Державний заклад
"ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені К.Д. УШИНСЬКОГО

Кафедра математики і методики її навчання

Тамара КОРОСТІЯНЕЦЬ

ПЛАНІМЕТРІЯ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Навчально-методичний посібник

для організації самостійної роботи та дистанційного навчання за курсом "Методика навчання шкільного курсу математики" для здобувачів освітнього рівня "бакалавр". Спеціальність 014 середня освіта (Математика)

Одеса

2023

Рекомендовано до друку рішенням ученої ради Державного закладу "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського" (протокол №11 від 27квітня 2023 року).

Коростіянець Т.П. Планіметрія в шкільному курсі математики. Навчально-методичний посібник для організації самостійної роботи та дистанційного навчання за курсом "Методика навчання шкільного курсу математики" для здобувачів освітнього рівня "бакалавр". Спеціальність 014 середня освіта (Математика). Одеса, Університет Ушинського, 2023. 155 с.

Рецензенти:

Волкова М. Г., кандидат фізико-математичних наук, доцент, в.о. завідуючого кафедри вищої математики Державного університету інтелектуальних технологій і зв`язку

Козін О.Б. кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Державного університету інтелектуальних технологій і зв`язку.

ПЕРЕДМОВА

Планіметрія в шкільному курсі математики це навчально-методичний посібник з дисципліни "Методика навчання шкільного курсу математики" для здобувачів освітнього рівня "бакалавр". Спеціальність 014 середня освіта (Математика).

Навчально-методичний посібник присвячений планіметрії як одній з основних математичних дисциплін шкільного курсу геометрії – найважливішому компоненту загальнолюдської культури: простір, що оточує нас і його сприйняття багато в чому сприяють становленню світогляду людини. В ньому описана методика вивчення планіметричного курсу шкільної математики, яка забезпечує підготовленість учнів до самоосвіти та подальшого безперервного навчання у різних наукових сферах, дає геометричний розвиток, завдяки якому формуються інтелектуальні здібності людини, забезпечується всебічний розвиток логічного, образного, наочно – ефективного мислення учнів.

В роботі представлені основні розділи, що відображають заплановані предметні, особистісні та метапредметні результати, в процесі вивчення курсу планіметрії 7-9 класу. Кожна тема крім теоретичних основ методики навчання планіметрії містить конкретні розробки вивчення означень, теорем, розв`язання задач. Учням дається уявлення про аксіоматичну побудову курсу при визначенні аксіом як тверджень про властивості геометричних фігур, що приймаються як вихідні положення, на підставі яких доводяться подальші теореми і, взагалі, "будується вся геометрія".

ЗМІСТ

ВСТУП

Одним із важливих предметів курсу математики є геометрія. У процесі вивчення у учнів мають сформуватися глибокі та міцні знання предмета, а також уміння осмислено їх застосовувати. Проте досвід роботи вчителів математики показує, що якість геометричних знань та вмінь учнів основної школи залишається невисокою. Це пояснюється тим, що геометрія проти інших дисциплін математичного циклу є щодо складним предметом, її вивчення традиційно приділяється невелика кількість часу. І тому існує проблема: як за таких умов забезпечити високий рівень знань учнів. Вирішення цієї проблеми пов'язане безпосередньо з підготовкою майбутніх вчителів математики до роботи у школі. Необхідність підвищення рівня компетентності майбутнього вчителя математики в галузі планіметрії обумовлена низкою обставин: низьким рівнем компетентності випускників ВНЗ з геометрії; низькі бали ЗНО з математики серед випускників шкіл; скарги викладачів вишів на особливо слабкі знання першокурсників з геометрії.

Якість підготовки майбутніх вчителів математики істотно залежить від їхньої компетентності в галузі планіметрії. Дамо відповідне означення. Вважатимемо, що майбутній учитель математики компетентний у галузі планіметрії, якщо в нього розвинуто:

- мотиваційно-ціннісне ставлення до вивчення змісту та методики викладання планіметрії;

- сучасні знання в обсязі прийнятих стандартів за шкільним курсом планіметрії та методикою його викладання;

- вміння застосовувати ці знання для вирішення навчальних та практико-значущих завдань та проблем викладання;

- готовність до організації інноваційної та творчої діяльності учнів за планіметрією;

- здатність до рефлексивно-оцінної діяльності.

Компетентність майбутнього вчителя математики в галузі планіметрії має на увазі володіння відповідними базовими компетенціями. Аналіз досліджень і наукової та методичної літератури дозволив сформулювати базисні компетенції планіметрії. Наведемо приклади деяких з них:

БКП$_1$: повинен знати основні поняття планіметрії та їх властивості, вміти навести пояснювальні приклади та застосовувати теорію для вирішення стандартних та нестандартних задач;

БКП$_2$: повинен знати означення трикутника, співвідношення між його сторонами та кутами, ознаки рівності та подібності, формули для знаходження площі, вміти навести пояснювальні приклади та застосовувати теорію для вирішення стандартних та нестандартних задач;

БКП$_3$: повинен знати означення, властивості та ознаки паралелограма, формули для знаходження площі, вміти навести пояснювальні приклади та застосовувати теорію для вирішення стандартних та нестандартних задач;

БКП$_4$: повинен знати означення, властивість та ознаки прямокутника, формули для знаходження площі, вміти навести пояснювальні приклади та застосовувати теорію для вирішення стандартних та нестандартних задач;

БКП$_5$: повинен знати визначення, властивість та ознаки ромба та квадрата, формули для знаходження площі, вміти навести пояснювальні приклади та застосовувати теорію для вирішення стандартних та нестандартних задач;

БКП$_6$: повинен знати означення трапеції, середньої лінії трапеції та її властивість, формули для знаходження площі, вміти навести пояснювальні приклади та застосовувати теорію для вирішення стандартних та нестандартних задач;

БКП$_7$: повинен знати означення кола, центру, радіусу, діаметра, хорди, дуги, сектора та сегменту, дотичної та січної; вписаного та описаного кіл і багатокутників; вміти навести пояснювальні приклади та застосовувати теорію для вирішення стандартних та нестандартних задач;

БКП8$_8$: повинен знати аксіоми конструктивної геометрії та математичних інструментів, методи розв`язування задач на побудови; вміти навести пояснювальні приклади та застосовувати теорію для вирішення стандартних та нестандартних задач;

Відбір змісту, з метою формування компетентності за базовими компетенціями БК$_1$-БК$_8$, будемо проводити за наступним алгоритмом:

1) теорія (означення понять, їх властивості та елементарні пояснювальні приклади);

2) методика навчання конкретної теми планіметрії, демонстраційні приклади (максимально широкий набір типових задач з розв`язком, розв'язання задач "за зразком і подібністю");

3) задачі для самостійного розв`язування (включені задачі, як предметного, і практико-ориентированного характеру), створені задля формування відповідальності та самостійності.

4) творчі задачі, які спрямовані на формування прагнення до інноваційної та творчої діяльності майбутніх вчителів математики, що також сприятиме розвитку компетентності учнів у галузі планіметрії.

Розглянута модель є цілісною освітою, оскільки кожен її структурний елемент перебуває у тісному взаємозв'язку з іншими, виконує свою функцію, працює на кінцевий результат.

Тема1: **Коротка характеристика шкільного курсу геометрії.**

1.1 Вступні зауваження.

Геометрія як наука – частина математики, предметом якої є просторові відношення і форми тіл, без урахування інших їх властивостей (густини, маси, кольору тощо). Сучасна геометрія вивчає будь-які відношення і форми, що виникають при дослідженні однорідних об'єктів, явищ, подій (без урахування їх конкретного змісту) і виявляються схожими на звичайні просторові відношення і форми.

Виникнення геометрії з давніх часів, як і більшості інших наук, зумовлено практичними потребами людей (вимірювання відстаней, площ земельних ділянок, об'ємів тіл). Найпростіші геометричні твердження і поняття були відомі ще в Стародавньому Єгипті (початок II тис. до н. е.). Проте логічних доведень тверджень або зовсім не було, або були примітивними. Згодом геометричні знання з Єгипту проникли в Грецію, і з VI по I ст. до н.е. розвиток геометрії відбувався в основному в Стародавній Греції, де геометричні відомості було зведено в систему і виникла назва науки – геометрія. На той час вже з'явилися порівняно строгі логічні доведення, які були зібрані в "Началах" Евкліда (близько 300 р. до. н.е.).

Зовсім новий підхід до розв'язування геометричних задач запропонував у першій половині XVII ст. Р. Декарт (1596-1650), який відкрив метод координат, чим заклав основи аналітичної геометрії.

У 1826 р. М.І. Лобачевський запропонував систему аксіом, відмінну від аксіом Евкліда, - була відкрита можливість існування неевклідової геометрії. До найбільш відомих неевклідових геометрій відносять геометрію Лобачевского і геометрію Рімана. Питання про введення ідей Лобачевского в середню школу поставало ще наприкінці XIX – початку XX ст., прихильниками якої були українські педагоги-математики. Наприклад, П.О. Долгушин, розробляючи методику ознайомлення учнів з неевклідовими геометріями, виходив з того, що поняття геометрії Лобачевского і геометрії Рімана потрібно вводити у тісному зв'язку з геометрією Евкліда, розглядаючи всі три геометрії як логічні системи, що допускають різні інтерпретації.

У шкільному курсі до 60-х років XX ст. в основу логічної побудови підручників геометрії було покладено аксіоматику Евкліда. У період світового руху за модернізацію шкільного курсу висловлювалися думки відмовитися від системи Евкліда і будувати шкільний курс тільки на основі сучасної і досконалої аксіоматики. Наприклад, пропонувалося побудувати ШКГ на основі аксіоматики векторного простору (аксіоми Вейля), в основу покласти геометричні перетворення, аксіоми метричного простору. Створювалися пробні підручники, наприклад, підручник планіметрії А. М. Колмогорова, в основу якого було покладено аксіоматику, запропоновану А. М. Колмогоровим. Однак, посібник зазнав гострої критики через його занадто високий теоретичний рівень, заформалізованість термінологією і символікою множин, недосконалість системи задач.

З 1982 – 1983 навч. р. всі школи України почали працювати за навчальним посібником О. В. Погорєлова, яким користувалися в загальноосвітніх класах фактично до 2000 – х років.

Наразі розроблено нові підручники з геометрії для 7-9 кл., рекомендованими МОН України, серед яких на 2022-23 н.р. запропоновано підручники таких авторів і авторських колективів:

1. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.
2. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О.Ф.
3. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А.
4. Апостолова Г. В.
5. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г.
6. Істер О. С.
7. Роганін О. М., Капіносов А. М.
8. Тадеєв В. О.

(зеленим кольором – ті, що тільки для 7 кл.)

Далі в тексті підручники згадуються за даною нумерацією

Посилання на рекомендовані підручники:

https://imzo.gov.ua/pidruchniki/pereliki/

https://docs.google.com/spreadsheets/d/16NyRYEKgeQ4T5BE68La-s2gn0q2MPyIWSWx-Vdw-zmA/edit?ts=5a364195#gid=883367929

1.2. Геометрія як навчальна дисципліна.

Мета викладання геометрії в 7-9 класах – систематичне вивчення властивостей геометричних фігур на площині, формування просторових уявлень, розвиток логічного мислення, засвоєння відомостей, потрібних для вивчення суміжних дисциплін (фізики, географії, креслення, трудового навчання та ін.).

Визначена мета досягається розв'язуванням таких завдань: забезпечення раціонального поєднання логічної строгості і геометричної наочності, розвитку інтуїції, послідовного проведення ідеї дедуктивної побудови математичної теорії і формування у зв'язку з цим потреби обґрунтовувати твердження при доведенні теорем і розв'язуванні задач; цілеспрямоване навчання учнів вичленовуванню геометричних форм, відношень і фактів в предметах і явищах навколишньої дійсності; реалізація практичної спрямованості курсу шляхом застосування геометричного апарату до розв’язування задач на обчислення, доведення і побудову, у тому числі прикладного і міжпредметного змісту.

Будувати курс геометрії можна по-різному, додержуючись різних логічних рівнів або напрямів.

Напрям А – формально-логічний – повне відмовлення від інтуїції і досвіду, основні поняття визначаються лише аксіомами.

Напрям В – досвідно-дедуктивний – основні поняття і відношення запозичуються з досвіду, всі обґрунтування дедуктивні. Розрізняють три підрівня: B_1 - формулюються всі необхідні аксіоми; B_2 - тільки частина аксіом подається явно; B_3 - формулюються тільки ті аксіоми, зміст яких не здається очевидним.

Напрям С – інтуїтивно – дедуктивний – інтуїція переплітається з дедукцією.

Напрям D – інтуїтивно-експериментальний – геометричні факти встановлюються експериментально, доведення відсутні.

ШКГ будувати на рівні А неможливо, оскільки він буде недоступний для учнів. Рівень D достатній тільки для учнів 1-6 класів. В 7-11 класах геометрію викладають на рівні B_1. (Раніше, працюючи за підручниками А.П.Кисельова, додержувалися рівня B_2. Учням давали уявлення про аксіоми, але формулювали тільки окремі з них, не виділяли неозначуваних понять).

Навчальний матеріал курсу планіметрії групується навколо п’яти змістових ліній:

1) Геометричні фігури та їх властивості;
2) Геометричні побудови;
3) Геометричні перетворення;
4) Геометричні величини, їх вимірювання і обчислення;
5) Координати і вектори.

Геометрію серед інших математичних наук виділяє насамперед те, що в ній сама строга логіка з'єднується з наочними поданнями: вони взаємно організують і направляють один одного. Це створює особливі труднощі викладання геометрії – сполучити жвавість уяви і строгість думки, але, якщо це вдається, то досягається більша ясність розуміння й радості безпосереднього бачення життя.

Специфічною особливістю геометрії є й те, що в ній з`єднуються абстрактна геометрія й реальна геометрія, реальні просторові відносини й властивості тіл.

Твердження геометрії висловлюються для ідеальних тіл, які уявляються наочно. Таким чином, викладання геометрії повинне включати три тісно зв'язаних, але разом з тім і протилежних елемента: логіку, наочне уявлення, застосування до реальних речей.. Цей "трикутник" - душа викладання геометрії. Звідси задача викладання геометрії - дати учням необхідні для практичної діяльності, вивчення інших предметів знання й уміння, розвивати в учнів просторові уявлення, практичне розуміння, логічне мислення.

1.3. Пропедевтика геометрії.

Питання про необхідність уведення пропедевтичного курсу геометрії поставало ще на початку минулого століття. У зв'язку з цим необхідно відзначити працю М. М. Володкевича "К вопросу о реформе преподавания математики" (1910 р.). Ідеї викладу такого курсу геометрії індуктивно-лабораторним методом були здійснені О. М. Астрябом ("Наглядная геометрія", 1909 р.).

На сучасному етапі пропедевтика здійснюється не окремим курсом, а в межах початкової школи і на протязі вивчення математики в 5-6 класах.

У першому класі на наочно-інтуїтивному і оперативному рівнях (учні виконують побудови, практичні дії з фігурами) вводяться: круг, трикутник, квадрат, чотирикутник, п`ятикутник. Учні ознайомлюються з точкою і відрізком, їх зображенням, довжиною відрізка. Вводиться одиниця довжини – сантиметр, пізніше – дециметр, розглядається поняття "відстань". Формуються уміння вимірювати довжини відрізків, будувати відрізок заданої довжини за допомогою лінійки; розпізнавати многокутники.

У другому класі учні далі виконують вимірювання і побудову відрізків, розпізнають знайомі фігури. Вводяться нові фігури – ламана, многокутник. Вимірюється довжина ламаної і знаходиться периметр многокутника. Визначаються кути многокутника, прямий кут, вводяться прямокутник, квадрат, коло, центр кола. Учні вчаться будувати прямокутники і квадрати на папері у клітинку, коло – за допомогою циркуля.

У третьому класі розглядається буквене позначення геометричних фігур. Вперше вводиться поняття площі фігури як розміру частини площини, обмеженої фігурою. Учні вивчають одиниці площі: квадратний сантиметр, квадратний дециметр. Обчислюють площі фігур методом підрахунку. Формується уміння будувати прямокутник і квадрат за даними довжинами сторін (по клітинках зошита). Продовжується розв`язування вправ на знаходження периметра многокутника.

У четвертому класі учні далі вивчають міри площі (вводиться крім відомих вже квадратних сантиметрів і квадратного дециметра нова одиниця – квадратний метр), визначають площі прямокутників та інших фігур за допомогою палетки.

Найважливішим завданням курсу математики початкової школи, що стосуються пропедевтики систематичного курсу геометрії, є: ознайомлення учнів з основними величинами та їх вимірюванням (довжини відрізків, площі фігур); формування уявлень про деякі геометричні фігури та їх властивості; відпрацювання потрібних графічних умінь.

Вивчення у молодших класах геометричного матеріалу тісно пов'язане з арифметичним. Наприклад, ознайомлення з многокутником і його елементами пов'язується з лічбою: "Скільки сторін має цей многокутник? Скільки кутів? Який з даних двох многокутників має більше сторін? На скільки більше?".

Деякі геометричні фігури доцільно використовувати для наочного ілюстрування властивостей арифметичних дій. Наприклад, за допомогою поділеного на рівні квадрати прямокутника можна проілюструвати переставну властивість множення натуральних чисел, обчислення площі прямокутника можна пов'язати з розподільним законом множення відносно додавання.

Особливістю методики вивчення геометричного матеріалу в початковій школі є широке застосування конкретно-індуктивного методу, наочності і практичних дій учнів. На основі наочного ознайомлення з моделями та рисунками учні повинні навчитися вільно розпізнавати простіші геометричні фігури на оточуючих предметах, моделях, рисунках, оволодіти навичками побудови та вимірювання. На цьому етапі навчання не передбачено введення означень геометричних фігур, проведення дедуктивних міркувань, крім, можливо, найпростіших дедуктивних висновків.

На відміну від початкової школи в 5-6 класах теоретичний рівень викладу геометричного матеріалу вищий. Окремі поняття вводяться на основі означень (розгорнутий кут, паралельні прямі тощо), проводяться нескладні дедуктивні міркування. Разом з тим, як і в початковій школі, при вивченні елементів геометрії мають переважати конкретно-індуктивний метод навчання, широке застосування наочності, практичних дій учнів з моделями і виконання ними зображень фігур, побудов лінійкою, косинцем, циркулем.

У 5-ому класі учні ознайомлюються з новими геометричними фігурами: промінь (як фігура, утворена продовженням в один бік відрізка), пряма (як фігура, утворена продовженням відрізка в обидва боки), дістають уявлення про площину як образ реальних об\`єктів (поверхня скла, спокійного водоймища тощо). Безпосередньою побудовою вводяться: поняття кута, його видів (прямий, гострий, тупий), одиниця вимірювання кутів. Формується уміння вимірювати кути транспортиром і будувати кути даної величини. Учням уже відоме поняття площі, вони вміють обчислювати площі квадрата і прямокутника, однак на цьому етапі навчання вводяться формули площі прямокутника і квадрата, нові одиниці площі (гектар, квадратний кілометр). Учні вперше ознайомлюються з просторовою фігурою – прямокутним паралелепіпедом, з новою геометричною величиною – об\`ємом, його одиницями, розв\`язують вправи на обчислення об\`єму прямокутного паралелепіпеда.

У 6-ому класі вводяться формули довжини кола і площі круга – відомих з початкової школи геометричних фігур. Вводяться: нова фігура – круговий сектор; нові геометричні тіла – призма, піраміда, конус.

Важливими для підготовки до вивчення систематичного курсу геометрії є відомості про перпендикулярні і паралельні прямі, про побудову їх лінійкою і косинцем. На рівні практичних дій учні ознайомлюються з фактами, які стверджуються в курсі геометрії аксіомою паралельних і теоремою про можливість проведення через дану точку єдиної прямої, паралельної даній.

На цьому етапі навчання поглиблюються і розширюються відомості про знайомі учням з початкової школи фігури, а також вводяться нові фігури і геометричні поняття. Зокрема, учні далі вивчають відрізки і їх вимірювання, але при цьому звертається увага на те, що відрізок коротше будь-якої іншої лінії, що з’єднує їх кінці, що довжина відрізка, який складається з кількох відрізків, дорівнює сумі довжин його частин. Отже, всі теоретичні факти, що стосуються геометричних величин і формулюються в курсі геометрії у вигляді аксіом вимірювання, на цьому етапі засвоюються на рівні наочно-дійового мислення.

Тема 2. Методика проведення перших уроків планіметрії.

2.1. Вступні зауваження.

Матеріал, що вивчається на перших уроках геометрії, відповідає 1 параграфу підручника авторського колективу: А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір "Геометрія - 7" (2020 р.) [1], авторського колективу: А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський "Геометрія - 7" (2018 р.) [2] і включає первісні поняття геометрії, найпростіші геометричні фігури: відрізок, промінь, кут, трикутник, перпендикулярні прямі, паралельні прямі, вводяться поняття аксіоми, теореми, формулюються (в явному та неявному вигляді) всі аксіоми, що покладено в основу курсу.

Основна мета перших уроків геометрії :

1) дати поняття про геометрію як науку;

2) систематизувати наочні уявлення про найпростіші геометричні фігури;

3) ввести первісні поняття;

4) вмотивувати необхідність означення деяких відомих їм фігур (відрізок, промінь, кут, перпендикулярні та паралельні прямі);

5) розглянути первісні та означувані відношення;

6) сформулювати основні властивості найпростіших фігур, які названі аксіомами.

На перших уроках також вводяться поняття аксіоми, теореми та їх доведення. В учнів формується потреба в доведенні нових тверджень за допомогою аксіом і вже відомих тверджень. Важливим завданням перших уроків є формування геометричного мовлення на основі вже відомої і нової для учнів термінології.

Необхідно також на перш уроках ознайомити учнів з навчальними посібниками, повідомити, які потрібні зошити і креслярські приладдя.

На перших уроках не ставиться за мету пояснювати роль і походження первісних понять, говорити про аксіоматичну побудову геометрії. Це можна свідомо обговорювати лише наприкінці вивчення планіметрії або на початку вивчення стереометрії. Однак дещо в загальних рисах учням можна пояснити, що і роблять автори підручників, при цьому наголошуючи, що не слід домагатися повного розуміння ідеї дедуктивної побудови геометрії від усіх учнів. Цю ідею вчитель повинен систематично проводити з перших уроків шляхом формування потреби доводити нові геометричні твердження на основі означень вже відомих понять, аксіом і доведених тверджень.

Загалом, автори підручників вважають, що в межах загальноосвітньої школи з тією кількістю годин, які відводяться на вивчення цієї дисципліни реалізувати формально-логічний принцип побудови курсу геометрії неможливо. В основу даних підручників покладено наочно-дедуктивний принцип у поєднанні з частковою аксіоматизацією.

Отже, зміст перших уроків геометрії здебільшого описовий: учитель не стільки креслить, обчислює, записує на дошці, скільки пояснює усно, формулює і аналізує різні означення, властивості тощо. А така інформація, як відомо, гірше сприймається і запам’ятовується учнями, оскільки має більш високий рівень абстракції. Тому треба переходити від рівня D до рівня B_2 (див. лекцію 1) (а саме цей рівень і прийнято в діючих підручниках) поступово, спочатку систематизуючи матеріал попередніх класів, чому автори підручників приділяють значну увагу у вступі.

Треба урахувати, що існують значні об`єктивні труднощі, з якими зустрічаються учні при вивченні цієї теми:

1) психічні особливості учнів даного віку;
2) виділення геометрії в особливу дисципліну;
3) значне підвищення рівня логічної строгості вивчення матеріалу;
4) багато нових понять, термінів (більш 30);
5) підвищення рівня абстрактності матеріалу;
6) недостатня сформованість геометричних уявлень;
7) недостатня логічна підготовка учнів.

Для успішного виконання задач, які поставлені у цій темі, необхідно дотримуватись певних методичних принципів, таких як:

1. Розгляд усіх основних властивостей геометричних фігур необхідно проводити на наочній основі, в опорі на очевидні для учнів факти та ті, які знайомі їм з попереднього навчання.

Пояснюючи учням матеріал навчального посібника, вчитель не повинен намагатися точно повторити сказане в ньому. Треба розповідати матеріал своїми словами. Наприклад, бажано освіжити в пам`яті учнів те, що вони знають з попередніх класів про геометричні фігури, намалювати їх, назвати. Вчителю треба привести це у систему, узагальнити, уточнити назви, доповнити іншими геометричними фігурами.

Необхідно згадати, де учні вже зустрічались з словом "фігура", підкреслити, що в геометрії будемо розглядати тільки геометричні фігури, і кожну геометричну фігуру можна уявити складеною із точок. І одна точка, і вся площина – теж геометричні фігури. Об`єднання геометричних фігур, і будь-яка частина геометричної фігури – також геометрична фігура.

2. Велику роль у вивченні основних властивостей геометричних фігур відіграють вправи. Притому, більша їх частина повинна розв`язуватись усно для того, щоб учні придбали звички усної мови, оволоділи відповідними термінами. Значна частина вправ повинна носити конструктивний характер.

3. При розв`язуванні більшості завдань треба добиватися того, щоб учні спочатку знайшли наочно-індуктивне обґрунтування, а лише після цього намагалися дати обґрунтування, посилаючись на аксіоми, означення і раніше доведені теореми.

Задача. Точки А, В, С належать прямій а, причому В, С, Д лежать на одній прямій. Чи належать усі чотири точки одній прямій?

Виконуємо рисунок. Рисунок наочно показує, що належать. А тепер спробуй довести строго.

4. При розв`язуванні задач поступово формувати в учнів потребу доведення. При цьому треба пам`ятати, що учні тільки починають вчитися доводити, в силу цього доведення не повинні бути багато етапні, вони повинні складатися з одного-двох логічних кроків. Навчання доведенням на цьому етапі проводиться за допомогою багаторазового обіг рання однієї ж самої геометричної ситуації.

5. Значну роль в навчанні учнів геометрії на першому етапі повинні відіграти всілякі різноманітні опори (схеми, таблиці, моделі, завдання з пропусками).

Наведемо приклади задач, які повинні розв`язувати учні після вивчення даної теми (відповідно до навчальної програми).

Задача. Точки А, В, С належать прямій а, ВС = 15 см, АС менше за АВ на 3 см. Знайти АС і АВ.

Розв`язання:

При розв`язуванні цієї задачі треба обов`язково розглядати випадки розташування точок на прямій а. Можуть бути три випадки: 1) В лежить між точками А і С; 2) А лежить між точками В і С; 30 С лежить між точками А і В. Учні можуть здогадатися як розташовані точки на прямій а. Таку відповідь не приймайте, бо все треба довести, спираючись на аксіоми.

Треба мати на увазі, якщо в задачі між елементами вказані співвідношення "на більше". "на менше", "у більше", "у менше", то задача розв`язується алгебраїчним методом за допомогою рівняння

1)

З аксіоми про вимірювання відрізка АС = АВ + ВС. Позначимо АС через х см, Тоді АВ = х+3 см. Маємо рівняння х = (х + 3) +15. Це рівняння розв`язків не має.

2)

З аксіоми про вимірювання відрізка ВС = ВА + АС. Позначимо АС через х см, Тоді АВ = х+3 см. Маємо рівняння 15 = (х + 3) + х. Звідки х=6. АС = 6 см, АВ = 9 см.

3)

З аксіоми про вимірювання відрізка AB = AC + CB. Позначимо AC через х см, Тоді AB = х+3 см. Маємо рівняння (х + 3) = х + 15. Це рівняння розв`язків не має.

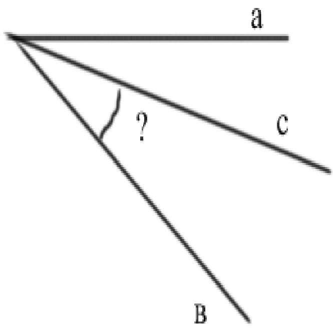
При розв`язуванні цієї задачі позитивна оцінка ставиться, якщо є три випадки розташування точок на прямій, малюнки і рівняння.

Задача. Промінь С проходить між сторонами кута (ав). Знайти кут (вс), якщо кут (ас)=34^0, кут (ав)=75^{o} .

Розв`язання:

З аксіоми про вимірювання кута (ав) = (вс) + (ас). Маємо рівняння $75^0 = (вс) + 34^0$. Звідки (вс) = $75^0 - 34^0 = 41^{\mathrm{o}}$.

Оцінка буде позитивною, якщо буде посилання на відповідну аксіому.



Загалом, автори діючих підручників вважають, що мета вивчення геометрії в школі – навчити учнів застосовувати властивості геометричних фігур у процесі розв'язання практичних і теоретичних задач.

2.2. Методика вивчення понять даної теми.

При формуванні понять треба пам'ятати, що багато із знайомих учням понять вивчаються на новому рівні, у системі понять. Задача вчителя – систематизувати та поглибити знання учнів. У діючих підручниках є три класи понять: 1) первісні (неозначувані), які не означуються (точка, пряма, належить, лежить між, градусна міра кута, довжина відрізка); 2) ті, що вводяться описово, без строгого означення, на прикладах (геометрична фігура, аксіома, дати означення чому-небудь та ін.); 3) поняття, які означуються за допомогою первісних понять або означених раніше. Означення понять найчастіше сформульовані конструктивно, тобто в означенні вказується спосіб утворення фігури або через найближчий рід та видову відмінність. Як правило, означення подаються в пояснювальному тексті з виділення курсивом.

Методика вивчення понять кожного класу суттєво різна. Загальним буде тільки те, що оволодіння цими поняттями проходить у процесі розв`язування вправ.

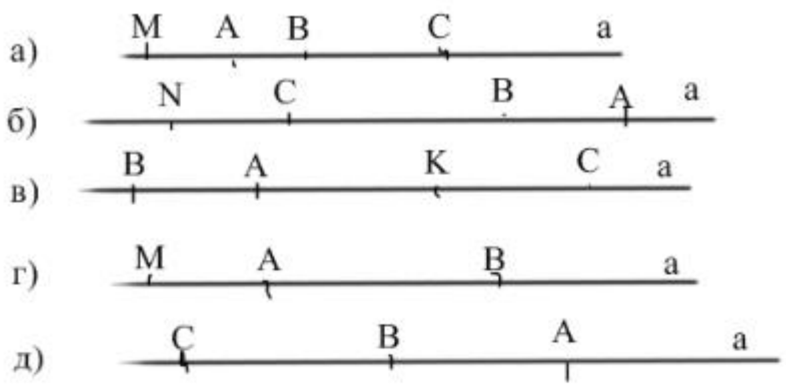
Щодо неозначуваних понять планіметрії "точка", "пряма", то уявлення про них учні отримують ще в попередніх класах. Однак хоч уявлення про точку походить від об'єктів, що існують реально (місце дотику олівця до паперу, місце перетину двох ліній тощо), варто підкреслити, що в геометрії точка не має розмірів. Аналогічно, уявлення про пряму учні отримують з туго натягнутої нитки, однак, відзначаємо, пряма не має товщини, кінців і вважається необмежено продовженою.

При формуванні поняття "належить" для точок і прямих на площині треба звернути увагу на можливість вживання тотожної термінології: "точки А і С належать прямій *a*", "точки А і С лежать на прямій *a*", "пряма *a* проходить через точки А і С".

При формуванні поняття "лежить між" треба відзначити, ще цей термін вживається тільки стосовно трьох точок, які лежать на одній прямій. Корисно розв'язувати усні вправи на підведення під первісні відношення, використовуючи різні відомі учням фігури.

Приклад введення поняття 1 класу:

Вводимо поняття "точка лежить між двома іншими". Викликаємо декілька учнів до дошки і шикуємо їх у шеренгу. Просимо дітей описати положення одного учня стосовно інших. Потім розглядаємо малюнки



Вчитель: Діти, опишіть положення точки В на кожному малюнку.

Учень: У випадках а), б), д) точка В лежить між точками А і С (із життєвого досвіту).

Вчитель: Зверніть увагу, що точки А, В, С належать прямій а. Кажуть, що точка В розділяє точки А і С. Ще кажуть, що точки В і С лежать по один бік від точки А, чи що точки А і В лежать по один бік від точки С.

Потім учні розв`язують вправи.

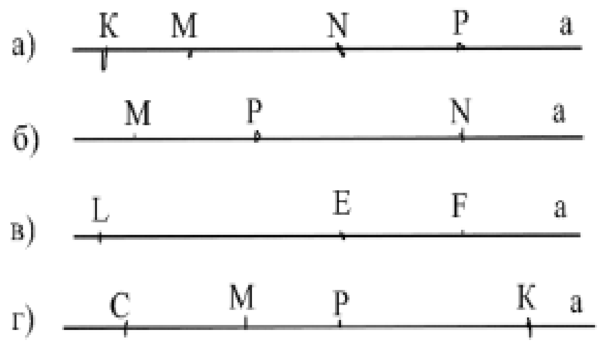
Вправа №1. Намалюйте пряму *b* вертикально. Намалюйте точки К, Н, М на прямій *b* так, щоб точка Н лежала між точками К і М.

Вправа №2. Намалюйте горизонтальну пряму *с* на ній точки Е, Д, Н так, щоб точки Д і Н лежали по один бік від точки Е.

Корисно розв`язати усні вправи на підведення під поняття "лежить між", використовуючи різні відомі учням фігури

Система запитань може бути такою.

1) Чи лежить точка Р між точками М і N (рис. б) ?
2) Які точки на рис. а, б лежать між двома іншими?
3) Чи лежить точка F між точками L, Е (рис. в)? Укажіть на цьому рисунку точки, які лежать між двома іншими.
4) Яка точка лежить між двома іншими на рис. г, які точки не мають цієї властивості?

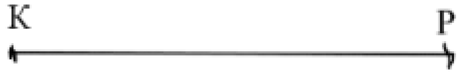


Приклад введення поняття 2 класу:

Вводимо поняття "відрізок". Проводимо з учнями невеличку бесіду: "Зобразимо пряму *а* , яка проходить через дві точки М і N. Ці точки обмежують частину прямої *а*, яку виділимо червоним кольором. Таку частину прямої з точками М і N називають відрізком, а точки М і N – кінцями цього відрізка".

Означення. Відрізком називається частина прямої, що складається з двох даних точок цієї прямої (кінців відрізка) й усіх точок, що лежать між ними.

Для будь – яких двох точок К і Р існує єдиний відрізок, для якого ці точки є кінцями, тобто відрізок своїми кінцями задається однозначно. Тому відрізок на рисунку позначають КР або РК .



На перших уроках геометрії вводиться багато означуваних понять. Переважна більшість цих понять відома учням з попередніх класів, але тепер ставиться завдання сформулювати їх означення. Щодо терміна "означення", то на відміну від термінів "аксіома". "теорема", його в підручниках не пояснюють. З курсу логіки відомо, що означення – це твердження, в якому перелічуються суттєві властивості поняття. На початку вивчення курсу геометрії з дидактичних міркувань давати таке тлумачення терміна "означення" учням недоцільно. Тому досить обмежитись роз`ясненням на прикладах поняття "означити що-небудь".

Означувані поняття на перших уроках геометрії можна вводити і конкретно-індуктивним (наприклад суміжних кутів, перпендикулярних прямих) і абстрактно-дедуктивним ("рівні відрізки", "перпендикулярні відрізки") методами.

Приклад введення поняття 3 класу:

Вводимо поняття "середина відрізка".

Вчитель: Діти, намалюйте пряму *а* і дві точки А і В на ній так, щоб відстань між точками А і В була, наприклад 10 см. Потім відміримо відстань 5 см від точки А і поставимо точку С. Яка буде відстань від точки С до точки В?

Учень: 5 см.

Вчитель: Якщо відстань АС = СВ, то точка С називається серединою відрізка.

Де повинна розташовуватися точка С щоб бути серединою відрізка?

Учень: на відрізку АВ.

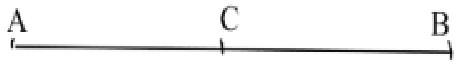
Вчитель: Яка ще умова повинна виконуватись, щоб точка С була серединою відрізка?

Учень: Відстані між точками А і С, точками С і В повинні бути рівними.

Вчитель: Отже, зверніть увагу на те, щоб точка була серединою відрізка треба щоб вона належала відрізку і ділила відстань між його кінцями навпіл.

Означення. Серединою відрізка АВ називають таку його точку С, що АС = СВ.

Вчитель: На даних рисунках знайдіть середину відрізків.

1)


2)


3)


Учень бере лінійку і перевіряє по двом ознакам на якому рисунку буде середина відрізку. Свою роботу учень супроводжує поясненням в гучній мові.

Вчитель: Тепер намалюйте два відрізка СК і РВ. На кожному відрізку знайдіть його середину.

Вправа №1. Намалюйте відрізок РК = 6 см. Позначимо дві точки А і В, які належать цьому відрізку, такі, що РА = 2 см, АВ = 2 см. Чи є на цьому малюнку середини відрізків?

Щодо поняття "геометрична фігура", то в діючих підручниках цей термін не обговорюється; автори вважають його інтуїтивно зрозумілим учням. Застосовуючи моделі фігур, варто підкреслити, що трикутники, многокутники, коло, круг можуть розміщуватися в одній площині всіма своїми точками, на відміну від паралелепіпеда, кулі, циліндра, що називаються тілами. Після цього природно ввести поняття планіметрії як розділу геометрії, що вивчає фігури на площині.

Отже, на перших уроках геометрії згадується і така фігура, як площина (в поясненні терміна "планіметрія"), хоча вони не є об’єктом вивчення в планіметрії.

2.3. Методика вивчення аксіом.

Слід мати на увазі, що з аксіомами планіметрії на оперативному, практичному рівні учні фактично знайомляться при вивчення математики в 1-6 класах. Однак на тому етапі навчання ці властивості найпростіших фігур аксіомами не називалися.

В деяких діючих підручниках термін "аксіома" з`являється на початку першого параграфа (наприклад, у підручнику [2]), а в деяких в кінці параграфа (наприклад, у підручнику [1]. На початку опису матеріалу аксіоми називають "основними властивостями найпростіших геометричних фігур".

Наприклад, термін "аксіома" не вводиться одразу за підручником [1], а з'являється лише в пункті 6, який має назву "Аксіоми". Даний підручник передбачає введення 11 аксіом, 6 в явному вигляді та 5 в неявному:

В неявному вигляді (не сказано, що це основні властивості фігур):

1. Якою б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.
2. Для будь-яких точок А і В існує єдиний відрізок, для якого ці точки є кінцями.
3. Кожний відрізок має певну довжину.
4. Кожний кут має певну величину.
5. Будь-яка пряма ділить площину на дві півплощини, для яких ця пряма є *межею.*

В явному вигляді (зазначено, що це основні властивості фігур).

6. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і д того ж тільки одну.
7. Якщо точка С є внутрішньою точкою відрізка АВ, то відрізок АВ дорівнює сумі відрізків АС і СВ, тобто АВ=АС+СВ. Якщо точка С не належить відрізку АВ, то АВ<АС+СВ ("сума відрізків" = "сума довжин відрізків").

8. Якщо промінь ОС ділить кут АОВ на два кути АОС і СОВ, то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.
9. Для даного кута АВС і даного променя B_1C_1 існує єдиний кут $A_1B_1C_1$, який дорівнює куту АВС, такий, що точка C_1 лежить у заданій півплощині відносно прямої B_1C_1.

В § 2 даного підручника міститься також основна властивість рівності трикутників (в підручнику О.В.Погорєлова аналогічна властивість мала назву "аксіома існування трикутника, рівного даного"), проте автори її аксіомою не називають, хоча на той час термін "аксіома" вже введено.

Тільки в п. 13 з'являється основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельності прямих). Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Спочатку розглядається задача на побудову прямої, паралельної даній, через точку, що не належить даній прямій – у такий спосіб доводиться факт існування прямої, паралельної даній (с. 115).

В тексті підручника [1] також зустрічаються формулювання, які в підручнику О.В.Погорєлова було прийнято за аксіоми, наприклад: будь-яка пряма ділить площину на дві півплощини, для яких ця пряма є *межею*. Правда, О.В.Погорєлов не вводив поняття "межі півплощини".

