

**ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД «ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ К. Д. УШИНСЬКОГО»**

**Фізико-математичний факультет**

**Кафедра фізики**

**Брюханов Аркадій, Волчок Наталя**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ  
по вирішенню задач з кристалографії**

**ПРИКЛАДНА ФІЗИКА. ОСНОВИ ТЕКСТУРНОГО АНАЛІЗУ.  
ЗОБРАЖЕННЯ КРИСТАЛІВ**

*для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти  
спеціальності 014 Середня освіта (Фізика) та аспірантури*

Одеса – 2023

*Рукомендовано до друку вчено радою Державного закладу  
«Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д.  
Ушинського» (протокол № 12 від 25 травня 2023р.)*

### **Рецензенти:**

Ю.А. Ніщук – доктор фізико-математичних наук, професор, декан факультету математики, фізики та інформаційних технологій Одеського національного університету імені І.І. Мечнікова.

В.Я. Гоцунський – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри фізики та астрономії Одеського національного університету імені І.І. Мечнікова.

**Брюханов А.О., Волчок Н.А.** Методичні рекомендації по вирішенню задач з кристалографії « Прикладна фізика. Основи текстурного аналізу. Зображення кристалів». Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського, 2023. 55с.

Методичні рекомендації по вирішенню задач з кристалографії «Прикладна фізика. Основи текстурного аналізу. Зображення кристалів» містять методи зображення кристалів і визначення їх характеристик графічними методами за допомогою стереографічних та гномостереографічних проєкцій. Розглянуті методи побудови і практичного використання сіток Болдирєва і Вульфа для вирішення кристалографічних задач, практичні запитання і задачі.

Рекомендовано для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 014 Середня освіта (Фізика) та аспірантури для самостійної підготовки студентів до виконання контрольних завдань з дисципліни «Кристалографія». «Теорія і практика текстурного аналізу», «Фізика твердого тіла», «Матеріалознавство», «Прикладна фізика».

© Університет Ушинського, 2023

© Брюханов А.О., Волчок Н.А.

## ЗМІСТ

Вступ	5
1. Основні теоретичні положення методу проєкцій.	5
2. Приклади розв'язання кристалографічних завдань на сітці Вульфа.	12
Відповіді	52
Література	53
Додаток 1.	55

## ВСТУП

Дослідження кристалів починається з їх зовнішнього огляду, виявленню граней і ребер. Далі за допомогою спеціальних устаткувань (гоніометрів) вимірюємо кути між гранями, встановлюємо елементи симетрії. Тепер можна зобразити кристал у вигляді ескізів.

Але на ескізі важко відобразити все різноманіття кутових характеристик між різними гранями кристала.

З цією метою у кристалографії використовуються різні методи зображення елементів симетрії, граней, ребер кристалів: метод сферичної проєкції, метод стереографічної проєкції та метод гномостереографічної проєкції.

Сtereoграфічна та гномостереографічна проєкції – це проєкції тривимірних об'єктів на площині.

Ці проєкції є зручним та наочним способом опису кристалів. Вони відображають кути між напрямками та площинами. В 1897 році знаменитим ученим Г.В. Вульфом у кристалографічну практику була введена стереографічна сітка, утворена стереографічними проєкціями меридіанів та паралелей певного радіусу. Вона дозволяла без трудомістких обчислень шляхом геометричних побудов отримати стереографічні проєкції точок сфери довільного радіусу.

### 1. Основні теоретичні положення методу проєкцій.

У кристалографії метод проєктування заснований на важливій теоремі кристалографії: **всі елементи точкової симетрії кристала перетинаються хоча б в одній точці.**

Набір всіх елементів точкової симетрії кристала називається **точковим комплексом**. При розв'язанні будь-якої кристалографічної задачі завжди можна знайти точку  $O$ , в якій перетинаються всі осі та площини симетрії багатогранника. Якщо є ще й центр інверсії кристала, він обов'язково знаходиться в точці  $O$ . Точка  $O$  називається **центром точкового комплексу**. До будь-якої площини можна провести перпендикуляр (нормаль) та перенести його паралельно самому собі так, щоб він проходив через довільну точку  $O$ . Змінивши всі площини перпендикулярами, отримаємо **полярний комплекс із прямих ліній**.

У кристалічному багатограннику усі грані та ребра можуть бути перенесені паралельно самим собі таким чином, щоб вони перетиналися у довільній точці простору  $O$ . Отримана сукупність називається **кристалічним**

комплексом, а точка  $O$  – центром кристалічного комплексу. Точковий, полярний та кристалічний комплекси є тотожними математичними об'єктами.

Для побудови кристалографічної проєкції природних кристалів кристалографи скористалися досвідом найстарішої науки Землі – географії, яка використовує модель земної поверхні як сфери з паралелями і меридіанами.

Навколо кристалічного багатогранника описуємо сферу довільного радіусу з центром у довільній точці  $O$ . Ця сфера називається **сферою проєкцій** (projection sphere). Через центр  $O$  проводиться вісь, яка називається **полярною**. Її позитивний кінець перетинає сферу проєкцій у точці  $N$ , яка називається **північним полюсом**. Негативний кінець полярної осі перетне сферу проєкцій у точці  $S$ , яка називається **південним полюсом**. Через північний і південний полюс можна провести серію великих кіл, які за аналогією з геодезією називатимуться **меридіанами**. (рис.1.1).

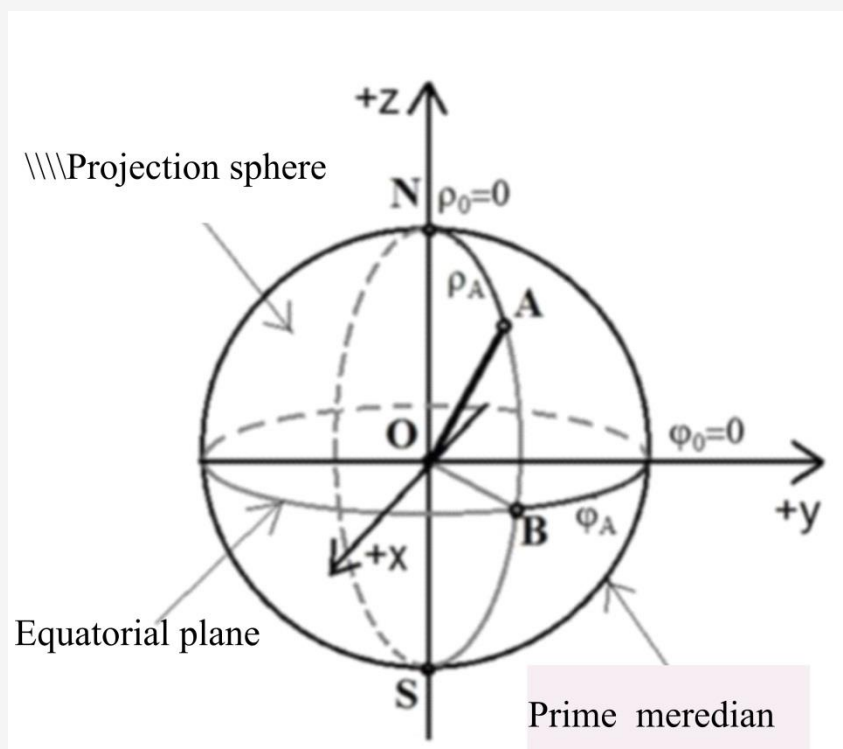


Рис. 1.1 Сферична система координат

Один з них вибираємо як нульовий (Prime Meridian). Через точку  $O$  перпендикулярно полярної вісі  $NS$  проводимо площину, яка називається **екваторіальною площиною** (equatorial plane).

Паралельно екватору можемо провести серію великих кіл вище і нижче до перетину зі сферою проєкцій, які будуть називатися паралелями. Площини проводяться з певним кутовим кроком.

Будь-який напрямок у просторі можна зафіксувати за допомогою сферичних координат довготи  $\varphi$  та широти  $\rho$ . Для цього вибирається нульовий меридіан і за екватором за годинниковою стрілкою до певного меридіана відраховується кутова відстань  $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$ . Кутова відстань - сферична координата - довгота або азимут. Від північного полюса N до екватора і від південного полюса S до екватора по меридіану можна визначити наступну кутову відстань або полярний кут, що змінюється в межах  $0^\circ \leq \rho \leq 90^\circ$ . Полярний кут - сферична координата, звана широтою. Робота з об'ємною сферою проєкцій у кристалографічній практиці виявилася незручною. У кристалографії найпоширенішим є метод проєктування: перенесення сферичної проєкції на екваторіальну площину, що приймається за площину креслення – метод стереографічних проєкцій (рис.1.2).

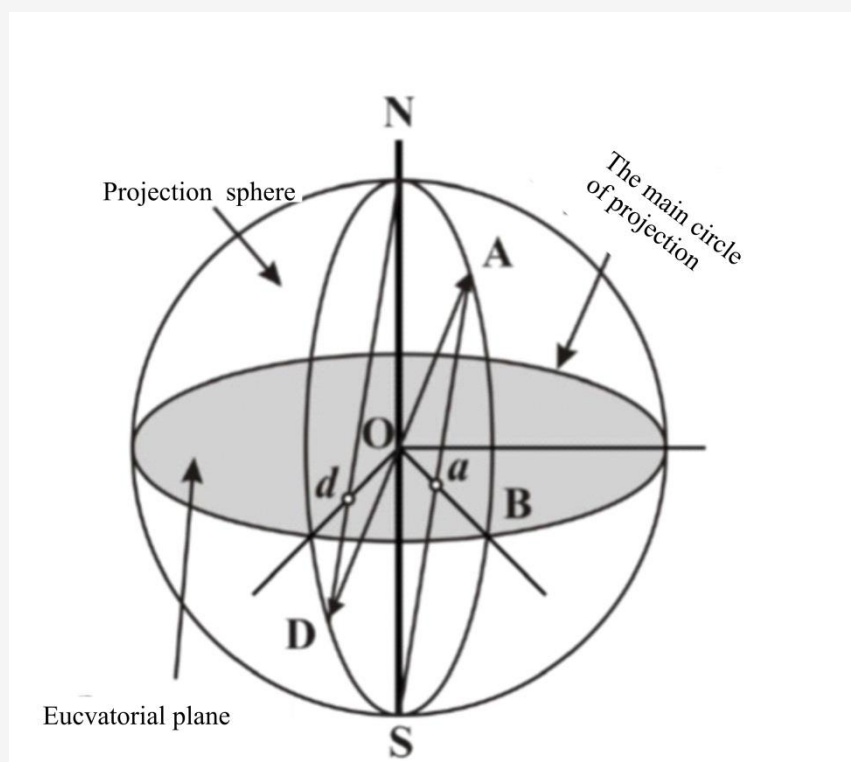


Рис. 1.2 Побудова стереографічних проєкцій точок A та D

Для побудови стереографічної проєкції точки  $A$  проводять такі побудови. Точку  $A$  з'єднують із центром сфери проєкцій  $O$ . Через точку  $A$  проводять меридіан від північного полюса  $N$  до південного  $S$ . Цей меридіан перетинається з екватором у точці  $B$ . Точки  $O$  та  $B$  з'єднують лінією. Точка  $A$  знаходиться в північній півкулі, там, де розташовується північний полюс  $N$ . Вибираємо полюс, з якого проводимемо відрізок до точки  $A$ , він називатиметься точкою зору. В даному випадку – це буде південний полюс  $S$ . З'єднуємо південний полюс  $S$  та точку  $A$ . Стереографічною проєкцією точки  $A$  буде точка  $a$  – точка перетину напрямів  $OA$  та  $SA$ . Якщо точка лежить у південній півкулі, то погляд розташовують у північному полюсі  $N$ . Будь-яка вісь симетрії перетинає сферу проєкцій у двох точках: у північній та південній півкулях на протилежних кінцях (рис.1.3).

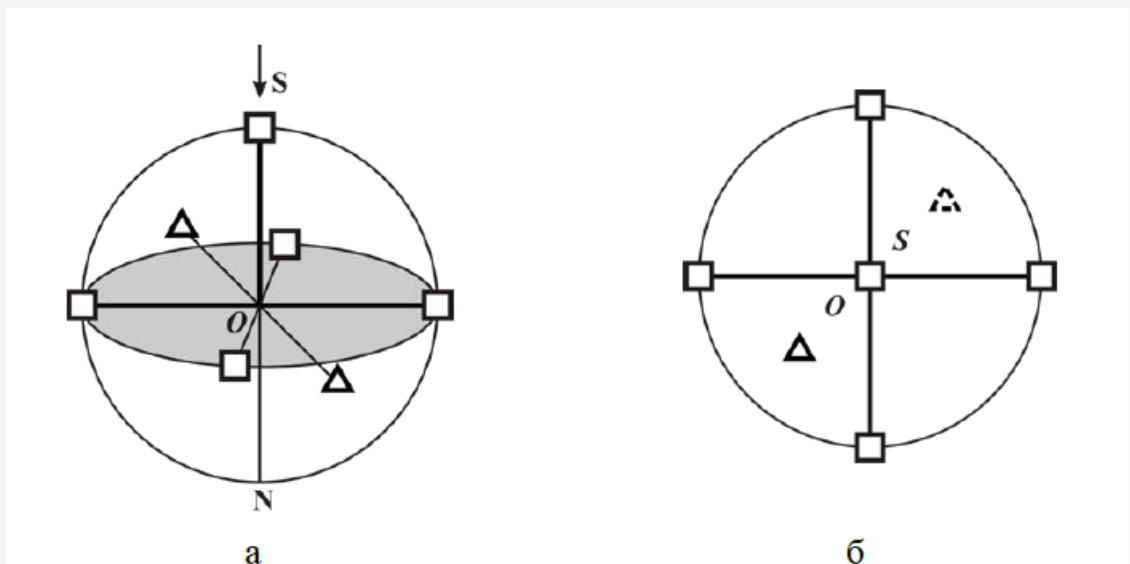


Рис. 1.3 Проекції вісей симетрії: а) вид збоку; б) вид зверху

Площину у просторі можна зафіксувати за допомогою сферичних координат точки перетину перпендикуляра до площини та сфери проєкцій. Стереографічні проєкції площин (рис. 1.4), що проходять через центр проєкцій, будуть наступними варіантами:

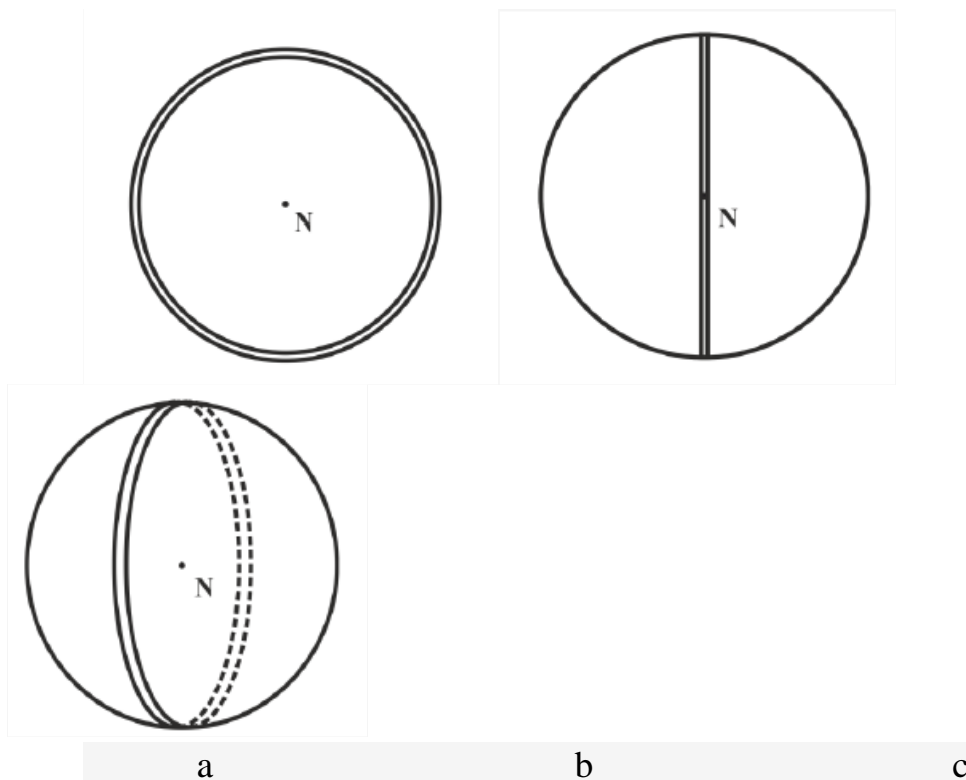


Рис.1.4. Стереографічні проєкції площин симетрії: а) площина симетрії збігається з екваторіальною площиною; б) площина симетрії перпендикулярна до площини, що проходить через нульовий меридіан; с) площина симетрії розташована похило до екватора.

Якщо зображати кристал у вигляді набору граней, то стереограма виявиться нечитаною і неінформативною через велику кількість ліній і дуг. Найзручніше користуватися зображенням площин у вигляді нормалей до них.

До площини грані проводимо перпендикуляр, який перетне сферу проєкцій у точці  $G$  зі сферичними координатами  $(\varphi_G, \rho_G)$ . Через точку  $G$  проводимо меридіан. Він перетне екватор у точці  $K$ . Для проєктування на площину точки  $G$  проводимо промені  $GS$  і  $OK$ . Точка перетину променів – точка  $g$  є гномостереографічною проєкцією грані (рис.1.5). Проєкція точки  $G$  позначатиметься кружечком. Гномостереографічні проєкції граней, що знаходяться в нижній півсфері позначатимуться хрестиками.



