МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації

для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння»

Розділ: Диференціальні рівняння вищих порядків

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика**).**

Одеса 2023

УДК 517

Рекомендовано до друку Вченою радою Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»
протокол № _______ від ______________ 2023 року

1. **Волкова М. Г.** - кандидат ф-м. наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики державного університету інтелектуальних технологій і зв'язку.

2. **Болдарєва О. М.** - кандидат ф-м. наук, доцент кафедри вищої математики і статистики.

Урум Г. Д. , Олефір О. І.

Методичні рекомендації для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни *«Диференціальні рівняння»,* Розділ: Диференціальні рівняння вищих порядків:

Одеса : Університет Ушинського, 2023. 44 с.

Методичні рекомендації для проведення практичних занять, організації самостійної роботи з навчальної дисципліни *«Диференціальні рівняння»,* Розділ: Диференціальні рівняння вищих порядків, містять загальний теоретичний матеріал, вирішенні приклади, вправи для самостійного розв'язання.

Рекомендовано для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) з метою закріплення, поглиблення й узагальнення знань, одержаних під час навчання.

.

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістовий модуль 2. Диференціальні рівняння вищих порядків

Тема 4. Рівняння вищих порядків

Задача Коші для рівняння вищого порядку. Зведення рівняння вищого порядку до нормальної системи диференціальних рівнянь. Теорема Коші для нормальної системи. Теорема Коші для рівняння вищого порядку. Рівняння вищих порядків, які інтегруються в квадратурах. Рівняння, які допускають пониження порядку.

Тема 5. Лінійні рівняння n-го порядку

Загальні властивості лінійних рівнянь. Лінійне однорідне рівняння. Загальна теорія цього рівняння. Лінійно залежні і незалежні системи функцій. Визначник Вронського. Його властивості. Фундаментальна система розв’язків лінійного однорідного рівняння. Структура загального розв’язку лінійного однорідного рівняння n-го порядку. Формула Остроградського–Ліувілля. Лінійне неоднорідне рівняння. Загальний розв’язок цього рівняння. Метод варіації сталих. Лінійні рівняння з сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів. Лінійні рівняння, які зводяться до рівнянь з сталими коефіцієнтами. Рівняння Ейлера.

Тема 6. Системи диференціальних рівнянь

Зведення нормальної системи диференціальних рівнянь до одного рівняння. Загальний розв’язок і загальний інтеграл нормальної системи. Перші інтеграли. Необхідна і достатня умова першого інтеграла. Симетричні системи. Перші інтеграли симетричної системи. Лінійні системи диференціальних рівнянь. Структура загального розв’язку лінійної однорідної та неоднорідної системи. Метод варіації сталих. Лінійні системи з сталими коефіцієнтами.

Зміст

Диференціальні рівняння вищих порядків

1. Загальні поняття та означення

Означення. Диференціальним рівнянням n −го порядку називається рівняння вигляду

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (1.1)$$

або, якщо воно розв'язане відносно старшої похідної,

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right), \qquad (1.2)$$

де функція f визначена і неперервна в деякій області D зміни своїх аргументів.

Означення. Розв'язком диференціального рівняння (1.2) називається будь-яка n разів неперервно-диференційовна функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в це рівняння обертає його в тотожність:

$$\varphi^{(n)}(x) = f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)\right).$$

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння n −го порядку (1.2) називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, де $C_1, C_2, \dots, C_n$ − довільні сталі, яка задовольняє умовам:

1) функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ є розв'язком цього рівняння для будь-яких значень $C_1, C_2, \dots, C_n$;
2) для будь-яких початкових умов

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0 \qquad (1.3)$$

Існують єдині значення сталих $C_1 = C_1^0,\ C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$ такі, що функція $y = \varphi(x, C_1^0, \dots, C_n^0)$ є розв'язком цього рівняння і задовольняє початкові умови (1.3).

Означення. Будь – який розв'язок $y = \varphi(x, C_1^0, \dots, C_n^0)$ рівняння (1.2), який отримано із загального розв'язку при конкретних значеннях сталих $C_1 = C_1^0,\ C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$, називається *частинним розв'язком*.

Означення. Розв'язок диференціального рівняння (1.2), записаний у вигляді $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ або $\Phi(x, y, C_1^0, \dots, C_n^0) = 0$, називається *загальним* або *частинним інтегралом* відповідно.

Означення. Графік будь-якого розв’язку диференціального рівняння n −го порядку називається інтегральною кривою.

Загальний розв’язок диференціального рівняння (1.2) зображує множину інтегральних кривих; частинний розв’язок – одну інтегральну криву цієї множини.

Означення. Задача знаходження розв’язку диференціального рівняння (1.2), який задовольняє заданим початковим умовам (1.3), називається *задачею Коші.*

Теорема Коші (існування та єдності розв’язку).

Якщо в диференціальному рівнянні (1.2) функція $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ та її частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ неперервні в деякій області D зміни змінних $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, то для будь-якої точки $\left(x_0; y_0; y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right) \in D$ існує єдиний розв’язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкові умови (1.3).

Геометричний зміст задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку полягає в тому, що при виконанні умов теореми існує єдина інтегральна крива, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і має в цій точці дотичну із зданим кутовим коефіцієнтом $y'(x_0) = y_0'$.

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням n-го порядку?

2. Що називається розв’язком диференціальним рівнянням n-го порядку?

3. Який розв’язок диференціального рівняння n-го порядку називається загальним?

4. Який розв’язок диференціального рівняння n-го порядку називається частинним?

5. Що називають загальним і частинним інтегралом диференціального рівняння n-го порядку?

6. Дати геометричну інтерпретацію загального та частинного розв'язку диференціального рівняння n-го порядку?

7. Скільки сталих інтегрування містить загальний розв’язок диференціального рівняння 2-го порядку?

8. Сформулюйте постановку задачі Коші для диференціального рівняння n-го порядку та її геометричний зміст для диференціального рівняння 2-го порядку.

9. Сформулюйте теорему про існування та єдиність розв’язку задачі Коші для диференціального рівняння n-го порядку.

2. Диференціальні рівняння вищих порядків що допускають зниження порядку

Розв’язування деяких диференціальних рівнянь вищих порядків можна звести до розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку за допомогою певної заміни змінних. Розглянемо деякі типи таких рівнянь, які допускають зниження порядкую

1. Рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x) \tag{2.1}$$

яке містить тільки похідну n –го порядку і незалежну змінну x, розв’язуються послідовним n кратним інтегруванням.

Зайдемо загальний розв’язок рівняння (2.1) для цього помножимо обидві частини цього рівняння на dx та інтегрувавши

$$\int y^{(n)} dx = \int f(x) dx,$$

Отримаємо

$$y^{(n-1)} = \varphi_1(x) + C_1,$$

де $\varphi_1(x)-$ первісна, C_1 –довільна стала інтегрування. В результаті порядок отриманого диференціального рівняння знизився на одиницю.

Провівши аналогічні дії з отриманим рівнянням, можемо ще раз знизити його порядок на одиницю:

$$\int y^{(n-1)}dx = \int \varphi_1(x)dx + \int C_1 dx,$$

$$y^{(n-2)} = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2$$

де $\varphi_2(x)$ – первісна, C_1, C_2 –довільні сталі інтегрування.

Повторюючи цей процес інтегрування n разів, отримаємо загальний розв'язок рівняння (2.1):

$$y = \varphi_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \cdots + C_{n-1}x + C_n$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{(3)} = sin3x.$$

Розв'язання. Дане диференціальне рівняння 3-го порядку вигляду $y^{(n)} = f(x)$ Тому його загальний розв'язок знайдемо послідовним трехкратним інтегруванням за змінною x.

$$\int y^{(3)}dx = \int sin3xdx \qquad y'' = -\frac{1}{3}cos3x + C_1,$$

$$y' = -\frac{1}{3}sin3x + C_1 x + C_2$$

$$y = \frac{1}{27}cos3x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

2. *Диференціальне рівняння другого порядку вигляду*

$$y'' = f(x, y') \qquad F(x, y', y'') = 0 \qquad (2.2)$$

яке явно не містить шуканої функції y.

