кожний промінь відносно довільної афінної системи координат можна задати параметричними рівняннями?

16. Який вигляд мають параметричні рівняння відрізка відносно певної афінної системи координат $Oxyz$? У чому полягає відміна між параметричними рівняннями прямої, променю і відрізка? Чи кожний відрізок відносно довільної афінної системи координат можна задати параметричними рівняннями?

3.2. Канонічні рівняння прямої. Канонічні рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

Нехай у тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ базис E якої утворюють вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, для певної прямої l відносно даної системи координат відомими є координати певної точки M_0, що цій прямій належить: $M_0 \in l$, $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$. Нехай відомими також є координати відносно базису E певного ненульового вектору $\vec{u}$, який є колінеарним до прямої $l : \vec{u}\left(m, n, k\right)_E$. Зрозуміло, що при цьому виконано умову (3.2) (рис. 3.2.). Так звані **канонічні рівняння прямої** l відносно обраної системи координат мають вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k} . \tag{3.11}$$

Насправді, у (3.11) мова йде про три рівняння, з яких кожне є наслідком двох інших.

Якщо всі числа m, n, k є відмінним від нуля, то у (3.11) ми маємо три попарні рівності трьох відношень. З алгебраїчної точки зору кожна рівність представляє собою лінійне алгебраїчне рівняння з двома невідомими, у підсумку, маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n} \\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{k} \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{k} \end{cases}, \qquad (3.12)$$

яка, безумовно, є рівносильною до системи, що складається з будь-яких двох цих рівнянь. З геометричної точки зору, кожне з трьох рівнянь системи (3.12) відносно обраної у просторі афінної системи координат $Oxyz$ представляє собою рівняння площини, що містить пряму l і є паралельної до однієї з координатних осей. Елементарні тотожні перетворення дозволяють замінити кожне з рівнянь системи (3.12) відповідним неповним загальним рівнянням відповідної площини. У підсумку, якщо замість канонічних рівнянь (3.11), або, фактично, системи рівнянь (3.12), ми починаємо розглядати систему двох рівнянь із системи (3.12), ми представляємо пряму l у вигляді прямої перетину двох площин, кожна з яких є паралельною до певної осі координат обраної афінної системи координат $Oxyz$.

У той же час, умова (3.2) є вірною й тоді, коли одне або два числа з чисел m, n, k дорівнюють нулю. У цьому випадку пропорційність означає, що коли у знаменнику дробу знаходиться число нуль, то число нуль знаходиться й у чисельнику. Отже, у аналітичній геометрії канонічні рівняння прямої l можуть бути записані, наприклад, у вигляді

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k}, \quad n^2+k^2>0.$$

Це означає, що аналітичні умови, які визначають пряму l відносно афінної системи координат $Oxyz$ мають вид наступної системи рівнянь

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{k}, \end{cases} \quad n^2 + k^2 > 0.$$

Одночасно, канонічні рівняння прямої l можуть, наприклад, мати вигляд

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{0}, \quad n \neq 0.$$

Це означає, що аналітичні умови, які визначають пряму l відносно афінної системи координат $Oxyz$ мають вже вид такої системи рівнянь як $\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ z - z_0 = 0 \end{cases}$, пряма l перетинає координатну площину Oxz у точці з координатами $\left(x_0, 0, z_0\right)$ і є паралельною до координатної осі Oy.

Зрозуміло, що кожну пряму l відносно кожної афінної системи координат можна задати канонічними рівняннями. Це пояснюється тим, що у евклідовій геометрії кожна пряма містить безліч точок, на ній завжди можна обрати дві різні точки M_1 і M_2. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ буде напрямлюючим вектором даної прямої. У якості точки M_0 можна обрати або точку M_1, або точку M_2.

Одночасно, ми знайшли і розв'язок наступної задачі: «Відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ для прямої l відомими є кординати двох різних точок $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ і $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ (зрозуміло, що справджується нерівність $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 > 0$). Скласти канонічні рівняння прямої l». Шукана пряма l, безумовно, існує, тому, що у евклідовій геометрії через будь-які дві різні точки проходить пряма і, до того ж, тільки одна. Відповідне рівняння, наприклад, має вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y-y}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ . \qquad (3.13)$$

Рівняння (3.13) називають **канонічними рівняннями прямої, що проходить через дві задані точки.** Кожну пряму l відносно кожної афінної системи координат можна задати рівняннями такого виду.

Легко обґрунтувати також, що будь-які рівняння виду (3.11), для яких виконано умову (3.2), відносно довільної афінної системи координат $Oxyz$ є канонічними рівняннями певної прямої. Точніше, прямої, яка проходить через точку M_0 з координатами $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ відносно даної системи координат паралельно до вектора $\vec{u}$ з координатами $\left(m, n, k\right)_E$ відносно базису E даної системи координат ($\vec{u} \neq \vec{0}$ тому, що вірною є нерівність $m^2+n^2+k^2>0$). Так само, будь-які рівняння виду (3.13), для яких виконано умову $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2>0$, відносно довільної афінної системи координат $Oxyz$ є рівняннями певної прямої. Ця пряма проходить через точки M_1 і M_2, відповідно з координатами $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ і $\left(x_2, y_2, z_2\right)$ відносно даної системи координат.

Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

1. Наявність якого математичного апарату у тривимірному евклідовому просторі забезпечує можливість задання прямої цього простору за допомогою канонічних рівнянь?
2. У тривимірному евклідовому просторі задано певну афінну систему координат $Oxyz$. Що повинне бути відомим для прямої, щоб відносно даної системи координат цю пряму можна було задати канонічними рівняннями?

3. Який вигляд мають канонічні рівняння прямої відносно заданої у тривимірному евклідовому просторі афінної системи координат? Який геометричний зміст відносно даної системи координат мають сталі коефіцієнти цих рівнянь?

4. Якщо пряму евклідового простору відносно певної афінної системи координат цього простору задано канонічними рівняннями, то скільки рівнянь фігурує у такому заданні? Чи є ці рівняння незалежними?

5. Справедливість яких положень треба обґрунтувати для того, щоб довести, що певні канонічні рівняння є тими аналітичними умовами, що визначають задану пряму тривимірного евклідового простору відносно заданої афінної системи координат?

6. Чи кожну пряму тривимірного евклідового простору відносно довільної афінної системи координат цього простору можна задати канонічними рівняннями? Відповідь обґрунтуйте.

7. Для певної прямої тривимірного евклідового простору відносно певної афінної системи координат знайдено канонічні рівняння. Якщо у цих рівняннях один із знаменників дорівнює нулю, що можна стверджувати про відповідний чисельник? Відповідь обґрунтуйте.

8. У тривимірному евклідовому просторі задано певну афінну систему координат $Oxyz$. Який вигляд відносно цієї системи координат мають канонічні рівняння прямої, що проходить через дві задані точки? Відповідь обґрунтуйте. Який геометричний зміст відносно даної системи координат мають сталі коефіцієнти цих рівнянь?

9. У тривимірному евклідовому просторі задано певну афінну систему координат. Чи однозначно для кожної прямої простору відносно даної системи координат визначаються її канонічні рівняння? Чи однозначно за певними канонічними рівняннями визначається пряма? Відповідь обґрунтуйте.

10. У тривимірному евклідовому просторі для певної прямої l відносно певної афінної системи координат відомими є координати точки, яка цій

прямій належить та координати спрямовуючого вектора. Які рівняння прямої l можна скласти за цих умов? Відповідь обґрунтуйте.

3.3. Взаємне розташування двох прямих у евклідовому просторі. Взаємне розташування прямої і площини. Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

У геометрії тривимірного евклідового простору дві різні прямі можуть а) **бути паралельними** (належати певної одній площині і не мати спільних точок), б) **перетинатися** (мати єдину спільну точку), в) **бути мимобіжними** (у випадку, коли не існує площини, що одночасно дані дві прямі містить). При цьому, для будь-яких двох прямих справедливим є один та тільки один з цих трьох можливих варіантів їх взаємного розташування.

У аналітичній геометрії тривимірного евклідового простору ставиться задача встановлення характеру взаємного розташування двох прямих за аналітичними умовами, що визначають ці прямі відносно певного однакового апарату для визначення подібних умов. З геометричної точки зору зрозуміло, що, завдяки наявності саме аналітичних умов, така задача завжди має однозначно визначений розв’язок.

Подалі, у якості відповідного апарату будемо розглядати афінну систему координат.

Ту ж саму пряму тривимірного евклідового простору відносно певної афінної системи може бути задано різними за видом або за числовими значеннями сталих параметрів, рівняннями. Тому у аналітичній геометрії для встановлення характеру взаємного розташування двох прямих за тими аналітичними умовами, за допомогою яких ці прямі задано, навіть, відносно однієї й тієї ж афінної системи координат, треба ще переконатися у тому, що задані прямі насправді є різними.

Розглянемо питання щодо визначення характеру взаємного розташування двох прямих тривимірного евклідового простору у випадку, коли у просторі обрано певну афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E, для кожної з прямих відносно даної системи координат відомими є координати певної точки та координати (відносно базису E) певного спрямовуючого вектора. Зрозуміло, що прямі при цьому можуть бути задані, наприклад, параметричними або канонічними рівняннями.

Припустимо, відносно даної афінної системи координат $Oxyz$ з базисом E прямі l_1 і l_2 відповідно, задано канонічними рівняннями:

$$l_1: \ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{k_1}, \tag{3.14}$$

$$m_1^2+n_1^2+k_1^2>0; \tag{3.15}$$

$$l_2: \ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{k_2}, \tag{3.16}$$

$$m_2^2+n_2^2+k_2^2>0. \tag{3.17}$$

Звідси випливає, що точка $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ належить прямій l_1, вектор $\overrightarrow{u_1}\left(m_1, n_1, k_1\right)_E$ є спрямовуючим вектором прямої l_1, точка $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ належить прямій l_2, вектор $\overrightarrow{u_2}\left(m_2, n_2, k_2\right)_E$ є спрямовуючим вектором прямої l_2.

Зрозуміло, що, якщо прямі прямі l_1 і l_2 співпадають, то можна стверджувати, що точка M_1 належить і прямій l_2, вектор $\overrightarrow{u_1}$ є колінеарним і до прямої l_2, точка M_2 належить і прямій l_1, вектор $\overrightarrow{u_2}$ є колінеарним і до прямої l_1. Отже, у даному випадку, вектори $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ є попарно колінеарними (рис. 3.4.), відповідні координати цих векторів є пропорційними, вірною є рівність

$$rang\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{pmatrix}=1 \tag{3.18}$$

(Завдяки справедливості умов (3.15) і (3.17) ранг подібної матриці не може дорівнювати нулю)

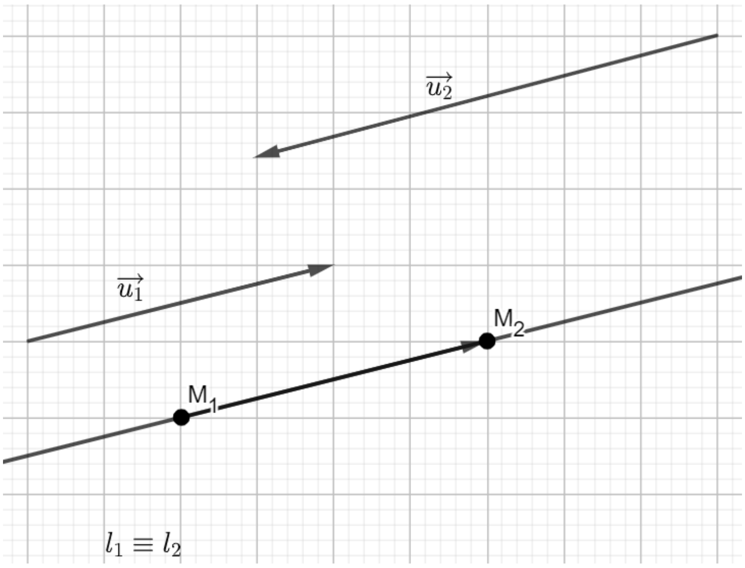

Рис. 3.4.

Нехай тепер прямі l_1 і l_2 є паралельними. У цьому випадку вектори $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$ є колінеарними, але точка M_1 не належить прямій l_2 (одночпсно, зрозуміло, точка M_2 не належить прямій l_1), звідки випливає, що вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ не є колінеарним до векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$. Отже, відповідні координати векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$ є пропорційними, але вони не є пропорційними до відповідних координат вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ (рис.3.5.),

$$rang\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{pmatrix}=1, \tag{3.19}$$

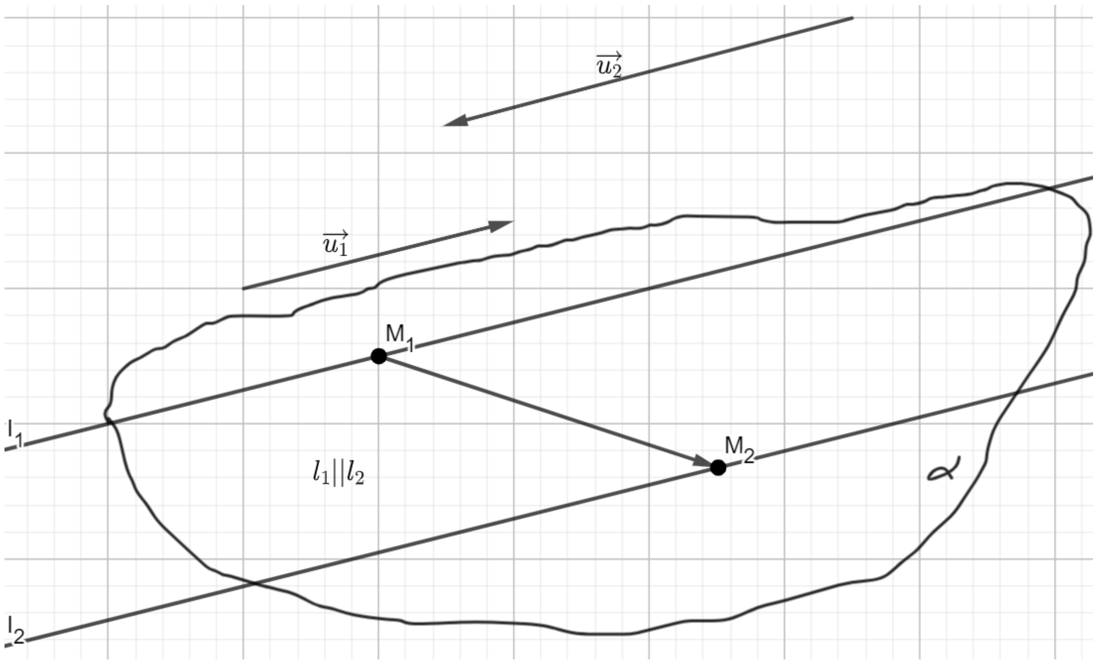

Рис. 3.5.

але вже

$$rang\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{pmatrix}=2 \qquad (3.20)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 перетинаються у певній точці, то існує, і до того ж єдина, площина α, яка ці прямі містять. Вектори $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ є паралельними до цієї площини, тобто вони є компланарними між собою (рис.3.6.).

У той же час вектори $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$ не є колінеарними, тобто

$$rang\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{pmatrix}=2, \qquad (3.21)$$

$$rang\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{pmatrix}=2,$$

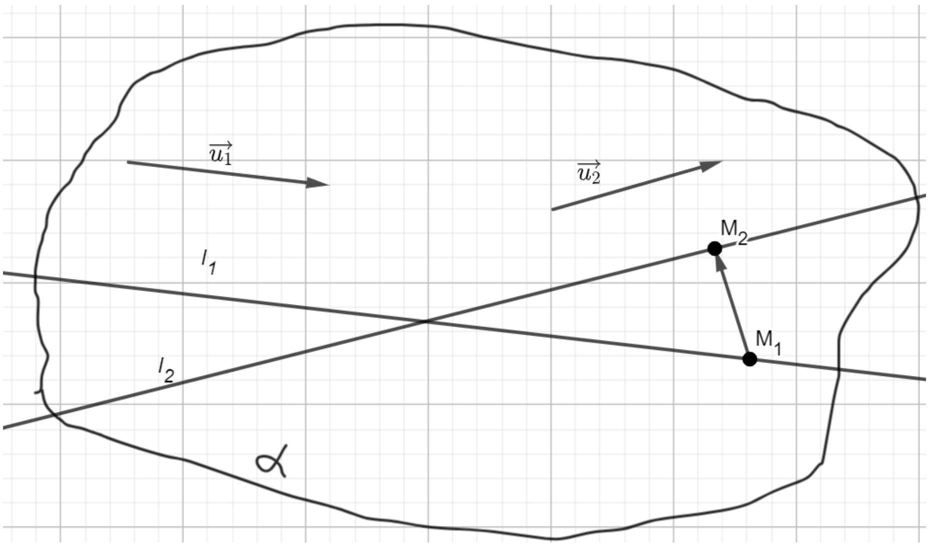

Рис. 3.6.

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.22)$$

Нехай тепер прямі l_1 і l_2 є мимобіжними. Це означає, що не існує жодної площини, яка їх обидві містить. У той же час існує безліч таких площин α, що, припустимо, пряма l_1 площині α належить, а пряма l_2 площину α перетинає у певній точці яка, зрозуміло, прямій l_1 не належить (рис.3.7.).

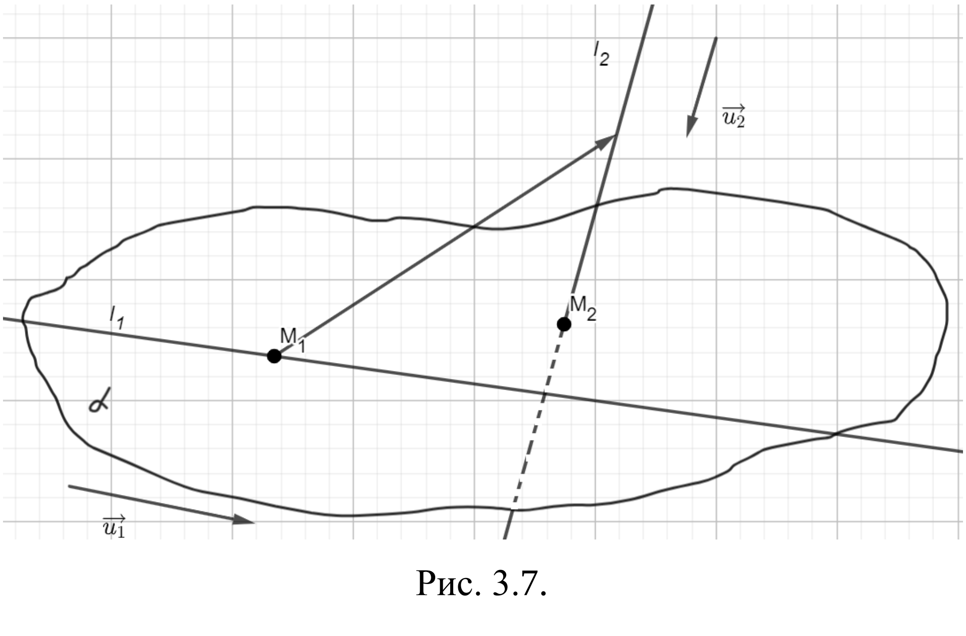

Рис. 3.7.

У цьому випадку вектори $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ не є компланарними,

$$rang\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{pmatrix}=3,$$

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}\neq 0 \qquad (3.23)$$

У підсумку, обгрунтовано справедливість наступної теореми:

Теорема 3.1. Нехай у просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E, для прямих l_1 і l_2 відносно даної системи координат відомими є координати точок $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ і $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$, які, відповідно, цим прямим належать, та координати відповідних спрямовуючих векторів $\overrightarrow{u_1}\left(m_1, n_1, k_1\right)_E$ і $\overrightarrow{u_2}\left(m_2, n_2, k_2\right)_E$; при цьому, зрозуміло, виконано умови (3.15) і (3.17). Якщо прямі l_1 і l_2 співпадають, то має місце рівність (3.18). Якщо прямі l_1 і l_2 є паралельними, то вірними є рівності (3.19) і (3.20). Якщо прямі l_1 і l_2 перетинаються у певній точці, то справедливими є твердження (3.21) і (3.22). Якщо прямі l_1 і l_2 є мимобіжними, вірним є твердження (3.23).

В умовах сформульованих у теоремі 3.1 тверджень розглянуто всі можливі варіанти взаємного розташування двох прямих тривимірного евклідового простору, будь-які два варіанта такого розташування, зрозуміло, не можуть мати місця одночасно. Алгебраїчні рівності (3.18), (3.19) і (3.20), (3.21) і (3.22), (3.23) також є попарно не сумісними. Отже, з логічної точки зору сформульована теорема, так само як і теорема 2.2 , носить характер теореми «Перебору підстав», для неї є справедливою обернена теорема. В силу цього, отримані висновки, найчастіше, формулюють у вигляді однієї теореми, яка носить характер відповідного критерію.

Теорема 3.2. Нехай у просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E, для прямих l_1 і l_2 відносно даної системи координат відомими є координати точок $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ і $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$, які, відповідно, цим прямим належать, та координати відповідних спрямовуючих векторів $\overrightarrow{u_1}\left(m_1, n_1, k_1\right)_E$ і $\overrightarrow{u_2}\left(m_2, n_2, k_2\right)_E$; при цьому, зрозуміло, виконано умови (3.15) і (3.17).

- Прямі l_1 і l_2 співпадають тоді та тільки тоді, коли має місце рівність (3.18).
- Прямі l_1 і l_2 є паралельними тоді та тільки тоді, коли вірними є рівності (3.19) і (3.20).
- Прямі l_1 і l_2 перетинаються у певній точці тоді та тільки тоді, коли справедливими є твердження (3.21) і (3.22).
- Прямі l_1 і l_2 є мимобіжними тоді та тільки тоді, коли вірним є твердження (3.23).

У геометрії тривимірного евклідового простору можливими є наступні випадки взаємного розташування прямої і площини: **пряма може бути паралельною до площини** (це відбувається тоді та тільки тоді, коли пряма і площина не мають спільних точок), **пряма може належати площині** (кожна точка даної прямої є і точкою даної площини), **пряма може перетинати площину у певній точці** (у прямої і площини існує єдина спільна точка). При цьому зрозуміло, що одночасно може мати місце виключно один із вищевказаних випадків.

У аналітичній геометрії ставиться задача встановлення характеру взаємного розташування прямої і площини за аналітичними умовами, що визначають дану пряму і дану площину відносно однакового відповідного апарату для визначення подібних умов. З геометричної точки зору зрозуміло, що, завдяки наявності саме аналітичних умов, така задача завжди має однозначно визначений розв’язок.

Наведемо розв'язок даної задачі для випадку, коли площину α задано загальним рівнянням, а пряму l параметричними рівняннями відносно певної афінної системи координат $Oxyz$.

Нехай у просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E, площину α при цьому задано загальним рівнянням (2.7), для якого, за необхідністю, виконано умову (2.8), а пряму l - параметричними рівняннями (3.3), для яких, за необхідністю, виконано умову (3.2). Як відомо, у подібному випадку точка $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right) \in l$, вектор $\vec{u}$ з координатами $\left(m, n, k\right)_E$ відносно базису E даної системи координат є спрямовуючим вектором прямої l ($\vec{u} \neq \vec{0}$).

Пряма l є паралельною до площини α тоді та тільки тоді, коли вектор $\vec{u}$ є колінеарним до площини α, а точка M_0 площині α не належить (рис. 3.8.).

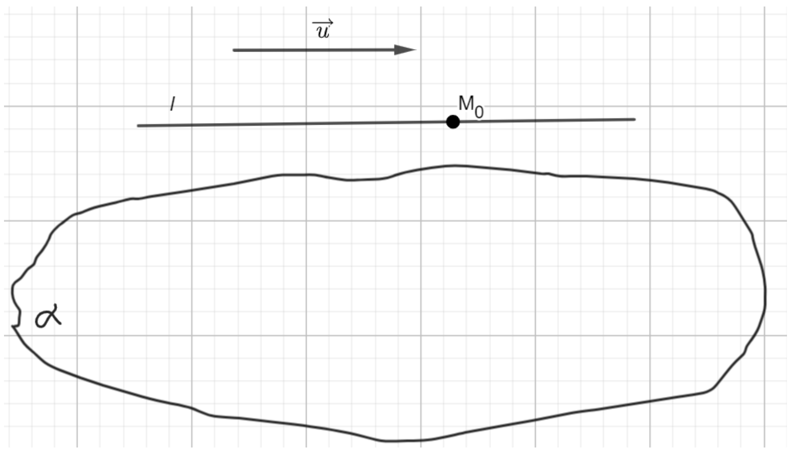

Рис.3.8.

В силу леми про колінеарність вектора до площини, це означає, що виконано наступні умови:

$$A \cdot m + B \cdot n + C \cdot k = 0; \tag{3.24}$$

$$A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D \neq 0. \tag{3.25}$$

Пряма l належить площині α тоді та тільки тоді, коли вектор $\vec{u}$ є колінеарним до площини α і точка M_0 площині α належить (рис. 3.9), тобто виконано умови (3.24) і

$$A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D = 0 \qquad (3.26)$$

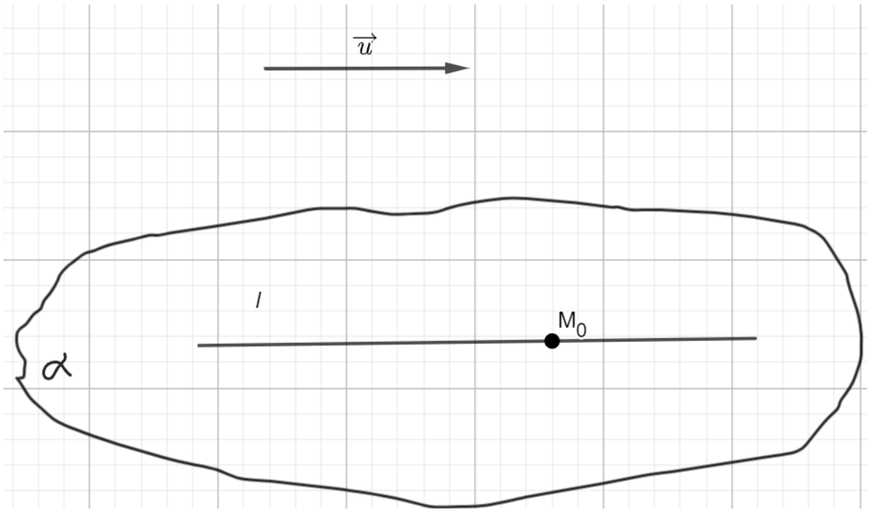

Рис.3.9.

Пряма l перетинає площину α, вони мають єдину спільну точку, тоді та тільки тоді, коли вектор $\vec{u}$ не є колінеарним до площини α (рис. 3.10), тобто, коли виконано умову

$$A \cdot m + B \cdot n + C \cdot k \neq 0. \qquad (3.27)$$

Отже, вірною є наступна теорема.

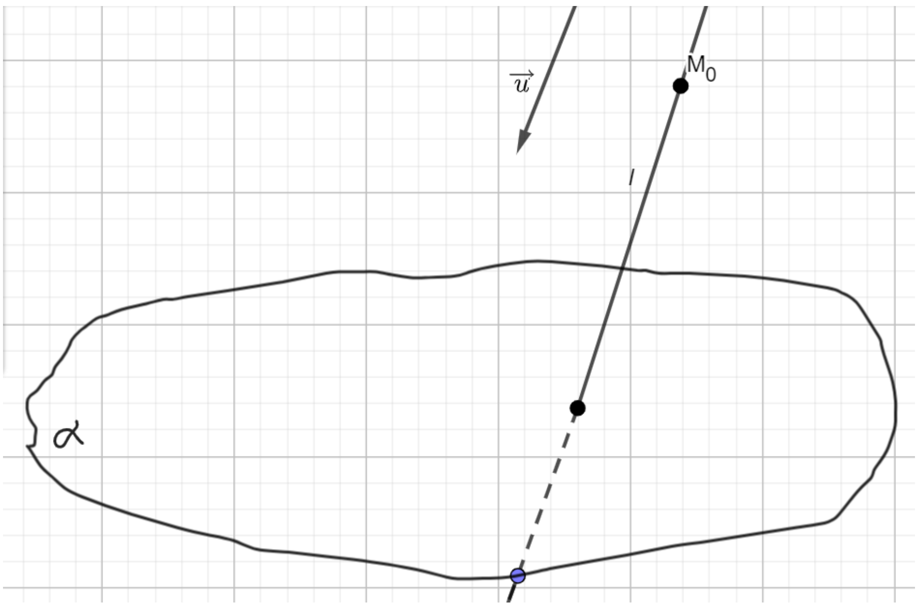

Рис.3.10.

Теорема 3.3. Нехай відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ площину α задано загальним рівнянням (2.7) за умови (2.8), а пряму l - параметричними рівняннями (3.3) за умови (3.2).

- Пряма l є паралельною до площини α тоді та тільки тоді, коли справджуються умови (3.24) і (3.25).
- Пряма l належить площині α тоді та тільки тоді, коли справджуються умови (3.24) і (3.26).
- Пряма l має з площиною α, єдину спільну точку, тоді та тільки тоді, коли справджується умова (3.27).

У випадку, коли справджується умова (3.27) і пряма l має з площиною α, єдину спільну точку, перетинає площину α у певній точці, неважко знайти координати цієї точки перетину. Зрозуміло, що, разом із відповідним значенням параметру t, координати шуканої точки будуть утворювати розв'язок наступної системи чотирьох рівнянь з чотирма змінними:

$$\begin{cases} A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0 \\ x=x_0+m\cdot t \\ y=y_0+n\cdot t \\ z=z_0+k\cdot t \end{cases} \qquad (3.28)$$

В силу умови (3.27) ця система має єдиний розв'язок. Для його знаходження достатньо вирази із останніх трьох рівнянь системи (3.28) підставити у перше рівняння цієї системи, знайти розв'язок t_1 отриманого рівняння, підставити цей розв'язок у праві частини останніх трьох рівнянь системи (3.28) і, після відповідних обчислень, знайти координати $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ шуканої точки.

Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

1. Як у тривимірному евклідовому просторі дві різні прямі можуть бути розташовані одна відносно іншої?

2. Як у аналітичній геометрії тривимірного евклідового простору формулюється задача визначення характеру взаємного розташування двох прямих, заданих аналітичними умовами відносно певної афінної системи координат? Чому саме так? Відповідь обґрунтуйте.

3. Як у математичній логіці формулюється теорема «Перебору підстав»?

4. Як у аналітичній геометрії тривимірного евклідового простору розв'язується задача визначення характеру взаємного розташування двох прямих за канонічними рівняннями цих прямих відносно певної афінної системи координат? Відповідь обґрунтуйте.

5. Які випадки взаємного розташування прямої і площини у тривимірному евклідовому просторі є можливими?

6. Як у аналітичній геометрії тривимірного евклідового простору формулюється загальна задача визначення характеру взаємного розташування прямої і площини, заданих аналітичними умовами відносно певної афінної системи координат?

7. Як у аналітичній геометрії тривимірного евклідового простору розв'язується задача визначення характеру взаємного розташування прямої і площини, у випадку, коли пряму задано параметричними рівняннями, а площину – загальним рівнянням відносно певної афінної системи координат?

3.4. Певні стандартні задачі афінного характеру в теорії прямих і площин тривимірного евклідового простору

У аналітичній геометрії задачі афінного характеру в теорії прямих і площин тривимірного евклідового простору – це задачі, пов'язані з питаннями взаємного розташування прямих і площин виходячи з аналітичних умов, за допомогою яких ці прямі і площини задано відносно відповідного апарату задання, зокрема, відносно довільної афінної системи координат.

Всі задачі, розв'язані або запропоновані для самостійного розв'язання наприкінці §2, задачі теоретичного характеру, розв'язок яких визначено теоремами другого і третього параграфів, в теорії прямих і площин тривимірного евклідового простору є саме задачами афінного характеру. Подалі, у загальнотеоретичному варіанті розглянемо ще деякі з них.