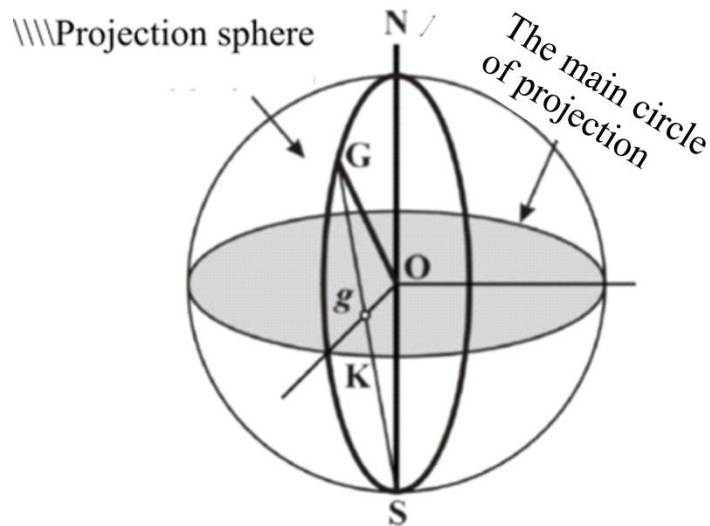


Рис.1.5. Побудова гномостереографічної проєкції грані

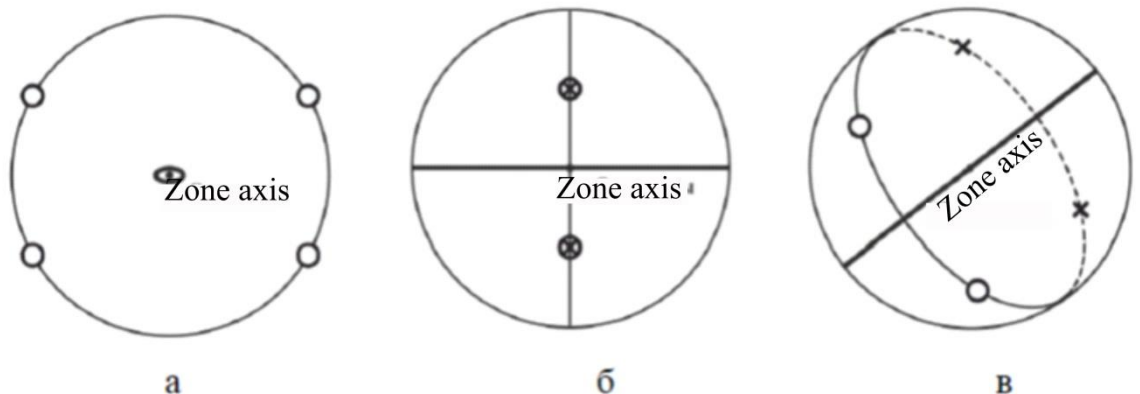
При проєктуванні граней кристалів виявлено цікаву закономірність. Якщо грані перетинаються по паралельних ребрах і утворюють призми з різними перерізами, то нормалі до цих граней будуть розташовуватися в одній площині яка проходить через центр тяжіння кристала.

Грані, що перетинаються по паралельних ребрах, називаються **таутозональними** (tautos (грец.) - "Той самий"). Сукупність таутозональних граней називається "**зоною**" або "**поясом**". Віссю зони називається напрямком, паралельний ребрам, якими перетинаються таутозональні грані.

1) Якщо вісь зони розташована вертикально, гномостереографічні проєкції всіх граней будуть розташовані на колі проєкцій (рис.1.6 а);

2) Якщо вісь зони розташована горизонтально, то гномостереографічні проєкції всіх граней розташовуватимуться на вертикальному діаметрі кола проєкцій (рис.1.6 б);

3) Якщо вісь зони розташована похило, то гномостереографічною проєкцією всіх граней буде дуга великого кола (рис.1.6 с).



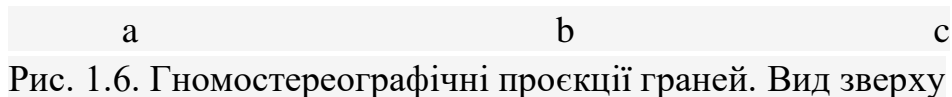


Рис. 1.6. Гномостереографічні проєкції граней. Вид зверху

При вирішенні кристалографічних завдань іноді потрібно будувати стереографічні проєкції кіл довільного радіусу, розташованих на сфері проєкцій. Ці кола виходять перетином сфери проєкцій площиною. Форма стереографічних проєкцій цих кіл визначається наступною важливою теоремою.

**Теорема 1.** Будь-яке коло на поверхні сфери відображається на стереографічній проєкції також у вигляді кола.

Ще одна важлива властивість стереографічної проєкції формулюється наступною теоремою.

**Теорема 2.** Кут між дугами великих кіл у сфері дорівнює куту між стереографічними проєкціями цих дуг.

Для інформативного сприйняття стереографічної проєкції елементів симетрії, граней та ребер кристалічного багатогранника пропонувано різні варіанти градусних сіток. У кристалографії найбільшого поширення набула сітка Вульфа. Стандартна сітка Вульфа креслиться на колі діаметром 20 см. Лінії паралелей та меридіанів проводять через кожні  $2^\circ$ . Розділивши цю відстань на око ще на 4 частини, можна працювати з точністю до  $0,5^\circ$ . Положення на сітці Вульфа будь-якої точки визначається її сферичними координатами  $\rho$  та  $\phi$ .

### Правила роботи із сіткою Вульфа

Для виконання побудов потрібно приготувати сітку Вульфа, кальку з накресленим колом, діаметром 20 см.; гостро відточений твердий олівець.

Далі сітку розташовуємо так, щоб її екватор був горизонтальним. На сітку кладемо кальку, хрестиком або чотирма точками відзначаємо центр проєкції, а на правому кінці екватора сітки горизонтальною рисою – нульову точку та позначаємо її  $0^\circ$ . На великому колі позначаємо точки  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ .

Не допускаються жодні позначки на самій сітці. Вся робота виконується на кальці олівцем.

Усі побудови проводять шляхом обертання сітки навколо центру. Слідкують, щоб центр кальки не зміщувався від центру сітки Вульфа. Проєкції точок з координатами  $0^\circ \leq \rho \leq 90^\circ$  позначають кружальцями.

Якщо полярна координата знаходиться в межах  $90^\circ < \rho \leq 180^\circ$ , то відлік продовжується за площину креслення. Таку точку, що ніби під площиною креслення, тобто «невидиму» для спостерігача, позначають хрестиком.

## 2. Приклади розв'язання кристалографічних завдань на сітці Вульфа.

### Завдання 1. Варіант 1.

Побудувати стереографічну проекцію напрямку А, заданого сферичними координатами  $\varphi$  і  $\rho$ . Точка А ( $\varphi_A = 24^\circ$ ,  $\rho_A = 72^\circ$ ).

Рішення: Накладаємо кальку на сітку Вульфа і відзначаємо на ній координати  $\varphi$ :  $0^\circ$  ( $360^\circ$ ),  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  (рис 1.1а).

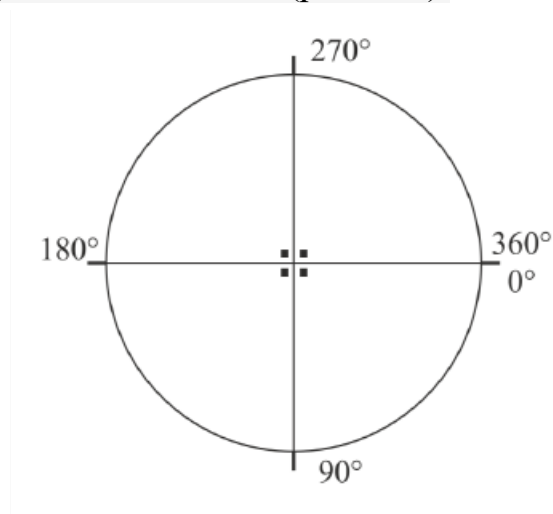
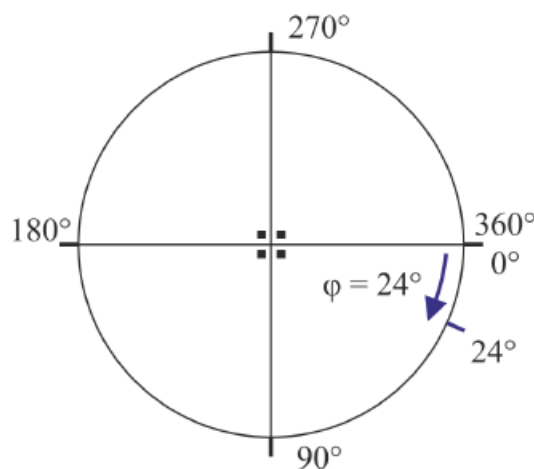


Рис.1.1а

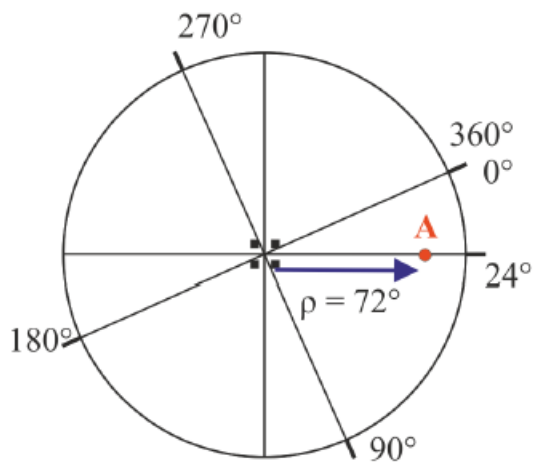
Від нульового значення на колі проєкцій за годинниковою стрілкою відраховуємо першу сферичну координату  $\varphi_A = 24^\circ$  та відзначаємо результат на зовнішньому колі допоміжною рисочкою. (1.1б)



б

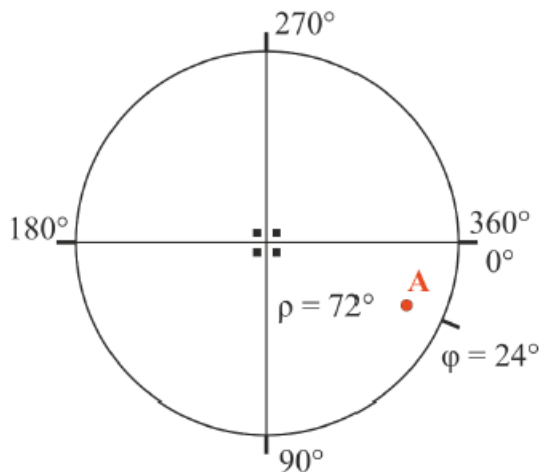
Рис. 1.1б.

Обертанням кальки (центр кальки при цьому завжди повинен збігатися з центром сітки) поєднуємо знайдену допоміжну риску з кінцем найближчого діаметра сітки. По діаметру від центру сітки у бік допоміжної точки відраховуємо другу сферичну координату –  $\rho_A = 72^\circ$ . Зазначаємо знайдену точку А кружечком (рис.1.1с)



с  
Рис.1.1с

Повертаємо кальку у вихідне положення (рис 1.1d). Знайдена точка А є шуканою стереографічною проєкцією напрямку А.



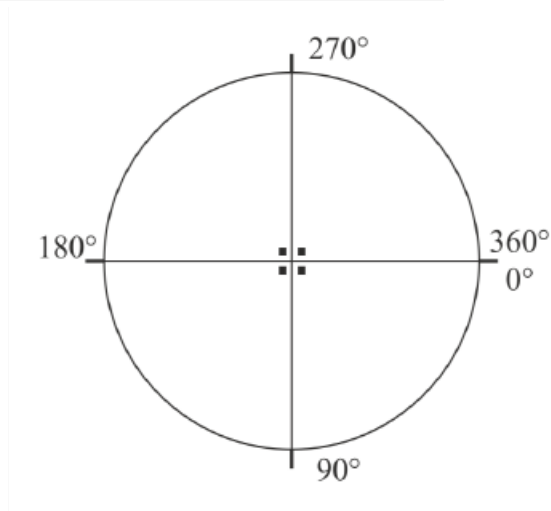
д  
Рис.1.1d

*Завдання 1.*

*Варіант 1.*

Побудувати стереографічну проєкцію напрямку В, заданого сферичними координатами  $\phi_B$  і  $\rho_B$ . Точка В ( $\phi_B = 325^\circ$ ,  $\rho_B = 157^\circ$ ).

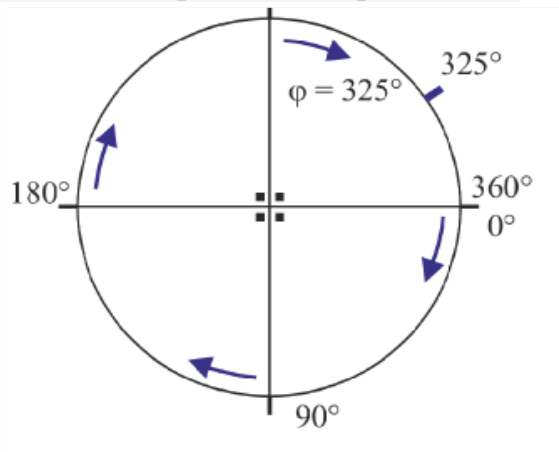
*Рішення:* Накладаємо кальку на сітку Вульфа таким чином, щоб центр кальки поєднувався з центром сітки. Відзначаємо на кальці головні точки сітки Вульфа:  $0^\circ$  ( $360^\circ$ ),  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  (рис 1.2а).



а

Рис. 1.2а.

Від нульового значення на колі проєкцій за годинниковою стрілкою відраховуємо першу сферичну координату  $\varphi_B = 325^\circ$  і відзначаємо результат на зовнішньому колі допоміжною рисочкою (рис.1.2 б).



б

Рис.1.2.б

Обертанням кальки (центр кальки при цьому завжди повинен збігатися з центром сітки) поєднуємо знайдену допоміжну риску з кінцем найближчого діаметра сітки. По діаметру від центру сітки у бік допоміжної точки відраховуємо другу сферичну координату  $-\rho_B = 157^\circ$  (рис. 1.2с).

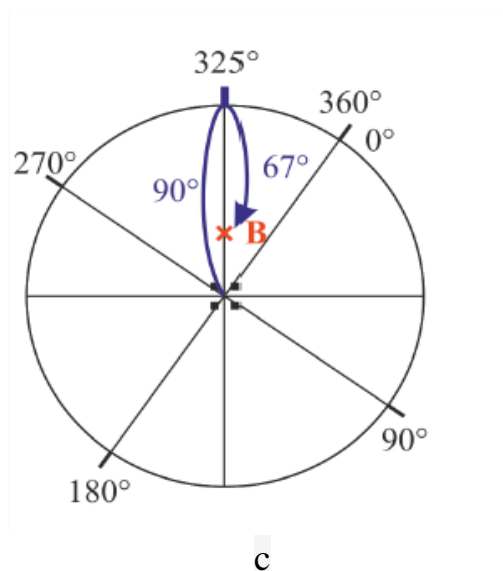


Рис.1.2.с

Так як координата  $\rho_B$  перевищує  $90^\circ$ , то від зовнішнього кола до центру сітки починаємо відраховувати додаткову відстань  $67^\circ (157^\circ - 90^\circ)$ . Проекцію в цьому випадку позначаємо хрестиком. Повертаємо кальку у вихідне положення (рис. 1.2 d). Знайдена точка В є шуканою стереографічною проекцією напрямку В.

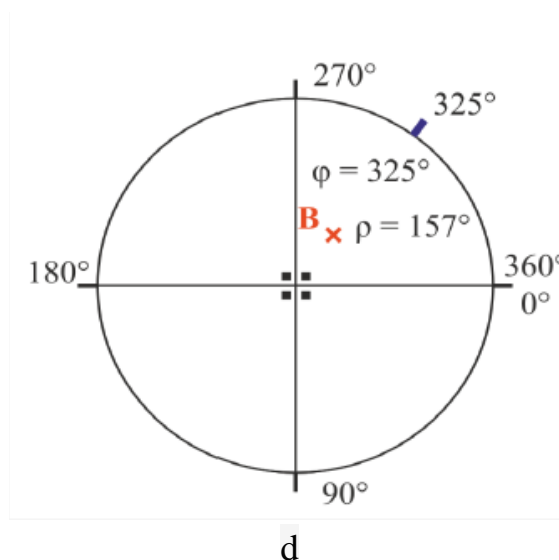


Рис.1.2d

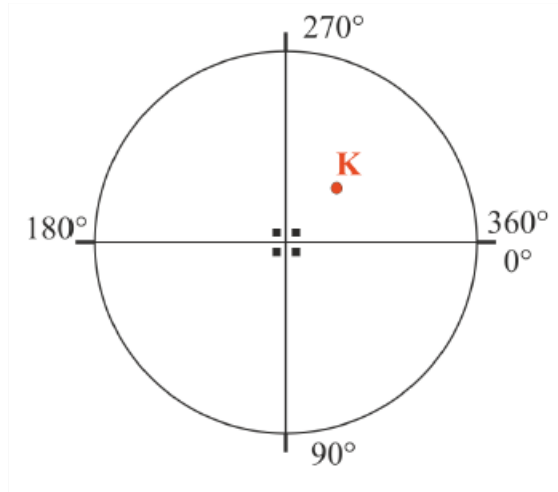
*Домашнє завдання:*

Зобразити на кальці стереографічні проекції напрямків за допомогою сітки Вульфа: 3) D ( $\varphi_D = 234^\circ$ ,  $\rho_D = 67^\circ$ ); 4) E ( $\varphi_E = 64^\circ$ ,  $\rho_E = 105^\circ$ ); 5) F ( $\varphi_F = 144^\circ$ ,  $\rho_F = 90^\circ$ ); 6) G ( $\varphi_G = 345^\circ$ ,  $\rho_G = 176^\circ$ ).

Завдання 2. (зворотне)

Варіант 1. Визначити сферичні координати напрямку К ( $\varphi_K=?$ ,  $\rho_K=?$ ), заданого стереографічною проекцією.

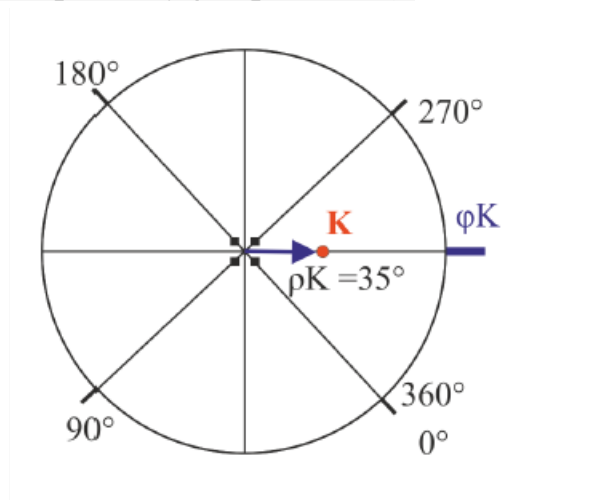
Рішення: Накладаємо кальку на сітку Вульфа та відзначаємо на ній координати  $\varphi$ :  $0^\circ$  ( $360^\circ$ ),  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  (рис.2.1а).