Порядок такого рівняння можна знизити за допомогою заміни:

$$y' = p(x),$$

де $p = p(x)$ нова невідома функція. Тоді

$$y" = p'(x)$$

і рівняння (2.2) стає диференціальним рівнянням першого порядку відносно нової змінної $p(x)$ вигляду

$$F(x, p, p') = 0 \qquad (2.3)$$

Знайшовши для рівняння (2.3) загальний розв'язок $p = \varphi(x, C_1)$, повертаємось до функції y, зробивши обернену заміну

$$p = y'$$

В результаті знову отримвємо диференціальне рівняння першого порядку відносно функції y, вигляду (2.1):

$$y' = \varphi(x, C_1),$$

яке інтегрується, і дає загальний розв'язок рівняння (2.2)

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$$

Зауваження

1. Частиним випадком рівняння (2.2) є рівняння вигляду.

$$y' = f(y') \tag{2.4}$$

яке також не містить явно шуканої функції y та незалежної змінної x.

Метод його розв'язування такий самий, за допомогою заміни

$$y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'(x)$$

Тоді рівняння (2.4) приймає вигляд рівняння з відокремлюваними змінними:

$$p' = f(p).$$

2) Узагальненням рівняння (2.2) є рівняння вигляду

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.5}$$

яке явно не містить шуканої функції y та її похідних до $(\text{к} - 1)$ −го порядку включно.

Його порядок може бути знижений на k одиниць до $(n - k)$ −го порядку заміною змінної

$$y^{(k)} = p(x) \Rightarrow y^{(k+1)} = p'(x), y^{(k+2)} = p''(x), \dots, y^{(n)} = p^{(n-k)}(x)$$

і рівняння (2.5) приймає вигляд

$$F\left(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}\right) = 0$$

Зокрема, порядок рівняння вигляду

$$F\left(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0, \tag{2.6}$$

що містить дві послідовні похідні, знижується заміною $y^{(n-1)} = p(x)$ і рівняння (2.6) приймає вигляд

$$F(x, p, p') = 0.$$

Якщо для цього рівняння вдається знайти загальний розв'язок $p = p(x, C_1)$, то приходимо до рівняння $y^{(n-1)} = p(x, C_1)$ вигляду (2.1), після інтегрування якого отримаємо загальний розв'язок рівняння (2.6).

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + \frac{2}{x}y' = x.$$

Розв'язання. Дане диференціальне рівняння має вигляд $F(x, y', y'') = 0$ (2.2), тобто не містить явно шуканої функції y, отже, має місце випадок **2.** Порядок такого рівняння можна знизити за допомогою уведення нової невідомої функції $p(x)$, зробивши заміну:

$$y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'(x)$$

У результаті отримаємо диференціальне рівняння 1-го порядку відносно функції $p(x)$:

$$p' + \frac{2}{x}p = x$$

Отримали лінійне неоднорідне рівняння 1-го порядку, яке можна розв'язати, наприклад, методом Бернуллі, поклавши

$$p = u(x)v(x) \Rightarrow p' = u'v + uv'$$

тоді маємо

$$u'v + uv' + \frac{2}{x}uv = x \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{2}{x}v\right) = x.$$

Звідси складаємо систему рівнянь для функцій $u(x)$ і $v(x)$:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{2}{x}v = 0, \\ \quad u'v = x. \end{cases}$$

Інтегруючи перше рівняння, знайдемо:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2}{x}v \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{2x}{x} \Rightarrow ln|v| = -2ln|x| \Rightarrow v(x) = \frac{1}{x^2}.$$

З другого рівняння системи маємо

$$u'\frac{1}{x^2} = x \Rightarrow u' = x^3 \Rightarrow \int du = \int x^3 dx \Rightarrow u(x) = \frac{x^4}{4} + C_1$$

Отже, функція $p(x)$ дорівнює:

$$p = u(x)v(x) = \left(\frac{x^4}{4} + C_1\right)\frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Повертаючись зо змінної y, зробимо обернену заміну $p = y'$.

Тожі маємо

$$y' = \frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Це рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними, але вже відносно функції $y(x)$:

$$dy = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{x^2}\right)dx \Rightarrow \int dy = \int \left(\frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{x^2}\right)dx.$$

Звідси отримаємо загальний розв'язок початкового рівняння 2-го порядку:

$$y = \frac{x^3}{12} - \frac{C_1}{x} + C_2.$$

Таким чином, розв'язування одного диференціального рівняння 2-го порядку звелося до інтегрування двох рівнянь 1-го порядку.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{(4)} \cdot x = y'''.$$

Розв'язання. Рівняння має вигляд $F\left(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$ (2.6), тобто не містить явно шуканої y та її похідних до другого порядку включно. Тому, його порядок може бути знижений заміною $y'' = p(x)$.

Тоді $y^{(n)} = p'(x)$ і задане рівняння зводиться до такого:

$$p'x = p.$$

дане рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{dx}x = p \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow ln|p| = ln|x| + lnC_1.$$

Потенціюючи, одержимо

$$p = C_1x.$$

Повертаючись до змінної y, зробимо обернену заміну $p = y'''$, маємо рівняння вигляду (2.1)

$$y'' = C_1 x.$$

Тоді, унаслідок трьох послідовних інтегрувань, отримаємо загальний розв'язок початкового рівняння 4-го порядку:

$$\int y''' dx = \int C_1 x dx \Rightarrow y'' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2,$$

$$\int y'' dx = \int C_1 \frac{x^2}{2} dx + \int C_2 dx \Rightarrow y' = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3,$$

$$\int y' dx = \int C_1 \frac{x^3}{6} dx + \int C_2 x dx + \int C_3 dx \Rightarrow y = C_1 \frac{x^4}{24} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4,$$

3) Диференціальне рівняння другого порядку вигляду

$$y'' = f(y, y') \text{ або } F(y, y'y'') = 0. \quad (2.7)$$

яке явно не містить незалежної змінної x.

Порядок такого рівняння можна знизити за допомогою заміни:

$$y' = p(y),$$

де $p = p(y)$ −нова невідома функція. Тоді

$$y'' = p'(y) \cdot y'(x) = p'p$$

і рівняння (2.7) стає диференціальним рівнянням першого порядку відносно нової змінної $p(y)$ вигляду

$$F(y, p, p') = 0 \quad (2.8)$$

Загальний розв'язок рівняння (2.8) буде мати вигляд

$$p = \varphi(y, C_1),$$

яке інтегрується, і дає загальний розв'язок рівняння (2.7):

$$\int \frac{dy}{\varphi(x, C_1)} = \int dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\varphi(x, C_1)} = x + C_2$$

Зауваження. Частинним випадком рівняння (2.7) є рівняння вигляду

$$y'' = f(y) \quad (2.9)$$

яке також не містить явно незалежну змінну x та похідну функції y'. Метод його розв'язування такий самий, за допомогою заміни

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = p'p.$$

Тоді рівняння (2.9) приймає вигляд рівняння з відокремлюваними змінними:

$$pp' = f(y).$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''ctgy = 2(y')^2.$$

Розв'язання. Задане диференціальне рівняння має вигляд $F(y, y', y'') = 0$ (2.7), тобто не містить явно незалежну змінну x. Рівняння такого типу допускає зниження порядку за допомогою уведення нової невідомої функції $p(y)$, аргументом якої є сама шукана функція $y(x)$. Тобто, зробимо заміну:

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = pp.$$

У результаті задане рівняння зводиться до диференціальне рівняння 1-го порядку відносно функції $p(y)$:

$$p'pctgy = p^2 \Rightarrow \frac{dp}{dy}ctgy = p.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуючи його знайдемо

$$\int \frac{dp}{p} = \int tgydy \Rightarrow p(y) = \frac{C_1}{cosy}.$$

Враховуючи, що $p(y) = y'$, отримаємо рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними відносно шуканої функції $y(x)$:

$$y' = \frac{C_1}{cosy}.$$

Інтегруючи це рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{cosy} \Rightarrow siny = C_1x + C_2,$$

Знайдемо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y = \arcsin(C_1x + C_2).$$

Приклад 5. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + y - 1 = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 1.$$

Розв'язання. Тут маємо випадок рівняння вигляду $y'' = f(y)$ (2.9), тобто рівняння не містить явно незалежної змінної x. Знизити його порядок можна за допомогою заміни:

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = p'p.$$

У результаті маємо рівняння 1-го порядку відносно функції $p(y)$:

$$p'p + y - 1 = 0 \Longrightarrow p'p = 1 - y.$$

Відокремлюємо змінні і виконуємо інтегрування:

$$\int pdp = \int (1 - y)dy \Longrightarrow \frac{p^2}{2} = y - \frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{2} \Longrightarrow p^2 = 2y - y^2 + C_1.$$

Отже функція $p(y)$ визначається виразом

$$p(y) = \pm\sqrt{2y - y^2 + C_1}.$$

На цьому етапі можна визначити довільну сталу C_1, використовуючи початкові умови. Оскільки $y = 1$ і $y' = 1$ при $x = 0$, то

$$1 = \pm\sqrt{2 - 1 + C_1} \Longrightarrow 1 = \pm\sqrt{1 + C_1}$$

звідки випливає, що $C_1 = 0$. Зауважимо, оскільки $y'(0) = 1 > 0$, то пред коренем потрібно брати знак $" + "$.

Таким чином, знову маємо диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними, але вже відносно шуканої функції $y(x)$:

$$y' = \pm\sqrt{2y - y^2}.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2y - y^2}} = \int dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1 - (1 - y)^2}} = x + C_2 \Rightarrow \arcsin(y - 1) = x + C_2.$$

Знову звертаючись до початкових умов, визначимо сталу C_2. Враховуючи, що $y = 1$ при $x = 0$, то

$$\arcsin(1 - 1) = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

В результаті маємо *розв'язок задачі Коші*:

$$\arcsin(y - 1) = x \Longrightarrow y - 1 = \sin x \Rightarrow y = sinx + 1.$$

Контрольні запитання

1. Опишіть метод розв'язання рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$.
2. Опишіть метод розв'язання рівняння вигляду $F(x, y', y'') = 0$.
3. Опишіть метод розв'язання рівняння вигляду $F(y, y', y'') = 0$.

4. У якому випадку для зниження порядку диференціального рівняння використовується заміна $y' = p(x)$?

5. У якому випадку для зниження порядку диференціального рівняння використовується заміна $y' = p(y)$?

6. Яку заміну слід використати для зниження порядку рівняння вигляду $y'' = f(y')$

7. Яку заміну слід використати для зниження порядку рівняння вигляду $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0$?

8. Яким чином можна знизити порядок рівняння$F\left(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$, що містить дві послідовні похідні?

9. Яку заміну слід використати для зниження порядку рівняння вигляду $y'' = f(y)$

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь

1. $2yy'' = (y')^2 + y'$;
2. 2. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$;
3. $xy'' + y' = x + 1$;
4. $(y-1)y'' = 2(y')^2$;
5. $y'' + 2y(y')^3 = 0$;
6. $(1 + sinx)y'' = cosx \cdot y'$;
7. $y'' = 2y'ctgx + sin^3x$;
8. $yy'' = (y')^2 - (y')^3$;
9. $xy'' = y'(lny' - lnx)$;
10. $y'' + 2siny \cdot cos^3y = 0$.

3. Лінійні однорідні диференціальне рівняння другого порядку

Означення Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння виду:

$$y'' + py + gy = f(x) \qquad (3.1)$$

де $p, g, f(x)$ - задані функції, які залежать від x. Якщо p, g задані числа, то таке диференціальне рівняння називається рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Якщо $f(x)$ дорівнює нулю, то диференціальне рівняння називається лінійним однорідним. Якщо $f(x)$ відмінна від нуля, то диференціальне рівняння називається лінійним неоднорідним.

Лінійні однорідні рівняння. Розглянемо основні властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + py + gy = 0 \qquad (3.2)$$

тут p, g - відомі функції, які залежать від x.

Означення. Функції $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ називаються лінійно незалежними на інтервалі (a, b), якщо рівність

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0, \qquad (3.3)$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Якщо хоча б одне з чисел α_1 або α_2 відмінні від нуля і виконується рівність (3.3), то функції y_1 та y_2 називаються лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли вони пропорційні, тобто виконується рівність

$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda = const$$

Більш універсальним засобом вивчення лінійної залежності системи функцій є *визначник Вронського* або *вронскіан.*

Означення. Сукупність будь-яких двох лінійно незалежних на інтервалі (a, b) частинних розв'язків $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ називаються визначник 2-го порядку

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

Для того щоб система розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійного однорідного рівняння (3.2) була лінійно незалежною на інтервалі (a, b) необхідно і достатньо, щоб вроскіан на цьому інтервалі був відмінний від нуля.

Означення. Сукупність будь-яких лінійно незалежних на інтервалі (a, b) частинних розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійного однорідного рівняння (3.2) утворює фундаментальну систему розв'язків цього рівняння. Тобто будь-який довільний розв'язок може бути поданий лінійною комбінацією лінійно незалежних (фундаментальних) розв'язків:

$$y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$$

1) якщо y_1 - розв'язок рівняння (3.2), а с- стала, то функція cy_1 теж є розв'язком рівняння (3.2).

Доведення. Підставимо $y = cy_1$ у ліву частину (3.2). Так як

$$y' = cy_1', \quad y'' = cy_1''$$

то результат підстановки буде таким:

$$cy_1'' + pcy_1' + gcy_1 = c(y_1'' + py_1' + gy_1)$$

Вираз в дужках дорівнює нулю, тому що y_1 є частинним розв'язком рівняння (3.2). Таким чином,

$$y_1'' + py_1' + gy_1 = 0$$

Це означає, $y = cy_1$ - також є розв'ком рівняння (3.2).

2) Якщо y_1 і y_2 розв'язки диференіального рівняння (3.2), то їх сума

$$y = y_1 + y_2$$

теж є розв'язком рівняння (3.2).

Доведення. Оскільки

$$y' = y_1' + y_2', \quad y'' = y_1'' + y_2''$$

То результат підстановки $y = y_1 + y_2$ у ліву частину рівняння (3.2) буде таким:

$$y_1'' + y_2'' + p(y_1' + y_2') + g(y_1 + y_2) = y_1'' + py_1' + gy_1 + y_2'' + py_2' + gy_2 = 0$$

Сума перших трьох доданків дорівнює нулю тому що y_1 є розв'язком рівняння (3.2). Теж саме стосується і решти доданків. Таким чином, $y = y_1 + y_2$ є розв'язком рівняння (3.2).

Теорема (*про загальний розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння*). Якщо y_1 і y_2 – два лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння (1.1), то загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{3.4}$$

c_1 і c_2 – довільні сталі.

Доведення. Те, що кожна з функцій $c_1 y_1$ і $c_2 y_2$ задавольняють рівняння (3.2), випливає з властивості 1. Але тоді за властивістю 2 їх сума (3.4) теж є розв'язком рівняння (3.2). Залишилось перевірити, що цей розв'язком загальний. Розв'язок (3.4) залежить від двох довільних сталих, що входять в розв'язок, дорівнює порядку рівняння. Тому цей розв'язок загальний.