В основу курсу підручника [2] покладено 7 аксіом. У порівнянні з підручником [1], в якому прийнято 5 аксіом, тут додано аксіому про взаємне розташування трьох точок на одній прямій, аксіоми відкладання відрізків і кутів, аксіому паралельних. В цьому смислі аксіоматика даного підручника нагадує систему аксіом в підручнику О.В. Погорєлова.

В основу курсу покладено 7 аксіом.

Аксіома проведення прямої. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Аксіома розміщення точок на прямій. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

Аксіома вимірювання відрізків. Кожний відрізок має певну довжину, що виражається додатним числом у заданих одиницях вимірювання. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які відрізок ділиться будь-якою його точкою.

Аксіома відкладання відрізків. На будь-якому промені від його початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини, і тільки один.

Аксіома вимірювання кутів. Кожний кут має градусну міру, що виражається додатним числом. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Якщо промінь ділить даний кут на два кути, то градусна міра даного кута дорівнює сумі градусних мір двох отриманих кутів.

Аксіома відкладання кутів. Від будь-якого променя даної прямої можна відкласти в заданий бік від прямої кут із заданою градусною мірою, меншою за 180°, і тільки один.

Аксіома паралельних прямих (аксіома Евкліда). Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більш ніж одну пряму, паралельну даній.

Головне, за яким би підручником не велося навчання, основні властивості найпростіших геометричних фігур (аксіоми) повинні бути сформульовані і виділені. Учню не треба вникати які з них явні або неявні. Він повинен знати їх, так як на цих основних властивостях будується планіметрія.

Вивчення основних властивостей найпростіших фігур і формулювання кожної властивості доцільно починати з розгляду відповідних фігур і практичних дій учнів: вибір точок на прямій і поза нею, проведення прямої через дві даної точки, вимірювання довжини відрізка і величини кута.

Помічені властивості учні можуть сформулювати самостійно у вигляді тверджень, які пізніше будуть називатися аксіомами.

При вивченні аксіом треба дотримуватись такої схеми:

1) підводять учнів до відповідної аксіоми за допомогою приклада з навколишнього життя; за допомогою моделі або побудування. Наприклад, аксіома 1: через дві точки можна провести пряму, і тільки одну. Розглядаємо приклад доріжки від дома до школи – пряма тільки одна.
2) формулюємо аксіому;
3) ілюструємо її рисунком;
4) коротко записуємо (якщо можна);
5) розглядаємо вправи, де ця аксіома використовується.

Наприклад, для аксіоми 1 вправа така: скільки можна побудувати прямих, щоб на кожній з них лежало не менш двох з даних трьох точок? Друга вправа: точки А, В, С лежать на одній прямій. Точки В, С, Д лежать на одній прямій. Чи лежать усі точки на одній прямій?

Щодо введення поняття аксіоми, як твердження про властивості найпростіших фігур, яке домовились прийняти без доведення, то на перших уроках планіметрії цими відомостями про аксіоми можна обмежитись.

У 10 класі на першому уроці стереометрії можна дещо розширити інформацію про аксіоми. Варто підкреслити, що ці твердження домовились прийняти без доведення. Залежно від особливостей вибору первісних понять і побудови курсу геометрії за аксіому можна вибрати інше твердження, яке в іншому курсі доводиться.

2.4. Методика вивчення перших доведень.

В умовах роботи за підручником [1] поняття про теорему вводиться в першому ж пункті, крім того, вводиться і перша теорема з доведенням. Автори обґрунтовують доцільність такого рішення тим, що:

1) дітям відразу стає зрозумілим, що від них будуть вимагати доказових міркувань;

2) це дозволяє відразу продемонструвати застосування першої аксіоми (основної властивості);

3) це дозволяє скоріше вводити задачі на доведення.

Терміни "теорема" і "доведення" вводимо під час бесіди з учнями. При розгляданні раніше основних властивостей ми не ставили запитання "Чому?" і сприймали їх на віру. Давайте спробуємо показати правдивість якогось твердження. Справедливість того чи іншого твердження встановлюється за допомогою міркування. Це міркування називається доведенням. А саме твердження, яке доводиться, називається теоремою.

Перша теорема: Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.

Така теорема має категоричну форму, проте можна пояснити структуру теореми (умова і висновок) також треба пояснити на прикладі формулювання цієї теореми, бо іншого зразка учні ще не мають. Можна також показати учням зразок скороченого запису умови і висновку теореми, проілюструвати рисунком. Треба привчати учнів до культури записів на дошці і в зошиті: рекомендувати рисунок розміщувати зліва, а скорочений запис змісту теореми (задачі) – справа. Хоча у підручнику [1] не використовується символіка теорії множин, учитель може ввести символи $\in$ і $\notin$ для точок.

Перша теорема доводиться методом від супротивного, що показує його над важливість в курсі геометрії, тому необхідно учням пояснити ідею метода. Пізніше треба дати навчальний алгоритм і орієнтир доцільності використання метода від супротивного: порівнюючи обидва доведення, учні помічають їх суттєві однакові кроки і за допомогою вчителя можуть сформулювати алгоритм застосування цього методу; орієнтир можливості застосування методу від супротивного: неможливість чого-небудь і єдність чого-небудь в математиці завжди доводиться методом від супротивного, також цим методом іноді користуються при доведенні паралельності, перпендикулярності, обернених тверджень.

Щоб довести твердження методом від супротивного треба: 1) припустити супротивне тому, що треба довести; 2) користуючись припущенням, відомими аксіомами і доведеними раніше твердженнями, шляхом міркувань дійти висновку, який суперечить або умові твердження. Яке доводиться, або відомій аксіомі, або доведеному раніше твердженню, або припущенню; 3) зробити висновок, що припущення неправильне, а правильне те, що треба довести.

Також в першому параграфі будуть доведені ще три теореми: про суміжні, вертикальні кути та існування та єдність прямої, перпендикулярної даної в кожній її точці.

На перших уроках геометрії доцільним є такий варіант опрацювання доведення: воно пояснюється, закріплюється повторним поясненням чи відтворенням одним з учнів, тільки після цього, якщо вчитель вважає за потрібне, діти записують скорочений запис доведення у відведений для цього час.

Не слід ставити негативні оцінки учням за нездатність цілком відтворити доведення відразу після його вивчення або на наступному уроці. На рівні обов'язкових результатів навчання можна вимагати вміння сформулювати теорему, виконати рисунок, висловити ідею доведення, назвати загальний хід і твердження, що використовувалися при доведенні.

Цікаво, що п. 12 підручника йде під назвою "теореми", і до цього пункту надано систему задач (розглянемо деякі з них на практ. заняттях).

Наприклад:

271.° Сформулюйте твердження, яке є оберненим до даного: 1) якщо трикутник рівносторонній, то його кути рівні; 2) якщо два кути вертикальні, то їхні бісектриси є доповняльними променями; 3) якщо кут між бісектрисами двох кутів прямий, то ці кути суміжні; 4) якщо сторона та протилежний їй кут одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та протилежному їй куту другого трикутника, то ці трикутники рівні. Для яких із даних тверджень: 1) пряме й обернене твердження є правильними; 2) пряме твердження є правильним, а обернене — хибним; 3) пряме твердження є хибним, а обернене — правильним?

У підручнику [2] немає параграфа, присвяченого поясненню поняття "теорема". При розгляді паралельних прямих (пункт 4.2) коротко пояснюється, що таке теорема і доводиться ознака паралельності прямих.

У підручнику [3] в § 4 відразу пояснюється значення понять "аксіома", "теорема", "означення".

При введенні поняття оберненої теореми доцільно запропонувати учням сформулювати твердження, обернені до відомих з курсу математики 5-6 класів, і з'ясувати, чи вірні вони (наприклад, твердження, обернене до ознаки подільності числа на 9: Якщо число ділиться на 9, то сума його цифр ділиться на 9 – істинне висловлення).

Як бачимо від авторів підручників залежить місце розташування, пояснення понять "аксіома", "теорема". Але методика роботи з цими поняттями не змінюється. При роботі з теоремою вчителю необхідно згадати методику роботи з нею (загальна методика), працювати за вказаним там планом.

Треба відмітити підручник [2] щодо розміщення в ньому пунктів, присвячених методам розумових дій. Перша розумова дія, що розглядається в цьому підручнику - аналогія (пункт 3.4). У доступній формі, на прикладі двох конкретних задач в підручнику пояснюється суть аналогії. Решта видів розумових дій описуються протягом усього підручника. Методи розумової діяльності допомагають учням вирішувати завдання, вести доведення тверджень, тобто осягати математику і її методи.

2.5. Особливості системи вправ.

Перші уроки геометрії (за підручником [1]) включають у себе всі типи задач: на доведення (№№ 126, 127), обчислення (№№ 125, 128), побудову (№№ 129, 130) і дослідження (№16 – 18, із *).

Система задач, які розв'язуються на перших уроках геометрії, спрямована насамперед на:

- засвоєння основних властивостей найпростіших фігур;
- формування вмінь посилатися на аксіоми, теореми й означення при доведенні нових тверджень;
- засвоєння геометричної мови.

У цій системі задач значне місце треба відвести задачам на *практичні дії учнів* щодо проведення прямих, вибір точок, які задовольняють певні вимоги, поясненню мовою геометрії помічених на рисунку властивостей точок, прямих, відрізків, кутів. Задачі, що пов'язані з визначенням довжини відрізків, градусної міри кутів, розвивають в учнів окомір, практичні навички вимірювання і побудови відрізків і кутів заданої величини.

Задачі на побудову бажано виконувати і за допомогою креслярських інструментів, і на "око" (№25).

Треба варіювати способи розміщення прямих: треба, щоб учні зображували їх не тільки горизонтально, а й вертикально і похило.

При розв'язуванні задач на обчислення і доведення слід вимагати, щоб учні наводили і коротко записували необхідні пояснення.

Задачі на дослідження на перших уроках геометрії доцільно розв'язувати усно (з ілюстрацією на рис.).

Інтерес представляють задачі, де необхідно встановити, чи правильні твердження (№ 99).

№99. Чи є правильним твердження: 1) для кожного кута можна побудувати тільки один вертикальний кут; 2) для кожного кута, відмінного від розгорнутого, можна побудувати тільки один суміжний кут; 3) якщо кути рівні, то вони вертикальні; 4) якщо кути не рівні, то вони не вертикальні; 5) якщо кути не вертикальні, то вони не рівні; 6) якщо два кути суміжні, то один із них гострий, а другий — тупий; 7) якщо два кути суміжні, то один із них більший за другий; 8) якщо сума двох кутів дорівнює 180°, то вони суміжні; 9) якщо сума двох кутів не дорівнює 180°, то вони не суміжні; 10) якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути теж рівні; 11) якщо суміжні кути рівні, то вони прямі; 12) якщо рівні кути мають спільну вершину, то вони вертикальні; 13) якщо два кути мають спільну сторону, то вони суміжні?

Після кожного пункту автори пропонують рубрику: "Спостерігайте, рисуйте, конструюйте, фантазуйте".

Система задач має диференційований характер і допомагає здійснювати індивідуальний підхід.

Щодо задачного матеріалу, то в підручнику [2] окремо до кожного параграфу виділено усні вправи, графічні вправи і письмові вправи, які поділено на три рівні складності, що забезпечує індивідуальний і диференційований підхід.

Після глави 1 надано підсумки, що забезпечують систематизацію і узагальнення матеріалу (с. 53).

Надано можливість он-лайн підготовки до Контрольної роботи, також даються тренувальні вправи до підготовки (с. 52).

Тема 3. Вивчення трикутників в курсі планіметрії 7 класу.

3.1. Вступні зауваження.

В шкільному курсі геометрії метод трикутників є одним з основних при розв’язуванні задач і доведенні теорем. Спочатку розглядається рівність трикутників, потім - співвідношення між елементами трикутників, надалі – подібність трикутників. Тому даній темі в курсі геометрії 7 класу приділяється особлива увага.

Програма з геометрії передбачає введення поняття рівності трикутників і ознак рівності трикутників фактично на початку курсу. У підручнику "Геометрія – 7" Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. [1] ознаки рівності трикутників строго доводяться, що стає можливим завдяки прийнятим системі аксіом, означенням (наприклад, в підручнику А.П.Кисельова ознаки рівності строго не доводилися).

Означення і ознаки рівності трикутників вивчаються в 7 кл., оскільки вони стають основним аргументом під час доведення теорем і розв’язування задач в процесі вивчення різних тем.

В даній темі теоретичний матеріал містить такі питання:

1) відомості про трикутники та рівні трикутники;

2) три основні ознаки рівності трикутників;

3) відомості про рівнобедрений трикутник.

Вивчення рівнобедреного трикутника розглядається після перших двох ознак рівності трикутників. Потім знання учнів про рівнобедрений трикутник використовуються для доведення третьої ознаки рівності трикутників.

Основна мета вивчення теми "Трикутники" – ознайомити учнів з ознаками рівності трикутників; вивчити окремий вид трикутника – рівнобедрений, його властивості і ознаки; навчити застосовувати отримані теоретичні відомості до розв’язування задач.

Під час вивчення цієї теми посилюються можливості розвитку логічного мислення, усвідомлення учнями ідеї дедуктивної побудови геометрії. Вміння застосовувати ознаки рівності трикутників треба довести до рівня, що забезпечує учням можливість самостійно розв`язувати задачі, які потребують застосування згаданого апарату.

В цій темі вперше з’являється можливість пояснити учням відмінність між твердженнями, що є означеннями фігур, і твердженнями, які є ознаками цих фігур (означення і ознаки рівності трикутників, означення і ознаки рівності рівнобедрених трикутників), а також пояснити відмінність між теоремами – властивостями і теоремами – ознаками, що і роблять автори підручника [1] наприкінці §2 і автори інших діючих підручників..

Після вивчення цієї теми учні повинні бачити на рисунку рівні трикутники, вміти доводити їх рівність з посиланням на відповідну ознаку рівності трикутників, вміти використовувати рівність трикутників для доведення рівності відрізків та кутів.

3.2. Формування понять.

Поняття "трикутник" у діючих підручниках вводиться так: описово в [1] і розглядається як частина площини (разом зі сторонами), а в [2] формулюється строге означення. Розглядаються його елементи, вводяться такі поняття, як "кут, протилежний даній стороні", "кути, прилеглі до даної сторони" і, відповідно, "сторона, протилежна даному куту" і "сторони, прилеглі до даного кута". Дається означення периметра трикутника, класифікація трикутників за кутами (прямокутний, гострокутний, тупокутний) також у вигляді означення.

Відношення рівності трикутників є окремим випадком відношення рівності фігур. У діючих підручниках спочатку даються означення рівних відрізків і рівних кутів як таких, що можна сумістити, причому задача пояснити учням, що значить "сумістити" покладається на вчителя (в підручнику цей термін не пояснюється, очевидно, автори вважають його інтуїтивно зрозумілим).

У діючих підручниках означення рівних трикутників вводиться аналогічно.

Означення. Два трикутники називають рівними, якщо їх можна сумістити.

Вже з цього означення робиться висновок, що у рівних трикутників всі шість відповідних елементів (сторони і кути) рівні. Причому автори визначають відповідні кути і сторони як ті кути і ті сторони, які суміщаються при накладанні трикутників. Далі робиться узагальнення.

Означення. Дві фігури називаються рівними, якщо їх можна сумістити.

За концепцією підручника О.В. Погорєлова так означення вводилося лише під час вивчення рухів у 8 класі.

Також в цьому пункті вводяться означення висоти, медіани, бісектриси трикутника і вводиться поняття серединного перпендикуляра відрізка.

В темі "Трикутники" фактично розглянуто класифікацію трикутників і за сторонами: вивчаються різносторонній, рівнобедрений трикутник і рівносторонній трикутник як його окремий вид. Також тут вводиться строго поняття різностороннього трикутника.

Означення. Якщо у трикутнику довжини всіх сторін різні, то такий трикутник називається різностороннім.

У зв’язку з вивченням трикутників, ознак рівності трикутників використовується низка вивчених раніше понять і їх означень: відрізок, довжина відрізка, рівні відрізки, кут, кутова міра, рівні кути, перпендикуляр до прямої та ін. Тому треба подбати про своєчасну актуалізацію опорних знань.

Згідно з означенням рівних трикутників, яке прийнято в діючих підручниках має значення порядок запису вершин. Тобто ні для одного різностороннього трикутника не буде вірним такий запис:

$\Delta ABC = \Delta BCA = \Delta CAB$. На відпрацювання вміння правильно називати відповідні кути і сторони рівних трикутників можна запропонувати такі задачі, як-от:

В трикутниках DEF і PRQ сторони $DE = QR$, $FD = PR$ і $\angle EDF = \angle PQR$. Чи правильний запис: $\Delta DEF = \Delta PRQ$? Якщо ні, то як правильно записати рівність трикутників?

Всі нові поняття доцільніше ввести абстрактно-дедуктивним методом і проілюструвати конкретними прикладами. При вивченні нових понять треба відрізняти суттєві їх властивості від несуттєвих. Наприклад: до означення медіани трикутника входять дві суттєві властивості: 1) це - відрізок; 2) він сполучає вершину з серединою протилежної сторони трикутника. Несуттєвими є вид трикутника, розташування вершин на площині.

Важливо спеціально підкреслити суттєві властивості цих понять і протиставити їм несуттєві. Наприклад, до означення бісектриси трикутника, проведеної з даної вершини, входять дві суттєві властивості: 1) це – відрізок бісектриси кута трикутника; 2) він сполучає вершину трикутника з точкою на протилежній стороні. Несуттєвим у цьому означенні є вид трикутника, розташування вершин на площині.

В означенні рівнобедреного трикутника є лише одна суттєва ознака – рівність двох сторін. Несуттєвим є розташування цього трикутника на площині. Зокрема, основа рівнобедреного трикутника не обов`язково має бути горизонтальною, як це здебільшого зображено в підручниках.

Вводячи поняття висоти трикутника, не слід лише обмежуватися формулюванням означення. Учні повинні виконати практичні дії на проведення висот з різних вершин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників. Треба мати на увазі, що попередній життєвий досвід учнів може гальмувати засвоєння поняття висоти трикутника. Навіть старшокласники припускаються помилки, проводячи висоту тупокутного трикутника.

3.3. Доведення теорем.

Всі теореми, що вивчаються в цій темі, є основними теоремами ШКГ, бо широко використовуються при вивченні інших теорем і розв’язуванні задач. В параграфі присутні теореми різних видів і різного рівня складності щодо їх доведення, причому автори підручника помічаються відповідним чином, чи це доведення, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень учнів, або високому рівню, або не є обов'язковим для вивчення; отже, це полегшує роботу вчителя.

Уроки, на яких розглядаються ознаки рівності трикутників слід будувати на основі проблемного методу навчання, активізувати учнів при пояснені нового матеріалу. Доведення ознак рівності трикутників проводити з залученням технічних засобів навчання, обов`язково виділяючи план доведення при розгляданні першої ознаки. Це необхідно для того, щоб показати, що спільне лежить в основі доведень усіх трьох ознак.

Не забуваємо *методику роботи з теоремою* (загальна методика), де прописаний кожен крок цієї роботи:

мотивування введення теореми (запропонувати, наприклад, практичну роботу з побудови трикутника по заданим елементам за допомогою лінійки з поділками і транспортира. Поставити проблемне питання, а скільки потрібно цих елементів? В результаті виконання практичних завдань прийти до формулювання змісту теореми);

формулювання змісту теореми;

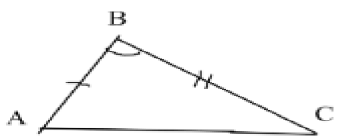
пошук шляху доведення теореми (в пошуку шляху доведення теореми можемо спиратися тільки на означення рівних трикутників, в якому говориться, що два трикутника називаються рівними, якщо вони збігаються при суміщенні. Отже метод доведення полягає в поєднанні трикутників. Запитати в учнів, як можна сумістити трикутники, на підставі яких аксіом. Записати план доведення);

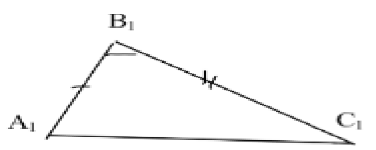
запис доведення теореми;

закріплення доведення теореми (можна повторити план доведення, аксіоми, на підставі яких поєднуються елементи трикутника);

закріплення змісту теореми (розв`язування задач с використанням даної теореми).

Теорема. Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.





Доведення:

Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, ∠B = ∠ B1. Так як $\angle B = \angle B_1$, то можна накласти ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, щоб промінь BA сумістився з променем B_1A_1, а промінь BC сумістився з променем B_1C_1 (За аксіомою про відкладання кута, рівного даному). Оскільки за умовою $BA = B_1A_1$, а $BC = B_1C_1$, то при такому накладанні сторона BA суміститься зі стороною B_1A_1, а сторона ВС зі стороною B_1C_1 (За аксіомою про відкладання відрізка, рівного даному). Отже, ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ повністю сумістяться, тобто вони рівні.

Після вивчення першої ознаки рівності трикутників, *підкреслюємо, що даний метод (рівність трикутників) є основним методом вивчення планіметрії в ШКМ. Тому рівність відрізків або кутів завжди випливає з рівних трикутників.* Пояснюємо учням, що метод рівних трикутників обраний авторами всіх діючих підручників. Чи можна побудувати підручник планіметрії, використовуючи інший метод математики? Відповідь - так. При вивченні планіметрії учні познайомляться і з іншими методами вирішення і доведення задач, теорем.

Даний висновок нагадувати учням після вивчення кожної ознаки рівності трикутників.

В першому пункті, присвяченому вивченню трикутників, дається теорема під назвою "нерівність трикутника", що доводиться просто на основі властивості довжини відрізка: якщо точка С не належить відрізку АВ, то АВ < АС + СВ.

В цьому ж пункті методом від супротивного доводиться єдність прямої, перпендикулярної до даної, що проходить через точку, яка не належить даній прямій.

Наступна теорема в підручнику [1] *8.1* (кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка) вже демонструє значущість ознаки рівності трикутників, оскільки її доведення відбувається на основі першої ознаки.

В цьому ж пункті дається друга ознака рівності трикутників: за стороною і двома прилеглими до неї кутами. Доведення її дещо складніше, ніж першої ознаки. При роботі з цією теоремою будуємо пояснення нового матеріалу проблемним методом або евристичним, бо план доведення той же самий і метод доведення учням вже відомий по першій ознаки рівності трикутників.

Щодо третьої ознаки: за трьома сторонами, то вона з'являється наприкінці параграфа. Проте цікаво, що в процесі її доведення задля його повноти необхідно розглянути декілька випадків, пов'язаних з видом трикутників. З доведень трьох ознак це найбільш складне. Але все одно треба будувати проблемний метод пояснення нового матеріалу. Запитувати у учнів, як можна поєднати дані трикутники. Можливі випадки розташування повинен підказати вчитель, ставлячи відповідні питання.

Після вивчення ІІІ ознаки рівності трикутників треба звернути увагу учнів на той факт, що трикутник – фігура "жорстка" (три сторони трикутника однозначно його визначають при відомих умовах), на відміну, наприклад, чотирикутника, і така властивість трикутника використовується в будівництві (металеві опори для високовольтних ліній, стріли підйомних кранів, стропила на дахах будинків та ін.). Різні каркасні конструкції роблять так, щоб вони мали більше трикутників. Наприклад, французький інженер Августин Августинович Бетанкур (інженер – будівник, генерал – лейтенант, очолював корпус інженерів шляхів сполучення в Петербурзі) є автором проекту будівлі Манежу. Це дуже довга будівля, без внутрішніх опор, яка тримається завдяки конструкції трикутника.

В даній темі для розгляду третьої ознаки рівності трикутників необхідно вивчити вид трикутника - рівнобедрений. Тут міститься низка теорем, пов'язаних з властивостями і ознаками рівнобедреного трикутника. Формулюються у вигляді теорем дві властивості рівнобедреного трикутника: 1) кути при основі рівні; 2) бісектриса кута при вершині є медіаною і висотою. Доведення її ґрунтується на першій ознаці рівності трикутників. З даної теореми випливають наслідки, які учні також повинні пам'ятати.

На прикладі теореми про властивість бісектриси рівнобедреного трикутника, проведеної з його вершини, продемонструємо як будувати висхідний аналіз доведення теорем, який з`являється, коли учні відповідають на спеціальні питання вчителя. У учнів треба формувати вміння будувати висхідний аналіз при розв`язуванні задач і доведенні теорем.

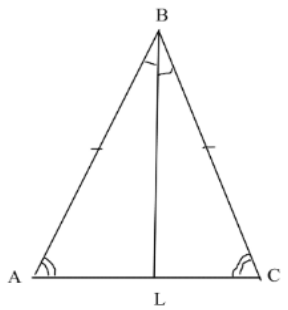
Вчитель: Що треба показати, щоб переконатися, що BL – медіана?

Відповідь: За означенням треба показати, що AL = LC.

Вчитель: Звідки слідує рівність відрізків?

Відповідь: З рівних трикутників.

Вчитель: В які трикутники входять ці відрізки?



Відповідь: В ΔABL і ΔCBL.

Вчитель: Як довести, що ці трикутники рівні? В нас є дві ознаки рівності трикутників.

Відповідь: Треба шукати рівні елементи в цих трикутниках. AB = CB, як рівні сторони рівнобедреного трикутника. BL – спільна сторона. $\angle$ABL = = $\angle$CBL за означенням бісектриси кута. Тоді ΔABL = ΔCBL за першою ознакою рівності трикутників.

Треба демонструвати учням цей метод пошуку доведень теорем і розв`язання задач, а також вимагати від учнів самостійного його будування в нескладних теоремах і задачах.

Далі іде матеріал, який присвячено ознакам рівності рівнобедреного трикутника: їх формулюється чотири. Перш, ніж формулювати їх, автори зазначають, що такі теореми дозволяють "розпізнавати" рівнобедрені серед інших трикутників.

Теорема: Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.

Доведення цієї теореми засновано на властивості серединного перпендикуляра.

Теорема: Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.

Доведення даної теореми ґрунтується на другій ознаці рівності трикутників (треба будувати висхідний аналіз).

Теорема: Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.

У підручнику [2] дається два доведення цієї теореми. В доведенні використовують властивості серединного перпендикуляра, проведеного до сторони, яка має прилеглими два рівних кута. Розглядають три випадки проходження прямої *а* серединного перпендикуляра відносно третьої вершини трикутника. Доведення проводять методом від супротивного.

Друге доведення грунтується на доказі рівності трикутника АВС (де даний трикутник АВС - рівнобедрений, у якого В - вершина) трикутнику СВА.

Теорема: Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.

Під час доведення цієї теореми, що є також не обов'язковим для вивчення, застосовується прийом додаткової побудови, це так званий метод подвоєння медіани, з яким учні стикаються вперше. У підручнику [2] цей метод розглядається у окремому пункті.

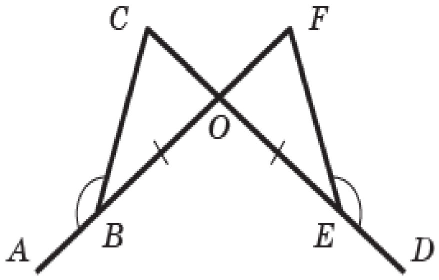
Остання теорема даного параграфу в підручнику [1] є оберненою до теореми *8.2*: якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру цього відрізка (побудувати висхідний аналіз). В інших діючих підручниках ці теореми (пряма і обернена) розташовані в матеріалі про геометричні побудови.

3.4. Розв’язування задач на застосування ознак рівності трикутників.

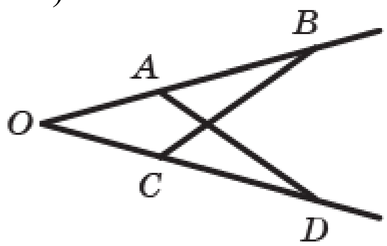
Серед задач на застосування ознак рівності трикутників найважчими для учнів є задачі на доведення, тому організовувати розв’язання таких задач треба послідовно, у три етапи, згідно трьох видів задач, що виділяються в цій темі.

При вивченні кожної ознаки рівності трикутників треба спочатку розв’язувати задачі с доведенням просто рівних трикутників, потім трикутників, що накладаються, потім трикутників, які є частиною іншої фігури. Починати треба з задач за готовими малюнками (є спеціальні збірники завдань по планіметрії за готовими малюнками).

1. Задачі на доведення рівності трикутників. Наприклад, дано: OB = OE, $\angle ABC = \angle DEF$; довести: $\Delta BCO = \Delta EFO$ (№170, с. 73).

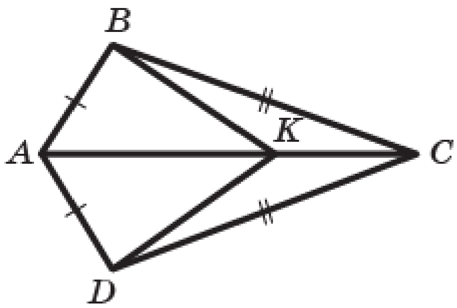


2. Задачі на доведення рівності деяких елементів у двох даних трикутниках. Наприклад, дано: OA = OC, OB = OD; довести: $\angle OAD = \angle OCB$ (№164, с. 72).



3. Задачі, в яких для доведення рівності трикутників або їх елементів

необхідно розглянути кілька пар рівних трикутників. Наприклад: $\Delta ABC = \Delta ADC$. Доведіть, що $\Delta ABK = \Delta ADK$ (с.73, №174).



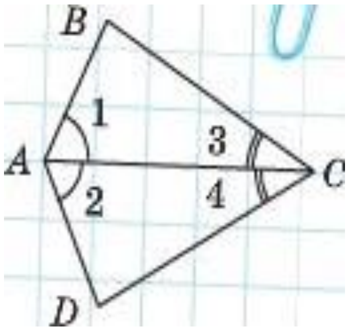
Для другої і третьої групи задач корисно дати учням таке загальне правило-орієнтир: щоб довести рівність двох відрізків або двох кутів, досить включити їх у два різні трикутники і довести їх рівність.

Треба також вчити дітей аналізувати умови таких задач, зокрема з'ясовувати, скільки пар рівних елементів дано і до чого зводиться розв'язання задачі або які можливості для встановлення рівності інших пар елементів можна використати.

При розв'язанні задач слід приділити увагу роботі з рисунком, вимагати від учнів виділення рівних елементів, за допомогою рисунка складати план розв’язання, оформлювати його певним чином, складати висхідний аналіз.

Наведемо приклад оформлення розв’язання задачі з побудовою висхідного аналізу.

Задача. Дано трикутники ABC і ADC. $\angle 1 = 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Знайдіть кут D, якщо $\angle B = 110°$.



Перш ніж навести розв`язання цієї задачі, спробуємо відповісти на запитання: як саме треба міркувати, щоб знайти шлях до нього?

1) Спочатку проаналізуємо запитання задачі. Нам необхідно знайти градусну міру кута D. Очевидно, що для цього слід використати числові дані. Ми маємо лише одну таку умову: $\angle B = 110°$. Таки чином можна припустити, що кути B і D мають бути пов`язані. Як саме?

2) Зауважимо, що кути B і D є кутами трикутників ABC і ADC відповідно, причому обидва ці кути протилежні стороні AC. Звідси виникає ідея про те, що кути B і D можуть бути рівними і їхня рівність може випливати з рівності трикутників ABC і ADC.

3) Наступний крок міркувань: чи справді трикутники ABC і ADC рівні? Якщо так, то на підставі якої ознаки можна довести їх рівність? Тут нам допоможуть інші дані задачі - рівність кутів $\angle 1 = 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Як ви вже знаєте, дві пари відповідно рівних кутів розглядаються у формулюванні другої ознаки рівності трикутників, тобто слід спробувати застосувати саме її.

4) Для остаточного визначення ходу розв`язання задачі лишилося відповісти на запитання: яких ще даних нам бракує для застосування другої ознаки рівності трикутників? Звідки їх можна дістати? Звернемо увагу, що кути 1 і 3 трикутника ABC, а також кути 2 і 4 трикутника ADC є прилеглими до сторони AC, яка крім того, є спільною стороною даних трикутників.

Отже, шлях визначено, і лишається тільки записати розв`язання, повторюючи міркування у зворотному порядку - від 4-го до 1-го пункту.

Розв`язання

Розглянемо трикутники ABC і ADC. У них сторона AC спільна, $\angle 1 = 2$, $\angle 3 = \angle 4$ за умовою, і ці кути прилеглі до сторони AC. Таким чином $\Delta ABC = \Delta\ ADC$ за другою ознакою рівності трикутників.

Кути B і D - відповідно рівні кути рівних трикутників. Отже, $\angle D = \angle B = 110°$.

Відповідь: 110°.

Зазначимо, що в міркуваннях1) - 4) ми починали із запитання задачі, а потім використовували її умови, тобто йшли "від кінця до початку" тобто будували висхідний аналіз. У багатьох геометричних задачах саме такий спосіб міркувань дозволяє знайти правильний шлях до розв`язання.

Наведемо ще приклад методики роботи з планіметричною задачею на доведення.

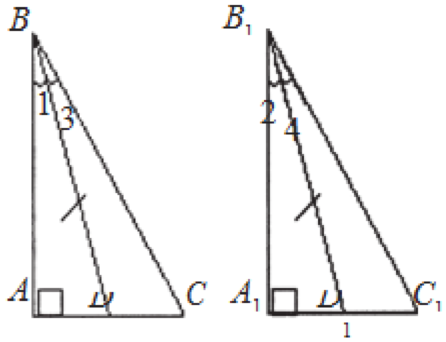
Задача. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ кути A і A_1 - прямі, BD і B1D1 - бісектриси. Доведіть, що трикутники рівні, якщо кут B дорівнює куту B1 і BD = B1D1.

I етап. Аналіз умови задачі, побудова рисунка

Діяльність учителя	Діяльність учня
1. Якого типу ця задача?	Геометрична задача на доведення.
2. Про які фігури ідеться в задачі?	Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$.
3. Що відомо про ці трикутники?	Трикутники прямокутні, $\angle B = \angle B_1$. В трикутниках з вершин B і B_1 проведени бісектриси, які рівні.
4. Зробіть рисунок і нанесіть дані.	
5. Що треба довести?	$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$
6. Запишіть кратко умову і вимогу задачі.	Дано: ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1 = 90°$. $\angle B = \angle B_1$, $BD = BD_1$, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$. Довести: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

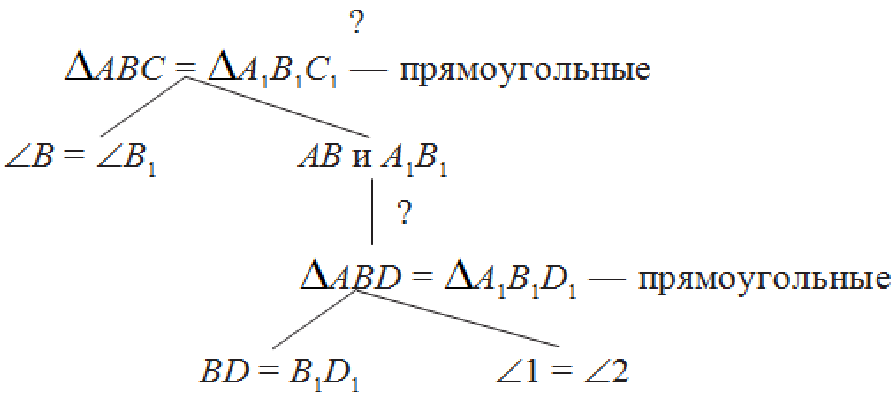
II этап. Пошук шляху доведення.

Діяльність учителя	Діяльність учня
1. Якого типу ця задача?	Геометрична задача на доведення.
2. Про які фігури ідеться в задачі?	Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$.
3. Що відомо про ці трикутники?	Трикутники прямокутні, $\angle B = \angle B_1$. В трикутниках з вершин B і B_1 проведені бісектриси, які рівні.
4. Зробіть рисунок і нанесіть дані.	

	
5. Що треба довести?	$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$
6. Запишіть кратко умову і вимогу задачі.	Дано: ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1 = 90°$. $\angle B = \angle B_1$, $BD = BD_1$, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$. Довести: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$
7. В задачі потрібно довести, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$,. Чим ми користуємося для доведення того, що трикутники рівні?	Ознаками рівності трикутників.
8. Що треба знайти в цих трикутниках, щоб довести їх рівність?	Треба знайти рівні елементи.
9. Скільки пар рівних елементів нам потрібно знайти в цих трикутниках? Чому?	Треба знайти дві пари, бо ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ за умовою прямокутні.
10. Які рівні елементи вже є за умовою задачі?	Дано, що $\angle B = \angle B_1$.
11. Яких рівних елементів нам не вистачає, щоб використовувати одну з ознак рівності трикутників?	Нам не вистачає або рівності гіпотенуз, або рівності катетів.
12. Спробуємо довести рівність катетів AB і A_1B_1. Як ми доводимо рівність відрізків?	Рівність відрізків ми доводимо через рівність трикутників.
13. Щоб довести рівність катетів AB і A_1B_1, які трикутники треба розглянути?	Треба розглянути трикутники ABD і $A_1B_1D_1$.
14. Визначте вид цих трикутників.	Вони прямокутні, бо $\angle A = \angle A_1 = 90°$.
15. Скільки пар рівних елементів нам треба знайти в цих трикутниках?	Дві пари.
16. Що відомо про ці трикутники з умови задачі?	$BD = BD_1$, $\angle 1 = \angle 2$ (як половина рівних кутів).
17. Отже, який висновок можна зробити про трикутники ABD і	$ABD = A_1B_1D_1$ за катетом и гострим кутом.

$A_1B_1D_1$?	
18. Навіщо ми розглядали трикутники ABD і $A_1B_1D_1$?	Щоб довести рівність відрізків AB і A_1B_1.
19. Зробіть висновок з рівності цих трикутників.	$AB = A_1B_1$.
20. Навіщо ми розглядали рівність відрізків AB і A_1B_1?	Щоб довести рівність трикутників ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$.
21. Отже, який висновок можна зробити про трикутники ABC і $A_1B_1C_1$?	$ABC = A_1B_1C_1$ за катетом і гострим кутом.
22. Отже намітимо план вирішення задачі: 1) Розглянемо Δ ABD і Δ $A_1B_1D_1$ і доведемо їх рівність. Зробимо висновок про рівність сторін AB і A_1B_1. 2) Розглянемо Δ ABC і Δ $A_1B_1C_1$ і доведемо їх рівність.	

Здійснюючи пошук рішення задачі, корисно будувати граф-схему пошуку:



III етап. Оформлення розв`язання

1. Розглянемо трикутники ABD і $A_1B_1D_1$. Вони прямокутні. $BD = B D_1$ (за умовою) ⇨$\angle 1 = \angle 2$ (як половина рівних кутів) ⇨ $ABD = A_1B_1D_1$ за катетом и гострим кутом. Отже $AB = A_1B_1$ (за означенням рівних трикутників).

2. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Вони прямокутні прямокутні.

$AB = A\ B_1$ (по доведеному), $\angle B = \angle B_1$ (за умовою) ⇨$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ за катетом і гострим кутом.

IV этап. Дослідження задачі

Подивимося, чи не можна розв`язати задачу іншим способом. У розв`язанні ми доводимо рівність катетів AB і A_1B_1 даних трикутників. Чи можна було б довести рівність гіпотенуз BC і B_1C_1?