а

Рис. 2.1а

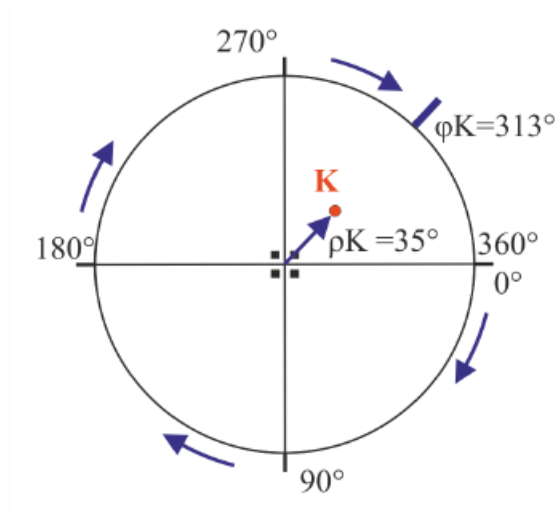
Обертанням кальки наводимо задану точку К, що є стереографічною проекцією, на найближчий діаметр сітки. Від центру сітки до заданої точки К визначаємо сферичну координату  $\rho_K$  (рис.2.1 б).



б

Рис 2.1б

У цьому положенні кальки відзначаємо допоміжною рисою на колі проєкції той кінець згаданого діаметра, у бік якого лежить точка. Це буде координата  $\varphi_K$ . Обертанням наводимо кальку у вихідне положення. По колу проєкції відраховуємо за годинниковою стрілкою сферичну координату від нульового значення до допоміжної риски  $\rho_K$  (рис.2.1 с).



с

Рис. 2.1с

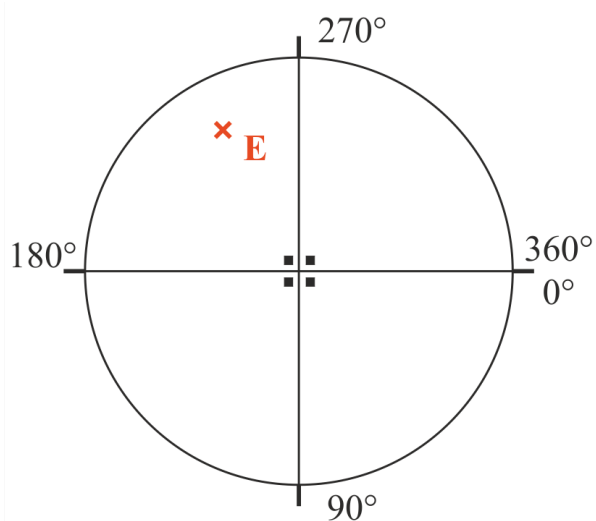
Відповідь. К ( $\varphi_K = 313^\circ$ ,  $\rho_K = 35^\circ$ )

**Завдання 2.**

**Варіант 2.**

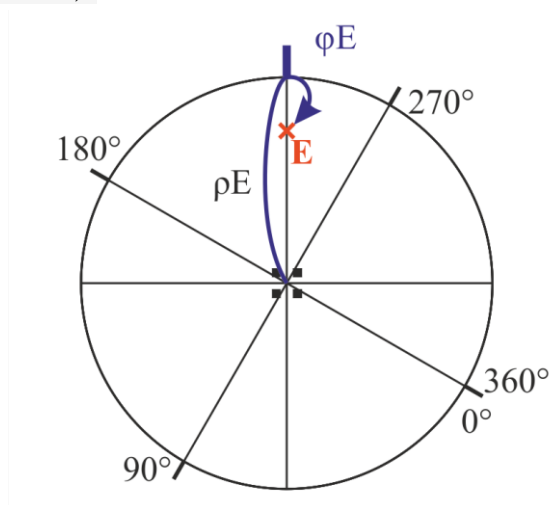
Визначити сферичні координати напрямку Е ( $\varphi_E=?$ ,  $\rho_E=?$ ), заданого стереографічною проєкцією малюнку.





Малюнок 2.2.2а. Побудови до задачі 2.2 варіант 2

обертаємо кальку так, щоб точка E опинилась на вертикальному діаметрі сітки Вульфа. Звертаємо увагу на те, що точка E позначена хрестиком. Це означає, що вона знаходиться у південній півкулі. Для визначення широти необхідно відрахувати відстань від сітки Вульфа до краю, потім від краю до центру до точки (рис.2.2.2 b).

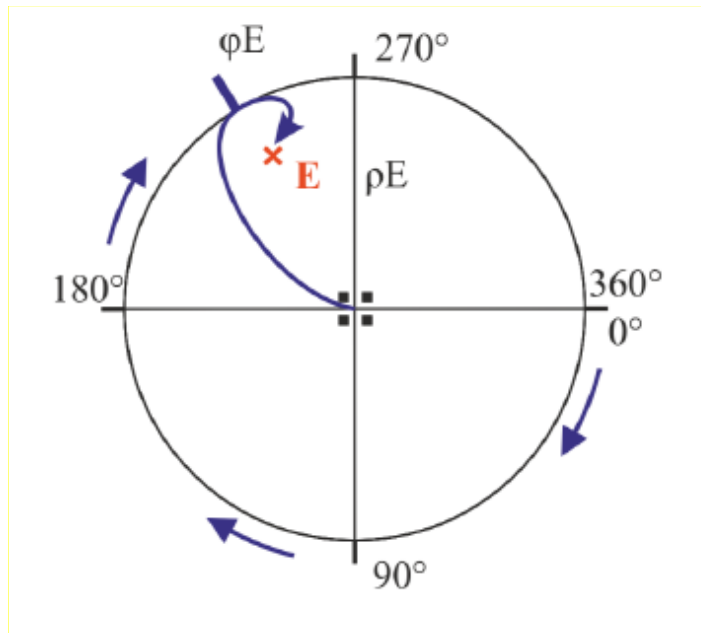


Малюнок 2.2.2b Побудови до задачі 2.2 варіант 2

Продовжуємо діаметр сітки Вульфа, на якому знаходиться точка E, та написуємо ризику  $\varphi_E$ . Для визначення довготи повертаємо кальку у вихідне положення і за годинниковою стрілкою від нуля до позначки знаходимо кутову відстань  $\varphi_E$  (рис.2.2.2 c).

Малюнок 2.2.2с. Побудови до задачі 2.2 варіант 2

Відповідь. E ( $\varphi_E = 250^\circ$ ,  $\rho_E = 104^\circ$ )



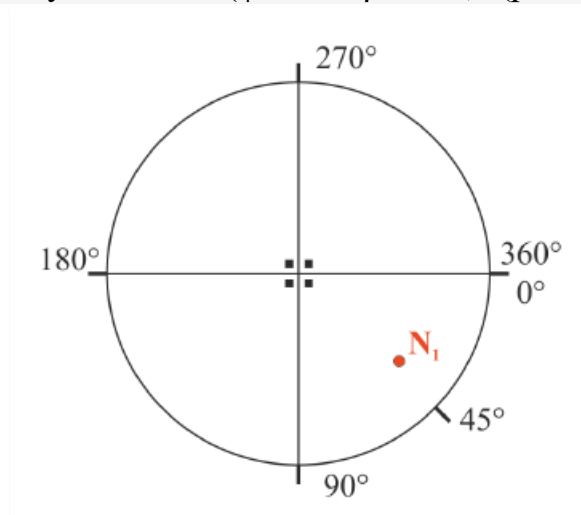
Малюнок 2.2.2b Побудови до задачі 2.2 варіант 2

*Завдання 3.*

Визначити сферичні координати ( $\varphi_2=?$ ,  $\rho_2=?$ ) точки  $N_2$ , діаметрально протилежній точці  $N_1$  ( $\varphi_1=45^\circ$ ,  $\rho_1=68^\circ$ ). Зобразити положення точок на стереографічній проекції.

*Рішення.*

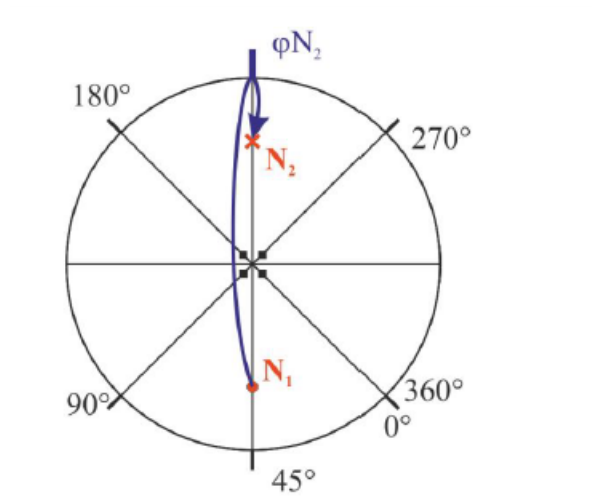
Проводимо побудову точки  $N_1$  ( $\varphi_1=45^\circ$ ,  $\rho_1=68^\circ$ ), (рис 3а), (див. задачу 1).



а

Рис. 3а.

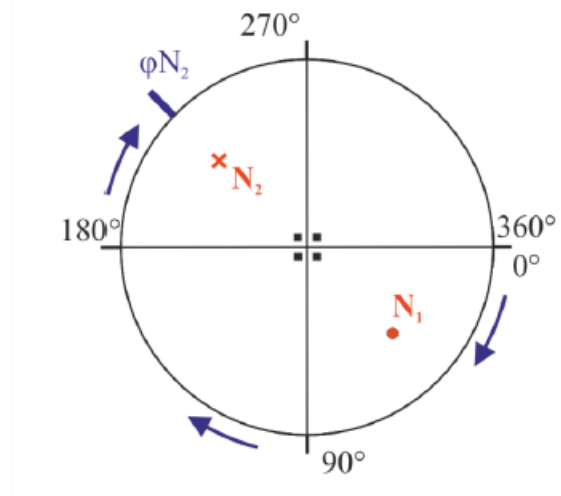
Потім обертаємо кальку навколо центру таким чином, щоб точка  $N_1$  опинилася на вертикальному діаметрі (рис. 3 б).



б

Рис.3б.

Кутова відстань між точками  $N_1$  і  $N_2$  становить  $180^\circ$ , оскільки вони за умовою завдання розташовані діаметрально протилежно. Точка  $N_1$  знаходиться у північній півкулі і є видимою. Від неї до краю великого кола і назад до центру відраховуємо  $180^\circ$  і відзначаємо хрестиком положення шуканої точки  $N_2$ . Не змінюючи положення кальки, відзначаємо на великому діаметрі положення  $\varphi_2$ . Потім починаємо визначати  $\rho_2$ . Від центру проєкції до краю великого кола – це, як відомо,  $90^\circ$  і далі у напрямку від краю великого кола до центру сфери проєкцій  $22^\circ$ . Підсумовуємо знайдені величини та одержуємо сферичну координату  $\rho_2 = 90^\circ + 22^\circ = 112^\circ$ . Повертаємо кальку у вихідне положення. За годинниковою стрілкою по колу знаходимо кутову відстань  $\varphi_2$ . (рис.3с). Оскільки ці точки діаметрально протилежні, то ця відстань має дорівнювати  $\varphi_2 = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ$ .



с

Рис.3с.

Відповідь. Точка  $N_2$  ( $\varphi_2 = 225^\circ$ ,  $\rho_2 = 112^\circ$ ).

Домашнє завдання.

Знайти сферичні координати точки  $N_k$  діаметрально протилежній точці  $N_m$ . Зобразити положення точок на стереографічній проєкції.

- 1)  $N_3$  ( $\varphi_3 = 330^\circ$ ,  $\rho_3 = 52^\circ$ ) і  $N_4$  ( $\varphi_4 = ?$ ,  $\rho_4 = ?$ );
- 2)  $N_5$  ( $\varphi_5 = 155^\circ$ ,  $\rho_5 = 135^\circ$ ) і  $N_6$  ( $\varphi_6 = ?$ ,  $\rho_6 = ?$ );
- 3)  $N_7$  ( $\varphi_7 = 265^\circ$ ,  $\rho_7 = 60^\circ$ ) і  $N_8$  ( $\varphi_8 = ?$ ,  $\rho_8 = ?$ );
- 4)  $N_9$  ( $\varphi_9 = 60^\circ$ ,  $\rho_9 = 151^\circ$ ) і  $N_{10}$  ( $\varphi_{10} = ?$ ,  $\rho_{10} = ?$ ).

Завдання 4.

Варіант 1.

Провести дугу великого кола через задані стереографічні проєкції двох напрямів, тобто через дві точки:  $A$  ( $\varphi_A = 284^\circ$ ,  $\rho_A = 34^\circ$ ) і  $B$  ( $\varphi_B = 6^\circ$ ,  $\rho_B = 41^\circ$ ). Знайти відстань між напрямками  $a = ?$

Рішення.

Будуємо точки  $A$  та  $B$  на сітці Вульфа. Обидві точки знаходяться в одній півкулі та позначаються кружальцями (рис. 4.1а)

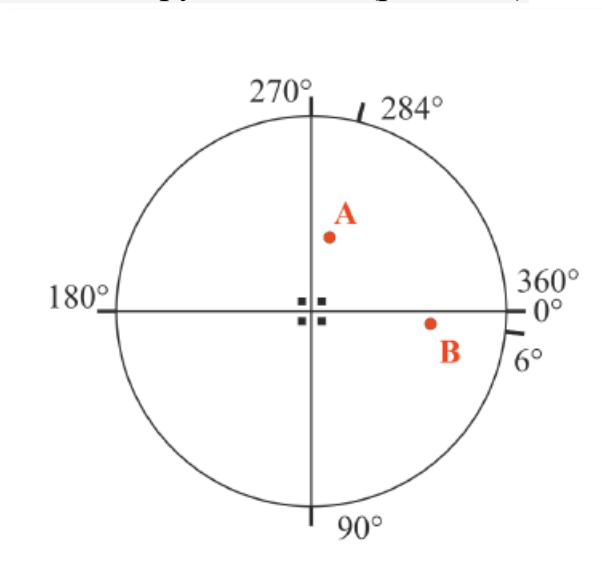


Рис. 4.1а.

Для того, щоб провести дугу великого кола, повертаємо кальку навколо центральної точки таким чином, щоб точки  $A$  і  $B$  опинилися на одному з допоміжних меридіанів сітки Вульфа (рис.4.1 б).

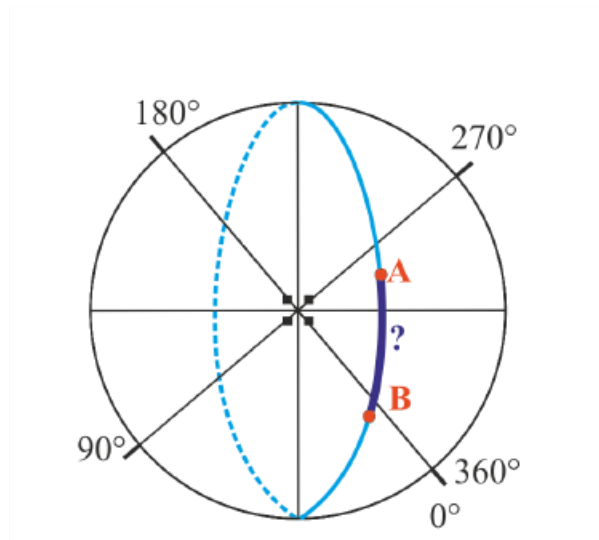


Рис. 4.1b.

Обводимо меридіан суцільною лінією. Визначаємо по меридіану кутову відстань між точками. Враховуємо, що одна поділка  $2^\circ$ . З протилежного боку від вертикального діаметра на такій відстані переривчастою лінією обводимо симетричну дугу. Дуга великого кола збудована.

Відповідь.  $a = 46^\circ$

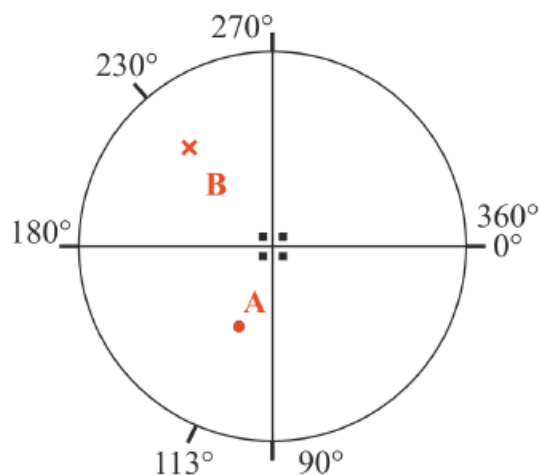
Завдання 4.

Варіант 2.

Провести дугу великого кола через задані стереографічні проєкції двох напрямків, тобто через дві точки: А ( $\varphi_A = 113^\circ$ ,  $\rho_A = 29^\circ$ ) і В ( $\varphi_B = 230^\circ$ ,  $\rho_B = 114^\circ$ ). Визначити відстань між ними  $c = ?$

Рішення.

Знаходимо та позначаємо точки А та В на кальці (рис.4.2 а).



а

Рис. 4.2а.

Так як вони виявилися розташованими в різних півкулях, одна точка позначена кружальцем, інша - хрестиком. Повертаємо кальку таким чином, щоб обидві точки виявились щодо вертикального діаметра на симетричних допоміжних меридіанах (рис.4.2 b).

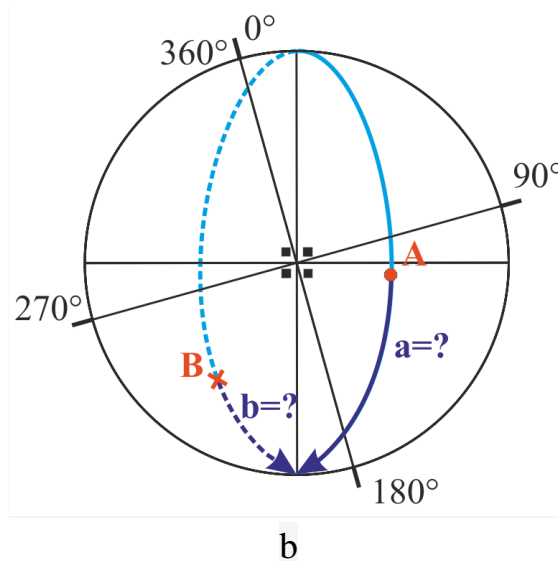


Рис. 4.2b.