Задача 1. У тривимірному евклідовому просторі площину α відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ з базисом E задано загальним рівнянням (2.7), коефіцієнти якого, за необхідністю, задовольняють умову (2.8). Записати рівняння якої-небудь прямої, що належить цій площини.

Розв'язання. В силу умови (2.8), у загальному рівнянні (2.7) площини α принаймні один з коефіцієнтів при невідомих є відмінним від нуля. Нехай, для визначеності, відмінним від нуля є коефіцієнт A. Тоді можна у (2.7) покласти, припустимо, $z=0$, $y=t$, визначити, що у цьому випадку $x=-\frac{D}{A}-\frac{B}{A}\cdot t$. Легко перевірити, що пряма l, задана відносно системи координат $Oxyz$ параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x=-\frac{D}{A}-\frac{B}{A}\cdot t \\ y=t \\ z=0 \end{cases},$$

належить площині α. Це пряма, яка проходить через точку $M_0\left(-\frac{D}{A},0,0\right)$ і має у якості спрямовуючого вектора - вектор $\vec{u}\left(-\frac{B}{A},1,0\right)_E$. Зрозуміло, що ця пряма є паралельною до координатної площини Oyz або цій площині належить (у випадку $D=0$).

Задача 2. У тривимірному евклідовому просторі площину α відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ з базисом E задано загальним рівнянням (2.7), коефіцієнти якого, за необхідністю, задовольняють умову (2.8). Записати рівняння якої-небудь прямої, паралельної до даної площини.

Розв'язання. В силу умови (2.8), у загальному рівнянні (2.7) площини α принаймні один з коефіцієнтів при невідомих є відмінним від нуля. Нехай, для визначеності, відмінним від нуля є коефіцієнт A. На підставі леми про колінеарність вектора до площини, можна стверджувати, що вектори $\overrightarrow{u_1}\left(-B, A, 0\right)_E$ і $\overrightarrow{u_2}\left(-C, 0, A\right)_E$ є колінеарними до площини α . Одночасно зрозуміло, що вони не є колінеарними між собою. Одночасно, легко перевірити, що числа $-\frac{D}{A}, 0, 0$ утворюють розв'язок рівняння (2.7) . Це означає, що площині α належить точка $M_0\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$. Але тоді точка $M_1\left(-\frac{D+1}{A}, 0, 0\right)$, наприклад, площині α не належить, у якості шуканої прямої можна обрати як пряму, що проходить через точку M_1 паралельно до вектора $\overrightarrow{u_1}$, так і пряму, що проходить через точку M_1 паралельно до вектора $\overrightarrow{u_2}$. Відносно системи координат $Oxyz$ кожну з цих прямих можна задати як параметричними, так і канонічними рівняннями. Так, канонічні рівняння прямої l_1, що проходить через точку M_1 колінеарно до вектора $\overrightarrow{u_1}$ мають вид

$$\frac{x+\frac{D+1}{A}}{-B}=\frac{y}{A}=\frac{z}{0}.$$

Задача 3. У тривимірному евклідовому просторі площину α відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ з базисом E задано загальним рівнянням (2.7), коефіцієнти якого, за необхідністю, задовольняють умову

(2.8). Записати рівняння якої-небуть прямої, що перетинає площину α у певній точці.

Розв'язання. В силу умови (2.8), у загальному рівнянні (2.7) площини α принаймні один з коефіцієнтів при невідомих є відмінним від нуля. Нехай, для визначеності, відмінним від нуля є коефіцієнт A. Це означає, що площина α не є паралельною до координатної осі Ox і не містить цю вісь. Отже, саму вісь Ox або будь-яку пряму, паралельну до осі Ox, можна вказати у якості шуканої. Параметричні рівняння осі Ox мають вид $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$, параметричні рівняння прямої, паралельної до осі Ox, у загальному випадку мають вид $\begin{cases} x=t \\ y=y_0 \\ z=z_0 \end{cases}$ за умови $y_0^{\ 2}+z_0^{\ 2}>0$.

Згідно наслідку з леми про паралельність вектора до площини, вектор $\vec{u}\left(A,B,C\right)_E$ не є колінеарним до площини, заданої загальним рівнянням (2.7). Отже, будь-яка пряма, для якої цей вектор обрано у якості спрямовуючого, для даної задачі буде шуканою. Параметричні рівняння такої прямої, яка містить, наприклад, точку $E\left(1,1,1\right)$, мають вид $\begin{cases} x=1+A\cdot t \\ y=1+B\cdot t \\ z=1+C\cdot t \end{cases}$.

Зрозуміло, що кожна із задач 1 – 3 має безліч розвязків.

Задача 4. У тривимірному евклідовому просторі площину α відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ задано загальним рівнянням виду (2.7), коефіцієнти якого, за необхідністю, задовольняють умову (2.8). Пряму l задано рівняннями виду (2.26), як лінію перетину площин α_1 і α_2, які, у свою чергу, також задані відносно системи координат $Oxyz$ загальними рівняннями виду (2.7), коефіцієнти яких задовольняють умови виду (2.8). Перевірити, що площини α_1 і α_2 насправді перетинаються за певною прямою. Визначити характер взаємного розташування прямої l і площини α. Якщо виявиться, що пряма l перетинає площину α у певній точці, знайти координати точки перетину.

Розв'язання. Нехай відносно системи координат $Oxyz$ площину α_1 задано загальним рівнянням $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$ за умови $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$, площину α_2 - загальним рівнянням $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$ за умови $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$. Згідно теореми 2.3, для того, щоб переконатися у тому, що площини α_1 і α_2 насправді перетинаються за певною прямою l, достатньо перевірити виконання умови $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$, тобто, той факт, що коефіцієнти при невідомих у загальних рівняннях площин α_1 і α_2 не є пропорційними. Припустимо, перевірка показала, що факт перетину має місце. Оскільки характер взаємного розташування прямої l і площини α залежить від потужності множини їх спільних точок, для його встановлення достатньо дослідити систему рівнянь

$$\begin{cases} A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0 \\ A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Це системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими. Її можна досліджувати як за теоремою Кронекера-Капеллі, так і за правилом Крамера. Краще, здається, спочатку обчислити головний визначник Δ цієї системи.

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$. Якщо $\Delta\neq 0$, то система має єдиний розв'язок, пряма l перетинає площину α у точці, координати якої відносно системи координат $Oxyz$ будуть визначені як розв'язок даної системи. Знайти цей розв'язок можна як за правилом Крамера, так і використовуючи будь-який інший метод. Якщо $\Delta=0$, то ранг матриці $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ дорівнює двом і, зручніше за все, мабуть, тепер обчислити ранг поширеної матриці даної системи. Якщо ранг поширеної матриці дорівнює трьом, то системи не має розв'язків, пряма l є паралельною до площини α. Якщо ранг поширеної матриці дорівнює двом, то система має безліч розв'язків, пряма l належить площині α.

Задача 5. У тривимірному евклідовому просторі прямі l_1 і l_2 відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ з базисом E задано канонічними рівняннями, тобто, рівняннями виду (3.11), за умови (3.2). Перевірити, що задані прямі перетинаються у певній точці. Знайти координати точки перетину. Записати рівняння плошини, що ці прямі містить.

Розв'язання. Нехай прямі l_1 і l_2 тривимірного евклідового простору відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ з базисом E задано наступними канонічними рівняннями.

$$l_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{k_1},$$

$$l_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{k_2}.$$

Зрозуміло, що при цьому виконано умови $m_1^2+n_1^2+k_1^2>0$ і $m_2^2+n_2^2+k_2^2>0$. Відповідно до теореми 3.1, для переконання у тому, що задані прямі перетинаються у одній точці, достатньо перевірити, що координати $(m_1,n_1,k_1)_E$ і $(m_2,n_2,k_2)_E$ спрямовуючих векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$ цих прямих не є пропорціційними, тобто, $rang\begin{pmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{pmatrix}=2$, а $\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{vmatrix}=0$. Рівняння площини, що містить прямі l_1 і l_2, можна записати у вигляді рівняння площини, що проходить через точку M_1 з координатами (x_1,y_1,z_1) паралельно до векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$. У підсумку, будемо мати рівняння

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{vmatrix}=0.$$

Отримане рівняння легко звести до загального виду.

Задача 6. У тривимірному евклідовому просторі прямі l_1 і l_2 відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ з базисом E задано канонічними рівняннями, тобто, рівняннями виду (3.11), за умови (3.2). Перевірити, що задані прямі є паралельними. Записати рівняння плошини, що ці прямі містить.

Розв'язання. Нехай прямі l_1 і l_2 тривимірного евклідового простору відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ з базисом E задано наступними канонічними рівняннями.

$$l_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{k_1},$$

$$l_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{k_2}.$$

Зрозуміло, що при цьому виконано умови $m_1^2+n_1^2+k_1^2>0$ і $m_2^2+n_2^2+k_2^2>0$. Відповідно до теореми 3.1, для переконання у тому, що задані прямі є паралельними, достатньо переконатися у тому, що колінеарними є напрямлюючі вектори $\overrightarrow{u_1}\left(m_1,n_1,k_1\right)_E$ і $\overrightarrow{u_2}\left(m_2,n_2,k_2\right)_E$ цих прямих, одночасно, ці напрямлюючі вектори не є колінеарними до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}\ \left(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\right)_E$. Рівняння площини, що містить прямі l_1 і l_2, можна записати у вигляді рівняння площини, що проходить через точку M_1 з координатами $\left(x_1,y_1,z_1\right)$ паралельно до векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$. У підсумку, будемо мати рівняння

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Отримане рівняння легко звести до загального виду.

Задача 7. У тривимірному евклідовому просторі прямі l_1 і l_2 відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ з базисом E задано канонічними рівняннями, тобто, рівняннями виду (3.11), за умови (3.2). Перевірити, що задані прямі є мимобіжними. Записати рівняння а) площини α_1, яка проходить через пряму l_1 паралельно до прямої l_2, б) площини α_2, яка проходить через пряму l_2 паралельно до прямої l_1.

Розв’язання. Згідно умови задачі, рівняння прямих l_1 і l_2 зпдано у наступному виді.

$$l_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{k_1},$$

$$l_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{k_2}.$$

Зрозуміло, що при цьому виконано умови $m_1^2+n_1^2+k_1^2>0$ і $m_2^2+n_2^2+k_2^2>0$. Відповідно до теореми 3.1, для переконання у тому, що задані прямі є мимобіжними, достатньо перевірити виконання умови

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Якщо цю умову виконано, то сформульована задача має сенс, рівняння площини α_1 можна записати як рівняння площини, що проходить через точку $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ паралельно до векторів $\overrightarrow{u_1}\left(m_1, n_1, k_1\right)_E$ і $\overrightarrow{u_2}\left(m_2, n_2, k_2\right)_E$, а рівняння площини α_2 - як рівняння площини, що проходить паралельно до тих же самих векторів через точку $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ (рис.3.11.)

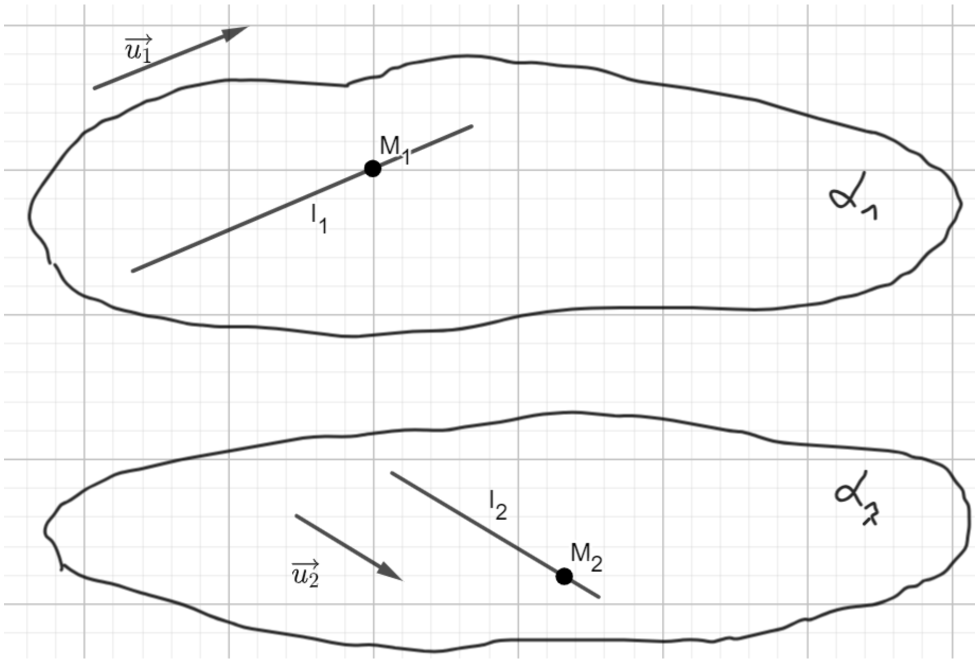

Рис.3.11.

$$\alpha_1: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{vmatrix} = 0; \qquad \alpha_2: \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Далі отримані рівняння площин α_1 і α_2 легко звести до загального виду.

3.5. Приклади розв'язків типових практичних завдань

Задача 3.1. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Пряму l відносно цієї системи координат задано канонічними рівняннями $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+4}{-2}$. Знайти координати двох точок, які належать цій прямій.

Розв'язання. Координати однієї точки, яка належить прямій l, можна вказати миттєво, виходячи з геометричного змісту сталих у заданому канонічному рівнянні. Це точка M_0 з координатами $(1, 0, -4)$. Для знаходження координат ще однієї точки можна проводити міркування по-різному. Можна у заданому канонічному рівнянні прямої l одній із змінних, x, y або z, надати довільне дійсне значення, відмінне від значення відповідної координати точки M_0, і, на підставі існуючих рівностей, після фактичного переходу до задання прямої l у вигляді лінії перетину двох площин, знайти значення двох інших змінних. Можна записати параметричні рівняння прямої l як прямої, що проходить через точку M_0 колінеарно до вектора $\vec{u}\left(1,3,-2\right)_E$, і надати параметру довільне, відмінне від нуля, дійсне значення. Але, з технічної точки зору, виходячи з того, що канонічні рівняння прямої l представляють собою рівність трьох відношень, зручніше за все просто надати цим відношенням довільного, відмінного від нуля бо нульове значення відповідає точці M_0, дійсного значення і обчислити відповідні значення змінних x, y та z. З теоретичної точки зору це, фактично, співпадає з переходом до параметричних рівнянь.

Отже, оберемо, наприклад, у якості відповідного значення відношень число 1. Вірними стануть рівності $\frac{x-1}{1}=1$, $\frac{y}{3}=1$, $\frac{z+4}{-2}=1$. Звідси випливає, що $x-1=1$, $y=3$, $z+4=-2$ або $x=2$, $y=3$, $z=-6$. Точка $M_1\left(2,3,-6\right)$ належить прямій l.

Задача 3.2. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відомими відносно цієї системи координат є координати точок A, B і C: $A\left(5,8,15\right)$, $B\left(-1,-1,-3\right)$, $C\left(5,7,1\right)$. Пряму l відносно даної системи координат задано параметричними рівняннями $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3\cdot t \\ z=3+6\cdot t \end{cases}$.

Визначити, які з точок A, B, C належать прямій l.

Розв’язання. Точка із заданими відносно афінної системи координат координатами належить прямій, яку задано параметричними рівняннями відносно тієї ж самої афінної системи координат, тоді та тільки тоді, коли існує таке дійсне значення параметра t , яке, разом з координатами цієї точки, утворює розв’язок даної системи параметричних рівнянь. Отже, для знаходження відповідей на питання даної задачі, має сенс дослідити наступні системи рівнянь:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 5=1+2t \\ 8=2+3\cdot t \\ 15=3+6\cdot t \end{cases}, \quad \text{б)}\ \begin{cases} -1=1+2t \\ -1=2+3\cdot t \\ -3=3+6\cdot t \end{cases}, \quad \text{в)}\ \begin{cases} 5=1+2t \\ 7=2+3\cdot t \\ 1=3+6\cdot t \end{cases}.$$

Кожна з цих систем представляє собою систему трьох лінійних рівнянь з одним невідомим. Тому для кожної з систем доцільно розглянути те з трьох рівнянь, яке здається найпростішим, розв’язати його і за допомогою підстановки перевірити чи буде отриманий розв’язок коренем двох інших рівнянь.

Для системи (а) будемо мати наступне. Перше рівняння є рівносильним до рівняння $2\cdot t=4$ або $t=2$. Отже, число 2 є розв’язком першого рівняння системи. Після підстановки цього числа у праву частину другого рівняння системи отримаємо: $3\cdot 2+2=8$; $8\equiv 8$, тому число 2 є розв’язком другого рівняння системи. Унаслідок підстановки у праву частину третього рівняння системи будемо мати: $6\cdot 2+3=15$; $15\equiv 15$, тому число 2 є розв’язком і третього рівняння системи. Отримані підрахунки свідчать про те, що точка A належить прямій l.

За повною аналогією, для системи (б) будемо мати: перше рівняння є рівносильним до рівняння $2\cdot t=-2$ або $t=-1$; $3\cdot(-1)+2=-1$, $-1\equiv -1$; $6\cdot(-1)+3=-3$, $-3\equiv -3$. Отже, як і у попередньому випадку, отримані підрахунки свідчать про те, що точка B належить прямій l.

Для системи (в) будемо мати: як і для системи (а), перше рівняння є рівносильним до рівняння $2 \cdot t = 4$ або $t = 2$, число 2 є розв'язком першого рівняння. Після підстановки цього числа у праву частину другого рівняння системи (в), як і для системи (а) отримаємо: $3 \cdot 2 + 2 = 8$. Але $8 \neq 7$. Це означає, що число 2 не є розв'язком другого рівняння системи (в), і, в силу цього, не є розв'язком системи (в), точка C не належить прямій l.

Задача 3.3. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат площину α задано загальним рівнянням α : $x + 3 \cdot y - z + 1 = 0$. Записати рівняння прямої l перетину площини α з координатною площиною Oxy.

Розв'язання. У тривимірному евклідовому просторі координатна площина Oxy відносно афінної системи координат $Oxyz$ задається рівнянням $z = 0$. Отже, зручніше за все, записати рівняння прямої l у вигляді рівняння лінії перетину площин α і Oxy. $l : \begin{cases} x + 3 \cdot y - z + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Зрозуміло, що площини, перетин яких співпадає з прямою l, можна змінити. Логічніше, мабуть, представити пряму l за допомогою системи рівнянь наступного виду. $l : \begin{cases} x + 3 \cdot y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. У останньому варіанті пряму l представлено як лінію перетину координатної площини Oxy з площиною, паралельною до координатної осі Oz. Якщо у координатній площині Oxy розглянути афінну систему координат Oxy, індуковану афінною системою координат $Oxyz$. простору, то у цій площині, відносно цієї афінної системи координат пряму l буде задано загальним рівнянням l: $x + 3 \cdot y + 1 = 0$.

Задача 3.4. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно цієї системи координат пряму l задано як лінію перетину двох площин. $l: \begin{cases} x+2\cdot y+z-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$. Відносно даної системи координат знайти які-небудь параметричні рівняння прямої l.

Розв'язання. Зауважимо спочатку, що площини, пряму перетину яких позначено через l, насправді перетинаються за прямою, бо у загальних рівняннях цих площин коефіцієнти при відповідних невідомих не є пропорційними: $\frac{1}{1} \neq \frac{2}{-1}$.

Далі, зрозуміло, що, виходячи із заданих рівнянь прямої l, як розв'язки відповідної системи двох лінійних рівнянь з трьома невідомими, можна знайти координати будь-яких двох точок M_0 і M_1, які належать цій прямій, і записати параметричні рівняння прямої l як прямої, що проходить, припустимо, через точку M_0 колінеарно до вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$. Одночасно, з алгебраїчної точки зору, згідно теореми Кронекера-Капеллі, відомо, що система лінійних рівнянь прямої l має безліч розвязків, які залежать від одного параметра, цей параметр може приймати довільні дійсні значення. Представлення невідомих даної системи у вигляді математичних виразів, що залежать від цього параметру і є, фактично, переходом від задання прямої l у вигляді лінії перетину двох площин до її параметричного способу задання. Будемо вважати, наприклад, що $x=t$. Тоді, із другого рівняння системи $y=1+t$, із першого рівняння - $z=-x-2\cdot y+3=-t-2\cdot(t+1)+3=-3\cdot t+1$.

У підсумку, отримуємо наступні параметричні рівняння: $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=1-3\cdot t \end{cases}$. За своєю формою – це параметричні рівняння прямої з напрямлюючим вектором $\overrightarrow{u}\left(1,1,-3\right)_E$, яка проходить через точку $M_0\left(0,1,1\right)$. Такою прямою є саме пряма l. (З теоретичної точки зору це очевидно, але можна і перевірити шляхом безпосередньої підстановки координат точки M_0 до загальних рівнянь заданих площин, які визначають пряму l, та використання леми про паралельність вектора до площини).

Задача 3.5. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно цієї системи координат відомими є параметричні рівняння прямих l_1 і l_2. $l_1:\begin{cases} x=1+2\cdot t \\ y=7+t \\ z=3+4\cdot t \end{cases}$; $l_2:\begin{cases} x=6+3\cdot t \\ y=-1-2\cdot t \\ z=-2+t \end{cases}$. Перевірити, що прямі l_1 і l_2 перетинаються, знайти координати точки перетину і рівняння площини, що ці прямі містить.

Розв'язання. Із параметричного рівняння прямої відносно афінної системи координат безпосередньо відомими є координати точки, яка цій прямій належить, і координати спрямовуючого вектора. Отже, $M_1\left(1,7,3\right)\in l_1$, $M_2\left(6,-1,-2\right)\in l_2$, вектор $\overrightarrow{u_1}\left(2,1,4\right)_E$ є колінеарним до прямої l_1, вектор $\overrightarrow{u_2}\left(3,-2,1\right)_E$ - колінеарним до прямої l_2. $\frac{2}{3}\neq\frac{1}{-2}$, координати векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$ не є пропорційними, вектори $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$ між собою не є колінеарними. Тому у факті перетину прямих l_1 і l_2 можна переконатися за формулою (3.22) . Отримуємо

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6-1 & -1-7 & -2-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix}=20+5-96+40+16+15=0,$$

І, у підсумку, факт перетину прямих l_1 і l_2 підтверджено. Рівняння площини, що містить прямі l_1 і l_2, зрозуміло, має сенс записати у вигляді рівняння площини, що проходить, припустимо, через точку M_1 паралельно до векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$. Будемо мати

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-7 & z-3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}-(y-7)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+(z-3)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=0,$$

$$9\cdot(x-1)+10\cdot(y-7)-7\cdot(z-3)=0, \quad 9\cdot x+5\cdot y-7\cdot z-58=0.$$

Координати спільної точки прямих l_1 і l_2 повинні задавольняти параметричні рівняння кожної з цих прямих при певних значеннях параметру. Ньюанс полягає в тому, що, у загальному випадку, відповідні значення параметру для прямих l_1 і l_2 будуть різними. Отже, якщо не змінювати вид рівнянь, за допомогою яких прямі l_1 і l_2 задано відносно афінної системи координат $Oxyz$, то для знаходження координат точки перетину прямих l_1 і l_2 варто у параметричному рівнянні однієї з цих прямих параметр t позначити іншою буквою, s , наприклад, і вже після цього розглянути систему рівнянь, що об'єднує параметричні рівняння обох прямих: $\begin{cases} x=1+2\cdot t \\ y=7+t \\ z=3+4\cdot t \\ x=6+3\cdot s \\ y=-1-2\cdot s \\ z=-2+s \end{cases}$. Маємо систему шести лінійних рівнянь з п'ятьма невідомими: x, y, z, s і t. Вже наперед відомо, що система має точно один розв'язок. При цьому, шуканими є лише відповідні значення змінних x, y, z. Але для їх знаходження доцільно спочатку визначити відповідне значення змінної s або змінної t. Для цього, у свою чергу, варто дорівняти між собою, відповідно, вирази змінних x, y, z через змінні s і t та розглянути отриману систему рівнянь: $\begin{cases} 1+2\cdot t=6+3\cdot s \\ 7+t=-1-2\cdot s \\ 3+4\cdot t=-2+s \end{cases}$. Це вже система трьох лінійних рівнянь з двома змінними, про яку, також, наперед відомо, що вона має єдиний розв'язок. Два останніх рівняння цієї системи, очевмдно, є взаємно незалежними. Отже, має сенс розглядати лише їх. Якщо домножити друге з цих рівнянь на 2, отримаємо $\left.\begin{cases} 7+t=-1-2\cdot s \\ 6+8\cdot t=-4+2\cdot s \end{cases}\right|+$, а після операції додавання будемо мати рівняння $9\cdot t=-18$. Звідси $t=-2$. Тепер знаходимо: $x=1-4=-3$,

$y=7-2=5$, $z=3-8=-5$. У підсумку, точка перетину має координати $\left(-3,5,-5\right)$.

Задача 3.6. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E . Відносно цієї системи координат пряму l задано як лінію перетину площин α_1 і α_2. α_1: $2\cdot x-y+z-3=0$, α_2: $x+3\cdot y-z-1=0$, l: $\begin{cases} 2\cdot x-y+z-3=0 \\ x+3\cdot y-z-1=0 \end{cases}$. Записати рівняння прямої l_1, яка проходить через точку $M\left(1,-3,4\right)$ паралельно до прямої l.

Розв'язання. Зауважимо спочатку, що площини α_1 і α_2, пряму перетину яких позначено через l, насправді перетинаються за прямою, бо у загальних рівняннях цих площин коефіцієнти при відповідних невідомих не є пропорційними: $\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{3}$. Легко перевірити також, що задана точка M не належить прямій l (точка M не належить вже площині α_1 , бо $2\cdot 1+3+4-3=6\neq 0$). Отже, з геометричної точки зору, сформульована задача є коректною.

Для розв'язання даної задачі можна, наприклад, так само, як і при розв'язання задачі 3.4, у заданні прямої l перейти до параметричних рівнянь, унаслідок цього визначити координати відносно базису E спрямовуючого вектора $\vec{u}$ прямої l , записати параметричні рівняння прямої l_1 як параметричні рівняння прямої, що проходить через точку M колінеарно до вектора $\vec{u}$, або відповідні канонічні рівняння цієї прямої.

У той же час, пряму l_1 можна представити і у виді прямої перетину площин β_1 і β_2, що проходять через точку M, відповідно, паралельно до площин α_1 і α_2. Рівняння площини β_1 варто шукати у виді $2\cdot x-y+z+D=0$, значення коефіцієнта D визначається з тієї умови, що точка M належить площині β_1 : $2\cdot 1+3+4+D=0$, $D=-3$, β_1: $2\cdot x-y+z-9=0$. Аналогічно, рівняння площини β_2 треба шукати у виді $x+3\cdot y-z+P=0$, значення коефіцієнта P визначати з тієїх умови, що точка M належить площині β_2: $1-3\cdot 3-4+P=0$, $1-9-4+P=0$, $P=12$, β_2: $x+3\cdot y-z+12=0$. У підсумку, будемо мати l_1: $\begin{cases} 2\cdot x-y+z-9=0 \\ x+3\cdot y-z+12=0 \end{cases}$.

Задача 3.7. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно цієї системи координат пряму l задано як лінію перетину площин α_1 і α_2. α_1: $2\cdot x-y+z=0$, α_2 : $x+y+2\cdot z=0$, l : $\begin{cases} 2\cdot x-y+z=0 \\ x+y+2\cdot z=0 \end{cases}$. З'ясувати особливості розташування прямої l по відношенню до даної системи координат.

Розв'язання. Зауважимо спочатку, що площини α_1 і α_2, пряму перетину яких позначено через l, насправді перетинаються за прямою, бо у загальних рівняннях цих площин коефіцієнти при відповідних невідомих не є пропорційними: $\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{1}$.

Далі, усвідомимо, що з'ясування характеру розташування прямої l по відношенню до афінної системи координат $Oxyz$ передбачає знаходження відповідей на наступні питання. Чи проходить пряма l через початок відліку

O. Як пряма l є розташованою відносно кожної з координатних осей: перетинає у певній точці, є паралельною, співпадає чи є мимобіжною. Як пряма l є розташованою по відношенню до кожної з координатних площин: перетинає у певній точці, належить чи є паралельною. Відповіді на всі поставлені питання легко знайти за параметричними рівняннями прямої l. При розвязанні задачі 3.4 було показано, яким чином із задання прямої l у вигляді прямої перетину двох площин перейти до її задання за допомогою параметричних рівнянь.

Одночасно, конкретний вид загальних рівнянь площин α_1 і α_2, перетином яких є пряма l, часто дозволяє достатньо швидко розв'язати поставлену задачу і без переходу до задання прямої l за допомогою параметричних рівнянь. Так, у даному випадку, у загальних рівняннях обох площин α_1 і α_2 вільні члени дорівнюють нулю. Це означає, що обидві площини, а, в силу цього і пряма l як лінія їх перетину, проходять через початок відліку: $O \in l$, пряма l не є паралельною до жодної з координатних осей і до жодної з координатних площин, пряма не є мимобіжною до жодної з координатних осей.

Пряма l є віссю жмутка площин, визначеного площинами α_1 і α_2. Отже, вона належить кожній площині, ліва частина загального рівняння якої представляє собою певну лінійну комбінацію лівих частин загальних рівнянь площин α_1 і α_2. Так, унаслідок додавання рівнянь площин α_1 і α_2 отримуємо рівняння $3 \cdot x + 3 \cdot z = 0$ або $x + z = 0$, якому задовольняють координати кожної точки прямої l. У координатній площині Oxz - це рівняння проєкції на цю площину прямої l у напрямку координатної осі Oy, Аналогічним чином у координатній площині Oxy отримуємо рівняння проєкції на цю площину прямої l у напрямку координатної осі Oz: $x - y = 0$, у координатній площині Oyz - рівняння проєкції на цю площину прямої l у напрямку координатної осі Ox : $y+z=0$. Кожна проєкція представляє собою пряму, жодна проєкція не співпадає з жодною координатною віссю. Це означає, що пряма l у певній точці, а саме – у початку відліку – перетинає кожну координатну вісь і кожну координатну площину.

Задача 3.8. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Скласти рівняння площини α, що проходить через точку $M(1,1,-3)$ паралельно до прямих l_1: $\begin{cases} 2\cdot x-2\cdot y+3\cdot z-4=0 \\ x+2\cdot y-4\cdot z+1=0 \end{cases}$ і l_2: $\begin{cases} 3\cdot x-y-z=0 \\ x+y-3\cdot z+1=0 \end{cases}$.

Розв’язання. В силу того, що $\frac{2}{1}\neq\frac{-2}{2}$, $\frac{3}{1}\neq\frac{-1}{1}$, прямі l_1 і l_2 існують, задачу поставлено коректно (рис. 3.12). Для її розв’язання, здається, зручнішеза все для кожної з прямих l_1 і l_2 знайти відносно базису E координати спрямовуючого вектора. Скористуємося для цього описаним під час розв’язання задачі 3.4 переходим до параметричних рівнянь прямих l_1 і l_2.