Зауваження. Якщо розв'язки y_1 і y_2 лінійно залежні, тобто $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = c,$ то вираз (3.4) теж є розв'язком диференціального рівняння, але цей розв'язок не буде загальним.

Дійсно, тоді $y_1 = c y_2$ і

$$y = c_1 c y_1 + c_2 y_2 = (c_1 c + c_2) y_2 = C y_2$$

Як бачимо, в цьому випадку розв'язок диференціального рівняння другого порядку суттєво залежить лише від однієї довільної сталої і не може бути загальним для диференціального рівняння другого порядку.

Зміст доведеної теореми складається в тому, що вона зводить задачу знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняня другого порядку до знаходження двох лінійно незалежних його частинних розв'язків.

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

2. Яке рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

3. Сформулюйте означення лінійної залежності та лінійної незалежності системи функцій.

4. Який визначник називається визначником Вронського?

5. Яким чином умови лінійної незалежності системи функцій $y_i(x)$ $i = 1,2,\dots,n)$. пов'язані з визначником Вронського?

6. Що можна сказати про функції y_1 і y_1, визначені на інтервалі (a, b) , якщо для цих функцій визначник $W\ (y_1, y_2)$ Вронського дорівнює нулю?

7. Які два частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння 2-го порядку називаються лінійно незалежними?

8. Які з поданих пар функції є лінійно незалежними в будь-якому проміжку:

9. Що називається фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного рівняння?

4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами

$$y'' + py + gy = 0 \tag{4.1}$$

p, g —стали.

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді $y = e^{kx}$ Знайдемо $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ і підставляючи ці вирази у (4.1). отримаємо

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + ge^{kx} = 0,$$

або

$$e^{kx}(k^2 + pk + g) = 0$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$,то

$$k^2 + pk + g = 0 \tag{4.2}$$

Рівняння (4.2) називается характеристическим рівнянням.

На практиці його отримують з рівняння (4.1), підставляючи k замість y та степені замість похідних. При розв'язуванні алгебраїчного рівняння (4.2) можливі випадки:

Випадок 1. Корені характеристичного рівняння (4.2) дійсні та різні: $k_1 \neq k_2$ Тоді рівняння (4.1) має розв'язки

$$y_1 = e^{k_1 x} \qquad y_2 = e^{k_2 x}$$

Ці розв'язкі лінійно незалежні, тому що

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const$$

Загальний розв'язок рівняння (4.1) матиме вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Випадок 2. Корені характеристичного рівняння (4.2) дійсні і рівні $k_1 = k_2$.

В цьому випадку лінійно незалежними розв'язками рівняння (4.1) будуть

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ і } y_2 = x e^{k_1 x}$$

і загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}.$$

Доведемо, що функція $y_2 = x e^{k_1 x}$ теж задовольняє рівняння (4.1). так як рівняння (4. 2) має тільки один розв'язок, то його дискримінант дорівнює нулю:

$$p^2 - 4g = 0,$$

а корінь дорівнює

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \tag{4.3}$$

$y_2 = x e^{k_1 x}, \quad y_2' = e^{k_1 x}(1 + k_1 x), \quad y_2'' = e^{k_1 x}(2k_1 + k_1^2 x)$

У рівняння (4.1) і скоротимо його на$e^{k_1 x}$. Отримаємо

$2k_1 + k_1^2 x + p(1 + k_1) + gx = 0,$ або $\quad 2k_1 + p + (k_1^2 + pk_1 + g)x = 0.$

Рівняння перетворилось у тотожність тому що згідно (4.3) $2k_1 + p = 0,$ а $k_1^2 + pk_1 + g = 0$ бо k_1 – корень характеристичного рівняння (4.2). Ми довели, що функція $y_2 = x e^{k_1 x}$ задовольняє рівняння (4.1).

Випадок 3. Корені характеристичного рівняння (4.2) комплексні: $k_1 = a + bi$, $k_2 = a - bi$. Тут a і b - відомі дійсні числа, $i -$ уявна одиниця. Тоді загальний розв'язок (4.1) можна записати у вигляді

$$y = e^{ax}(C_1 cosbx + C_2 sinbx) \tag{4.4}$$

Доведення. В цьому випадку розв'язками рівняння (4.1) будуть комплекснозначні функції

$$y_1 = e^{k_1x} = e^{(a+bi)x} = e^{ax}e^{ibx}$$

$$y_2 = e^{k_2x} = e^{(a-bi)x} = e^{ax}e^{-ibx}$$

Скористаємось формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$$

і запишемо ці розв'язки у вигляді

$$y_1 = e^{ax}(cos\varphi + sin\varphi)$$

$$y_2 = e^{ax}(cos\varphi - sin\varphi)$$

За властивостями розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння, функції

$$Y_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{ax}cosbx \qquad Y_1 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) = e^{ax}sinbx$$

теж будуть розв'язками рівняння (4.1). Враховуючи лінійну незалежність цих розв'язків

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{e^{ax}cosbx}{e^{ax}sinbx} = ctgx \neq const$$

загальний розв'язок рівняння (2.1) одержимо за формулою (1.2) попереднього пункту. Отримаємо (2.4).

Приклади. 1. $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Запишемо характеристичне рівняння

$$\mathrm{k}^2 - 4k + 3 = 0.$$

Його корені дійсні і різні: $k_1 = 1$; $k_2 = 3$. Тому загальний розв'язок рівняння

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x}.$$

2. $y'' + 2y' + y = 0$. Характеристичне рівняння: $k^2 + 2k + 1 = 0$. Його корені дійсні і рівні. $k_1 = k_2 = -1$. Тому

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x}$$

3. $y'' + 2y' + 5y = 0$. Тут характеристичне рівняння: $k^2 + 2k + 5 = 0$

Воно має комплексні корені $D = -16$; $\sqrt{D} = 4i$; $k_{1,2} = -1 \pm 2i$.

Тому загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y = e^{-x}(C_1cos2x + C_2sin2x).$$

Контрольні запитання

1. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння 2-го порядку.
2. У якому вигляді слід шукати частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння?
3. Чи може функція $y = \ ln x$ х бути розв'язком рівняння $y'' + py' + q = 0$, де $p, q - const$??
4. Яке рівняння називається характеристичним для лінійного однорідного рівняння другого порядку?
5. Сформулюйте *алгоритм* розв'язання лінійного однорідного диференціального рівняння.

Завдання для самостійної роботи

1. **Знайти загальний розв'язок рівняння:**
   1. $\mathrm{y}'' - \mathrm{y}' - 12\mathrm{y} = 0.$
   2. $y'' + 4y' + 4y = 0.$
   3. $y'' + 4y + 13y = 0$
   4. $y'' + 25y = 0.$
   5. $y'' - 7y' + 10y = 0.$
   6. $y' - 4y' + 29y = 0.$
   7. $y'' + y' + y = 0$
   8. $y'' + 9y + 8y = 0$
   9. $y'' - 2y' + 2y = 0$
   10. $y'' + 4y = 0.$

5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння другого порядку

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{5.1}$$

$p, q, f(x) -$ задані функції, які залежать від x.

Теорема (про загальнй розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння). Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (5.1) має вид

$$y = Y + Z \tag{5.2}$$

де $Y -$ загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння

$$y'' + py' + qy = 0,$$

а $Z -$ частинний розв'язок рівняння (5.1)

Доведення. Доведемо, що (5.2) є розв'язком рівняння (5.1). Підставимо (5.2) в (5.1). Так як $y' = Y' + Z',\quad y'' = Y'' + Z''$, то

$$Y'' + Z'' + p(Y' + Z') + q(Y + Z) = Y'' + pY' + qY' + Z'' + pZ' + qZ = f(x)$$

Сума $Y'' + pY' + qY'$ дорівнює нулю тому, що Y - розв'язок відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння, а сума $Z'' + pZ' + qZ$ дорівнює $f(x)$ тому, що Z- частинний розв'язок рівняння (5.1). Те, що розв'язок (5.2) є загальним, витікає з того, що він є розв'язок диференціального рівняння другого порядку і суттєво залежить від двох довільних сталих, які входять у склад Y. Теорему доведено.