Обводимо меридіан, де знаходиться точка А, суцільною лінією. Меридіан, де знаходиться точка В, обводимо пунктирною лінією. Дуги великого кола збудовані.

Відстань між точками підраховується спочатку по одному меридіану до зовнішнього кола (а) і продовжується від зовнішнього кола до точки по іншому меридіану (b). При підрахунку маємо на увазі, що ціна поділки на сітці Вульфа дорівнює  $2^\circ$ . Підсумовуємо відстані  $= a + b$ .

Відповідь.  $c = 124^\circ$

*Домашнє завдання.*

Побудувати дуги великого кола, що проходять через кілька точок.

Знайти кут між напрямками:

- а) т.1 ( $\varphi_1 = 123^\circ$ ,  $\rho_1 = 105^\circ$ ) і т.2 ( $\varphi_2 = 264^\circ$ ,  $\rho_2 = 109^\circ$ );
- б) т.3 ( $\varphi_3 = 162^\circ$ ,  $\rho_3 = 132^\circ$ ) і т.4 ( $\varphi_4 = 64^\circ$ ,  $\rho_4 = 51^\circ$ );
- в) т.5 ( $\varphi_5 = 210^\circ$ ,  $\rho_5 = 158^\circ$ ) і т.6 ( $\varphi_6 = 98^\circ$ ,  $\rho_6 = 18^\circ$ );
- г) т.7 ( $\varphi_7 = 142^\circ$ ,  $\rho_7 = 168^\circ$ ) і т.8 ( $\varphi_8 = 356^\circ$ ,  $\rho_8 = 104^\circ$ ).

*Завдання 5.*

*Варіант 1*

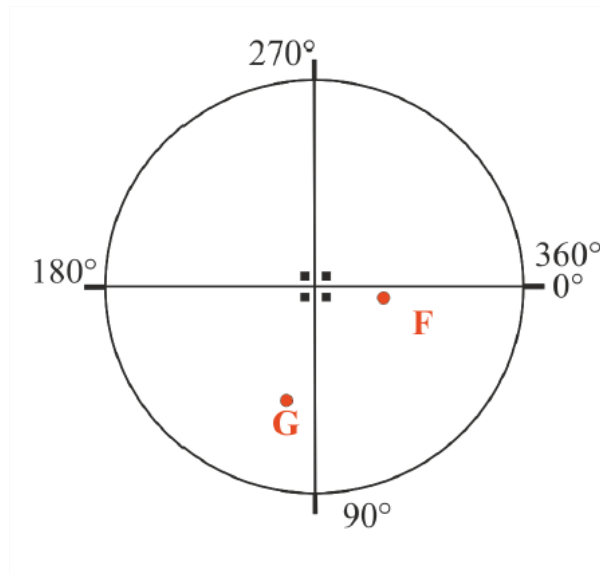
Дано дві точки: F ( $\varphi_F=6^\circ$ ,  $\rho_F=30^\circ$ ) та G ( $\varphi_G=106^\circ$ ,  $\rho_G=54^\circ$ ), (рис. 5.1а).

Побудувати дугу великого кола, яка проходить через точки F і G, знайти її полюс P і визначити його сферичні координати ( $\varphi_P=?$ ,  $\rho_P=?$ )

*Рішення.*

Проводимо побудову дуги великого кола аналогічно до завдання 4.

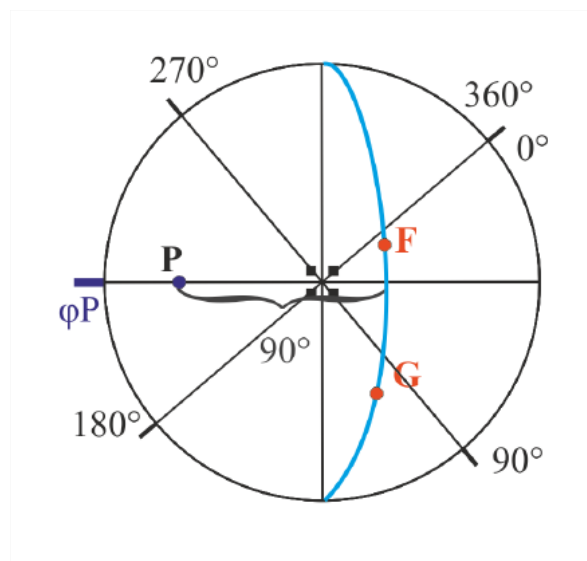
Обидві точки знаходяться в одній півкулі. Дуга обводиться суцільною лінією (рис. 5. 1b).



а

Рис. 5.1а.

Не змінюючи положення кальки на сітці Вульфа, знаходимо точку перетину дуги та горизонтального діаметра. Від точки перетину відраховуємо  $90^\circ$  у напрямку до центру сітки Вульфа. Отримана точка P є полюсом дуги.

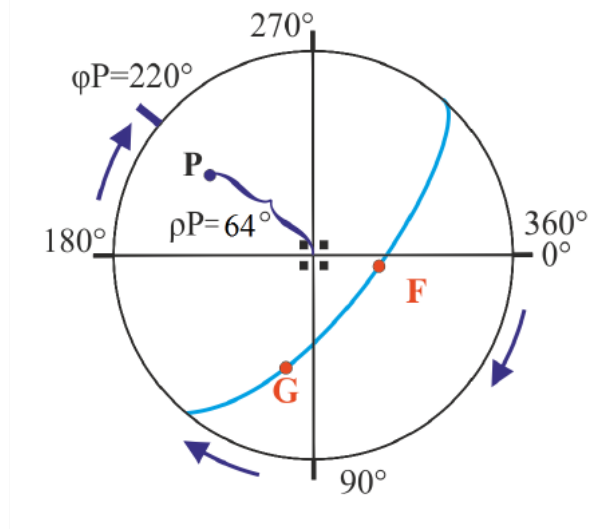


б

Рис. 5.1б.

Для визначення координати  $\varphi_P$  проводимо підрахунок градусів від полюса до центру проєкцій.

Продовжуємо горизонтальний діаметр за полюсом і відзначаємо рисою  $\varphi_P$  позначку на зовнішньому колі проєкцій. Повертаємо кальку у вихідне положення. Від нульового меридіана за годинниковою стрілкою до позначки  $\varphi_P$  проводимо обчислення  $\rho_P$  (рис.5.1с).



с

Рис. 5.1с.

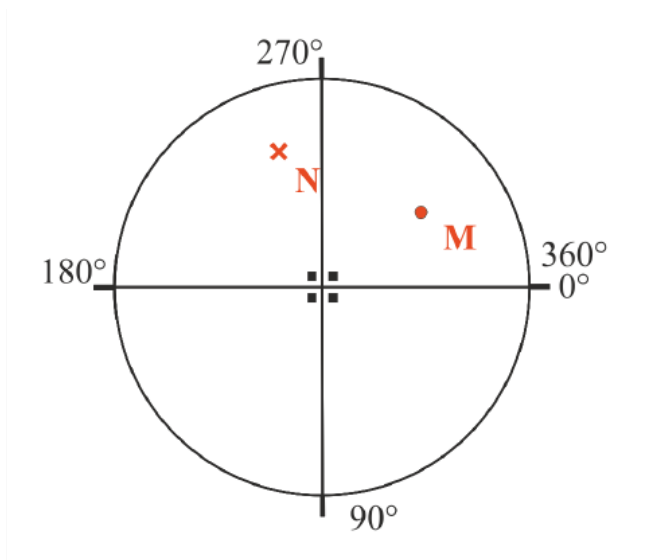
*Відповідь.* P ( $\varphi_P=220^\circ$ ,  $\rho_P=64^\circ$ )

*Завдання 5.*

*Варіант 2.* Дано дві точки M ( $\varphi_M=312^\circ$ ,  $\rho_M=60^\circ$ ) і N ( $\varphi_N=263^\circ$ ,  $\rho_N=109^\circ$ ) Побудувати дугу великого кола, яка проходить через ці точки, знайти її полюс P та визначити його сферичні координати ( $\varphi_P=?$ ,  $\rho_P=?$ ).

*Рішення.* За сферичними координатами будуємо точки M та N на кальці (рис.5.2 а).





А

Рис. 5.2а.

Проводимо побудову дуги великого кола (рис.5.2 б).

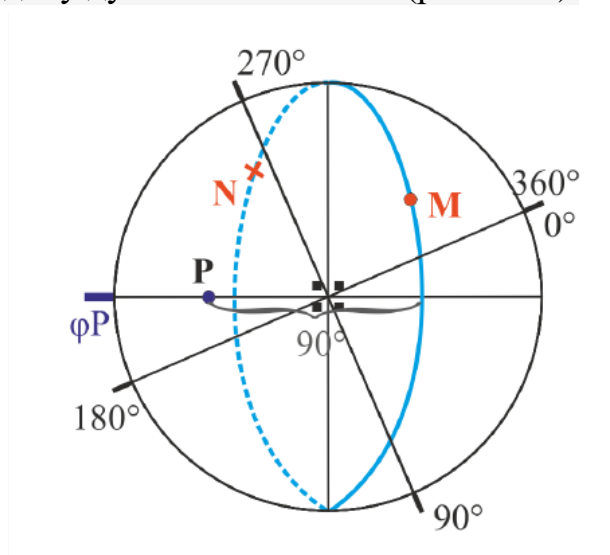


Рис. 5.2б

Будуємо видиму та невидиму частини дуги великого кола. Не змінюючи положення кальки на сітці Вульфа, по діаметру від точки перетину видимої дуги і горизонтального діаметру сітки відраховуємо  $90^\circ$  у напрямку центру сітки Вульфа. Відзначаємо точку  $P$  – полюс дуги. Рухаємось жалі по горизонтальному діаметру і відзначаємо рискою на зовнішньому колі проєкції  $\varphi P$ . Для визначення координати полюса  $\rho_P$  проводимо підрахунок поділок від полюса до центру проєкції:  $\rho_P=48^\circ$  (рис.5.2с).

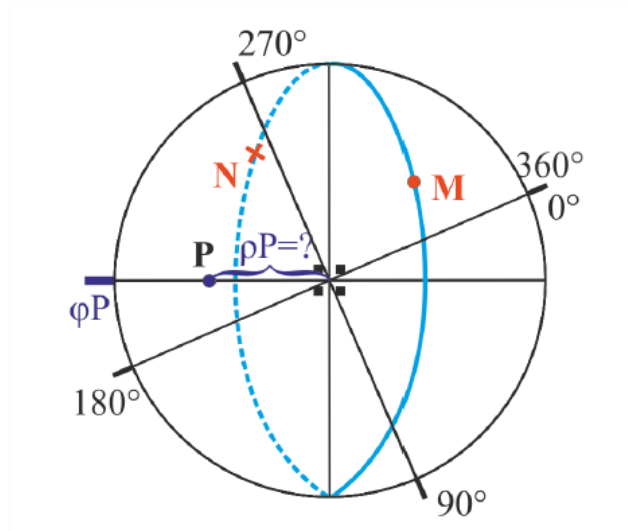


Рис. 5.2с

Повертаємо сітку у вихідне положення. Від нульового меридіана за годинниковою стрілкою проводимо обчислення  $\varphi_P = 191^\circ$  (рис.5.2 d).

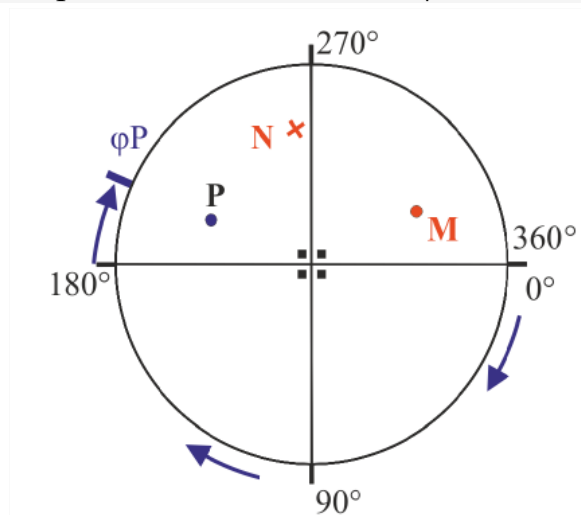


Рис. 5.2d.

Відповідь. P ( $\varphi_P=191^\circ$ ,  $\rho_P=48^\circ$ )

*Домашнє завдання.*

знайти координати полюса дуги P ( $\varphi_P=?$ ,  $\rho_P=?$ ), що проходить через точки:

- а) т.1 ( $\varphi_1 = 18^\circ$ ,  $\rho_1 = 68^\circ$ ) і т.2 ( $\varphi_2 = 302^\circ$ ,  $\rho_2 = 84^\circ$ );
- б) т.3 ( $\varphi_3 = 144^\circ$ ,  $\rho_3 = 135^\circ$ ) і т.4 ( $\varphi_4 = 254^\circ$ ,  $\rho_4 = 125^\circ$ );
- в) т.5 ( $\varphi_5 = 54^\circ$ ,  $\rho_5 = 105^\circ$ ) і т.6 ( $\varphi_6 = 139^\circ$ ,  $\rho_6 = 74^\circ$ );
- г) т. 7 ( $\varphi_7 = 295^\circ$ ,  $\rho_7 = 25^\circ$ ) і т.8 ( $\varphi_8 = 49^\circ$ ,  $\rho_8 = 158^\circ$ ).

Розв'язання цього завдання дає можливість переходити від гномостереографічної проєкції грані до стереографічної та назад: Якщо

задана дуга є стереографічною проекцією грані, знайдений полюс є стереографічною проекцією нормалі до грані, тобто гномостереографічною проекцією грані. Якщо задана дуга є гномо стереографічною проекцією ребер, то знайдений полюс – гномостереографічна проекція грані, нормальної до цього ребра або стереографічна проекція цього ребра.

### Завдання 6

#### Варіант 1

Дано дві точки з наступними сферичними координатами: т.1 ( $\varphi_1=20^\circ$ ,  $\rho_1=60^\circ$ ) і т.2 ( $\varphi_2=312^\circ$ ,  $\rho_2=82^\circ$ ). Побудувати стереографічну проекцію площини відображення, щодо якої симетричні дані напрямки. Знайти координати полюса цієї площини.

#### Рішення

На кальці проводимо побудову точок 1 та 2 (рис. 6.1 а).

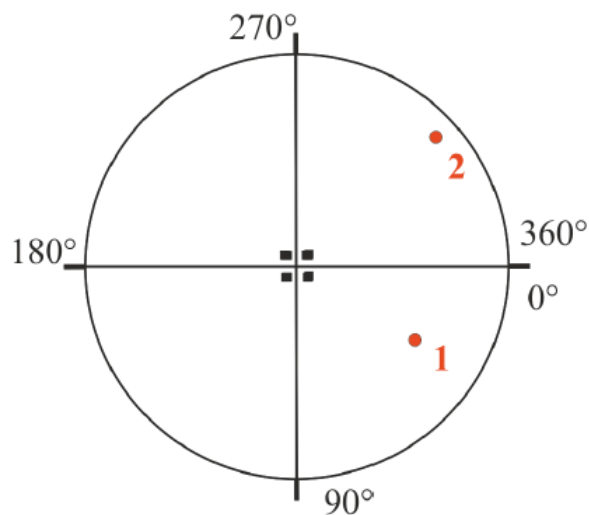


Рис. 6.1

У цьому варіанті вони знаходяться в одній півсфері. Повертаємо кальку таким чином, щоб обидві точки опинилися на одній паралелі або вгорі або внизу (рис. 6.1 б).

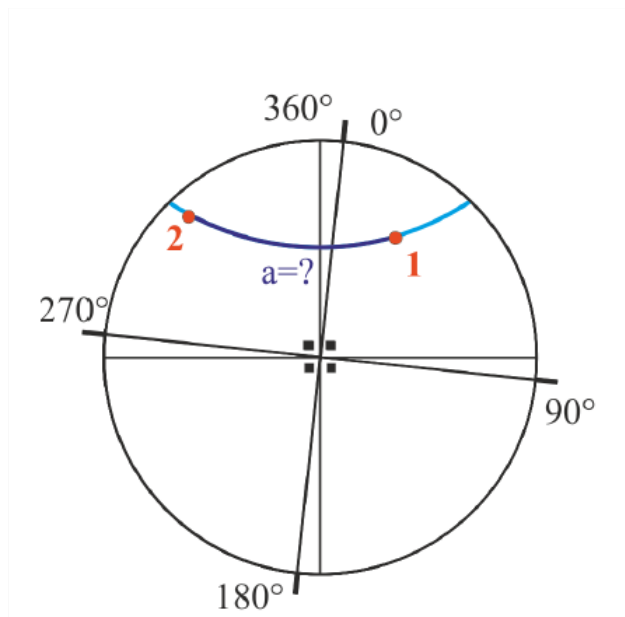


Рис.6.1b

По паралелі визначаємо кутову відстань між ними  $a=114^\circ$ , ділимо його навпіл і відзначаємо точку (рис.6.1 с).

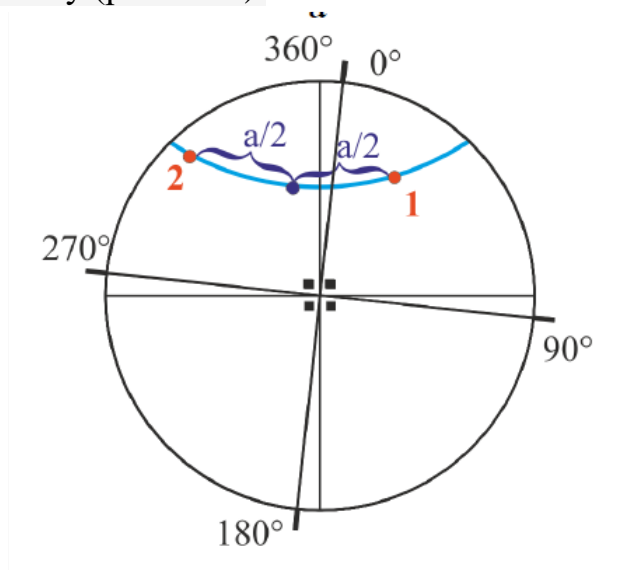


Рис.6.1с.