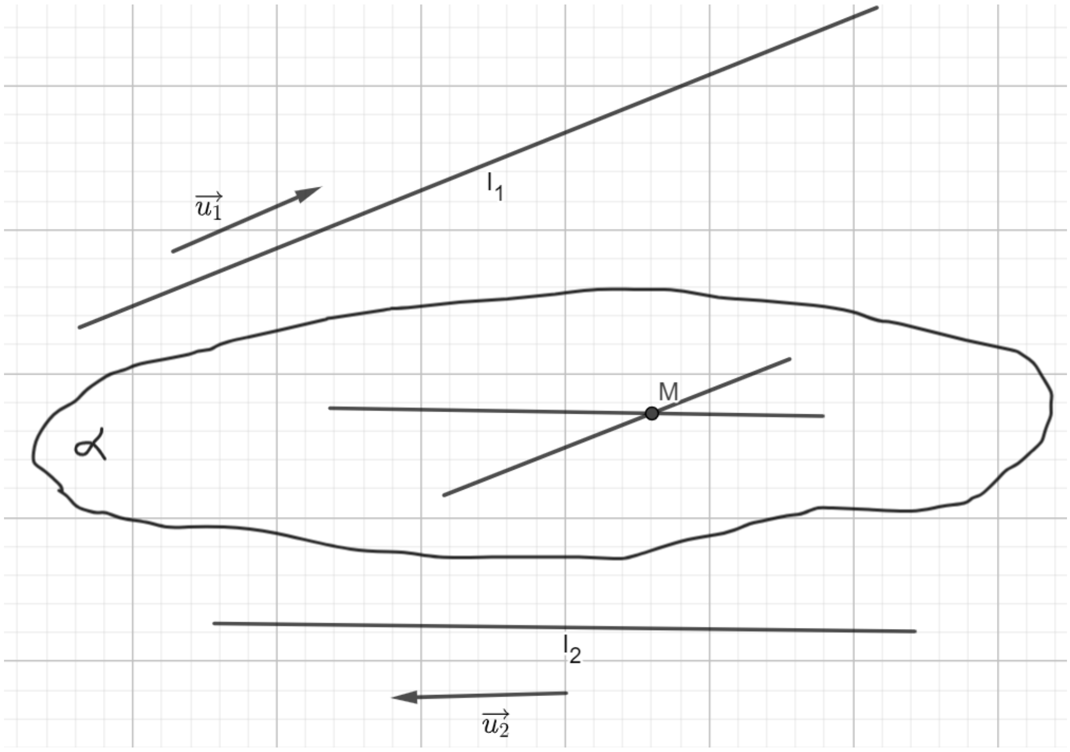

Рис.3.12.

Для прямої l_1 будемо мати: 1) система лінійних рівнянь, що визначає пряму l_1, є рівносильною до наступної системи: $\begin{cases} 3\cdot x - z - 3 = 0 \\ x + 2\cdot y - 4\cdot z + 1 = 0 \end{cases}$ (перше рівняння системи замінили сумою першого і другого, виключили таким чином з першого рівняння змінну y); 2) унаслідок тотожних перетворень рівнянь отриманої системи маємо: $\begin{cases} y = \frac{11}{2}\cdot x - \frac{13}{2} \\ z = 3\cdot x - 3 \end{cases}$; 3) покладемо $x = 2\cdot t$, тоді утвориться наступна система параметричних рівнянь $\begin{cases} x = 2\cdot t \\ y = -\frac{13}{2} + 11\cdot t \\ z = -3 + 6\cdot t \end{cases}$.

Отримані рівняння є параметричними рівняннями прямої l_1 відносно обраної системи координат $Oxyz$, вектор $\overrightarrow{u_1}\left(2,11,6\right)_E$ є спрямовуючим вектором даної прямої.

Для прямої l_2 будемо мати: 1) система лінійних рівнянь, що визначає пряму l_2, є рівносильною до наступної системи: $\begin{cases} 4\cdot x-4\cdot z+1=0 \\ x+y-3\cdot z+1=0 \end{cases}$ (перше рівняння системи замінили на суму першого і другого, виключили таким чином з першого рівняння змінну y); 2) унаслідок тотожних перетворень рівнянь отриманої системи маємо: $\begin{cases} y=-x+3\cdot z-1 \\ z=x+\frac{1}{4} \end{cases}$ або $\begin{cases} y=2\cdot x-\frac{1}{4} \\ z=x+\frac{1}{4} \end{cases}$; 3) покладемо $x=t$, унаслідок утвориться наступна системи параметричних рівнянь: $\begin{cases} x=t \\ y=-\frac{1}{4}+2\cdot t \\ z=\frac{1}{4}+t \end{cases}$. Ці рівняння є параметричними рівняннями прямої l_2 відносно обраної системи координат $Oxyz$, вектор $\overrightarrow{u_2}\left(1,2,1\right)_E$ є спрямовуючим вектором даної прямої.

Тепер шукане рівняння площини α можна скласти як рівняння площини, що проходить через точку M паралельно до визначених векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+3 \\ 2 & 11 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Після зведення отриманого рівняння до загального виду будемо мати $\alpha:\ x-4\cdot y+7\cdot z+24=0$.

Задача 3.9. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E . Скласти рівняння прямої l , яка лежить у площині $\alpha:\ y+2\cdot z=0$ і перетинає кожну з прямих

$$l_1:\begin{cases}x=1-t\\ y=t\\ z=4\cdot t\end{cases} \quad \text{і} \qquad l_2:\begin{cases}x=2-t\\ y=4+2\cdot t\\ z=1\end{cases}.$$

Розв'язання. Зрозуміло, що сформульована задача буде мати розв'язок лише у випалку, коли ані пряма l_1 , ані пряма l_2 не є паралельною до площини α . Сформульвана задача буде мати єдиний розв'язок тоді та тільки тоді, коли задані прямі перетинають площину α і, до того ж, у різних точках (рис. 3.13).

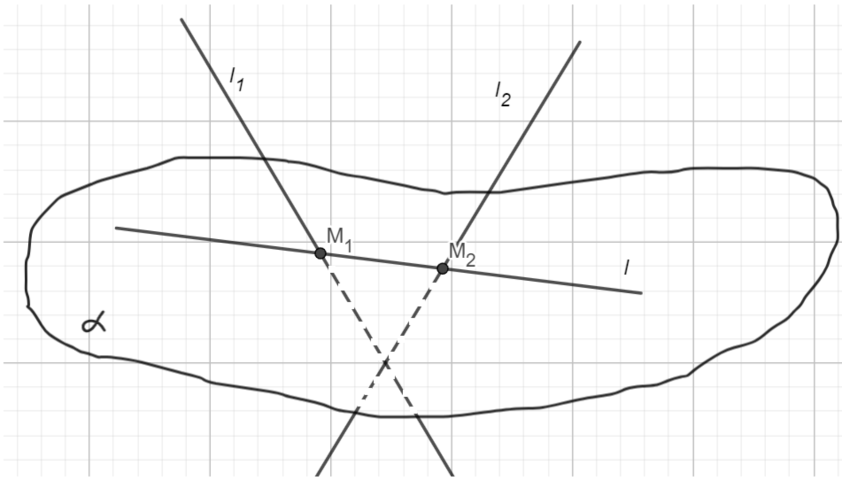

Рис.3.13.

Дослідимо питання про наявність спільних точок у площини α і прямої l_1. Для цього розглянемо систему рівнянь $\begin{cases}y+2\cdot z=0\\ x=1-t\\ y=t\\ z=4\cdot t\end{cases}$. Унаслідок підстановки виразів для змінних y і z із третього і четвертого рівнянь у перше отримаємо єдине значення змінної t: $t=0$. Це означає, що дана система рівнянь має єдиний роз'язок, площина α і пряма l_1 мають єдину точку перетину, координати такої точки M_1 відносно заданої системи координат знаходяться з другого, третього і четвертого рівнянь даної системи після підстановки числа 0 у якості значення параметра t. У підсумку, маємо $M_1(1,0,\ 0)$.

Аналогічним чином досліджуємо питання про наявність спільних точок у площини α і прямої l_2. Для цього розглядаємо систему рівнянь $\begin{cases} x=2-t \\ y=4+2\cdot t \\ z=1 \end{cases}$, знаходимо, що $t=-3$, усвідомлюємо, що це означає, що розглянута система рівнянь має єдиний роз'язок, площина α і пряма l_2 мають єдину точку перетину, координати такої точки M_2 відносно заданої системи координат знаходяться з другого, третього і четвертого рівнянь даної системи після підстановки числа -3 у якості значення параметра t. У підсумку, маємо $M_2(5,-2,\ 1)$. Отже, шукана пряма l існує і є визначеною однозначно, відносно заданої системи координат її, мабуть, зручніше за все задати у виді канонічних рівнянь прямої, яка проходить через дві задані точки. $l:\ \frac{x-1}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$.

Задача 3.10. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Скласти рівняння прямої l, що проходить через початок відліку і перетинає кожну з прямих l_1 і l_2, які відносно даної системи координат задано, відповідно, параметричними рівняннями

$$l_1:\begin{cases}x=t\\ y=1-t\\ z=3+t\end{cases},\qquad l_2:\begin{cases}x=2+2\cdot t\\ y=3-t\\ z=4+3\cdot t\end{cases}.$$

Розв'язання. Легко перевірити, що початок відліку не належить ані прямій l_1, ані прямій l_2, прямі l_1 і l_2 є різними та не є паралельними. Тоді зрозуміло, що, якщо охарактеризована умовою задачі пряма l існує, вона є прямою перетину площини α_1, що проходить через початок відліку і пряму l_1, з площиною α_2, що проходить через початок відліку і пряму l_2 (рис.3.14).

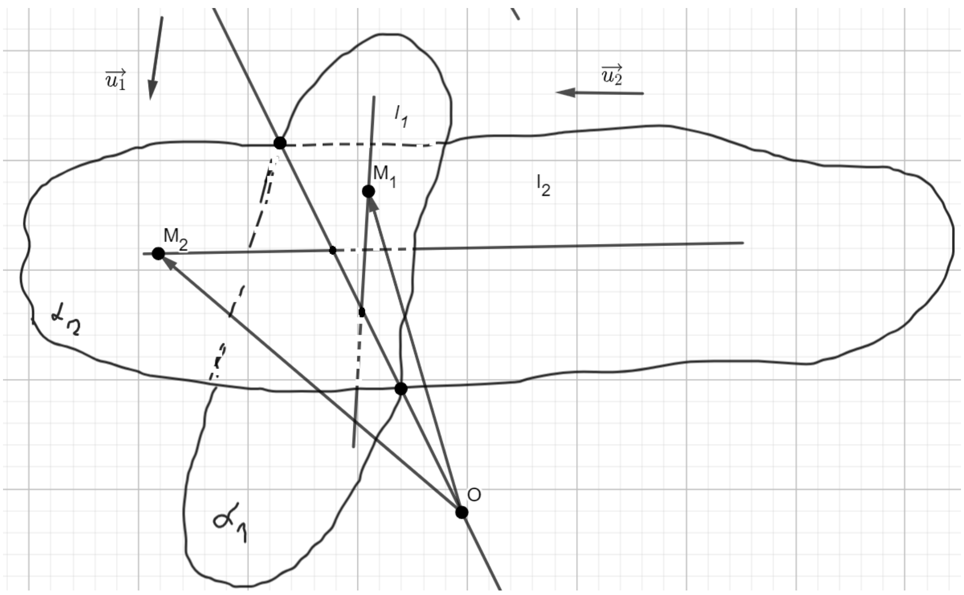

Рис. 3.14.

(Теоретично, пряма перетину таких площин може виявитися паралельною до однієї з прямих l_1 і l_2, у такому випадку задача не буде мати розв'язку - рис. 3.15)

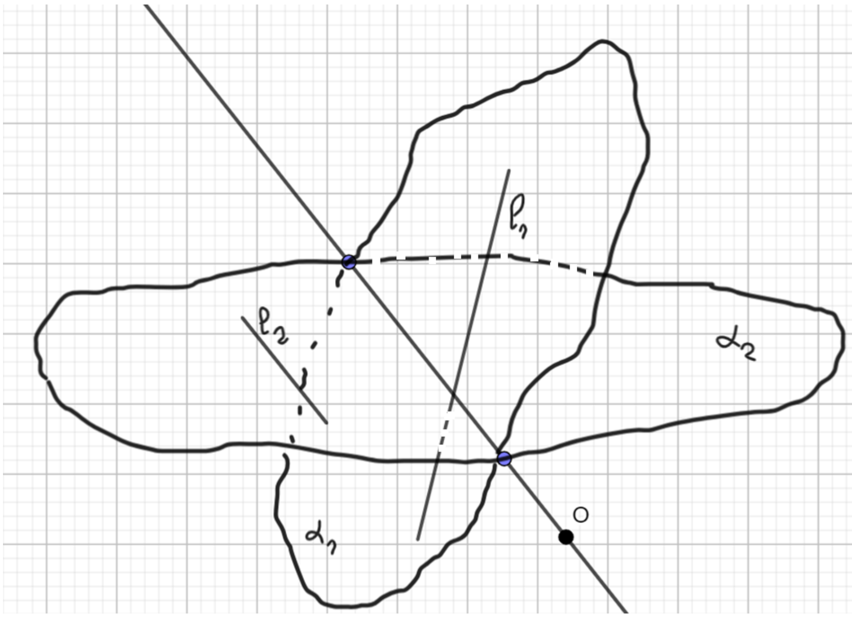

Рис. 3.15.

На підставі вихідних даних задачі відомо, що пряма l_1 містить точку M_1 з координатами $\left(0,1,\ 3\right)$ і є колінеарною до вектора $\overrightarrow{u_1}\left(1,-1,1\right)_E$, пряма l_2 містить точку M_2 з координатами $\left(2,3,\ 4\right)$ і є колінеарною до вектора $\overrightarrow{u_2}\left(2,-1,3\right)_E$. Звідси випливає, що вектор $\overrightarrow{OM_1}\left(0,1,3\right)_E$ є колінеарним до площини α_1, вектор $\overrightarrow{OM_2}\left(2,3,4\right)_E$ - колінеарним до площини α_2, рівняння площини α_1 можна записати як рівняння площини, що проходить через точку O колінеарно до векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{OM_1}$, рівняння площини α_2 - як рівняння площини, що проходить через точку O колінеарно до векторів $\overrightarrow{u_2}$ і $\overrightarrow{OM_2}$. У підсумку, будемо мати:

$$\alpha_1: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ або } 4\cdot x + 3\cdot y - z = 0;\ \alpha_2: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ або}$$

$13\cdot x + 2\cdot y - 8\cdot z = 0$; $l: \begin{cases} 4\cdot x + 3\cdot y - z = 0 \\ 13\cdot x + 2\cdot y - 8\cdot z = 0 \end{cases}$. Використання леми про паралельність вектора до площини дозволяє перевірити, що ані вектор $\overrightarrow{u_1}$, ані вектор $\overrightarrow{u_2}$ не є колінеарними до прямої l. (У супротивному випадку відповідний з них виявився би колінеарним, одночасно, і до площини α_1, і до площини α_2). Отже, пряма l є саме тією прямою, що задовольняє умови поставленої задачі.

3.6. Практичні завдання для самостійної роботи

1. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Пряму l відносно цієї системи координат задано рівняннями

а) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 10\cdot t \\ z = 1 + 8\cdot t \end{cases}$; б) $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{1}$; в) $\begin{cases} 5\cdot x + 2\cdot y - z + 2 = 0 \\ 11\cdot x - 4\cdot y + 3\cdot z - 4 = 0 \end{cases}$.

Знайти координати трьох точок, які належать цій прямій.

2. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Пряму l відносно цієї системи координат задано за допомогою рівнянь а) $\begin{cases} x = 6 + t \\ y = -1 + 12\cdot t \\ z = -2 + 2\cdot t \end{cases}$; б) $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{5}$; в) $\begin{cases} x - 6 = 0 \\ 2\cdot y - z = 0 \end{cases}$. Знайти координати точки, яка належить заданій прямій і має 1) абсцису, що дорівнює (-2), 2) ординату, що дорівнює 3, 3) аплікату, що дорівнює 1.

3. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат задано координати певної кількості точок і рівняння певної прямої l. Визначити, які із задаих точок належать заданій прямій:

а) $A(5,7,1)$, $B(-5,6,0)$, $C(-1,0,1)$; $l: \begin{cases} x=-1+2\cdot t \\ y=4-t \\ z=6+3\cdot t \end{cases}$;

б) $A(-2,10,14)$, $B(1,-1,4)$, $C(8,-2,-2)$; $l: \dfrac{x-3}{-5}=\dfrac{y-4}{6}=\dfrac{z-6}{8}$;

в) $A(-1,1,4)$, $B(-1,2,3)$, $C(3,-2,1)$; $l: \begin{cases} 2\cdot x+5\cdot y-z-5=0 \\ 7\cdot x-2\cdot y+2\cdot z+5=0 \end{cases}$.

4. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Скласти рівняння прямої, яка

а) проходить через точку $M_0(2,1,-3)$ колінеарно до вектора $\vec{u}(1,-3,1)_E$;

б) проходить через точки $M_1\left(2,-3,\frac{1}{2}\right)$ і $M_2\left(3,5,\frac{3}{2}\right)$;

в) утворена перетином площини α : $x+3\cdot y-z+1=0$ з координатною площиною Oxy;

г) утворена перетином площини α: $x-y+z=0$ з площиною, яка проходить через точки $A(2,0,3)$, $B(1,1,1)$, $C(2,4,-3)$;

д) через точку $A(-2,-5,3)$ паралельно до координатної осі Oz;

е) через точку $A(-7,-4,6)$ паралельно до прямої $l:\begin{cases} x=-1+2\cdot t \\ y=7\cdot t \\ z=2+4\cdot t \end{cases}$;

є) через точку $A(2,-3,8)$ паралельно до прямої $l:\ \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{-6}=\dfrac{z+3}{9}$;

ж) через точку $A(3,-1,8)$ паралельно до прямої $l:\begin{cases} 2\cdot x-y+3\cdot z-1=0 \\ 5\cdot x+4\cdot y-z-7=0 \end{cases}$.

5. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат пряму l задано канонічними рівняннями. З'ясувати особливості розташування прямої l по відношенню до даної системи координат, якщо : а) $l:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z+3}{-1}$; б) $l:\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{3}$;

в) $l:\ \dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-4}{0}$; г) $l:\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-4}{0}=\dfrac{z}{0}$; д) $l:\ \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{0}$;

е) $l:\ \dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{5}$; є) $l:\ \dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{0}$; и) $l:\ \dfrac{x+4}{0}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{-4}$.

6. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат пряму l задано як лінію перетину двох площин. З'ясувати особливості розташування прямої l по відношенню до даної системи координат, якщо : а) $l:\begin{cases} 2\cdot x+y-3\cdot z-7=0 \\ 5\cdot x+y-3\cdot z-7=0 \end{cases}$,

б) $l:\begin{cases} 3\cdot y+2\cdot z=0 \\ 5\cdot x-1=0 \end{cases}$, в) $l:\begin{cases} 4\cdot x+3\cdot y-2\cdot z=0 \\ x+y+5\cdot z=0 \end{cases}$; г) $l:\begin{cases} 5\cdot x+5\cdot z-3=0 \\ 2\cdot z-9=0 \end{cases}$;

д) $l:\begin{cases}7\cdot x-3\cdot z=0\\ z=0\end{cases}$; е) $l:\begin{cases}2\cdot x-y+z=0\\ x+y+2\cdot z=0\end{cases}$; є) $l:\begin{cases}3\cdot y+5\cdot z=0\\ 2\cdot y-z+6=0\end{cases}$;

ж) $l:\begin{cases}2\cdot x+3\cdot y+5\cdot z-4=0\\ x=0\end{cases}$; з) $l:\begin{cases}x+3\cdot z-5=0\\ y-z=0\end{cases}$; і) $l:\begin{cases}x+2=0\\ 4\cdot y-7=0\end{cases}$;

и) $l:\begin{cases}x-2\cdot y+4=0\\ 5\cdot x+3\cdot y-8=0\end{cases}$; ї) $l:\begin{cases}2\cdot x-y+z=0\\ x-2\cdot y+3\cdot z=0\end{cases}$; к) $l:\begin{cases}x-6=0\\ 2\cdot y-z=0\end{cases}$.

7. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат пряму l задано як лінію перетину двох площин $l:\begin{cases}2\cdot x-y+z+1=0\\ x-2\cdot y+3\cdot z+2=0\end{cases}$. Довести, що пряма l перетинає координатну вісь Oy. Знайти координати точки перетину.

8. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат пряму l задано як лінію перетину двох площин $l:\begin{cases}x-y+z+1=0\\ x-2\cdot y+4\cdot z=0\end{cases}$. Довести, що пряма l перетинає кожну з координатних площин. Знайти координати точок перетину.

9. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат пряму l задано як лінію перетину двох площин. Знайти координати точок перетину прямої l з координатними площинами у випадках а) $l:\begin{cases}2\cdot x-y+z-4=0\\x+y+5\cdot z-2=0\end{cases}$; б) $l:\begin{cases}x=-1+2\cdot t\\y=4-t\\z=6+3\cdot t\end{cases}$;

в) $l: \dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+2}{-2}$.

10. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат пряму l задано як лінію перетину двох площин $l:\begin{cases}3\cdot x-y+2\cdot z-6=0\\x+4\cdot y-z+P=0\end{cases}$. З'ясувати, за якого значення параметру P пряма l перетинає координатну вісь Oz.

11. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат пряму l задано як лінію перетину двох площин $l:\begin{cases}5\cdot x-4\cdot y+3\cdot z+P=0\\x+2\cdot y-z+4=0\end{cases}$. З'ясувати, за якого значення параметру P пряма l перетинає координатну вісь Oy.

12. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат пряму l задано як лінію перетину двох площин $l:\begin{cases}x-2\cdot y+z-9=0\\3\cdot x+B\cdot y+z+P=0\end{cases}$. З'ясувати, за яких значень параметрів B і P пряма l лежить у координатній площині Oxy.

13. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат пряму l задано як лінію перетину двох площин. Скласти параметричні рівняння прямої l у випадках, коли а) $l: \begin{cases} x+2\cdot y+z-1=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$; б) $l: \begin{cases} x-3\cdot y+z=0 \\ y=0 \end{cases}$; в) $l: \begin{cases} y+z=0 \\ x=0 \end{cases}$.

14. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат пряму l задано як лінію перетину двох площин. Скласти канонічні рівняння прямої l у випадках, коли а) $l: \begin{cases} 2\cdot x-3\cdot y-3\cdot z-9=0 \\ x-2\cdot y+z+3=0 \end{cases}$; б) $l: \begin{cases} 2\cdot x-2\cdot y+5\cdot z-4=0 \\ 3\cdot x-2\cdot y-z-12=0 \end{cases}$.

15. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат пряму l задано канонічними рівняннями $l: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$. Представти пряму l як лінію перетину двох плошин, одна з яких є паралельною до координатної осі Ox, а інша – до координатної осі Oy.

16. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат пряму l задано параметричними рівняннями $l: \begin{cases} x=-3+2\cdot t \\ y=1-t \\ z=-1 \end{cases}$. Представти пряму l як лінію перетину двох плошин, одна з яких є паралельною до координатної осі Ox, а інша – до координатної осі Oz.

17. У тривимірному евклідовому просторі задано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат у кожному з наведених нижче варіантів відомими є певні рівняння прямих l_1 і l_2. Визначити, прямі яких заданих пар є мимобіжними, паралельними, перетинаються або співпадають. Якщо прямі є паралельними, написати рівняння площини, що їх містить. Якщо прямі перетинаються у деякій точці, також написати рівняння площини, що ці прямі містить, та зайти координати точки перетину.

1) $l_1:\begin{cases}x=1+2\cdot t\\ y=7+t\\ z=3+4\cdot t\end{cases}$; $l_2:\begin{cases}x=6+3\cdot t\\ y=-1-2\cdot t;\\ z=-2+t\end{cases}$ 2) $l_1:\begin{cases}x=1+2\cdot t\\ y=2-2\cdot t;\\ z=-t\end{cases}$ $l_2:\begin{cases}x=-2\cdot t\\ y=-5+3\cdot t;\\ z=4\end{cases}$

3) $l_1:\begin{cases}x=2+4\cdot t\\ y=-6\cdot t\\ z=-1-8\cdot t\end{cases}$; $l_2:\begin{cases}x=7-6\cdot t\\ y=2+9\cdot t;\\ z=12\cdot t\end{cases}$ 4) $l_1:\begin{cases}x=1+9\cdot t\\ y=2+6\cdot t;\\ z=3+3\cdot t\end{cases}$ $l_2:\begin{cases}x=7+6\cdot t\\ y=6+4\cdot t;\\ z=5+2\cdot t\end{cases}$

5) $l_1:\begin{cases}x+z-1=0\\ 3\cdot x+y-z+13=0\end{cases}$; $l_2:\begin{cases}x-2\cdot y+3=0\\ y+2\cdot z-8=0\end{cases}$;

6) $l_1:\begin{cases}2\cdot x+8\cdot y=0\\ x+z-8=0\end{cases}$; $l_2:\begin{cases}z-4=0\\ 2\cdot x+3\cdot z-7=0\end{cases}$;

7) $l_1:\begin{cases}x+y+z-1=0\\ y+4\cdot z=0\end{cases}$; $l_2:\begin{cases}2\cdot x+3\cdot y+6\cdot z-6=0\\ 3\cdot x+4\cdot y+7\cdot z=0\end{cases}$;

8) $l_1:\begin{cases}3\cdot x+y-2\cdot z-6=0\\ 41\cdot x-19\cdot y+52\cdot z-68=0\end{cases}$; $l_2:\begin{cases}x-2\cdot y+5\cdot z-1=0\\ 33\cdot x+4\cdot y-5\cdot z-63=0\end{cases}$;

9) $l_1:\begin{cases}2\cdot x+3\cdot y=0\\ z-4=0\end{cases}$; $l_2:\begin{cases}x+z-8=0\\ 2\cdot y+3\cdot z-7=0\end{cases}$;

10) $l_1:\begin{cases} x=9\cdot t \\ y=5\cdot t \\ z=-3+t \end{cases}$; $l_2:\begin{cases} 2\cdot x-3\cdot y-3\cdot z-9=0 \\ x-2\cdot y+z+3=0 \end{cases}$;

11) $l_1:\begin{cases} x=t \\ y=-8-4\cdot t \\ z=-3-3\cdot t \end{cases}$; $l_2:\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2\cdot x-y+2\cdot z=0 \end{cases}$;

12) $l_1:\begin{cases} x=3+t \\ y=-1+2\cdot t \\ z=4 \end{cases}$; $l_2:\begin{cases} x-3\cdot y+z=0 \\ x+y-z+4=0 \end{cases}$;

13) $l_1:\begin{cases} x=-2+3\cdot t \\ y=-1 \\ z=4-t \end{cases}$; $l_2:\begin{cases} 2\cdot y-z+2=0 \\ x-7\cdot y+3\cdot z-17=0 \end{cases}$;

14) $l_1:\begin{cases} x=-3+2\cdot t \\ y=1+t \\ z=-1 \end{cases}$; $l_2:\begin{cases} x+y-z+5=0 \\ 3\cdot x+4\cdot y+2\cdot z-5=0 \end{cases}$.

18. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно цієї системи координат для кожного із наведених нижче варіантів відомими є певне рівняння площини α і певне рівняння прямої l. Для кожної заданої пари визначити, чи належить задана пряма до заданої площини, паралельна до неї, або перетинає її у певній точці. У останньому випадку знайти координати точки перетину.

1) $\alpha: 3\cdot x+5\cdot y-z-2=0$; $l: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$;

2) $\alpha: 3\cdot x-3\cdot y+2\cdot z-5=0$; $l: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$;

3) $\alpha: \ x+2\cdot y-4\cdot z+1=0; \quad l: \ \dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}$;

4) $\alpha: \ 3\cdot x-y+2\cdot z-5=0; \quad l: \ \dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{4}$;

5) $\alpha: \ x-2\cdot y+5\cdot z-6=0; \quad l: \ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{1}$;

6) $\alpha: \ x-2\cdot y+5\cdot z-6=0; \quad l: \ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{1}$;

7) $\alpha: \ 5\cdot x-z-4=0; \quad l: \begin{cases} 3\cdot x+5\cdot y-7\cdot z+16=0 \\ 2\cdot x-y+z-6=0 \end{cases}$;

8) $\alpha: \ y+4\cdot z+17=0; \quad l: \begin{cases} 2\cdot x+3\cdot y+6\cdot z-10=0 \\ x+y+z+5=0 \end{cases}$;

9) $\alpha: \ 2\cdot x-y-4\cdot z-24=0; \ l: \begin{cases} 5\cdot x+3\cdot y+z-16=0 \\ x+2\cdot y+3\cdot z+8=0 \end{cases}$;

10) $\alpha: \ x+y+z-10=0; \ l: \begin{cases} x=2\cdot t \\ y=1-t \\ z=3+t \end{cases}$;

11) $\alpha: \ 7\cdot x+2\cdot y-3\cdot z+5=0; \ l: \begin{cases} x=5+6\cdot t \\ y=1-3\cdot t \\ z=2+t \end{cases}$;

12) $\alpha: \ 2\cdot x-2\cdot y+3\cdot z-5=0; \ l: \begin{cases} x=3+5\cdot t \\ y=-1+t \\ z=4+t \end{cases}$.

19. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму l_1, l_1: $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ паралельно до прямої l_2, l_2: $\begin{cases} 2\cdot x-y+z-3=0 \\ x+2\cdot y-3\cdot z+5=0 \end{cases}$.

20. У тривимірному евклідовому просторі задано афінну систему координат $Oxyz$. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M\left(1,3,7\right)$ і пряму l, l: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-5}{-1}$.

21. У тривимірному евклідовому просторі задано афінну систему координат $Oxyz$. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок відліку і пряму l, l: $\begin{cases} x=3-2\cdot t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$.

22. У тривимірному евклідовому просторі задано афінну систему координат $Oxyz$. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M\left(-3,1,0\right)$ і пряму l, l: $\begin{cases} x+2\cdot y-z+4=0 \\ 3\cdot x-y+2\cdot z-1=0 \end{cases}$.

23. У тривимірному евклідовому просторі задано афінну систему координат $Oxyz$. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму l_1, l_1: $\begin{cases} x=2+3\cdot t \\ y=-1+6\cdot t \\ z=4\cdot t \end{cases}$, паралельно до прямої l_2, l_2: $\begin{cases} x=-1+2\cdot t \\ y=3\cdot t \\ z=-t \end{cases}$.

24. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Скласти рівняння площини, яка проходить через координатну вісь Oy паралельно до прямої l, $l: \begin{cases} x+4\cdot y-2\cdot z+7=0 \\ 3\cdot x+7\cdot y-2\cdot z=0 \end{cases}$.

25. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки перетину площини α: $2\cdot x+y-3\cdot z+1=0$, з прямими l_1 і l_2, l_1: $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+1}{2}$, l_2: $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{-6}$.

26. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат пряму l задано параметричними рівняннями l : $\begin{cases} x=3+a\cdot t \\ y=-1+2\cdot t \\ z=-2+t \end{cases}$, площину α - загальним рівнянням α: $4\cdot x-3\cdot y+2\cdot z=0$. Визачити, при яких значеннях параметра a пряма l буде перетинати площину α.

27. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат пряму l задано канонічними рівняннями l : $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$, площину α - загальним рівнянням α : $A\cdot x+3\cdot y-5\cdot z+1=0$. Визачити, при яких значеннях параметра A пряма l буде паралельною до площини α.

28. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(0,0,1)$ і перетинає кожну з прямих l_1 і l_2, які відносно даної системи координат, відповідно, задані рівняннями $l_1: \begin{cases} x-2\cdot y+z-1=0 \\ 2\cdot x-y+2\cdot z-3=0 \end{cases}$, $l_2: \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

29. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину площини α, $\alpha:\ x-2\cdot y+3\cdot z+5=0$ з координатною віссю Ox, належить площині α і є паралельною до координатної площини Oyz.

30. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3,-1,4)$, перетинає координатну вісь Oy і є паралельною до площини α, $\alpha:\ y+2\cdot z=0$.

31. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Скласти рівняння прямої, яка є паралельною до прямої l,

$l: \begin{cases} x-3\cdot y+z=0 \\ x+y-z+4=0 \end{cases}$, і перетинає кожну з прямих l_1 і l_2, $l_1: \begin{cases} x=3+t \\ y=-1+2\cdot t \\ z=4\cdot t \end{cases}$,

$l_2: \begin{cases} x=-2+3\cdot t \\ y=-1 \\ z=4-t \end{cases}$.