Ця теорема зводить задачу знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння (5.1) до двох більш простих задач: знаходження загального розв'язку Y відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння і знаходження частинного розв'язку Z лінійного неоднорідного рівняння (5.1).

Ідея методу невизначених коефіцієнтів

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2 порядку із сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{5.3}$$

Як знайти його частинний розв'язок? Ідея методу невизначених коефіцієнтів полягає у тому, що частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (5.3) шукають в такому ж самому вигляді, який має функція $f(x)$, але з невизначеними коефіцієнтами. Які потім знайдемо належним чином.

Розглянемо приклади

1. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

Загальний розв'язок цього рівняння слід шукати у вигляді $y = Y + Z$

Знайдемо спочатку Y:

$$y'' - 2y' + y = 0; \quad k^2 - 2k + 1 = 0; \quad k_1 = k_2 = 1; \quad Y = C_1e^x + C_2xe^x.$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння. Його слід шукати у такому ж вигляді, який має права частина рівняння, тобто

$$Z = Ae^{2x}$$

Невідоме число A підберемо так, щоб функція Z була розв'язок диференціального рівняння. Підставимо Z у рівняння. Оскільки

$$Z' = 2Ae^{2x}, \qquad Z'' = 4Ae^{2x},$$

то результат підстановки буде таким:

$$4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} + Ae^{2x} = e^{2x}$$

Звідки

$$A = 1, \qquad Z = e^{2x}.$$

Відповідь: $Y = C_1e^x + C_2xe^x + e^{2x}$.

2. $y'' - 2y' + y = x^3 - 2$.

Ліва частина цього рівняння така сама як і у попереднього, тому

$$Y = C_1e^x + C_2xe^x.$$

У правій частині рівняння – многочлен третього степеня, тому частинний розв'язок рівняння теж будемо шукати у вигляді многочлена третього степеня з невизначеними коефіцієнтами:

$$Z = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Щоб Z підставити у ліву частину рівняння треба $Z \cdot 1$, $Z' \cdot (-2)$, $Z'' \cdot 1$

$$\begin{array}{r|l} Z = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & \ \ 1 \\ Z' = 3Ax^2 + 2Bx + C & (-2)\ + \\ Z'' = 6Ax + 2B & \ \ 1 \end{array}$$

Виконавши такі дії, отримаємо у лівій частині рівняння многочлен третього степеня. У правій частині – теж многочлен третього степеня. Многочлени рівні тоді і тільки тоді, коли рівні коефіцієнти при однакових степенях. Порівняємо ці коефіцієнти

$$\begin{array}{r|c} x^3 & A = 1 \\ x^2 & B - 6A = 0 \\ x & C - 4B + 6A = 0 \\ x^0 & D - 2C + 2B = -2 \end{array}$$

З цих рівнянь знайдемо

A=1, B=6, C=18, D=22.

тому

$$Z = x^3 + 6x^2 + 18x + 22$$

Відповідь:

$$y = \quad C_1 e^x + C_2 x e^x + x^3 + 6x^2 + 18x + 22$$

З наведених прикладів можна зробити висновок, що частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння можна знайти у такому вигляді, який має права частина рівняння. Але так не завжди виходить. Розглянемо диференціальне рівняння

3) $y'' - 2y' = 12x^2 + 16x + 8$

Тут зрозуміло. Якщо Z будемо шукати у вигляді многочлена другого ступеня, то отримаємо у лівій частині рівняння лише многочлен першого ступеня і він може бути тотожно рівним многочлену правої частини. Тому частинний розв'язок рівняння слід шукати у вигляді

$$Z = (Ax^2 + Bx + C)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Подальше розв'язання прикладу аналогічне попередньому

$$\begin{array}{r|l} Z = Ax^3 + Bx^2 + Cx & \ \ 0 \\ Z' = 3Ax^2 + 2Bx + C & (-2)\ + \\ Z'' = 6Ax + 2B & \ \ 1 \end{array}$$

Порівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$
\begin{array}{c|c}
x^2 & -6A = 12, \;\; A = -2 \\
x & -4B + 6A = 16, \;\; B = -7 \\
x^0 & -2C + 2B = 8, \;\; C = -11
\end{array}
$$

Звідси

$$Z = -2x^3 - 7x^2 - 11x$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння

$$y'' - 2y' = 0$$

Має вигляд $Y = C_1 + C_2 e^{2x}$

Загальний розв'язок заданого лінійного неоднорідного диференціального рівняння буде

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - 2x^3 - 7x^2 - 11x$$

З наведених прикладів можна зробити певні висновки про частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' + py' + gy = P_n(x)$$

із заданим многочленом

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

у правій частині. Якщо $g \neq 0$, тобто число 0 не збігається із коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок треба шукати у вигляді многочлена n-го степеню з невизначеними коефіцієнтами

$$\tilde{P}_n(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + Ax + A_0$$

Якщо $g = 0$, а $p = 0$ тобто число 0 збігається тільки з одним із коренів характеристичного рівняння(в цьому випадку кажуть, що 0 – простий корінь характеристичного рівняння), частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$Z = \widetilde{P_n}(x) \cdot x$$

Якщо $g = 0$ і $p = 0$ тобто обидва корені характеристичного рівняння дорівнюють нулю (в цьому випадку кажуть, що число 0 є подвійним коренем характеристичного рівняння), то $Z = \widetilde{P_n}(x) \cdot x^2$

6 .Принцип накладання розв'язків

Нехай Z_1 - частинний розв'язок рівняння

$$y'' + py + g = f_1(x) \tag{5.4}$$

а Z_2 - частинний розв'язок рівняння

$$y'' + py + g = f_2(x) \tag{5.5}$$

Тоді $Z = Z_1 + Z_2$ - є частинним розв'язок рівняння.

$$y'' + py + g = f_1(x) + f_2(x) \tag{5.6}$$

Доведення. Підставимо функцію Z в ліву частину рівняння (5.6). Отримаємо

$$Z_1'' + Z_2'' + p(Z_1' + Z_2') + g(Z_1 + Z_2) = Z_1'' + pZ_1' + gZ_1 + Z_2'' + pZ_2' + gZ_2.$$

Так як Z_1 - розв'язок рівняння (6.1), то сума перших трьох доданків дорівнює $f_1(x)$. Сума решти трьох доданків дорівнює $f_2(x)$ тому, що Z_2 є розв'язком рівняння (5.5). Отримаємо $f_1(x) + f_2(x)$. Що и треба було довести.

Приклад Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = x + 2e^x$$

Розв'язування. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння

$$y'' + y = 0; \quad k^2 + 1 = 0; \quad k_{1,2} = i; Y = C_1 cosx + C_2 sinx$$

Частинні розв'язки рівнянь

$$y'' + y = x, \qquad y'' + y = 2e^x$$

тут можна вгадати: $Z_1 = x, \quad Z_2 = e^x$

відповідно. За принципом накладання розв'язків, частинним розв'язок рівняння

$$y'' + y = x + 2e^x$$

$$Z = x + e^x$$

загальний розв'язок цього рівняння має вигляд розв'язок

$$y = C_1 cosx + C_2 \sin x + x + e^x$$

Правила методу невизначених коефіцієнтів

Правило 1. Частинний розв'язок рівняння

$$y'' + py' + gy = P_n(x),$$

де $P_n(x)$ –заданий многочлен степеня n, слід шукати у вигляді

$$z = \begin{cases} \widetilde{P_n}(x), & \text{якщо } 0 - \text{не корінь характеристичного рівняння,} \\ \widetilde{P_n}(x)x, & \text{якщо } 0 - \text{простий корінь характеристичного рівняння,} \\ \widetilde{P_n}(x)x^2, & \text{якщо } 0 - \text{подвійний корінь характеристичного рівняння.} \end{cases}$$

Тут через $\widetilde{P_n}(x)$ позначено многочлен степеня n з невизначеними коефіцієнтами.