Діяльність учителя	Діяльність учня
1. Як ми доводимо рівність відрізків?	Через рівність трикутників.
2. Що довести рівність відрізків BC і B_1C_1, які трикутники треба розглядати?	ΔBDC і $\Delta B_1D_1C_1$.
3. Скільки пар рівних елементів треба знайти в цих трикутниках?	Треба знайти три пари, бо це довільні трикутники.
4. С кільки пар рівних елементів ми маємо з умови?	Дві. $BD = B_1D_1$, $\angle 3 = \angle 4$.
5. Рівність якої пари елементів нам треба встановити?	$\angle D = \angle D_1$.
6. Що відомо при ці кути?	$\angle D$ — зовнішній для ΔABD, $\angle D = \angle A + \angle 1$, $\angle D_1$ — зовнішній для ΔABD_1, $\angle D_1 = \angle A + \angle 2$, отже, $\angle D = \angle D_1$.
7. Зробіть висновок про трикутники BDC і $B_1D_1C_1$	$\Delta BDC = \Delta B_1D_1C_1$ (за стороною і двом прилеглим до неї кутам).
8. Зробіть висновок про BC і B_1C_1 цих трикутників.	$BC = B_1C_1$ (за означенням рівних трикутників).
9. Отже, який висновок можна зробити про ABC і $A_1B_1C_1$?	$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (за гіпотенузою і гострим кутом).
10. Чи не можна довести рівність кутів $\angle D$ і $\angle D_1$ іншим способом?	Так, якщо застосувати теорему про суму кутів в трикутнику: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, $\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = 180° \Rightarrow \angle C = \angle C_1$. $\angle D + \angle 3 + \angle C = 180°$, $\angle D + \angle 4 + \angle C = 180° \Rightarrow \angle D = \angle D_1$.

На майбутнє корисно запам'ятати те, що сформульований в задачі факт можна вважати ще однією ознакою рівності прямокутних трикутників. Список ознак може бути продовжений, якщо провести додаткове дослідження, яке пов`язано з вибором двох елементів прямокутного трикутника, серед яких є лінійний елемент, за якими можна стверджувати рівність прямокутних трикутників.

На прикладі цієї задачі ми показали, що потрібно вирішувати одну задачу декількома способами, ніж вирішувати кілька задач одним і тим же способом.

Значну частину задач можна вирішувати усно. Необхідно розглянути і задачі практичного змісту. В діючих підручниках виділені усні задачі, графічні вправи, письмові задачі різних рівнів.

Тема 4. Паралельні прямі. Сума кутів трикутника.

4.1. Вступні зауваження.

Навчальний матеріал цього параграфу доповнює ознаки рівності трикутників важливим теоретичним апаратом для розв'язування задач і доведення інших теорем і групується навколо трьох основних питань: ознаки і властивості паралельності прямих, сума кутів трикутника, прямокутний трикутник.

Основна мета вивчення теми – ознайомити учнів з кутами, утвореними в результаті перетину двох прямих третьою, з теоремою про суму кутів трикутника, ознаками паралельності прямих, властивостями кутів, що утворені при перетині паралельних прямих січною та навчити застосовувати вивчені теореми при розв'язуванні задач.

Під час вивчення даної теми є змога активізувати подальший логічний розвиток учнів. Доцільно ще раз пояснити відмінність між поняттями "означення паралельних прямих" і "ознака паралельних прямих", звернути увагу на те, що теорема про властивість кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, є оберненим твердженням до ознаки паралельності прямих. Можна також (в сильних класах) на прикладі цих теорем роз'яснити зміст понять "необхідна умова", "достатня умова", "необхідна і достатня умова", показати, як можна переформулювати теорему за допомогою таких термінів.

В підручнику Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія – 7 [1] автори задля більш ефективного розвитку логічної культури учнів включили оповідання щодо п'ятого постулату Евкліда, пояснюючи різницю між поняттями "аксіома" і "теорема". Тобто, якщо деяке твердження можна довести за допомогою аксіом, то це твердження – теорема, а не аксіома. Вченими на початку XIX ст. було доведено, що п'ятий постулат Евкліда (аксіома паралельних) – це аксіома, а не теорема (тобто його не можна вивести з інших аксіом Евкліда). Отже, взагалі кажучи, якщо це твердження – домовленість, то його можна замінити протилежним твердженням і отримати нову теорію (що і було зроблено М.І. Лобачевським (1792-1856)).

4.2. Формування понять.

У цій темі на рівні означення вводяться чотири нових для учнів поняття (крім поняття паралельних прямих, яке не є новим для учнів): "відстань між двома паралельними прямими", "зовнішній кут трикутника", "гіпотенуза" і "катети" прямокутного трикутника (в підручнику [1] як означення не виділено). Поняття "січна", "односторонні кути", "різносторонні кути", "відповідні кути" вводяться з використанням рисунка (описово).

Крім поняття паралельні прямі, розглядаються також поняття паралельних відрізків, променів, променя і відрізка, відрізка і прямої.

В діючих підручниках усі перераховані поняття вводяться частково на початку підручника або далі в параграфах, присвячених ознакам паралельних прямих и кутам, утвореним при перетині паралельних прямих січною. Це залежить від підручника. Пам`ятаємо, що зміст підручника складається за діючою програмою. А як цей зміст розташувати, в якому порядку - це залежить від автора підручника. Для формування понять використовуємо як абстрактно-дедуктивний метод, так і чуттєво-конкретний.

Введенню поняття "відстань між двома паралельними прямими" в тексті підручника [1] передує ключова (опорна) задача:

Задача. Доведіть, що всі точки однієї з двох паралельних прямих рівновіддалені від другої прямої.

Доведення цього факту ґрунтується на властивостях паралельних прямих і методі трикутників, і дозволяє ввести таке означення.

Означення. Відстанню між двома паралельними прямими називається відстань від *будь-якої* точки однієї з прямих до другої прямої.

Поняття кутів, утворених в результаті перетину двох прямих третьою, вводиться на наглядній основі, за рисунком. Для засвоєння цього поняття треба проводити вправи на готових рисунках: позначати названі кути, називати позначені кути, позначати однакові кути і т.д.

При вивченні властивостей паралельних прямих для кращого засвоєння залежностей між кутами, утвореними при перетині двох прямих січною можна запропонувати такі запитання:

1) Внутрішні різносторонні кути однієї пари рівні. Порівняйте внутрішні різносторонні кути іншої пари.

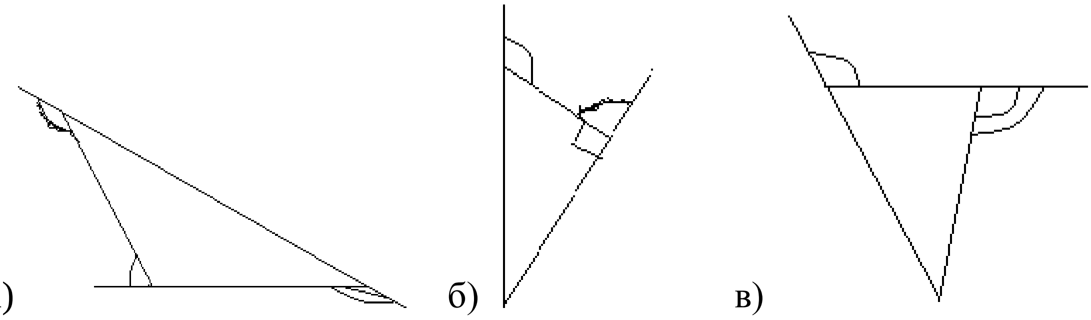
2) Сума внутрішніх односторонніх кутів однієї пари дорівнює 180°. Знайдіть суму внутрішніх односторонніх кутів іншої пари.

3) Сума внутрішніх односторонніх кутів однієї пари менше (більше) 180°. Що можна сказати про суму внутрішніх односторонніх кутів іншої пари?

4) Чому дорівнює сума внутрішніх односторонніх кутів, якщо внутрішні різносторонні кути рівні?

5) Сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°. Порівняйте внутрішні різносторонні кути.

При формуванні поняття зовнішнього кута трикутника не можна обмежуватися прикладами зовнішніх кутів лише гострокутного трикутника, оскільки в учнів створиться невірне уявлення, що зовнішній кут трикутника завжди більший, ніж внутрішній, суміжний із ним. Необхідно зображувати також тупокутні, прямокутні трикутники і пропонувати учням визначати зовнішні кути таких трикутників.



а) б) в)

4.3. Вивчення тверджень теми.

Зауважимо, що при вивченні даної теми за діючими підручниками учні знайомляться з аксіомою о паралельних прямих теж в різний час. У підручнику [2] цьому матеріалу відводитися місце на початку підручника в темі "Паралельні прямі", в підручнику [1] в середині підручника, після вивчення трикутників. Причому, логіка викладу теоретичного матеріалу така, що після введення поняття паралельних прямих, вивчається ознака паралельності прямих. (дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні), яка дозволяє за допомогою лінійки і косинця будувати паралельні прямі, і з якої випливає наслідок:

Наслідок. Через дану точку, яка не належить даній прямій, *можна* провести пряму, паралельну даній.

Фактично, наслідок – це задача на побудову, з якої ми одержуємо факт, що таку пряму провести можна (тобто вона існує).

А вже далі формулюється основна властивість (аксіома) паралельних прямих, в якій стверджується, що така пряма - єдина:

Аксіома. Через точку, що не лежить на даній прямій, проходить *тільки одна* пряма, паралельна даній.

(В підручнику О.В.Погорєлова, наприклад, було застосовано іншу логіку викладу: в аксіомі паралельних, яка вводилася на початку вивчення курсу, використовувалось формулювання "не більше однієї прямої"; а пізніше, в межах теми "Сума кутів трикутника" розглядалась задача на побудову (через дану точку, яка не належить даній прямій, *можна* провести пряму, паралельну даній). Об'єднання цих двох фактів і давало висновок: можна і тільки одну).

Після ведення аксіоми в цьому ж пункті 13 розглядається ще одна ознака паралельності прямих: дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні (теорема 13.2). (Чомусь автори для теореми 13.1 зазначають в дужках, що це ознака паралельності прямих, а для теореми 13.2 – не зазначають).

П. 14 присвячений іншим ознакам паралельності прямих, які пов'язані з кутами, утвореними при перетині двох прямих січною. Тут формулюється три теореми:

Теорема 14.1. Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

Теорема 14.2. Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180°, то прямі паралельні.

Теорема 14.3. Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

Доведення першої з цих теорем більш важке, ніж інших двох; тут розглядаються два випадки (коли різносторонні кути дорівнюють по 90° і коли січна не перпендикулярна жодної з даних прямих), а саме доведення ґрунтується на методі трикутників.

В наступному пункті 15 формулюються три теореми, обернених до трьох ознак паралельності прямих; отже, тут формулюються властивості паралельних прямих.

Теорема 15.1. Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то кути, які утворюють пару різносторонніх кутів, рівні.

Доведення цієї теореми більш важке для сприймання; учитель має довести її самостійно, використовуючи метод від супротивного.

При доведенні двох інших властивостей можна залучати учнів; вони цілком спроможні відтворити такі неважкі доведення відразу ж після їх вивчення.

Доведення наслідку з цих властивостей (якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої) учні можуть довести самостійно.

У підручнику [2] зміст цього матеріалу розбито на дві частини. У параграфі 4 розділ 1 дається означення паралельних прямих і вивчається теорема в пункті 4.2., яка є ознакою паралельності прямих. Теорема доводиться методом від противного. При роботі з нею застосувати алгоритм доведення методом від противного. Вчителю побудувати пояснення нового матеріалу проблемним методом, продумати питання, для пошуку шляху доведення теореми. Друга частина матеріалу вивчається після теми "Трикутники".

Теорема про суму кутів трикутника є одним з фундаментальних тверджень, що стосуються властивостей трикутників. Доведення цієї теореми достатньо просте і можна організувати колективне її доведення. Це ж стосується теореми про зовнішній кут трикутника.

Ще одна змістовна лінія даної теми – прямокутний трикутник та ознаки рівності прямокутного трикутника.

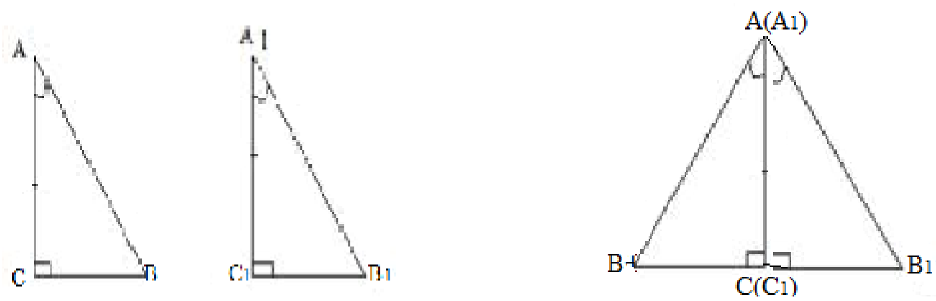
Ознаки рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом (доведення дається), за двома катетами, за катетом і гострим кутом, за гіпотенузою і гострим кутом доводяться безпосередньо з ознак рівності трикутників і за допомогою теореми про суму кутів трикутника. Доведення цих ознак у діючих підручниках не дається, тому можна їх провести у вигляді розв'язання вправ за допомогою системи навідних запитань:

1) сформулюйте другу ознаку рівності трикутників;
2) один гострий кут прямокутного трикутника дорівнює α. Знайдіть другий гострий кут;
3) гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту іншого прямокутного трикутника. Порівняйте два інших гострих кута;
4) сформулюйте першу ознаку рівності для прямокутних трикутників, взявши в якості двох сторін а) два катети; б) катет і гіпотенузу;
5) сформулюйте другу ознаку рівності для прямокутних трикутників, взявши в якості сторони а) катет; б) гіпотенузу.

Щодо ознаки рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом, то її доведення більш важке і автори відносять його до вищого рівня складності (не обов'язкове для вивчення)., хоча на нашу думку це занижені вимоги до знань учнів.

Теорема. Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі й катету другого, то такі трикутники рівні.

Доведення:



Розмістимо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ так, щоб вершина А сумістилася з вершиною A_1 , вершина С – з C_1 , а точки В і B_1 лежали в різних півплощинах відносно прямої A_1C_1.

Маємо: $\angle A_1C_1B + \angle A_1C_1B_1 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Отже, кут BC_1B_1 - розгорнутий, і тому точки $B,\ C_1$ і B_1 лежать на одній прямій. Отримали рівнобедрений трикутник BA_1B_1 з бічними сторонами A_1B та A_1B_1 і висотою A_1C_1. Тоді A_1C_1 - медіана цього трикутника і $BC_1 = C_1B_1$. Отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників.

Автори обох підручників далі розглядають матеріал, присвячений співвідношенню лінійних елементів прямокутного трикутника, а також теорему про прямокутний трикутник з кутом 30°. Це твердження є важливими для подальшого застосування при розв'язуванні задач.

Зазначимо, що в межах даної теми в підручнику [1] зустрічаються теореми – властивості, теореми – ознаки, причому їх доведення здебільшого неважкі, автори відносять їх до першого і другого рівня складності. Проте зустрічаються і теореми, доведення яких є важким, а, отже, не обов'язковим для вивчення учнями. Наприклад:

Теорема 16.3. У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.

Ця теорема доповнює раніше вивчені властивості кутів і сторін трикутника: проти рівних сторін лежать рівні кути, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.

При доведенні 3 теорем із 12 (і 4 наслідку), передбачених в цій темі, послуговуються методом доведення від супротивного. (*Підкреслюємо ще раз*) Тому учням пропонують повторити алгоритм застосування цього методу і там, де це доцільно, залучають до колективного пошуку доведення відповідно до алгоритму. Це варто зробити при доведенні теореми про паралельність двох прямих, які паралельні третій. Більше того, можливо учні зможуть провести доведення цієї теореми самостійно, відповідаючи на проблемне запитання: Чи можуть перетинатися прямі a і b, якщо вони паралельні прямій c?

На завершенні вивчення теорем теми і наслідків з них доцільно разом з учнями виділити правило-орієнтир до доведення паралельності двох прямих на площині. Щоб довести паралельність двох прямих на площині, досить довести одне з тверджень: 1) внутрішні різносторонні кути рівні; 2) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°; 3) відповідні кути рівні; 4) кожна з прямих паралельна третій; 5) кожна з прямих перпендикулярна третій прямій.

4.4. Характеристика задачного матеріалу.

Теоретичний матеріал теми дає можливість розв’язувати різноманітні задачі всіх типів (на доведення, обчислення, побудову, дослідження).

Наприклад:

На доведення: доведіть, що коли будь-яка пряма, яка перетинає пряму а, перетинає і пряму b, то прямі а і b паралельні.

На обчислення: знайдіть усі кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них на 24° менший від іншого.

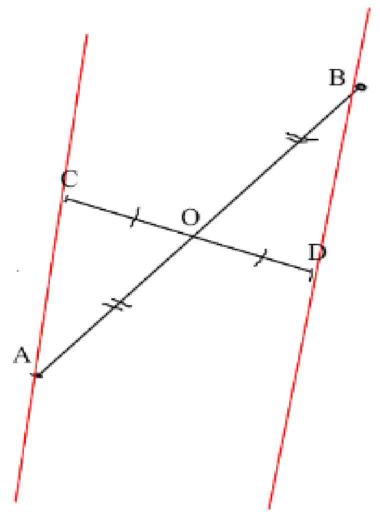
На побудову: за допомогою транспортира і лінійки побудуйте прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 3 см і 4 см.

На дослідження: чи можна провести пряму, яка була б паралельна кожній з прямих а і b, що перетинаються?

Проте задач на обчислення у підручнику [1] – більшість, причому ціла низка задач вимагає застосування алгебраїчного апарату, підручник [2] дає більше задач на доведення.

Мета запропонованих у підручниках задач – дати учням додаткову інформацію, яка буде потрібна при подальшому вивченні курсу.

Наведемо приклад, розв`язання задачі: "Відрізки AB і CD перетинаються в точці O і поділяються цією точкою навпіл. Довести, що прямі AC і BD паралельні".



Розв`язування цієї задачі зводиться до обгрунтування рівності внутрішніх односторонніх і внутрішніх різносторонніх кутів в одній з типових конфігурацій, яка буде неодноразово траплятися надалі при вивченні теореми про суму кутів трикутника, паралелограма і трапеції, подібності трикутників.

Ціла низка задач вимагає застосування алгебраїчного апарату. Наприклад, при розв`язуванні задачі "В трикутнику ABC AB = BC, проведена бісектриса СК. $\angle A = 66°$. Знайдіть $\angle AKC$".

Безперечно, систему задач підручників треба доповнювати задачами прикладного характеру. Наведемо приклади двох таких задач.

Задача. Для того, щоб виміряти висоту дерева BD, приготували прямокутний трикутник AB_1C_1 з кутом A = 45° і, тримаючи його вертикально, відійшли на таку відстань, за якої, дивлячись вздовж гіпотенузи AB_1, побачили верхівку дерева B. Яка висота дерева, якщо відстань AC = 5,6 м, а висота DC людини 1,7 м ?

Задача. У середніх широтах України прийнято такі розміри кута між крокв'яними ногами AC і AB (рис) : для залізних дахів 120°, для тольових - 145°, для черепичних - 100°, для тесових - 90°. Визначити для кожного даху той кут, який крокв'яні ноги утворюють з горизонтальною лінією CB.

У зв`язку з вивченням прямокутного трикутника можна ознайомити учнів з кутовим відбивачем, який було встановлено на одній з наших автоматичних станцій, запущених на Місяць, і за допомогою якого було досить точно визначено відстань від Землі до Місяця.

Тема 5. Геометричні побудови.

5. 1. Місце і значення теми в курсі планіметрії.

Геометричні задачі на побудову, можливо, найдавніші математичні задачі. Без цих задач геометрія перестала б бути геометрією. Геометричні побудови є досить суттєвим елементом вивчення геометрії.

Геометричні побудови – одна з провідних змістових ліній ШКГ. Це викликано тим, що виконувати їх доводиться учням при вивченні всього курсу геометрії і в майбутній практичній діяльності працівникам різних галузей (архітекторам, будівельникам, столярам та ін.).

Важливість задач на побудову обумовлюється також особливостями наукової структури курсу геометрії 7 - 9 кл., провідним компонентом якої є конструктивізм: значна кількість понять означується конструктивно; доведення всіх теорем спирається на використання фігур, реальне існування яких можна підтвердити побудовою. Отже, задачі на побудову мають розвивати в учнів конструктивний підхід до всього комплексу геометричних знань, а не лише формувати конструктивні навички розв’язування задач.

Розв’язування задач на побудову сприяє правильному розумінню учнями геометрії як науки про властивості просторових форм, ґрунтовному засвоєнню програмного матеріалу з геометрії, виробленню уміння правильно застосовувати його, розвитку логічного мислення, просторової уяви, формує евристичну діяльність.

Важливим є також те, що розв’язування задач на побудову є ефективним засобом підвищення алгоритмічної культури учнів, адже їх особливістю є знаходження і наступне однозначне виконання ланцюга операцій – елементарних або основних побудов, тобто знаходження деякого алгоритму.

Найпростіші геометричні побудови учні виконують вже в початковій школі та в 5-6 кл.: проводять прямі, кола, відрізки, рівні даним, будують кути заданої градусної міри, використовуючи транспортир, проводять паралельні і перпендикулярні прямі за допомогою лінійки і косинця, зображують трикутники, квадрати, прямокутники, прямокутний паралелепіпед, циліндр, конус, призму, піраміду.

У систематичному курсі геометрії спеціально виділяються задачі на побудову, які розв’язуються лише за допомогою циркуля і лінійки без ділень, причому учням треба вмотивувати таке виділення: використання лише циркуля і лінійки без ділень у тих випадках, коли відрізки і кути задані геометрично, підвищує точність побудови.

Геометричні побудови вивчаються наприкінці курсу геометрії 7 кл. в межах окремої теми, що тісно пов'язана з ознаками рівності трикутників, паралельністю прямих, властивостями кола.

В діючих підручниках [1], [2] дана тема вивчається в останньому параграфі "Коло і круг. Геометричні побудови", в якому:

- ✓ вводяться такі поняття, як геометричне місце точок (ГМТ); коло; круг; радіус, хорда, діаметр кола і круга; дотична до кола; описане і вписане кола трикутника;
- ✓ вивчаються основні ГМТ; властивості і ознака дотичної; теореми про існування описаного і вписаного кіл трикутника; властивості кола і його елементів;
- ✓ ознайомлюють з методом основних задачами і з методом ГМТ.

Основна мета вивчення геометричних побудов у школі – навчити учнів виконувати основні побудови за допомогою циркуля і лінійки без ділень та розв'язувати нескладні комбіновані задачі, що зводяться до виконання основних побудов.

В наш час намітилася чітка тенденція до скорочення кількості задач на побудова в шкільному курсі математики середньої школи. Це пояснюється тим, що значно звужена роль задач на побудову, яка відповідає цілям навчання, таким як розвиток мислення і виховання учнів, і проявляється у вигляді впливу на мислення учнів, в першу чергу на логічне. У більшості випадків основна увага приділяється практичному значенню задач, при цьому абсолютно не розглядається питання розвитку логічного мислення учнів та можливості використання задач на побудову при вивченні геометрії.

Знання учнів з даної теми нерідко носять формальний характер, спостерігається відсутність структурності.

На даний момент в школі недостатньо приділяється уваги розгляду таких основних методів вирішення завдань на побудову як метод перетворень, алгебраїчний метод, метод геометричного місця точок.

У учнів немає чіткого уявлення про етапи розв'язування задач на побудову: аналіз, побудова, доведення і дослідження, які точно відповідають етапам будь-якого логічного міркування. Практично не приділяється увага одному з важливих етапів - дослідження, в якому учні часто не бачать сенсу, незважаючи на те, що він, в свою чергу, є хорошим засобом розвитку логічного мислення.

5.2. Задачі на побудову.

Розв'язати задачу на побудову – означає знайти скінчену послідовність елементарних побудов, після виконання яких шукана фігура буде вважатися побудованою на основі прийнятих аксіом конструктивної геометрії. У ШКГ задача на побудову вважається розв'язаною, якщо побудову виконано за допомогою циркуля і лінійки, при цьому елементарними побудовами є:

- ✓ Позначити одну чи кілька точок: на площині, на прямій, на колі.
- ✓ Провести пряму: довільну; що проходить через дану точку; що проходить через дві дані точки.
- ✓ Описати коло: з довільної точки довільним радіусом; з довільної точки заданим радіусом; з даної точки даним радіусом.
- ✓ Знайти точку перетину: двох прямих; прямої і кола; двох кіл.

Треба, щоб учні пам'ятали, які побудови можна виконувати за допомогою кожного з цих двох інструментів. Лінійкою без ділень можна провести лише: довільну пряму; довільну пряму, що проходить через дану точку; пряму, що проходить через дві даних точки. Циркулем можна лише описати коло, зокрема відкласти на даній прямій від даної точки даний відрізок.

З вузівського курсу геометрії відомо, що задачі на побудову виконують у чотири етапи:

1) *Аналіз задачі*, мета якого – встановити зв'язки між шуканими і даними задачі, знайти план виконання побудови. Припускають, що задача побудована, зображують відповідну фігуру на малюнку - ескізі та вивчають властивості побудованої фігури та її зв'язки з даними задачі, поки не встановлять послідовність побудов. Заключний момент – стислий запис плану, де перелічуються всі елементарні чи основні побудови.

2) *Побудова за знайденим планом*. Якщо задача нескладна, то побудова фігури зводиться до виконання елементарних побудов. При розв'язуванні більш складних задач описання елементарних побудов стає громіздким, тому побудову зводять до деяких типових комбінацій елементарних побудов, які часто зустрічаються і називаються основними задачами на побудову або основними побудовами.

3) *Доведення*, мета якого – довести, що побудована фігура задовольняє всім вимогам задачі: має задану форму і розміри її елементів. Доведення ґрунтується на загальних положеннях (аксіомах, теоремах, властивостях геометричних фігур).

4) *Дослідження*, мета якого – з'ясувати три питання: 1. Чи при будь-якому виборі даних елементів задача має розв'язок? 2. При якому виборі даних вона не має розв'язку? 3. При якому виборі даних задача має розв'язки і скільки? Один із способів дослідження – графічний, який полягає в тому, що кожна геометрична фігура визначається сукупністю точок, які можна поділити на відомі та шукані (невідомі). Шукана точка має дві геометричні властивості, за кожною з яких ми відносимо цю точку до певного геометричного місця точок. Визначення всіх випадків взаємного розміщення цих двох геометричних місць і є графічним дослідженням. Задача не матиме розв'язку, якщо відсутні спільні точки геометричних місць, і кожна точка,

яка належить одночасно двом геометричним місцям, може привести до розв’язку.

Щодо кількості розв’язків задач на побудову, то це питання вирішується по-різному в залежності від того, маємо ми справу з позиційними задачами або непозиційними. У позиційних задачах указується, як розміщені одні фігури стосовно інших даних фігур; у такому разі шукані побудовані фігури вважаються різними розв’язками. У непозиційних задачах рівні фігури не вважаються різними розв’язками.

Наприклад: Побудувати коло даного радіуса R, яке проходить через дві дані точки A і B. Задача є позиційною, оскільки положення шуканого кола на площині залежить від положення даних точок. (Скільки розв'язків має така задача?)

В ШКГ недоцільно вимагати від учнів кожного разу при розв’язанні задач на побудову виконувати всі чотири етапи, оскільки по-перше, дослідження може виявитися складнішим, ніж побудова, а, по-друге, в найпростіших задачах на побудову учні можуть знайти план побудови без попереднього аналізу. Крім того, не обов’язково при розв’язанні всіх задач виконувати побудову, якщо основні побудови вже добре відпрацьовані, а задача зводиться до них (тобто достатньо скласти тільки план побудови).

Отже, задачу слід вважати розв’язаною, якщо вказано план побудови і виконано доведення. В складніших задач можна проводити попередній аналіз, в деяких задачах проводити дослідження, якщо воно доступне учням.

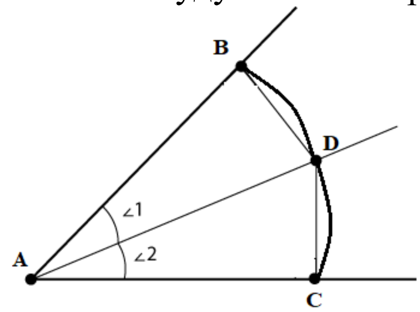
5.3. Основні побудови.

До основних побудов віднесено побудови: 1) кута, що дорівнює даному, одна із сторін якого є даним променем; 2) серединного перпендикуляра даного відрізка; 3) поділ відрізка навпіл; 4) перпендикулярної прямої до даної прямої, що проходить через точку, яка не належить даній прямій; 5) перпендикулярної прямої до даної прямої, що проходить через точку, яка належить даній прямій; 6) бісектриси даного кута, побудова трикутника с даними сторонами.

При вивченні основних побудов треба скористатися алгоритмічним підходом. Так, учні повинні засвоїти, що для того, щоб побудувати бісектрису кута, необхідно: 1) описати з вершини кута як із центра коло довільного радіуса; 2) з точок перетину побудованого кола зі сторонами кута описати два кола тим самим радіусом і позначити точку їх перетину, відмінну від вершини кута; 3) через вершину кута і точку перетину кіл провести промінь, який і є бісектрисою кута.

Вивчені алгоритми мають бути закріплені достатньою кількістю тренувальних вправ, а введенню відповідного алгоритму мають передувати підготовчі вправи, наприклад, для того, щоб учні самостійно знайшли спосіб побудови бісектриси кута, можна запропонувати такі вправи:

1. Дано: AB = AC, $\angle 1 = \angle 2$. Довести: BD = DC.
2. Дано: AB = BD = DC = AC. Довести: $\angle 1 = \angle 2$.
3. Дано: $\angle A$, AB = AC. Як побудувати бісектрису кута?



Задачі на закріплення алгоритму побудови бісектриси кута можуть бути такими:

1. Дано трикутник. Побудувати його бісектриси.
2. Побудувати кут так, щоб дана точка лежала на його бісектрисі.
3. Побудувати точку перетину двох бісектрис ΔABC.
4. Дано рівнобедрений трикутник. Побудувати точку перетину бісектриси кута при основі з бічною стороною.

5.4. Складніші задачі на побудову.

В ШКГ основними методами розв'язування задач на побудову є: метод геометричних місць, методи геометричних перетворень (симетрії, повороту, паралельного перенесення, гомотетії), алгебраїчний метод.

Знайомимо учнів з поняттям "геометричне місце точок", основними теоремами про ГМТ: теорема про серединний перпендикуляр, теорема про бісектрису кута і відповідним методом розв'язування задач на побудову, застосування якого демонструється на прикладах, зокрема ключової задачі – побудови трикутника за трьома даними його сторонами.

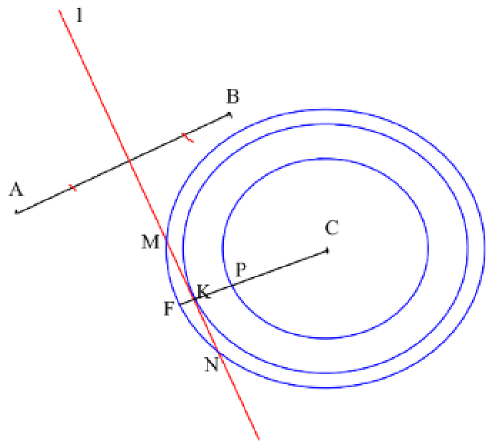
При ознайомленні учнів з методом геометричних місць доцільно використати алгоритмічний підхід, а саме на прикладах розв`язування двох задач виділити навчальний алгоритм методу.

Задача. Дано три точки A, B, C. Побудуйте точку X, яка рівновіддалена від точок A і B і знаходиться на даній відстані від точки C.

Розв`язання

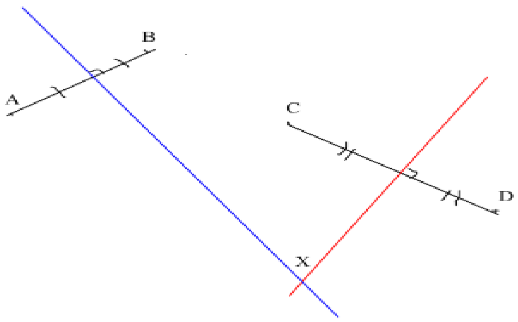
Необхідно побудувати точку X, що задовольняє умові P_1 і P_2. Умова P_1 - точка X рівновіддалена від точок A і B; умова P_2 - точка X знаходиться на даній відстані від точки C. Якщо геометричним місцем точок, що задовольняють умову P_1, є фігура F_1, а геометричним місцем точок, що задовольняють умову P_2, - фігура F_2, то шукана точка буде спільною для фігур F_1 і F_2, тобто точкою їхнього перетину.

Будуємо фігуру F_1. Це серединний перпендикуляр до відрізка AB - пряма l (червоного кольору). Будуємо фігуру F_2. Це коло з центром в точці C і радіусом, який дорівнює даній відстані (синього кольору).



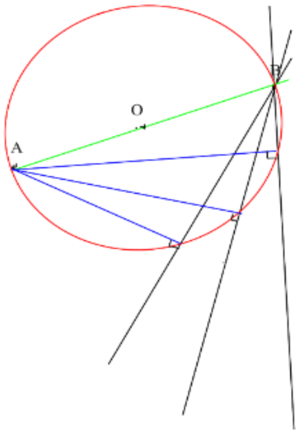
Перетин двох фігур залежить від того, чи пересічуться коло і пряма. Пряма l пересічеться з колом у двох точках (M і N), якщо відстань від центра кола до прямої - СК менша за даний відрізок CF. Пряма l пересічеться з колом в одній точці, якщо відстань від центра кола до прямої - СК дорівнює даному відрізок CF. Точок перетину не буде, якщо відстань від центра кола до прямої - СК більша за даний відрізок CF.

Задача. Дано чотири точки A, B, C, D. Побудуйте точку X таку, яка рівновіддалена від точок A і B і однаково віддалена від точок C і D.

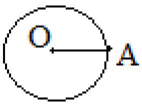


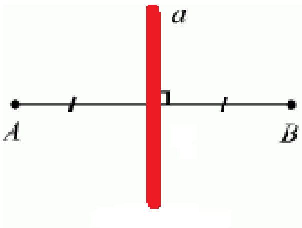
Задача. Дано точки A і B. Знайти ГМ кінців перпендикулярів, які проведені з A до прямих, які проходять через B.

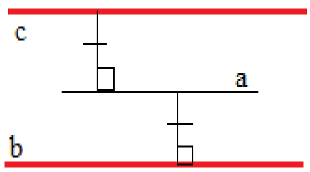
Щоб розв`язати задачу методом геометричних місць, треба: 1) з`ясувати, до знаходження якої точки (точок) зводиться розв`язання задачі і які дві вимоги ця точка має задовольняти; 2) відкинути одну з вимог задачі і побудувати геометричне місце точок, що задовольняють другу вимогу; 3) відкинути другу вимогу і побудувати геометричне місце точок, що задовольняють першу вимогу; 4) позначити шукану точку як перетин побудованих геометричних місць. Закріпити цей алгоритм доцільно, розв`язуючи задачі.

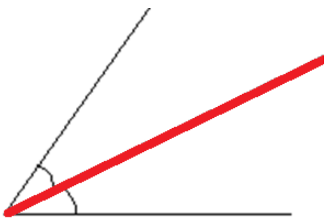


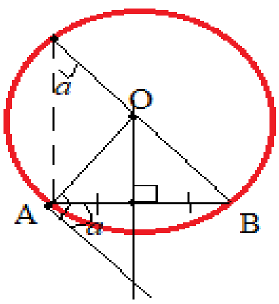
Треба дати учням перелік ГМТ, що вивчаються в школі. Це такі ГМТ: 1) коло – ГМТ, рівновіддалених від даної точки на дану відстань; 2) серединий перпендикуляр до відрізка – ГМТ, рівновіддалених від його кінців; 3) дві прямі, паралельні даній прямій, які знаходяться від неї на дану відстань; 4) бісектриса кута – ГМТ, рівновіддалених від його сторін; 5) дуга кола, з якої даний відрізок видно під даним кутом (у підручнику [1] 3) і 5) ГМТ не розглядаються).

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

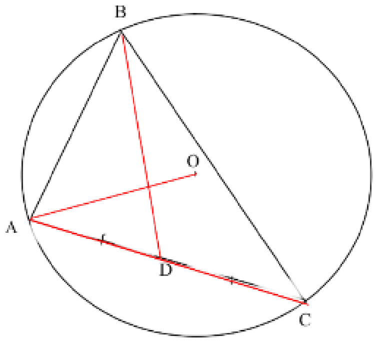
Для побудови п`ятого ГМТ треба: 1) побудувати кут ВАС = α; 2) провести АК перпендикулярно АС і DM перпендикулярно АВ через середину АВ; 3) перетин двох перпендикулярів дає точку О; 4) провести коло з центра О радіусом АО.

При розв`язуванні складніших задач, доцільно проводити аналіз, щоб навчити учнів загальної схеми міркувань у процесі пошуку побудови. Як приклад розглянемо розв`язання задачі.

Задача. Побудувати трикутник за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола.

Аналіз

Нехай трикутник ABC – шуканий. У ньому AC – задана сторона, BD – задана медіана, OA – радіус описаного кола. Положення вершин A і C визначається завданням сторони AC. Задача зводиться до відшукання положення вершини B.

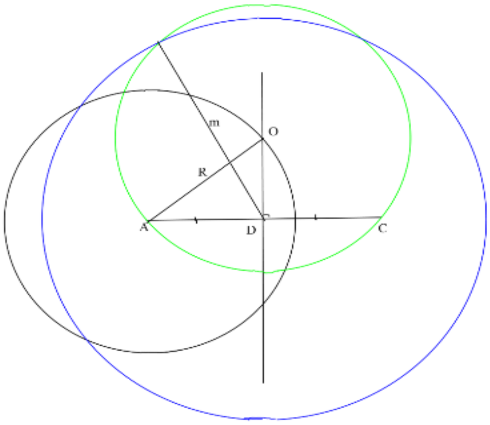


Точка B має задовольняти дві вимоги: 1) бути віддаленою на відстань R від центра описаного кола – точки O, положення якої залишається поки що невідомим. Друга точка, положення якої треба знайти, тобто точка B, має належати до кола центра O і радіуса R; 2) бути віддаленою від середини D сторони AC на відстань, що дорівнює довжині медіани, тобто точка B має належати до кола центра D і радіуса, що дорівнює довжині медіани.

Точка O має задовольняти дві вимоги: 1) бути рівновіддаленою від відомих точок A і C, тобто лежати на серединному перпендикулярі до відрізка AC; 2) бути віддаленою на відстань R від точки A або від точки C, тобто лежати на колі радіуса R з центром або в точці A, або в точці C.

Побудова.

Виберемо відрізки довжиною b, R і m_b. Побудуємо відрізок завдовжки b і позначимо його кінці точками A і C. Побудуємо серединий перпендикуляр відрізка AC і проведемо коло з центра A радіусом R. Перетин кола з побудованим серединним перпендикуляром визначить положення точки O Вершину B знайдемо на перетині двох кіл: кола, проведеного з центра O радіусом R, і кола, проведеного радіусом, що дорівнює довжині m_b з центра D перетину серединного перпендикуляра з відрізком AC. Трикутник ABC шуканий.



Доведення.

Доведення правильності виконаної побудови не викликає в учнів труднощів.

Дослідження.

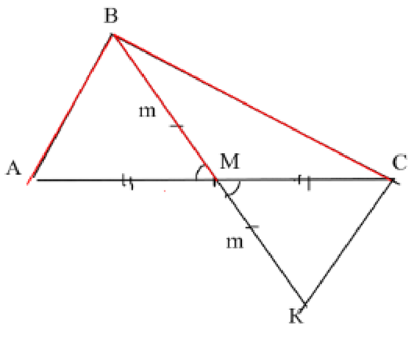
Дослідження на цьому етапі навчання досить складне, тому виконати його в повному обсязі недоцільно, хоча поставити перед учнями питання про умови, при яких можна побудувати трикутник цілком допустимо.

Рівень обов’язкових результатів навчання не передбачає розв’язування складніших задач на побудову. Разом з тим для здібних учнів, які цікавляться математикою, такі задачі можна пропонувати як на уроках, так і в позаурочний час.