§ 4. ОСНОВИ МЕТРИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ У ТРИВИМІРНОМУ ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ ЗА УМОВИ ЗАДАННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ РІЗНОГО ВИДУ РІВНЯННЯМИ ВІДНОСНО ПРЯМОКУТНОЇ ДЕКАРТОВОЇ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Афінними властивостями геометричних фігур тривимірного евклідового простору називають ті властивості цих фігур, які зберігаються при будь-яких їх афінних перетвореннях. Зродуміло, що, у першу чергу, це властивості, пов’язані з відношенням приналежності одних фігур до інших. Метричними властивостями геометричних фігур тривимірного евклідового простору називають ті властивості, які зберігаються при будь-яких рухах цих фігур, тобто, є однаковими для всіх геометричних фігур, рівних між собою. Безпосередньо згідно означення руху, основною метричною властивістю геометричної фігури, основним метричним інваріантом, є відстань між двома точками. Похідними властивостями є відстані між будь-якими більш складними геометричними фігурами (комбінація геометричних фігур, зрозуміло, також є геометричною фігурою) та величини кутів. Кожний рух геометричної фігури є й її афінним перетворенням. Але не навпаки. Отже, кожна афінна властивість геометричної фігури є й її метричною властивістю. Але, знову-таки, не навпаки. Афінна теорія прямих і площин тривимірного евклідового простору передбачає визначення їх афінних властивостей. Обрання у тривимірному евклідовому просторі афінної системи координат дозволяє достатньо легко зробити це за допомогою методів алгебри. Саме такі питання були розглянуті у другому й третьому параграфах даного посібника. (Обрання у просторі початку відліку дозволяє розв’язувати подібні питання і методами векторної алгебри, але, у даному навчальному посібнику, подібні питання ми, фактично, не розглядали). Одночасно, обрання у тривимірному евклідовому просторі довільної афінної системи координат (як, між іншим, і, взагалі, будь-якої системи координат) дозволяє за методом координат розв’язувати також і будь-які задачі метричного характеру – задачі визначення метричних властивостей геометричних фігур або їх комбінацій. Той факт, що ми не розглядали подібні питання у другому і третьому параграфах пояснюється виключно тим, що по відношенню до довільної афінної система координат відповідні формули, як правило, носять достатньо громіздкий характер.

Прямокутна декартова система координат є окремим випадком системи координат афінної. Вона є найбільш природною для людини, історично, виникла першою. Із різних систем координат тривимірного евклідового простору виключно прямокутну декартову систему координат розглядають у стандартних курсах математики закладів загальної середньої освіти. Саме відносно прямокутної декартової системи координат найбільш компактним чином розв'язуються, фактично, всі метричні задачі евклідового простору, зокрема метричні задачі, пов'язані з теорією прямої і площини. Тому у останньому, четвертому, параграфі даного посібника основні метричні питання теорії прямої і площини у тривимірному евклідовому просторі будемо розглядати виключно по відношенню до прямокутної декартової системи координат. Одночасно, певну увагу приділимо і їх векторним аналогам.

4.1. Векторне рівняння площини з нормальним вектором. Алгебраїчне рівняння площини з нормальним вектором відносно прямокутної декартової системи координат. Геометичний зміст коефіцієнтів при невідомих у загальному рівнянні рплощини відносно прямокутної декартової системи координат. Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

Розглянемо у просторі довільну площину α. **Нормальним вектором до площини** α називають будь-який не нульовий вектор, перпендикулярний до цієї площини.

Проведемо уточнення того, як треба розуміти наведене означення. Нехай на множині векторів тривимірного евклідового простору задано ненульовий вектор $\overrightarrow{N}$. З геометричної точки зору це означає, що задано прийнаймні один спрямований відрізок $\overrightarrow{AB}$, який є представником даного вектора: $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{AB}$. В силу того, що $\overrightarrow{N}\neq\overrightarrow{0}$, точка A не співпадає з точкою B, існує пряма AB. Вважають, що $\overrightarrow{N}\perp\alpha$, якщо пряма AB є перпендикулярною до площини α. Зрозуміло, що кожний вектор має безліч спрямованих відрізків, які є його представниками, але всі ці спрямовані відрізки є рівними (конгруентними) між собою. Якщо вектор $\overrightarrow{N}\neq\overrightarrow{0}$, то ненульовими є і всі його представники. Кожний з таких представників однозначно визначає пряму, яка його містить. Всі ці прямі є паралельними між собою. А у евклідовій геометрії, якщо одна з двох паралельних прямих є перпендикулярною до площини, то інша має ту ж саму властивість. Звідси випливає, що визначена наведеним вище чином перпендикулярність вектора до площини не залежить від обрання спрямованого відрізка, який є представником даного вектора, і, завдяки цьому, є характеристикою самого вектора. Отже, наведене означення нормального вектора до площини з математичної точки зору є коректним (рис. 4.1.).

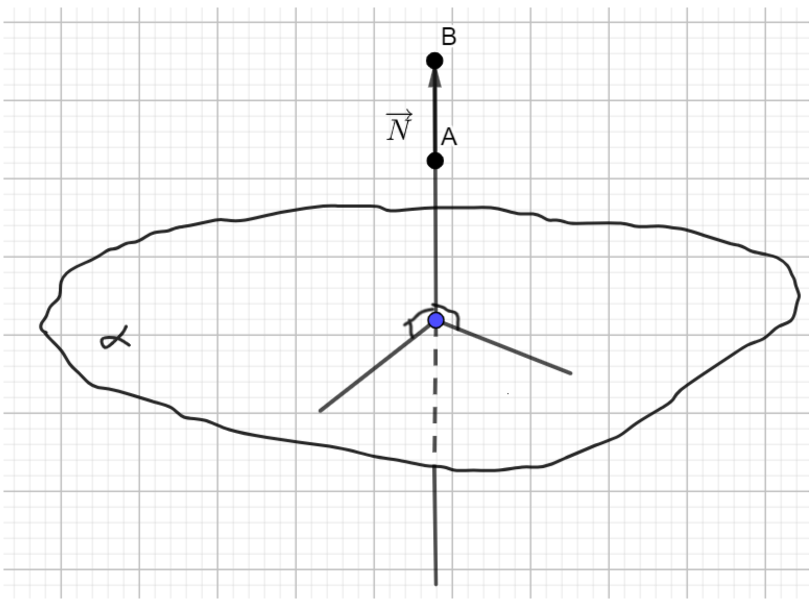

Рис. 4.1.

Нехай у просторі фіксовано початок відліку O, для площини α відомою є певна точка M_0, яка їй належить, та певний нормальний вектор $\overrightarrow{N}$, тобто, не нульовий вектор, перпендикулярний до α. Точкою M_0 і вектором $\overrightarrow{N}$ площина α є визначеною однозначно. Позначимо через $\overrightarrow{r_0}$ радіус-вектор точки M_0 відносно початку відліку O: $\overrightarrow{r_0}=\overrightarrow{OM_0}$. Якщо точка M належить площині α, то вектор $\overrightarrow{M_0M}$ є колінеарним до площини α і, в силу цього, перпендикулярним до вектора $\overrightarrow{N}$, скалярний добуток векторів $\overrightarrow{N}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ дорівнює нулю: $\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$. Але $\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0}$, де $\overrightarrow{r}$ – радіус-вектор точки M відносно початку відліку O (рис. 4.2.). У підсумку, маємо векторну рівність

$$\overrightarrow{N}\cdot(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0})=0, \tag{4.1}$$

яка є тотожністю на множині радіус-векторів $\overrightarrow{r}$ точок M площини α.

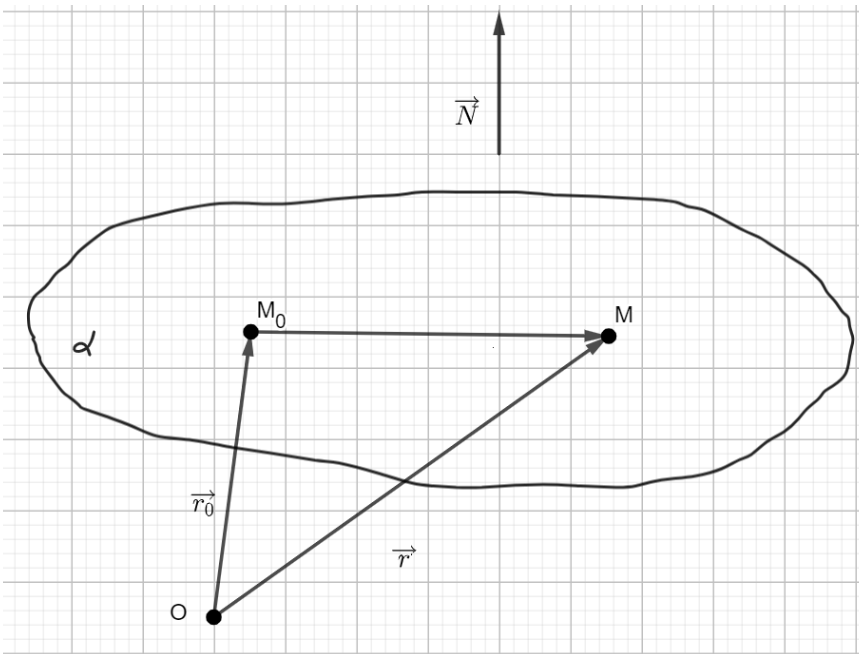

Рис. 4.2.

Одночасно, легко довести, що, якщо певний вектор $\overrightarrow{r}$ утворює розв’язок векторного рівняння (4.1), то при відкладанні цього вектора від точки O, тобто, при представленні його у вигляді спрямованого відрізка $\overrightarrow{OM}$: $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, точка M виявляється точкою, яка належить площині α. Це означає, що векторне рівняння (4.1) є векторним рівнянням площини α відносно початку відліку O. Таке рівняння називають **векторним рівнянням площини з нормальним вектором**.

Зрозуміло, що для кожної площини α існує безліч нормальних векторів (всі ці вектори є колініарними між собою, тобто, відрізняються лише числовим множником), кожну площину, відносно кожного початку відліку O можна задати рівнянням виду (4.1), для кожної площини подібних рівнянь існує безліч, завдяки існуванню безлічі нормальних векторів, але, при фіксованому початку відліку O, всі ці рівняння є рівносильними між собою.

Одночасно, будь-яке рівняння виду (4.1), вектор $\overrightarrow{N}$ у якому не є нульовим: $\overrightarrow{N}\neq\vec{0}$, відносно довільного початку відліку O є рівнянням з нормальним вектором певної площини.

Якщо у тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E, то векторне рівняння (4.1) площини α можна замінити його координатним аналогом, враховуючи той факт, що координати точки відносно афінної системи координат співпадають з відповідними координатами радіус-вектора даної точки відносно базиса даної системи координат. У результаті буде отримано рівняння площини, яке має назву алгебраїчного рівняння площини з нормальним вектором. Одночасно, загальновідомо, що, у випадку довільної афінної системи координат $Oxyz$, відповідний базис E множини вільних векторів тривимірного евклідового простору також є довільнти афінним, скалярний добуток векторів через координати цих векторів відносно даного базису виражається за допомогою визначених даним базисом коефіцієнтів метричної форми, відповідну формулу вважають достатньо складною для стандартного курсу аналітичної геометрії закладу вищої освіти. За умови обрання у евклідовому просторі прямокутної декартової системи координат, формула стає суттєво простішою.

Отже. нехай у тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. утвореним векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$, $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{i}\perp\vec{k}$, $\vec{j}\perp\vec{k}$. Нехай, відносно даного базису вектор $\overrightarrow{N}$ має координати $\left(A,B,C\right)_E$. В силу того, що $\overrightarrow{N}\neq\vec{0}$, вірною є нерівність

$$A^2+B^2+C^2>0. \qquad (4.2)$$

Нехай точка M_0 відносно даної системи координат має координати $\left(x_0,y_0,z_0\right)$. Позначимо через $\left(x,y,z\right)$ координати довільної точки M площини α. Тоді вектор $\vec{r_0}$, $\vec{r_0}=\overrightarrow{OM_0}$, відносно базису E має координати $\left(x_0,y_0,z_0\right)_E$, вектор $\vec{r}$, $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, - координати $\left(x,y,z\right)_E$, у координатній формі рівняння (4.1) запишеться у виді

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (4.3)$$

Рівняння (4.3), для якого виконано умову (4.2), називають **алгебраїчним рівнянням площини з нормальним вектором .**

Зрозуміло, що будь - яку площину, відносно будь-якої прямокутної декартової системи координат, можна задати рівнянням виду (4.3), для якого виконано умову (4.2). Одночасно, якщо задано рівняння виду (4.3), для якого виконано умову (4.2), то відносно будь-якої прямокутної декартової системи координат $Oxyz$ з базисом E у тривимірному евклідовому просторі це рівняння є алгебраїчним рівнянням з нормальним вектором певної площини, нормальним вектором при цьому є вектор $\overrightarrow{N}$ з координатами $\left(A,B,C\right)_E$.

Нехай у тривимірному евклідовому просторі обрано довільну прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. У §2 було обґрунтовано, що кожну площину α, відносно будь-якої афінної системи координат, зокрема, відносно обраної прямокутної декартової системи координат, можна задати загальним рівнянням, тобто, рівнянням виду

$$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0, \tag{4.4}$$

для коефіцієнтів A, B, C якого виконано умову (4.2). (У §2 рівняння (4.4) позначено як (2.7), а умову (4.2) як (2.8)). При цьому, згідно леми про паралельність вектора до площини, вектор з координатами $\left(A,B,C\right)_E$ відносно базису даної системи координат не є колінеарним до даної площини. А у випадку прямокутної декартової системи координат числа A, B, C є координатами нормального вектора даної площини: $\overrightarrow{N}\left(A,B,C\right)_E\perp\alpha$, $\overrightarrow{N}\neq\vec{0}$.

Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

1. Наведіть означення нормального вектора до площини.

2. Який вигляд має векторне рівняння площини з нормальним вектором? Які геометричні фігури тривимірного евклідового простору утворюють математичний апарат для можливості задання площини векторним рівнянням з нормальним вектором?

3. Який геометричний зміст мають сталі векторного рівняння площини з нормальним вектором?

4. Справедливість яких тверджень треба обґрунтувати для того, щоб довести, що задане векторне рівняння є векторним рівнянням з нормальним вектором заданої площини відносно певного початку відліку? Відповіть обґрунтуйте.

5. Чи будь-яку площину відносно будь-якого початку відліку можна задати векторним рівнянням з нормальним вектором? Чи однозначно відносно обраного початку відліку для кожної площини знаходиться таке рівняння? Відповіть обґрунтуйте.

6. У тривимірному евклідовому просторі обрано довільний початок відліку O і довільний не нульовий вектор $\overrightarrow{N}$. Чи завжди векторне рівняння $\overrightarrow{N}\cdot(\vec{r}-\overrightarrow{r_0})=0$, відносно обраного початку відліку є векторним рівнянням з нормальним вектором певної площини? Відповідь обґрунтуйте.

7. Який вигляд має алгебраїчне рівняння площини з нормальним вектором відносно прямокутної декартової системи координат? Який геометричний зміст мають сталі такого рівняння?

8. Справедливість яких тверджень треба обґрунтувати для того, щоб довести, що задане алгебраїчне рівняння виду (4.3), для коефіцієнтів при невідомих якого якого виконано умову (4.2), є алгебраїчним рівнянням з нормальним вектором заданої площини відносно заданої прямокутної декартової системи координат? Відповіть обґрунтуйте.

9. Чи будь-яку площину відносно будь-якої прямокутної декартової системи координат можна задати алгебраїчним рівнянням з нормальним вектором? Чи однозначно відносно обраної прямокутної декартової системи координат для кожної площини знаходиться таке рівняння? Відповіть обґрунтуйте.

10. У тривимірному евклідовому просторі обрано довільну прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Чи завжди рівняння виду (4.3), для коефіцієнтів якого виконано умову (4.2), відносно обраної системи координат

є алгебраїчним рівнянням з нормальним вектором певної площини? Відповідь обґрунтуйте. Якщо так, то для відповідної площини вкажіть координати нормального вектора відносно базису даної системи координат.

11. У тривимірному евклідовому просторі обрано довільну афінну систему координат $Oxyz$. Чи завжди рівняння виду (4.3), для коефіцієнтів при невідомих якого виконано умову (4.2), відносно даної системи координат буде алгебраїчним рівнянням певної площини? Чи можна стверджувати, що дане рівняння відносно обраної системи координат для певної площини є алгебраїчним рівнянням з нормальним вектором? Відповідь обґрунтуйте.

12. У тривимірному евклідовому просторі обрано довільну прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площину α задано рівнянням виду (4.4), для коефіцієнтів при невідомих якого, зрозуміло, виконано умову (4.2). Який геометричний зміст мають коефіцієнти при невідомих рівняння (4.4)? Відповідь обгрунтуйте.

4.2. Визначення відстані від точки до площини, відстані між двома площинами, величини кута між двома площинами за заданими координатами точки і загальними рівняннями відповідних площин відносно прямокутної декартової системи координат. Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

У евклідовій геометрії **відстанню між двома геометричними фігурами** F_1 і F_2, називається інфімум (inf) сукупності відстаней між точками цих фігур:

$$\rho(F_1, F_2) = \inf \left\{ \rho(M_1, M_2) \,\middle|\, M_1 \in F_1, M_2 \in F_2 \right\}.$$

Як відомо, інфімум певної непорожньої підмножини множини всіх дійсних чисел – це точна нижня межа цієї множини, у залежності від характеру множини, він може бути чи не бути елементом даної множини.

Відповідно до наведеного означення, **відстань від точки до площини** дорівнює нулю, якщо дана точка даній площині належить, і дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної площини, якщо дана точка даній площини не належить (рис. 4.3).

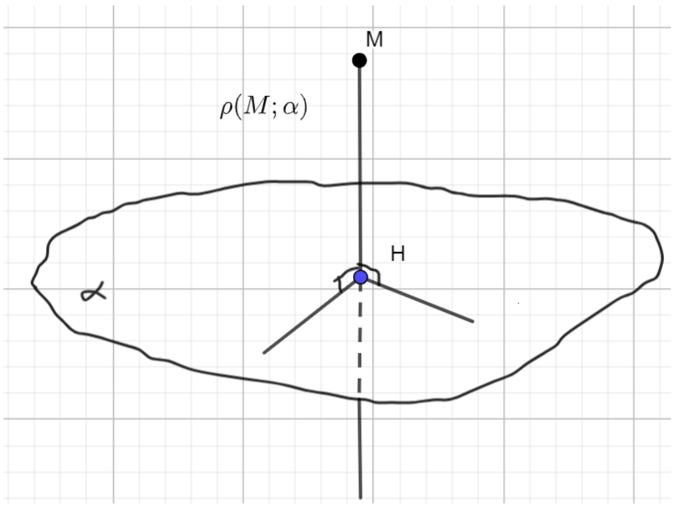

Рис. 4.3.

Нехай для площини α відомою є точка M_0, яка цій площині належить, і вектори $\overrightarrow{u_1}$ та $\overrightarrow{u_2}$, колінеарні до площини α, але не колінеарні між собою. Відстань від точки M до площини α дорівнює довжині висоти паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, якщо висоту проведено до грані, побудованій на векторах $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ (рис.4.4). В силу цього, вірною є формула

$$\rho(M,\alpha)=\frac{V}{S_П}=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M}\cdot\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2}\right|}. \qquad (4.5)$$

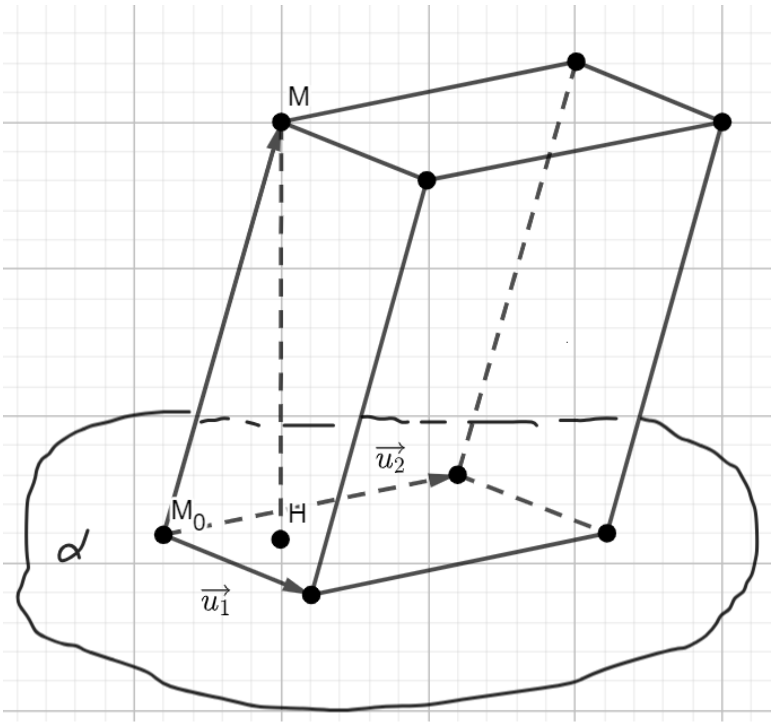

Рис. 4.4.

Паралелепипеду не існує лише у випадку, коли точка M належить площині α. Але тоді $\rho(M,\alpha)=0$ і $\overrightarrow{M_0M}\cdot\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=0$, знайдена формула залишається справедливою.

Координатна форма формули (4.5) відносно довільної афінної системи координат має достатньо складний вигляд. Значно простішу формулу, у координатній формі, можна отримати, якщо відповідні міркування проводити по відношенню до прямокутної декартової системи координат.

Це пояснюється тим, що за загальним рівнянням площини відносно прямокутної декартової системи координат для даної площини стає відомим нормальний вектор. Так, якщо вектор $\overrightarrow{N}$ є нормальним вектором площини α, точка M не належить площині α, то відстань $\rho(M,\alpha)$ від точки M до площини α, очевидно, можна обчислити за формулою

$$\rho(M,\alpha)=\left|\overrightarrow{M_0M}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{M_0M}\right|}{\left|\overrightarrow{N}\right|}, \tag{4.6}$$

де точка M_0 представляє собою основу пеперпендикуляра, проведеного з точки M до площини α (рис. 4.5).

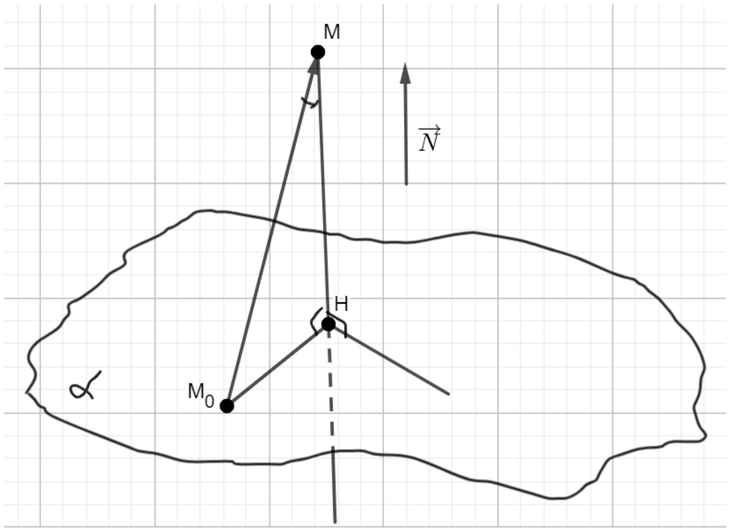

Рис. 4.5.

Формула, зрозуміло, залишається вірною і у тому випадку, коли точка M належить площині α, тобто, співпадає з точкою M_0.

Якщо відносно прямокутної декартової системи координат $Oxyz$ з базисом E площину α задано загальним рівнянням (4.4) для коефіцієнтів при невідомих якого, зрозуміло, виконано умову (4.2), вектор $\overrightarrow{N}$ з координатами $\left(A, B, C\right)_E$ відносно базису E є нормальним вектором даної площини, координати точки M_0 задовольняють рівняння (4.4), із формули (4.6) випливає, що

$$\rho(M,\alpha)=\frac{\left|A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{4.7}$$

де числа x, y, z представляють собою координати точки M відносно оюраної систми координат. Для обчислення відстані від точки до площини прямокутну декартову систему координат і формулу (4.7) використовують найчастіше.

Як відомо, дві різні площини тривимірного евклідового простору можуть або перетинатися по прямій, або бути паралельними. Згідно означення відстані між двома геометричними фігурами, **відстань між двома площинами, які перетинаються по прямій**, дорівнює нулю. (Для кожної площини, як і для кожної геометричної фігури, відстань від самої до себе також, зрозуміло, дорівнює нулю). **Відстань між двома паралельними площинами** дорівнює відстані від будь-якої точки однієї площини до іншої площини. Отже, за умови обрання у просторі відповідної системи координат, відстань між двома паралельними площинами можна обчислити за кожною з формул (4.5) – (4.7) (рис. 4.6).

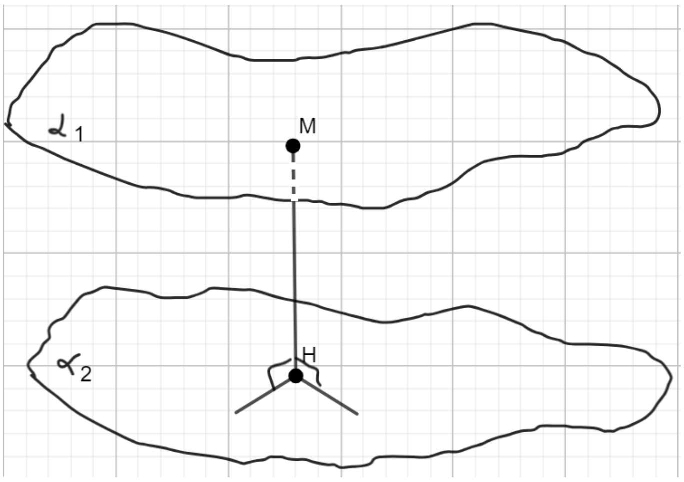

Рис. 4.6.

Нехай у тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Якщо площини α_1 і α_2 є паралельними, то нормальний вектор до будь-якої однієї з них буде нормальним вектором й для іншої. Звідси випливає, що відносно будь-якої прямокутної декартової системи координат паралельні площини можна задати загальними рівняннями, які розрізняються лише вільними членами: $\alpha_1 :\ A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D_1 = 0$, $\alpha_2 :\ A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D_2 = 0$, $D_1 \neq D_2$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. (Зрозуміло, що такого виду рівняннями паралельні площини α_1 і α_2 можна задати й відносно довільної афінної системи координат). Відстань між площинами α_1 і α_2 буде визначено формулою

$$\rho(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (4.8)$$

Якщо площини α_1 і α_2 є паралельними або співпадають, то, за означенням, вважають, що кут між ними складає $0°$.

Нехай площини α_1 і α_2 перетинаються за певною прямою l. При цьому утворюються чотири попарно рівних між собою нерозгорнутих двогранних кута . Не більший з цих кутів називається **кутом між площинами** α_1 і α_2. Оберемо на прямій l довільну точку A ($A \in l$). У площині α_1 через точку A проведемо пряму a_1, $a_1 \perp l$. У площині α_2 через точку A проведемо пряму a_2 , $a_2 \perp l$. Величина кута між прямими a_1 і a_2 дорівнює, за означенням, величині кута між площинами α_1 і α_2. У курсах геометрії закладів загальної середньої освіти доводиться, що величина кута між прямими a_1 і a_2 не залежить від вибору точки A на прямій l (саме це стало підставою для того, щоб за величину кута між площинами α_1 і α_2 прийняти величину кута між прямими a_1 і a_2). У курсах геометрії закладів загальної середньої освіти доводиться, що кут між двома площинами дорівнює куту між двома прямими, що є перпендикулярними до цих площин (рис.4.7).

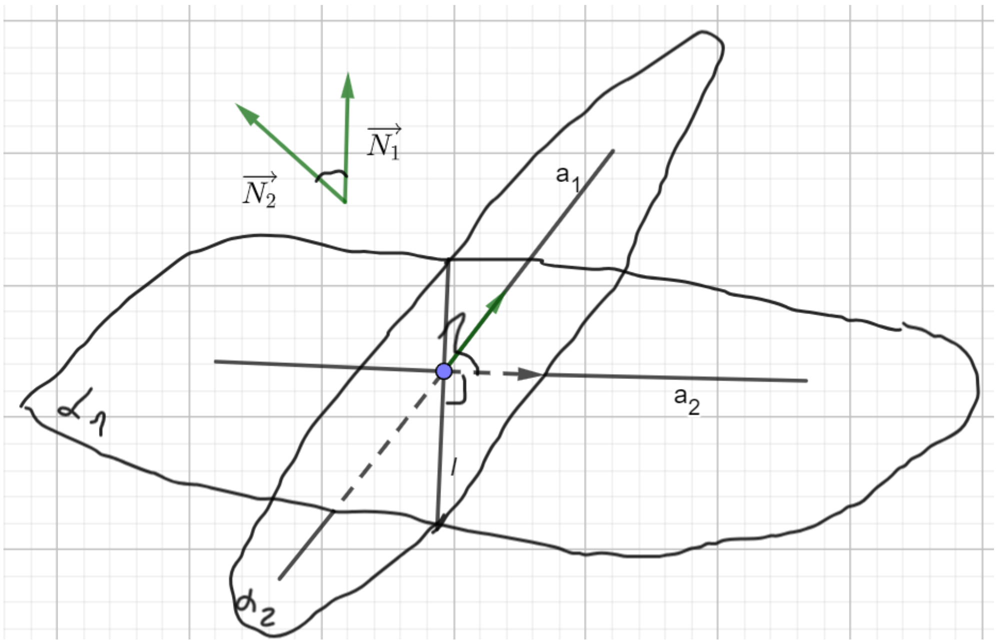

Рис. 4.7.

Тоді шуканий кут можна знайти за допомогою нормальних векторів до площин α_1 і α_2. Нехай вектор $\overrightarrow{N_1}$ є нормальним вектором до площини α_1: $\overrightarrow{N_1} \perp \alpha_1$, $\overrightarrow{N_1} \neq \vec{0}$, а вектор $\overrightarrow{N_2}$ - нормальним вектором до площини α_2: $\overrightarrow{N_2} \perp \alpha_2$, $\overrightarrow{N_2} \neq \vec{0}$.

$$\left(\alpha_1;\alpha_2\right) = \arccos\left|\cos\left(\overrightarrow{N_1};\overrightarrow{N_2}\right)\right| = \arccos\frac{\left|\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}\right|}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|}. \qquad (4.9)$$

Отримана формула, записана у координатах точок і векторів відносно довільної афінної системи координат, є достатньо складною. Обчислення набувають суттєвого спрощення, якщо у просторі розглянуто прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Саме тому при розв'язуванні подібних задач, у просторі, як правило, обирають прямокутну декартову систему координат. Варто також зауважити, що отримана формула (4.9) залишається вірною і у випадках, коли площини α_1 і α_2 є паралельними або співпадають.

Отже, якщо у тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E, відносно якої площини α_1 і α_2 задані, відповідно, загальними рівняннями $A_1\cdot x + B_1\cdot y + C_1\cdot z = 0$, $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$ і $A_2\cdot x + B_2\cdot y + C_2\cdot z = 0$, $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$, і, в силу цього, відповідно, мають нормальні вектори $\overrightarrow{N_1}\left(A_1,B_1,C_1\right)_E$ і $\overrightarrow{N_2}\left(A_2,B_2,C_2\right)_E$, то кут між площинами α_1 і α_2 обчислюють згідно формули:

$$\cos\left(\alpha_1;\alpha_2\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{N_1};\overrightarrow{N_2}\right)\right|=\frac{\left|A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2\right|}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}+C_1^{\,2}}\cdot\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}+C_2^{\,2}}}. \quad (4.10)$$

Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

1. Як у геометрії тривимірного евклідового простору означують відстань між двома геометричними фігурами?

2. Наведіть означення інфімуму підмножини множини дійсних чисел. Поясніть, чому у евклідовій геометрії для точного означення відстані між двома геометричними фігурами доводиться використовувати поняття інфімуму.

3. Чому у геометрії тривимірного евклідового простору дорівнює відстань від точки до площини?

4. За якою формулою у геометрії тривимірного евклідового простору можна обчислити відстань від точки до площини, якщо для площини відомими є точка, що цій площині належить, і два вектора, колінеарних до даної площини, але не колінеарних між собою?