Правило 2. Частинний розв'язок рівняння

$$y'' + py' + gy = e^{ax}P_n(x),$$

де $P_n(x)$ −заданий многочлен степеня n, a − задане дійсне число, слід шукати у вигляді

$$= \begin{cases} \widetilde{P_n}(x)e^{ax}, & \text{якщо } a - \text{не корінь характеристичного рівняння,} \\ \widetilde{P_n}(x)xe^{ax}, & \text{якщо } a - \text{простий корінь характеристичного рівняння,} \\ \widetilde{P_n}(x)x^2e^{ax}, & \text{якщо } a - \text{подвійний корінь характеристичного рівняння.} \end{cases}$$

Правило 3. Частинний розв'язок рівняння

$$y'' + py' + gy = Mcosbx + Nsinbx,$$

M, N, b – задані числа, слід шукати у вигляді:

$$z = \begin{cases} Acosbx + Bsinbx, & \text{якщо } bi - \text{ не корінь характеристичного рівняння,} \\ (Acosbx + Bsinbx)x, & \text{якщо } bi - \text{ корінь характеристичного рівняння.} \end{cases}$$

Контрольні запитання

1. Яке лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами буде рівнянням зі спеціальною правою частиною?
2. Опишіть суть методу підбору частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною.
3. Чи до будь-якого лінійного неоднорідного диференціального рівняння може бути застосований метод підбору частинного розв'язку?
4. Чи існує зв'язок між коренями характеристичного рівняння і виглядом частинного розв'язку неоднорідного рівняння? Якщо так, то в чому він проявляється?
5. Що робити у тому випадку, якщо права частина неоднорідного рівняння має вигляд алгебраїчної суми функцій спеціального вигляду?
6. Сформулюйте теорему про накладання розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку.

Завдання для самостійної роботи

1.Знайти загальний розв'язок рівняння

1. $y'' + 4y' - 5y = 3cos5x$;
2. $y'' + y' - 20y = 3sin4x - cos4x$;
3. $y'' - 5y' = x^2 - 3x - 1$;
4. $y'' - 11y' + 10y = (2x - 1)e^{3x}$
5. $y'' - 10y' + 25y = 10e^{5x}$
6. $y'' + 2y' - 24y = 5sinx$
7. $y'' - 2y' + 10y = xe^{x}cos2x$
8. $y'' + 16y = (34x + 13)e^{-x}$
9. $y'' = 36y = xe^{-6x} - e^{6x} + sin6x$
10. $y'' + y = -8sinx - 6cosx$.

6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з спеціальною правою частиною.

Означення. Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n –го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x). \qquad (6.1)$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_n -$ дійсні числа, а $f(x) \neq 0$ –задана функція, неперервна на деякому проміжку (a, b).

Означення. Рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0. \qquad (6.2)$$

називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням, відповідним даному неоднорідному рівняння (6.1)

Теорема (про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння)

Загальний розв'язок $y_{зн}$ лінійного неоднорідного диференціального рівняння (6.1) дорівнює сумі загального розв'язку $y_{зо}$ відповідного однорідного рівняння (6.2) і деякого частинного розв'язку $y_{чн}$ рівняння (6.1), тобто

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн} \tag{6.3}$$

Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

Розглянемо *лінійне неоднорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами* вигляду:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{6.4}$$

Тоді відповідне йому однорідне рівняння має вигляд

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{6.5}$$

Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, загальний розв'язок рівняння (6.1) визначається формулою (6.3), в якій

$$y_{зо} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{6.6}$$

загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння 2-го порядку, а $y_{чн}$ −частинний розв'язок неоднорідного рівняння (6.4).

Будемо шукати загальний розв'язок неоднорідного рівняння (6.4) у такому ж вигляді, замінивши у формулі (6.6) стали C_1 і C_2 невідомими функціями від x, які слід підібрати так, щоб функція

$$y_{зн} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \tag{6.7}$$

задовольняла неоднорідне рівняння (6.4), тобто була й іого розв'язком. Функція (6.7) буде розв'язком рівняння (6.4), коли $C_1(x)$ і $C_2(x)$ задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{6.8}$$

Система (6.8) є лінійною неоднорідною системою рівнянь відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$. Визначник цієї системи $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ не дорівнює нулю, оскільки це визначник Вронського $W(y_1, y_2)$ для системи лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ однорідного рівняння (6.5). Отже система (6.8) має єдиний розв'язок, що може бути знайдений, за формулами Крамера, або будь-яким іншим способом:

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)\cdot f(x)}{W(y_1,y_2)}, \qquad C_1'(x) = \frac{y_1(x)\cdot f(x)}{W(y_1,y_2)}.$$

Інтегруючи ці функції знаходимо $C_1(x)$ і $C_2(x)$. Підставляючи їх в рівняння (6.7), отримаємо загальний розв'язок рівняння (6.4)

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = tgx$$

Розв'язання. Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. Знайдемо спочатку розв'язок відповідного даному рівнянню однорідного рівняння

$$y'' + y = 0$$

Для цього складемо характеристичне рівняння і візначимо його корені

$$k_{1,2} = \pm i$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння, згідно з формулою має вигляд:

$$y_{зо} = C_1 cosx + C_2 sinx.$$

2. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді:

$$y_{зо} = C_1(x) cosx + C_2(x) sinx.$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$- невідомі функції, які належить знайти склавши систему (6.8).

$$\begin{cases} C_1'(x) cosx + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) sinx + C_2'(x) cosx = tgx. \end{cases}$$

$$C_1' = -\frac{sin^2 x}{cosx}, \qquad C_2'(x) = sinx,$$

$$C_1 = -\int \frac{sin^2 x}{cosx} dx = sinx - lntg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + A;$$

$$C_2(x) = -cosx + B$$

$$y_{зо} = (sinx - lntg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + A) cosx + (-cosx + B) sinx.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' + y' = \frac{1}{cos^2 x}$$

Розв'язання. Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами

1. Однорідне рівняння, що відповідає йому

$$y''' + y' = 0$$

Має такі корені характеристичного рівняння:

$$k^3 + k = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 0, \\ k_{2,3} = \pm i. \end{array}\right.$$

Тобто, фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння утворюють функції $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = cosx$, $y_3(x) = sinx$ і загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y_{зн} = C_1 + C_2 cosx + C_3 sinx$$

2. Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y_{зн} = C_1(x) + C_2(x) cosx + C_3(x) sinx. \qquad (*)$$

Складемо систему рівнянь для функцій

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot 1 + C_2'(x) \cdot cosx + C_3'(x) sinx = 0, \\ C_1'(x) \cdot 0 - C_2'(x) \cdot sinx + C_3'(x) cosx = 0, \\ C_1'(x) \cdot 0 - C_2'(x) \cdot cosx - C_3'(x) sinx = \dfrac{1}{cos^2 x}. \end{cases}$$

Дану систему зручно розв'язувати за формулами Крамера. Головний визначник системи дорівнює:

$$\Delta = W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & cosx & sinx \\ 0 & -sinx & cosx \\ 1 - cosx & - sinx & \end{vmatrix} = 1$$

Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & cosx & sinx \\ 0 \ldots & - sinx \ldots cosx & \\ \dfrac{1}{cos^2 x} & \ldots . -cosx - sinx & \end{vmatrix} = \frac{1}{cos^2 x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & sinx \\ 0 \dots. & 0 \dots. & cosx \\ 0 & \frac{1}{cos^2x} & -sinx \end{vmatrix} = -\frac{1}{cos^2x}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 \dots. & 0 \dots & 0 \\ 0 & -cosx & \frac{1}{cos^2x} \end{vmatrix} = -\frac{sinx}{cos^2x}$$

У результаті маємо:

$$C_1'(x) = \frac{1}{cos^2x} \Rightarrow C_1(x) = tgx + C_1$$

$$C_2'(x) = -\frac{1}{cos^2x} \Rightarrow C_1(x) = ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C_2$$

$$C_3'(x) = -\frac{sinx}{cos^2x} \Rightarrow C_3(x) = -\frac{1}{cosx} + C_3$$

Підставляючи знайдені функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ у вираз (*), знаходимо загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння:

$$y_{зн} = C_1 + tgx + \left(C_2 + ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right) cosx + \left(C_3 - \frac{1}{cosx}\right) sinx.$$

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами?
2. Яке рівняння називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами?
3. Яке рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням, відповідним даному неоднорідному рівнянню?
4. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння.
5. У чому полягає метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа) розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку?