Ця точка знаходиться на перетині паралелі та меридіана, обводимо суцільною лінією знайдений меридіан, який є видимою частиною дуги великого кола.

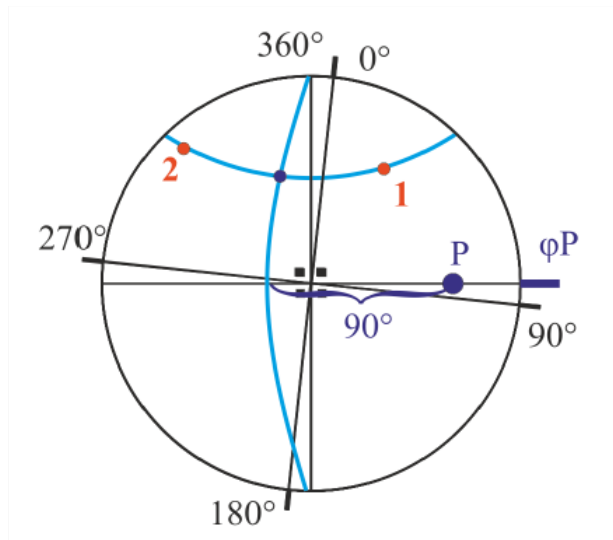


Рис.6.1d.

Від точки перетину меридіана та горизонтального діаметра у бік центру проєкцій відраховуємо  $90^\circ$ . Знаходимо полюс Р (Рис.6.1d.). Визначаємо його сферичні координати. Для цього по горизонтальному діаметру визначаємо відстань від полюса Р до центру сітки Вульфа (рис.6.1 е).  $\rho_P=70^\circ$ .

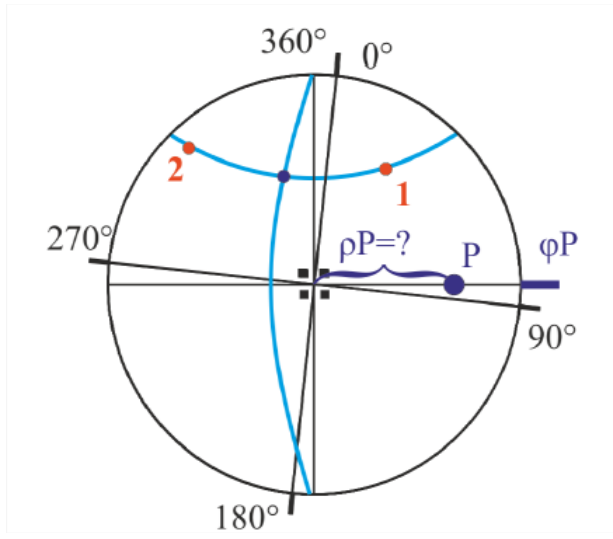


Рис.6.1e

Зазначаємо рисою продовження горизонтального діаметру від полюса Р на протилежний бік від центру  $\varphi_P$ . Повертаємо кальку у вихідне положення

та за годинниковою стрілкою знаходимо сферичну координату  $\varphi_P=82^\circ$ .  
(рис.6.1 g).

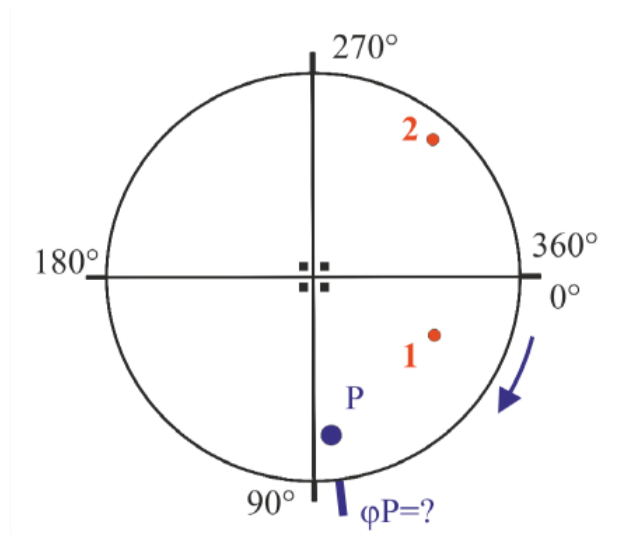


Рис.6.1g.

Відповідь. P ( $\varphi_P=82^\circ$ ,  $\rho_P=70^\circ$ ).

*Завдання 6*

*Варіант 2.*

Дано дві точки з наступними сферичними координатами т.1 ( $\varphi_1=20^\circ$ ,  $\rho_1=60^\circ$ ) і т.2 ( $\varphi_2=318^\circ$ ,  $\rho_2=108^\circ$ ). Побудувати стереографічну проекцію площини відображення, щодо якої симетричні дані напрямки. Знайти координати полюса цієї площини.

*Рішення.*

На кальці проводимо побудову точок 1 та 2 (рис.6.2 а).

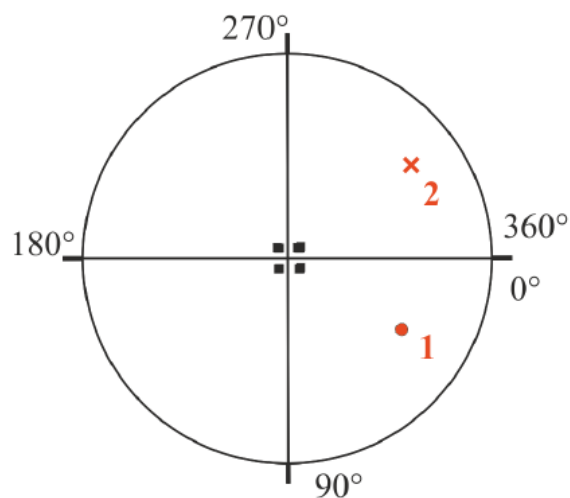


Рис. 6.2а.

Повертаємо кальку таким чином, щоб обидві точки опинилися на одній паралелі (рис.6.2b).

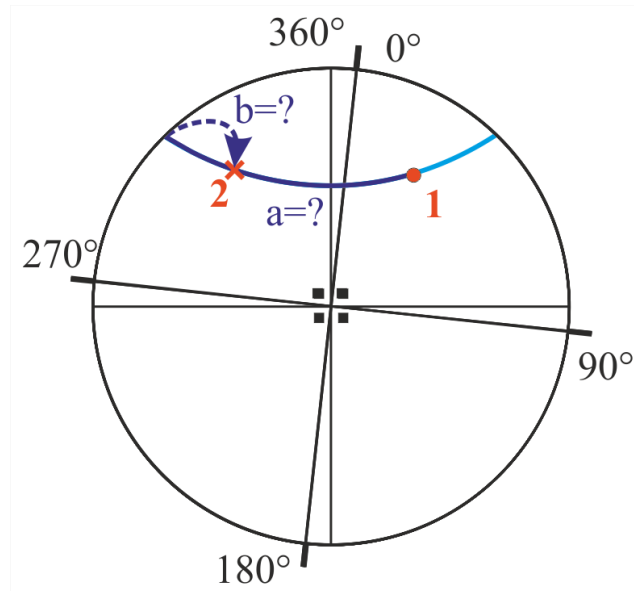


Рис. 6.2b.

Потім по паралелі визначаємо кутову відстань між ними. Так як точка 1 знаходиться у північній півкулі, а точка 2 – у південній, відраховуємо відстань між ними наступним чином. Паралелі від точки 1 у бік точки 2 до краю сфери проєкцій:  $a=130^\circ$ , і від краю проєкцій паралелі до точки 2:  $b=30^\circ$ . Підсумовуємо відстань  $c = a + b = 160^\circ$ , ділимо його навпіл і відзначаємо точку (рис.6.2c).

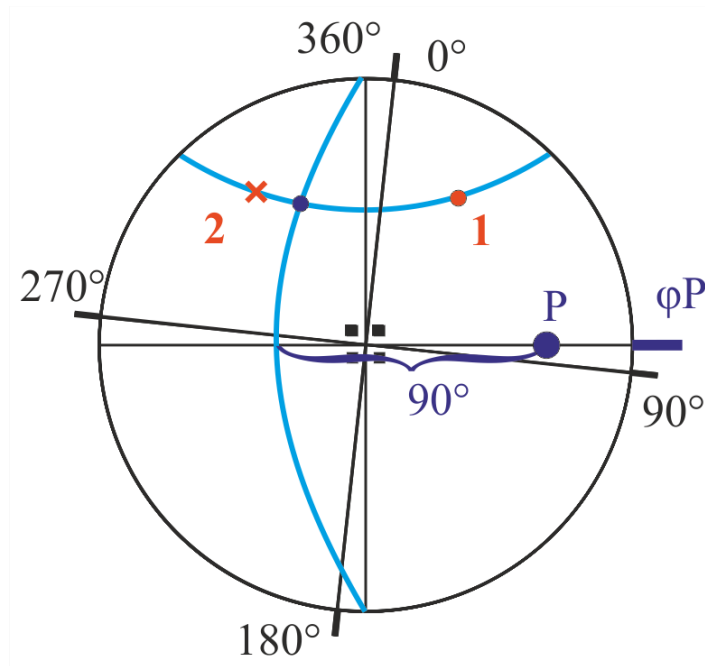


Рис.6.2с

Ця точка знаходиться на перетині паралелі та меридіана, обводимо суцільною лінією знайдений меридіан, який є видимою частиною дуги великого кола. Знаходимо полюс цієї дуги Р. Для цього від точки перетину меридіана та горизонтального діаметра у бік центру проєкцій відраховуємо  $90^\circ$ . Визначаємо його сферичні координати. Для цього по горизонтальному діаметру визначаємо відстань від полюса Р до центру сітки Вульфа (рис.6.2 d) і записуємо  $\rho_P=50^\circ$ .

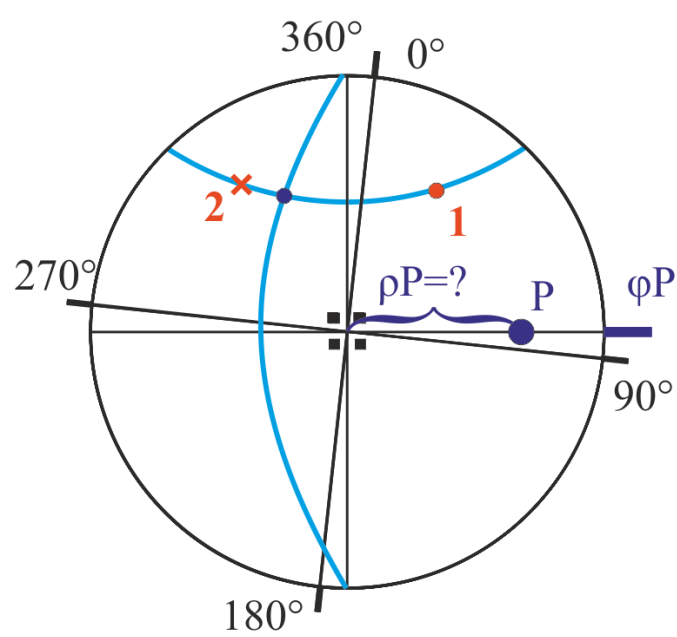


Рис. 6.2d.



Відзначаємо рисою  $\varphi_P$ : продовження горизонтального діаметра від полюса на протилежний бік від центру (рис.6.2 d).

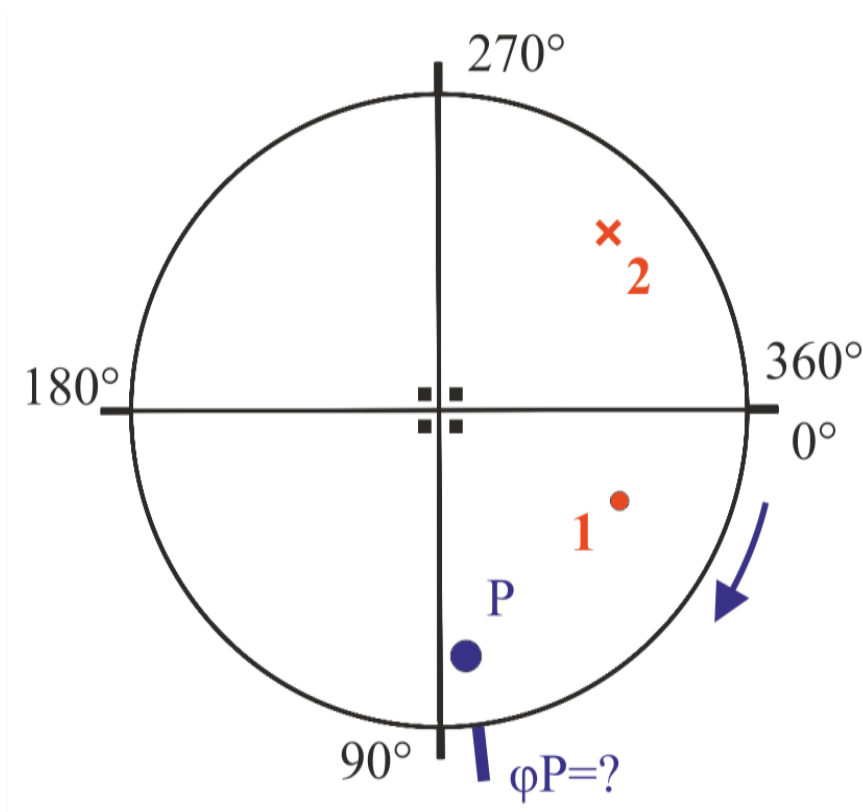


Рис. 6.2 е.

Повертаємо кальку у вихідне положення та за годинниковою стрілкою знаходимо сферичну координату  $\varphi_P=84^\circ$ . (Рис. 6.2 е).

*Відповідь.*  $P (\varphi_P=84^\circ, \rho_P=50^\circ)$

*Домашнє завдання*

Побудувати стереографічну проекцію площини відображення, щодо якої симетричні напрямки, що проходять через ці точки. Знайти координати полюса цієї площини.

- а) т.1 ( $\varphi_1 = 34^\circ, \rho_1 = 25^\circ$ ) і т.2 ( $\varphi_2 = 78^\circ, \rho_2 = 104^\circ$ );
- б) т.3 ( $\varphi_3 = 126^\circ, \rho_3 = 165^\circ$ ) і т.4 ( $\varphi_4 = 238^\circ, \rho_4 = 174^\circ$ );
- в) т.5 ( $\varphi_5 = 22^\circ, \rho_5 = 5^\circ$ ) і т.6 ( $\varphi_6 = 308^\circ, \rho_6 = 160^\circ$ );
- г) т.7 ( $\varphi_7 = 342^\circ, \rho_7 = 55^\circ$ ) і т.8 ( $\varphi_8 = 203^\circ, \rho_8 = 22^\circ$ ).

### Завдання 7

Варіант 1 Два напрямки задані сферичними координатами т.1 ( $\varphi_1 = 170^\circ$ ,  $\rho_1 = 70^\circ$ ) і т.2 ( $\varphi_2 = 330^\circ$ ,  $\rho_2 = 74^\circ$ ). Побудувати стереографічну проекцію осі симетрії 2-го порядку L2, щодо якої симетричні дані напрямки. Знайти сферичні координати виходу цієї осі L2 ( $\varphi_{L2}=?$ ,  $\rho_{L2}=?$ ).

### Рішення

На кальці проводимо побудову точок 1 та 2 (рис.7.1 а).

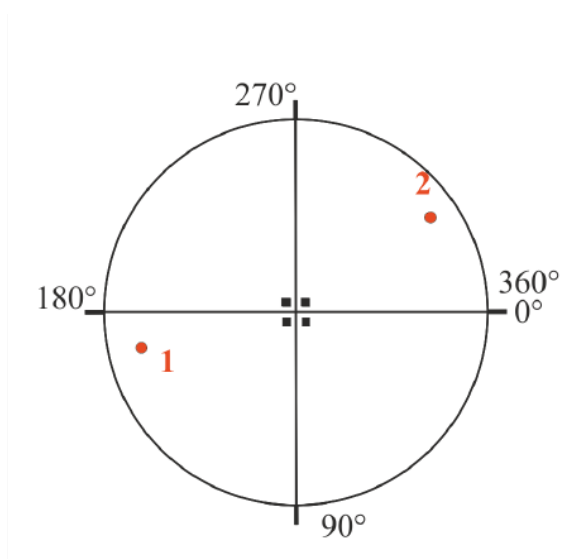


Рис. 7.1а.

Обидві точки перебувають у одній півсфері. Повертаємо кальку навколо центру проєкцій так, щоб вони опинилися на одному меридіані (рис.7.1 б).

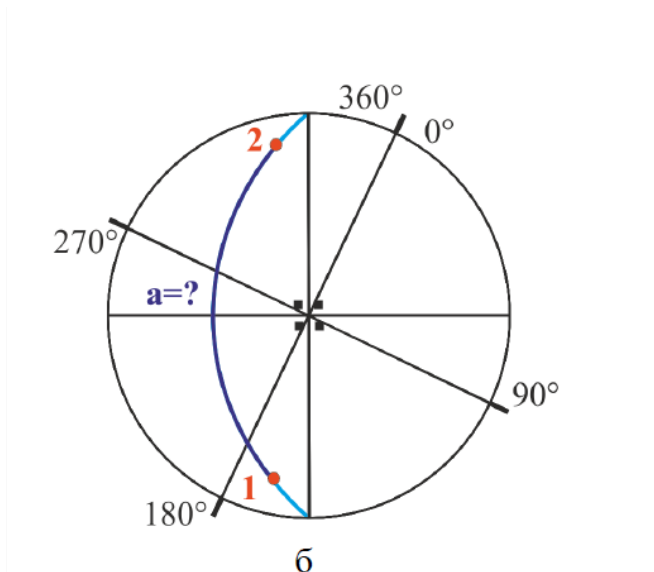


Рис. 7.1б.

Підраховуємо кутову відстань між ними  $a$ , ділимо її навпіл і відзначаємо на меридіані – це точка виходу осі  $L2$  (рис.7.1с).