5. За якою формулою у геометрії тривимірного евклідового простору можна обчислити відстань від точки до площини, якщо для площини відомими є точка, що цій площині належить, і нормальний вектор? Який вигляд має координатна форма даної формули відносно заданої у тривимірному евклідовому просторі прямокутної декартової системи координат?

6. Чому у геометрії тривимірного евклідового простору дорівнює відстань між двома площинами за умови різних варіантів взаємного розташування цих площин?

7. Як у геометрії тривимірного евклідового простору можна знайти відстань між двома паралельними площинами? Яка теорема евклідової стереометрії обумовлює справедливість подібного висновку?

8. За якою формулою у геометрії тривимірного евклідового простору можна знайти відстань між двома паралельними площинами у випадку, коли ці площини задані загальними рівняннями відносно певної прямокутної декартової системи координат?

9. Як у геометрії тривимірного евклідового простору означують кут між двома паралельними площинами та площинами, що співпадають?

10. Наведіть означення двограного кута у геометрії тривимірного евклідового простору. Який двогранний кут називають розгорнутим?

11. Скільки двогранних кутів утворюється у випадку, коли дві площини перетинаються за прямою? Як у геометрії тривимірного евклідового простору означують кут між двома площинами, що перетинаються за прямою?

12. Як у геометрії тривимірного евклідового простору означують лінійний кут двогранного кута? Чому таке означення є коректним? . Як у евклідовій геометрії визначають міру двогранного кута?

13. Поясніть, чому у геометрії тривимірного евклідового простору кут між двома площинами дорівнює куту між прямими, відповідно, перпендикулярними до цих площин.

14. Наведіть формулу, за якою у геометрії тривимірного евклідового простору знаходиться кут між двома площинами, якщо відомими є нормальні вектори до цих площин. ? Відповідь обґрунтуйте.

15. За якою формулою у геометрії тривимірного евклідового простору обчислюється косинус кута між площинами у випадку, коли площини задані загальними рівняннями відносно прямокутної декартової системи координат? Відповідь обґрунтуйте.

4.3. Нормальне рівняння площини у векторній формі. Алгебраїчне нормальне рівняння площини відносно прямокутної декартової системи координат, геометричний зміст його коефіцієнтів. Теоретичні питаня і завдання для самоконтролю

У тривимірному евклідовому просторі розглянемо довільну площину α . У якості початку відліку оберемо таку точку O, яка площині α не належить.

Позначимо через M_0 точку перетину з площиною α прямої, що проходить через точку O перпендикулярно до площини α. **Нормальним рівнянням у векторній формі** площини α відносно початку відліку O називають рівняння виду

$$\vec{n}\cdot\vec{r}-p=0, \qquad (4.11)$$

у якому вектор $\vec{n}$ є одиничним вектором, однаково спрямованим до вектора $\overrightarrow{OM_0}$ і, в силу цього, зрозуміло, одиничним нормальним вектором для площини α (рис. 4.8), число p є додатним, з геометричної точки зору воно дорівнює відстані від початку відліку O до площини α.

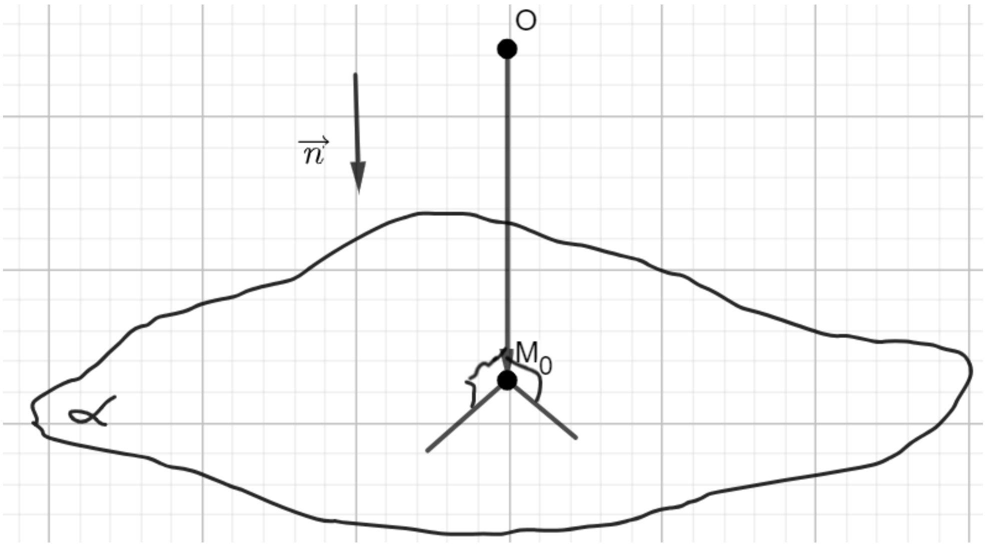

Рис. 4.8.

У тривимірному евклідовому просторі кожну площину α відносно кожного початку відліку O, який цій площині не належить, можна задати векторним рівнянням виду (4.11). За умови фіксованого відрізка, прийнятого у якості одиничного, для відповідної площини α рівняння (4.11) є визначеним однозначно. Будь-яке рівняння виду (4.11), у якому вектор $\vec{n}$ є одиничним, а число p - додатним, відносно будь-якого початку відліку O є нормальним рівнянням у векторній формі певної, однозначно визначеної площини, яка не проходить через початок відліку.

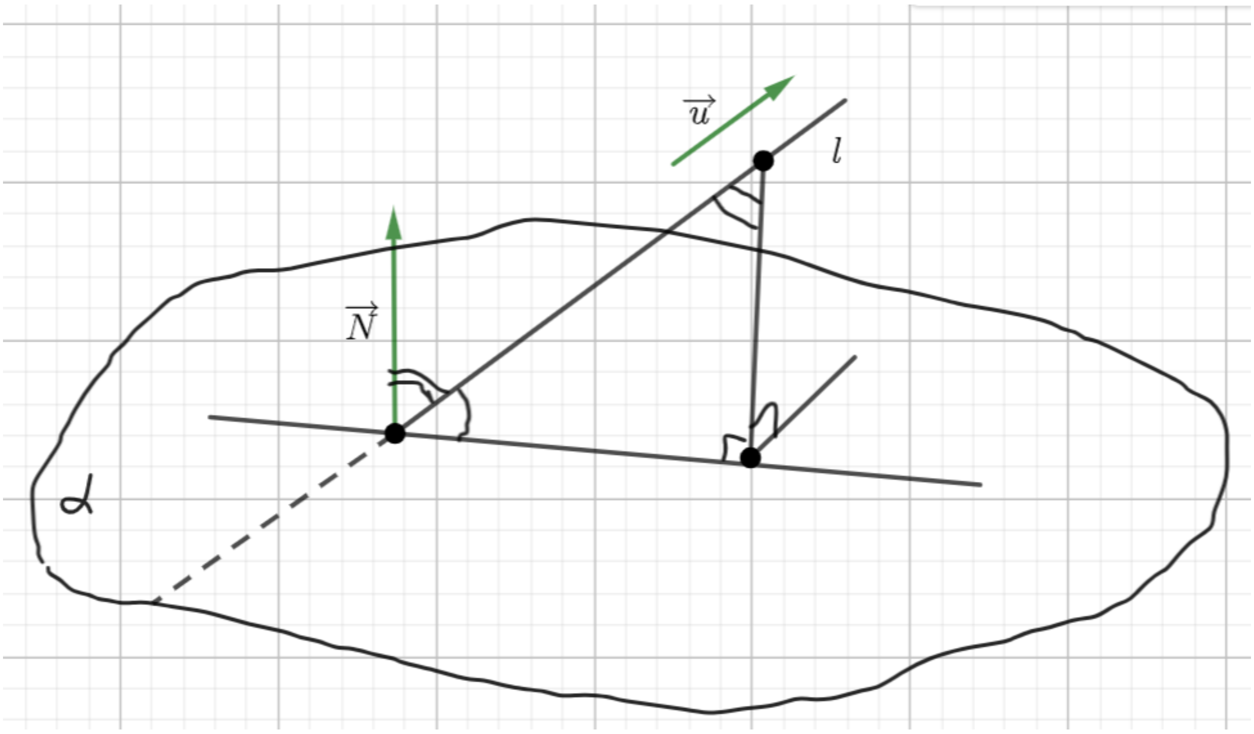

Рис. 4.12.

Іноді нормальні рівняння у векторній формі розглядають і для площин, що проходять через початок відліку. Для таких площин нормальними рівняннями у векторній формі вважають рівняння виду:

$$\vec{n}\cdot\vec{r}=0, \tag{4.12}$$

де вектор $\vec{n}$ є одиничним вектором, перпендикулярним до відповідної площини.

У тривимірному евклідовому просторі кожну площину α відносно будь-якого початку відліку O, який цій площині належить, можна задати векторним рівнянням виду (4.12). За умови фіксованого відрізка, прийнятого у якості одиничного, для відповідної площини α рівняння (4.12) вже не є визначеним однозначно, таких рівнянь існує два: якщо вектор $\vec{n}$ є одиничним вектором, перпендикулярним до певної площини, то вектор $\vec{n'} = -\vec{n}$ має ту ж саму властивість.

Будь-яке рівняння виду (4.12), у якому вектор $\vec{n}$ є одиничним, відносно будь-якого початку відліку O є нормальним рівнянням у векторній формі певної, однозначно визначеної площини, яка проходить через початок відліку.

Розглянемо у тривимірному евклідовому просторі прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з ортонормованим базисом E, утвореним векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Площину σ, яка не проходить через початок відліку O, відносно даної системи координат можна задати рівнянням виду

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0, \tag{4.13}$$

де число p є додатним, дорівнює відстані від початку відліку O до площини σ, числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ є так званими спрямовуючими косинусами площини σ: якщо точка M_0 є основою перпендикуляру, проведнного з точки O до площини σ, то кут α є кутом між вектором $\overrightarrow{OM_0}$ і вектором $\vec{i}$, кут β - кутом між вектором $\overrightarrow{OM_0}$ і вектором $\vec{j}$, кут γ - кутом між вектором $\overrightarrow{OM_0}$ і вектором $\vec{k}$, $0 \le \alpha \le \pi$, $0 \le \beta \le \pi$, $0 \le \gamma \le \pi$ (рис. 4.9).

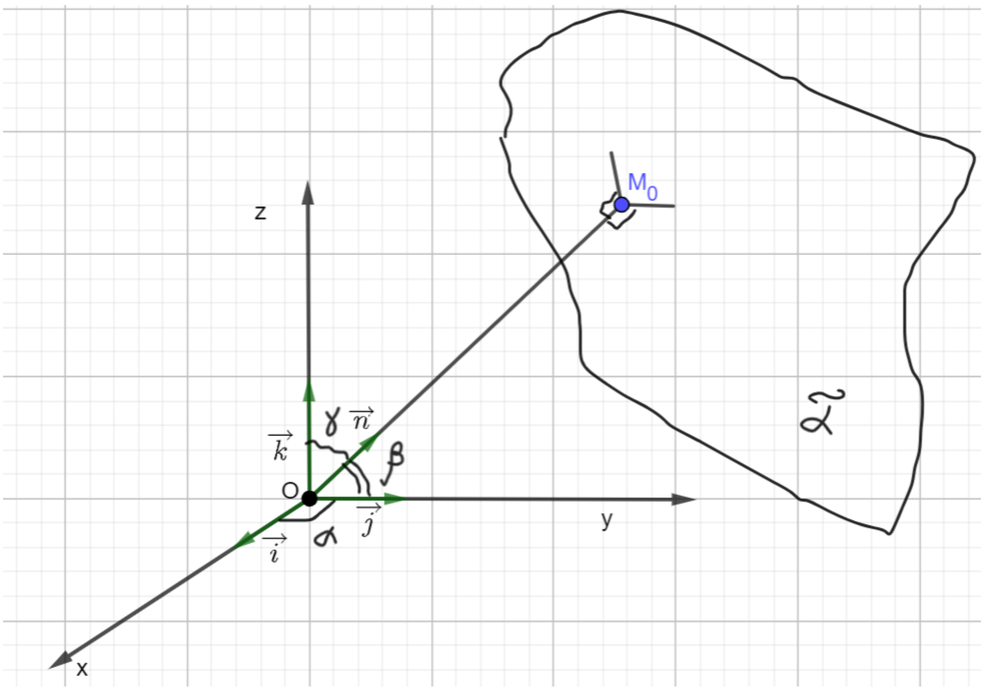

Рис. 4.9.

Зрозуміло, що рівняння (4.13) є окремим випадом загального рівняння площини відносно даної прямокутної декартової системи координат. Таке рівняння називають **алгебраїчним нормальним рівнянням площини** σ.

Коефіцієнти при невідомих рівняння (4.13) задовольняють умову:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{4.14}$$

тобто, відносно базису E прямокутної декартової системи координат $Oxyz$ утворюють відповідні координати одиничного нормального вектора: $\vec{n}\left(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\right)_E$.

Будь-яку площину σ, яка не проходить через початок відліку прямокутної декартової системи координат $Oxyz$, відносно цієї системи координат можна задати алгебраїчним нормальним рівнянням виду (4.13), таке рівняння є визначеним однозначно.

Зокрема, від будь-якого загального рівняння площини відносно прямокутної декартової системи координат $Oxyz$, у випадку, коли площина не проходить через початок відліку, за допомогою рівносильних перетворень можна перейти до алгебраїчного нормального рівняння цієї площини. Так, розглянемо загальне рівняння (4.4) площини σ , для якого, зрозуміло, виконано умову (4.2): $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$, $A^2+B^2+C^2>0$. В силу того, що площина σ не проходить через початок відліку, $D\neq 0$. Це рівняння є рівносильним до рівняння

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot z+\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

Якщо $D<0$, то вважаємо, що $p=-\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $p>0$.

Якщо $D>0$, то від попереднього рівняння переходимо до рівносильного рівняння

$$\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot x+\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot y+\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot z-\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

і вважаємо, що $p=\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

В силу того, що для довільних дійсних чисел A, B, C , $A^2+B^2+C^2>0$, вірними є числові нерівності $\left|\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\le 1$, $\left|\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\le 1$, $\left|\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\le 1$, існують такі кути α , β , γ , $0\le\alpha\le\pi$, $0\le\beta\le\pi$, $0\le\gamma\le\pi$, що $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\alpha$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\beta$,

$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\gamma$ у випадку рівняння першого виду так само як існують такі кути α, β, γ, $0\le\alpha\le\pi$, $0\le\beta\le\pi$, $0\le\gamma\le\pi$, що $\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\alpha$, $\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\beta$, $\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\gamma$ у випадку рівняння другого виду.

Одночасно, будь-яке рівняння виду (4.13), для якого число p є додатним, виконано умову (4.14), $0\le\alpha\le\pi$, $0\le\beta\le\pi$, $0\le\gamma\le\pi$, є алгебраїчним нормальним рівнянням певної площини σ відносно даної прямокутної декартової системи координат.

Іноді алгебраїчні нормальні рівняння розглядають і для площин, які проходять через початок відліку прямокутної декартової системи координат $Oxyz$. Для таких площин алгебраїчними нормальними вважають рівняння виду:

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma=0, \tag{4.15}$$

де $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, $0\le\alpha\le\pi$, $0\le\beta\le\pi$, $0\le\gamma\le\pi$.

Будь-яку площину σ, яка проходить через початок відліку прямокутної декартової системи координат $Oxyz$, відносно цієї системи координат можна задати алгебраїчним нормальним рівнянням виду (4.15). Одночасно, таке рівняння вже не є визначеним однозначно, їх існує два, одне утворюється із іншого множенням на число (-1).

Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

1. У тривимірному евклідовому просторі фіксовано початок відліку. Який вигляд має нормальне рівняння площини у векторній формі відносно обраного початку відліку? Який геометричний зміст мають сталі даного рівняння?

2. Чи кожну площину тривимірного евклідового простору можна задати нормальним рівнянням у векторній формі відносно довільним чином обраного початку відліку? У випадку можливості, чи є таке рівняння визначеним однозначно?
3. Який вигляд відносно прямокутної декартової системи координат у тривимірному евклідовому просторі має алгебраїчне нормальне рівняння площини? Які алгебраїчні умови задовольняють коефіцієнти цього рівняння? Який геометричний зміст мають коефіцієнти цього рівняння?
4. Чи кожну площину тривимірного евклідового простору відносно фіксованої прямокутної декартової системи координат можна задати алгебраїчним нормальним рівнянням? У випадку можливості, чи є таке рівняння визначеним однозначно?
5. Чи є алгебраїчне нормальне рівняння площини відносно прямокутної декартової системи координат окремим випадком загального рівняння площини відносно даної системи координат?
6. У тривимірному евклідовому просторуі задано прямокутну декартову систему координат. Площину, яка не проходить через початок відліку, відносно даної системи координат задано загальним рівнянням. Як за допомогою рівносильних переходів від даного загального рівняння площини перейти до її алгебраїчного нормального рівняння відносно заданої системи координат? Відповідь обґрунтуйте.

4.4. Визначення відстані від точки до прямої, відстані між двома прямими, величини кута між двома прямими у тривимірному евклідовому просторі за заданими координатами точки і рівняннями відповідних прямих відносно прямокутної декартової системи координат. Теоретичні питаня і завдання для самоконтролю

У геометрії тривимірного евклідового простору у випадку, коли точка належить прямій, відстань від даної точки до даної прямої, зрозуміло, дорівнює нулю. Якщо точка прямій не належить, то **відстань від даної точки до даної прямої** дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного із даної точки до даної прямої.

Припустимо, треба знайти відстань від точки A до прямої a, $A \notin a$. Для знаходження довжини перпендикуляра, проведеного з точки A до прямої a, зручніше за все провести через точку A перпендикулярно до прямої a площину α, знайти точку A_0, перетину площини α з прямою a, а потім обчислити відстань від точки A до точки A_0 (рис. 4.10). Зазначені підрахунки. зрозуміло, можна виконати відповілно до обрання у просторі будь-якої системи координат, зокрема, будь-якої афінної системи координат. Але у випадку обрання прямокутної декартової системи координат всі необхідні обчислення набувають суттєвого спрощення.

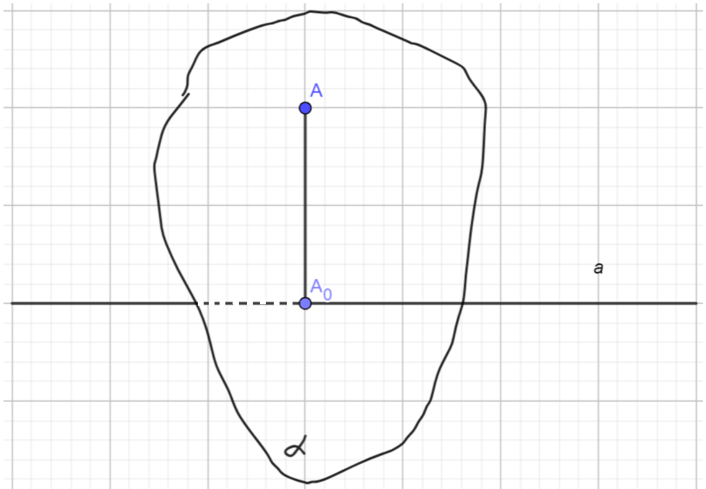

Рис. 4.10.

Отже, нехай у тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з ортонормованим базисом E, пряму a відносно даної системи координат задано стандартними параметричнимими рівняннями виду (3.3), для яких виконано умову (3.2): $a: \begin{cases} x = x_0 + m\cdot t \\ y = y_0 + n\cdot t \\ z = z_0 + k\cdot t \end{cases}$.

Вектор $\vec{u}\left(m,n,k\right)_E$ є спрямовуючим вектором прямої a, в силу умови (3.2), він не є нульовим, $\left|\vec{u}\right| \neq 0$.

Нехай точка A, яка не належить прямій a, відносно обраної системи координат має координати $\left(x_A, y_A, z_A\right)$. Проведемо через цю точку перпендикулярно до прямої a площину α. Вектор $\vec{u}$ для площини α є нормальним вектором, відносно обраної прямокутної декартової системи координат площина α задається наступним рівнянням площини з нормальним вектором: $m\cdot(x-x_A)+n\cdot(y-y_A)+k\cdot(z-z_A)=0$. Знайдемо координати $\left(x_{A_0}, y_{A_0}, z_{A_0}\right)$ точки A_0 перетину прямої a з площиною α як розв'язок наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} x = x_0 + m\cdot t \\ y = y_0 + n\cdot t \\ z = z_0 + k\cdot t \\ m\cdot(x-x_A)+n\cdot(y-y_A)+k\cdot(z-z_A)=0 \end{cases}.$$

Відстань від точки A до прямої a дорівнює довжини відрізка AA_0:

$$\rho(A,l)=\rho(A,A_0)=\sqrt{(x_A-x_{A_0})^2+(y_A-y_{A_0})^2+(z_A-z_{A_0})^2}\ . \quad (4.16)$$

У геометрії тривимірного евклідового простору дві різні прямі можуть перетинатися у одній точці, бути паралельними або бути мимобіжними.

Зрозуміло, що, відповідно до наведеного означення, для кожної прямої відстань до самої себе дорівнює нулю. Якщо дві прямі перетинаються у одній точці, то відстань між ними, так само, дорівнює нулю. Отже, залишається розглянути лише ті випадки, коли задані прямі є паралельними та коли ці є мимобіжними.

У геометрії тривимірного евклідового простру доведено, що **відстань між паралельними прямими** a_1 і a_2 дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з довільної точки однієї з цих прямих до іншої прямої. Отже, задачу знаходження відстані між двома паралельними прямими можна розв'язувати тим же шляхом, що й задачу знаходження відстані від точки до прямої у випадку, коли задана точка заданій прямій не належить. При цьому за точку A прийнятити, наприклад, точку, яка належить прямій a_1, а за пряму a прийняти пряму a_2 .

Так само, у геометрії тривимірного евклідового простру доведено, що будь-які дві мимобіжні прямі a_1 і a_2 мають спільний перпендикуляр. Тобто існує пряма A_1A_2, яка перетинає пряму a_1 у точці A_1, пряму a_2 - у точці A_2, і при цьому є перпендикулярною до кожної з прямих a_1 і a_2: $A_1A_2 \perp a_1$, $A_1A_2 \perp a_2$. Обґрунтовано, що, у даному випадку, **відстань між мимобіжними прямими** a_1 і a_2 дорівнює довжині відрізка A_1A_2. Отже, для знаходження відстані між мимобіжними прямими a_1 і a_2 мова може йти про знаходження рівняння прямої A_1A_2, знаходження точки A_1, перетину цієї прямої з прямою a_1, точки A_2 перетину цієї прямої з прямою a_2, а вже потім - знаходження довжини відрізка A_1A_2 (рис. 4.11). Але такий шлях розв'язання поставленої задачі технічно є достатньо складним. У геометрії тривимірного евклідового простору доведено, що мимобіжні прямі належать двом паралельним площинам α_1 і α_2 (існують площина α_1, $a_1 \subset \alpha_1$, і площина α_2, $a_2 \subset \alpha_2$, площина α_1 є паралельною до площини α_2), відстань між прямими a_1 і a_2 дорівнює відстані між паралельними площинами α_1 і α_2. Зручніше за все скласти, наприклад, рівняння площини α_2, розглянути довільну точку A_1, $A_1 \in \alpha_1$, і, згідно попередніх міркувань, обчислити відстань від точки A_1 до площини α_2.

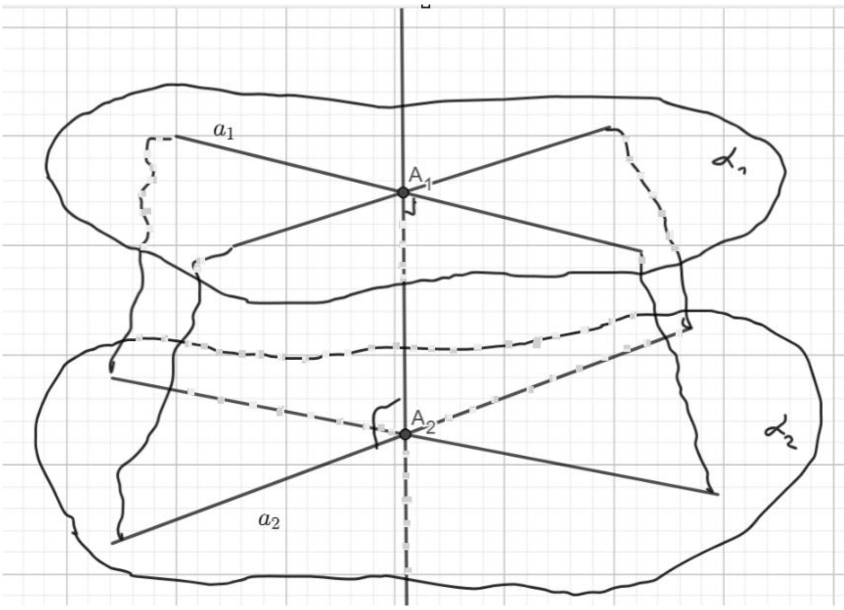

Рис. 4.11

У будь-якому випадку, перш ніж знаходити відстань між двома прямими, треба визначитися з характером їх взаємного розташування.

За означенням, кут **між двома паралельними прямими, або прямими, що співпадають,** дорівнює нулю градусів . Якщо дві прямі перетинаються у певній точці, то при цьому утворюються чотири попарно рівних між собою нерозгорнутих кута-каркаса. За величину кута між такими прямими приймають градусну міру не більшого з цих чотирьох кутів. Якщо прямі a_1 і a_2 є мимобіжними, то за величину кута між ними приймають величину кута між такими, відповідно паралельними до них прямими, які перетинаються, проходять через певну спільну точку A. При цьому доведено, що визначена таким чином **величина кута між прямими** a_1 і a_2 не залежить від вибору точки A. У підсумку, із наведених міркувань випливає, що, за будь-якого варіанту взаємного розташування прямих a_1 і a_2, величина кута між ними дорівнює величині не тупого кута між їх спрямовуючими векторами: якщо вектор $\overrightarrow{u_1}$ є спрямовуючим вектором прямої a_1 (вектор $\overrightarrow{u_1}$ є колінеарним до прямої a_1, $\overrightarrow{u_1} \neq \vec{0}$), вектор $\overrightarrow{u_2}$ є спрямовуючим вектором прямої a_2 (вектор $\overrightarrow{u_2}$ є колінеарним до прямої a_2, $\overrightarrow{u_2} \neq \vec{0}$), то $\left(a_1, a_2\right) = \arccos \frac{\left|\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

Нехай у тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з ортонормованим базисом E, вектор $\overrightarrow{u_1}\left(m_1, n_1, k_1\right)_E$ є спрямовуючим вектором прямої a_1, а вектор $\overrightarrow{u_2}\left(m_2, n_2, k_2\right)_E$ є спрямовуючим вектором прямої a_2. Тоді

$$\left(a_1, a_2\right) = \arccos \frac{\left|m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + k_1 \cdot k_2\right|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + k_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + k_2^2}}. \quad (4.17)$$

Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

1. Як у геометрії тривимірного евклідового простору визначають відстань від точки до прямої? Відповідь обгрунтуйте.

2. Як у геометрії тривимірного евклідового простору найчастіше за все знаходять відстань від точки до прямої у випадку, коли задана точка заданій прямій не належить?

3. Як у геометрії тривимірного евклідового простору найчастіше за все знаходять відстань від точки до прямої у випадку задання цих геометричних

фігур за допомогою аналітичних умов відносно обраної у просторі певнопрямокутної декартової системи координат?

4. Як у геометрії тривимірного евклідового простору визначають відстань між двома паралельними прямими? Відповідь обгрунтуйте. Як у геометрії тривимірного евклідового простору найчастіше за все знаходять відстань між двома паралельними прямими у випадку, коли ці прямі задано за допомогою аналітичних умов відносно обраної у просторі певної прямокутнної декартової системи координат?

5. Як у геометрії тривимірного евклідового простору визначають відстань між двома мимобіжними прямими? Відповідь обгрунтуйте. Як у геометрії тривимірного евклідового простору найчастіше за все знаходять відстань між двома мимобіжними прямими у випадку, коли ці прямі задано за допомогою аналітичних умов відносно обраної у просторі певної прямокутної декартової системи координат ?

6. Як у геометрії тривимірного евклідового простору означають поняття про кут між двома прямими?

7. Як у геометрії тривимірного евклідового простору знаходять величину кута між двома прямими у випадку, коли ці прямі задано за допомогою аналітичних умов відносно обраної у просторі певної прямокутної декартової системи координат?

4.5. Визначення відстані між прямою і площиною, величини кута між прямою і площиною за заданими рівняннями прямої і площини відносно прямокутної декартової системи координат. Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

Як відомо, у геометрії тривимірного евклідового простору, пряма може належити площині, бути паралельною до площини або перетинати площину у певній, однозначно визначеній, точці.

Зрозуміло, що, згідно означення відстані між двома геометричними фігурами, якщо пряма належить площині або перетинає площину у певній точці, то відстань між даною прямою і даною площиною дорівнює нулю.

Одночасно доведено, що, якщо пряма є паралельною до площини, то всі точки цієї прямої знаходяться на однаковій відстані від даної площини. В силу цього, саме ця відстань і є **відстанню від** даної **прямої до** даної **площини**. Звідси випливає і спосіб знаходження такої відстані: на прямій l, що є паралельною до площини α, треба обрати довільну точку A і, за стандартною схемою, обчислити відстань від точки A до площини α. З технічної точки зору, такі обчислення набувають найбільш простої форми у випадку, коли пряму l і площину α задано певними аналітичними умовами відносно обраної у просторі прямокутної декартової системи координат.

Отже. нехай у тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Нехай відносно даної системи координат площину α задано загальним рівнянням виду (4.4), для якого, зрозуміло, виконано умову (4.2): $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$, $A^2+B^2+C^2>0$. Вектор $\overrightarrow{N}\left(A,B,C\right)_E$ є нормальним вектором даної площини : $\overrightarrow{N}\perp\alpha$, $\overrightarrow{N}\neq\vec{0}$, пряму l відносно даної системи координат задано стандартними параметричнимими рівняннями виду (3.3), для яких виконано умову (3.2): l: $\begin{cases} x=x_0+m\cdot t \\ y=y_0+n\cdot t \\ z=z_0+k\cdot t \end{cases}$.

Вектор $\vec{u}\left(m,n,k\right)_E$ є спрямовуючим вектором прямої l, в силу умови (3.2), він не є нульовим, $\left|\vec{u}\right|\neq 0$, точка $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$ належить прямій l. Виконання умов $A\cdot m+B\cdot n+C\cdot k=0$, $A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+D\neq 0$ вказує на те, що пряма l є паралельною до площини α, відстань від прямої l до площини α не дорівнює нулю, дорівнює відстані від точки A до площини α і обчислюється за формулою

$$\rho(l,\alpha)=\rho(A,\alpha)=\frac{\left|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,. \qquad (4.18)$$

У геометрії тривимірного евклідового простору, якщо пряма належить площині, або є паралельною до площині, то, за означенням, кут між такими прямою і площиною дорівнює нулю. Якщо пряма перетинає площину, то, за означенням, кут між прямою і площиною дорівнює куту між прямою і її ортогональною проекцією на цю площину. Останнє означення, одночасно, підходить і для випадку, коли пряма є паралельною до площини, або цій площині належить.

Отже, у всіх випадках поняття про кут між прямою і площиною зводиться до поняття про кут між двома прямими. Звідси, зокрема, випливає, що кут між прямою та площиною може бути лише або гострим, або прямим, не може бути тупим.

З технічної точки зору, зручніше за все визначати кут між прямою і площиною за допомогою кута між нормальним вектором до площини і спрямовуючим вектором прямої. При цьому треба знаходити кут, що не є тупим (тобто, у випадку отримання тупого кута, треба брати суміжний до нього кут). Шуканий кут між прямою і площиною тоді буде доповнювати знайдений кут до 90^0 (рис. 4.12).