Наведемо приклад розв`язування задачі за чотирма етапами.

Задача. Побудувати трикутник за двома сторонами і медіані, проведеної до третьої сторони.

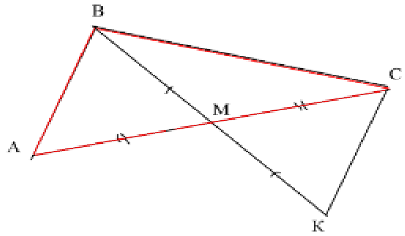
Аналіз.



Нехай шуканий трикутник побудований, це ∆ ABC. У цьому трикутнику відомі сторони AB, BC і медіана BM. Для побудови ∆ ABM або ∆ BMC даних мало. Який трикутник можна було б побудувати, щоб використати усі три відомі відрізка? Такого трикутника на рисунку доки немає. Продовжимо BM на відстань MK = BM. Точки K і C з`єднаємо.

Отримаємо, що $\Delta AMB = \Delta CMK$ (за двома сторонами і кутом між ними). Тоді AB = CK. Можна починати будування з трикутника BKC.

Побудова.



Доведення.

BC = a, CK = в, BK = 2m$_{â}$- за побудовою. BM = MK – за побудовою. Отже BM = m$_{â}$. AM = MC – за побудовою. Кут AMB дорівнює куту KMC як вертикальні, отже Δ AMB = ΔCMK, отже AB = KC = в. ΔABC – шуканий.

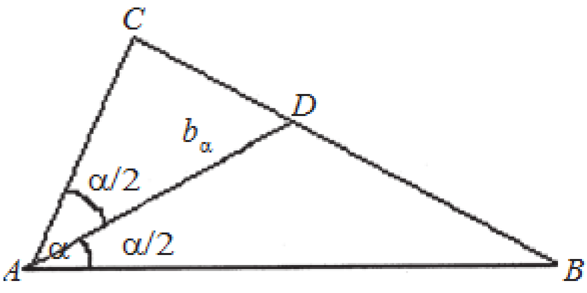
Дослідження.

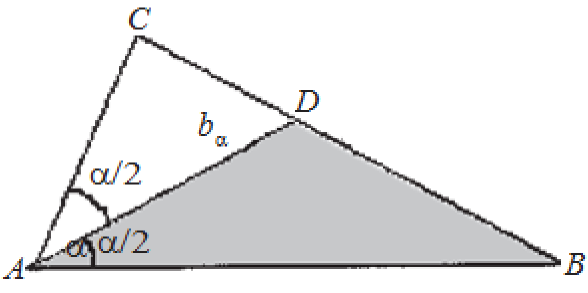
Побудувати шуканий трикутник можна не завжди, а лише тоді, коли має місце відношення $|\hat{a}-\grave{a}| \prec 2m_b \prec b+a$.

Задача. Побудуйте трикутник по стороні, прилеглому до неї куту і бісектрисі трикутника, проведеної з вершини цього кута.

Аналіз задачі

- З чого починається робота над задачею на побудову?
- З аналізу задачі.
- З чого починається аналіз задачі?
- Припускаємо задачу вирішеною, робимо рисунок і наносимо дані на рисунок.





- Чи є трикутник, який можна побудувати?
- Методом допоміжного трикутника, так як з малюнка видно, що трикутник ADB можна побудувати за двома сторонами і кутом між ними.
- Виділіть допоміжний трикутник. Якщо побудуємо допоміжний трикутник ADB, то які вершини шуканого трикутника будуть визначені, а які залишиться побудувати?
- Будуть визначені вершини A і B, залишиться побудувати вершину C.
- Отже, яку точку виберемо за шукану?

- Точку С.

- Що роблять далі при аналізі задачі?

- Вибирають дві умови, яким повинна задовольняти шукана точка.

- Назвіть умови, яким задовольняє шукана точка С?

- 1) Точка С лежить на промені BD, 2) ∠BAC = α.

- Який висновок потрібно зробити з виділених умов?

- Потрібно визначити фігури, на яких лежить шукана точка С.

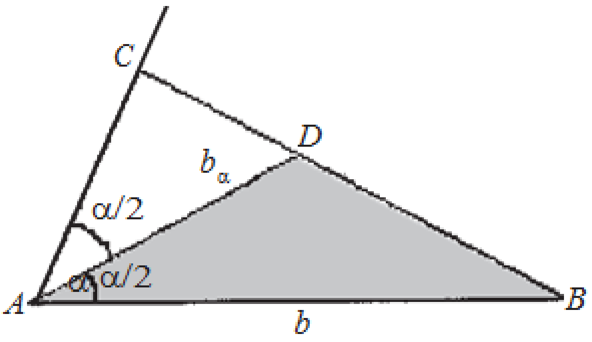
- Назвіть ці фігури.

- З першого умови - це промінь BD, а з другого - промінь АК, такий, що ∠КАВ = a.

- Отже, назвіть план побудови.

- 1) побудуємо ΔADB; 2) побудуємо промінь АК; 3) побудуємо точку С.

Оформлення аналізу задачі на дошці.

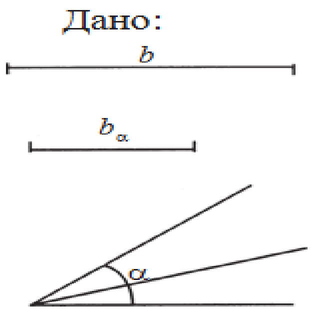


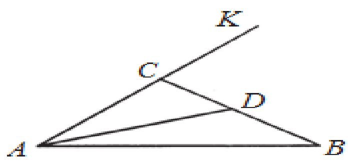
ΔADB - допоміжний, С - ?

1) C ∊ BD , 2)∠BAC = α → C ∊ AK.

C - точка перетину променів BD і AK.

Побудова





Доведення

(Можна провести усно, бо воно легке.)

Дослідження

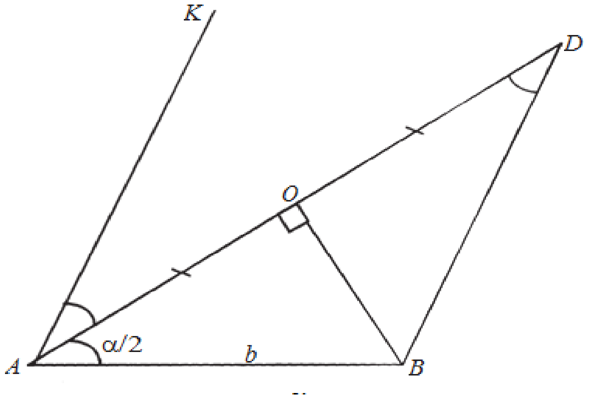
Дослідження проводимо, аналізуючи кожен крок побудови:

1) Допоміжний трикутник будується по двох сторонах і куту між ними, значить, його завжди можна побудувати при умові, що даний кут менше 180°; якщо знехтувати становищем трикутника на площині, то такий трикутник єдиний.

2) З цієї сторони в заданій півплощині можна відкласти єдиний кут, рівний даному.

3) Два променя AK і BD можуть перетнутися, якщо вони не є паралельними і не розходяться.

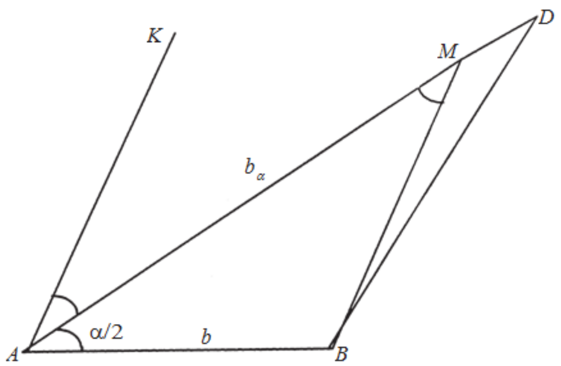
Розглянемо перший випадок (AK || BD).



Якщо AK || BD, то кут ADB = $\alpha/2$, отже, ΔADB - рівнобедрений. Знайдемо зв'язок між b, b_α і $\underline{\alpha}$ в цьому випадку. Для цього висловимо b_α через b і $\underline{\alpha}$. Проведемо в трикутнику ABD висоту BO.

Тоді AO = bcos $\alpha/2$, AD = 2bcos $\alpha/2$. Значить, якщо b_α = 2bcos $\alpha/2$, задача розв`язку не має.

Розглянемо другий випадок (AK і BD - розходяться).



Проведемо BM паралельно AK, тоді AM = 2bcos $\alpha/2$. значить, якщо b_α > 2bcos $\alpha/2$, то задача розв`язку не має.

Отже, задача має:

- єдиний розв`язок, якщо b_α <2bcos $\alpha/2$;
- не має розв`язку , якщо $b_\alpha \geq$ 2bcos $\alpha/2$.

З задачами на побудову учні зустрічаються і в інших темах курсу планіметрії "Чотирикутники", "Теорема Піфагора" і ін. Цих задач достатньо для звичайного курсу. Однак мало задач на побудову з використанням теореми Фалеса. Наведемо приклади задач на побудову в інших темах. Побудувати кут, яка-небудь тригонометрична величина якого дорівнює даному числу. Побудувати відрізок даного розміру

Під час розв`язування задач на побудову в наступних класах треба звернути увагу учнів на інші можливі методи. Зокрема, при вивченні геометричних перетворень варто дати учням правило - орієнтир виконання окремих видів перетворень до розв`язування задач на побудову.

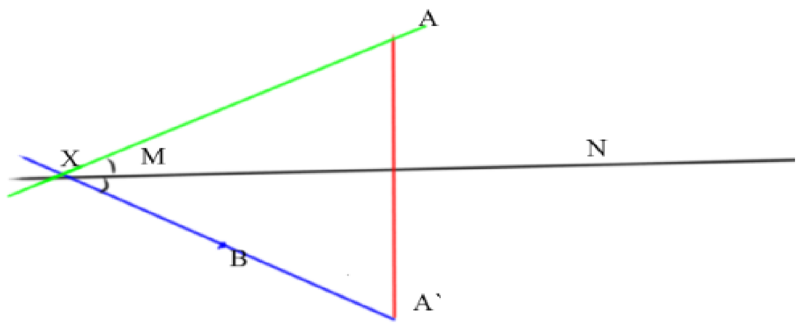
Для методу осьової симетрії це правило може бути таким.

1) Припустити, що задача розв`язана. Обрати певну симетрію стосовно або даної прямої, або прямої, яку легко побудувати. Замінити один з даних елементів симетричним щодо обраної осі симетрії.
2) Розв`язати задачу стосовно побудованого симетричного елемента і решти даних. Цим самим задача зведеться до відомої, або до простішої задачі.
3) Від допоміжної задачі перейти до заданої шляхом оберненого перетворення симетрії.

Це правило можна або проілюструвати розв`язуванням певної задачі, або узагальнити попередньо виконане розв`язання цієї задачі і сформулювати наведене вище правило - орієнтир.

Задача. Дано пряму MN і точки A і B по різні боки від неї. Через точки A і B провести дві прямі так, щоб кут між ними ділився прямою MN навпіл.

Аналіз



Припустимо, що задача розв`язана і шукані прямі побудовані. Рівність кутів AXM і BXM свідчить про те, що як вісь симетрії доцільно взяти бісектрису XM кута AXB. Тоді задача зводиться до знаходження точки X. Для цього будуємо точку A`,симетричну A стосовно даної прямої MN, і через точки A` і B проводимо пряму до перетину з прямою MN в точці X. Потім через точки X і A проводимо пряму AX. Прямі AX і BX – шукані, що неважко довести.

Правила-орієнтири методів паралельного перенесення і повороту схожі.

1) Припустити, що задачу розв`язано. Один з даних елементів перенести паралельно собі в певному напрямку на задану відстань (або повернути навколо даної точки на певний кут). Результатом такого перетворення буде допоміжна фігура, яку можна побудувати за даними задачі.

2) Побудувати допоміжну фігуру й оберненим паралельним перенесенням (поворотом) виконати побудову шуканої фігури.

Застосування цього правила-орієнтира варто проілюструвати розв`язанням таких задач.

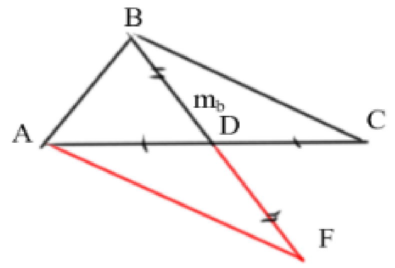
Задача 1. Побудувати трапецію за чотирма даними сторонами a, b, c, d.

Задача. Побудувати трикутник за двома сторонами a і c та медіаною m_b

Аналіз

Припустимо, що задачу розв`язано і трикутник ABC побудовано. В ньому BC = a, AB = c, BD = m_b. Розглянемо поворот навколо точки D на кут 180°. Точці B при цьому повороті відповідатиме точка F, а точці C – точка A.Трикутник ABF можна побудувати за трьома сторонами AB = c, AF = a і BF = 2 m_b.

Побудова



Будуємо трикутник BAF за трьома сторонами і знаходимо середину D сторони BF. Проводимо медіану AD і на її продовженні відкладаємо відрізок DC = AD. Трикутник ABC – шуканий.

Доведення і дослідження не викликають труднощів. Задача має єдиний розв`язок, якщо $2m_b \prec a+c$ і $2m_b \succ a-c.$

Методом подібності розв`язуються такі задачі на побудову, в яких серед даних є умови, що визначають нескінченну множину подібних фігур. Трудність для учнів полягає в тому, щоб розділити умову задачі на дві частини. Одна з них використовується для побудови допоміжної фігури, подібної шуканій, а друга, що визначає розміри фігури, дає можливість шляхом перетворення подібності допоміжної фігури побудувати шукану. Умови, що визначають розміри фігури, можуть бути двох видів. Це – або довжина якого-небудь даного елемента фігури, або розміщення фігури стосовно інших даних фігур. Доцільно розглянути задачі, які передбачають умови кожного з цих двох видів.

Правило-орієнтир методу подібності можна сформулювати так.

1. Виділити в умові задачі дві частини і, відкинувши ту, що визначає розміри фігури, побудувати фігуру, подібну шуканій.
2. Ввести відкинути умову і, застосовуючи перетворення подібності допоміжної фігури, побудувати шукану фігуру.

Вдалими задачами для введення цього правила-орієнтира є такі.

Задача 1. Побудувати трикутник за двома кутами і висотою, проведеною з вершини одного з них.

У цій задачі умови (два кути) визначають множину трикутників, подібних шуканому. Друга частина умови (висота) визначає розміри шуканого трикутника. Тому, відкинувши цю другу умову, за двома кутами будуємо трикутник, подібний шуканому. Потім, ввівши відкинуту умову (висоту), будуємо шуканий трикутник, вибравши вершину, з якої проведено висоту, за центр гомотетії.

Задача. У даний трикутник вписати квадрат.

У цій задачі розміри квадрата визначаються умовою розміщення його вершин на сторонах даного трикутника. Відкинувши цю умову, можна побудувати довільний квадрат, дві вершини якого лежать на одній стороні трикутника, а третя – на другій. Оскільки всі квадрати подібні, то вибравши за центр гомотетії вершини даного трикутника, що утворюється перетином сторін, які містять вершини допоміжного квадрата, досить виконати перетворення гомотетії і дістати шуканий квадрат.

Тема 6. Методика вивчення чотирикутників.

6.1. Означення чотирикутника.

Тема "Чотирикутники" – ключова тема курсу планіметрії, яка традиційно вивчається у 8 класі.

Означення поняття чотирикутника вводимо абстрактно-дедуктивним методом, тобто починаємо з означення.

Означення. чотирикутником називається фігура, яка складається із чотирьох точок і чотирьох відрізків, що послідовно з'єднують їх. В цьому разі жодні три з даних точок не лежать на одній прямій.

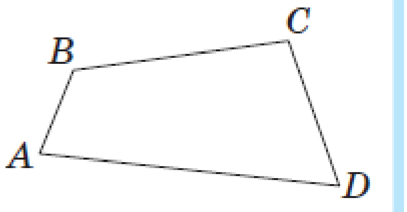
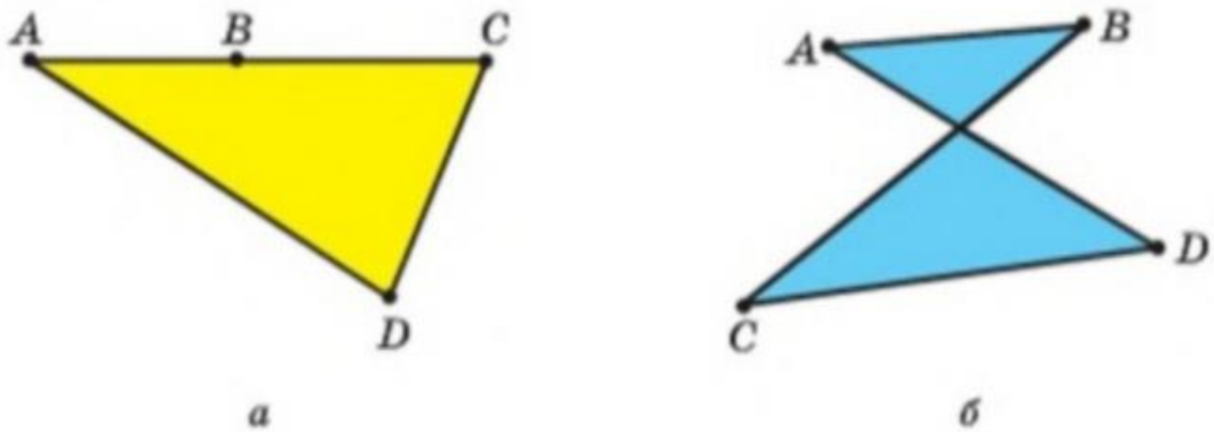


Рис.1

Не слід вважати означенням тільки перше з наведених речень, оскільки йому задовольняють і такі фігури (рис. 1), які не прийнято називати чотирикутниками.



Варто уваги питання про побудову чотирикутника. Нерідко учні думають, що за чотирма даними сторонами можна побудувати тільки один чотирикутник (за аналогією з побудовою трикутника). Тому при нагоді бажано зауважити, що чотирикутник фігура нежорстка, що чотири сторони не визначають чотирикутник однозначно. Слід підкреслити, що чотирикутник позначається послідовним записом його вершин. Учні повинні вміти вказувати вершини і сторони чотирикутника.

Далі вводимо назви елементів чотирикутника таких, як сусідні вершини, протилежні вершини, сусідні сторони, протилежні сторони, пояснюють, що таке сторони і вершини чотирикутника. Але з поняттям "кути чотирикутника" слід зачекати, бо як говорити про кути не опуклого чотирикутника, коли учням відомі тільки такі кути, градусні міри яких не перевершують 180°? Тільки після введення поняття опуклого многокутника пояснюють поняття кута чотирикутника, вводимо також поняття діагоналі.

Чотирикутник позначають, послідовно вказуючи всі його вершини, причому букви, які стояли поруч, повинні позначати сусідні вершини. Наприклад, чотирикутник на рис.1 можна позначити ABCD, BCDA, CBAD, але не можна позначити ABDC, BDCA.

При введенні поняття чотирикутника доцільно використати наочний посібник – модель чотирикутника. На цьому етапі навчання ще не передбачено вводити поняття плоского і опуклого чотирикутників, тому при розв`язуванні вправ на підведення фігур під поняття доцільно включити фігури, які належать до цього поняття, і такі, що не належать до нього.

Запропонувати учням дати означення периметра чотирикутника і розглядаємо опуклий чотирикутник.

Означення. Чотирикутник називається опуклим, якщо він лежить по одну сторону від будь-якої прямої, що містить його сторону.

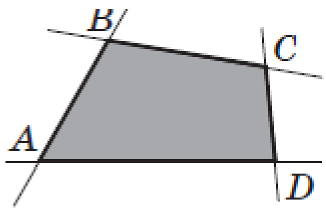


Рис.2

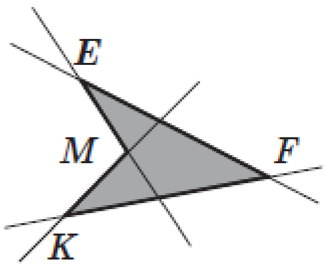


Рис.3

На рис.2 зображено опуклий чотирикутник, на рис.3 не опуклий чотирикутник. В ШКМ будемо вивчати тільки опуклі чотирикутники.

Визначення внутрішнього кута чотирикутника при його вершині даємо на наочному рівні.

Означення. Кутом (внутрішнім кутом) опуклого чотирикутника ABCD при вершині A називається кут BAD.

Роботу над теоремою про суму кутів чотирикутника будуємо проблемним методом. Учитель ставить відповідні питання і працює з учнями по відомому плану роботи з теоремою.

6.2. Вивчення паралелограма та його видів.

Перш ніж переходити до вивчення окремих видів чотирикутників слід дати класифікацію поняття "чотирикутник". Деякі вчителі вважають за краще давати її після вивчення всіх видів чотирикутника. На наш погляд порушується системність вивчення. Знаючи класифікацію, учні розуміють, який вид чотирикутника буде вивчатися далі, а так само класифікація цього поняття допомагає школярам конструювати правильні означення розглянутих понять. Саме при вивченні теми "Чотирикутники" потрібно формувати вміння учнів будувати родо-видові означення понять.

Чотирикутник
↙ ↘
Паралелограм Трапеція
↙ ↘ ↙ ↓ ↘
Прямокутник Ромб Рівнобічна Прямокутна Інші
↘ ↙
Квадрат

Доцільно звернути увагу учнів на те, що кожний прямокутник, ромб, квадрат є паралелограмом, а кожний квадрат є одночасно ромбом і прямокутником. Всім чотирикутникам, які належать до множини паралелограмів, притаманні властивості паралелограма, тобто родового поняття. Разом з тим певний вид паралелограмів має свої властивості, причому такі властивості притаманні не кожному паралелограму.

Перший вид чотирикутника, якій вивчається є паралелограм. Виділення із всіх чотирикутників паралелограмів виправдано з погляду практики, логіки і дидактики. Адже в оточуючому нас матеріальному світі моделей паралелограмів зустрічається набагато більше, ніж будь-яких інших многокутників. І характерні їх властивості варті уваги і доступні учням: протилежні сторони паралельні і рівні, протилежні кути рівні, кожна діагональ паралелограма розбиває його на два рівних трикутники, точкою перетину діагоналі діляться навпіл та ін.

Означати паралелограм можна по-різному: 1) чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні; 2) чотирикутник, у якого дві сторони паралельні і рівні; 3) центральносиметричний чотирикутник та ін.

За Мерзляком А. Г. та Єршовою А. П. пропонується перше означення.

Найчастіше у навчальних посібниках види паралелограма визначають через рід і видові відмінності. У підручниках, які розглядаються нами, здійснено саме такий підхід до означень.

На особливу увагу заслуговує питання щодо засвоєння учнями *ознак і властивостей різних видів чотирикутників.*

Пригадаємо, що ознаками називають твердження (теореми або задачі на доведення), за допомогою який можна встановити, що певний об'єкт (наприклад, чотирикутник) належить до певного класу об'єктів (наприклад, прямокутників). Отже, ознака – це прикмета, за допомогою якої впізнають фігуру. Разом з тим, в означенні будь-якого поняття вказано деякий набір його суттєвих властивостей, яких необхідно і достатньо, що віднести даний об'єкт до розглядуваного класу об'єктів. Тому доцільно після введення кожного виду чотирикутників робити два висновки щодо властивостей і ознаки даного поняття, що випливають безпосередньо з означення. Наприклад, після введення прямокутника доцільно звернути увагу на те, що дане означення дає змогу зробити два висновки: 1) коли відомо, що даний чотирикутник є прямокутником, то можна стверджувати, що він є паралелограмом (а значить володіє всіма його властивостями) і має прямий кут (всі кути прямі); 2) коли відомо, що деякий чотирикутник є паралелограмом і має прямий кут, то можна стверджувати, що він є прямокутником.

Означення. Паралелограмом називається чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.

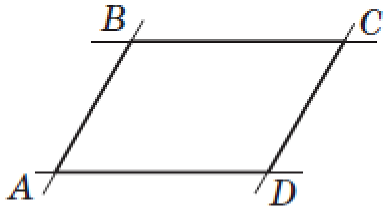


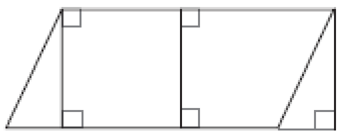
Рис. 4

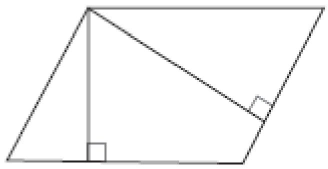
На рис.4 зображено паралелограм ABCD, у якого AB ∥ CD і BC ∥ AD.

Означення вводиться конкретно-індуктивним способом. Розглядаються вправи на розпізнавання поняття.

Далі означуємо такий його елемент, як висоту.

Означення. Висотою паралелограма називається перпендикуляр, проведений з точки однієї сторони до прямої, що містить протилежну сторону.





Теореми, що розглядаються в цьому параграфі, досить прості, їх неважко доводити за допомогою ознак рівності трикутників.

Зверніть увагу на те, що в підручнику [2] автори розглядають необхідні і достатні умови. Матеріал цей не для обов`язкового вивчення. Але треба, як тільки є така нагода, дозволяє матеріал, який вивчається, звертатися до питання необхідних і достатніх умов.

Кожна з ознак паралелограма вказує на певну особливість, наявності якої в чотирикутнику *достатньо* для того, щоб стверджувати, що він є паралелограмом. Узагалі в математиці ознаки інакше називають *достатніми умовами.* Наприклад, перпендикулярність двох прямих третій - достатні умова паралельності даних двох прямих.

На відміну від ознак, властивості паралелограма вказують на ту особливість, яку обов`язково має будь-який паралелограм. Властивості інакше називають необхідними умовами. Наприклад, рівність двох кутів необхідна для того, щоб кути були вертикальними, адже якщо цієї рівності немає, вертикальними такі кути бути не можуть.

У випадку правильності теореми "Якщо А, то В" твердження А є достатньою умовою для твердження В, а твердження В є необхідною умовою для твердження А. Схематично це можна подати так:

Якщо A, то B
A — *достатня умова для* B
B — *необхідна умова для* A

Отже, *необхідні умови* (властивості) паралелограма випливають з того, що даний чотирикутник - паралелограм; *з достатніх умов* (ознак) випливає те, що даний чотирикутник - паралелограм.

Порівнюючи властивості і ознаки паралелограма, неважко помітити, що одна й та сама умова (наприклад, попарна рівність протилежних сторін) є і властивістю, і ознакою паралелограма. У такому випадку кажуть, що умова є *необхідною і достатньою*. Необхідну і достатню умову інакше називають *критерієм.*

Вивчення прямокутника можна побудувати проблемним методом. Учні, які відповідають на запитання вчителя, самі дають означення цьому чотирикутнику, формулюють його властивості, які він має як паралелограм. Учитель далі може провести практичну роботу. Учні кожен у себе в зошиті рисують паралелограм і прямокутник. Просимо лінійкою виміряти діагоналі паралелограма і прямокутника і зробити висновок. Запитуємо: "Чи можна узагальнити цю властивість на всі прямокутники? Адже кожен учень малював в зошиті свій прямокутник". Це мотивування введення теореми про властивості діагоналей прямокутника. Нагадаємо учням, який основний метод доведення і рішення задач в шкільній планіметрії, доведення теореми школярі повинні провести самостійно.

Аналогічно вивчаємо ромб і квадрат.

6.3. Вивчення трапеції.

При введені поняття трапеції (конкретно-індуктивним методом) обов`язково підкреслити суттєву ознаку "тільки дві протилежні сторони паралельні". Інакше можна получити паралелограм. Означуємо елементі трапеції, виконуємо вправи на підведення під поняття "трапеція" і виведення наслідків з поняття трапеції.

Далі вивчаємо види трапецій: прямокутні, рівнобічні, інші. З різних видів трапеції найбільша кількість задач приходиться на рівнобічну трапецію. Тому і теоретичного матеріалу для цього виду трапеції більше. Доводимо теорему про властивості кутів при основі рівнобедреної трапеції і тут же розглядаємо зворотну теорему, яка буде ознакою рівнобедреної трапеції. Рівнобічна трапеція має ще ряд властивостей, які потрібно розглянути з учнями у вигляді задач (в підручниках таких теорем немає).

Обов'язково слід підвести підсумок і все властивості рівнобедреної трапеції зафіксувати у вигляді опорного конспекту.

Для необов'язкового вивчення розглядається побудова паралелограмів і трапецій. Бажано розглянути задачі на цю тему.

Особливе місце серед теорем теми займає теорема Фалеса, її застосування до доведення властивості середньої лінії трикутника та теореми про пропорційні відрізки, яка є узагальненням теореми Фалеса. Теорема Фалеса і її узагальнення мають допоміжний характер, тому не слід вимагати від усіх учнів уміння відтворювати їх доведення, однак треба звернути увагу учнів на те, що ці теореми застосовуються для доведення інших теорем і розв`язування задач. Зокрема, теорема Фалеса дає спосіб ділення відрізка на будь-яку кількість рівних частин, а теорема про пропорційні відрізки – спосіб побудови четвертого пропорційного відрізка.

Поняття середньої лінії трикутника ввести абстрактно-дедуктивним способом. Означення середньої лінії трапеції учні сформулюють за аналогією.

Теорема про середню лінію трикутника потребує складання плану доведення і покрокового його запису. Теорему про її середню лінію трапеції можуть довести самі учні. Доводять її на основі теореми про середню лінію трикутника, вивчення теореми будується проблемним методом навчання.

6.4. Вписані і описані чотирикутники.

Перед вивченням вписаних і описаних чотирикутників треба розглянути тему "Вписані кути". Означення вписаного кута ввести абстрактно-дедуктивним методом, розглянути вправи на підведення під поняття і виведення наслідків. Теорема про вписаний кут, доводиться відомим з курсу загальної методики методом - доведення по частинах. Вчителю слід запитати в учнів, яким може бути взаємне розташування центру кола і сторони (хорди кола) вписаного кута. Можливі три варіанти: сторона вписаного кута проходить через центр кола; центр кола знаходиться в площині вписаного кута; центр окружності знаходиться поза площиною вписаного кута.

Далі розглядаються три наслідки з теореми про вписаний кут, які часто використовуються в задачах.

Перед введенням понять вписаного і описаного чотирикутника вчителю необхідно нагадати учням, що в 7 класі вони вже вивчали матеріал, що відноситься до вписаних і описаних трикутників. Згадати ці означення і по аналогії дати означення вписаному чотирикутнику (описаний чотирикутник будемо вивчати пізніше).

Означення. Чотирикутник називається вписаним в коло, якщо всі його вершини лежать на цьому колі.

Далі питаємо учнів: "Чи навколо кожного трикутника можна описати коло?" Відповідь: "Так". "А навколо кожного чотирикутника можна описати коло?" Проводимо практичну роботу. Учні рисують в зошитах довільні чотирикутники і намагаються описати навколо них коло. не завжди виходить.

Потім просимо школярів намалювати прямокутник і спробувати біля нього описати коло. Цей досвід більш вдалий. У всіх з першого разу вийшло описати коло близько прямокутника. У чому ж проблема? Чим прямокутники відрізняються від чотирикутників? Таким чином ми підходимо до ознаки вписаного чотирикутника.

Теорема містить в собі два твердження. Перше є властивістю чотирикутника, вписаного в коло, а друге - ознакою. Перше твердження доводиться легко, його можуть довести самі учні. Доведення другого твердження більш складне і використовує метод доведення від супротивного. Згадуємо алгоритм цього методу доведення і за питаннями вчителя шукаємо шлях доведення.

Після доведення теореми йде два слідства, зміст яких стосується прямокутника і рівнобедреної трапеції.

Аналогічно вивчаємо описані чотирикутники: означення, теорема, яка містить два твердження (властивість і ознаку) і слідство.

6.5. Опис задачного матеріалу.

У цій темі, як і в багато інших, задачі можна поділити на два класи: ті, які закріплюють введення поняття і твердження, і ті, в яких вони використовуються при обчисленні довжин відрізків, міри кутів, побудові фігур і доведенні різноманітних тверджень. Найчастіше використовуються властивості різних видів чотирикутників і їх ознаки. Досвіт показує, що учням важче застосовувати ознаки, ніж властивості фігур. Тому доцільно сформулювати учням загальний орієнтир застосування вивченого теоретичного матеріалу до розв`язування задач:

- якщо в умові задачі (теореми) дано, що чотирикутник належить до певного виду (прямокутник, ромб, паралелограм, квадрат), то можна при розв`язуванні задачі або доведенні теореми використати будь-яку властивість;

- якщо в задачі (теоремі) треба довести, що певний чотирикутник є паралелограмом (ромбом, прямокутником, квадратом) то для доведення треба використати одну з ознак певного виду чотирикутника.

Зауважимо, що деякі задачі можуть бути розв`язані різними способами. Від цього залежить їх місце в поурочному плануванні. Наприклад, в підручниках [1; 2] є задачі, які можна розв`язувати відразу після введення означення паралелограма, а не використовуючи теорему про властивість його протилежних кутів. Багато задач, які можна розв`язати, застосувавши або властивості сторін паралелограма, або властивості діагоналей. При розв`язуванні задач на побудову доцільно спочатку провести аналіз для того, щоб з`ясувати, до знаходження яких вершин зводиться розв`язування задачі. Є задачі на підведення чотирикутника під означення прямокутника або ромба. Саме тут доцільно нагадати учням алгоритм підведення об`єкта під дане поняття. Щоб встановити, чи належить х до поняття у, треба:

1) виділити суттєві властивості у, що включені в означення, і перевірити, яким сполучником вони з`єднані;

2) якщо сполучником "і", то перевірити, чи є у х всі виділені властивості у. Якщо так, то х належить множині у, якщо ні, то – не належить;

3) якщо сполучником "або", то перевірити, чи є в х хоча б одна властивість у.

Ясно, що коли учні ознайомляться з ознаками згаданих вище фігур, вони зможуть підводити під певне поняття, користуючись і цими ознаками.

При підведені даної фігури під означення прямокутника чи ромба треба домагатися, щоб учні усвідомили необхідність перевірити виконання двох фактів: дана фігура має бути паралелограмом і для неї повинна виконуватися специфічна (видова) ознака (всі кути прямі або сторони рівні).

У системі задач, що стосується теми "Чотирикутники", слід виділяти опорні, які не повинні залишитися поза увагою учнів.

У підручнику [2] окремим пунктом (не для обов'язкового вивчення) описаний метод вирішення задач - метод допоміжного кола. Бажано познайомити всіх учнів з цим методом на прикладі нескладних задач. Особливо цікавим і нестандартним є застосування кола (як описаного, так і вписаного) при вирішенні задач, в умовах яких коло взагалі не згадується.

Тема 7. Методика вивчення подібності трикутників.

7.1. Вступні зауваження, означення подібних трикутників.

Використання поняття подібності трикутників в курсі геометрії основної школи має велике методичне значення:

- ідея подібності трикутників дає ефективний метод розв`язування великого класу задач на доведення, побудову, обчислення;
- доведення теорем із залученням подібності трикутників значно простіше доведень, заснованих на ознаках рівності трикутників. У більшості випадків ці доведення не пов`язані з допоміжними побудовами, виконання яких викликає значні труднощі в учнів;
- реалізація ідеї подібних трикутників у навчанні сприяє формуванню наукового світогляду в учнів.

Часті зміни навчальних програм призвели до того, що тема "Подібність трикутників" мало вивчена в методичному плані і теми, пов`язані з подібністю в шкільних підручниках викладаються по-різному. Внаслідок чого, методика вивчення подібних трикутників вимагає постійного вдосконалення.

У чинній програмі з математики тема "Подібність трикутників" залишається однією з основних тем курсу геометрії. На її вивчення відведено 14 годин у 8 класі, хоча залежно від обраного підручника часові рамки теми можуть несуттєво змінюватися.

Розглянемо як представлена тема "Подібність трикутників" в діючих підручниках з геометрії авторських колективів А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір [1]; А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижанівський, С.В. Єршов [2].

Для зручності подання матеріалу використовуватиме лише прізвище першого автора, не зменшуючи вкладу інших авторів підручника в його створення.

У двох підручниках вивчення теми "Подібність трикутників" починається з вивчення однієї теми. Структуру подання теми представимо у таблиці.

А.Г. Мерзляк	А.П. Єршова
Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки (властивості медіани і бісектриси трикутника).	Узагальнена теорема Фалеса.
Подібні трикутники.	Означення подібних трикутників.
Перша ознака подібності трикутників (властивість хорд, що перетинаються; властивість дотичної та січної).	Ознаки подібності трикутників: - подібність трикутників за двома кутами; - подібність трикутників за двома сторонами і куту між ними; - подібність трикутників за трьома сторонами.

Друга та третя ознаки подібності трикутників.	Подібність прямокутних трикутників: - ознаки подібності прямокутних трикутників; - пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику.
Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику.	Теорема Піфагора та теорема, обернена до неї.
Теорема Піфагора	Перпендикуляр і похила.
	Застосування подібності трикутників: - властивість бісектриси трикутника; - метричні співвідношення у колі; - метод подібності.

Як бачимо із структури представленої в таблиці тема "Подібність трикутників" вивчається по-різному.

Наприклад, властивості медіан і бісектрис трикутника в підручнику А.Г. Мерзляка подаються на початку вивчення теми, на відміну від підручника А.П. Єршової, де ці властивості представлені в самому кінці вивчення теми.

Тому існує і відмінність у доведенні цих властивостей: у першому випадку використовуються ознаки подібності прямокутних трикутників, а в другому - теорема про пропорційні відрізки (Узагальнена теорема Фалеса).

Теорема (властивість бісектриси трикутника). Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.

Доведення (за підручником А.П. Єршової, [2] стор. 136)

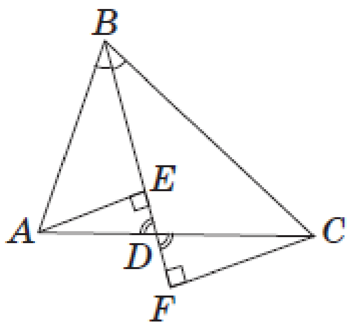
Нехай BD - бісектриса трикутника ABC. Доведемо, що $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

У випадку, коли AB = BC, твердження теореми очевидне, оскільки бісектриса BD водночас є і медіаною.

Розглянемо випадок, коли AB ≠ BC.

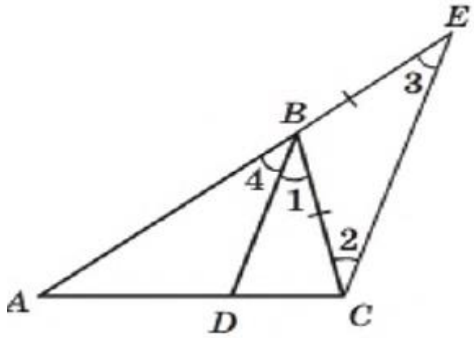
Проведемо перпендикуляр AE і CF до прямої BD.

Прямокутні трикутники ADE і CDF подібні, оскільки їх гострі кути при вершині D рівні, як вертикальні.



Із подібності цих трикутників маємо: $\frac{\text{AE}}{\text{C}F} = \frac{AD}{DC}$. З іншого боку, прямокутні трикутники ABE і CBF також подібні, оскільки мають рівні гострі кути при вершині B. Звідси випливає, що $\frac{\text{AB}}{\text{BC}} = \frac{\text{AE}}{CF}$. Прирівнюючи цю рівність із попередньою, отримуємо $\frac{AD}{DC} = \frac{\text{AB}}{\text{BC}}$, що і треба було довести.