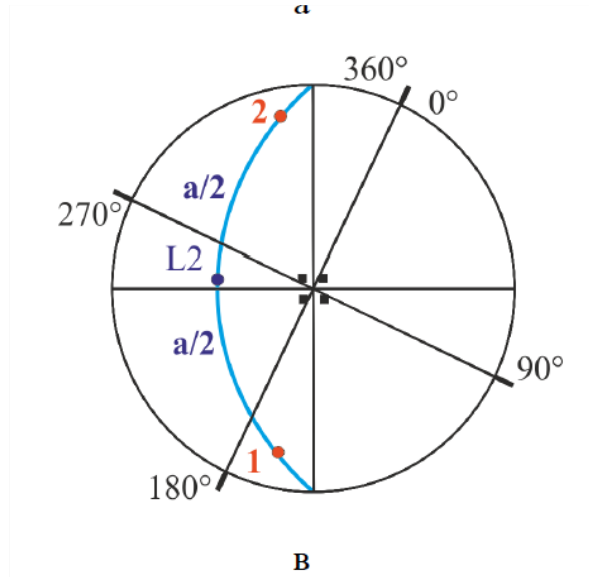


Рис. 7.1с.

Обертаємо кальку до суміщення  $L2$  з горизонтальним або вертикальним діаметром. У випадку із горизонтальним діаметром - рис.7.1d.

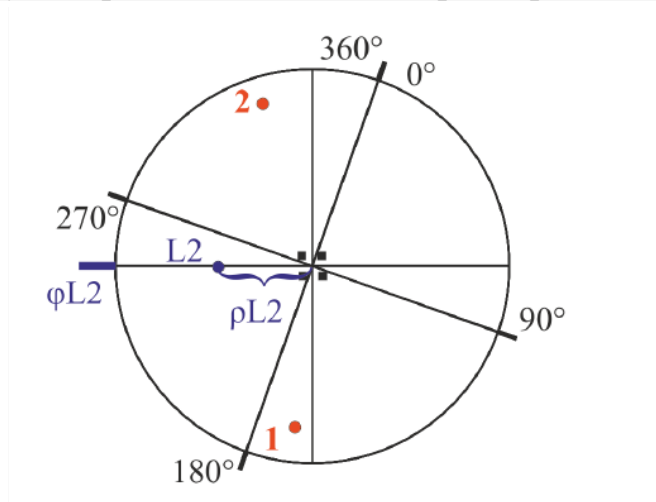


Рис. 7.1d.

На зовнішньому колі рисою відмічаємо  $\varphi_{L2}$ . По горизонтальному діаметру від центру проєкцій до  $L2$  визначаємо  $\rho_{L2}$ . (рис.7.1 d.).Повертаємо

кальку у вихідне положення та за годинниковою стрілкою від нульової позначки до риски  $\varphi_{L2}$  визначаємо  $\varphi_{L2}$  (рис.7.1е).

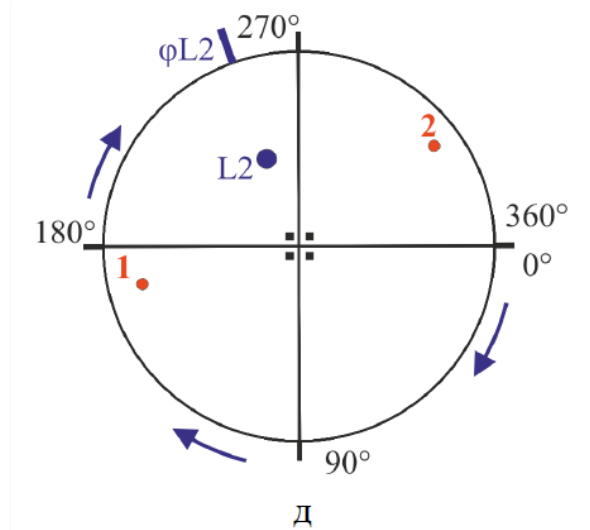


Рис. 7.1е.

*Відповідь.*  $L2$  ( $\varphi_{L2} = 252^\circ$ ,  $\rho_{L2} = 28^\circ$ )

*Завдання 7*

*Варіант 2*

Два напрями задані сферичними координатами т.1 ( $\varphi_1 = 176^\circ$ ,  $\rho_1 = 76^\circ$ ) і т.2 ( $\varphi_2 = 350^\circ$ ,  $\rho_2 = 98^\circ$ ). Побудувати стереографічну проекцію вісі симетрії 2-го порядку  $L2$ , щодо якої симетричні дані напрямки. Знайти сферичні координати виходу цієї вісі  $L2$  ( $\varphi_{L2}=?$ ,  $\rho_{L2}=?$ ).

*Рішення.*

На кальці проводимо побудову точок 1 та 2 (рис.7.2 а)

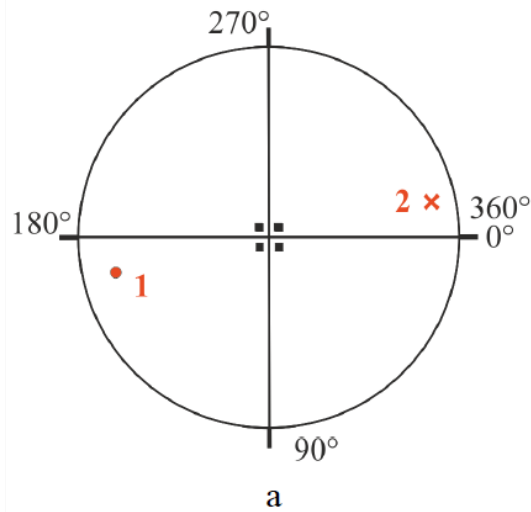


Рис. 7.2а.

Обидві точки перебувають у різних півсферах. Повертаємо кальку навколо центру проєкції таким чином, щоб вони опинилися на двох меридіанах, симетричних щодо вертикального діаметра сітки Вульфа (рис.7.2b).

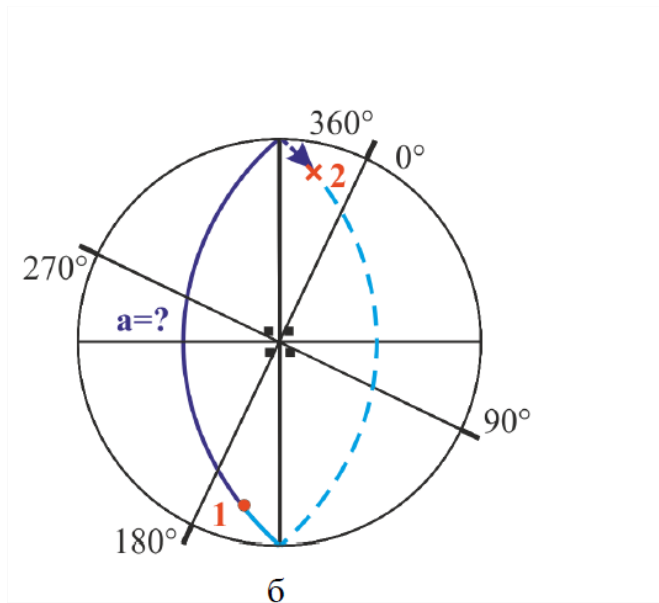


Рис. 7.2б

Підраховуємо кутову відстань між ними: спочатку по видимому меридіану до зовнішнього кола, потім від зовнішнього кола до точки 2 по невидимому меридіану. Знайдену кутову відстань а ділимо навпіл.

Відраховуємо кутове  $a/2$  від точки 1 по видимому меридіану до точки 2 і відзначаємо на меридіані – це точка виходу осі L2 (рис.7.2 с).

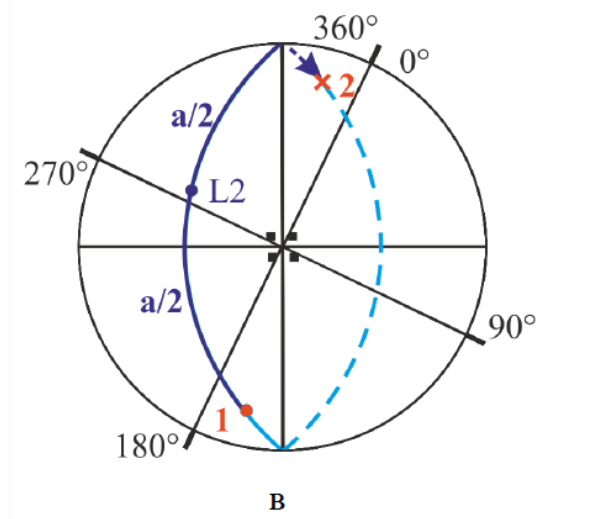


Рис.7.2с

Обертаємо кальку до суміщення L2 з горизонтальним або вертикальним діаметром (рис.7.2 d).

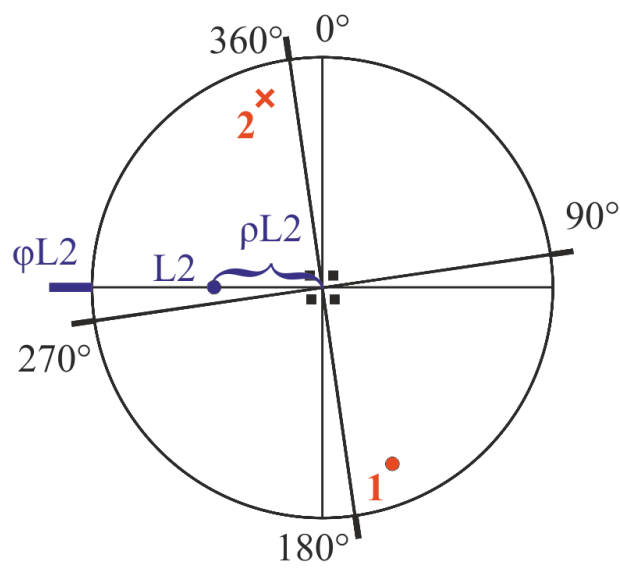


Рис. 7.2d

Зазначаємо на зовнішньому колі  $\varphi_{L2}$ . По діаметру від центру проєкції до L2 визначаємо  $\rho_{L2}$ . Повертаємо кальку у вихідне положення та за годинниковою стрілкою від нульової позначки визначаємо  $\varphi_{L2}$  (рис.7.2. е).

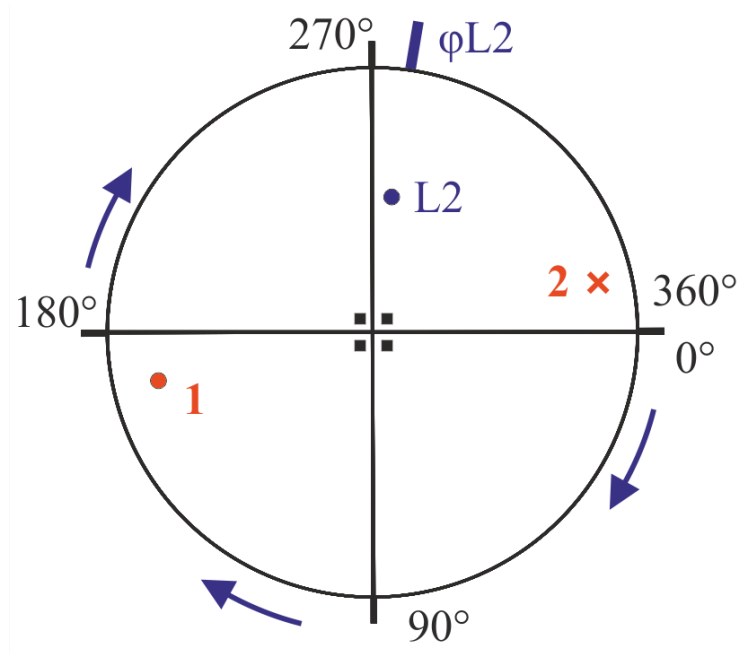


Рис. 7.2е

*Відповідь.* L2 ( $\varphi_{L2} = 283^\circ$ ,  $\rho_{L2} = 32^\circ$ )

*Домашнє завдання*

Два напрямки задані сферичними координатами т.1 та т.2. Побудувати стереографічну проекцію осі симетрії 2-го порядку L2, щодо якої симетричні дані напрямки. Знайти сферичні координати виходу цієї осі L2 ( $\varphi_{L2}=?$ ,  $\rho_{L2}=?$ ).

- а) т.3 ( $\varphi_3 = 36^\circ$ ,  $\rho_3 = 58^\circ$ ) і т.4 ( $\varphi_4 = 102^\circ$ ,  $\rho_4 = 69^\circ$ );
- б) т.5 ( $\varphi_5 = 164^\circ$ ,  $\rho_5 = 111^\circ$ ) і т.6 ( $\varphi_6 = 254^\circ$ ,  $\rho_6 = 105^\circ$ );
- в) т.7 ( $\varphi_7 = 12^\circ$ ,  $\rho_7 = 152^\circ$ ) і т.8 ( $\varphi_8 = 344^\circ$ ,  $\rho_8 = 74^\circ$ );
- г) т.9 ( $\varphi_9 = 28^\circ$ ,  $\rho_9 = 30^\circ$ ) і т.10 ( $\varphi_{10} = 136^\circ$ ,  $\rho_{10} = 160^\circ$ ).

*Завдання 8.*

*Варіант 1.*

Напрямок осі 4-го порядку L4 встановлено сферичними координатами ( $\varphi_{L4}=52^\circ$ ,  $\rho_{L4}=68^\circ$ ). Певна точка 1 має сферичні координати ( $\varphi_1=12^\circ$ ,  $\rho_1=71^\circ$ ). Побудувати стереографічні проєкції точок 2,3,4, симетрично еквівалентних вихідній щодо повороту навколо заданої осі. Знайти сферичні координати одержаних точок: т.2 ( $\varphi_2=?$ ,  $\rho_2=?$ ), т.3 ( $\varphi_3=?$ ,  $\rho_3=?$ ), т.4 ( $\varphi_4=?$ ,  $\rho_4=?$ ).

*Рішення.*

Проводимо побудову L4 та точки 1 на кальці (рис.8.1 а).

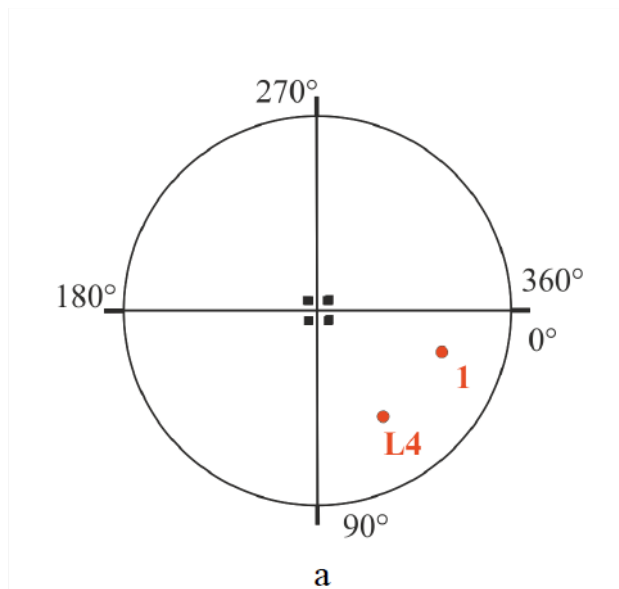


Рис. 8.1a

Повертаємо кальку та виставляємо обидві точки на один меридіан (рис.8.1 б).

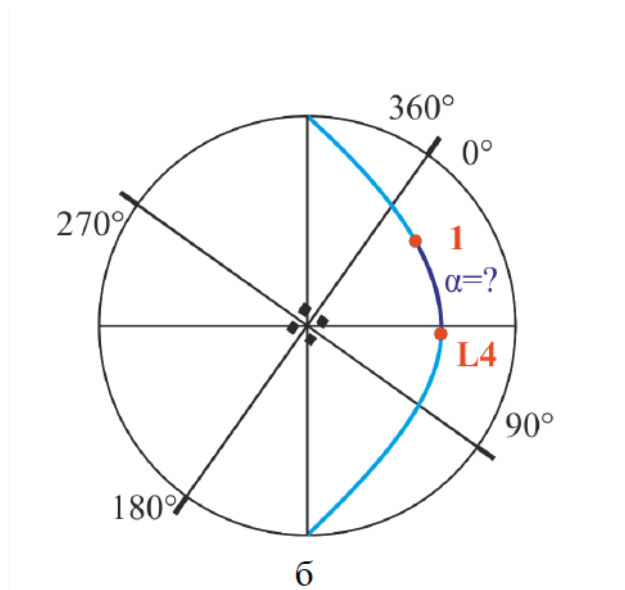


Рис. 8.1б.

Визначаємо кутову відстань між точкою 1 і L4. Відкладаємо його від L4 у протилежний бік від точки 1 (рис.8.1с).



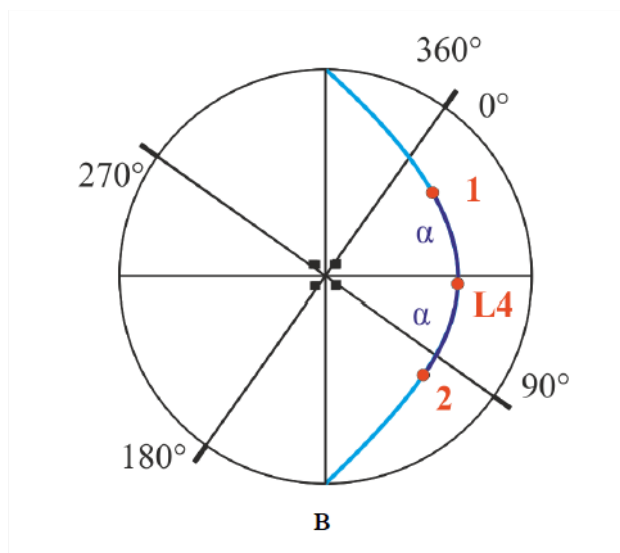


Рис. 8.1с.

Побудовано точку 2. Повертаємо кальку так, щоб точки 1 та 2 опинилися на одній паралелі (рис.8.1 d).