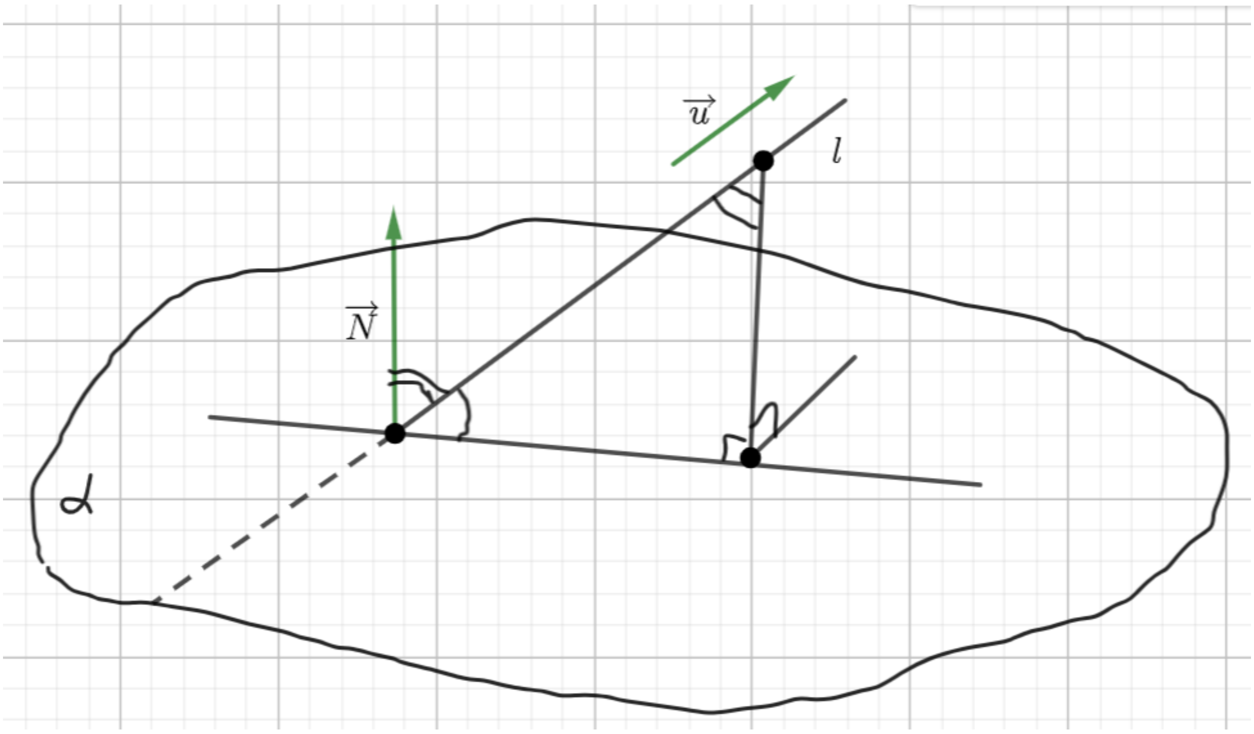

Рис. 4.12.

Якщо для прямої l відомим є спрямовуючий вектор $\vec{u}$ (вектор $\vec{u}$ є колінеарним до прямої l, $\vec{u} \neq \vec{0}$), а для площини α - нормальний вектор $\vec{N}$ ($\vec{N} \perp \alpha$, $\vec{N} \neq \vec{0}$), то

$$\left(l, \alpha\right) = 90^\circ - \arccos \frac{\left|\vec{u} \cdot \vec{N}\right|}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{N}\right|} = \arcsin \frac{\left|\vec{u} \cdot \vec{N}\right|}{\left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{N}\right|}. \qquad (4.19)$$

У випадку, коли у тривимірному евклідовому просторі відносно ортонормованого базису E обраної прямокутної декартової системи координат $Oxyz$ відомими є координати $\left(A, B, C\right)_E$ нормального вектора $\vec{N}$ площини α і координати $\left(m, n, k\right)_E$ спрямовуючого вектора $\vec{u}$ прямої l, то формула (4.18) приймає вид

$$\left(l,\alpha\right)=\arcsin\frac{\left|A\cdot m+B\cdot n+C\cdot k\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+k^2}}\ . \tag{4.20}$$

Теоретичні питання і завдання для самоконтролю

1. Які існують варіанти взаємного розташування прямої і площини у геометрії тривимірного евклідового простору? Чому дорівнює відстань між прямою і площиною у випадку кожного з таких варіантів?
2. Як у геометрії тривимірного евклідового простору знаходять відстань між площиною і паралельною до неї прямою?
3. За якою формулою у аналітичній геометрії тривимірного евклідового простору, як правило, обчислюють відстань від прямої до площини у випадку, коли пряма є паралельною до площини, відносно обраної у просторі певної прямокутної декартової системи координат площину задано загальним рівнянням, а для прямої відомими є координати певної точки, що цій прямій належить?
4. Як у геометрії тривимірного евклідового простору означують кут між прямою і площиною?
5. Яким чином, з технічної точки зору, у геометрії тривимірного евклідового простору зручніше за все визначати кут між прямою і площиною?
6. За якою формулою у геометрії тривимірного евклідового простору знаходять кут між прямою і площиною, якщо для прямої відомим є спрямовуючий вектор, а для площини - нормальний?
7. За якою формулою у геометрії тривимірного евклідового простору знаходять кут між прямою і площиною, якщо відносно певного ортонормованого базису множини векторів простору для прямої

відомими є координати спрямовукючого вектора, а для площини - нормального?

4.6. Певні стандартні задачі метричного характеру на площину і пряму у тривимірному евклідовому просторі за умови їхнього задання різного виду рівняннями відносно прямокутної декартової системи координат

Наявність у просторі прямокутної декартової системи координат дозволяє з технічної точки зору значно спростити розв'язання задач, пов'язаних з метричними властивостями прямих і площин, у першу чергу, з перпендикулярністю прямих і площин, визначенням величин певних кутів. Умови і розв'язки значної кількості подібних задач вже було наведено попередньо. Подалі вкажемо лише на наступні.

Задача 1. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно даної системи координат площину α задано загальним рівнянням (4.4), для коефіцієнтів при невідомих якого, виконано умову (4.2) $\alpha : A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Точка M відносно обраної системи координат має координати $\left(x_M, y_M, z_M\right)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M перпендикулярно до площини α.

Розв'язання. Якщо відносно прямокутної декартової системи координат $Oxyz$ з базисом E площину α задано рівнянням (4.4) для коефіцієнтів при невідомих якого виконано умову (4.2), вектор $\overrightarrow{N}$ з координатами $\left(A, B, C\right)_E$ є нормальним вектором даної площини. Отже, цей вектор є спрямовуючим вектором для прямої m, що проходить через точку M перпендикулярно до площини α, канонічні рівняння прямої m мають вид

$$\frac{x - x_M}{A} = \frac{y - y_M}{B} = \frac{z - z_M}{C}.$$

Задача 2. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно даної системи координат площину α задано загальним рівнянням (4.4), для коефіцієнтів при невідомих якого виконано умову (4.2): $\alpha : A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Точка M, що площині α не належить, відносно обраної системи координат має координати $\left(x_M, y_M, z_M\right)$. Знайти координати ортогональної проєкції точки M на площину α.

Розв'язання. Ортогональною проєкцією точки на площину називається основа перпендикуляра, проведеного з цієї точки до даної площини. Отже, задачу можна розв'язати за зразком попередньої. Треба знайти рівняння прямої, що проходить через точку M перпендикулярно до площини α, і визначити координати точки перетину цієї прямої з площиною α.

За умови задачі стверджується, що точка M площині α не належить. На всяк випадок, варто спочатку цей факт перевірити (у супротивному випадку, ортогональна проєкція точки M на площину α співпадає з самою точкою M і взагалі нічого знаходити не потрібно). Отже, будемо вважати, що $A \cdot x_M + B \cdot y_M + C \cdot z_M + D \neq 0$, $M \notin \alpha$. З урахуванням наступних обчислень, при розв'язанні даної задачі рівняння прямої m, яка проходить через точку M перпендикулярно до площини α, зручніше за все записати у параметричній формі: $\begin{cases} x = x_M + A \cdot t \\ y = y_M + B \cdot t \\ z = z_M + C \cdot t \end{cases}$. Координати ортогональної проєкції M_0 точки M на площину α знайдуться як розв'язок наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} x = x_M + A\cdot t \\ y = y_M + B\cdot t \\ z = z_M + C\cdot t \\ A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0 \end{cases} . \qquad (4.21)$$

Задача 3. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно даної системи координат площину α задано загальним рівнянням (4.4), для коефіцієнтів при невідомих якого виконано умову (4.2): α : $A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Точка M, що площині α не належить, відносно обраної системи координат має координати $\left(x_M, y_M, z_M\right)$. Знайти координати точки M', симетричної до точки M відносно площини α.

Розв'язання. Якщо точка M належить площині α, то точка M', симетрична до точки M відносно площини α, співпадає з точкою M і для розв'язання даної задачі шукати, взагалі, нічого не потрібно. Припустимо, $A\cdot x_M + B\cdot y_M + C\cdot z_M + D \neq 0$, точка M площині α не належить ($M \notin \alpha$). Тоді точка M_0, ортогональна проєкція точки M на площину α, є серединою відрізка MM' (рис.4.13).

Отже, для розв'язання даної задачі можна скористатися міркуваннями розв'язку задачі попередньої. Спочатку, унаслідок розв'язання системи рівнянь (4.21), відносно обраної системи координат $Oxyz$, треба знайти координати $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ точки M_0. Шукані координати $\left(x', y', z'\right)$ точки M' буде знайдено унаслілок розв'язання системи рівнянь

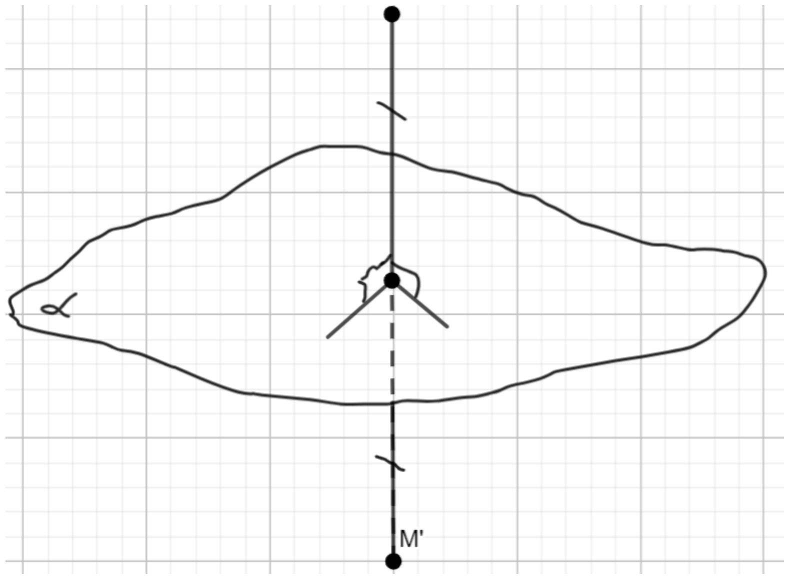

Рис. 4.13

$$\begin{cases} \dfrac{x_M + x'}{2} = x_0 \\ \dfrac{y_M + y'}{2} = y_0 , \\ \dfrac{z_M + z'}{2} = z_0 \end{cases}$$

тобто, $x' = 2 \cdot x_0 - x_M$, $y' = 2 \cdot y_0 - y_M$, $z' = 2 \cdot z_0 - z_M$.

Задача 4. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно даної системи координат площину α задано загальним рівнянням (4.4), для коефіцієнтів при невідомих якого виконано умову (4.2): $\alpha : A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, пряму l, яка не є ортогональною до площини α, задано за допомогою системи параметрчних рівнянь (3.3), для коефіцієнтів при параметрі яких виконано умову (3.2): $l : \begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t \\ z = z_0 + k \cdot t \end{cases}$, $m^2 + n^2 + k^2 > 0$.

Скласти рівняння площини, що ортогонально проєктує пряму l на площину α.

Розв'язання. Зрозуміло, що для розв'язання даної задачі треба скласти рівняння такої площини β, яка проходить через пряму l перпендикулярно до площини α. За умови задачі, для площини α відомими є координати нормального вектора $\overrightarrow{N}\left(A, B, C\right)_E$ відносно базису E обраної прямокутної декартової системи координат, для прямої l - координати $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ точки M_0, що цій прямій належить, та координати спрямовуючого вектора $\vec{u}\left(m, n, k\right)_E$. Має сенс перевірити, що координати векторів $\overrightarrow{N}$ і $\vec{u}$ не є пропорційними, тобто, пряма l, насправді, не є ортогональною до площини α, існує єдина площина β, що проходить через пряму l перпендикулярно до площини α. Отже, якщо вектори $\overrightarrow{N}$ і $\vec{u}$ не є колінеарними, рівняння площини β можна скласти як рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно до векторів $\overrightarrow{N}$ і $\vec{u}$. $\beta: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A & B & C \\ m & n & k \end{vmatrix} = 0$.

Задача 5. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно даної системи координат площину α задано загальним рівнянням (4.4), для коефіцієнтів при невідомих якого виконано умову (4.2): $\alpha : A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, пряму l, яка не є перпендикулярною до площини α, задано за допомогою системи параметрчних рівнянь (3.3), для коефіцієнтів при параметрі яких виконано умову (3.2): $l:\begin{cases} x=x_0+m\cdot t \\ y=y_0+n\cdot t \\ z=z_0+k\cdot t \end{cases}$, $m^2+n^2+k^2>0$.

Скласти рівняняння ортогональної проєкції прямої l на площину α.

Розв'язання. Задача 5, за своєю сутністю, є продовженням задачі 4. За умови задачі (задана пряма l не є перпендикулярною до заданої площини α), ортогональною проєкцією прямої l на площину α є пряма l_1 перетину побудованої під час розвязання задачі 4 площини β з площиною α.

$$l_1:\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A & B & C \\ m & n & k \end{vmatrix}=0 \\ A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0 \end{cases}.$$

Задача 6. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно даної системи координат площини α_1 і α_2 задано загальними рівняннями виду (4.4), для коефіцієнтів при невідомих яких виконано умови виду (4.2). α_1: $A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1=0$, $A_1^2+B_1^2+C_1^2>0$,

α_2 : $A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0$, $A_2^2+B_2^2+C_2^2>0$. Перевіриити, що задані площини перетинаються за певною прямою. Обрати на цій прямій довільну точку та скласти рівняння прямих, що містять сторони лінійного кута двогранного кута між заданими площинами з вершиною у обраній точці.

Розв'язання. Якщо відносно певної прямокутної декартової системи координат $Oxyz$ з базисом E площини α_1 і α_2 задано вказаними за умови задачі рівняннями виду (4.4) для коефіцієнтів при невідомих яких виконано умови виду (4.2), для цих площин відомими є координати відносно базису E нормальних векторів. Відповідно, маємо: $\overrightarrow{N_1}\left(A_1,B_1,C_1\right)_E$, $\overrightarrow{N_1}\perp\alpha_1$, $\overrightarrow{N_1}\neq\vec{0}$,

$\overrightarrow{N_2}\left(A_2, B_2, C_2\right)_E$, $\overrightarrow{N_2}\perp\alpha_2$, $\overrightarrow{N_2}\neq\vec{0}$. Для того, щоб перевірити, що задані площини перетинаються за певною прямою, достатньо переконатися у тому, що вектори $\overrightarrow{N_1}$ і $\overrightarrow{N_2}$ не є колінеарними, тобто, їх координати не є пропорційними, $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}=2$. Отже, нехай факт перетину площин α_1 і α_2 за певною прямою l встановлено. Аналітичні умови, що визначають пряму l відносно обраної системи координат, мають вид системи рівнянь

$$l\ :\ \begin{cases} A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1=0 \\ A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0 \end{cases}$$

, система, зрозуміло, має безліч розв'язків, для знаходження координат певної точки, що належить прямій l, достатньо визначити один розв'язок даної системи. Той факт, що $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}=2$, означає, що для даної матриці принаймні один з визначників другого порядку є відмінним від нуля. Нехай, для визначеності, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$. Тоді змінній z у системі рівнянь, що визначає пряму l, можна надати довільне дійсне значення, нуль, наприклад, утворена система рівнянь $\begin{cases} A_1\cdot x+B_1\cdot y+D_1=0 \\ A_2\cdot x+B_2\cdot y+D_2=0 \end{cases}$ вже буде мати єдиний розв'язок $\left(x_0, y_0\right)$, точка $M_0\left(x_0, y_0, 0\right)$ буде належати прямій l. Для знаходження рівняння прямих l_1 і l_2, що містять сторони лінійного кута двогранного кута між заданими площинами з вершиною у точці M_0 варто скласти рівняння площини σ, яка проходить через цю точку перпендикулярно до прямої l. Така площина σ, зрозуміло, містить всі прямі простору, що проходять через точку M_0 перпендикулярно до прямої l. Отже, рівняння площини σ можна скласти як рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно до нормальних векторів $\overrightarrow{N_1}$ і $\overrightarrow{N_2}$. ($l \subset \alpha_1, \overrightarrow{N_1} \perp \alpha_1$, вектор $\overrightarrow{N_1}$ є колінеарним до площини σ ; $l \subset \alpha_2$, $\overrightarrow{N_2} \perp \alpha_2$, вектор $\overrightarrow{N_2}$ є колінеарним до площини σ). $\sigma : \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$. Шукана пряма l_1 є прямою перетину площин α_1 і σ , шукана пряма l_2- прямою перетину плщин α_2 і σ . У підсумку,

$$l_1 : \begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \\ A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \end{cases}, \quad l_2 : \begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Задача 7. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E . Відносно даної системи координат прямі l_1 і l_2 задано параметричними рівняннями виду (3.3), для коефіцієнтів при параметрі яких виконано умови виду (3.2). Обґрунтувати, що прямі l_1 і l_2 є мимобіжними, скласти рівняння спільного перпендикуляру до цих прямих, тобто, прямої, що перетинає кожну з прямих l_1 і l_2 та є перпендикулярною до кожної з них.

Розв'язання. Нехай відносно обраної прямокутної декартової системи координат $Oxyz$ з базисом E прямі l_1 і l_2 задано параметричними рівняннями виду (3.3) для коефіцієнтів при невідомих яких виконано умови виду (3.2). $l_1 : \begin{cases} x = x_1 + m_1 \cdot t \\ y = y_1 + n_1 \cdot t \\ z = z_1 + k_1 \cdot t \end{cases}$, $m_1^2 + n_1^2 + k_1^2 > 0$, $l_2 : \begin{cases} x = x_2 + m_2 \cdot t \\ y = y_2 + n_2 \cdot t \\ z = z_2 + k_2 \cdot t \end{cases}$, $m_2^2 + n_2^2 + k_2^2 > 0$. За подібного способу задання для кожної з прямих l_1 і l_2 відомими є координати точки, що цій прямій належить, та координати спрямовуючого вектора: $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right) \in l_1$, вектор $\overrightarrow{u_1}\left(m_1, n_1, k_1\right)_E$ є спрямовуючим вектором до прямої l_1, $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right) \in l_2$, вектор $\overrightarrow{u_2}\left(m_2, n_2, k_2\right)_E$ є спрямовуючим вектором до прямої l_2. Як відомо з попереднього, для обгрунтування того, що прямі l_1 і l_2 є мимобіжними, достатньо перевірити, що вектори $\overrightarrow{M_1 M_2}$, $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$ не є компланарними. Для цього достатньо обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{vmatrix}$ і переконатися у тому, що він не дорівнює нулю. Припустимо, вищевказану умову виконано, прямі l_1 і l_2, насправді є мимобіжними. Відомо, що у геометрії тривимірного евклідового простору існує так званий спільний перпендикуляр прямих l_1 і l_2 - пряма l, яка перетинає кожну з прямих l_1 і l_2 та є перпендикулярною до кожної з них. Вектор $\vec{u} = \overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}$, $\vec{u} \perp \overrightarrow{u_1}$, $\vec{u} \perp \overrightarrow{u_2}$ є спрямовуючим вектором прямої l. Пряма l є прямою перетину площини α_1, яка проходить через пряму l_1 паралельно до вектора $\vec{u}$, з площиною α_2, яка проходить паралельно до вектора $\vec{u}$ через пряму l_2.

$$\alpha_1 : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ \begin{vmatrix} n_1 & k_1 \\ n_2 & k_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k_1 & m_1 \\ k_2 & m_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0, \quad \alpha_2 : \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ m_2 & n_2 & k_2 \\ \begin{vmatrix} n_1 & k_1 \\ n_2 & k_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k_1 & m_1 \\ k_2 & m_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

Далі варто за допомогою тотожних перетворень перейти від наведених рівнянь площин α_1 і α_2 до загальних рівнянь цих площин. У підсумку, будемо мати

$$\alpha_1 :\ A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0,\ \alpha_2 :\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0,$$

$$l:\begin{cases} A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1=0 \\ A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0 \end{cases}.$$

Задача 8. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно даної системи координат площини α_1 і α_2 задано загальними рівняннями виду (4.4), для коефіцієнтів при невідомих яких виконано умови виду (4.2). α_1: $A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1=0$, $A_1^2+B_1^2+C_1^2>0$, α_2 : $A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0$, $A_2^2+B_2^2+C_2^2>0$. Перевіриити, що задані площини перетинаються за певною прямою. Скласти рівняння бісекторних площин двогранних кутів, утворених при перетині цих площин.

Розв'язання. Якщо відносно певної прямокутної декартової системи координат $Oxyz$ з базисом E площини α_1 і α_2 задано вказаними за умови задачі рівняннями виду (4.4) для коефіцієнтів при невідомих яких виконано умови виду (4.2), для цих площин відомими є координати відносно базису E нормальних векторів. Відповідно, маємо: $\overrightarrow{N_1}\left(A_1,B_1,C_1\right)_E$, $\overrightarrow{N_1}\perp\alpha_1$, $\overrightarrow{N_1}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{N_2}\left(A_2,B_2,C_2\right)_E$, $\overrightarrow{N_2}\perp\alpha_2$, $\overrightarrow{N_2}\neq\vec{0}$. Для того, щоб перевірити, що задані площини перетинаються за певною прямою, достатньо переконатися у тому, що вектори $\overrightarrow{N_1}$ і $\overrightarrow{N_2}$ не є колінеарними, тобто, їх координати не є пропорційними, $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}=2$.

Отже, нехай факт перетину площин α_1 і α_2 за певною прямою l встановлено. Унаслідок подібного перетину утворюються чотири попарно рівних між собою двогранних кути. Відповідно, маємо дві взаємно перпендикулярних бісекторних площини. Точка $M\left(x,y,z\right)$ належить тій чи іншій бісекторній площині тоді та тільки тоді, коли вона є рівновіддаленою від заданих площин. За умови проведення усіх розрахунків по відношенню до прямокутної декартової системи координат, відстань від точки до прямої обчислюється за формулою (4.7). Звідси випливає, що аналітичні умови, що визначають обидві бісекторні площини відносно обраної прямокутної декартової системи координат мають від рівняння

$$\frac{\left|A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1\right|}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2} + C_1^{\,2}}} = \frac{\left|A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2\right|}{\sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2} + C_2^{\,2}}} .$$

Зрозуміло, що, згідно означення модуля дійсного числа, це рівняння є рівносильним до наступної сукупності двох рівнянь, кожне з яких, по суті, відносно обраної прямокутної декартової системи координат є загальним рівнянням площини. У підсумку, маємо рівняння двох бісекторних площин:

$$\frac{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2} + C_1^{\,2}}} = \frac{A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2}{\sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2} + C_2^{\,2}}},$$

$$\frac{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2} + C_1^{\,2}}} = -\frac{A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2}{\sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2} + C_2^{\,2}}} .$$

Задача 9. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E . Відносно даної системи координат площини α_1 і α_2 задано загальними рівняннями виду (4.4), для коефіцієнтів при невідомих яких виконано умови виду (4.2). α_1: $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0$, $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$, α_2 : $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0$, $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$. Задано також координати певної точки $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, яка цим площинам не належить. Перевіриити, що задані площини перетинаються за певною прямою. Скласти рівняння бісекторної площини тієї пари вертикальних двогранних кутів, утворених при перетині цих площин, яка містить точку M_0.

Розв'язання. Зрозуміло, що, за своїм змістом, дана задача є продовженням попередньої. Для знаходження її розв'язку варто, спочатку, повторити розв'язок задачі 8. Унаслідок цього будуть визначені рівняння двох бісекторнох площин. Перше рівняння є рівняння тієї пари утворених перетином заданих площин вертикальних двогранних кутів, для точок $M\left(x,y,z\right)$ яких вирази $A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1$ і $A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2$ мають однакові знаки, друге – для точок $M\left(x,y,z\right)$ яких знаки виразів $A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1$ і $A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2$ є різними. Отже, для обрання одного з цих двох рівнянь, треба визначити знаки виразів $A_1\cdot x_0+B_1\cdot y_0+C_1\cdot z_0+D_1$ і $A_2\cdot x_0+B_2\cdot y_0+C_2\cdot z_0+D_2$. Якщо знаки виявляться однаковими, то розв'язком задачі 9 буде перше рівняння, отримане при розв'язанні задачі 8, якщо різні – то друге.

Задача 10. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Пряму a відносно даної системи координат задано параметричними рівняннями виду (3.3), для яких виконано умову (3.2): $a:\ \begin{cases} x=x_0+m\cdot t\\ y=y_0+n\cdot t\\ z=z_0+k\cdot t\end{cases}$. Відомо, що точка A, яка прямій a не належить, відносно обраної системи координат має координати $\left(x_A,y_A,z_A\right)$. Скласти рівняння прямої l, що проходить через точку A перпендикулярно до прямої a.

Розв'язання. Зрозуміло, що, задачу 10 можна розв'язати за зразком розв'язання задачі про знаходження відстані від точки до прямої. У такому випадку можна знайти координати точки A_0 - основи перпендикуляра, проведеного з точки A до прямої a, і скласти шукане рівняння прямої l як рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Але можна прийняти до уваги й той факт, що пряма l є прямою перетину площини α_1, яка містить точку A і пряму a, і площини α_2, яка проходить через точку A перпендикулярно до прямої a (рис. 4.14).

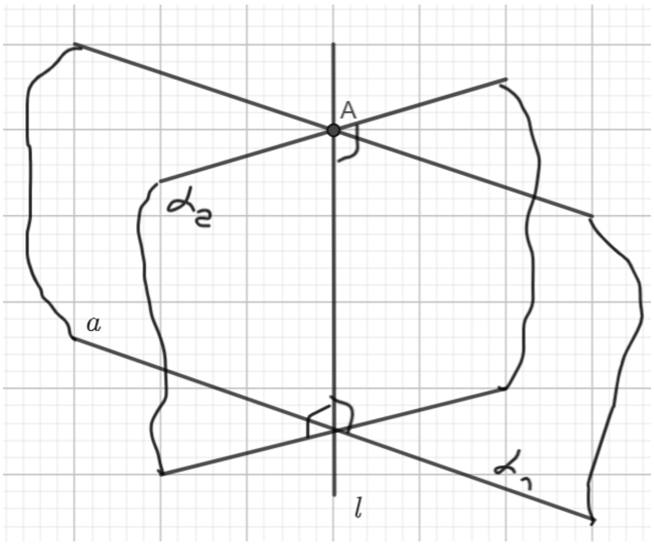

Рис. 4.14.

Задані умовою задачі параметричні рівняння прямої a без будь-яких обчислень дозволяють вказати координати $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ точки M_0, що цій прямій належить, і координати $\left(m, n, k\right)_E$ її спрямовуючого вектора $\vec{u}$. Рівняння площини α_1 можна скласти як рівняння площини, що проходить, припустимо, через точку M_0 паралельно до неколінеарних між собою векторів $\vec{u}$ і $\overrightarrow{M_0 A}\left(x_A - x_0, y_A - y_0, z_A - z_0\right)_E$. У підсумку, будемо мати $\alpha_1 : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_A - x_0 & y_A - y_0 & z_A - z_0 \\ m & n & k \end{vmatrix} = 0$. Рівняння площини α_2 варто скласти як рівняння площини, що проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\vec{u}\left(m, n, k\right)_E$: $\alpha_2 \colon m \cdot (x - x_A) + n \cdot (y - y_A) + k \cdot (z - z_A) = 0$. Отже,

$$l:\begin{cases}\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_A-x_0 & y_A-y_0 & z_A-z_0 \\ m & n & k \end{vmatrix}=0 \\ m\cdot(x-x_A)+n\cdot(y-y_A)+k\cdot(z-z_A)=0 \end{cases}.$$

4.7 Приклади розв'язків типових практичних завдань

Задача 4.1. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Скласти рівняння площини σ, яка пророходить через точки $A\left(-1,2,3\right)$ і $B\left(4,-1,2\right)$ перпендикулярно до площини $\alpha:\ x+y+z-4=0$.

Розв'язання. У геометрії тривимірного евклідового простору, якщо одна площина є перпендикулярною до іншої, то вона містить пряму, перпендикулярну до цієї іншої площини. Звідси випливає, що будь-який вектор, перпендикулярний до площини α, є паралельним до площини σ. За умови задачі, площину α задано загальним рівнянням відносно прямокутної декартової системи координат. Отже, відносно базису E обраної системи координат, координати нормального вектора $\overrightarrow{N}$ до площини α є відомими: $\overrightarrow{N}\left(1,1,1\right)_E$. З іншого боку, вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати $\left(4+1,-1-2,2-3\right)_E=\left(5,-3,-1\right)_E$, вони не є пропорційними до координат вектора $\overrightarrow{N}$, вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{N}$ не є колінеарними. Це означає, що шукане рівняння площини σ можна скласти як рівняння площини, що проходить, наприклад, через точку A паралельно до векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{N}$.
$\sigma:\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ 5 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$. Після розкриття визначника і зведення подібних доданків будемо мати $\sigma:\ x+3\cdot y-4\cdot z+7=0$.

Задача 4.2. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Площину α відносно даної системи координат задано загальним рівнянням $x-2\cdot y+2\cdot z+15=0$. Відносно даної системи координат визначити координати точки A, яка належить координатній осі Oz і є рівновіддаленою від початку відліку O і від площини α.

Розв'язання. Якщо точка A належить координатній осі Oz, то відносно обраної системи координат вона має координати $\left(0,0,z_A\right)$, де z_A - певне дійсне число. Зрозуміло, що при цьому відстань від точки A до початку відліку O складає $\left|z_A\right|$. Відстань від точки A до площини α визначимо згідно формули (4.7). Будемо мати: $\left|z_A\right|=\dfrac{\left|2\cdot z_A+15\right|}{\sqrt{1+4+4}}$ або $3\cdot\left|z_A\right|=\left|2\cdot z_A+15\right|$,

$\left[\begin{array}{l}3\cdot z_A=2\cdot z_A+15\\ 3\cdot z_A=-2\,z_A-15\end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l}z_A=15\\ z_A=-3\end{array}\right.$. Отже, існує дві точки A, що задовольняють умови задачі. A_1 і A_2: $A_1\left(0,0,15\right)$, $A_2\left(0,0,-3\right)$.

Задача 4.3. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Площину α відносно даної системи координат задано загальним рівнянням $6\cdot x+3\cdot y-2\cdot z+13=0$. Скласти рівняння площини σ, яка є паралельною до площини α і знаходиться від неї на відстані у 7 одиниць.

Розв'язання. Відповідно до загальних теоретичних положень, будемо шукати рівняння площини σ у виді $6\cdot x+3\cdot y-2\cdot z+D=0$. Згідно формули (4.8), відстань $\rho(\alpha,\sigma)$ між паралельними площинами α і σ визначається формулою $\rho(\alpha,\sigma)=\dfrac{\left|D-13\right|}{\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}}$. Отже, для знаходження рівняння площини σ, фактично, для знаходження відповідного значення параметра D, достатньо розвязати рівняння $\dfrac{\left|D-13\right|}{\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}}=7$ або $\left|D-13\right|=49$.