Завдання для самостійної роботи

1.$y'' + 4y = 4\mathrm{ctg}x$; $\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$

2. $y'' - y' = \frac{e^x}{2+e^{-x}}$; $\quad y(0) = ln27, \quad y'(0) = ln9 - 1.$

3 $y'' + 9y = \frac{9}{cosx}$; $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

4. $y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2+e^{-2x}}$; $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

5. $y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x}$

6. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3+e^{-x}}$ $\quad y(0) = 1 + 8ln2, \quad y(0) = 14ln2$

7. $y'' + 4y = \frac{4}{sin2x}$ $\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$

7. Системи лінійних диференціальних рівнянь

Означення. Сукупність диференціальних рівнянь, кожне з яких містить незалежну змінну, шукані функції та їхні похідні, тобто співвідношення вигляду

$$F_i\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)}\right) = 0. \qquad (7.1)$$

називається системою диференціальних рівнянь $n -$ -го порядку.

Означення. Система вигляду

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \qquad (7.2)$$

називають нормальною системою диференціальних рівнянь.

Означення. Розв'язком системи (7.2) називається сукупність з n функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$, які задовольняють кожне з рівнянь цієї системи.

Означення. Загальним розв'язком системи називається сукупніс з n функцій

$y_1 = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad y_2 = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \dots, y_n = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$

які задовольняють усі рівняння системи і така, що за заданими початковими умовами (7.4) можна однозначно визначити сталі $C_1, C_2, \dots, C_n$ З системи рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_1(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_1^0, \\ \varphi_2(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_2^0 \\ \varphi_n(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_n^0 \end{cases}$$

Означення. Розв'язок, отриманий із загального при певних значеннях сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ називається *частинним розв'язком* системи.

Означення. Нормальна система диференціальних рівнянь називається лінійною, якщо кожне рівняння системи лінійне відносно шуканої функції та їхніх похідних:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{cases} \tag{7.3}$$

де функції. $a_{ij}(x)$ і $f_i(x)$ визначені й неперервні при $x \in (a, b)$.

Означення. Якщо всі a_{ij} – сталі, то (7.3) називається лінійною системою рівнянь *зі сталими коефіцієнтами.*

Означення. Лінійна система називається однорідною, якщо при всіх $x \in (a, b)$ функції $f_i(x)$тотожно дорівнюють нулю.

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n \end{cases}$$

Теорема. Загальний розв'язок $\overline{y_k}$ однорідної лінійної системи (7.2) в інтервалі (a, b) є лінійною комбінацією

$$\overline{y_k} = C_1 y_{1k} + C_2 y_{2k} + \dots + C_n y_{nk} \tag{7.4}$$

n її частинних лінійно незалежних розв'язків $y_{1k}(x), y_{2k}(x), \dots, y_{nk}(x)$, що утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Одним з основних методів інтегрування нормальної системи диференціальних рівнянь є метод виключення. Суть цього методу полягає в послідовному виключенню невідомих функцій з рівнянь системи, внаслідок чого система зводиться до одного диференціального рівняння n - го порядку від однієї невідомої функції.

Розглянемо цей метод на прикладі нормальної системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь $1-$го поряядку вигляду:

$$\begin{cases} x_t' = a_1x + a_2y, \\ y_t' = b_1x + b_2y, \end{cases}$$

де $x = x(t)$, $y = y(t) -$ диференційовані функції незалежної змінної t, коефіцієнти a_i, $b_i -$ сталі, але можуть бути і функціями змінної t.

1. Продиференціюємо перше рівняння системи за змінною t:

$$x_t'' = a_1x_t' + a_2y_t'$$

2. Підставимо в цю рівність вираз із другого рівняння системи
3. Замінимо функцію її виразом з пешого рівняння системи, тобто

$$y = \frac{1}{a_2}(x_t' - a_1x) \ \ (*)$$

$$x_t'' = a_1x_t' + a_2\left(b_1x + b_2\frac{1}{a_2}(x_t' - a_1x)\right)$$

Спростимо отриманий вираз

$$x_{tt}'' + Ax_t' + Bx = 0,$$

де $A = -(a_1 + b_1)$, $B = -(a_2b_1 - b_2a_1)$.

4. Одержали лінійне однорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$. Розв'язавши це рівняння, отримаємо загальний розв'язок відносно функції$x(t)$:

$$x(t) = \varphi(t, C_1, C_2)$$

5. Для знаходження функції $y(t)$, підставимо в рівняння (*) знайдену функцію $x(t)$ та її похідну. $x'(t)$. В результаті отримаємо загальний

розв'язок відносно функції$y(t)$:

$$y(t) = \psi(t, C_1, C_2)$$

Сукупність двох знайдених функцій є загальним розв'язком заданої системи: $x(t) = \varphi(t, C_1, C_2)$, $y(t) = \psi(t, C_1, C_2)$.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь

Розв'язання. Задано лінійну однорідну систему трьох рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Зведемо її до одного диференціального рівняння 3 -го порядку.

Виключимо спочатку функцію $z(t)$ Для цього виразимо $z(t)$ з першого рівняння системи:

$$z(t) = x_t' - 3x + y,$$

продиференціюємо $z_t' = x_{tt}'' - 3x_t' + y_t'$ і підставимо в друге і третє рівняння системи:

$$\begin{cases} y_t' = -x + 5y - x_t' + 3x - y, \\ x_{tt}'' - 3x_t' + y_t' = x - y + 3(x_t' + 3x + y), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_t' + x_t' = 2x + 4y, \\ x_{tt}'' - 6x_t' + y_t' = -8x + 2y. \end{cases}$$

Залишилось вилучити функцію $y(t)$. Віднімемо від другого рівняння системи (*)

$$x_{tt}'' - 7x_t' = -10x - 2y.$$

Продиференціюємо обидві частини цього співвідношення:

$$x_{ttt}''' - 7x_{tt}'' = -10x_t' - 2y_t' \qquad (**)$$

Віднімемо від подвоєного другого рівняння системи (*) перше рівняння та виразимо y_t' $x(t), x_t', x_{tt}''$:

$$x_{tt}'' - 13x_t' + y_t' = -18x \Rightarrow y_t' = -2x_{tt}'' + 13x_t' - 18x.$$

Підставляючи знайдений вираз для y_t' в рівняння (**), одержимо лінійне однорідне диференціальне рівняння 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$

$$\mathrm{x}'''_{\mathrm{ttt}} - 11\mathrm{x}''_{\mathrm{tt}} + 36\mathrm{x}'_{\mathrm{t}} - 36\mathrm{x} = 0 \qquad (***)$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$\mathrm{k}^3 - 11\mathrm{k}^2 + 36\mathrm{k} - 36 = 0$$