Доведення (за підручником А.Г. Мерзляка, [1] стор. 79)

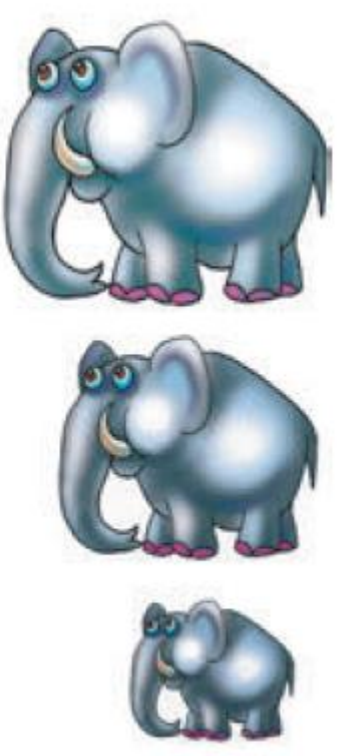


На рисунку BD - бісектриса трикутника ABC. Доведемо, що $\frac{AD}{DC} = \frac{\text{AB}}{\text{BC}}$.

Через точку C проведемо пряму, паралельну прямій BD. Нехай проведена пряма перетинає пряму AB в точці E. Кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих BD і CE та січній BC; кути 3 і 4 рівні як відповідні при паралельних прямих BD і CE та січній AE. Оскільки BD - бісектриса трикутника ABC, то $\angle 4 = \angle 1$. Звідси $\angle 2 = \angle 3$. Тоді трикутник CBE рівнобедрений з рівними сторонами BC і BE. За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{\text{AD}}{\text{AB}} = \frac{DC}{\text{BC}}$.

Поняття пропорційних відрізків вводитися описово з використанням раніше вивченого факту (про ставлення двох відрізків), і розглядається конкретний приклад на застосування нового означення. Далі зазначається, що поняття пропорційності може вводитися і для великого числа відрізків.

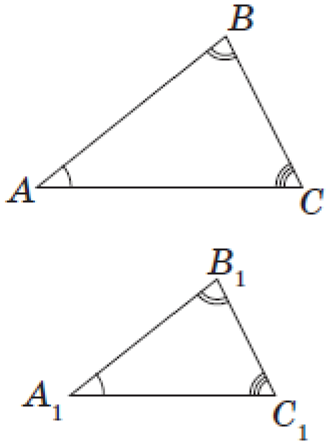
Перш ніж ввести означення подібних трикутників пропонується розібратися з подібністю в реальному і повсякденному житті, і з подібністю фігур в геометрії взагалі.



Означення. Два трикутники називаються подібними, якщо кути одного з них відповідно дорівнюють кутам іншого і відповідні сторони цих трикутників пропорційні.

Після цього використовуючи рисунок двох трикутників і рівність кутів описово вводитися означення подібних сторін. Після словесної формулювання пропонується інший запис з використанням буквеної символіки, таким чином, подібність трикутників дається не на основі перетворення подібності, а через рівність кутів і пропорційності подібних сторін. Нехай трикутники ABC і $A_1B_1C_1$.



У цьому записі, як і в запису рівності трикутників, назви трикутників будемо записувати так, щоб вершини рівних кутів вказувалися в порядку відповідності.

Якщо $\Delta\, ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$

Число k, що дорівнює відношенню відповідних сторін подібних трикутників, називається коефіцієнтом подібності.

7.2. Методика вивчення ознак подібних трикутників.

Підхід до доведення ознак подібності трикутників у двох підручниках однаковий. На їх основі можна довести багато цікавих і важливих властивостей геометричних фігур. Йдеться про властивості прямокутного трикутника, відрізків у колі та таке інше.

Також у якості опорних задач представлені властивості подібних трикутників:

- відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності;
- відношення відповідних лінійних елементів (бісектрис, медіан, висот тощо) подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності;
- відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

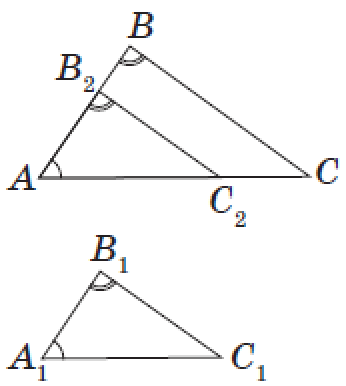
Для встановлення подібності трикутників, як і для встановлення їх рівності, не обов`язково перевіряти всі співвідношення сторін і кутів згідно з означенням - достатньо перевірити лише деякі з них.

Перш ніж доводити ознаки подібності трикутників, доцільно звернути увагу учнів, що ці доведення виконуються за однаковою схемою або за одним і тим же самим планом. Проілюструвати цю схему можна на доведенні першої ознаки. Це дасть можливість залучити учнів до колективного доведення двох інших ознак.

Для мотивування введення теореми треба провести практичну роботу з учнями. Кожен учень отримує по два трикутника, вирізані з паперу. Учитель повідомляє, що у цих трикутників рівні за два кути. Просить, виміряти відповідні сторони кожного трикутника і перевірити чи подібні вони за означенням. Результат виходить позитивний. Будуємо гіпотезу, що два трикутника подібні, якщо у них два кути рівні.

Теорема. Якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

При пошуку шляху доведення теореми учитель повідомляє план доведення, а саме: 1) будуємо третій трикутник в заданому розташуванні, рівний меншому з двох даних трикутників; 2) доводимо, що третій трикутник подібний до першого, більшого трикутника; 3) робимо висновок.



Доведення

1) Нехай дано ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$, в яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Із теореми про суму кутів трикутника вочевидь випливає, що $\angle C = \angle C_1$. Від точки A на промені AB відкладаємо відрізок $AB_2 = AB_1$ і через точку B_2 проводимо B_2C_2

∥ BC. Тоді $\angle ABC = \angle AB_2C_2$ як відповідні при паралельних прямих і січної, тому $\Delta AB_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ за другою ознакою, звідки $AC_2 = A_1C_1$.

2) За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$, отже $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$ ($AB_2 = AB_1$по побудові, $AC_2 = A_1C_1$ по доведеному). Аналогічно доводимо, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

3) Таким чином за означенням подібних трикутників $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

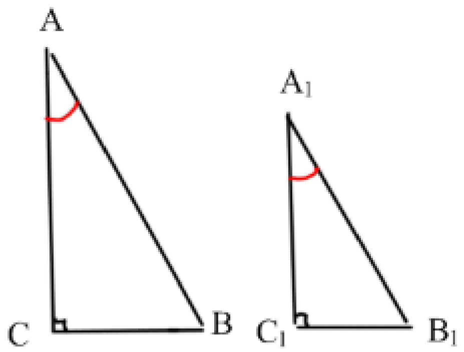
З другою і третьою ознаками подібності трикутників працюємо аналогічно роботі з другою і третьою ознаками рівності трикутників. Повідомляємо учням, що план доведення той самий і школярі самостійно доводять другу і третю ознаки подібності трикутників. При цьому вчитель ставить учням цілеспрямовані питання, якими він керує ходом доведення.

7.3. Методика вивчення ознак прямокутних трикутників.

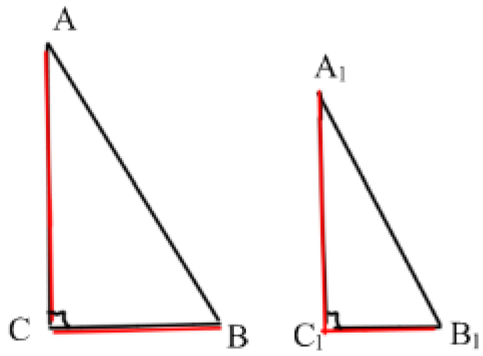
Ознаки подібності прямокутних трикутників наведені в підручнику [2], а в підручнику [1] вони відсутні.

Так як учні знайомі з ознаками подібності трикутників, то можуть самостійно (під керівництвом учителя) сформулювати ознаки подібності прямокутних трикутників, причому в підручнику [2] формулюється лише одна ознака, а дві інші розглядаються як задачі. Але треба зауважити, що в підручнику звертають увагу учнів на ці задачі. вказуючи їх номери.

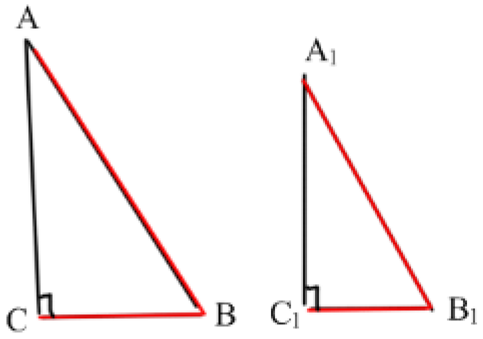
*Теорема:*Якщо два прямокутні трикутники мають по рівному куту, то вони подібні.



Теорема: Якщо два прямокутні трикутники мають пропорційні катети, то вони подібні.



Теорема: Якщо два прямокутні трикутники мають пропорційні гіпотенузи і катети, то вони подібні.



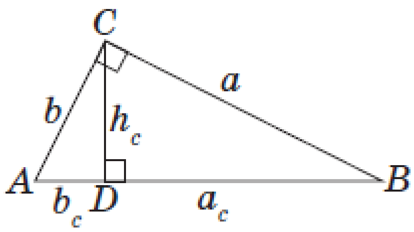
Крім цього матеріалу параграф підручника [2] містить ще дуже важливий матеріал - пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику. Спочатку вводиться означення середньо пропорційного відрізка і доводиться теорема (метричні співвідношення в прямокутному трикутнику)

Теорема. В прямокутному трикутнику:

а) висота, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу: $h_c^2 = a_c \cdot b_c$;

б) катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і його проекцією на гіпотенузу: $a^2 = c \cdot a_c$ і $b^2 = c \cdot b_c$;

в) висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює добутку катетів, поділеному на гіпотенузу: $h_c = \frac{ab}{c}$.



Доводити теорему слід проблемним методом навчання. Учитель звертає увагу учнів, що вивчається тема "Ознаки подібності прямокутних трикутників". Тому очевидно теоретичною основою в доведенні повинні стати ці ознаки. Шукаємо подібні прямокутні трикутники, в які входять відрізки, записані в ув'язненні теореми.

7.4. Теорема Піфагора та наслідки з неї.

Теорема Піфагора – одна з найвідоміших геометричних теорем, котра встановлює, що в прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Більшість науковців вважають, що теорема Піфагора була доведена давньогрецьким математиком і філософом Піфагором (або Пітагором). Проте є версія, що теорему знали і до його народження. Доказом цього є те, що в

Стародавньому Єгипті знали, що трикутник, в якого сторони мають 3 см, 4 см і 5 см, є прямокутним.

Теорема: в прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Найпростіший доказ теореми отримуємо в найпростішому випадку рівнобедреного прямокутного трикутника. Ймовірно, з нього й починалася теорема. Справді, досить просто подивитися на мозаїку рівнобедреник прямокутних трикутників (Рис. 1), щоб переконатися в справедливості теореми. Наприклад, для *ABC:* квадрат, побудований на гіпотенузі *AC,* містить 4 вихідні трикутники, а квадрати, побудовані на катетах, — по два. Теорема доведена!

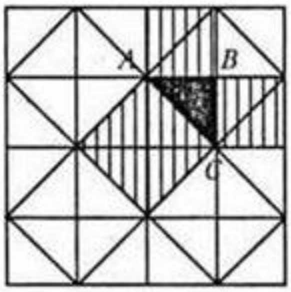


Рис.1

Давньокитайський доведення

Математичні трактати Давнього Китаю дійшли до нас у редакції II ст. до н. е. Справа в тому, що в 213 р. до н. е. китайський імператор Ші Хуан-Ді, прагнучи знищити колишні традиції, наказав спалити всі давні книги. У II ст. до н. е. у Китаї був винайдений папір і одночасно почалося відтворення давніх книг. Так виникла "Математика в дев'яти книгах" — головний зі збережених математико-астрономічних творів, у якому поміщене креслення (Рис.. 2.а), що доводить теорему Піфагора.

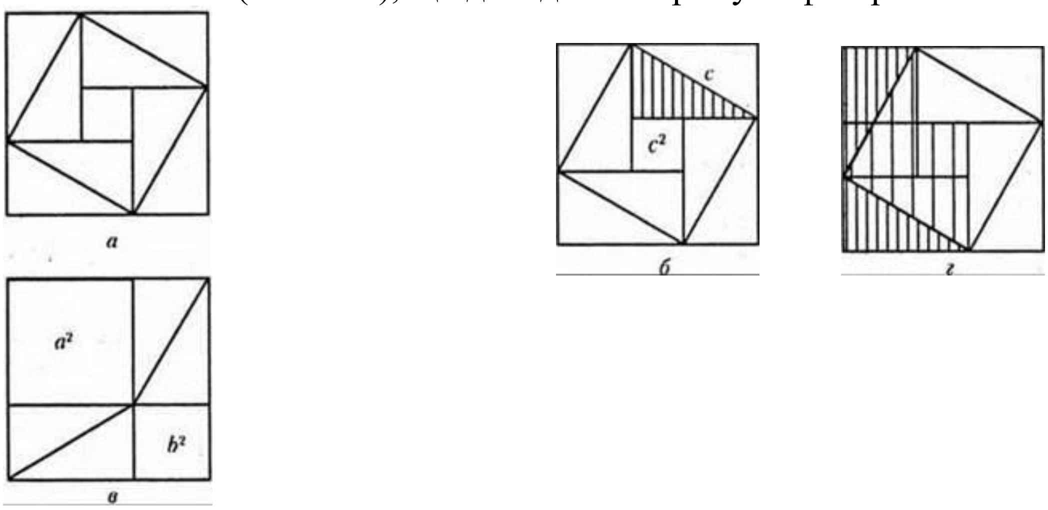


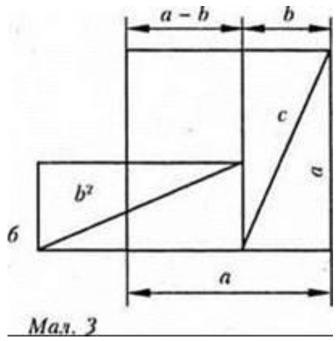
Рис. 2

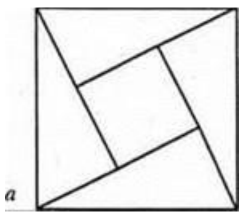
Ключ до цього доведення підібрати неважко. Справді, на давньокитайському кресленні чотири рівні прямокутні трикутники з катетами *a, b* і гіпотенузою *c* покладені так, що їхній зовнішній контур утворює квадрат зі стороною *a + b,* а внутрішній — квадрат зі стороною с, побудований на гіпотенузі (Рис. 2.б). Якщо квадрат зі стороною с вирізати й 4 трикутники, що залишилися, помістити у два прямокутники (Рис. 2.в), то зрозуміло, що порожнеча, яка утворилася, з одного боку, дорівнює c^2, а з іншого боку — $a^2 + b^2$, тобто $c^2 = a^2 + b^2$. Теорема доведена.

Зауважимо, що при такому доведенні не використовуються побудови усередині квадрата на гіпотенузі, які ми бачимо на давньокитайському кресленні (Рис. 2.а). Очевидно, давньокитайські математики мали інший доказ. Якщо у квадраті зі стороною с два трикутники Відрізати й прикласти гіпотенузами до двох інших гіпотенуз (Рис. 2.г), то легко виявити, що отримана фігура, яку іноді називають «крісло нареченої», складається з двох квадратів зі сторонами *a* й *b*, тобто $c^2 = a^2 + b^2$.

Давньоіндійське доведення

Математики Давньої Індії помітили, що для доказу теореми Піфагора досить використовувати внутрішню частину давньокитайського креслення.





У написаному на пальмових листах трактаті "Сіддхаута широмані" ("Вінець знання") найбільшого індійського математика XII ст. Бхаскари поміщене креслення (Рис. 3.а) з характерним для індійських доказів словом "дивися!". Як бачимо, прямокутні трикутники покладені тут гіпотенузою назовні й c^2 перетворюється в "крісло нареченої" $a^2 - b^2$ (Рис. 3.б). Зауважимо, що часткові докази теореми Піфагора (наприклад, побудова квадрата, площа якого вдвічі більша площі цього квадрата) зустрічаються в давньоіндійському трактаті "Сульва сутра" (VII-V ст. до н. е.).

Доказ Евкліда наведений у реченні 47 першої книги «Начал». На гіпотенузі й катетах прямокутного трикутника *ABC* будуються відповідні квадрати (Рис. 4) і доводиться, що прямокутник *BJLD* рівновеликий квадрату *ABFH*, а прямокутник *JCEL* — квадрату *ACKG*. Тоді сума квадратів на катетах дорівнює квадрату па гіпотенузі.

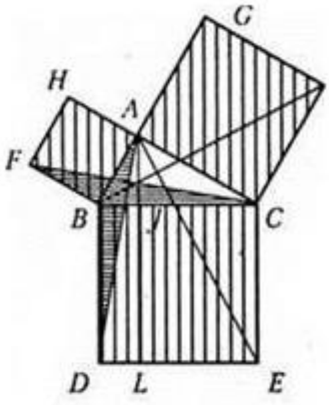


Рис.4

Справді, затушовані на рисунку трикутники *ABD* і *BFC* рівні за двома сторонами і кутом між ними: *FB* = *AB*, *BC*=*BD* і P_{FBC} = *d* + P_{ABC} = P_{ABD} (де *d* — діагональ квадрата *ABFH).* Але S_{ABD} = 1/2 S_{ABFH}, тому що в трикутника *ABD* і прямокутника *BJLD* спільна основа *BD* і спільна висота *LD.* Аналогічно S_{FBD} = 1/2 S_{ABFH} *(BP* — спільна основа, *AB* — спільна висота). Звідси, з огляду на те, що S_{ABD} = S_{FBC}, маємо S_{BJLD} = S_{ABFH}. Аналогічно, використовуючи рівність трикутників *BCK* і *ACE,* доводиться, що S_{JCEL} = S_{ASKG}. Отже, S_{ABFH} + S_{ASKG} = S_{BJLD} + S_{JCEL} = S_{RCED} , що було потрібно довести.

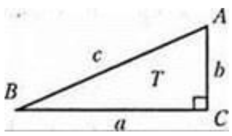
Доведення Евкліда в порівнянні з давньокитайским або давньоіндійським є складним. Через це його нерідко називали "ходульним" і "надуманим". Але така думка є поверховою. Теорема Піфагора в Евкліда є заключною ланкою в ланцюзі речень 1-ої книги «Начал». Для того щоб логічно бездоганно побудувати цей ланцюг, щоб кожний крок доказу грунтувався на раніше доведених реченнях, Евкліду потрібний був саме обраний ним шлях.

Уже давно була винайдена головоломка, яка називається сьогодні "Піфагор". Не важко переконатися в тому, що в основі семи частин головоломки лежать рівнобедрений прямокутний трикутник і квадрати, побудовані па його катетах, або, інакше кажучи, фігури, які складені з 16 однакових рівнобедрених прямокутних трикутників і поміщаються в квадрат. Не лише незначна частина багатств, схованих у перлині античної математики — теоремі Піфагора. Далі розглянемо кілька алгебраїчних доказів теореми.

Доведення теореми Піфагора

Доведення 1

Нехай T — прямокутний трикутник з катетами *a,* *b* і гіпотенузою *c* (Рис. 5.а). Доведемо, що $c^2 = a^2 + b^2$.



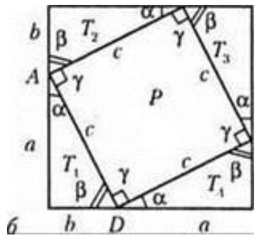


Рис.5

Побудуємо квадрат Q зі стороною $a + b$ (Рис. 5.б). На сторонах квадрата Q візьмемо точки A, B, C, D так, щоб відрізки AB, BC, CD, DA відтинали від квадрата Q прямокутні трикутники T_1, T_2, T_3, T_4 з катетами a і b. Чотирикутник $ABCD$ позначимо буквою P. Покажемо, що P — квадрат зі стороною c.

Усі трикутники T_1, T_2, T_3, T_4 дорівнюють трикутнику T (за двома катетами). Тому їхні гіпотенузи дорівнюють гіпотенузі трикутника T, тобто відрізку c. Доведемо, що всі кути цього чотирикутника прямі.

Нехай α і β — величини гострих кутів трикутника T. Тоді, як вам відомо, $\alpha + \beta = 90°$. Кут γ при першині A чотирикутника P разом з кутами, що дорівнюють α і β, складає розгорнутий кут. Тому $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. І оскільки $\alpha + \beta = 90°$, то $\gamma = 90°$. Так само доводиться, що й інші кути чотирикутника P прямі. Отже, чотирикутник P— квадрат зі стороною c.

Квадрат Q зі стороною $a + b$ складається з квадрата P зі стороною c і чотирьох трикутників, що дорівнюють трикутнику T. Тому для їхніх площ виконується рівність $S(Q) = S(P) + 4S(T)$.

Оскільки $S(Q) = (a + b)^2$; $S(P) = c^2$ і $S(T) = 1/2(ab)$, то, підставляючи ці вирази в $S(Q) = S(P) + 4S(T)$, одержуємо рівність $(a + b)^2 = c^2 + 4(1/2)ab$.

Оскільки $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, то рівність $(a + b)^2 = c^2 + 4(1/2)ab$ можна записати так: $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$.

З рівності $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$ випливає, що $c^2 = a^2 + b^2$. Що й було потрібно довести.

Доведення 2

Нехай ABC — даний прямокутний трикутник із прямим кутом C. Проведемо висоту CD з вершини прямого кута C (Рис. 6).

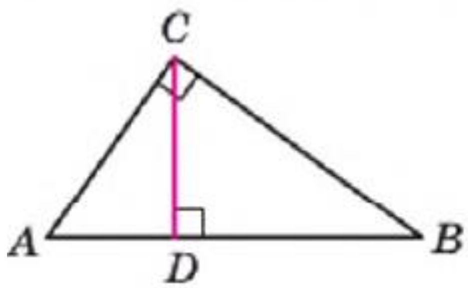


Рис. 6

За означенням косинуса кута (косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи) $cosA = AD/AC = AC/AB$. Звідси

$AB \cdot AD = AC^2$.

Аналогічно $\cos B = BD/BC = BC/AB$. Звідси $AB \cdot BD = BC^2$. Складаючи отримані рівності почленно й зауважуючи, що $AD + DB = AB$, одержимо: $AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2$. Теорема доведена.

Значення цієї теореми полягає насамперед у тому, що з неї або з її допомогою можна вивести більшість теорем геометрії. Нажаль, неможливо навести тут всі або навіть найкрасивіші доведення теореми, однак хочеться сподіватися, що наведені приклади переконливо свідчать про величезний інтерес до теореми Піфагора як у сивій давнині, так і сьогодні.

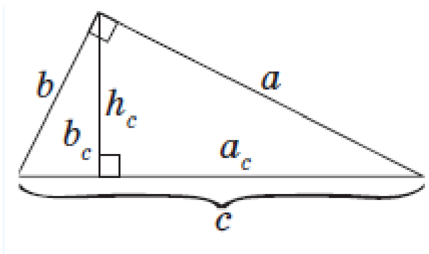
Теорема Піфагора в підручниках [1; 2] доводиться однаково на підставі метричних співвідношень в прямокутному трикутнику. Різниця за підручниками складається тільки в розміщенні.

У підручнику [1] теорема Піфагора вивчається в параграфі "Розв`язування прямокутних трикутників", який йде після вивчення подібності. У підручнику [2] теорема Піфагора вивчається в параграфі "Подібність трикутників". Крім того в цьому підручнику звертається увага учнів на теорему, обернену до теореми Піфагора. Доведення її не складне.

Наприклад, доведення теореми Піфагора з а підручником [1].

Теорема: Квадрат гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює сумі квадратів катетів.

Доведення



Згідно з доведеними метричними співвідношеннями, у прямокутному трикутнику з катетами a і b та гіпотенузою c $a^2 = c \cdot a_c$; $b^2 = c \cdot b_c$.

Складаючи ці рівності почленно, маємо $a^2 + b^2 = c \cdot (a_c + b_c) = c^2$.Теорему доведено.

7.5. Застосування подібності трикутників.

Вчителю слід наголосити на тому, що під час розв`язування задач, які передбачають застосування ознак подібності трикутників, вибір певної ознаки слід робити самому учневі, виходячи з умови задачі та своїх знань. Тому для успішного розв`язування задач на подібність трикутників учням, крім сталих знань змісту окремих ознак подібності трикутників та наслідків із них, слід оволодіти вміннями вибирати ознаку чи наслідок відповідно до умови задачі.

Усвідомлення, повторення та систематизація знань учнів про зміст означення та ознак подібності трикутників можна провести в такій формі: до уваги учнів пропонується рисунок, за яким вони виконують завдання - до кожного з рисунків скласти відповідне твердження (означення чи якусь із ознак подібності трикутників). Для того, щоб залучити до роботи якомога більше учнів, можна організувати роботу в малих групах. У такому разі спочатку завдання виконується в групах, а потім результати виконання завдання презентуються та корегуються.

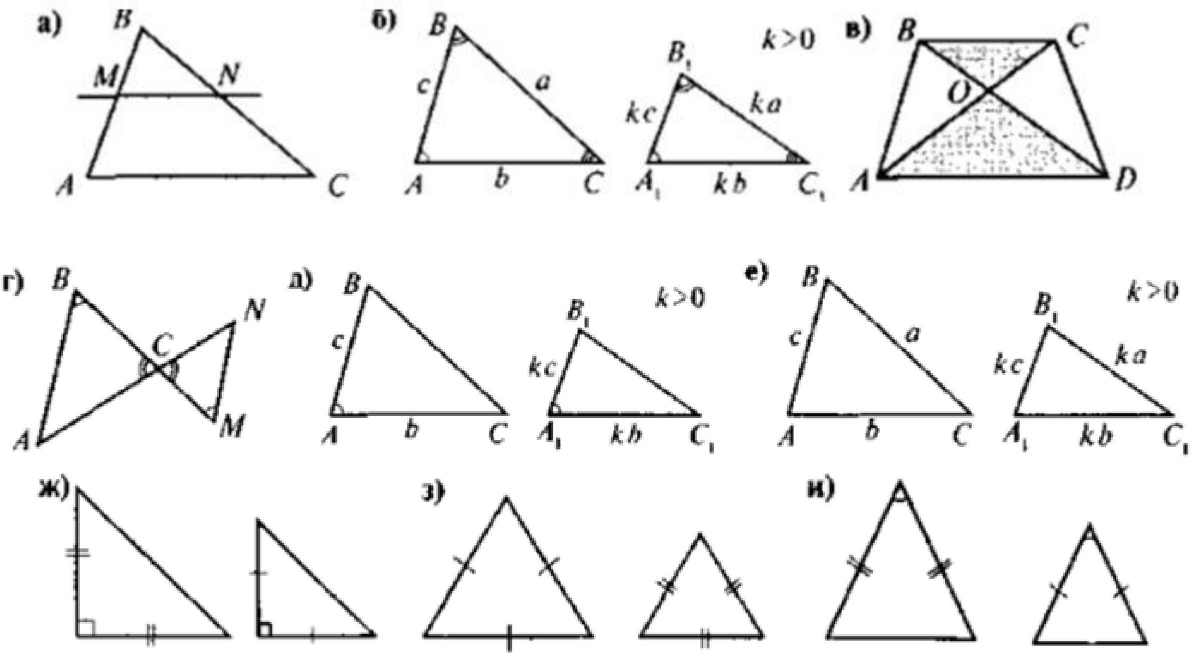


Рис.

Відпрацювання знань.

Застосування знань у стандартних ситуаціях.

1. За даним рисунком доведіть, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

2. На Рис.2 знайдіть трикутники, які подібні ΔABC і доведіть їхню подібність.

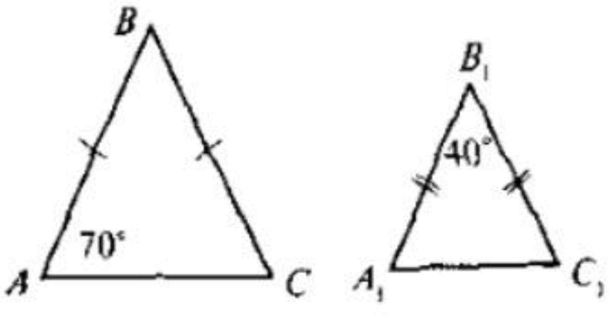


Рис. 1

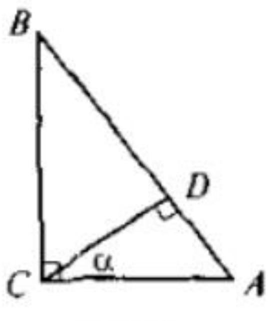


Рис. 2

3. Знайдіть на Рис.3 всі пари подібних трикутників і доведіть їхню подібність.

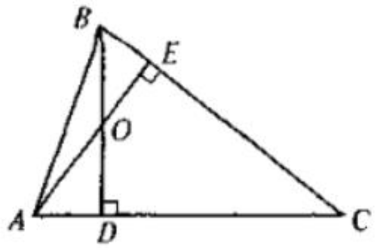


Рис. 3

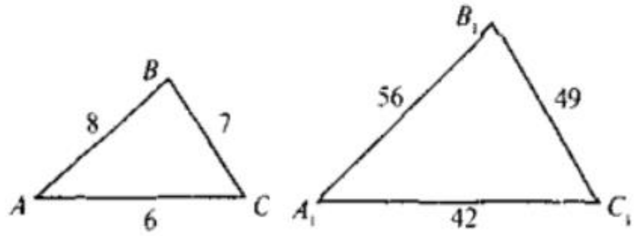


Рис. 4

4. За даними Рис.4, доведіть, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

5. На Рис.5 знайдіть трикутники, які подібні ΔABC і доведіть їхню подібність.

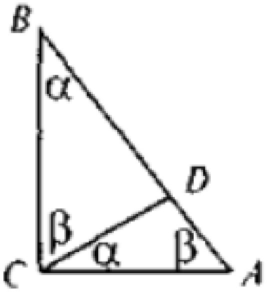


Рис. 5

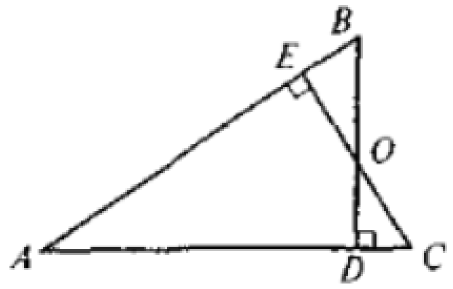


Рис. 6

6. На Рис.6 знайдіть всі пари подібних трикутників і доведіть їхню подібність.

Застосування знань у нестандартних ситуаціях.

1. У трикутнику ABC (Рис.7) вписано ромб AKLM. Знайдіть периметр ромба, якщо BK = 4 см, MC = 9 см.

2. Діагоналі трапеції точкою перетину діляться у відношенні 3 : 7. Знайдіть основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 10 см.

3. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника з периметром 16 см, якщо медіана, проведена до основи, дорівнює 4 см.

Рис.7

4. Периметр рівнобедреної трапеції дорівнює 1 м, а різниця основ складає 14 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в трапецію.

5. Катет прямокутного трикутника дорівнює 32 см. Точка, що лежить на цьому катеті, віддалена від кінців гіпотенузи на 25 см. Знайдіть периметр трикутника.

Під час розв'язування задач слід вимагати від учнів виділення ключового теоретичного факту, який лежить в основі розв'язання, а тому визначає вид задачі. Таким чином, наприкінці уроку складається список типових задач розділу та відповідні ключі до їх розв'язання. Отже, досягається мета етапу систематизації вмінь.

Тема 8. Методика вивчення многокутників. Площі многокутників.

8.1. Вступні зауваження.

Згідно до діючої програми тема "Многокутники." вивчається у два етапи: в 8 класі розглядається тема "Многокутники. Площі многокутників", основний зміст якої складають відомості про опуклі многокутники, його елементи, суму кутів опуклого многокутника; вивчаються вписані й описані многокутники; розглядаються поняття площі многокутника, основні властивості площі, теореми про площі окремих видів многокутників (прямокутника, паралелограма, трикутника, трапеції).

На другому етапі, вже в 9 класі окремо вивчаються правильні многокутники, формули радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників, побудова правильних многокутників, після чого розглядаються довжина кола і площа круга та його частин.

Внаслідок вивчення многокутників учні повинні знати означення многокутника, плоского, опуклого, правильного многокутників, теорему про суму кутів опуклого многокутника і факт, що правильний опуклий многокутник є вписаним в коло і описаним навколо кола, що дає можливість встановити залежність між стороною і радіусами відповідно вписаного і описаного многокутників.

Учні повинні знати алгоритми побудови вписаних і описаних: правильного трикутника, квадрата, правильного шестикутника. Ці вміння знадобляться учням при виконанні зображень правильних пірамід, призм, їх комбінацій з тілами обертання в курсі стереометрії.

8.2. Многокутники (означення, види многокутників, їх властивості).

Термін "многокутник" в геометричній науці використовуються для назви двох різних фігур: 1) простої замкненої ламаної і 2) частини площини, обмеженої такою ламаною. Така двозначність не призводить до непорозумінь, оскільки з тексту завжди зрозуміло, про яку фігуру йдеться.

В підручнику [1] для означення многокутника використовується другий підхід. Означення вводиться описово.

Означення. Розглянемо фігуру, яка складається з точок A_1, A_2, ..., $A_п$ і відрізків A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{п-1}A_п$, $A_пA_1$ таких, що жодні два сусідніх відрізки не лежать на одній прямій і ніякі два несусідніх відрізки не мають спільних точок (Рис.1). Фігур~~а~~, утворена цими відрізками, обмежує частину площини, виділену на рисунку 2 зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{п-1}A_п$, $A_пA_1$ називають многокутником.

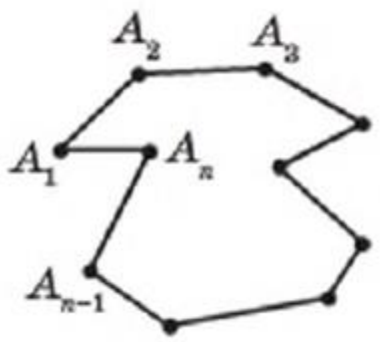


Рис.1

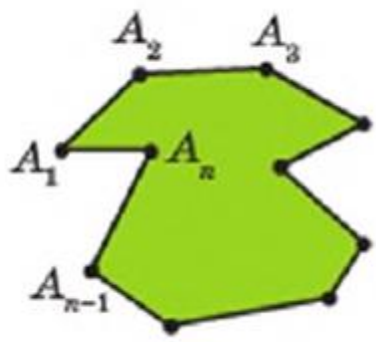


Рис.2

В підручнику [2] для означення многокутника використовується перший підхід.

Означення. Розглянемо фігуру, яка складається з точок A_1, A_2, ..., $A_п$ і відрізків A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{п-1}A_п$, $A_пA_1$ таких, що жодні два сусідніх відрізки не лежать на одній прямій і ніякі два несусідніх відрізки не мають спільних точок. Таку фігур~~у~~, називають многокутником (Рис.3). А ось рисунок виконаний по першому підходу

.

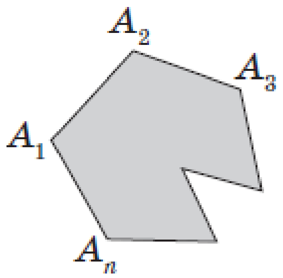


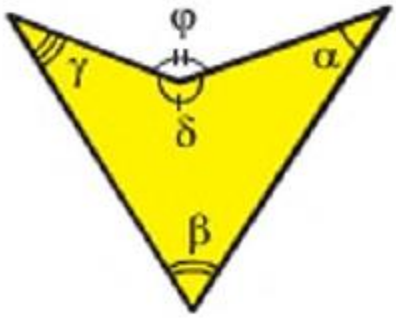
Рис.3

Для того, щоб позначати якось частину площини, обмежену такими відрізками, автори [2] вводять поняття *внутрішньої області многокутника* (за аналогією з поняттям внутрішньої області чотирикутника) і при цьому зазначають, що *фігуру, що складається із многокутника та його внутрішньої області також називають многокутником*. Тобто, передбачається, що із контексту буде зрозуміло, про який саме многокутник йде мова в задачі або теоретичному матеріалі.

На нашу думку, означення многокутника треба давати другим підходом, як частини площини, обмеженої замкнутою ламаною лінією. Інакше, що тоді мати на увазі під площею многокутника.

Одночасно вводились і допоміжні поняття – елементи многокутника: вершини, сторони, кут, діагоналі многокутника, периметр многокутника.

Наприклад, автори [1] *під кутом (будь-якого) многокутника* розуміють кут, що утворився двома сусідніми сторонами многокутника, причому кути α, β, γ, δ є кутом многокутника, а кут φ- ні.



Далі вводимо означення *опуклого многокутника як такого, що лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, яка містить його сторону.*

Поняття опуклого многокутника розглядається за аналогією з поняттям опуклого чотирикутника: *многокутник, всі кути якого менше розгорнутого, називається опуклим*. Із такого означення випливають наступні властивості:

1) опуклий многокутник розташований в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону;

2) опуклий многокутник містить будь-яку свою діагональ.

Автори зазначають, що оскільки жоден не опуклий многокутник таких властивостей не має, то їх можна розглядати як ознаки опуклості многокутника.

У зв'язку з означенням опуклого многокутника треба ввести поняття внутрішніх і зовнішніх його кутів, а також поняття вписаного і описаного многокутника. Це сприймається учнями легко, бо вони мали вже досвід з описаним і вписаним трикутником.

Отже, розглядання теми "Многокутники" за підручниками [1; 2] переобтяжене значною кількістю понять. Однак специфіка понять, пов’язаних з многокутниками, така, що їх суттєві властивості сприймаються учнями, як правило, без особливих труднощів.

Далі за підручниками [1; 2] розглядається ключова теорема про суму кутів опуклого n-кутника.

Доведення цієї теореми не складне, головне направити учнів на те, що кожен опуклий многокутник можна розбити на трикутники и сума кутів в кожному трикутнику відома.

8.3. Правильні многокутники.

Правильні многокутники вивчаються у 9 класі. В підручниках [1; 2] даються різні означення правильного многокутника.

У підручнику А.П. Єршової дається таке означення.

Означення. Правильним многокутником називається опуклий многокутник, у якого всі сторони рівні і всі кути рівні.

Одразу в означені вказується, що правильний многокутник - це *опуклий* многокутник.

У підручнику [1] дається таке означення.

Означення. Многокутник називається правильним, якщо у нього всі сторони рівні і всі кути рівні.

Далі йде *теорема*: правильний многокутник є опуклим многокутником.

Доведення цієї теореми буде дано в підручнику набагато пізніше.

На нашу думку, краще діяти по підручнику А.П. Єршової.

Далі викладання матеріалу йде однаково в обох підручниках. Розглядається формула величини кута правильного многокутника $\alpha_п = \frac{n-2}{n}180$, вивчається теорема про вписане і описане коло правильного многокутника, вводиться означення центрального кута правильного многокутника, виводяться формули радіусів вписаного і описаного кіл правильного многокутника, виводяться формули довжини кола, дуги і площі круга.

Теорема стосується можливості вписати правильний многокутник в коло і описати правильний многокутник навколо кола. Причому як наслідок з теореми випливає, що вписане й описане кола правильного многокутника мають той самий центр. Досвід показує, що доведення цієї теореми не викликає в учнів труднощів.

Вивід формул не складний, формули знаходяться з рівнобедреного трикутника. Це загальні формули, вони використовуються в рішенні задач, але не так часто, як окремі формули для кожного конкретного правильного многокутника. Тому далі йде таблиця (наслідок з теореми), в якій є конкретні формули R, r для правильного трикутника, чотирикутника, шестикутника. Побудова правильних многокутників розглядається не для обов`язкового вивчення в підручнику [1] і для обов`язкового вивчення в підручнику [2]. Вчителю треба діяти виходячи з програми і рівня класу.