Звідси, $\left[\begin{array}{l} D-13=49 \\ D-13=-49 \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} D=62 \\ D=-36 \end{array}\right.$. У підсумку, як воно цілком зрозуміло з геометричного змісту, площин σ, що задовольняють умову даної задачі, існує дві (вони лежать по різні сторони від площини α), відносно обраної системи координат ці площини задаються наступними загальними рівняннями: $\sigma_1 : 6\cdot x+3\cdot y-2\cdot z+62=0$, $\sigma_2 : 6\cdot x+3\cdot y-2\cdot z-36=0$.

Задача 4.4. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відомо, що площина α_1 проходить через точку $A(-5,16,12)$ і містить координатну вісь Ox, площина α_2 проходить через ту ж саму точку і містить координатну вісь Oy. Визначити величину кута між площинами α_1 і α_2.

Розв'язання. Умови задачі дозволяють знайти відносно обраної системи координат рівняння площин α_1 і α_2. З того, що площина α_1 містить координатну вісь Ox, випливає, що у загальному рівнянні цієї площини коефіцієнт при змінній x та вільний член дорівнюють нулю, це рівняння є рівнянням виду $B_1\cdot y+C_1\cdot z=0$.Точка A належить площині α_1, отже, вірною є рівність $16\cdot B_1+12\cdot C_1=0$. Коефіцієнти загального рівняння площини відносно прямокутної декартової системи координат (взагалі, відносно довільної афінної системи координат) є визначеними з точністю до постійного, відмінного від нуля, множника. Отже, у отриманій рівності, у якості значень коефіцієнтів B_1 і C_1 можна прийняти будь-які два дійсних числа, які не дорівнюють нулю і перетворюють дану рівність на тотожність. Зрозуміло, що зручніше за все обрати цілі, взаємно прості числа. Нехай $B_1=3$, $C_1=-4$. ($16\cdot B_1+12\cdot C_1=0 \Leftrightarrow 4\cdot B_1+3\cdot C_1=0$, $4\cdot 3+3\cdot(-4)\equiv 0$). Рівняння площини α_1 буде мати вид $\alpha_1 : 3\cdot y-4\cdot z=0$.

Аналогічні міркування є вірними і для площини α_2. З того, що, за умови задачі, площина α_2 містить координатну вісь Oy, випливає, що відносно обраної системи координат її загальне рівняння має вид $\alpha_2 : A_2\cdot x+C_2\cdot z=0$. З того, що точка A належить площині α_2, маємо: $-5\cdot A_2+12\cdot C_2=0$, $-5\cdot 12+12\cdot 5\equiv 0$, $\alpha_2 : 12\cdot x+5\cdot z=0$.

За загальними рівняннями площин α_1 і α_2 відносно прямокутної декартової системи координат визначеними є координати відносно базису E цієї системи координат нормальних векторів до цих площин: $\overrightarrow{N_1}\left(0,3,-4\right)_E$, $\overrightarrow{N_1}\perp\alpha_1$, $\overrightarrow{N_2}\left(12,0,5\right)_E$, $\overrightarrow{N_2}\perp\alpha_2$. Величину кута між площинами α_1 і α_2 знаходимо за формулою (4.9):

$$\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\arccos\frac{\left|\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}\right|}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N_2}\right|}=\arccos\frac{\left|0\cdot12+3\cdot0+(-4)\cdot5\right|}{\sqrt{3+(-4)}\cdot\sqrt{12+5}}=\arccos\frac{4}{13}\ .$$

Задача 4.5. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Сферу S відносно даної системи координат задано рівнянням $S:\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=24$. Скласти рівняння дотичної площини α до сфери S у точці $M_0\left(0,1,3\right)$.

Розв'язання. Перш за все, перевіримо, чи належить задана точка M_0 заданій сфері S, чи не належить. Унаслідок підстановки координат точки M_0 у ліву частину рівняння сфери S отримаємо:

$$(-2)^2+(1-3)^2+(3+1)^2=4+4+16=24.$$

$24\equiv24$, отже, $M_0\in S$. У геометрії тривимірного евклідового простору площина, дотична до сфери, проходить через точку дотику перпендикулярно радіусу сфери, проведеному у цю точку. Центр Q заданої сфери відносно обраної системи координат має координати $\left(2,3,-1\right)$. Отже, вектор $\overrightarrow{QM_0}$ для дотичної площини α є нормальним вектором, його координати відносно базису E обраної системи координат складають $\left(-2,-2,4\right)_E$. Шукане рівняння площини α, як рівняння площини з нормальним вектором $\overrightarrow{QM_0}$, що проходить через точку M_0, має вид $(-2)\cdot x-2\cdot(y-1)+4\cdot(z-3)=0$ або $x+y-2\cdot z+5=0$.

Задача 4.6. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площину α задано загальним рівнянням $2\cdot x-3\cdot y+5\cdot z+5=0$. Записати нормальне рівняння площини α відносно обраної системи координат. Вказати відстань від початку відліку до площини α.

Розв'язання. Відповідно до загальнотеоретичних положень, для заданого загального рівняння площини α треба обчислити значення квадратного кореня із суми квадратів коефіцієнтів при невідомих. Будемо мати: $\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{38}$. У заданому рівнянні площини α вільний член є додатним. Це означає, що, для визначення нормального рівняння площини α, обидві частини її загального рівняння требо поділити на число $\left(-\sqrt{38}\right)$. У підсумку, будемо мати: $\frac{-2}{\sqrt{38}}\cdot x+\frac{3}{\sqrt{38}}\cdot y+\frac{-5}{\sqrt{38}}\cdot z-\frac{5}{\sqrt{38}}=0$. Отримане рівняння і є нормальним рівнянням площини α. Відстань від початку відліку до площини α дорівнює $\frac{5}{\sqrt{38}}$ одиниць.

Задача 4.7. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно даної системи координат прямі l_1 і l_2 задано канонічними рівняннями: $l_1:\ \frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{7}=\frac{z-2}{8}$, $l_2:\ \frac{x+1}{-8}=\frac{y-5}{11}=\frac{z+11}{7}$. Знайти величину кута між прямими l_1 і l_2.

Розв'язання. Із канонічних рівнянь прямих l_1 і l_2 відомими відносно базису E є координати спрямовуючих векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$ цих прямих : вектор $\overrightarrow{u_1}\left(2,7,8\right)_E$ є спрямовуючим вектором до прямої l_1, вектор $\overrightarrow{u_2}\left(-8,11,7\right)_E$ є спрямовуючим вектором до прямої l_2. Згідно формули (4.17), косинус кута між прямими l_1 і l_2 знаходиться за допомогою косинуса кута між векторами

$\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$: $\cos\left(l_1, l_2\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)\right| = \dfrac{\left|(-8)\cdot 2 + 11\cdot 7 + 7\cdot 8\right|}{\sqrt{2^2+7^2+8^2}\cdot\sqrt{(-8)^2+11^2+7^2}} =$

$= \dfrac{117}{\sqrt{117}\cdot\sqrt{234}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Звідси випливає, що $\left(l_1, l_2\right) = 45^\circ$.

Задача 4.8. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом $E: \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Відносно даної системи координат прямі l_1 і l_2 задано канонічними рівняннями $l_1: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{2}$, $l_2: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{3}$. Знайти відстань між прямими l_1 і l_2.

Розв'язання. Із умови задачі для прямих l_1 і l_2 відомими є координати відносно базису E спрямовуючих векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$: вектор $\overrightarrow{u_1}\left(1,-1,2\right)_E$ є спрямовуючим вектором до прямої l_1, вектор $\overrightarrow{u_2}\left(-1,2,3\right)_E$ - спрямовуючим вектором до прямої l_2. Відомо також, що точка M_1 належить прямій l_1: $M_1\left(3,1,2\right)\in l_1$, точка M_2 є точкою прямої l_2: $M_2\left(0,2,0\right)\in l_2$. Координати векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$ не є пропорційними, отже, прямі l_1 і l_2 не співпадають і не є паралельними. У підсумку, можливими залишаються два варіанта взаємнго розташування прямих l_1 і l_2: або вони перетинаються, тобто, мають одну єдину спільну точку, або є мимобіжними. Якщо прямі перетинаються у одній точці, то відстань між ними дорівнює нулю і нічого обчислювати не потрібно.

Прямі будуть перетинатися у одній точці тоді та тільку тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$ будуть компланарними. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ відносно базису E має координати $\left(-3,1,-2\right)_E$. Отже, для встановлення факту компланарності чи не компланарності цих векторів, треба обчислити визначник Δ, складений з їх координат:

$\Delta=\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=9-2-4+2+12-3=14$. $\Delta\neq 0$, це означає, що вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ не є компланарними, прямі l_1 і l_2 є мимобіжними. У такому випадку відстань між прямими l_1 і l_2 можна визначити за формулою (4.5), як висоту паралелепіпеда, побудованого на представниках векторів $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, відкладених від однієї точки, проведену до грані, побудованої на представниках векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$. В силу обрання у просторі саме прямокутної декартової системи координат, об’єм такого паралелепіпеда дорівнює знайденому значенню визначника Δ. Необхідну площу основи знайдемо як модуль векторного добутку векторів $\overrightarrow{u_1}$ і $\overrightarrow{u_2}$:

$$\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \left(\vec{k}\right) \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\overrightarrow{\left(-7,-5,1\right)},$$

$\left|\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2}\right|=\sqrt{(-7)^2+(-5)^2+1^2}=\sqrt{75}=5\cdot\sqrt{3}$. Отже, шукана відстань $\rho(l_1,l_2)$ між мимобіжними прямими l_1 і l_2 складає $\dfrac{14}{5\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{14\cdot\sqrt{3}}{15}$.

Задача 4.9. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E . Відносно даної системи координат пряму l задано канонічними рівняннями l : $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$, площину α - загальним рівнянням α: $4\cdot x+2\cdot y+2\cdot z-5=0$. Визначити величину кута між прямою l і площиною α.

Розв'язання. За умови задачі, виходячи з геометричного змісту відносно прямокутної декартової системи координат коефіцієнтів канонічних рівнянь прямої і загального рівняння площини, для прямої l відомими є координати відносно базису E спрямовуючого вектора $\vec{u}$: $\vec{u}\left(1,-2,2\right)_E$, для площини α - координати нормального вектора $\overrightarrow{N}$: $\overrightarrow{N}\left(4,2,2\right)_E$. Базис E обраної системи координат є ортонормованим, отже, можна знайти косинус кута між векторами $\vec{u}$ і $\overrightarrow{N}$:

$$\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{N}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{N}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\overrightarrow{N}\right|}=\frac{1\cdot4-2\cdot2+2\cdot2}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{16+4+4}}=\frac{\sqrt{6}}{9}.$$

Отримане число є додатним, отже, згідно формул (4.19) і (4.20), $\left(l,\alpha\right)=\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{9}$.

Задача 4.10. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно даної системи координат пряму l задано канонічними рівняннями $l:\ \frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$, площину α - загальним рівнянням виду $\alpha:\ A\cdot x+B\cdot y+6\cdot z-7=0$. Знайти значення параметрів A і B, при яких площина α буде перпендикулярною до прямої l.

Розв'язання. За умови задачі, виходячи з геометричного змісту відносно прямокутної декартової системи координат коефіцієнтів канонічних рівнянь прямої і загального рівняння площини, для прямої l відомими є координати відносно базису E спрямовуючого вектора $\vec{u}:\ \vec{u}\left(2,-4,3\right)_E$, для площини α - координати нормального вектора $\overrightarrow{N}:\ \overrightarrow{N}\left(A,B,6\right)_E$. Пряма l буде перпендикулярною до площини α тоді та тільки тоді, коли вектори $\vec{u}$ і $\overrightarrow{N}$ будуть колінеарними, тобто, відповідні координати векторів $\vec{u}$ і $\overrightarrow{N}$ будуть пропорційними: $\frac{A}{2}=\frac{B}{-4}=\frac{6}{3}$. Отже, вірними повинні бути рівності $\frac{A}{2}=2$, $\frac{B}{-4}=2$ або $A=4$, $B=-8$. Тоді відповідне рівняння площини α має вид $\alpha:\ 4\cdot x-8\cdot y+6\cdot z-7=0$.

Задача 4.11. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно даної системи координат площину α задано загальним рівнянням $\alpha: 2\cdot x-3\cdot y+3\cdot z-22=0$. Задані також координти точок A і B: $A\left(3,-4,7\right)$, $B\left(5,7,17\right)$. Знайти координати такої точки C площини α, сума відстаней від якої до точок A і B є найменшою.

Розв'язання. Перш за все, з'ясуємо характер розташування заданих точок A і B відносно заданої площини α. Для точки A маємо: $2\cdot 3-3\cdot(-4)+3\cdot 7-22=17$, $17>0$, отже, точка A не належить площині α. Аналогічно, для точки B, $2\cdot 5-3\cdot 7+3\cdot 17-22=18$, $18>0$, точка B також не належить площині α, в силу того, що обидва отримані числові значення мають однакові знаки, є додатними, точки A і B лежать по одну сторону відносно площини α. У евклідовій геометрії відстань від будь-якої точки P простору до будь-якої точки M площини α дорівнює відстані від точки P', симетричної до точки P відносно площини α, до точки M. Отже, якщо точка A' є симетричною до точки A відносно площини α, а точка M є довільною точкою площини α, то $AM+BM=A'M+BM$. Але, якщо точки A і B лежать по одну сторону відносно площини α, то точки A' і B відносно площини α знаходяться вже по різні сторони, відрізок $A'B$ перетинає площину α у певній точці C. Така точка C і буде шуканою, бо у евклідовій геометрії довжина відрізка з кінцями у певних точках завжди є меншою за довжину ламаної з кінцями у цих точках.

Визначимо, спочатку, координати точки A'. В силу відповідного геометричного змісту коефіцієнтів при невідомих у загальному рівнянні площини відносно прямокутної декартової системи координат, із умови даної задачі для площини α відомими є координати нормального вектора $\overrightarrow{N}$: $\overrightarrow{N}\left(2,-3,3\right)_E$. Запишемо параметричні рівняння прямої AA' як рівняння прямої, що проходить через точку A колінеарно до вектора $\overrightarrow{N}$.

AA' : $\begin{cases} x=3+2\cdot t \\ y=-4-3\cdot t \\ z=7+3\cdot t \end{cases}$. Координати точки A_0 перетину прямої AA' з площиною α знайдемо унаслідок розв'язання наступної системи рівняннь: $\begin{cases} x=3+2\cdot t \\ y=-4-3\cdot t \\ z=7+3\cdot t \\ 2\cdot x-3\cdot y+3\cdot z-22=0 \end{cases}$. Після підстановки виразів змінних x, y, z через параметр t із перших трьох рівнянь у третє рівняння системи, будемо мати $22\cdot t=-17$, $t=-\frac{17}{22}$. Звідси знаходимо координати x_0 , y_0 , z_0 точки A_0 : $x_0=\frac{16}{11}$, $y_0=-\frac{37}{22}$, $z_0=\frac{103}{22}$. Тепер, виходячи з того, що точка A_0 є серединою відрізка AA' , можна визначити координати x' , y' , z' точки A' : $x'=2\cdot x_0-x_A$, $x'=-\frac{1}{11}$, $y'=2\cdot y_0-y_A$, $y'=\frac{7}{11}$, $z'=2\cdot z_0-z_A$, $z'=\frac{26}{11}$,

$A'\left(-\frac{1}{11},\frac{7}{11},\frac{26}{11}\right)$. Вектор $\overrightarrow{BA'}$ тоді має координати $\overrightarrow{BA'}\left(-\frac{56}{11},-\frac{70}{11},-\frac{161}{11}\right)_E$, у якості спрямовуючого вектора прямої BA' можна обрати довільний ненульовий вектор, колінеарний до вектора $\overrightarrow{BA'}$. Як найпростіший варіант, оберемо вектор $\vec{u}$, $\vec{u}(8,10,23)_E$. Запишемо параметричні рівняння прямої BA' як рівняння прямої, що проходить через точку B колінеарно до вектора $\vec{u}$. BA' : $\begin{cases} x=5+8\cdot t \\ y=7+10\cdot t \\ z=17+23\cdot t \end{cases}$. Унаслідок розв'язку відповідної системи рівнянь, знайдемо координати шуканої точки C перетину прямої BA' з площиною α:

$$\begin{cases} x=5+8\cdot t \\ y=7+10\cdot t \\ z=17+23\cdot t \\ 2\cdot x-3\cdot y+3\cdot z-22=0 \end{cases},\ 10+16\cdot t-21-30\cdot t+51+69\cdot t-22=0,$$

$$t=-\frac{18}{55},\ x_C=\frac{131}{55},\ y_C=\frac{41}{11},\ z_C=\frac{521}{55},\ C\left(2\frac{21}{55},3\frac{8}{11},9\frac{26}{55}\right).$$

Задача 4.12. У правильній чотирикутній піраміді $TABCD$ кут нахилу бічного ребра до основи дорівнює φ. Визначити величину кута між площинами AKC і TAB, якщо точка K є серединою ребра TB.

Розв'язання. Основу правильної чотирикутної піраміди складає квадрат $ABCD$. Позначимо через O точку перетину діагоналей цього квадрата. Відрізок TO є висотою даної піраміди, $\angle TAO = \angle TBO = \angle TCO = = \angle TDO = \varphi$.

Оберемо у тривимірному евклідовому просторі прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ так, що $\vec{i} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OA}$, вектор $\vec{k}$ є однаково спрямованим до вектора $\overrightarrow{OT}$. Відносно даної системи координат точка A буде мати координати $\left(0,1,0\right)$, точка B - координати $\left(1,0,0\right)$, точка C - координати $\left(0,-1,0\right)$, точка T - координати $\left(0,0,tg\varphi\right)$ ($OT = OB \cdot tg\varphi$). Координати точки K знайдемо як координати середини відрізка TB: $K\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \cdot tg\varphi\right)$. Відносно обраної системи оординат рівняння площини AKC доречно скласти як рівняння площини, що проходить через точки O, A, K. У підсумку, будемо мати: (AKC): $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \cdot tg\varphi \end{vmatrix} = 0$, $x \cdot tg\varphi - z = 0$. Вектор $\overrightarrow{N_1}\left(tg\varphi, 0, -1\right)_E$ є нормальним вектором площини (AKC). Рівняння площини (TAB) складемо як рівняння площини «у відрізках на осях». (TAB): $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{tg\varphi} = 1$. Загальне рівняння площини (TAB) тоді буде мати вигляд $x \cdot tg\varphi + y \cdot tg\varphi + z - tg\varphi = 0$, нормальний вектор $\overrightarrow{N_2}$ до площини (TAB) матиме координати $\overrightarrow{N_2}\left(tg\varphi, tg\varphi, 1\right)_E$.

$\cos\left(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}\right) = \dfrac{tg^2\varphi - 1}{\sqrt{tg^2\varphi + 1}\cdot\sqrt{2\cdot tg^2\varphi + 1}} = \dfrac{-\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi + 1}}$. Згідно формули , тоді величина кута між площинами (AKC) і (TAB) складає $\left((AKC),(TAB)\right) = \arccos\dfrac{|\cos 2\varphi|}{\sqrt{\sin^2\varphi + 1}}$.

4.8. Практичні завдання для самостійної роботи

1. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E . Записати рівняння площини, яка а) проходить через точку $M_0\left(2,3,-1\right)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{N}\left(1,2,-4\right)_E$; б) через початок відліку перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{N}\left(0,-3,4\right)_E$.

2. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову\ систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат задані координати вершин тетраедра $ABCD$: $A\left(-1,2,5\right), B\left(0,-4,5\right), C\left(-3,2,1\right)$, $D\left(1,2,4\right)$. Скласти рівняння площин, які проходять через вершину D і є перпендикулярними, відповідно, до прямих AB , BC , AC .

3. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E . Відносно даної системи координат наступні площини задані за допомогою загальних рівнянь:

а) $\alpha: x+2\cdot y+z-1=0$; б) $\alpha: 5\cdot x-3\cdot z+5=0$;

в) $\alpha: z+1=0$; г) $\alpha: x-3\cdot y+z-4=0$;

д) $\alpha: 3\cdot x-y+5\cdot z+1=0$; е) $\alpha: 5\cdot x-10\cdot y+10\cdot z-18=0$.

Для кожної з цих площин вказати координати нормального вектора.

4. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат задано координати $(2,6,-4)$ точки M, про яку відомо, що вона є основою перпендикуляра, проведеного з початку відліку до площини α. Скласти рівняння площини α.

5. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Площину α відносно даної системи координат задано загальним рівнянням. У наступних випадках знайти відстань від початку відліку до площини α, скласти рівняння прямої, що проходить через початок відліку перпендикулярно до площини α, скласти рівняння площини, що проходить через початок відліку паралельно до площини α:

а) $\alpha: 15\cdot x-10\cdot y+6\cdot z-190=0$; б) $\alpha: 2\cdot x-3\cdot y+5\cdot z-3=0$;

в) $\alpha: 4\cdot x+3\cdot y+12\cdot z+78=0$; г) $\alpha: 22\cdot x+4\cdot y-20\cdot z-45=0$;

д) $\alpha: 2\cdot x-3\cdot z+8=0$; е) $\alpha: 5\cdot x-3\cdot y+\sqrt{2}\cdot z+18=0$.

6. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є координати певної точки M і загальне рівняння певної площини α. У наступних випадках знайти відстань від точки M до площини α, скласти рівняння прямої, що проходить через точку M перпендикулярно до площини α, знайти координати ортогональної проєкції точки M на площину α, точки M', симетричної до точки M відносно площини α, скласти рівняння площини, що проходить через точку M паралельно до площини α, скласти рівняння площини, що проходить перпендикулярно до площини α через початок відліку і точку M:

а) $M\left(1,-2,2\right)$, $\alpha: 2\cdot x+y+2\cdot z-7=0$;

б) $M\left(-1,2,\sqrt{2}\right)$, $\alpha: 5\cdot x-3\cdot y+\sqrt{2}\cdot z+1=0$;

в) $M\left(3,1,-1\right)$, $\alpha: 22\cdot x+4\cdot y-20\cdot z-45=0$;

г) $M\left(4,3,-2\right)$, $\alpha: 3\cdot x-y+5\cdot z+1=0$;

д) $M\left(2,0,-\frac{1}{2}\right)$, $\alpha: 4\cdot x-4\cdot y+2\cdot z+17=0$;

е) $M\left(3,0,4\right)$, $\alpha: 2\cdot x+3\cdot y+8=0$.

7. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α і β задано загальними рівняннями. У кожному з наступних випадків перевірити, що задані площини α і β є паралельними, записати рівняння жмутка паралельних площин, якому ці площини належать,знайти відстань між площинами α і β, аналітичні умови, що визначають смугу між ними, рівняння прямої, що проходить через початок відліку перпендикулярно до кожної з них:

а) $\alpha: x-3\cdot y+2\cdot z+1=0$, $\beta: 2\cdot x-6\cdot y+4\cdot z+3=0$;

б) $\alpha: x-2\cdot y+2\cdot z-6=0$, $\beta: 5\cdot x-10\cdot y+10\cdot z-18=0$;

в) $\alpha: x-y+5\cdot z-54=0,\ \beta: x-y+5\cdot z+27=0;$

г) $\alpha: 2\cdot x-3\cdot y+6\cdot z-14=0,\ \beta: 4\cdot x-6\cdot y+12\cdot z-21=0;$

д) $\alpha: x-y+5\cdot z+27=0,\ \beta: x-y+5\cdot z+1=0;$

е) $\alpha: 2\cdot x+y-2\cdot z+33=0,\ \beta: 4\cdot x+2\cdot y-4\cdot z+33=0.$

8. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площину α задано загальним рівнянням. У кожному з наступних випадків записати рівняння жмутка паралельних площин, якому належить площина α, знайти рівняння таких площин даного жмутка, які знаходяться від площини α на заданій відстані ρ:

а) $\alpha: 11\cdot x-2\cdot y-10\cdot z-45=0,\ \rho=2;$

б) $\alpha: 2\cdot x-3\cdot y+3\cdot z-22=0,\ \rho=5;$

в) $\alpha: 3\cdot x-6\cdot y-2\cdot z+14=0,\ \rho=3;$

г) $\alpha: x-y+5\cdot z+1=0,\ \rho=7;$

д) $\alpha: 11\cdot x-2\cdot y-10\cdot z+15=0,\ \rho=10;$

е) $\alpha: 5\cdot x-10\cdot y+10\cdot z-18=0,\ \rho=8.$

9. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат задано координати точок A і B: $A(2,-1,3)$, $B(4,5,-3)$. Визначити аналітичні умови, що характеризують множину точок, рівновіддалених від точок A і B.

10. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α і

β задано загальними рівняннями $\alpha: x+2\cdot y-2\cdot z-1=0$, $\beta: 3\cdot x+5=0$. Знайти координати точки, яка лежить на координатній осі Oy і є рівновіддаленою від площин α і β.

11. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α і β задано загальними рівняннями $\alpha: 2\cdot x-y+z=0$, $\beta: 6\cdot x-y+7\cdot z-4=0$. Знайти рівняння площини, яка є перпендикулярною до прямої перетину площин α і β та знаходиться на відстані у $\sqrt{29}$ одиниць від початку відліку.

12. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є координати $(1,2,0)$ точки M та загальне рівняння площини α, $\alpha: 2\cdot x+y-4\cdot z+5=0$. Скласти рівняння площини, яка є паралельною до площини α і знаходиться від точки M на відстані у $\sqrt{21}$ одиниці.

13. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є координати точки $M: (7,-3,9)$ та загальні рівняння площин α і β. $\alpha: 3\cdot x-5\cdot y+z-4=0$, $\beta: x-y+3\cdot z+11=0$. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M перпендикулярно до площин α і β.

14. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α і β задано загальними рівняннями $\alpha: 2\cdot x-3\cdot y+4\cdot z-5=0$, $\beta: 2\cdot x+y-z+5=0$. Знайти координати точок, які належать прямій перетину площини α з координатною площиною Oxz і знаходяться на відстані у $\sqrt{6}$ одиниць від площини β.

15. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є загальні рівняння площин α, β і γ. α : $5\cdot x+11\cdot y-7\cdot z+4=0$, β : $4\cdot x-y+8\cdot z-12=0$, γ : $2\cdot x-4\cdot y+3\cdot z-8=0$. Знайти рівняння площини, що проходить через лінію перетину площин α і β перпендикулярно до площини γ.

16. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є загальні рівняння площин α і β:

а) α : $3\cdot x+y-2\cdot z-6=0$, β: $x-2\cdot y+5\cdot z-1=0$;

б) α : $x-4\cdot y+2\cdot z-3=0$, β: $3\cdot x+y-z-1=0$.

Серед рівнянь площин, що належать жмутку площин, визначеному площинами α і β, знайти рівняння площин, перпендикулярних, відповідно, до основних площин α і β.

17. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є координати точки M : $(4,-3,1)$ та загальні рівняння площин α і β. α: $3\cdot x-5\cdot y+z-4=0$, β : $x-y+3\cdot z+11=0$. Серед рівнянь площин, що належать жмутку площин, який визначено площинами α і β, знайти рівняння двох взаємно перпендикулярних площин, одна з яких проходить через точку M.

18. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є координати точок M_1 і M_2 : $M_1\left(-1,0,1\right)$, $M_2\left(1,1,2\right)$. Скласти рівняння площини, що проходить через точки M_1 і M_2 та знаходиться на відстані у $\dfrac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$ одиниці від початку відліку.

19. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α і β задано загальними рівняннями α : $2\cdot x+y-z-15=0$, β : $x-3\cdot y+7\cdot z+36=0$. Знайти рівняння площин, які проходять через пряму перетину площин α і β та знаходяться на відстані у 3 одиниці від початку відліку.

20. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є загальні рівняння площин α , β , γ і σ . $\alpha : 5\cdot x+y-4\cdot z+2=0$, $\beta : x-3\cdot y+2\cdot z-1=0$, $\gamma : 5\cdot x+y-4\cdot z+3=0$, $\sigma : 2\cdot x+2\cdot y+z+13=0$. Знайти рівняння площини, що належить зв'язці площин, визначеній площинами α , β і γ , та проходить через початок відліку O перпендикулярно до площини σ .

21. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α і β задані загальними рівняннями

а) $\alpha : 2\cdot x+y-z-15=0,\ \beta : x-3\cdot y+7\cdot z+36=0;$

б) $\alpha : 4\cdot x-5\cdot y+3\cdot z-1=0$, β : $x-4\cdot y-z+9=0;$

в) $\alpha: 3\cdot x-y+2\cdot z+15=0,\ \beta: 5\cdot x+9\cdot y-3\cdot z-1=0;$

г) $\alpha: 6\cdot x+2\cdot y-4\cdot z+17=0,\ \beta: 9\cdot x+3\cdot y-6\cdot z-4=0;$

д) $\alpha: 16\cdot x+8\cdot y+2\cdot z+1=0,\ \beta: 2\cdot x-2\cdot y+z+5=0;$

є) $\alpha: 2\cdot x-y+\sqrt{2}\cdot z-5=0,\ \beta$ - координатна площина Oyz;

е) $\alpha: 2\cdot x+5\cdot y+4\cdot z+15=0,\ \beta: 6\cdot x-3\cdot z+2=0.$

Визначити величину кута між площинами α і β.

22. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є загальні рівняння площин α, β, γ і σ. $\alpha: 2\cdot x-2\cdot y+z+2=0$, $\beta: x-y+z-5=0$, $\gamma: 8\cdot x+4\cdot y+z-16=0$, $\sigma: 4\cdot x+3\cdot y=0$. Площини α, β, γ і σ містять грані певного тетраедра. Знайти косинус того внутрішнього двогранного кута даного тетраедра, ребром якого є лінія перетину площин α і β.

23. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α і β задані загальними рівняннями

а) $\alpha: 16\cdot x+8\cdot y+2\cdot z+1=0,\ \beta: 2\cdot x-2\cdot y+z+5=0;$

б) $\alpha: 3\cdot x-y+7\cdot z-4=0,\ \beta: 5\cdot x+3\cdot y-5\cdot z+2=0;$

в) $\alpha: 2\cdot x+5\cdot y+4\cdot z+15=0,\ \beta: 6\cdot x-3\cdot z+2=0.$

Скласти рівняння площин, що ділять навпіл двогранні кути між площинами α і β.

24. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α і β задано загальними рівняннями $\alpha: 3\cdot x+5\cdot y-4\cdot z+1=0, \beta: x-z-5=0$. Скласти рівняння бісекторної площини тієї пари вертикальних двогранних кутів, утворених при перетині площин α і β, якій належить початок відліку O.

25. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат задані координати точок A і B: $A(0,0,1)$, $B(3,0,0)$. Скласти рівняння площини, що проходить через точки A і B та утворює кут у $\frac{\pi}{3}$ радіан з координатною площиною Oxy.

26. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площину α задано загальним рівнянням $\alpha: 2\cdot x+y-\sqrt{5}\cdot z-7=0$. Скласти рівняння площини, яка містить координатну вісь Oz і утворює з площиною α кут у $\frac{\pi}{3}$ радіан.

27. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є загальні рівняння площин α, β і γ. $\alpha: x+5\cdot y+z=0$, $\beta: x-z+4=0$, $\gamma: x-4\cdot y-8\cdot z+12=0$. Скласти рівняння площини, що проходить через лінію перетину площин α і β та утворює з площиною γ кут у $\frac{\pi}{4}$ радіан.

28. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є загальні рівняння площин α і β. $\alpha: 5\cdot x-2\cdot y+4\cdot z-3=0$, $\beta: x-4\cdot y-8\cdot z+12=0$. Скласти рівняння площини, що проходить через початок відліку перпендикулярно до площини α, а з площиною β утворює кут у $45°$.

29. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є загальне рівняння площини α, $\alpha: 2\cdot x-2\cdot y-z+9=0$, і рівняння сфери S. У кожному з наступних випадків визначити характер розташування сфери S відносно площини α:

а) $S: (x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=4$, б) $S: (x+2)^2+y^2+(z-3)^2=9$,

в) $S: (x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=4$, г) $S: (x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=5$,

д) $S: (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=24$, е) $S: (x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=16$.

30. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є координати точки M_0, $M_0\left(2,-3,6\right)$, і рівняння сфери S, $S: x^2+y^2+z^2=49$. Скласти рівняння дотичної площини до сфери S у точці M_0.

31. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є загальні рівняння площин α і β, $\alpha: x+28\cdot y-2\cdot z+17=0$, $\beta: 5\cdot x+8\cdot y-z+1=0$, і рівняння сфери S, $S: x^2+y^2+z^2=1$. Скласти рівняння площин, що проходять через пряму перетину площин α і β та є дотичними площинами до сфери S.

32. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є загальне рівняння площини α, $\alpha: 6\cdot x+3\cdot y+2\cdot z=0$, і рівняння сфери S, $S: x^2+(y+1)^2+(z+2)^2=1$. Скласти рівняння площин, що дотикаються до сфери S і є паралельними до площини α.

33. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є загальні рівняння площин α і β, $\alpha: 2\cdot x-4\cdot y-3\cdot z+21=0$, $\beta: 5\cdot x-2\cdot z=0$. Скласти рівняння сфери з центром на координатній осі Ox, яка дотикається кожної з площин α і β.

34. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат заданим є загальне рівняння площини α, $\alpha: 2\cdot x+3\cdot y-6\cdot z-4=0$. Знайти центр сфери, обмежаної координатними площинами і площиною α.

35. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є загальні рівняння площин α і β, $\alpha: x-5\cdot y+4\cdot z+1=0$, $\beta: 2\cdot x-y+z+5=0$. З'ясувати, які з точок $A(0,0,1)$, $B(0,0,-10)$, $C(1,0,-2)$, $D(2,1,0)$, $G(1,1,1)$ належать внутрішній області тупих кутів, утворених при перетині площин α і β.

36. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат заданим є загальне рівняння площини α, $\alpha: 2\cdot x-3\cdot y+4\cdot z+18=0$. У тетраедр, обмежений площинами координат і площиною α, вписано куб так, що одна з його вершин знаходиться у початку відліку, три ребра, які виходять з цієї вершини, належать координатним осям, а вершина, протилежна до початку відліку, лежить на площині α. Визначити довжину ребра кубу.

37. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат заданим є загальне рівняння площини α, $\alpha: 2\cdot x+3\cdot y+6\cdot z-18=0$. Визначити об'єм тетраедра, обмеженого координатними площинами і площиною α.

38. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат заданим є загальне рівняння площини α, $\alpha: 2\cdot x+3\cdot y+6\cdot z-12=0$. Обчислити косинуси внутрішніх двугранних кутів тетраедра, утвореного координатними площинами і площиною α.

39. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат заданими є загальні рівняння наступних площин:

а) $\alpha_1: 3\cdot x+4\cdot y-5\cdot z+40=0$; б) $\alpha_2: 2\cdot x-y+2\cdot z-15=0$;

в) $\alpha_3: x+y-4\cdot z+3=0$; г) $\alpha_4: 7\cdot x+z-10=0$;

д) $\alpha_5: z+5=0$; е) $\alpha_6: 5\cdot x-3\cdot y+4\cdot z=0$.

Записати нормальні рівняння цих площин відносно обраної системи координат.

40. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є координати точки M і рівняння прямої m . Для кожного з наступних варіантів скласти рівняння площини, яка проходить через точку M перпендикулярно до прямої m.

1) $M\left(-3,2,1\right)$, $m: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-2}$;

2) $M\left(-1,0,0\right)$, $m: \begin{cases} 3\cdot x-2\cdot y+7\cdot z-4=0 \\ x+3\cdot y+2\cdot z-11=0 \end{cases}$;

3) $M\left(1,-3,4\right)$, $m: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{5}$;

4) $M\left(1,-2,1\right)$, $m: \begin{cases} 2\cdot x-y+3\cdot z-1=0 \\ x+y-z+5=0 \end{cases}$;

5) $M\left(2,3,-1\right)$, $m: \begin{cases} x=-2\cdot t \\ y=-5+3\cdot t; \\ z=4 \end{cases}$

6) $M\left(1,0,0\right)$, $m: \begin{cases} x-3\cdot y+z=0 \\ x+y-z+4=0 \end{cases}$.

41. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат заданими є координати точки M і рівняння прямої m. Скласти рівняння прямої, що містить перпендикуляр, проведений з точки M до прямої m , знайти координати ортогональної проєкції точки M на пряму m , точки M' , симетричної до точки M відносно прямої m, відстань від точки M до прямої m.

1) $M\left(2,3,1\right)$, $m:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$; 2) $M\left(6,1,-5\right)$, $m:\ \frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-1}$;

3) $M\left(2,3,-1\right)$, $m:\ \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z}{3}$;

4) $M\left(1,5,-1\right)$, $m:\begin{cases}2\cdot x-y+3\cdot z+4=0\\ -x+2\cdot y+2\cdot z-2=0\end{cases}$;

5) $M\left(1,5,1\right)$, $m:\ \begin{cases}x-y-z+1=0\\ 2\cdot x+y+4\cdot z=0\end{cases}$;

6) $M\left(1,0,0\right)$, $m:\ \frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}$.

42. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат задано координати точки A : $A\left(1,0,-1\right)$, та рівняння прямих m і n : $m:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{1}$, $n:\ \frac{x}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{2}$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку A, перетинає пряму n і є перпендикулярною до прямої m.

43. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат задані рівняння мимобіжних прямих m і n . У кожному із вказаних варіантів перевірити, що прямі m і n насправді є мимобіжними, знайти відстань між ними та скласти рівняння їх спільного перпендикуляру.

1) $m:\ \frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$, $n:\ \frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$;

2) $m:\ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-5}{4}$, $\ n:\ \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{4}$;

3) $m:\ \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$, $\ n:\ \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$;

4) $m:\ \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$, $\ n:\ \dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+2}{-3}$;

5) $m:\begin{cases} x=1+2\cdot t \\ y=-6\cdot t \\ z=-t \end{cases}$, $\ n:\begin{cases} x=-2\cdot t \\ y=-5+3\cdot t \\ z=4 \end{cases}$;

5) $m:\ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$, $\ n:\ \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{0}$;

5) $m:\begin{cases} 2\cdot x+3\cdot y=0 \\ x+z-8=0 \end{cases}$, $\ n:\begin{cases} 2\cdot x+3\cdot z-7=0 \\ z-4=0 \end{cases}$;

6) $m:\begin{cases} x=3+t \\ y=-1+2\cdot t, \\ z=4 \end{cases}$ $\ n:\begin{cases} x-3\cdot y+z=0 \\ x+y-z+4=0 \end{cases}$.

44. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат задані рівняння прямих m і n. У кожному із вказаних варіантів знайти величину кута між ними.

1) $m:\ \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{6}=\dfrac{z-5}{2}$, $\ n:\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{9}=\dfrac{z+1}{6}$;

2) $m:\begin{cases} 3\cdot x-4\cdot y-2\cdot z=0 \\ 2\cdot x+y-2\cdot z=0 \end{cases}$, $\ n:\begin{cases} 4\cdot x+y-6\cdot z-2=0 \\ y-3\cdot z+2=0 \end{cases}$;

3) $m:\begin{cases} x-2\cdot y+z-11=0 \\ 2\cdot x+y-3\cdot z+4=0 \end{cases}$, $n:\begin{cases} x-2\cdot y+3\cdot z-13=0 \\ x-y+z-17=0 \end{cases}$;

4) $m:\begin{cases} y+1=0 \\ x+2\cdot z-1=0 \end{cases}$, $n:\begin{cases} x=0 \\ z-1=0 \end{cases}$;

5) $m:\begin{cases} 5\cdot x-6\cdot y+2\cdot z+21=0 \\ x-z+3=0 \end{cases}$, $n:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{9}=\dfrac{z+1}{6}$;

6) $m:\begin{cases} x=3+t \\ y=-1+2\cdot t, \\ z=4 \end{cases}$ $n:\dfrac{x}{12}=\dfrac{y-7}{9}=\dfrac{z+3}{20}$.

45. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є координати наступних точок: $A(3,-1,0)$, $B(0,-7,3)$, $C(-2,1,-1)$, $D(3,2,6)$. Перевірити, що точки A, B, C, D не належать одній площині. Визначити величини кутів, утворених прямими, що містять протилежні ребра тетраедра $ABCD$.

46. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат заданими є координати точки M і рівняння прямих m і n. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M і є перпендикулярною до кожної з прямих m і n у випадку, коли: $M(1,5,-1)$, $m:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{-1}$, $n:\begin{cases} x=2-3\cdot t \\ y=-1+t \\ z=-2\cdot t \end{cases}$.

47. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α і β задані загальними рівняннями α : $4\cdot x+y-3\cdot z+13=0$, β: $x-2\cdot y+z-11=0$. Скласти рівняння площини, яка містить прямі, що проходять через задану точку $A\left(-3,2,5\right)$, відповідно, перпендикулярно до площин α і β.

48. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площину α задано загальним рівнянням. Задано також певні рівняння прямої m. Для кожного з наступних варіантів скласти рівняння площини, що орттогонально проєктує пряму m на площину α та рівняння ортогональної проєкції прямої m на дану площину.

1) α: $3\cdot x-y+z-4=0$, m: $\begin{cases} 2\cdot x-y+z-1=0 \\ x+y+2\cdot z+1=0 \end{cases}$;

2) α: $x-y+3\cdot z+8=0$, m: $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$;

3) α: $3\cdot x-y+z-1=0$, m: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{1}$;

4) α: $9\cdot x-7\cdot y+z-13=0$, m: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=t \\ z=3+2\cdot t \end{cases}$;

5) α: $3\cdot x-y+z-1=0$, m: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+2}{5}$;

6) $\alpha: 8\cdot x-2\cdot y+z-10=0,\ m: \begin{cases} x=-1+t \\ y=2-4\cdot t \\ z=3+5\cdot t \end{cases}.$

49. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат задано рівняння прямих $m_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{-1}=\dfrac{z}{1}$, $m_2: \begin{cases} x=-1+t \\ y=2+4\cdot t \\ z=2-t \end{cases}$, $m_3: \begin{cases} 2\cdot x-y+3\cdot z-1=0 \\ x-y-z+5=0 \end{cases}$. Скласти рівняння площин, що ортогонально проєктують задані прямі на координатні площини. Записати рівняння прямих-проєкцій.

50. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площину α задано загальним рівнянням. Задано також певні рівняння прямої m. Для кожного з наступних варіантів визначити величину кута між прямою m і площиною α.

1) $m: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+12}{3}=\dfrac{z-4}{6},\ \alpha: 6\cdot x+15\cdot y-10\cdot z=0;$

2) $m: \dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{2},\ \alpha: 4\cdot x+2\cdot y+2\cdot z-5=0;$

3) $m: \dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1},\ \alpha: 3\cdot x+5\cdot y-z-2=0;$

4) $m: \dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{4},\ \alpha: 3\cdot x-y+2\cdot z-5=0;$

5) $m:\begin{cases}3\cdot x+5\cdot y-7\cdot z+16=0\\2\cdot x-y+z-6=0\end{cases},\quad \alpha: 5\cdot x-z-4=0;$

6) $m:\begin{cases}x=5+6\cdot t\\y=1-3\cdot t\\z=2+t\end{cases},\quad \alpha: 7\cdot x+2\cdot y-3\cdot z+5=0.$

51. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є координати точок A і B та рівняння певної прямої m. У кожному з наступних випадків визначити координати точки, яка належить прямій m і є рівновіддаленою від точок A і B.

1) $A(3,11,4)$, $B(-5,-13,-2)$, $m:\begin{cases}x+2\cdot y+z-1=0\\3\cdot x-y+4\cdot z-29=0\end{cases};$

2) $A(-3,6,7)$, $B(1,2,9)$, $m:\begin{cases}x=4+2\cdot t\\y=1-t\\z=3+5\cdot t\end{cases};$

3) $A(-5,4,-3)$, $B(3,2,-1)$, пряма m співпадає з координатною віссю Oz.

52. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є координати точок A і B: $A(3,-4,-2)$, $B(7,-10,-14)$. Точка C є такою точкою координатної площини Oxy, сума відстаней від якої до точок A і B є найменшою можливою. Відносно обраної системи координат знайти координати точки C.

53. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є координати точок A і B : $A(5,2,-2)$, $B(15,1,-4)$. Точка C є такою точкою координатної площини Oyz, модуль різниці відстаней від якої до точок A і B є найбільшим можливим. Знайти координати точки C відносно даної системи координат.

54. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є координати точок A і B : $A(-2,3,4)$, $B(-3,3,2)$ і загальне рівняння площини α : $x+y+4\cdot z+1=0$. Точка C є такою точкою площини α , модуль різниці відстаней від якої до точок A і B є найбільшим можливим. Знайти координати точки C відносно даної системи координат.

55. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є координати точок A , B і C : $A(4,1,-2)$, $B(2,0,0)$, $C(-2,3,-5)$. Перевірити, що точки A , B і C не належать одній прямій. Скласти рівняння прямих, що містять висоти трикутника ABC .

56. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є координати точок A , B і C : $A(2,4,5)$, $B(-1,3,2)$, $C(4,-4,1)$. Перевірити, що точки A , B і C не належать одній прямій. Скласти рівняння прямої, що містить бісектрису AL трикутника ABC .

57. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат відомими є координати точок A, B, C і D: $A\left(1,-3,4\right)$, $B\left(0,1,-1\right)$, $C\left(-2,3,1\right)$, $D\left(5,3,4\right)$. Перевірити, що точки A, B, C і D не належать одній площині. Скласти рівняння прямої, що містить висоту DH піраміди $ABCD$.

58. Відомо, що ребро куба дорівнює одиниці. Знайти відстань від вершини куба до прямої, що містить ту діагональ даного куба, яка не проходить через дану вершину. Розв'язати дану задачу за методом координат.

59. У правильній чотирикутній піраміді $HABCD$ з основою $ABCD$ кут нахилу бічної грані до основи дорівнює β. Знайти кут φ між площинами (AKC) і (HAB), якщо точка K є серединою ребра HB. Розв'язати дану задачу за методом координат.

60. У правильній трикутній піраміді $HABC$ висота HD дорівнює h, сторона основи складає a. Визначити величину кута між площинами (AKC) і (HBC), якщо точка K є серединою ребра HB. Розв'язати дану задачу за методом координат.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Вказати, які з наступних рівнянь є рівняннями площини у тривимірному евклідовому просторі відносно афінної системи координат $Oxyz$:

а) $2\cdot x+3\cdot y+4=0$; г) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=2$

б) $x=3$; д) $x^2+y^2+4=1$;

в) $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$;   е) $y=x^2+2$

2. Вказати, які з наступних рівнянь є рівняннями прямих у тривимірному евклідовому просторі відносно афінної системи координат $Oxyz$:

а) $\begin{cases} x+2\cdot y+z-1=0 \\ 2\cdot x+3\cdot y+4=0 \end{cases}$;   д) $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$;   б) $x+y+z+1=0$;

е) $\begin{cases} x=4+2\cdot t \\ y=-t \\ z=3+5\cdot t \end{cases}$;   в) $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$;   г) $y=2\cdot x-7$.

3. Вказати, які з наступних рівнянь є неповними загальними рівняннями площини у тривимірному евклідовому просторі відносно афінної системи координат $Oxyz$:

а) $2\cdot x+y+5\cdot z=0$;   г) $3\cdot x+5\cdot y+7\cdot z+11=0$;

б) $6\cdot y+4\cdot z+1=0$;   д) $y=x+8$;

в) $3\cdot y+7\cdot z=0$;   е) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-1}{1}$.

4. У тривимірному евклідовому просторі, відносно певної прямокутної декартової системи координат $Oxyz$ базисом E, площину задано рівнянням $2\cdot(x-1)+3\cdot(y+4)=0$. Вказати, який з наведених впорядкованих наборів чисел утворює координати нормального вектора даної площини відносно базису E.

а) $\left(-1,4\right)_E$;   б) $\left(-1,4,10\right)_E$;   в) $\left(2,-3\right)_E$;   г) $\left(2,3,0\right)_E$.

5. У тривимірному евклідовому просторі, відносно певної афінної системи координат $Oxyz$ з базисом E, пряму задано рівняннями $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z}{0}$. Вказати координати спрямовуючого вектора даної прямої відносно базису E.

а) $\left(2,1,0\right)_E$; б) $\left(3,4,0\right)_E$; в) $\left(3,4\right)_E$; г) $\left(1,1,1\right)_E$.

6. У тривимірному евклідовому просторі, відносно певної афінної системи координат $Oxyz$, задано рівняння площини α, α : $2\cdot(x-1)+3\cdot(y+2)+z=0$ і координати точок $A\left(2,3,1\right)$; $B\left(-1,2,0\right)$; $C\left(3,-4,2\right)$; $D\left(0,0,0\right)$. Визначити, яка із даних точок належить площині α :

а) A; б) B; в) C; г) D.

7. У тривимірному евклідовому просторі рівняння площин задані відносно афінної системи координат $Oxyz$. Серед наведених рівнянь вказати рівняння відносно даної системи координат площин, які є паралельними до площини α, α: $2\cdot(x-1)+3\cdot(y-2)+5\cdot(z-8)=0$:

а) $x+4\cdot y+8\cdot z+15=0$; б) $2\cdot(x-4)+3\cdot(y-8)+5\cdot(z-1)=0$;

в) $\frac{1}{2}\cdot(x-4)+\frac{1}{3}\cdot(y-8)+\frac{1}{5}\cdot(z-1)=0$; г) $2\cdot x+3\cdot y+5\cdot z+11=0$.

8. У тривимірному евклідовому просторі рівняння прямих задані відносно афінної системи координат $Oxyz$. Серед наведених рівнянь вказати рівняння відносно даної системи координат прямих, які є паралельніими до прямої l, l: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-8}{5}$:

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-8}{5}$; б) $\frac{x}{2}=\frac{y}{-6}=\frac{z}{-10}$; в) $\frac{x-2}{-4}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z-5}{-10}$;

г) $2\cdot x+3\cdot y+5\cdot z=11$.

9. У тривимірному евклідовому просторі рівняння прямих задані відносно прямокутної декартової системи координат $Oxyz$. $Oxyz$. Серед наведених рівнянь вказати рівняння відносно даної системи координат прямих, які є перпендикулярними до площини α, α: $2\cdot(x-1)+3\cdot(y-4)+5\cdot(z-8)=0$:

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-8}{3}=\frac{z-4}{5}$; б) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-5}{-8}$;

в) $2\cdot x+3\cdot y+5\cdot z-15=0$; г) $\frac{x}{-2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{-5}=0$.

10. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Серед наведених рівнянь вказати рівняння відносно даної системи координат площини, яка проходить через точки $A(0,1,0)$, $B(-2,1,4)$, $C(3,2,5)$:

а) $2\cdot x+3\cdot y+5\cdot z-15=0$; б) $\frac{x-1}{0}+\frac{y-1}{4}+\frac{z-2}{5}=0$;

в) $2\cdot x-11\cdot y+z+11=0$; г) $\frac{x}{-4}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z-5}{-10}$.

11. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Вказати, який з наведених впорядкованих наборів чисел утворює координати відносно базису E нормального вектора площини, що проходить через точки $A(1,1,4)$, $B(1,4,1)$, $C(-1,1,5)$:

а) $(1,2,2)_E$; б) $(1,1,1)_E$; в) $(1,4,1)_E$; г) $(4,1,5)_E$.

12. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Серед наведених рівнянь вказати рівняння відносно даної системи координат площини, яка проходить через точку $M(3,2,-1)$, параллельно до площини α, α: $5\cdot x-3\cdot y+z+11=0$:

а) $2\cdot x-11\cdot y+z+11=0$; б) $\frac{x-3}{5}+\frac{y-2}{4}+\frac{z+1}{5}=0$;

в) $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$; г) $5\cdot x-3\cdot y+z-8=0$.

13. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Серед наведених рівнянь вказати рівняння

відносно даної системи координат площини, яка проходить через точку $M\left(3,-2,4\right)$, перпендикулярно до прямої l, l: $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{1}$:

а) $5\cdot x-5\cdot y+z-9=0$; б) $4\cdot x-2\cdot y+z-20=0$;

в) $\frac{x+5}{4}+\frac{y-2}{5}+\frac{z+1}{6}=0$; г) $\frac{x}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$.

14. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α і β, відповідно, задані рівняннями α : $3\cdot x-2\cdot y+z-5=0$, β: $2\cdot x-y+3\cdot z+7=0$. Відомо, що кут між площинами α і β складає φ. З наведених рівностей вказати вірну.

а) $\cos\varphi=\frac{11}{14}$; б) $\cos\varphi=\frac{1}{2}$; в) $\cos\varphi=\frac{13}{21}$; г) $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

15. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат площини α і β задані рівняннями α : $5\cdot x+B\cdot y+z-1=0$, β: $3\cdot x-y+C\cdot z+4=0$. Відомо, що площини α і β є паралельними. З наведених рівностей вказати вірну:

а) $B+C=-\frac{16}{15}$; б) $B+C=\frac{11}{14}$; в) $B+C=16$; г) $B+C=\frac{13}{16}$.

16. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат точка M має координати $\left(5,-1,3\right)$, площину α задано рівнянням α : $2\cdot x-y+2\cdot z+1=0$. Із наведених чисел вказати те, якому дорівнює відстань від точки M до площини α.

а) 3; б) 12; в) 6; г) 8.

17. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Серед наведених рівнянь вказати рівняння відносно даної системи координат площини, яка проходить через точку

$M(0,1,2)$, перпендикулярно до площин α : $x+3\cdot y-2\cdot z+5=0$ і β : $3\cdot x-y+2\cdot z-1=0$.

а) $\dfrac{x-5}{4}+\dfrac{y-2}{5}+\dfrac{z+1}{6}=0$; б) $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-5}{-8}$;

в) $3\cdot x-y+5\cdot z+4=0$; г) $2\cdot x-4\cdot y-5\cdot z+14=0$.

18. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Серед наведених рівнянь вказати рівняння відносно даної системи координат площини, яка проходить через точки $A(1,-1,2)$ і $B(-1,2,1)$ паралельно до вектора $\vec{u}(1,1,1)_E$:

а) $2\cdot x-y+3\cdot z+7=0$; б) $5\cdot x-3\cdot y+z+11=0$;

в) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-8}{3}=\dfrac{z-4}{5}$; г) $4\cdot x+y-5\cdot z+7=0$.

19. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Серед наведених рівностей вказати канонічні рівняння відносно даної системи координат прямої, яка проходить через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$:

а) $y-y_1=k\cdot(x-x_1)$; б) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$;

в) $A\cdot(x_2-x_1)+B\cdot(y_2-y_1)+C\cdot(z_2-z_1)=0$; г) $\dfrac{x-x_1}{x_2}=\dfrac{y-y_1}{y_2}=\dfrac{z-z_1}{z_2}$.

20. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Серед наведених рівнянь вказати рівняння відносно даної системи координат прямої, яка проходить через точки $A(5,-3,0)$ і $B(6,-1,3)$:

а) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-8}{3}=\dfrac{z-4}{5}$; б) $\dfrac{x-5}{4}+\dfrac{y-2}{5}+\dfrac{z+1}{6}=0$;

в) $\frac{x-5}{1}+\frac{y+3}{2}+\frac{z}{3}=0$; г) $4\cdot x+y-5\cdot z+7=0$.

21. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Серед наведених рівнянь вказати параметричні рівняння відносно даної системи координат прямої l: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$:

а) $\begin{cases} x=2+3\cdot t \\ y=-1+2\cdot t \\ z=1-t \end{cases}$; б) $\begin{cases} x=t \\ y=2\cdot t \\ z=0 \end{cases}$; в) $3\cdot x+2\cdot y-5\cdot z+8=0$;

г) $\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{3}$.

22. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Серед наведених рівнянь вказати канонічні рівняння відносно даної системи координат прямої, що проходить через точку $M\left(1,0,-2\right)$ паралельно до вектора $\vec{u}\left(2,-3,0\right)_E$:

а) $\begin{cases} x=1+2\cdot t \\ y=-3\cdot t \\ z=-2 \end{cases}$; б) $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{0}$; в) $2\cdot x+3\cdot y+8=0$;

г) $\frac{x-1}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z+2}{0}=0$.

23. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Серед наведених рівнянь вказати рівняння відносно даної системи координат прямої, що проходить через точку $M\left(1,-1,4\right)$ перпендикулярно до площини α: $2\cdot x+3\cdot y-6\cdot z+5=0$:

а) $\frac{x-1}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z+4}{8}=0$; б) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{-6}$;

в) $-2\cdot x-3\cdot y+z-6=0$; г) $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{0}$.

24. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат задані рівняння прямих l_1 і l_2, $l_1: \frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{n}=\frac{z}{-3}$, $l_2: \frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-2}{k}$. Відомо, що пряма l_1 є паралельною до прямої l_2. Із наведених чисел вказати те, якому дорівнює добуток сталих n і k:

а) $n\cdot k=-6$; б) $n\cdot k=24$; в) $n\cdot k=12$; г) $n\cdot k=8$.

25. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат задані рівняння прямих l_1 і l_2, $l_1: \frac{x+5}{m}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-1}{3}$, $l_2: \frac{x+3}{2}=\frac{y+7}{5}=\frac{z-5}{-2}$. Відомо, що пряма l_1 є перпендикулярною до прямої l_2. Із наведених чисел вказати те, якому дорівнює стала m:

а) $m=11$; б) $m=17$; в) $m=15$; г) $m=13$.

26. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат задані рівняння прямої l і площини α. $l: \frac{x+4}{1}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z+1}{1}$, $\alpha: 3\cdot x-y-z+5=0$. Відомо, що кут між прямою l і площиною α складає φ. З наведених рівностей вказати вірну:

а) $\sin\varphi=\frac{5}{11}$; б) $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin\varphi=\frac{11}{14}$; г) $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

27. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат задані рівняння прямої l і площини α. $l: \frac{x+3}{3}=\frac{y+7}{6}=\frac{z-5}{-2}$, $\alpha: A\cdot x-y-6\cdot z+5=0$. Відомо, що

пряма l є паралельною до площини α. Із наведених чисел вказати те, якому дорівнює стала A:

а) $A=2$; б) $A=4$; в) $A=-2$; г) $A=-4$.

28. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно даної системи координат задані рівняння прямої l, $l:\begin{cases} 4\cdot x-2\cdot z+1=0 \\ 3\cdot x+y-5=0 \end{cases}$. Із заданих впорядкованих трійок дійсних чисел вказати ту, яка є координатами відносно базису E спрямовуючого вектора прямої l.

а) $(1,1,1)_E$; б) $(1,3,4)_E$; в) $(1,-5,3)_E$; г) $(1,-3,2)_E$.

29. У тривимірному евклідовому просторі обрано афінну систему координат $Oxyz$. Відносно даної системи координат задані рівняння прямої l і площини α. l : $\frac{x+3}{3}=\frac{y-7}{1}=\frac{z+2}{-2}$, α : $2\cdot x-y-z+4=0$. Вказати координати відносно даної системи кординат точки перетину прямої l і площини α:

а) $(1,4,4)$; б) $(0,8,-4)$; в) $(0,4,1)$; г) $(1,-8,4)$.

30. У тривимірному евклідовому просторі обрано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ з базисом E. Відносно даної системи координат задані координати точки M : $M(1,2,-1)$. Відносно базису E задані координати вектора $\overrightarrow{N}$: $\overrightarrow{N}(2,-1,3)_E$. Серед наведених рівнянь вказати рівняння відносно даної системи координат площини, що проходить через точку M перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{N}$:

а) $2\cdot x-y+3\cdot z+3=0$; б) $2\cdot x+3\cdot y-6\cdot z+5=0$;

в) $\frac{x-2}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z+3}{3}=0$; г) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{3}$.

ВІДПОВІДІ НА ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. а) б) г)
2. а) д) е)
3. а) б) в)
4. г)
5. б)
6. в)
7. б) г)
8. б) в)
9. а) г)
10. в)
11. а)
12. г)
13. б)
14. а)
15. а)
16. в)
17. г)
18. г)
19. б)
20. в)
21. а)
22. б)
23. б)
24. в)
25. г)
26. а)
27. в)
28. г)
29. б)
30. а)

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Бокало Б. М., Бридун В. Л., Гуран І. Й., Колос Н. М. Аналітична геометрія в прикладах і задачах: навч. посіб. Львів: Чижиков І. Е., 2016. 334 с.
2. Булдигін В. В., Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навчальний посібник. Київ, ТВіМС, 2011. 224 с.
3. Городецький В. В., Боднарук С. Б., Довгей Ж.І., Лучко В. С. Аналітична геометрія в теоремах та задачах: навч. посіб. Чернівці: ЧНУ, 2018, 382 с.
4. Гринев Б. В., Кириченко І. К. Аналітична геометрія. Підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів. Харків: Гімназія, 2008. 340 с.
5. Копорх К. М., Собкович Р. І. Задачі та вправи для практичних занять з аналітичної геометрії. (Частина І. Векторна алгебра. Геометричні образи рівнянь першого степеня їз двома та трьома змінними): навчальний посібник. Івано-Франківськ: п. п. Байчук А. Б., 2016. 115 с.
6. Яковець В. П., Боровик В. Н., Ваврикович А. В. Аналітична геометрія: навч. посіб. Київ: Університетська книга, 2023. 291 с.

Допоміжна

1. Блудова Т, В., Лісовська В. П., Магда О. В. Аналітична геометрія та її застосування в економічних дослідженнях: навч. посіб. Київ: КНЕУ, 2015. 92 с.
2. Бокало Б. М. Навчально-методичний посібник з аналітичної

геометрії. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім.. І. Франка, 2008. 262 с.

3. Волошина Т. В. Вибрані питання лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навчальний посібник. Луцьк: Видавництво Вол. нац. ун-ту, 2010. 116 с.
4. Жовнір В. І., Кармазіна А. В., Ладиненко Л. П., Яблонська Н. В. Основи аналітичної геометрії у питаннях, прикладах та вправах, частина IV. Пряма на площині: навч. посіб. для самост. роб. студ. перших курсів фіз.-мат. спеціальностей пед. ін-тів та ун-тів. Одеса: ПДПУ ім. К. Д. Ушинського, 2008. 48 с.
5. Зеліско В. Р., Зеліско Г. В. Основи лінійної алгебри і аналітичної геометрії. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2011. 326 с.
6. Кадильниковпа Т. М., Кочеткова І. Б., Сушко Л. Ф., Білова О. В. Аналітична геометрія у просторі: навчальний посібник. Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012. 48 с.
7. Кадубовський О. А., Кадубовська О. Л., Плесканьова Л. Г. Аналітична геометрія. Частина І: Елементи векторної алгебри. Метод координат на площині та в просторі: навчальний посібник. Видання 2-е, виправлене та доповнене: Слов'янськ, 2010. 84 с.
8. Кармазіна А. В., Ладиненко Л. П., Орявська А. О., Синюкова О. М., Яблонська Н. В. Основи аналітичної геометрії у питаннях, прикладах та вправах, частина V. Площина. Пряма у просторі. Пряма і площина у просторі: навч. посіб. для самост. роб. студ. перших курсів фіз.-мат. спеціальностей пед. ін-тів та ун-тів. Одеса: ПДПУ ім. К. Д. Ушинського, 2008. 62 с.

9. Конет І. М., Сорич В. А. Лекції з аналітичної геометрії. Камянеці-Подільський: Аксіома, 2013. 200 с.

10. Рибицька О. М., Білонога Д. М., Каленюк П. І. Лінійна алгебра і аналітична геометрія: навчальний посібник. Друге видання, виправлене. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2013. 124 с.

11. Травкін Ю. І. Лінійна алгебра і аналітична геометрія:навчальний посібник. Харків: Майдан, 2009. 124 с.

Інформаційні ресурси

1. Міністерство освіти і науки України: офіційний сайт. URL: http://www.mon.gov.ua
2. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського: офіційний сайт. URL : http://www.nbuv.gov.ua/
3. Одеська національна наукова бібліотека: офіційний сайт. URL : http://odnb.odessa.ua/
4. Бібліотека Університету Ушинського: офіційний сайт. URL : https://library.pdpu.edu.ua/

.