Має дійсні різні корені

$$\mathrm{k}_1 = 2, \quad \mathrm{k}_2 = 3, \quad \mathrm{k}_3 = 6.$$

Отже, загальний розв язок рівняння (***) має вигляд:

$$x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}.$$

Для знаходження функції $y(t)$ підставимо знайдену функцію $x(t)$ та її похідні

$$x'_t = 2C_1e^{2t} + 3C_2e^{3t} + 6C_3e^{6t},$$
$$x''_{tt} = 4C_1e^{2t} + 9C_2e^{3t} + 36C_3e^{6t}$$

у рівняння $\mathrm{x}''_{\mathrm{tt}} - 7\mathrm{x}'_{\mathrm{t}} = -10\mathrm{x} - 2\mathrm{y}$. Тоді

$$y(t) = C_2e^{3t} - 2C_3e^{6t}.$$

Нарешті, з рівняння $z(t) = x'_t - 3x + y,$ дістанемо

$$\mathrm{z(t)} = -\mathrm{C}_1\mathrm{e}^{2\mathrm{t}} + \mathrm{C}_2\mathrm{e}^{3\mathrm{t}} + \mathrm{C}_3\mathrm{e}^{6\mathrm{t}}.$$

Таким чином, загальний розв язок системи має вигляд:

$$x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}.$$
$$\mathrm{z(t)} = -\mathrm{C}_1\mathrm{e}^{2\mathrm{t}} + \mathrm{C}_2\mathrm{e}^{3\mathrm{t}} + \mathrm{C}_3\mathrm{e}^{6\mathrm{t}}.$$
$$y(t) = C_2e^{3t} - 2C_3e^{6t}$$

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y' = y + 3z \\ z' = -3y + z \end{cases}$$

Розв'язання. З першого рівняння:

$$3z = y' - y; z = \frac{1}{3}(y' - y);$$

Знайдемо z′ і підставимо в друге рівняння.

$$z' = \frac{1}{3}(y'' - y');$$

$$\frac{1}{3}(y'' - y') = -3y + \frac{1}{3}(y' - y); | \cdot$$

$$3\ \ y'' - y' = -9y + y' - y; \quad y'' - 2y' + 10y = 0;$$

$$k^2 - 2k + 10 = 0;$$

$$D = 4 - 40 = -36;\ \sqrt{D} = 6i;$$

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i;$$

$$y(x) = e^x(C_1 cos3x + C_2 sin3x);$$

Знайдемо y′ і підставимо в z.

$$y' = e^x(C_1 cos3x + C_2 sin3x) + e^x(-3C_1 sin3x + 3C_2 cos3x);$$

Маємо:

$$z(x) = \frac{1}{3}[e^x(C_1 cos3x + C_2 sin3x) + e^x(-3C_1 sin3x + 3C_2 cos3x) -$$

$$-e^x(C_1 cos3x + C_2 sin3x)];$$

$$z(x) = e^x(C_1 cos3x - C_2 sin3x).$$

Відповідь: $\left[\begin{array}{l} y(x) = e^x(C_1 cos3x + C_2 sin3x) \\ z(x) = e^x(C_1 cos3x - C_2 sin3x) \end{array}\right.$.

Приклад 3. Знайти розв’язок задачі Коші.

$$\begin{cases} y' = y + 2z \\ z' = 4y + 3z \\ y(0) = 4; z(0) = 2 \end{cases}$$

Розв’язання. Знайдемо спочатку загальник розв’язок даної системи. З першого рівняння $z = \frac{1}{2}(y' - y), z' = \frac{1}{2}(y'' - y')$.

Підставимо в друге рівняння $\frac{1}{2}(y'' - y') = 4y + \frac{3}{2}(y' - y); | \cdot 2;$

$y'' - y' = 8y + 3y' - 3y; \quad y'' - 4y' - 5y = 0;$

$k^2 - 4k - 5 = 0; \quad k_1 = -1; \ k_2 = 5;$

$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{5x}; \quad y' = -C_1e^{-x} + 5C_2e^{5x};$

$z = \frac{1}{2}(-C_1e^{-x} + 5C_2e^{5x} - C_1e^{-x} - C_2e^{5x});$

$$\begin{cases} z(x) = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{5x} \\ y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{5x} \end{cases} - \text{загальний розв’язок;}$$

З початкової умови: $y = 4, z = 2$ при $x = 0,$ маємо:

$\begin{cases} 2 = -C_1 + 2C_2 \\ 4 = C_1 + C_2 \end{cases}; 3C_2 = 6; \ C_2 = 2; \ C_1 = 2.$

Відповідь: $\begin{cases} y(x) = 2e^{-x} + 2e^{5x} \\ z(x) = -2e^{-x} + 4e^{5x} \end{cases};$

Зауваження. З наведених прикладів видно, що метод виключення може бути застосований як до однорідних систем, так і неоднорідних. В першому випадку система зводиться до лінійного рівняння, а в другому – як правило до неоднорідного. Причому, всі коефіцієнти a_{ij} лінійной системи були сталими, то й отримані рівняння будуть сталими коефіцієнтами.

Контрольні запитання

1. Які існують методи розв’язування систем лінійних диференціальних рівнянь?
2. У чому полягає метод виключення невідомих при розв’язанні лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами?
3. Чи може бути застосований метод виключення до лінійних однорідних (неоднорідних) систем диференціальних рівнянь?
4. Які недоліки методу виключення змінних?

Задання для самостійної роботи

1. $\begin{cases} x_t' = 8y - x, \\ y_t' = x + y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_t' = 3x - y, \\ y_t' = 4x - y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_t' = 12x - 5y, \\ y_t' = 5x + 12y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_t' = x - 2y, \\ y_t' = x - y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_t' = x - 2y - z, \\ y_t' = -x + y + z \\ z_t' = x - z. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_t' = 3x - y + z, \\ y_t' = -x + 5y - z \\ z_t' = x - y + 3z. \end{cases}$

Розподіл балів, які отримують студенти за результатами поточного і підсумкового контролю.

	Змістовий модуль 2 Диференціальні рівняння вищих порядків		
	Теми	Бали	Разом
1	Загальні поняття та означення	0-4	35
2	Диференціальні рівняння вищих порядків що допускають зниження порядку.	0-5	
3	Лінійні однорідні диференціальне рівняння другого порядку.	0-5	
4	Лінійні однорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами.	0-5	
5	Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.	0-6	
6	Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з спеціальною правою частиною.	0-5	
7	Системи диференціальних рівнянь	0-5	

8. Література

1. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні та інтегральні рівняння. – Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2012. – 356 с.
2. Каленюк П. І. Збірник задач з диференціальних рівнянь. Видавництво: Львівська політехніка, 2016. - 236 с.
3. Каленюк П. І. Диференціальні рівняння. Видавництво: Львівська політехніка, 2014. - 380 стр.
4. Лиходєєва Г., Пастирєва К. Диференціальні рівняння: працюємо самостійно. Видавництво: Центр навчальної літератури, 2018. - 380 с.
5. Збірник задач підвищеної складності з курсу "Диференціальні рівняння" / О. В. Капустян [та ін.]; за ред. М. О. Перестюка. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2011. – 79 с.

Допоміжна

1. Самойленко А. М., Кривошия С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння в задачах. К.: Либідь, 2003. – 504 с.
2. Диференціальні рівняння. Задачі підвищеної складності / під ред. М. О. Перестюка. – К.: ТВіМС, 2005. – 24 с.
3. Перестюк М. О., Свищук М. Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – К.: ТВіМС, 2004. – 224 с.
4. Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Техніка, 2003. – 368 с.
5. Парасюк І. О. Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2005. – 88 с.
6. Диференціальні рівняння. Задачі підвищеної складності / під ред. М. О. Перестюка. – К.: ТВіМС, 2005. – 24 с

ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ

1. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського : офіційний сайтURL : http://www.nbuv.gov.ua/
2. Одеська національна наукова бібліотека : офіційний сайт. URL : http://odnb.odessa.ua/.
3. Бібліотека Університету Ушинського : офіційний сайт. URL : https://library.pdpu.edu.ua/