Отримати наочне уявлення про довжину кола досить просто - для цього досить, наприклад, уявити. що коло - це металевий обруч, який можна розрізати в довільній точці А і розпрямити. Отримаємо відрізок AA_1, довжина якого і є довжиною кола.

Дати строге означення довжині кола значно складніше. Даєте описову уявлення про довжину кола, розглядаючи послідовно вписані в коло правильні n-кутники. Периметр будь-якого з них може вважатися наближеним значенням довжини кола. При необмеженому зростанні числа n такі n-кутники все ближче "прилягають" до кола, а їх периметри все менше відрізняються від довжини кола.

Отже, визначаємо довжину кола як величину, до якої прагнуть периметри правильних n-кутників, вписаних в дане коло, при необмеженому зростанні числа n.

Перш ніж представити формулу довжини кола, розглядається важлива допоміжна теорема.

Теорема. Відношення довжини кола до його діаметру не залежить від кола, тобто це відношення одне і теж для любих кіл.

Зауважимо, що доведення теореми (*відношення довжини кола до його діаметра не залежить від кола, тобто одне і те саме для будь-яких двох кіл*), з якої безпосередньо випливає формула довжини кола, виходить за рамки шкільного курсу геометрії. Тому приводиться лише загальна схема міркувань. Звідки маємо, що $\frac{C}{2R} = \pi$. Тоді довжина кола С = $2\pi R$, довжина дуги l = $\frac{\pi R}{180}\alpha$.

Доведення формули площі круга теж виходить за рамки шкільного курсу геометрії. Тому також приводиться лише загальна схема міркувань. Звідки маємо, що S = πR^2.

8.4. Методика вивчення виводу формул площ многокутника, паралелограма, трикутника і трапеції.

У курсі планіметрії на основі наочних, інтуїтивних уявлень про площу, які учні дістали в 1-6 кл., теоретичні відомості про площі фігур будуються на дедуктивній основі. Поняття площі в 8 кл. в підручниках [1; 2] вводиться шляхом означення (в підручнику [1] виділено словом "означення", в підручнику [2] не виділено), при цьому в тлумаченні всіх геометричних величин і в розумінні їх вимірювання здійснювався єдиний підхід:

1) рівні фігури мають рівні величини (довжини, міри кута, площі, об’єми);

2) якщо фігура розбивається на частини, то відповідна цій фігурі величина (довжина, міра кута, площа, об’єм) дорівнює сумі відповідних величин її частин;

3) існує одиниця вимірювання, тобто фігура, відповідна величина якої береться за одиницю (одиничний відрізок, центральний кут в 1°, квадрат і куб, сторони яких є одиничним відрізком).

Три наведені властивості називають аксіомами величин (нас цікавлять площі).

На основі такого підходу в підручниках [1; 2] в 8 кл. розглядають:

- ✓ поняття площі многокутника;
- ✓ основні властивості площ;
- ✓ площі прямокутника, паралелограма, трикутника, трапеції.
- ✓ В обох підручниках вводиться означення рівновеликих і рівноскладених многокутників.

В підручнику [1] для доведення формули площі прямокутника розглядають допоміжну лему: площа квадрата зі стороною $\frac{1}{n}$ од. (n - натуральне число) дорівнює $\frac{1}{n^2}\,од.^2$.

Доведення

Розглядаємо одиничний квадрат і поділимо його на n^2 рівних квадратів зі стороною $\frac{1}{n}$. З означення площі многокутника (властивість 1) випливає, що всі ці квадрати мають рівні площі. За властивістю 2 сума площ цих квадратів дорівнює площі одиничного квадрата, тобто $1од.^2$ Тому площа кожного маленького квадрата дорівнює $\frac{1}{n^2}\,од.^2$.

Далі доводиться формула для знаходження площі прямокутника зі сторонами a і b, коли його сторони - раціональні числа. На основі розглянутої вище леми доведення теореми не важке. Випадок. коли сторони прямокутника - ірраціональні числа в шкільному курсі не розглядається.

У підручнику [2] додаткової леми немає і формула площі прямокутника строго не доводиться. Приводяться міркування, на яких грунтується доведення цієї теореми. Повне її доведення наводиться в Додатку 1.

За яким підручником навчати учнів в цій темі? На нашу думку додаткова лема і доведення формули площі прямокутника в підручнику [1] перевантажено. Для обов`язкового рівня навчання досить доведення в підручнику [2].

Доведення формули для знаходження площі паралелограма відбувається за допомогою формули для знаходження площі прямокутника, а формули для знаходження площі трикутника, в свою чергу, – за допомогою формули для знаходження площі паралелограма.

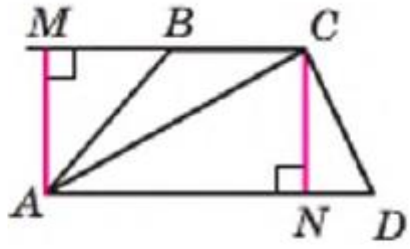
Виводячи теорему про площу паралелограма, часто показують, що паралелограм можна розрізати на дві частини і з них скласти прямокутник з тією самою основою і висотою, звідки і дістають формулу.

Щоб вивести формулу площі трикутника, найкраще до даного трикутника добудувати рівний йому так, щоб утворився паралелограм, при цьому обґрунтувати відповідну додаткову побудову: ми знаємо тільки формули площ прямокутника і паралелограма, то ж до чого потрібно звести знаходження площі трикутника?

При вивченні теореми пор площу трапеції можна запропонувати учням самостійно відшукати потрібне доведення, опираючись на рисунок, застосовуючи при цьому дослідницький метод.

Після виведення формули площі трикутника слід розглянути наслідки.

Наслідок 1: Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів: $S = \frac{1}{2}ab$, де a і b — катети прямокутного трикутника.



Наслідок 2: Площа ромба дорівнює половині добутку його діагоналей: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$, де d_1 і d_2 — діагоналі ромба.

Наслідок 3 : Площа рівностороннього трикутника зі стороною a обчислюється за формулою: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Також в цій темі розглядається відношення площ подібних трикутників.

Продовження вивчення площ многокутників триває в 9 класі в темі "Рішення трикутників" після вивчення тригонометричних понять. Виводяться формули площі трикутника і чотирикутника.

Теорема. Площа трикутника дорівнює добутку його двох сторін на синус кута між ними.

При доведенні теореми слід розглядати три випадки: коли трикутник гострокутний, тупокутний і прямокутний.

З теореми виводимо наслідок відносно площі паралелограма.

Формула площі опуклого чотирикутника виводиться у вигляді опорної задачі.

Далі розглядається ще одна формула для площі трикутника - формула Герона - давньогрецького математика Герона Олександрійського, яка названа на його честь. Для доведення теореми використовують вже відому формулу площі трикутника через тригонометричне поняття і наслідок з теореми косинусів (формулу для косинуса кута, який лежить проти шуканої сторони).

8.5. Характеристика системи задач.

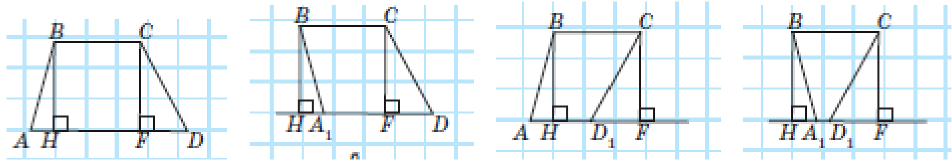
Розв`язання задач на обчислення площ многокутників найчастіше зводиться до пошуку величин окремих елементів розглянутих фігур і подальшого застосування відповідних формул площ.

У багатьох задачах поряд з суто геометричними прийомами рішення (додаткові побудови, застосування рівності фігур і т.п.) використовуються і методи алгебри (складання рівнянь або системи рівнянь на основі метричних співвідношень між елементами фігури).

В ході вирішення особливу увагу слід приділити тому, однозначно чи ці завдання визначають взаємне розташування елементів фігури.

Поняття площі і формули її обчислення можуть застосовуватися навіть у тих задачах, в умовах яких площа не згадується.

Задача. Знайдіть площу трапеції, в якій одна з основ дорівнює 24 см, висота 12 см, а бічні сторони 13 см і 20 см.



Розв'язання

Нехай *BH* і *CF* — висоти даної трапеції, проведені з кінців основи *BC* до іншої основи. Нехай *BC* = 24 см, *BH* = *CF* =12 см. Найпростіше добудувати трапецію *ABCD* так, щоб точки *H* і *F* лежали на основі *AD*.

Але цей варіант — лише один із можливих, адже умова задачі не вказує, чи належать точки *H* і *F* відрізку *AD*. Оскільки з точки поза даною прямою можна провести до цієї прямої дві рівні похилі заданої довжини, то кожну з бічних сторін трапеції можна побудувати двома способами: *AB*= A_1B= 13 см,*CD* = *CD*1= 20 см. Отже, дану трапецію за умовою задачі можна побудувати чотирма різними способами.

За побудовою чотирикутник *HBCF* є прямокутником, звідки *HF* = *BC* = 24 см. Далі розглянемо чотири випадки.

1) Для трапеції *ABCD* (рис. *а*): з трикутника *ABH* з теореми Піфагора *AH* = 5 см, аналогічно з трикутника *DCF* маємо: *DF* = 16 см; тоді *AD* = *AH* +*HF* + *FD* = 45 см,

$SABCD = \frac{24+45}{2}\, 12 = 414$ (см^2).

2) Для трапеції A_1BCD (рис. б): з трикутника A_1BH з теореми Піфагора A_1H = 5 см, аналогічно з трикутника *DCF* маємо: *DF* = 16 см; тоді $A_1D = HF + FD - A_1H$ = 35 см, $SABCD = \frac{24+35}{2}\, 12 = 354$ (см^2).

3) Для трапеції $ABCD_1$ (рис. в): з трикутника *ABH* з теоремою Піфагора АН = 5 с м, аналогічно з трикутника D_1CF маємо: *D*1*F* = 16 см; тоді $A\,D_1 = AH + HF - D_1F$ = 13 см, $SABCD = \frac{24+13}{2}\, 12 = 222$ (см^2)

4) Для трапеції A_1BCD_1 (рис. г): з трикутника A_1BH за теоремою Піфагора A_1H = 5 см, аналогічно з трикутника D_1CF маємо: D_1F = 16 см; тоді A_1D_1 = HF - A_1H - D_1F = 3 см, тобто точки *H*, A_1 , D_1 , *F* розміщені на прямій у вказаному порядку. SABCD = $\frac{24+3}{2}\, 12 = 162$ (см^2).

Відповідь: 414 см^2, або 354 см^2, або 222 см^2, або 162 см^2.

Наведемо цікаву задачу для розв`язування учнями.

Задача. Чому бджоли використовують для побудови вічок на стільниках форму правильного шестикутника?

Розв`язання

З усіх правильних многокутників тільки трикутниками, квадратами і шестикутниками можна заповнити площину без прогалин і накладань. У цих випадках сума кутів, що сходяться в одній вершині, дорівнює 360°: для трикутника - 60° · 6; для квадрата - 90° · 4; для шестикутника - 120° · 3. Тому бджоли повинні були "вибрати" одну з цих фігур.

Порівняємо периметри цих многокутників за умови, що їхні площі рівні: $S_3 = S_4 = S_6$.

Для трикутника маємо $S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $a_3 = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$, $P_3 = 3\ a_3 = \frac{6\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$.

Для квадрата маємо $S_4 = a^2$, $a_4 = \sqrt{S}$, $P_4 = 4\ a_4 = 4\sqrt{S}$.

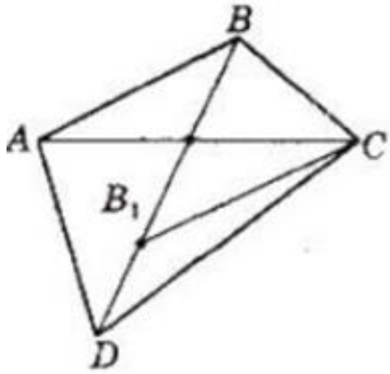
Для шестикутника маємо: $S_6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, $a_6 = \sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}}$, $P_6 = 6\ a_6 = 6\sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}}$.

$P_3 : P_4 : P_6 = \frac{6\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}} : 4\sqrt{S} : 6\sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}} \approx 4{,}6 : 4 : 3{,}7$.

Отже, бджоли, не знаючи математики, інтуїтивно визначили, що правильний шестикутник має найменший периметр серед розглянутих фігур з рівною площею. Будуючи шестикутні вічка, бджоли найбільш ощадливо використовують площу у середині невеликого вулика й віск для виготовлення вічок.

Задача. Діагоналі опуклого чотирикутника розбивають його на чотири трикутники, периметри яких однакові. Визначте вид чотирикутника.

Розв`язання



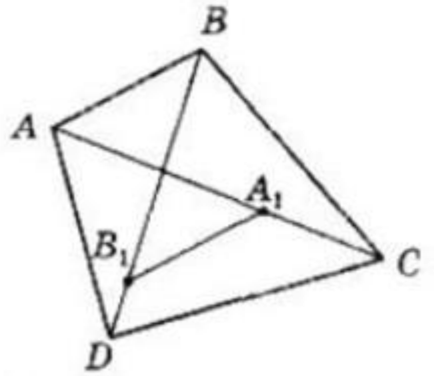
1 випадок. Точка O - середина однієї діагоналі і не є серединою іншої діагоналі. Нехай AO = OC, BO < OD. Позначимо на відрізку OD точку B_1 так, що $OB_1 = OB$.

Оскільки $\Delta ABO = \Delta COB_1$(за двома сторонами і кутом між ними: AO = OC, $OB_1 = OB$, $\angle AOB = \angle COB_1$ як вертикальні), то $AB = CB_1$.

За умовою $P_{\Delta ABO} = P_{\Delta CDO}$ або $AB + AO + OB = OB_1 + B_1D + DC + CO$. Звідси, враховуючи, що AO = OC і $OB_1 = OB$, отримаємо, що $AB = B_1D + DC$ або $CB_1 = B_1D + DC$.

Але в ΔCB_1D $CB_1 < B_1D + DC$. Отримали суперечність, отже перший випадок неможливий.

2 випадок. Точка O не є серединою жодної з діагоналей. Нехай AO < OC, BO < OD.



Позначимо точки A_1 і B_1 на відрізках OC і OD так, що $OA_1 = OA$, $OB_1 = OB$ і розглянемо ΔOA_1B_1.

Оскільки $\Delta AOB = \Delta A_1OB_1$, то $AB = A_1B_1$. За умовою $P_{\Delta ABO} = P_{\Delta CDO}$ або $AB + AO + OB = OB_1 + B_1D + CA_1 + A_1O$. Звідки, враховуючи рівності $A_1O = OA$ і $OB = OB_1$, отримаємо $AB = B_1D + DC + CA_1$ або $A_1B_1 = B_1D + DC + CA_1$. Але в чотирикутнику A_1B_1DC $A_1B_1 < B_1D + DC + CA_1$. Отримали суперечність, значить випадок 2 також не може бути. Отже, AO = OC, BO = OD, тому ABCD - паралелограм. А з умови $P_{\Delta ABO} = P_{\Delta CDO}$ випливає, що AB = BC, тобто сусідні сторони паралелограма рівні. Тоді ABCD - ромб.

Відповідь: ромб.

Також на уроці можна використовувати метод доцільних задач у вигляді кросвордів.

Кросворд.

По горізонталі:

1. Чотирикутник, у якого всі кути прямі.
2. Скільки вершин у многокутнику ABCD?
3. Суміжні сторони прямокутника.
4. Сума довжин усіх сторін многокутника.
5. Кількість пар однакових сторін в прямокутнику.

По вертикалі:

1. Сторони прямокутника рівні між собою.
2. Прямокутник, у якого всі сторони рівні.

								1										2
							1	п	р	я	м	о	к	у	т	н	и	к
								р										в
						2	ч	о	т	и	р	и						а
								т										д
3	п	е	р	п	е	н	д	и	к	у	л	я	р	н	і			р
								л										а
						4	п	е	р	и	м	е	т	р				т
								ж										
								н										
					5	д	в	і										

Кросворд.

1. Якщо всі кути трикутника рівні між собою, то такий трикутник ... *(гострокутний)*.

2. Геометрична фігура, яку можна розбити на нескінченне число плоских трикутників називається ... (*проста)*.

3. Прямокутний трикутник, сторони якого відносяться як 3 : 4 : 5 називається ... *(єгипетський)*.

4. Якщо один кут трикутника дорівнює сумі двох інших кутів, то такий трикутник *...(прямокутний)*.

		1	г	о	с	т	р	о	к	у	т	н	и	й
				2	п	р	о	с	т	а				
			3	є	г	и	п	е	т	с	ь	к	и	й
4	п	р	я	м	о	к	у	т	н	и	й			
				5	к	у	т							
			6	к	о	т	а	н	г	е	н	с		
		7	р	і	в	н	о	в	е	л	и	к	і	
			8	о	д	и	н	и	ц	я				
	9	б	і	с	е	к	т	р	и	с	а			

5. Лупа не збільшує геометричну фігуру *...(кут)*.
6. Відношення косинуса кута до його синуса називається *...(котангенс)*.
7. Трикутники, які мають рівні площі називаються *...(рівновеликі)*.
8. Поняття синус може набувати найбільшого значення *...(одиниця)*.
9. Цент кола, вписаного в трикутник, лежить у точці перетину *...(бісектрис)*.

Для узагальнення і систематизації вивченого матеріалу з теми "Многокутники. Площі многокутників" пропоную розгадати кросворд.

Кросворд.

По горизонталі:

1. Одиниця виміру шляху.

2. Сума довжин усіх сторін.

3. Назва многокутника з шістьма вершинами.

4. Відрізок, що з`єднує дві не сусідні вершини многокутника.

5. Дві несуміжні сторони чотирикутника називаються ... . Або дві вершини, які не є сусідніми, називаються ... .

6. Як називається многокутник, якщо він лежить по одну сторону від кожної прямої, що проходить через дві сусідні вершини.

7. Назва многокутника, сума кутів якого дорівнює 360°.

8. Чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.

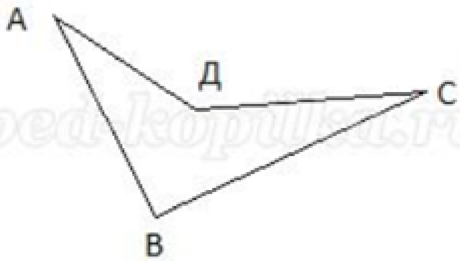
9. Сума кутів будь-якого ... дорівнює 180°.

10. Паралелограм, у якого всі кути прямі.

11. Прямокутник, у якого всі сторони рівні.

12. Як називається трапеція. що має рівні сторони?

13. Вид чотирикутника



15. Скільки сторін має многокутник, кожен кут якого дорівнює 108°.

По вертикалі:

1. Фігура, складена з відрізків AB, BC, CD, ... , EF, FA, так що суміжні відрізки не лежать на одній прямій, а не суміжні відрізки не мають спільних точок.

15. Один з елементів трикутника. Або геометрична фігура, яка складається з двох променів, що мають спільний початок.

16. Скільки сторін має многокутник, кожен кут якого дорівнює 120°.

17. Трапеція, у якої один з кутів прямий.

18. Назва паралельних сторін трапеції.

19. Скільки сторін має многокутник, кожен кут якого дорівнює 60°.

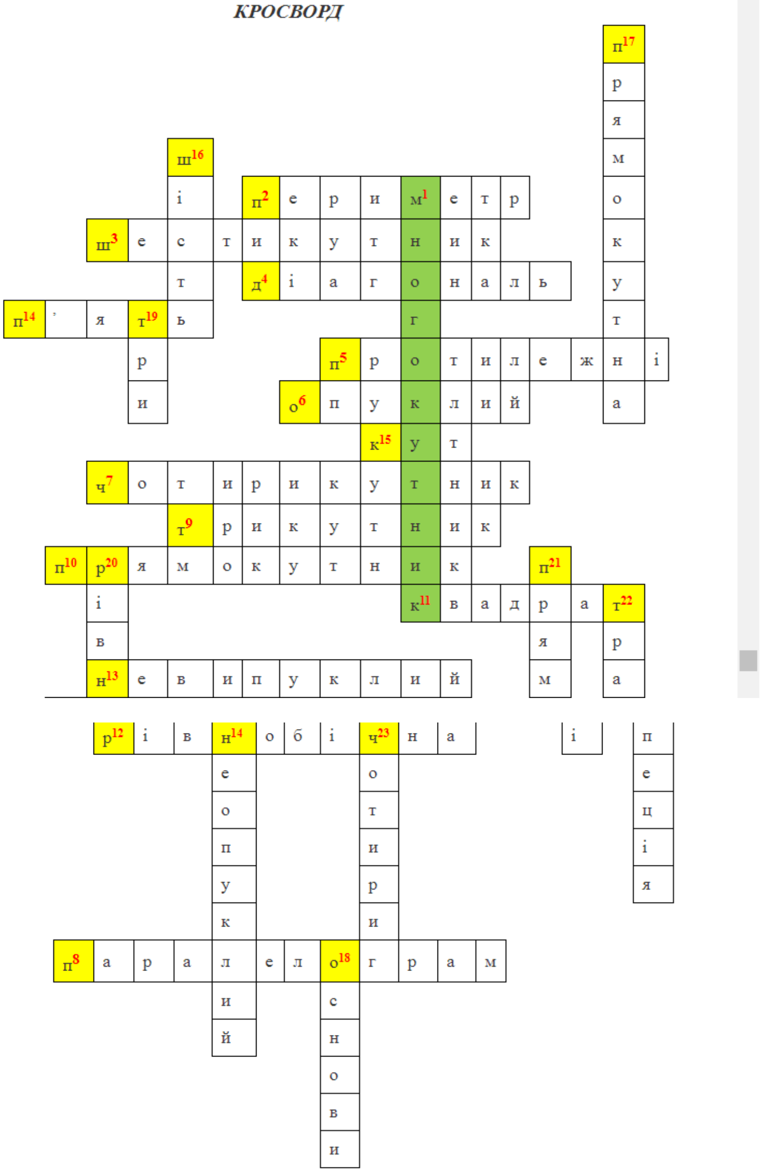
20. Властивість прямокутника: *діагоналі прямокутника ....*

21. Властивість квадрата: *всі кути квадрата ...*

22. Чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

23. Скільки сторін має многокутник, кожен кут якого дорівнює 90°.

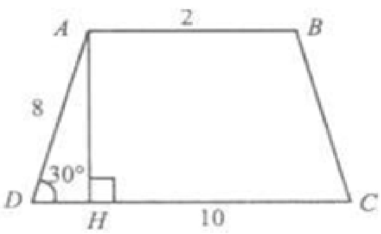
КРОСВОРД



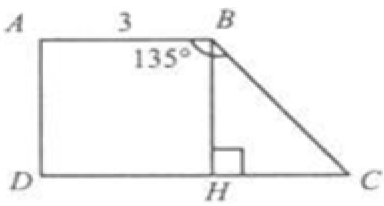
Для засвоєння матеріалу любої теми важливу роль відіграють задачі за готовими рисункам

Задача. За готовим рисунком знайти площу трапеції ABCD.

1.

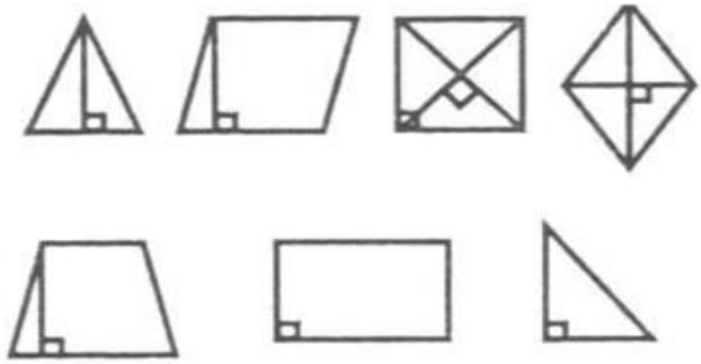


2.



3. Кожній зображеній фігурі (додаток 1) поставити у відповідність формулу обчислення площі (додаток 2).

Додаток 1.

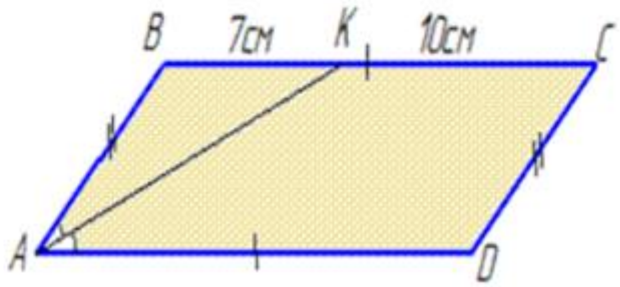


Додаток 2.

$$S = ah; S = a^2; S = \frac{1}{2}ah; S = \frac{1}{2}d^2; S = \frac{1}{2}ab; S = \frac{1}{2}d_1 d_2; S = ab; S = \frac{a+b}{2}h$$

Далі йдуть більш складніші задачі, при розв`язуванні яких використовувались різні методи.

Задача. Бісектриса гострого кута паралелограма поділяє сторону на відрізки довжиною 7 см і 10 см, починаючи від вершини тупого кута. Знайти периметр паралелограма.

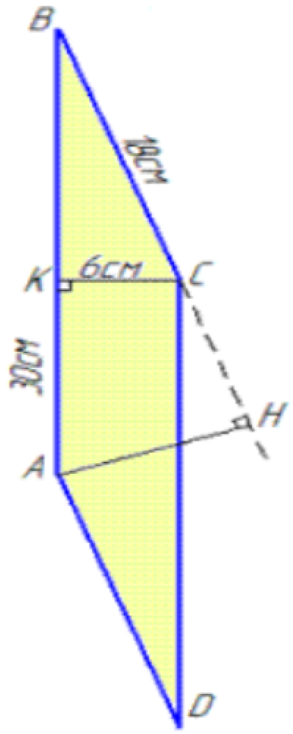


Розв`язування.

Нехай маємо паралелограм ABCD, AB ∥ CD і AD ∥ BC, AK - бісектриса. За умовою: BK = 7 см, KC = 10 см, тому маємо BC = BK + KC = 17 см. За властивістю паралелограма: AD = BC = 17 см. Оскільки AK - бісектриса, то ∠BAK = ∠KAD.

За ознакою паралельності прямих (AD ∥ BC), як перетнуті січною AK, маємо ∠AKB = ∠KAD. Тому ∠BAK = ∠AKB. Звідси слідує (за теоремою), що ΔABK - рівнобедрений з основою AK і бічними сторонами AB і BK, тому (за означенням) AB = BK = 7 см. За властивістю паралелограма: CD = AB = 7 см. Тоді P = AB + BC + CD + AD = 2(AB + BC) = 2(7 + 17) = 48 см.

Задача. Сторони паралелограма дорівнюють 18 см і 30 см, а висота, яка проведена до більшої сторони - 6 см. Знайти іншу висоту паралелограма.



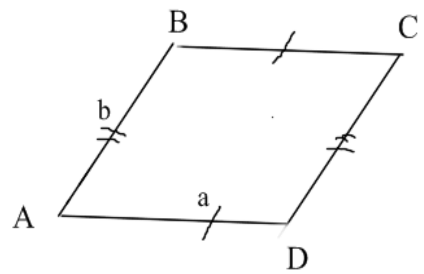
Розв'язання: Виконаємо побудову паралелограма у якого $AB||DC$ і $AD||BC$, $CK \perp AB$, $AH \perp BC$,
Де CK і AH – висоти паралелограма, опущені на сторони AB і BC, відповідно

За умовою: $AB=30$ *см*, $BC=18$ *см*, $CK=6$ *см*. Площа паралелограма дорівнює добутку сторони на висоту, проведену до неї. Обчислимо площу паралелограма $ABCD$: $S_{ABCD}=AB \cdot CK=30 \cdot 6=180$ см^2. Але площу паралелограма можна обчислити також за формулою: $S_{ABCD}=BC \cdot AH$, звідси

$$AH=\frac{S_{ABCD}}{BC}=\frac{180}{18}=10 \text{ см}$$

Задачі підвищеної складності.

Задача. Периметр паралелограма більший від однієї з його сторін на 23 см і більший на 19 см від іншої сторони. Знайти периметр паралелограма.



Оскільки протилежні сторони паралелограма рівні, то його периметр визначаємо через подвоєну суму сусідніх сторін:

P = 2a + 2b.

За умовою задачі маємо:

2a + 2 b - a = 23 (*) і

2a + 2 b - b = 19 (**).

Отримали систему двох рівнянь з двома невідомими:

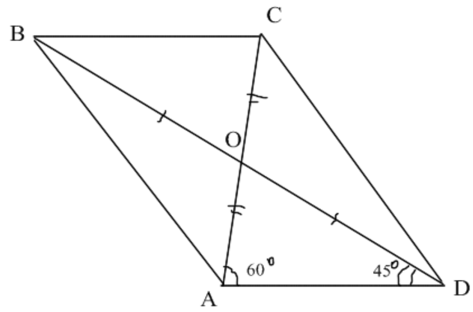
$$\begin{cases} 2a + 2b - a = 23 \\ 2a + 2b - b = 19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + 2b = 23 \\ 2a + b = 19 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2a - 4b = -46 \\ 2a + b = 19 \end{cases} \rightarrow -3b = -27$$

Звідси b = 9 і a = 5.

p = 2 · 5 + 2 · 9 = 28 см.

Задача. Одна з діагоналей паралелограма дорівнює $6\sqrt{6}$ і утворює зі стороною паралелограма кут 60°. Знайти іншу діагональ, якщо вона утворює з тією ж стороною кут 45°.



Розв`язання

Маємо паралелограм ABCD. $AB \parallel CD$ і $AD \parallel BC$, $AC = 6\sqrt{6}$, ∠CAD = 60°, ∠BDA = 45°, де AC і BD - діагоналі паралелограма, які перетинаються в точці O. Тоді за властивістю AO = OC = $3\sqrt{6}, BO = OD$.

Розглянемо трикутник AOD, у якого AO = $3\sqrt{6}$, ∠CAD = 60°, ∠BDA = 45°. За теоремою синусів знайдемо OD:

$$\frac{AO}{\sin\angle ODA} = \frac{OD}{\sin\angle OAD} \rightarrow \frac{3\sqrt{6}}{\sin 45°} = \frac{OD}{\sin 60°} \rightarrow OD = 3\sqrt{6}\,\frac{\sin 60°}{\sin 45°} = 3\sqrt{6}\,\frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{2}/2} = 9.$$

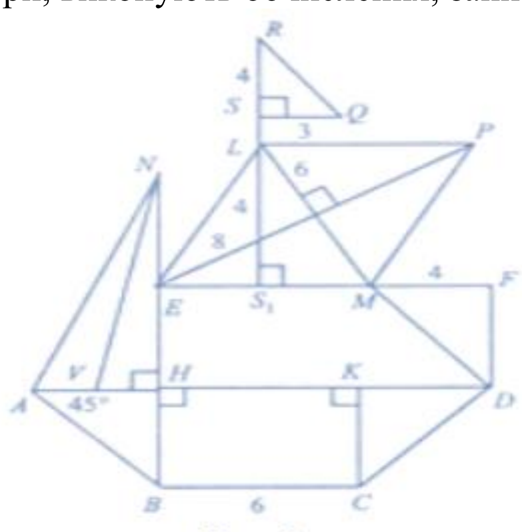
Знайдемо діагональ BD паралелограма BD = 2 · 9 = 18.

Розв`язування комбінованої задачі.

Розв`язування комбінованої задачі передбачає:

- диференціацію (у роботі беруть участь учні з достатнім та високим рівнями навчальних досягнень);
- нестандартний підхід у поданні матеріалу;
- ігрову ситуацію з елементами пошуку та аналізу.

На дошці рисунок "Корабель". Учні по черзі виходять до дошки, називають фігуру, яку розглядають, називають формулу для знаходження площі цієї фігури, виконують обчислення, записують відповідь.



Задача. Знайти площу фігури. Відомо, що AV = VH? YE = EN, BH = CK, $S_{RSQ} = S_{VNH}$.

Розв`язання

1. Чи є всі дані для обчислення площі чотирикутника ABCD?

2. Що це за фігура (*Трапеція ABCD*).

3. Що необхідно знайти для знаходження площі трапеції (*Основи і висоту*).

4. З якої фігури почнемо розв`язувати задачу (*З трикутника SQR.*)

$S_{SQR} = \frac{1}{2} RS \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ (см^2).

5. Яка наступна фігура? (*Ромб ELPM.*)

6. Яким чином ви визначили, що це ромб? (*Ознака ромба за діагоналями.*)

$S_{ELPM} = \frac{1}{2} LM \cdot EP = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$(см^2).

7. Як знайти EM? (*Використаємо другу формулу для обчислення площі ромба через основу і висоту.*)

$S_{ELMP} = LS_1 \cdot EM$. $24 = 4 \cdot EM$, $EM = 6$ (см).

8. Яку фігуру розглядаємо далі? (*Прямокутник HEFD.)*

9. Як знайти виміри HEFD?

$EF = EM + MF = 6 + 4 = 10$ (см).

DM - бісектриса кута FDK, $\angle FDK = 45°$, $\angle F = 90°$.

Отже $\angle FMD = 45°$.

Трикутник FMD - рівнобедрений з основоюMD, $FD = FM = 4$см. Тоді $EH = FD = 4$см.

10. Якими будуть ваші подальші міркування? (*Можна знайти $NH = 8$см, розглянути трикутники NVH, NHA.*)

За умовою задачі $S_{RSQ} = S_{VNH} = 6$см. За теоремою про відношення площ двох трикутників, що мають рівні кути: $\frac{S_{NHV}}{S_{NHA}} = \frac{VH}{AH} = \frac{1}{2}$; $S_{NHA} = 12$ см^2. Звідси можна знайти *AH*: $S_{NHA} = \frac{1}{2} NH \cdot AN$; $12 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot AH$, $AH = 3$см.

11. Чи можна перейти до розгляду трапеції ABCD? (*Так.*)

$AD = AH + HD = 3 + 10 = 13$см. $HD = EF = 10$см. ΔAHB - рівнобедрений з основою AB. $AH = BH = \frac{6+13}{2} \cdot 3 = 28{,}5$ (см^2).

Зауваження: під час розв`язування комбінованої задачі класом з учнями із початковим і середнім рівнем навчання запропоновані 6 задач (кожна на одну формулу). До них додається набір формул, які можна використати під час розв`язування цих задач.

Тема 9. Методика вивчення теми "Розв`язування трикутників".

9.1. Розв`язування прямокутних трикутників.

Остання тема в планіметрії 8 класу - "Розв`язування прямокутних трикутників". Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника виражаються рівностями: $\frac{a}{c} = \sin A$, $\frac{b}{c} = \cos A$, $\frac{a}{b} = tgA$, які дають можливість за будь-якими двома із даних елементів a, b, c, A, що визначають прямокутний трикутник, знаходити інші.

Всі ці рівності вводяться за означенням!, тому про їх обґрунтування говорити не доводиться; треба, щоб учні їх добре усвідомили і запам’ятали, адже на їх основі вирішуються майже всі задачі із застосуванням тригонометричних функцій. Учні повинні правильно і швидко з першої, наприклад, формули, визначати a і c: $a = c\sin A$; $c = \frac{a}{\sin A}$.

В обох підручниках [1; 2] вводячи поняття синуса, косинуса, тангенса говорять про введення тригонометричних *функцій*. На наш погляд не слід вживати термін "функція", так як ніде не було доведено, відносини, що розглядаються, катетів і гіпотенузи прямокутного трикутника є функціями. Хоча в підручнику А.П. Єршової показано, що значення тригонометричних понять залежать тільки від величини кута. На підставі цього роблять висновок, що кожному значенню тригонометричної функції відповідає єдиний гострий кут. Але термін "тригонометричні функції" авторами підручника використовується набагато раніше.

Ознайомивши учнів з даними співвідношеннями, треба відразу ж показати, як за допомогою таблиць або мікрокалькуляторів знаходити синуси, косинуси, тангенси гострих кутів і навпаки – за відомими синусами, косинусами і тангенсами знаходити відповідні градусні міри.

За підручником А. П. Єршової також розглядають деякі *основні тригонометричні тотожності:*

$$sin^2x + cos^2x = 1.$$

Доведення цієї тотожності не складне, треба тільки застосувати означення відповідних тригонометричних понять.

Далі йде дуже важлива тема "Формули зведення", які розглядаються поки що тільки для кутів 90°. Доведення формул зведення грунтується на означенні відповідних тригонометричних понять. Використовуючи формули зведення вчитель з учнями обчислюють значення тригонометричних понять кутів 30°, 45°, 60° і заносять їх у таблицю. Надалі, користуючись цією таблицею, будемо говорити "значення табличних кутів".

Рішенням прямокутних трикутників є знаходження його невідомих сторін. Не слід вимагати від усіх учнів заучування відповідних формулювань: "катет, протилежний куту A, дорівнює добутку гіпотенузи на синус цього кута", оскільки практика засвідчує, що учні, затративши багато часу на їх заучування, з часом все одно їх плутатимуть, що може призвести до грубої помилки при вирішенні задач. Тому краще добре запам'ятати тільки три вихідні формули, але подумки уявляти кожну у вигляді пропорції, наприклад: $\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{1}$, з якої неважко визначити невідомий член.

9.2. Тригонометричні поняття кутів від 0° до 180°. Теорема косинусів.

Для того, щоб розібратися в методиці введення тригонометричних понять від 0° до 180° пропонуємо вам конспект уроку на цю тему.

Фрагмент уроку "Косинус, синус и тангенс кутів від 0° до 180°" в курсі планіметрії 9 класу

Мета: Повторити співвідношення в прямокутному трикутнику, ввести тригонометричні поняття для кутів від 0 ° до 180 °, довести основну тригонометричну тотожність і деякі формули зведення.

Хід уроку

II Формування нових знань і способів діяльності.

Вивчення нового матеріалу.

1. Отримаємо значення синуса; косинуса; тангенса для кутів 0 °; 90 °, виходячи зі здорового глузду.

Якщо кут *A* зменшити до 0°, поки точка *B* не співпаде з точкою *C*, то сторона *BC*, яка дорівнює *a* трикутника *ABC*, зменшиться до 0, а гіпотенуза *AB* стане дорівнювати *AC* ⇨ $c = b$.

Тоді $\sin 0° = \frac{a}{c} = \frac{0}{b} = 0$; $\cos 0° = \frac{b}{c} = \frac{b}{b} = 1$.

Якщо кут А збільшити до 90°, поки точка *A* не співпаде с точкою *C*, то сторона *AB*, яка дорівнює *b* трикутника *ABC*, зменшиться до 0, а гіпотенуза *AB* стане дорівнювати *CB* ⇨ $c = a$.

Тоді $\sin 90° = \frac{a}{c} = \frac{c}{c} = 1$; $\cos 90° = \frac{b}{c} = \frac{0}{c} = 0$.

2. Отже, ми поширили правило знаходження синуса, косинуса і тангенса кута з гострих кутів прямокутного трикутника на кути 0° і 90°. Виникає закономірне бажання поширити таке правило знаходження синуса, косинуса і тангенса кута на тупі кути і навіть на розгорнутий кут.

Таким чином ми "відриваємо" поняття синуса, косинуса і тангенса (одночасно розширюючи ці поняття) від прямокутного трикутника і робимо ці поняття також характеристиками кута (пізніше в курсі алгебри буде показано, що синус, косинус і тангенс є функціями кута, тобто кут є для них аргументом). Чим це допоможе в геометрії? Ми зможемо працювати з тупокутними трикутниками.

3. Мотивація використання одиничного півкола.