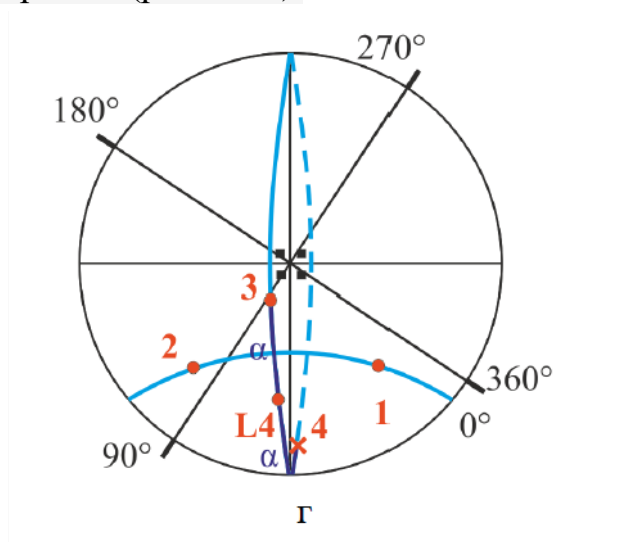


Рис. 8.1d.

Знаходимо середину кутової відстані між ними та меридіан, що перетинає в цій точці паралель. Отриманий меридіан проходить через L4. Вгору і вниз від L4 по меридіану відкладаємо відстань і отримуємо відповідно точки 3 і 4. Знаходимо сферичні координати точок 2, 3, 4.

Відповідь: т.2 ( $\varphi_2=95^\circ$ ,  $\rho_2=78^\circ$ ), т.3 ( $\varphi_3=57^\circ$ ,  $\rho_3=26^\circ$ ), т.4 ( $\varphi_4=49^\circ$ ,  $\rho_4=110^\circ$ )

Задача 8.

Варіант 2 .

Напрямок осі 4-го порядку  $L_4$  встановлено сферичними координатами ( $\varphi_{L_4}=30^\circ$ ,  $\rho_{L_4}=62^\circ$ ). Певна точка 1 має сферичні координати ( $\varphi_1=322^\circ$ ,  $\rho_1=56^\circ$ ). Побудувати стереографічні проекції точок, симетрично еквівалентних вихідній щодо повороту навколо заданої осі. Знайти сферичні координати одержаних точок: т.2 ( $\varphi_2=?$ ,  $\rho_2=?$ ), т.3 ( $\varphi_3=?$ ,  $\rho_3=?$ ), т.4 ( $\varphi_4=?$ ,  $\rho_4=?$ ).

*Рішення.*

Проводимо побудову  $L_4$  та точки 1 на кальці (рис.8.2 а).

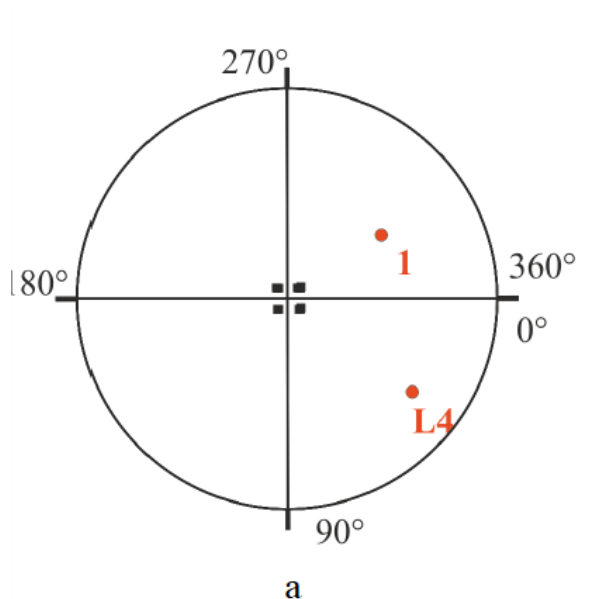


Рис. 8.2а.

Повертаємо кальку та виставляємо обидві точки на один меридіан (рис.8.2 б).

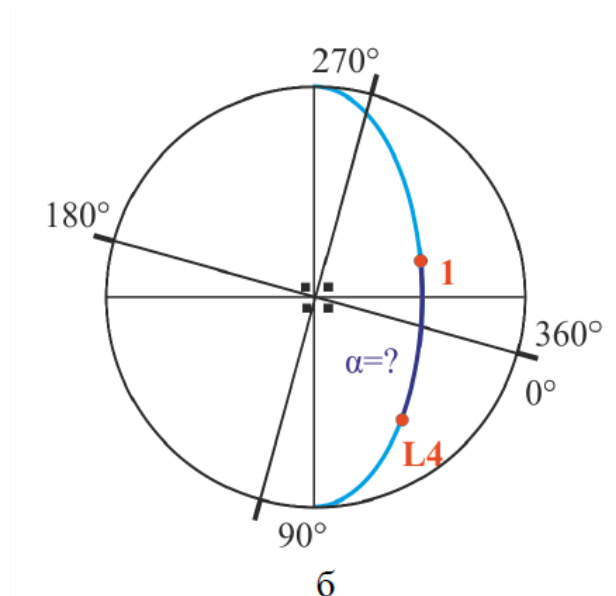


Рис. 8.2б.

Визначаємо кутову відстань між точкою 1 і L4. Відкладаємо його від L4 у протилежний бік від точки 1 (рис.8.2с).

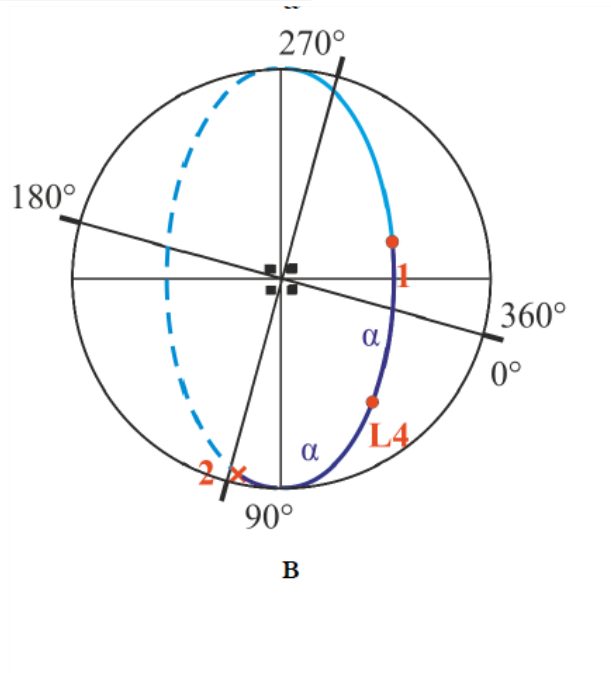


Рис. 8.2с.

Побудовано точку 2. Повертаємо кальку так, щоб точки 1 та 2 опинилися на одній паралелі (рис.8.2 d).

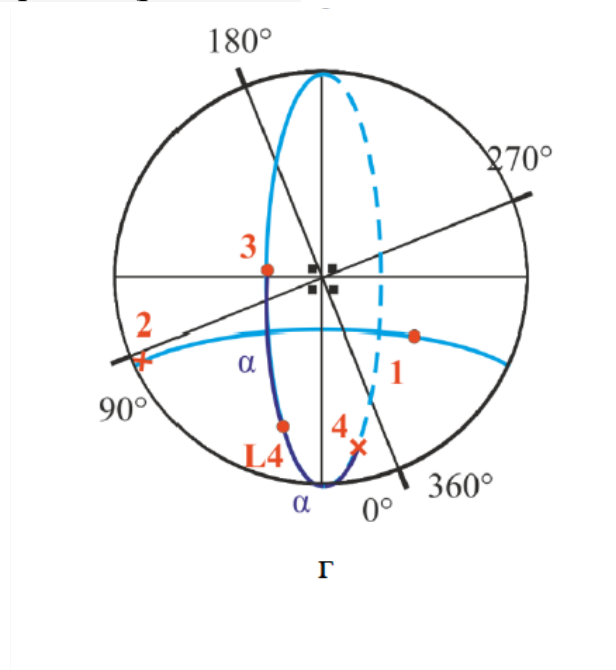


Рис. 8.2d.

Знаходимо середину кутової відстані між ними та меридіан, що перетинає в цій точці паралель. Отриманий меридіан проходить через L4. Вгору і вниз від L4 по меридіану відкладаємо відстань і отримуємо відповідно точки 3 і 4. Знаходимо сферичні координати точок 2,3,4.

Відповідь: т.2 ( $\varphi_2 = 80^\circ$ ,  $\rho_2 = 95^\circ$ ), т.3 ( $\varphi_3 = 103^\circ$ ,  $\rho_3 = 22^\circ$ ), т.4 ( $\varphi_4 = 6^\circ$ ,  $\rho_4 = 115^\circ$ )

*Домашнє завдання:*

Побудувати стереографічні проекції точок, симетрично еквівалентних вихідній точці 1 щодо повороту навколо заданої осі L4. Знайти сферичні координати одержаних точок: т.2 ( $\varphi_2=?$ ,  $\rho_2=?$ ), т.3 ( $\varphi_3=?$ ,  $\rho_3=?$ ), т.4 ( $\varphi_4=?$ ,  $\rho_4=?$ ).

а) L4 ( $\varphi_{L4} = 38^\circ$ ,  $\rho_{L4} = 50^\circ$ ) і т.1 ( $\varphi_1 = 312^\circ$ ,  $\rho_1 = 42^\circ$ );

б) L4 ( $\varphi_{L4} = 290^\circ$ ,  $\rho_{L4} = 84^\circ$ ) і т.1 ( $\varphi_1 = 322^\circ$ ,  $\rho_1 = 56^\circ$ );

в) L4 ( $\varphi_{L4} = 100^\circ$ ,  $\rho_{L4} = 40^\circ$ ) і т.1 ( $\varphi_1 = 50^\circ$ ,  $\rho_1 = 64^\circ$ );

г) L4 ( $\varphi_{L4} = 100^\circ$ ,  $\rho_{L4} = 60^\circ$ ) і т.1 ( $\varphi_1 = 120^\circ$ ,  $\rho_1 = 8^\circ$ ).

*Завдання 9*

*Варіант 1.*

Напрямок задано сферичними координатами т.1 ( $\varphi_1=40^\circ$ ,  $\rho_1=52^\circ$ ).

Побудувати всі можливі напрямки, що утворюють кут  $\alpha=30^\circ$  із заданим.

*Рішення.*

Навколо напрямку, стереографічна проекція якого задається точкою 1, є безліч напрямків, відхилених від початкового на той самий кут і утворюють в сукупності конус з кутом розтвору  $2\alpha$ . Перетин цього конуса з поверхнею сфери дає невелике коло, в центрі якого знаходиться точка перетину заданого напрямку зі сферою. Проводимо побудову заданої сферичними координатами точки 1 (рис.9.1 а).

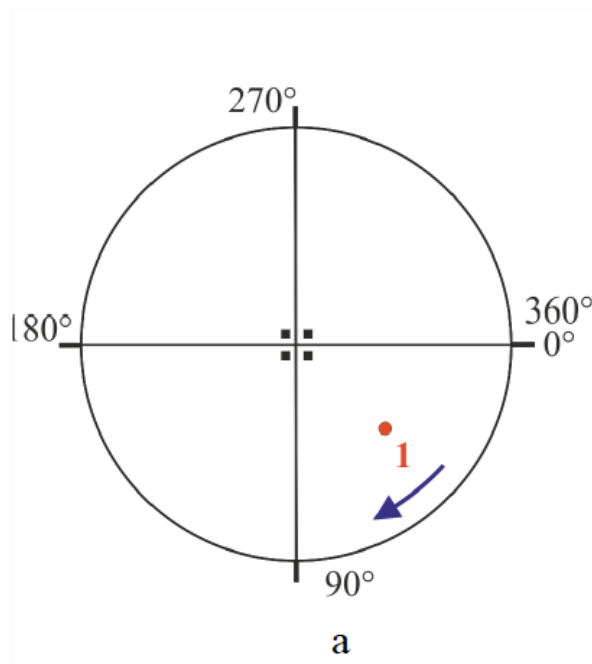


Рис. 9.1а.

По меридіану сітки Вульфа, на якому знаходиться точка 1, вгору та вниз від неї відкладаємо кутову відстань  $\alpha$  та відзначаємо рисками (рис.9.1 б).

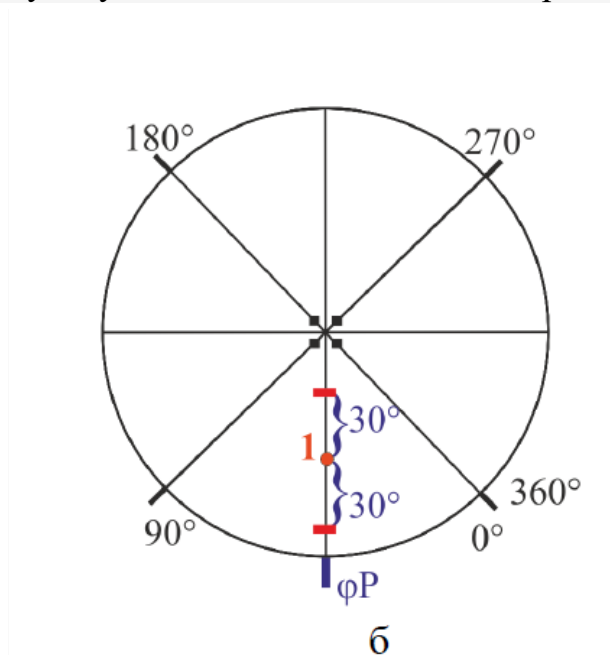


Рис. 9.1б.

Обертаємо кальку, переміщуючи точку 1 на інший меридіан (рис.9.1с).

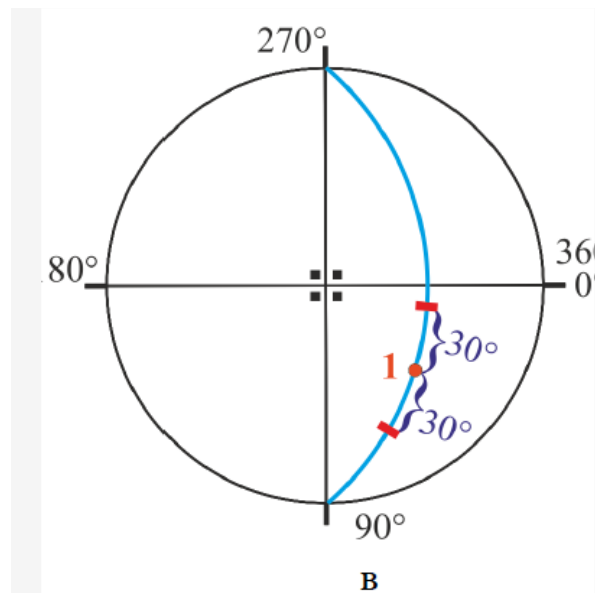


Рис. 9.1с.

Проводимо такі ж дії. Такий прийом повторюємо до того часу, поки отримані точки чітко описуватиме коло (рис.9.1 d).

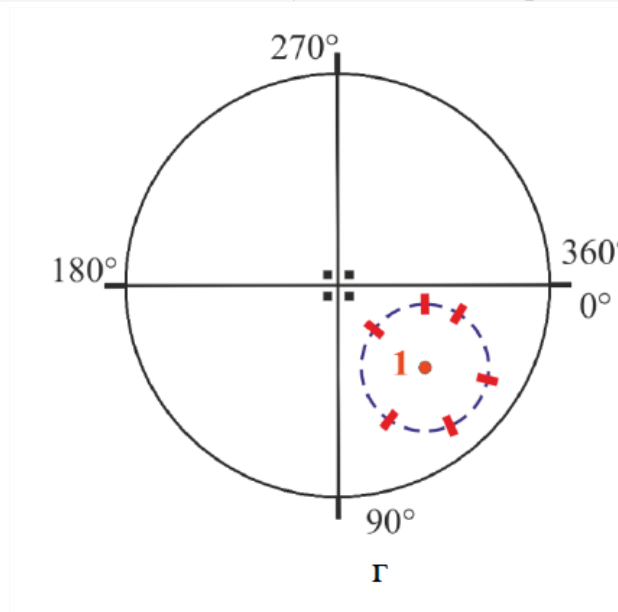


Рис. 9.1d.

Побудова малого кола у даних умовах завдання можна здійснити за наявності циркуля. У цьому випадку поворотом кальки задану точку переводять на горизонтальний діаметр сітки і праворуч і ліворуч від неї відраховують потрібний кут. Потім, взявши геометричну середину знайденого відрізка за центр, викреслюють коло.

**Завдання 9.**

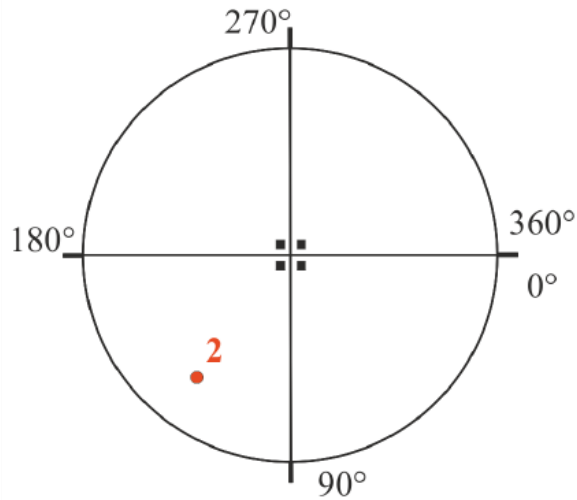
**Варіант 2.**

Напрямок задано сферичними координатами т.2 ( $\varphi_2 = 128^\circ$ ,  $\rho_2 = 76^\circ$ ).

Побудувати всі можливі напрямки, що утворюють кут  $\alpha=60^\circ$  із заданим.

**Рішення.**

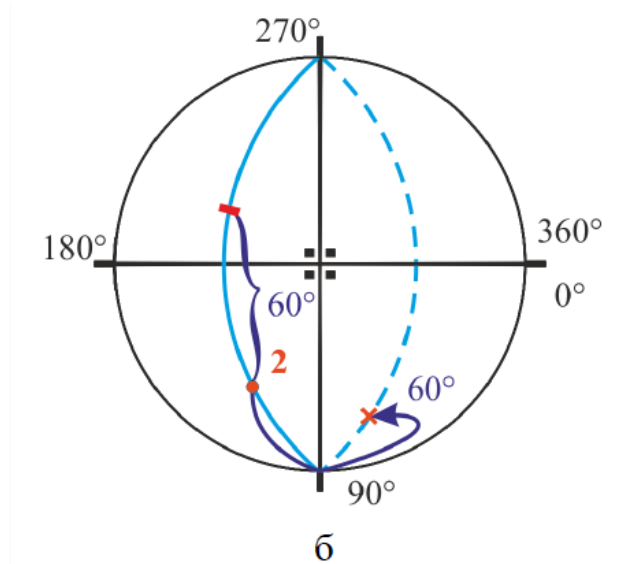
Проводимо побудову точки 2, заданої сферичними координатами (рис.9.2 а).