Виникає закономірне бажання поширити таке правило знаходження синуса, косинуса і тангенса кута на тупі кути і навіть на використання одиничного півкола. Коли ми знаходили синус, косинус і тангенс для гострих кутів, то ми довжини катетів a і b висловлювали через довжину гіпотенузи c. Іншими словами ми вимірювали катети в гіпотенузі (вірніше в її частинах, так як будь-який катет завжди менше по довжині гіпотенузи). Таким чином ми вибрали гіпотенузу за одиницю виміру (бувають одиниці виміру: метри; сантиметри; вершки; аршини, у нас же буде одиниця виміру 1 (одна) гіпотенуза для вимірювання довжин катетів). Для зручності математики запропонували замість c (довжини гіпотенузи) відразу писати 1. Це обумовлено ще і тим, що на 1 найзручніше ділити, знаходячи значення синуса і косинуса !!! В цьому випадку отримуємо, що:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{a}{1} = a. \cos A = \frac{b}{c} = \frac{b}{1} = b.$$

Крім цього виявилося зручним використовувати велике відкриття Декарта: систему координат.

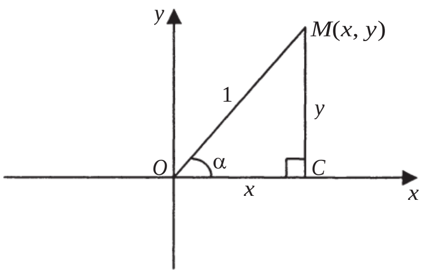
Спочатку навчимося правильно відкладати і вимірювати кути на декартовій площині. Для цього сформулюємо правило, яким будемо користуватися ми (і яким користуються всі математики) при виконанні цих операцій.

Правило відкладання і вимірювання кутів на декартовій площині:

На декартовій площині (xOy) кути з вершиною в початку координат (в точці O) відкладаються і вимірюються проти годинникової стрілки від додатної півосі абсцис (осі Ox).

Помістимо прямокутний трикутник з гострим кутом α і гіпотенузою, що дорівнює 1, в систему координат за цим правилом

Нехай точка M має координати x, y.



Подивимося, як можна пояснити означення синуса і косинуса гострого кута, використовуючи декартову систему координат.

$\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$; отже, cosα - це абсциса точки M.

$\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$; отже, sinα - це ордината точки M.

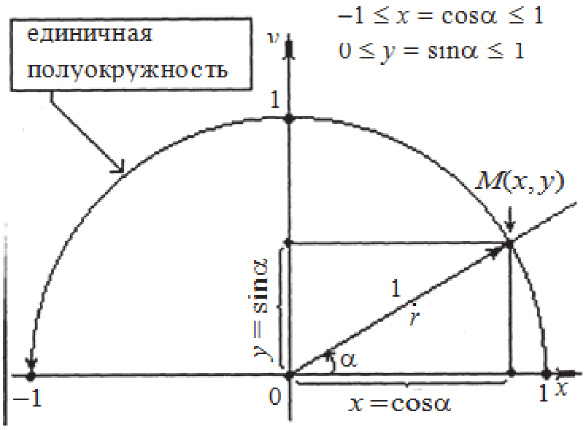
4. Введення означень для кутів від 0 ° до 180 °.

Якщо змінювати величину кута від 0 ° до 180 °, то кінець гіпотенузи, рухаючись подібно до Сонця зі Сходу на Захід по небосхилу протягом дня, опише півколо. Це півколо називають одиничним півколом (подумайте чому).

Поширимо визначення косинуса і синуса з гострих кутів на всі кути з першої і другої чвертей, тобто $0° < \alpha < 180°$.

Означення.

cosα - це абсциса точки M, sin α - це ордината точки M, де M - точка перетину одиничної півкола з променем, що виходить з початку координат під кутом α до осі Ox. Кут α змінюється від 0 ° до 180 ° ($0° < \alpha < 180°$).



Знайдемо значення синуса, косинуса і тангенса для кутів 0 °, 90 °, 180 ° (учні переконуються, що для 0 ° і 90 ° здоровий глузд не підвів. Отже, слід запам'ятати, що косинусу відповідає X, а синусу відповідає Y.

Щоб це швидше запам'ятати, можна використовувати наступну аналогію:

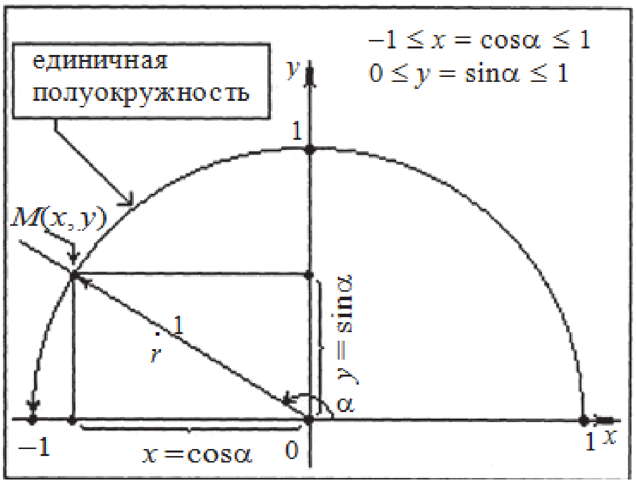
При записи координат точки на площині (X; Y) прийнято першої писати координату X (абсцис точки), а другий координату Y (ординат точки). В українському алфавіті буква А ... стоїть попереду букви О, аналогічно і в латинській (або англійською) алфавіті: буква С (Cos) йде раніше, ніж буква S (Sin). За нашою "ліричної" аналогії (яка не має майже ніякого відношення до математики) можна простіше запам'ятати, що косинус - це X, а синус - це Y.

Тому математики називають:

вісь Ox - віссю косинусів;

вісь Oy - віссю синусів.

Зауважимо, що $-1 \le X \le 1$; $0 \le Y \le 1$; тобто



$-1 \le \cos\alpha \le 1$; $0 \le \sin\alpha \le 1$; для $0° \le \alpha \le 180°$.

Значить, для гострих кутів значення косинусів додатне (> 0), а для тупих - значення косинусів будуть від`ємними (<0), а значення синуса і для гострих, і для тупих кутів додатне.

Отже, за допомогою одиничного півкола ми дали означення тригонометричним поняттям.

5. Доведення деяких тотожностей.

Покажемо також, що основна тригонометрична тотожність виконується і для кутів α, що лежать в 1-й і 2-й чвертях декартовій площині ($0° < \alpha < 180°$).

Доведення:

Для доведення скористаємося рівнянням одиничного півкола. Це рівняння неважко отримати з рівняння кола, центр якого знаходиться в початку координат і радіус дорівнює 1, а також з огляду на те, в яких межах змінюються X і Y. Рівняння одиничного кола: $X^2 + Y^2 = 1$.

Рівняння одиничного півкола:

$X^2 + Y^2 = 1$; $-1 \le X \le 1$; $0 \le Y \le 1$.

За новим означенням косинуса і синуса маємо: $X = \cos\alpha$; $Y = \sin\alpha \Rightarrow X^2 + Y^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ Основна тригонометрична тотожність:

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ($0° < \alpha < 180°$)

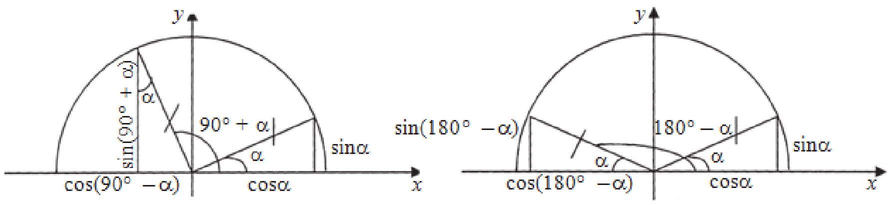
Отже, знаючи значення синуса або косинуса, можна знайти всі інші значення. А як дізнатися хоча б одне значення для тупого кута, наприклад, sin150 °? Для цього існують спеціальні формули.

Формули зведення

Формули, які дозволяють привести (висловити) значення синуса і косинуса для тупих кутів до значень синуса або косинуса гострих кутів, називаються формулами зведення.

Виведемо і доведемо деякі з них:

$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$	$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$



План доведення відображений на рисунках:

1) знайти точки, що відповідають заданим кутам,

2) для них виділити відповідні тригонометричні значення,

3) довести рівність модулів цих значень з рівності трикутників,

4) визначити знаки цих значень з розташування на координатної площині,

5) зробити висновок.

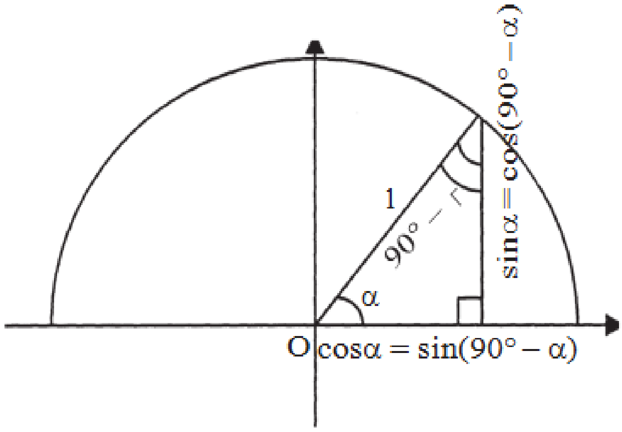
Зауваження. Корисно довести для випадку $90° \leq \alpha \leq 180°$ тотожності:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

Є ще дві тотожності, які дозволяють зменшити гострий кут до 45 °. Це тотожності:

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

Доведення випливає з співвідношень в прямокутному трикутнику і відображено на рисунку.



Теорема косинусів.

Безпосереднім узагальненням теореми Піфагора на випадок довільного трикутника є теорема косинусів. Вперше теорему косинусів явно сформулював Франсуа Вієт в кінці XVI ст., хоча у геометричній формі, без поняття косинус, вона зустрічається вже у "Началах" Евкліда.

В підручнику О. В. Погорєлова ця теорема доводиться найзручнішим *векторним методом*. Можна доводити теорему косинусів і координатним методом. Однак згідно програми 2017 р. декартові координати і вектори на площині вивчаються 9 класі після теми "Розв’язування трикутників", у якій вивчається теорема косинусів, тому треба подбати про те, як доводити теорему косинусів.

Для цього можна спочатку довести *допоміжну теорему (лему):*

У будь-якому трикутнику квадрат сторони, що лежить проти гострого кута, дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку якої-небудь з цих сторін на її відрізок від вершини гострого кута до висоти .

Доведення:

У трикутнику ABC потрібно довести, що $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD$. З ΔBDC: $BC^2 = BD^2 + DC^2$ (1). З ΔBDA: $BD^2 = AB^2 - AD^2$. Так як $DC = AC - AD$, то $DC^2 = (AC - AD)^2 = AC^2 - 2AC \cdot AD + AD^2$. Тоді рівність (1) можна записати $BC^2 = AB^2 - AD^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD + AD^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD$

Для *теореми косинусів* треба довести, що $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$.

Доведення:

З допоміжної теореми маємо: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD$. З ΔBAD: $AD = AB\cos A$, тому $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$.

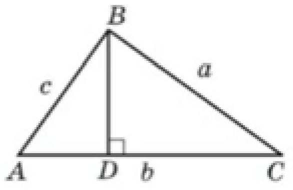
Довівши теорему для кута A $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, слід записати її і для двох інших кутів трикутника: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, і допомогти учням запам’ятати ці залежності, зауваживши, що від теореми Піфагора теорема косинусів відрізняється тільки доданком $-2вс\cos\alpha$. Він додатний або від’ємний залежно від того, тупий чи гострий кут α. Якщо $\alpha = 90^\circ$, то маємо теорему Піфагора, оскільки $\cos 90^\circ = 0$.

Обов’язково треба продемонструвати учням, які задачі можна розв’язувати за допомогою теореми косинусів:

1) якщо знаємо дві сторони і кут між ними, то можемо визначити третю сторону трикутника;
2) якщо знаємо три сторони трикутника, можемо знайти будь-який його кут.

У підручнику Єршової А. П. та ін. «Геометрія - 9»:
теорема косинусів є частиною першої теми "Розв'язування трикутників" і доводиться комбінованим (алгебраїчним і геометричним) методом.

Для знаходження шуканої стороні потрібно побудувати висхідний аналіз. Теорема косинусів - узагальнення теореми Піфагора з якої учні вже знайомі. Отже можна нею скористатися. Але за умовою даний трикутник довільний. Розглянемо випадок. коли кути А і С гострі, а з кута В проведемо висоту, тим самим отримаємо прямокутні трикутники.



а

Вчитель: Як знайти шукану сторону трикутника, якщо застосувати теорему Піфагора?

Учні: З трикутника ABD.

Вчитель: Які відрізки треба тоді знайти?

Учні: Відрізки AD і BD.

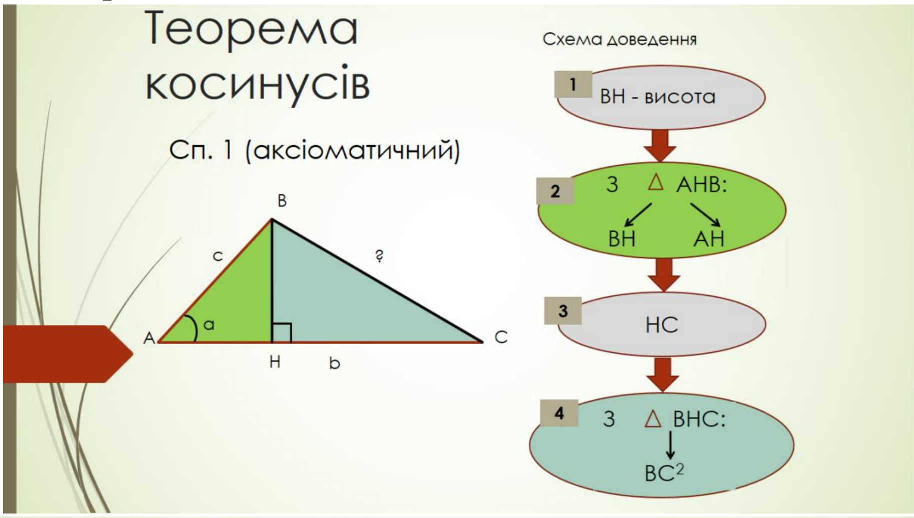
Вчитель Як їх знайти?

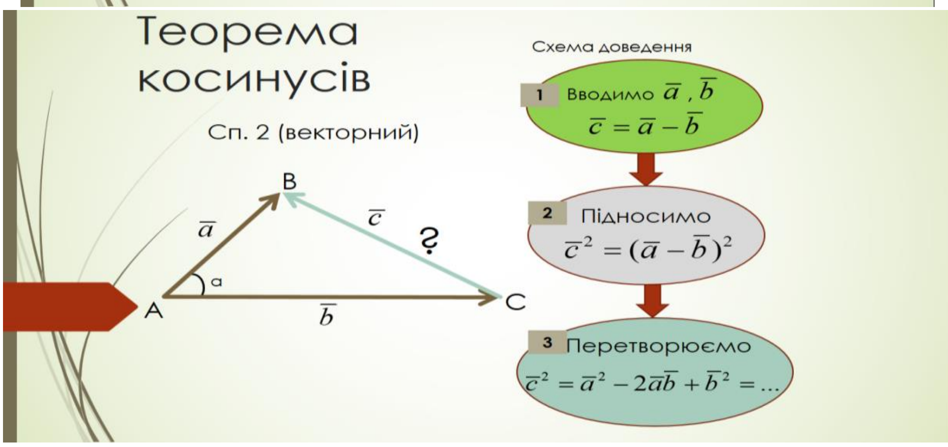
Учні; Відрізок BD входить також в Δ BCD. Через сторону a і кут C його можна визначити за допомогою тригонометрії. Відрізок AD модна знайти як різницю відрізків b і DC, а DC знайти теж з Δ BCD за допомогою тригонометрії.

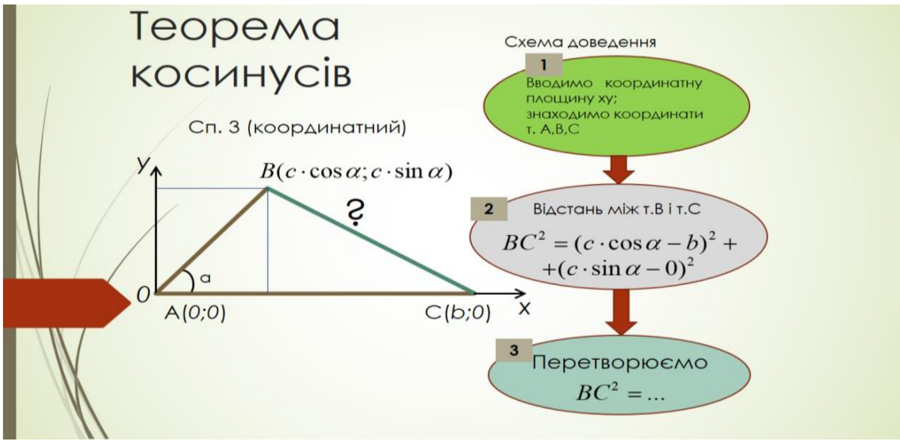
Випадок, коли кут C - гострий, а кут A - тупий можна розбирати, застосовуючи вже евристичний метод навчання. Третій випадок учні доводять самостійно.

На лекціях із загальної методики математики ми говорили про доцільність з методичної точки зору пропонування учням різні способи доведень теореми. При цьому виправдовує себе *методика застосувань інтелект-карт* та їх різновид – опорні схеми (у даному випадку - доведення).

Розглянемо декілька способів доведення теореми косинусів, які подано у вигляді інтелект-карт:



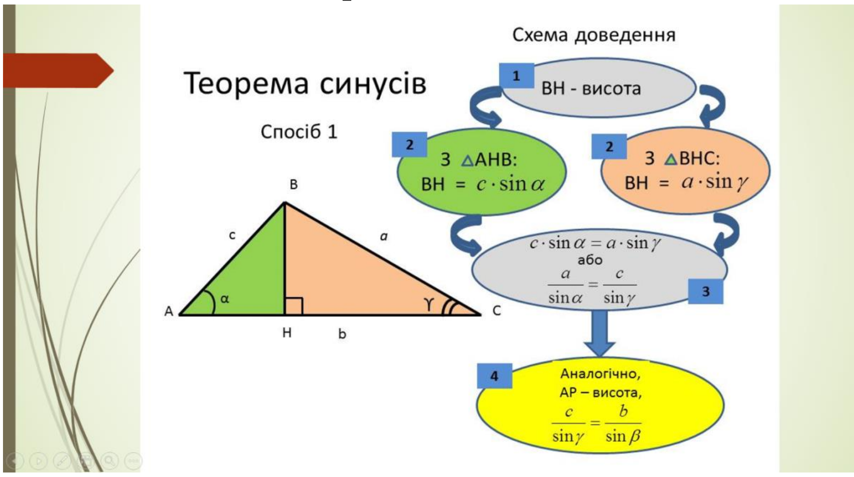




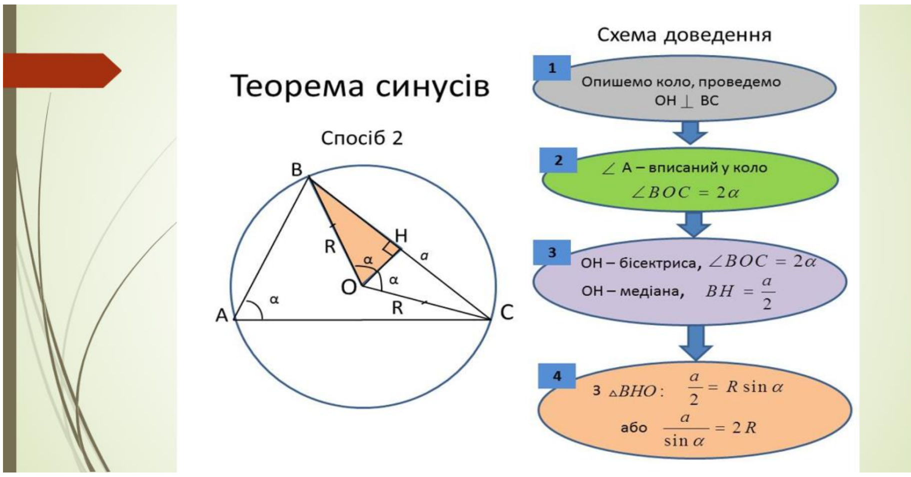
9.3. Теорема синусів.

Теорему синусів вперше довів астроном із Хорезма аль-Біруні в XI ст. Європейські математики почали нею користуватися з XVI ст.

В навчальному посібнику О. В. Погорєлова ця теорема доводиться за допомогою додаткової побудови – проведення висот спочатку з однієї вершини трикутника (доводиться одна частина рівності), потім з іншої (доводиться друга частина), як це показано на інтелект-карті:



Можна продемонструвати доведення теореми синусів іншим способом, *за допомогою методу допоміжного кола*:



Цей спосіб доведення теореми синусів цікавий тим, що він відразу дає наслідок – рівність 2R кожного із трьох співвідношень $\frac{a}{\sin\alpha}$, $\frac{b}{\sin\beta}$, $\frac{c}{\sin\gamma}$, де R – радіус описаного навколо трикутника кола.

Теорему синусів також можна доводити, виходячи з формули площі трикутника $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ (проведіть доведення самостійно! За бажання складіть інтелект-карту доведення). Коли з методичної точки зору буде корисно ознайомити учнів із таким способом доведення теореми синусів?

Теорема синусів дає можливість раціональніше розв'язувати трикутники в тих випадках, коли за теоремою косинусів робити це складніше, наприклад, за стороною і двома кутами, за двома сторонами і кутом проти однієї з них.

У підручнику Єршової А. П. та ін. «Геометрія - 9» теорему синусів доводять так, як і в підручнику О. В. Погорєлова (спосіб 1 на інтелект-карті).

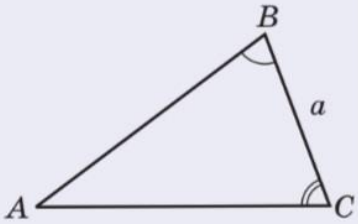
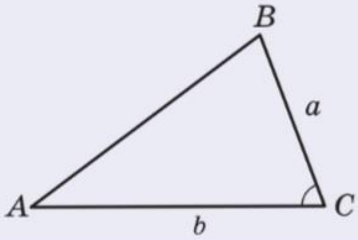
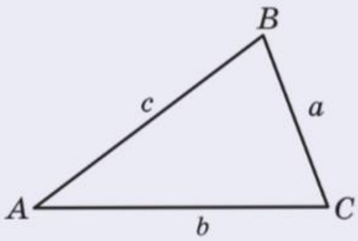
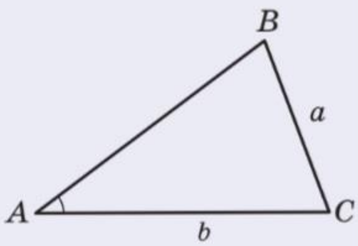
9.4. Розв'язування трикутників.

Коли в школі вивчався окремий предмет «Тригонометрія», розв'язуванню трикутників приділялося значно більше уваги, і під розв'язуванням трикутників розумілося знаходження невідомих елементів трикутника через відомі, причому "елементи трикутника" включали його медіани, бісектриси, висоти, периметр, площу.

На сучасному етапі розв'язування трикутників полягає у визначенні невідомих сторін і кутів через відомі його кути і сторони. При такому розумінні досить навчити учнів розв'язувати чотири види задач, які схематично (за даними елементами трикутника) можна зобразити так:

1) a, B, C; 2) a, b, C; 3) a, b, A; 4) a, b, c.

В підручнику О. В. Погорєлова алгоритми розв'язування всіх видів задач описано детально. У сучасному підручнику Єршової А. П. та ін. «Геометрія - 9» дається систематизація всіх типів задач у вигляді таблиці:

ОСНОВНІ ЗАДАЧІ НА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ		
Задача	***Умова***	***Схема розв'язування***
Задача 1 За стороною та двома кутами	Дано: a, $\angle B$, $\angle C$. Знайти: b, c, $\angle A$ 	1. $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$. 2. $b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$
Задача 2 За двома сторонами й кутом між ними	Дано: a, b, $\angle C$. Знайти: c, $\angle A$, $\angle B$ 	1. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$. 2. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. 3. $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$
Задача 3 За трьома сторонами	Дано: a, b, c. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 	1. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. 2. $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. 3. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$
Задача 4 За двома сторонами й кутом, протилежним одній із них	Дано: a, b, $\angle A$. Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$ 	1. $\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$. 2. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$. 3. $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$

При розв'язуванні на початку 9 класу (згідно програми 2017 р.) косокутних трикутників слід нагадати учням, що вони вже зустрічалися з розв'язуванням трикутників у 8 класі, але тільки прямокутних.

ГОТУЄМОСЬ ДО ДЕРЖАВНОГО ІСПИТУ

Завдання у тестовій формі:

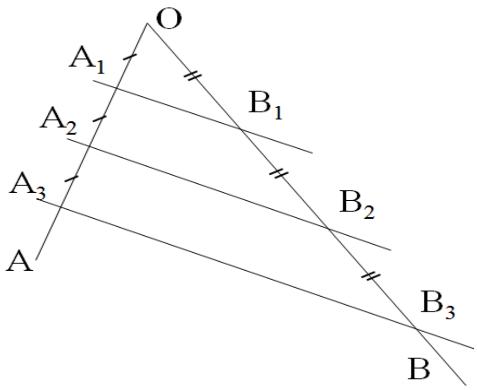
1. Яке твердження є істинним?

А	Формула для обчислення площі ромба $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, де d_1 і d_1 – діагоналі, є узагальненням формули для обчислення площі паралелограма $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot sin\gamma$, де d_1 і d_1– діагоналі, γ – кут між ними.
Б	Теорема Піфагора є узагальненням теореми косинусів.
В	Теорема синусів є узагальненням теореми Піфагора.
Г	Теорема косинусів є узагальненням теореми Піфагора.

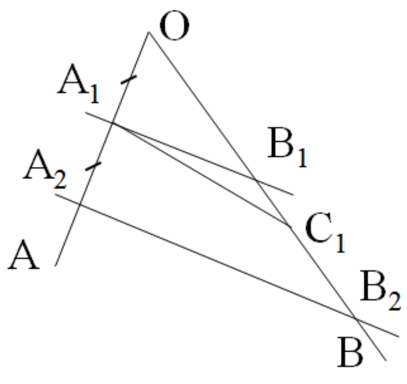
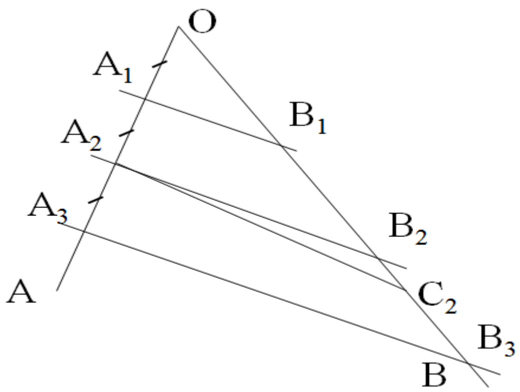
2. Теорема Фалеса.

Дано: $\angle AOB$, $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$.

Довести: $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$



Які теоретичні відомості використані при доведенні теореми Фалеса методом від супротивного за даною опорною таблицею?

<table>
<tr><td>I. $OB_1 = B_1B_2$ (т. B_1 – середина OB_2) -?</td><td>II. $B_1B_2 = B_2B_3$ -?</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">1) Припустимо
т. C_1 – середина OB_2 т. C_2 – середина B_1B_3</td></tr>
<tr><td>2) A_1C_1 – середня лінія $\triangle A_2OB_2$
⇓</td><td>2) A_2C_2 – середня трапеції $A_3A_1B_1B_3$
⇓</td></tr>
</table>

$A_1C_1 \parallel A_2B_2$	$A_2C_2 \parallel A_3B_3$
3)Через т. A_1 / т. A_2 проведені дві прямі паралельні даній (протиріччя)!!!	
4) $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$	

А	Означення та властивості середньої лінії трикутника, аксіома паралельних прямих.
Б	Означення середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, аксіома паралельних прямих.
В	Властивості середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, аксіома паралельних прямих.
Г	Означення середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, властивості середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції, аксіома паралельних прямих

Тема 10. Декартові координати на площині.

1. **10.1.** Вступні зауваження.

Відомо, що як би не будувався курс шкільної геометрії, в ньому обов'язково присутні різні методи доведення теорем і вирішення задач. Серед таких методів важливе місце займає метод координат. У підручниках [1; 2] він відіграє активну роль.

У наш час в багатьох галузях використовується координатний метод: лікар будує графік температури хворого, економіст – графік росту виробництва, фізик за допомогою графіків досліджує фізичні явища тощо. У математиці широко використовують не тільки прямокутну декартову систему координат, а й сферичну, циліндричну, еліптичну та ін. Метод координат є основним методом дослідження властивостей геометричних фігур в аналітичній геометрії – розділу математики, який встановив тісний взаємозв’язок між алгеброю та геометрією і засновником якого є Р.Декарт.

Метод координат – це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла за допомогою чисел або інших символів, які називаються координатами.

Перевага методу координат перед синтетичним методом розв’язування геометричних задач, за якого безпосередньо розглядаються фігури і кожна задача потребує особливого підходу, в його алгоритмічності. Дійсно, за допомогою методу координат будь-яка геометрична задача зводиться до алгебраїчної, а алгебраїчні задачі легше алгоритмізуються.

Прямокутна система координат вживалася в математику ще до нашої ери. Древній математик олександрійської школи Аполлоній Пергський (ІІІ-ІІ ст. до н.е.) вже фактично користувався прямокутною системою координат, визначаючи з її допомогою параболу, гіперболу, еліпс.

Вперше ідея координатного методу була систематично розвинена П'єром Ферма (1601-1665) і Рене Декатром (1596-1650). Ісаак Ньютон (1643-1727) увів поняття від’ємних координат, а Г.В. Лейбніц (1646-1716) увів термін «координати». Декарт, побудував аналітичну геометрію, в якій використовував і описав метод координат. Значення аналітичної геометрії полягає насамперед у тому. що вона встановила тісний зв'язок між геометрією і алгеброю. Ці дві гілки математики до часу Декарта досягли вже високого ступеня досконалості. Але їх розвиток протягом тисячоліть йшов незалежно один від одного.

2. **10.2.** Пропедевтичне вивчення.

Підготовча робота до введення координатної площини починається вже в 5 кл. (за програмою 2013 р.), коли вводиться поняття «числовий промінь» для зображення на ньому натуральних чисел, також учні знайомляться зі шкалами. В 6 кл (програма 2014 р.) у плані пропедевтики вводяться поняття координатної прямої, координатної площини, системи координат, начала координат, координати точки та ін..

Після введення в 6 кл. поняття координатної площини (на прикладі залу кінотеатру), корисно навести інші приклади застосування системи координат: географічна карта (за допомогою широти і довготи визначається положення населеного пункту), шахова дошка (положення фігури визначається двома символами, наприклад, король *a2*).

У 6 кл. поняття про координати точки на прямій і на площині вводиться описово на прикладах; означення абсциси й ординати ще не дається. Головне, щоб учні усвідомили, що координата точки на прямій – це число, модуль якого дорівнює відстані від початку відліку до цієї точки; модулі першої і другої координат точки на координатній площині задають відстані від цієї точки до осі x і осі y.

Вся система вправ на цьому етапі має бути спрямована на формування уміння розв’язувати пряму і обернену задачі на визначення положення точки на координатній прямій і площині.

Зазначимо, що, на жаль, немає єдності щодо термінології і символіки, пов’язаних з методом координат. В різних підручниках вживаються терміни «числова вісь», «числова пряма», «координатна вісь», «координатна пряма», причому деякі автори вважають їх синонімами, а деякі вкладають різний зміст. По-різному позначаються і осі координат: або «вісь x», «вісь y», або «вісь ОХ», «вісь ОУ». Тому, починаючи з 6 кл., треба додержуватись єдиної, обраної учителем, термінології і символіки.

Вивчення теми «Декартові координати на площині» перенесено на 9 кл. (програма 2017 р.)

Основна мета вивчення декартових координат у школі – сформувати поняття про координати точки на прямій і на площині, вміння знаходити точку за її координатами і розв’язувати обернену задачу, знаходити відстань між двома точками і координати середини відрізка, застосовувати метод координат для розв’язування найпростіших задач і в подальшому вивченні курсу математики і суміжних дисциплін.

10.3. Основні теоретичні відомості.

Вивчення в курсі планіметрії декартових координат слід починати з повторення і систематизації тих знань і умінь, які учні отримали з попередніх класів. Це можна зробити за допомогою системи запитань і завдань (див. підручник Слєпкань З.І, с. 305) (Слєпкань З.І. Методика навчання математики. Київ: Зодіак ЕКО, 2000. 512 с.).

Звичайно, що на цьому етапі тема, що розглядається, вивчається на більш високому теоретичному і практичному рівнях. Зокрема, тут вводяться означення абсциси й ординати точки. Корисно дати коротку історичну довідку.

Що ж дає нам введення поняття координати?

1. У математичному відношенні встановлюється взаємно-однозначна відповідність між множиною дійсних чисел і множиною точок прямої або між парами чисел і множиною точок площині (між безліччю трійок чисел і множиною точок простору).

2. У пізнавальному відношенні ми отримуємо нові способи вирішення ряду відомих задач.

3. У методичному відношенні: наприклад, координатна пряма використовується для введення порівняння чисел, правил складання чисел; координатна площину використовується для геометричної інтерпретації рішень рівнянь або нерівностей, що містять змінні.

У чому сутність координатного методу?

Сутність координатного методу полягає в тому, що встановлюється відповідність між безліччю точок прямої (площини, простору) і безліччю чисел (пар чисел, трійок чисел).

Автори підручників [1; 2] зазнають, що введення системи координат дозволяє вивчати геометричні фігури і їх властивості за допомогою рівнянь і нерівностей. В цьому і полягає суть методу координат.

У чому ефективність координатного методу?

1. Координатний метод дозволяє вирішувати геометричні завдання засобами алгебри, а деякі алгебраїчні завдання засобами геометрії.

2. Використання координатного методу призводить до результатів більш простим і коротким шляхом.

3. Координатне рішення задачі дозволяє охопити всі його окремі випадки, при цьому для нього не характерно виконання додаткових побудов.

4. Використання координатного методу сприяє розвитку геометричної інтуїції (правильний вибір системи координат і т.д.).

5. Координатний метод збагачує алгебру геометричній наочністю.

6.Використання координатного методу сприяє розвитку обчислювальних і графічних навичок.

При виведенні формули координат середини відрізка і формули довжини між точками в доведеннях використовуємо відповідно теорему Фалеса і теорему Піфагора. Теореми не складні, їх вивчення будувати проблемним методом навчання по запитанням учителя.

Крім поняття декартових координат в цій темі вводяться такі нові для учнів поняття: рівняння фігури в декартових координатах, кутовий коефіцієнт прямої.

Вводячи поняття рівняння фігури, необхідно пояснити учням, що коли в алгебрі, виходячи з рівняння $y=f(x)$, де $f(x)$ – задана функція, будували криву, що визначалася цим рівнянням, тобто будували графік функції $y=f(x)$, то йшли немов би "від алгебри до геометрії". При вивченні ж методу координат ми обираємо інший шлях: виходячи із геометричних властивостей деяких кривих знаходимо їх рівняння, тобто йдемо як би то "від геометрії до алгебри".

Перш за все потрібно ввести загальне поняття "рівняння фігури": *рівнянням фігури на площині в декартових координатах називається рівняння з двома невідомими х та у, якому задовольняють координати будь-якої точки фігури. І навпаки: будь-які два числа, що задовольняють цьому рівнянню, є координатами деякої точки фігури.*

Першим виводиться рівняння кола. Знову використовуємо проблемний метод навчання, направляючи учнів до того, що вони вже знають, що таке коло, яким ГМТ воно є, які формули вже виведені. В рівнянні кола $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ треба підкреслити, що a і b - константи для даного кола. В рівнянні другого кола a і b будуть іншими.

Щоб вивести рівняння прямої треба використовувати той же прийом, що і в виведенні рівняння кола, тобто нагадати учням, що по теоремі про серединний перпендикуляр пряму можна описати як ГМТ, рівновіддалених від кінців відрізка.

Крім того, при виведенні рівняння прямої треба спиратися на відоме з 7 кл. поняття лінійного рівняння з двома невідомими $ax+by=c$. Учні повинні пригадати, що графіком такого рівняння може бути: пряма за умови, що хоча б один з коефіцієнтів a або b не дорівнює 0, вся координатна площина при $a=0,\ b=0,\ c=0$ і порожня множина точок за умови, що $a=0,\ b=0,\ c \neq 0$. В курсі геометрії ставиться мета довести, що будь-яка пряма в декартових координатах x і y має рівняння вигляду $ax+by+c=0$ (яке, до відома учнів, принципово не відрізняється від рівняння $ax+by=c$).

Учням треба вивести рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки (це облегшить їм розв`язування задач)

Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$, має вигляд:

- $x = m$, **якщо** $x_1 = x_2 = m$;
- $y = n$, **якщо** $y_1 = y_2 = n$;
- $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, **якщо** $x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2$.

Також необхідно розглянути три окремих випадки розташування прямої в прямокутній системі координат ($a=0,\ b\neq 0$; $a \neq 0,\ b=0$; $a \neq 0,\ b\neq 0,\ c=0$).

Якщо пригадати відоме з курсу алгебри 7 кл. поняття про систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими, означення розв'язку системи і графічний спосіб її розв'язання, то учні самі дійдуть висновку щодо координат точки перетину прямих.

Поняття кутового коефіцієнту прямої важливе з погляду перспективних зв'язків: воно пов'язане з поняттям геометричного змісту похідної.

10.4. Застосування методу координат.

Система задач теми в основному спрямована на закріплення введених понять і використання доведених формул.

Задачі, які розв`язуються методом координат, існують двох типів. Щоб вирішувати задачі як і першого, так і другого типу методом координат, необхідно виконання певного алгоритму, що складається з трьох етапів.

Алгоритм розв`язування задач 1 типу (задач на складання рівняння даної фігури):

1. Виявлення характеристичного властивості даної фігури, тобто такого її геометричного властивості, яким володіють ті і тільки ті точки площині, які фігурі належать.

2. Вибір на площині прямокутної системи координат.

3. Запис характеристичного властивості фігури на мові координат.

Алгоритм розв`язування задач 2 типу (геометричні задачі, які вирішуються аналітичним методом):

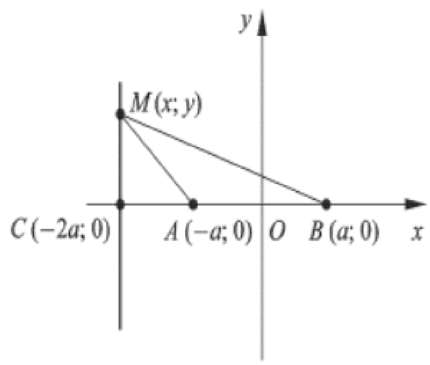
1. Переклад задачі на аналітичний мову.

2. Перетворення аналітичного виразу. Визначення по виду рівняння вид фігури.

Задачі, які стосуються 1 типу.

Задача. Дано дві точки A і B. Знайдіть безліч всіх точок M, для кожної з яких BM^2 - AM^2 = $2AB^2BM^{2}$ $^-$ AM^2 = $2AB^2$.

Розв`язання



Введемо прямокутну систему координат з початком в точці O (0; 0) так, щоб вона була серединою відрізка AB (вміння оптимально вибирати систему координат).

Тоді точки A і B мають наступні координати A(-a;0), B(a;0), AB = 2a (вміння визначати координати заданих точок).

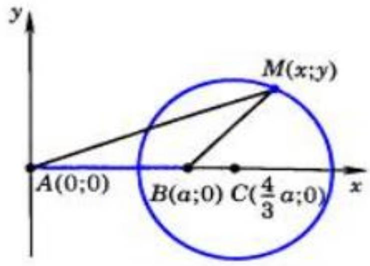
Для довільної точки маємо M(x;y): $AM^2 = (x + a)^2 + y^2$; $BM^2 = (x - a)^2 + y^2$ (вміння знаходити відстань між двома точками).