а

Рис.9.2а.

По меридіану сітки Вульфа, на якому знаходиться точка 2, вгору і вниз від неї відкладаємо кутову відстань і відзначаємо точками (рис.9.2 б).



б

Рис. 2.9.2б.

В даному випадку відлік вниз буде продовжений по симетричному меридіану щодо вертикального діаметра. Відзначаємо цю точку хрестиком. Обертаємо кальку, переміщуючи точку на інший меридіан (рис.9.2с).

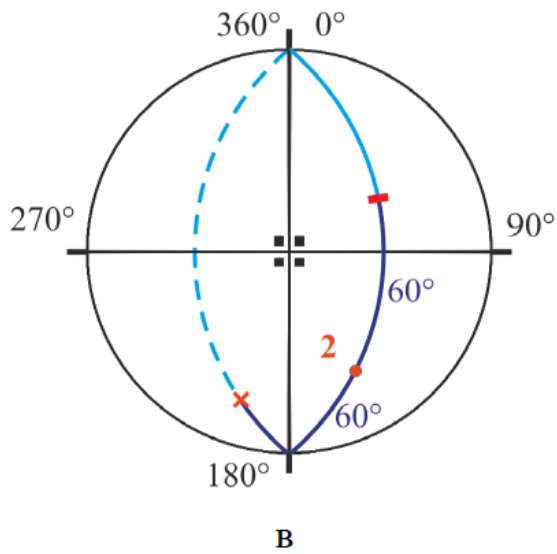


Рис. 9.2с.

Проводимо такі ж дії. Такий прийом повторюємо до того часу, поки отримані точки чітко описуватиме дуги кола: одна видима, інша невидима (рис.9.2 d).

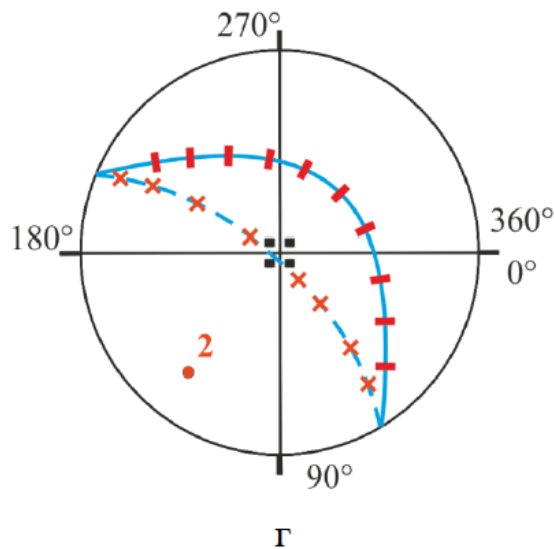


Рис. 9.2d.

*Домашнє завдання.*

Побудувати стереографічну проекцію всіх можливих напрямків, що утворюють кут  $\alpha$  із заданим:

3) А ( $\varphi_A = 345^\circ$ ,  $\rho_A = 16^\circ$ ),  $\alpha = 45^\circ$ ,

4) В ( $\varphi_B = 196^\circ$ ,  $\rho_B = 50^\circ$ ),  $\alpha = 30^\circ$ ,



5) D ( $\varphi_D=104^\circ$ ,  $\rho_D=45^\circ$ ),  $\alpha=60^\circ$ ,

6) E ( $\varphi_E = 16^\circ$ ,  $\rho_E = 60^\circ$ ),  $\alpha = 70^\circ$ .

Побудова малих кутів широко використовується при вирішенні завдань, коли по двох заданих точках і кутах між ними і третьою точкою, що шукається, потрібно визначити цю шукану.

### Завдання 10.

Полюси двох дуг великого кола задані наступними сферичними координатами т.1 ( $\varphi_1=199^\circ$ ,  $\rho_1=72^\circ$ ), т.2 ( $\varphi_2=228^\circ$ ,  $\rho_2=60^\circ$ ). Побудувати стереографічну проєкцію вісі зони Z, поворотом навколо якої поєднуються ці дуги великого кола. Визначити сферичні координати вісі зони Z ( $\varphi_Z=?$ ,  $\rho_Z=?$ ) та величину повороту  $\alpha=?$

### Рішення.

На кальці будуємо точки 1 та 2 (рис.10 а).

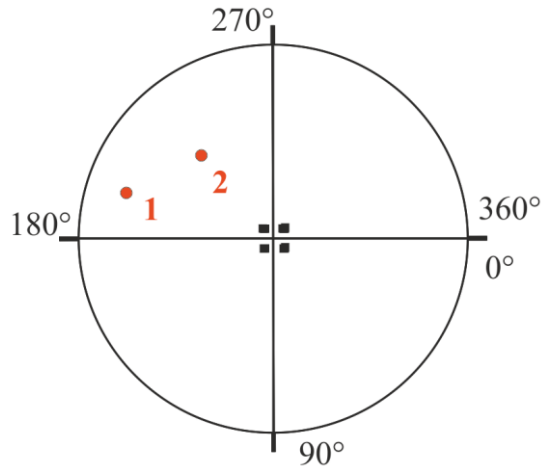


Рис. 10а.

Далі повертаємо кальку таким чином, щоб точка 1 виявилася на горизонтальному діаметрі сітки Вульфа (рис.2.10 б).

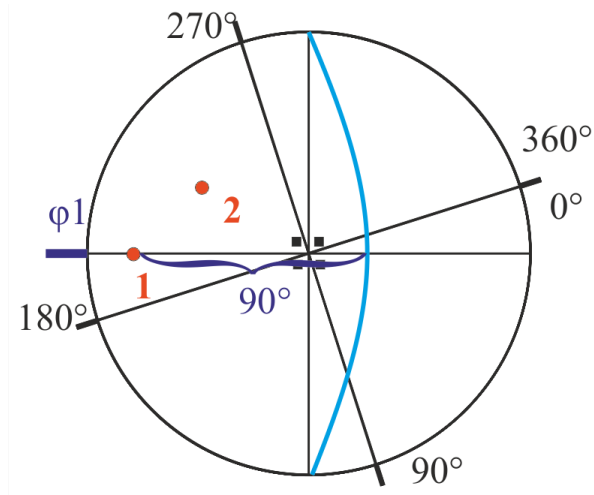


Рис. 2.10б.

Від точки 1 до центру сітки Вульфа відраховуємо  $90^\circ$  і робимо засічку. Обводимо меридіан, що проходить через засічку. Аналогічно, повертаючи кальку, ставимо точку 2 на горизонтальний діаметр сітки Вульфа і отримуємо другий меридіан (рис.10с).

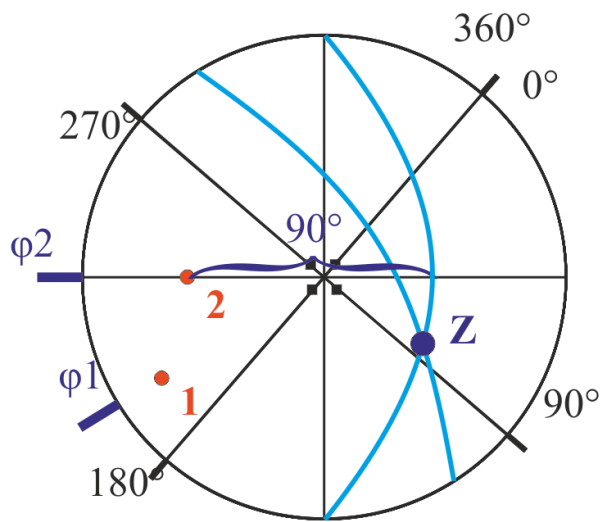


Рис. 10с.

Точка перетину отриманих меридіанів – вісь зони Z. Знаходимо сферичні координати точки Z (рис.10 d).

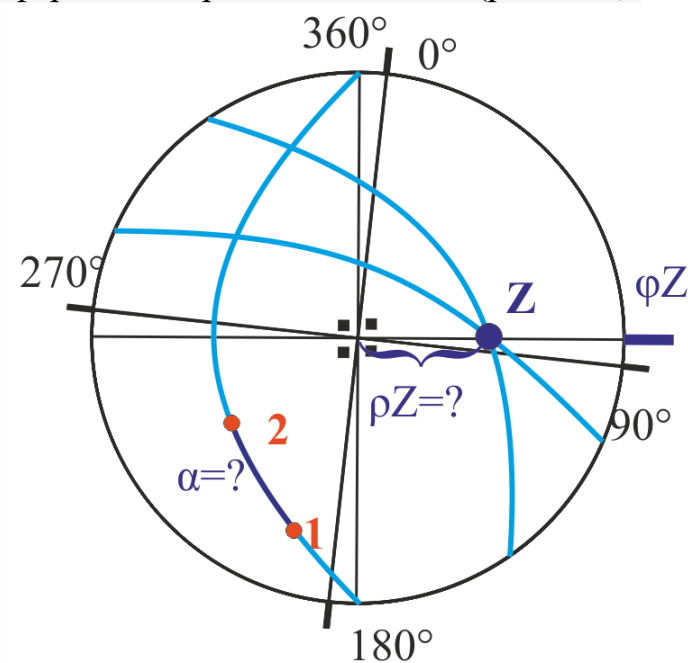


Рис. 10d.

Розміщуємо точку  $Z$  на горизонтальному діаметрі сітки Вульфа. Відраховуємо  $90^\circ$  від точки  $Z$  у бік центру сітки Вульфа. Ставимо засічку і через неї проводимо меридіан. Точки 1 і 2 виявляються на цьому меридіані (рис.10 d). За меридіаном знаходимо кутову відстань між точками 1 і 2:  $=28^\circ$ .

*Відповідь.*  $Z$  ( $\varphi_Z = 82^\circ$ ,  $\rho_Z = 35^\circ$ ),  $\alpha = 28^\circ$ .

*Домашнє завдання:*

Побудувати стереографічну проекцію вісі зони  $Z$ , поворотом навколо якої поєднуються дуги кола, задані полюсами т.Рк і т.Рм. Визначити величину повороту =? а) т. Р1 ( $\varphi_1 = 58^\circ$ ,  $\rho_1 = 46^\circ$ ), т. Р2 ( $\varphi_2 = 260^\circ$ ,  $\rho_2 = 50^\circ$ ); б) т. Р3 ( $\varphi_3 = 80^\circ$ ,  $\rho_3 = 20^\circ$ ), т. Р4 ( $\varphi_4 = 174^\circ$ ,  $\rho_4 = 42^\circ$ ); в) т. Р5 ( $\varphi_5 = 302^\circ$ ,  $\rho_5 = 18^\circ$ ), т. Р6 ( $\varphi_6 = 110^\circ$ ,  $\rho_6 = 30^\circ$ ). г) т. Р7 ( $\varphi_7 = 125^\circ$ ,  $\rho_7 = 64^\circ$ ), т. Р8 ( $\varphi_8 = 358^\circ$ ,  $\rho_8 = 26^\circ$ ).

*Відповіді:* 2.3: а) ( $\varphi = 150^\circ$ ,  $\rho = 128^\circ$ ); б) ( $\varphi = 335^\circ$ ,  $\rho = 45^\circ$ ); в) ( $\varphi = 85^\circ$ ,  $\rho = 120^\circ$ ); г) ( $\varphi = 240^\circ$ ,  $\rho = 29^\circ$ ). 2.4: а)  $129^\circ$ , б)  $121^\circ$ , в)  $158^\circ$ , г)  $85^\circ$ . 2.5: а) ( $\varphi = 198^\circ$ ,  $\rho = 22^\circ$ ); б) ( $\varphi = 191^\circ$ ,  $\rho = 57^\circ$ ); в) ( $\varphi = 4^\circ$ ,  $\rho = 22^\circ$ ); г) ( $\varphi = 74^\circ$ ,  $\rho = 70^\circ$ ). 2.6: а) ( $\varphi = 283^\circ$ ,  $\rho = 32^\circ$ ); б) ( $\varphi = 286^\circ$ ,  $\rho = 87^\circ$ ); в) ( $\varphi = 116^\circ$ ,  $\rho = 10^\circ$ ); г) ( $\varphi = 175^\circ$ ,  $\rho = 73^\circ$ ). 2.7: 2) ( $\varphi = 72^\circ$ ,  $\rho = 60^\circ$ ); 3) ( $\varphi = 32^\circ$ ,  $\rho = 66^\circ$ ); 4) ( $\varphi = 172^\circ$ ,  $\rho = 68^\circ$ ); 5) ( $\varphi = 242^\circ$ ,  $\rho = 80^\circ$ ). 2.8: а) т.2 ( $\varphi_2 = 150^\circ$ ,  $\rho_2 = 50^\circ$ ), т.3 ( $\varphi_3 = 228^\circ$ ,  $\rho_3 = 52^\circ$ ), т.4 ( $\varphi_4 = 58^\circ$ ,  $\rho_4 = 36^\circ$ ); б) т.2 ( $\varphi_2 = 260^\circ$ ,  $\rho_2 = 110^\circ$ ), т.3 ( $\varphi_3 = 254^\circ$ ,  $\rho_3 = 60^\circ$ ), т.4 ( $\varphi_4 = 320^\circ$ ,  $\rho_4 = 108^\circ$ ); в) т.2 ( $\varphi_2 = 168^\circ$ ,  $\rho_2 = 50^\circ$ ), т.3 ( $\varphi_3 = 342^\circ$ ,  $\rho_3 = 11^\circ$ ), т.4 ( $\varphi_4 = 111^\circ$ ,  $\rho_4 = 86^\circ$ ); г) т.2 ( $\varphi_2 = 187^\circ$ ,  $\rho_2 = 114^\circ$ ), т.3 ( $\varphi_3 = 242^\circ$ ,  $\rho_3 = 68^\circ$ ), т.4 ( $\varphi_4 = 124^\circ$ ,  $\rho_4 = 80^\circ$ ). 2.10: 2)  $Z$  ( $\varphi = 338^\circ$ ,  $\rho = 80^\circ$ ),  $\alpha = 94^\circ$ ; 3)  $Z$  ( $\varphi=286^\circ$ ,  $\rho=72^\circ$ ),  $\alpha=47^\circ$ ; 4)  $Z$  ( $\varphi = 204^\circ$ ,  $\rho = 87^\circ$ ),  $\alpha = 48^\circ$ ; 5)  $Z$  ( $\varphi = 225^\circ$ ,  $\rho = 72^\circ$ ),  $\alpha = 82^\circ$ .

## Література

1. Основи кристалографії: навчальний посібник/ Укл.: І.М. Фодчук, О.О. Ткач. – Чернівці: ЧНУ, 2007. 108 с.
2. Зиман З. З. Основи структурної кристалографії: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2008. 212 с.
3. Геометрична кристалографія. Ч. 1: навч. посібник / Н.О. Словотенко, І.Т. Бакуменко. – Львівський національний університет імені Івана Франка, 2015. – 96 с.
4. Бойко Ю.І., Методичний посібник до вивчення курсу «Кристалофізика», Харків, 1990, 62 с.
5. Глосковська Н.К., Основи кристалофізики (методичний посібник), Київ, 1992, 78 с.
6. І.М. Фодчук, О.О. Ткач. Основи кристалографії: навчальний посібник. Чернівці: ЧНУ, 2007. 108 с.
7. UN announcement "International Year of Crystallography". [iycr2014.org](http://iycr2014.org). 12 July 2012
8. "The Evolution of the Goniometer". *Nature*. **95** (2386): 564–565. 1915-07-01. Bibcode:1915Natur..95..564.. doi:10.1038/095564a0. ISSN 1476-4687.
9. Wlodawer, Alexander; Minor, Wladek; Dauter, Zbigniew; Jaskolski, Mariusz (January 2008). "Protein crystallography for non-crystallographers, or how to get the best (but not more) from published macromolecular structures". *The FEBS Journal*. **275** (1): 1–21. doi:10.1111/j.1742-4658.2007.06178.x. ISSN 1742-464X. PMC 4465431. PMID 18034855.
10. Snigirev, A. (2007). "Two-step hard X-ray focusing combining Fresnel zone plate and single-bounce ellipsoidal capillary". *Journal of Synchrotron Radiation*. **14** (Pt 4): 326–330. doi:10.1107/S0909049507025174. PMID 17587657.
11. "Materials Science and Engineering: An Introduction, 10th Edition | Wiley". [Wiley.com](http://Wiley.com). Retrieved 2022-09-10.
12. Kendrew, J. C.; Bodo, G.; Dintzis, H. M.; Parrish, R. G.; Wyckoff, H.; Phillips, D. C. (1958). "A Three-Dimensional Model of the Myoglobin Molecule Obtained by X-Ray Analysis". *Nature*. **181** (4610): 662–6. Bibcode:1958Natur.181..662K. doi:10.1038/181662a0. PMID 13517261. S2CID 4162786.
13. Kahr, Bart (2015). "Broader Impacts of Women in Crystallography". *Crystal Growth & Design*. **15** (10): 4715–4730. doi:10.1021/acs.cgd.5b00457. ISSN 1528-7483.
14. Ferry, Georgina (2014). "History: Women in crystallography". *Nature*. **505** (7485): 609–611. Bibcode:2014Natur.505..609F. doi:10.1038/505609a. ISSN 1476-4687. PMID 24482834.

15. Sanz-Aparicio, Julia (2015). "Vista de El legado de las mujeres a la cristalografía | Arbor". Arbor. **191** (772): a216. doi:10.3989/arbor.2015.772n2002. Archived from the original on 2015-09-07.
16. Watson, James D. (2000), Discovering the double helix, Cold Spring Harbor Laboratory, ISBN 978-0-87969-622-1, OCLC 48554849
17. Glusker, Jenny Pickworth; Trueblood, Kenneth N; International Union of Crystallography (2020). Crystal structure analysis: a primer. ISBN 978-0-19-191790-5. OCLC 1241842166.
18. Prince, E. (2006). International Tables for Crystallography Vol. C: Mathematical, Physical and Chemical Tables. Wiley. ISBN 978-1-4020-4969-9. OCLC 166325528. OL 9332669M. Archived from the original on 6 May 2022.

Додаток 1.