Якщо точка належить шуканій множині, то $BM^2 - AM^2 = 2AB^2$.

Запишемо цю умову в координатах: $((x - a)^2 + y^2) - ((x + a)^2 + y^2) = 8a^2$ (вміння переводити геометричну задачу на аналітичний мову). Розкривши дужки, отримуємо x = -2a (вміння виконувати алгебраїчні перетворення). Таким чином, шукана множина - пряма, паралельна осі ОУ. (ця пряма перпендикулярна до прямої АВ і перетинає продовження променя АВ в точці С, причому АС = $\frac{1}{2}$ АВ; (вміння бачити за рівнянням конкретний геометричний образ).

Задача. Дано дві точки А і В. Знайдіть множину всіх точок, для кожної з яких відстань від точки А в два рази більше відстані від точки В.

Розв`язання



Введемо прямокутну систему координат з початком в точці А (вміння оптимально вибирати систему координат). Тоді точки А і В мають такі координати: А(0;0), В(а;0), а = АВ (вміння визначати координати заданих точок).

Знайдемо відстань від точки М(х;у) до заданих точок: АМ = $\sqrt{x^2 + y^2}$, ВМ = $\sqrt{(x - a)^2 + y^2}$ (вміння знаходити відстань між двома точками).

Якщо точка М належить шуканій множені, то АМ = 2 ВМ або $AM^2 = 4\ BM^2$. Тому її координати задовольняють рівнянню $x^2 + y^2 = 4(((x - a)^2 + y^2)$ (вміння виконувати алгебраїчні перетворення).

Якщо точка М не належить шуканій множені,то її координати не задовольняють цьому рівнянню ⇨рівняння і є рівняння шуканій множені точок в обраній системі координат. Розкриваємо дужки, групуємо складові, отримуємо: $(x - \frac{4}{3}a)^2 + y^2 = (\frac{2}{3}a)^2$. Це рівняння є рівнянням кола з радіусом $\frac{2}{3}a$ з центром в точці $C(\frac{4}{3}a;\ 0)$ (вміння бачити за рівнянням конкретний геометричний образ).

Задача. Даний ромб ABCD має діагоналі 2a і 2b. Знайдіть множину усіх точок М, для кожній з яких $AM^2 + DM^2 = BM^2 + CM^2$.

Розв`язання

Введемо прямокутну систему координат ОХУ так, щоб діагоналі ромба лежали на осях координат. В цій системі координат вершини ромба будуть мати такі координати: А(-а;0), В(0; b), С(а;0), D(0;- b). Нехай М(х;у) - довільна точка.

Знайдемо відстань від точки М до кожної вершини ромба:

$AM^2 = (x + a)^2 + y^2$; $BM^2 = x^2 + (y - b)^2$; $CM^2 = (x - a)^2 + y^2$; $DM^2 = x^2 + (y + b)^2$.

Запишемо рівняння, яке дано в умові в координатах:

$((x + a)^2 + y^2) + (x^2 + (y + b)^2) = (x^2 + (y - b)^2) + ((x - a)^2 + y^2)$.

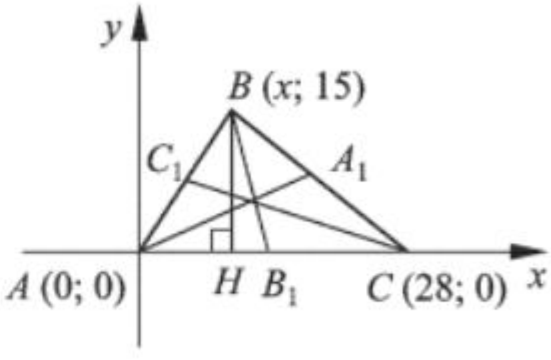
Розкриємо дужки і отримаємо ax + by = 0 - це рівняння прямої, яка проходить через начало координат, тобто через точку перетину діагоналей ромба.

Задачі. які відносяться до 2 типу.

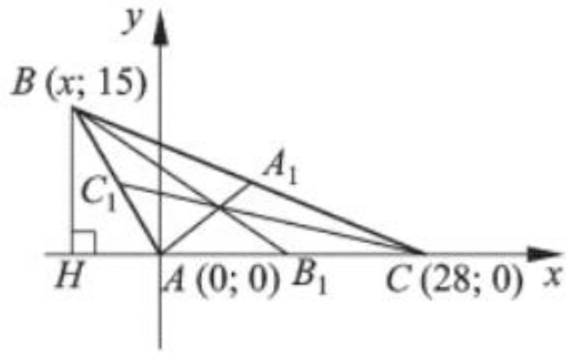
Задача. Дві сторони трикутника дорівнюють 17см і 28 см, а висота, яка проведена до більшої сторони дорівнює 15 см. Знайти медіани трикутника.

Розв`язання

Нехай в ΔABC: AB = 17 см, AC = 28 см, BH = 15 см. Введемо прямокутну систему координат (можливі 2 випадки розташування):



а



б

Тоді вершини ΔABC мають такі координати: A(0;), B(x;15), C(28;0).

а) якщо $H \in AC$, то $x > 0$; б) якщо $H \notin AC$ (лежить на продовжені AC), то $x < 0$. Використовуємо формулу відстані між двома точками маємо: $AB = \sqrt{x^2 + 15^2} = 17$. $x^2 + 225 = 298$, $x^2 = 64$, x = 8, x = -8. Тоді точка B(8;15) або B(-8;15).

Нехай точки $A_1(x_1;y_1)$, $B_1(x_2;y_2)$, $C_1(x_3;y_3)$ є серединами сторін BC, CA і AB. Тоді у випадку а) $x_1 = \frac{8+28}{2} = 18$; $y_1 = \frac{15+0}{2} = 7{,}5$; $x_2 = \frac{0+28}{2} = 14$; $y_2 = 0$; $x_3 = \frac{8+0}{2} = 4$; $y_3 = \frac{15+0}{2} = 7{,}5$. У випадку б) $x_1 = \frac{-8+28}{2} = 10$; $y_1 = \frac{15+0}{2} = 7{,}5$; $x_2 = \frac{0+28}{2} = 14$; $y_2 = 0$; $x_3 = \frac{-8+0}{2} = 4$; $y_3 = \frac{15+0}{2} = 7{,}5$.

Знайдемо медіани AA_1, BB_1, CC_1.

У випадку а) $AA_1 = \sqrt{(18-0)^2 + (7{,}5-0)^2} = 19{,}5$ см;

$BB_1 = \sqrt{(14-8)^2 + (0-15)^2} = 3\sqrt{29}$ см;

$CC_1 = \sqrt{(4-28)^2 + (7{,}5-0)^2} = 1{,}5\sqrt{281}$ см;

У випадку б) $AA_1 = \sqrt{(10-0)^2 + (7{,}5-0)^2} = 12{,}5$ см;

$BB_1 = \sqrt{(14+8)^2 + (0-15)^2} = \sqrt{709}$ см;

$CC_1 = \sqrt{(-4-28)^2 + (7{,}5-0)^2} = 0{,}5\sqrt{4321}$ см;

Задача. Доведіть, що якщо у паралелограма діагоналі рівні, то він прямокутник.

Доведення

Нехай в паралелограмі ABCD AC = BD і AD = BC = a, OB = CD = b. Вводимо прямокутну систему координат з початком в точці A(0;0). Тоді координати вершин паралелограма будуть A(0;0), B(b;c), C(b+a;c), D(a;0, де a і b - деякі числа.

Знайдемо AC і BD за формулою відстані між двома точками.

$AC^2 = (a + b)^2 + c^2$; $BD^2 = (a - b)^2 + c^2$.

За умовою AC = BD $\Rightarrow AC^2 = BD^2$. Запишемо дану умову в координатах

$(a + b)^2 + c^2 = (a - b)^2 + c^2$. Розкриваючи дужки маємо ab = 0, але $a \neq 0 \Rightarrow b = 0$.

Отже вершина B(0;c), тобто вершина B лежить на осі ординат $\Rightarrow \angle BAD = 90° \Rightarrow$ паралелограм ABCD - прямокутник.

Проаналізувавши рішення декількох задач, ми можемо виділити вміння, якими повинні володіти учні, щоб застосовувати метод координат для вирішення задач. Отже, компонентами уміння застосовувати координатний метод в конкретних ситуаціях є такі вміння:

1) вміння оптимально вибирати систему координат;

2) вміння визначати координати заданих точок;

3) вміння будувати точку за заданими координатами) вміння переводити завдання з геометричного на аналітичний мову і навпаки;

4) вміння обчислювати відстань між двома точками, заданими координатами;

5) вміння визначати координати середини відрізка;

6) вміння виконувати перетворення алгебраїчних виразів (розкриття дужок, виділення повного квадрата);

7) вміння складати рівняння заданих фігур;

8) вміння бачити за рівнянням конкретний геометричний образ.

Тема 11. Геометричні перетворення. Рухи. Подібність.

11.1 Вступні зауваження.

Ідея перетворень є однією з провідних ідей сучасної математики. За її допомогою з успіхом доводять складні твердження з різних розділів геометрії, які виходять далеко за межі шкільного курсу. За допомогою геометричних перетворень і комп'ютерної графіки кінематографісти бентежать уяву глядача дивовижними образами і незвичайними перевтіленнями на екрані. Перетворення допомагають художникам правильно будувати композиції картин, а хімікам — досліджувати структуру кристалів.

Теорія геометричних перетворень виникла у зв’язку з пізнанням законів зображення предметів на площині. Спроби правильно відобразити на плоскому рисунку природні форми предметів здійснювалися задовго до виникнення писемності – люди малювали на стінах печер, скелях, посуді різноманітні рослини, тварин тощо. Тривала практика підказувала митцям, як передати на рисунку зображуваний предмет – так зароджувалося вчення про відповідності й перетворення.

В Епоху Відродження з’явилися перші фундаментальні дослідження з теорії перспективи, зокрема роботи видатних художників Леонардо да Вінчі (1452–1519) і Альбрехта Дюрера (1471–1528). Розробником математичних основ теорії проективних перетворень (теорії перспективи) став французький інженер і архітектор Жерар Дезарг (1593–1662).




Альбрехт Дюрер   Леонардо да Вінчі   Мішель Шаль   Гаспар Монж

Багато талановитих учених доклали зусиль до створення теорії взаємно однозначних відповідностей на площині й у просторі. Серед них був, зокрема, французький математик Мішель Шаль (1793–1880), який довів фундаментальну теорему про геометричні перетворення (нині відому як теорема Шаля). Підсумував наукові пошуки в галузі геометричних перетворень французький геометр Гаспар Монж (1746-1818), створивши новий розділ геометрії – нарисну геометрію.

Також необхідно зазначити, що в різні періоди розвитку шкільної математики геометричним перетворенням, зокрема рухам, приділялась неоднакова увага. Так, наприкінці XIX – на початку XX ст. в період міжнародного руху за реформу шкільної математичної освіти Фелікс Клейн пропонував зробити геометричні перетворення провідною ідеєю шкільної геометрії.

У 60-ті роки XX ст. в період активізації руху за реформу математичної освіти інтерес до геометричних перетворень в шкільному курсі знову зріс. Вони стали однією з провідних змістових ліній геометрії і апаратом для доведення теорем і розв'язування задач. Створювалися відповідні підручники, де було реалізовану цю ідею: підручники планіметрії за редакцією А.М. Колмогорова і стереометрії за редакцією З.О.Скопця. Проте спроба в цих навчальних посібниках трактувати геометричні перетворення як відображення площини (простору) на себе з широким застосуванням термінології і символіки множин призвела до надмірної заформалізованості навчального матеріалу і як результат – до труднощів у його сприйманні, тому вони не були схвалені педагогічною громадськістю.

У чинній програмі і паралельних підручниках геометричні перетворення залишаються однією з основних змістових ліній, але їх місце і роль, порівняно з вищезазначеними підручниками, значно зменшилися.

Програма і діючі підручники передбачають вивчення геометричних перетворень і подібність фігур у курсі планіметрії – в 9 класі.

Основною метою вивчення геометричних перетворень є ознайомлення учнів з різними видами рухів (осьова та центральна симетрія, поворот, паралельне перенесення), подібністю та гомотетією, їхніми властивостями, введення загального поняття про рівність і подібність фігур, застосування окремих видів перетворень, ознак подібності трикутників до розв'язування задач.

Учні мають розуміти суть кожного із зазначених у програмі видів геометричних перетворень, знати їхні властивості, ознаки подібності трикутників і вміти застосовувати їх до розв'язування найпростіших задач.

11.2. Методика вивчення рухів.

Система понять теми "Рухи" залежить від місця цієї теми в загальній структурі курсу планіметрії і, зокрема, в підручнику. Так, в підручнику Єршова А.П до понять теми слід віднести 12 понять, нових для учнів, серед яких: 1) перетворення фігури, 2) руху, 3) точок, симетричних відносно даної точки і 4) точок, симетричних відносно даної прямої, 5) перетворення симетрії відносно даної точки, 6) перетворення симетрії відносно даної прямої, 7) центральносиметричної фігури і 8) фігури, симетричної відносно прямої, 9) повороту площини навколо даної точки, 10) паралельного перенесення, 11) співнаправлених прямих і 12) рівних фігур.

Поняття *перетворення фігури* слід ввести описово, на наочному, інтуїтивному рівні.

На рисунку зображено відрізок АВ, пряму а и точку о, яка не належить ні відрізку АВ, ні прямій а. Кожній точці Х відрізка АВ поставимо у відповідність точку X_1 прямої а так, щоб точки Х, X_1, O лежали на одній прямій. Точці А відповідатиме точка A_1, точці В - B_1. Зрозуміло, що всі такі точки X_1 утворюють відрізок A_1B_1.

Ми вказали правило, за допомогою якого кожній точці X відрізка AB поставлено у відповідність єдину точку X_1 *відрізка* A_1B_1. У цьому разі говорять, що відрізок A_1B_1 отримано в результаті перетворення відрізка AB.

На другому рисунку зображене півколо AB і пряму a, паралельну діаметру AB. Кожній точці X півкола поставимо у відповідність точку X_1 прямої a так, щоби пряма XX_1 була перпендикулярна прямій a. Зрозуміло, що всі такі точки X_1 утворюють відрізок A_1B_1. У цьому разі говорять, що відрізок A_1B_1 отримано в результаті перетворення півкола AB.

Узагальнимо наведені приклади. Нехай задано деяку фігуру F. Кожній точці фігури F поставимо у відповідність за певним правилом деяку точку. Усі отримані заставлені точки утворюють фігуру F_1. Говорять, що фігуру F_1 отримано в результаті перетворення фігури F.

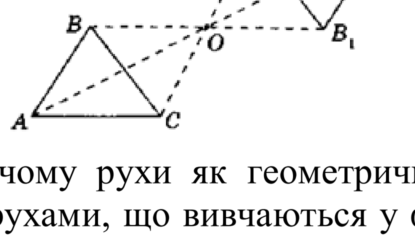
Перетворенням фігури *F* у фігуру *F'* називається така відповідність, при якій:1) кожній точці фігури *F* відповідає єдина точка фігури *F'*

2) кожній точці фігури F' відповідає деяка точка фігури F;

3) різним точкам фігури *F* відповідають різні точки фігури *F'*.

Ввівши поняття геометричного перетворення і навівши кілька конкретних прикладів (симетрії відносно точки, симетрії відносно прямої і гомотетії), бажано звернути увагу учнів на те, що при двох перших перетвореннях відстані між точками зберігаються, а при гомотетії – ні. Отже, є потреба ці два види геометричних перетворень розглянути окремо.

Геометричні перетворення фігур, при яких зберігаються відстані, називаються рухами. Формулюючи це означення, бажано розкрити учням зміст словосполучення "при яких зберігаються відстані". Іноді учні думають, що йдеться про відстані між відповідними точками, а це неправильно. Наприклад, якщо трикутники *ABC* і $A_1B_1C_1$ симетричні відносно точки *O,* то відповідними є точки *A* і A_1, *B* і B_1, C і C_1, а відстані AA_1, BB_1, CC_1 не рівні. Зберігаються відстані між парами будь-яких точок даної фігури і парами відповідних їм точок здобутої фігури: $AB = A_1B_1$, $AK = A_1K_1$ і т.д.



Треба пояснити учням, чому рухи як геометричні перетворення не слід ототожнювати з механічними рухами, що вивчаються у фізиці. Якщо механічний рух характеризується траєкторією, часом, швидкістю, то для рухів, про які йдеться в геометрії, такі характеристики непридатні. Наприклад, розглядаючи перетворення симетрії відносно точки *O*, що переводить трикутник *ABC* в трикутник $A_1B_1C_1$, нерозумно говорити, з якою швидкістю і по якій траєкторії рухається при симетрії точка *A* і т. ін.

Перетворення симетрії відносно точки можна вводити в такій послідовності: спочатку дати поняття *точки, симетричної даній відносно центра симетрії* O , потім побудувати відрізок, симетричний даному відносно центра симетрії. Наступною фігурою буде трикутник, а потім довільна фігура.

Поняття точки симетричній відносно даної точки в підручнику О.В.Погорєлова вводились конструктивно, що дає одночасно спосіб побудови фігури при перетворенні і доводить доцільність лінії конструктивних означень, В діючих підручниках означення симетричних відносно центра точок формулюється інакше: дві точки A і A_1 називаються симетричними відносно точки О, якщо О – середина відрізка AA_1.

Доведення теореми (основна властивість центральної симетрії) труднощів у учнів не викликає. Доведення проводиться за допомогою ознаки рівності трикутників.

Далі вводимо поняття *центральносиметричної фігури*. Слід зазначити різницю між двома останніми поняттями: в одному з них говориться про дві

фігури, а в іншому – про одну. Означення зазначених понять не викликають труднощів, якщо проілюструвати такі фігури різноманітними прикладами:

Аналогічно вводяться конструктивно (в підручнику О.В.Погорєлова) або переліком суттєвих властивостей (в підручниках А.П. Єршова і Мерзляка) поняття *точок, симетричних відносно прямої* l. План або послідовність вивчення цієї підтеми така ж сама (точка, відрізок, трикутник, довільна фігура).

Під час вивчення симетрії відносно точки та відносно прямої, для кращого сприйняття та зацікавлення учнів, можна показати презентацію «Симетрія в природі, науці та мистецтві».

Теорема про основну властивість осьовій симетрії доводиться на основі декартових координат.

Для доведення теореми скористаємось декатрову системою координат так, щоб вісь симетрії збігалася з ОУ. Нехай точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ належать фігурі F.

Точки A_1 $(-x_1; y_1)$ і $B_1(-x_2; y_2)$ — відповідно їх образи при осьовій симетрії відносно ОУ.

Маємо:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$A_1B_1 = \sqrt{\left(-x_2 - (-x_1)\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left(y_2 - y_1\right)\ \ 2}$$

Отже АВ = A_1B_1.

Необхідно розв'язувати усні вправи на підведення під поняття симетричних відносно точки і прямої фігур, включаючи до системи вправ і фігури, які не є симетричними.

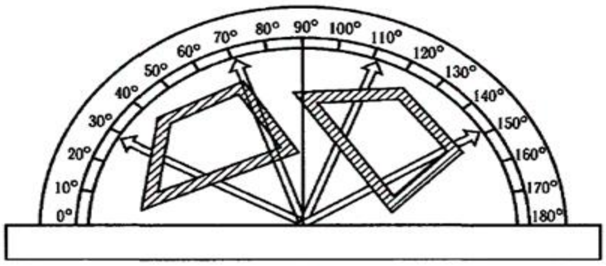
Важливо, щоб учні навчалися будувати точку, відрізок, промінь, пряму, трикутник, коло, кут, паралелограм тощо, симетричні відповідним фігурам відносно точки і відносно прямої. Слід звернути увагу учнів на те, що оскільки положення прямої і відрізка задається двома будь-якими точками (променя –

початковою точкою і будь-якою іншою його точкою, кола – центром і будь-якою його точкою, трикутника – його вершинами і т.д.) то для побудови симетричної фігури достатньо побудувати точки, симетричні тим, які визначають положення фігури. При навчанні побудови симетричних точок відносно точки і відносно прямої доцільно використовувати алгоритмічний підхід.

Треба виділити достатні умови, при яких задається центральна і осьова симетрії. Щоб задати центральну (осьову) симетрію, досить указати: 1) центр (вісь) симетрії або 2) дві відповідні точки – в цьому випадку неважко побудувати центр і вісь симетрії.

Поворотом фігури F *навколо точки O на кут* α називається перетворення фігури F у фігуру F_1, внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X_1фігури F_1 так, що $OX_1 = OX$ і $\angle XOX_1 = \alpha$.

При вивченні поняття *повороту* варто підкреслити, що будь-який поворот може бути заданий: 1) центром *O*, кутом повороту α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$), напрямом повороту або 2) центром повороту і двома відповідними точками X і X'. У цьому разі ефективно скористатися рухомою моделлю



Треба стежити, щоб учні не плутали "поворот" з "обертанням" Останнє означає механічний рух, процес. Обертання може бути рівномірним і нерівномірним, його можна характеризувати довільним числом градусів, наприклад 1000°, -750° та ін. Для повороту не мають значення ні швидкості руху окремих точок, ні їх траєкторії. Поворот можна розглядати як результат обертання, фіксацію його початку і закінчення.

Корисно зауважити, що перетворення симетрії відносно точки є частинний випадок повороту (поворот на 180°).

Перш, ніж вводити означення *паралельного перенесення*, корисно спочатку продемонструвати цей вид руху, що дасть змогу учням помітити суттєву ознаку паралельного перенесення (це перетворення, за якого точки зміщуються в одному й тому самому напрямі на одну і ту саму відстань).

Паралельним перенесенням фігури F у напрямі променя OA на відстань a називається таке перетворення фігури F у фігуру F', внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що промені XX' і OA співнапрямлені і $XX' = a$

Паралельне перенесення дуже часто використовується в математиці та її застосуваннях в інших науках і практиці. Зокрема, в алгебрі і математичному

аналізі паралельне перенесення використовується при побудові графіків складених функцій, в кресленні – при побудові різноманітних фігур.

Теорема про властивість паралельного перенесення труднощі в учнів не викликає.

Якщо при деякому паралельному перенесенні фігура переходить в себе, то кажуть, що ця фігура має переносну симетрію. Серед фігур, які вивчаються в шкільному курсі планіметрії, таку властивість має лише пряма. Але приклади переносний симетрії можна знайти в інших науках, мистецтві і повсякденному житті. Представлений ескіз графіка функції $y = \sin x$, яка буде вивчатися в курсу алгебри має переносну симетрію в напрямку осі абсцис.

Після введення основних понять та доведення теореми, про те, що паралельне перенесення є рухом, слід навести формули, за допомогою яких, задається паралельне перенесення у прямокутній системі координат.

У прямокутній системі координат *паралельне перенесення* яке переводить точку $(x;y)$ в точку $(x_1; y_1)$, задається формулами $x_1=x+a$; $y_1=y+b$, де a і b – деякі числа, одні й ті самі для всіх точок площини.

Щоб рухи як геометричне перетворення можна були застосовувати, треба встановити хоч найважливіші їх властивості. У діючих підручниках доводиться, що при русі пряма переходить – у пряму, промінь – у промінь, відрізок – у відрізок, будь–яка фігура – у рівну їй фігуру, при русі зберігаються кути між променями, порядок взаємного розміщення точок на прямі.

Зрозуміло, що учні не тільки мають знати, в що переходить, наприклад, пряма при повороті, а й вміти повернути дану пряму навколо даної точки на даний кут. Вони повинні вміти розв’язувати задачі на побудову фігур, в які переходять дані фігури (пряма, коло, точка, трикутник) при русі. Враховуючи, що в школі вивчають чотири види рухів, учні повинні вміти виконувати 16 відповідних побудов. При цьому можна варіювати неістотні умови, наприклад:

Побудувати коло, симетричне даному відносно даної прямої, якщо ця пряма: 1) лежить поза колом; 2) перетинає коло, але не проходить через його центр; 3) проходить через центр даного кола. Тоді, використовуючі існуючи комп`ютерні програми, можна показати учням правильні побудови, і, якщо у них виникли запитання, обговорити їх.

Під час опрацювання даної теми є можливість розглянути загальне поняття рівності геометричних фігур. Зауважимо, що раніше рівними фігурами ми називали такі фігури, які збігалися при накладанні. Термін "накладання" інтуїтивно зрозумілий, і в нашому уявлені він пов`язаний із накладанням реальних тіл. Але геометричні фігури не можна накласти в буквальному розумінні цього слова. Тепер накладання фігури F на фігуру F_1 можна розглядати як рух фігури F, при якому її образом є фігура F_1 і дати таке означення: дві фігури називаються рівними, якщо існує рух, при якому одна з даних фігур є образом другої.

Система задач діючих підручників, що стосується теми "Рухи" містить в основному вправи на побудову при різних видах руху і задачі на доведення властивостей окремих фігур у разі виконання рухів. Обмежуватися цими задачами для учнів, які цікавляться математикою, не можна. Треба розглянути задачі на побудову, в яких ефективно використовуються геометричні перетворення. Рухи знаходять дійові застосування при розв'язуванні задач на максимум і мінімум.

11.3. Методика вивчення подібності.

Після вивчення чотирьох видів геометричного перетворення які були різновидами переміщення, тобто зберігали відстані між точками, розглядають геометричне перетворення, яке може змінювати відстані між точками, — перетворення подібності. Поняття подібності для трикутників вже знайоме учням з курсу 8 класу.

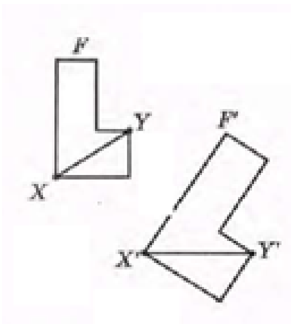
Найскладнішим з погляду сприймання учнями і методики вивчення є поняття перетворення подібності. Якщо учні засвоять це поняття, то означення подібних фігур як таких, що переводяться одна в одну перетворенням подібності, не призведе до труднощів.

Можливі такі методичні варіанти введення поняття перетворення подібності: 1) учитель сам формулює означення та ілюструє його прикладами (абстрактно–дедуктивний метод);

2) учнів спочатку підводять до введення означення на відомих із життєвого досвіду прикладах (конкретно–індуктивний метод).

Перетворенням подібності (подібністю) називається таке перетворення фігури F у фігуру F_1 , внаслідок якого відстані між точками змінюються в тому самому відношенні k (k>0). Число k>0 називають *коефіцієнтом подібності.*

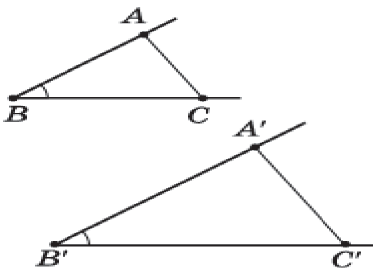
Це означає, що якщо довільні точки X і У фігури F при перетворенні подібності переходять в точки X_1 і $У_1$фігури F_1 , то $X_1У_1$ = кХУ, k – фіксоване додатне число). к > 0, (к - коефіцієнт подібності). При к = 1 маємо $X_1У_1$ = ХУ, тобто відстані між точками фігури зберігається. Це означає, що рух є окремим випадком подібності при к = 1.

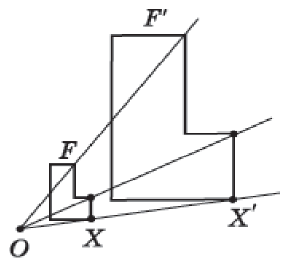


Наочне уявлення про перетворення подібності дає зображення ділянки місцевості на плані, виконане в масштабі. Масштаб у цьому випадку є коефіцієнтом подібності і вказує, у скільки разів реальні відстані між об'єктами відрізняються від відстаней на плані.

Як і в разі руху, неважко довести, що при перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і порядок їх взаємного розташування зберігається.

З цього випливає, що перетворення подібності переводить прямі в прямі, промені - в промені, відрізки - у відрізки. Так само, як і рух, перетворення подібності зберігає кути між променями.





Нехай на площині зафіксовано точку О, точка X - довільна точка фігури F (Рис.). Відкладемо на промені ОХ відрізок ОХ`,що дорівнює kОХ (k - фіксоване додатне число). Провівши так побудови для кожної точки фігури F, одержимо фігуру F`, яка є образом фігури F, отриманим унаслідок перетворення, що називається гомотетією.

Означення. Гомотетією з центром О називається таке перетворення фігури F у фігуру F'. унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що точка X' лежить на промені ОХ і ОХ' = kОХ (k – фіксоване додатне число).

Число k називають коефіцієнтом гомотетії, а самі фігури F і F' — гомотетичними.

В теоретичних курсах розглядають також гомотетії з від'ємними коефіцієнтами, але в загальноосвітній школі обмежуються випадками, коли $k>0$. Бажано звернути увагу учнів і на те, як змінюються розміри фігур при гомотетіях з різними коефіцієнтами: при $k>1$ дістають фігури, більші від даних, при $k<1$ – менші від даних. Зрозуміло, що сказане стосується тільки обмежених фігур, а не таких, як пряма, промінь, півплощина, кут та ін. При будь–якій гомотетії кожний кут переходить в рівний йому кут.

Далі доводиться теорема, що гомотетія є перетворення подібності і розглядаються властивості подібних фігур. Для цього перш за все треба дати означення подібних фігур.

Означення. Дві фігури називаються подібними, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності.

З огляду на властивості перетворення подібності це означення узгоджується з означенням подібних трикутників, поданим у 8 класі. Подібність довільних фігур F і F' позначається так само, як і подібність трикутників F ~ F'.

Щоб геомотетію можна було використовувати для розв'язування задач, слід розглянути найважливіші її властивості, довести, що при гомотетії відрізок переходить у паралельний йому відрізок. Коло – у коло і. д. Треба також запропонувати учням кілька задач на побудову геометричних фігур, на визначення коефіцієнта гомотетії.

Необов'язково обмежуватись тільки многокутниками, колами та іншими геометричними фігурами, які традиційно розглядаються в геометрії. Корисно запропонувати, принаймні сильнішим учням, дослідити, чи гомотетичні графіки функцій $y = x^2$ і $y = \frac{1}{2}x^2$, побудовані на одній координатній площині. Виявляється, гомотетичні графіки функцій $y = x^2$ і $y = ax^2$ при кожному $a>0$.

Застосування гомтетії в шкільному курсі геометрії займає особливе місце. За допомогою гомотетії можна: довести існування подібних фігур і навчити будувати подібні фігури; розв'язувати багато задач на побудову.

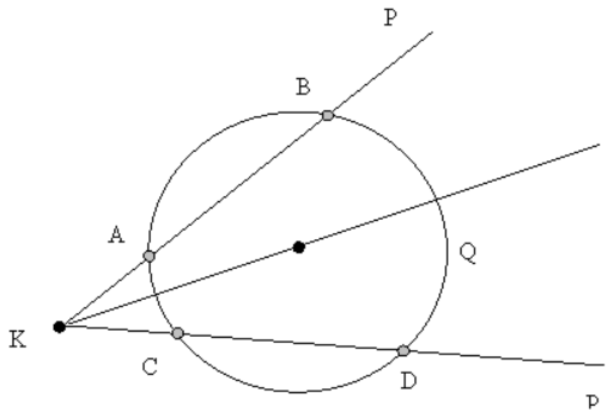
11.4. Метод геометричних перетворень.

На вивчення даної теми в школі відводиться досить багато часу, і це не випадково, так як тема "Геометричні перетворення" знайомить учнів з поняттями сучасної математики, сприяє розвитку просторового мислення, оскільки при вирішенні задач шкільного курсу учням доводиться виконувати розумові операції по перетворенню положення (руху) фігур на площині і в просторі.

При цьому в основному самостійна робота учнів по цій темі зводиться до побудови образів точок і фігур при кожному з усіх видів геометричних перетворень. Але головний потенціал теми "Геометричні перетворення" для вирішення задач практично не реалізований. В учнів не сформоване поняття про метод геометричних перетворень, а вже тим більше про спосіб застосування цього методу при вирішенні практичних завдань.

Тим часом існує досить великий клас задач, які можуть бути вирішені або простіше і легше, або тільки методом геометричних перетворень. Розглянемо деякі з них.

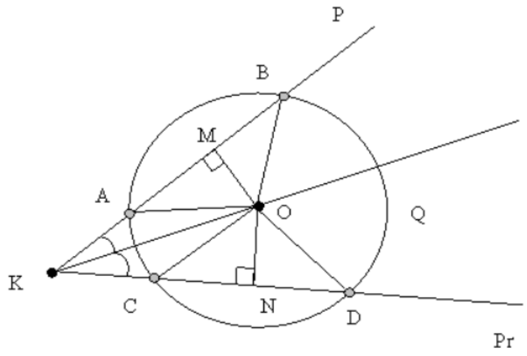
Задача. Коло, центр якого належить бісектрисі кута, перетинає його сторони в точках A, B, C і D. Довести, що AB = CD.



Розв'язання

Позначимо через P одну зі сторін кута, а через Q - круг, межею якого є розглянуте коло. При симетрії s щодо бісектриси кута промінь P переходить в промінь P', який утворює другу сторону кута, а коло Q переходить в себе: s (P) = P', s (Q) = Q. Відповідно до властивості збереження перетину фігура PQ переходить в s (P) s (Q), тобто в P'Q. Інакше кажучи, відрізок AB переходить у відрізок CD, и потому AB = CD.

Другий спосіб розв'язання



1) Опустимо з точки O перпендикуляри на сторони кута.

2) Розглянемо трикутники KMO і KNO, вони рівні як прямокутні по гіпотенузі і гострому куту (KO - загальна, $\angle MKO = \angle NKO$, бо за умовою KO - бісектриса).

3) $\Delta AOM = \Delta CON$ як прямокутні по катету і гіпотенузі (MO = NO - це випливає з пункту 2), AO і CO - радіуси окружності).

4) $\Delta AOM = \Delta BOM$ як прямокутні по катету і гіпотенузі (MO - загальна, AO і BO - радіуси);

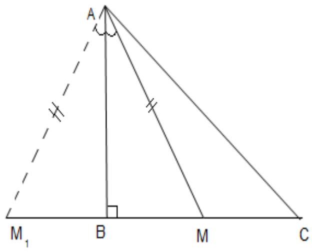
5) аналогічно $\Delta CON = \Delta DON$ (NO - загальна, CO і DO - радіуси);

6) з 4) і 5) випливає, що всі розглянуті трикутники рівні між собою: $\Delta AOM = \Delta BOM = \Delta CON = \Delta DON$, тоді AM = MB = CN = ND, але AM + MB = AB і CN + ND = CD, отже AB = CD, що треба було довести.

Зі змісту обох варіантів вирішення задачі видно, що другий спосіб більш трудомісткий і займає більше часу в учнів, ніж перший.

Задача. У прямокутному трикутнику медіана, проведена до меншого катета, дорівнює m і утворює з більшим катетом кут 15°. Знайдіть площу трикутника.

Розв'язання



Нехай у трикутнику ABC $\angle B = 90°$, BC<AB, AM=m –медіана. Побудуємо точку M_1, симетричну точці M відносно прямої AB. Тоді трикутники MAC і M_1AB рівновеликі, оскільки мають спільну висоту AB, а $M_1B = BM = MC$ за побудовою. Отже

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{MAC} = S_{ABM} + S_{M_1AB} = S_{M_1AM}$$

За побудовою трикутник M_1AM рівнобедрений з бічною стороною m і кутом між бічними сторонами 30°. Таким чином,

$$S_{M_1AM} = \frac{1}{2}m^2 \cdot \sin 30° = \frac{m^2}{4}$$

Відповідь: $\frac{m^2}{4}$.

Геометричні перетворення можна застосовувати не лише опосередковано (тобто для виконання задач, які ґрунтуються на конкретних властивостях різного роду перетворень), а й для розв'язання інших геометричних задач, зокрема до задач на побудову. Таке застосування носить назву метод геометричних перетворень.

Суть цього методу полягає в розгляді поряд з даними фігурами їхніх образів, отриманих за допомогою певного перетворення.

Залежно від того, яке перетворення застосовується, розрізняють метод симетрії, повороту, паралельного перенесення і подібності (для трикутників він розглядався у 8 класі).

В курсі основної школи вивчається лише кілька методів, такі як: метод паралельного перенесення, метод осьової і центральної симетрії, метод повороту.

Метод паралельного переносу. Сутність цього методу полягає в тому, що поряд з даними і шуканими фігурами розглядаються деякі інші фігури, які виходять з даних або шуканих фігур або їх частин шляхом перенесення на деякий вектор. Цим шляхом іноді вдається полегшити проведення аналізу. Метод паралельного переносу застосовують головним чином для об'єднання розрізнених частин фігур, коли часто побудова фігури стає скрутним тільки від того, що частини цієї фігури занадто віддалені один від одного, і тому важко ввести в креслення дані. У цих випадках якусь частину шуканої фігури переносять паралельно самій собі на таку відстань, щоб знову отримана фігура могла бути побудована або безпосередньо, або легше, ніж шукана фігура. Напрямок такого перенесення залежить від умов завдання і повинно бути вибрано так, щоб у знову отриману фігуру увійшло, по можливості, велика кількість даних.

Якщо, наприклад, дані два відрізки і кут, укладений між ними, і якщо один відрізок буде перенесений паралельно самому собі так, щоб один з його кінців поєднався з одним з кінців іншого відрізка, то вийде трикутник, з елементів якого відомі дві сторони і кут, між ними укладений. Цей трикутник легко може бути побудований, що може виявитися корисним при вирішенні задачі.

Особливо часто цим методом паралельного перенесення користуються для побудови многокутників. Іноді також даний метод виявляється корисним при вирішенні задач на "найкоротший шлях".

Використання методу паралельного перенесення вимагає оволодіти наступними діями:

1) будувати точки, в які переходять дані точки при паралельному перенесенні;

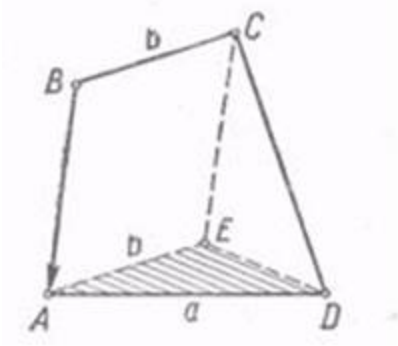
2) бачити відповідні при перетворенні точки;

3) виділяти елементи, і напрямок паралельного перенесення.

Задача. Побудувати опуклий чотирикутник, якщо відомі три його кути і дві протилежні сторони.

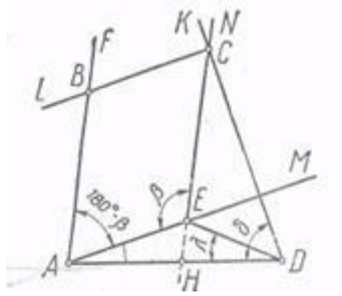
Розв'язання

Дані в умові задачі відрізки a і b, три кути α, β, δ. Треба побудувати чотирикутник ABCD так, щоб $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle D = \delta$, AD = a, BC = b. Передбачається, що 0° < α < 180°, 0° < β < 180°, 0° < δ < 180°,



Аналіз.

Припустимо, що ABCD - шуканий чотирикутник. Перенесемо сторону BC на вектор BA, і нехай відрізок BC займе після перенесення положення AE. Тоді в ΔAED відомі: AD = a, AE = b, ∠DAE = ∠BAD - ∠BAE = = ∠A - (180 ° - ∠B) = α + β - 180 °. За цими даними ΔAED може бути побудований.



Побудова.

1) На довільній прямій будуємо відрізок AD = a ;

2) Через точку A проводимо промінь AM під кутом α + β - 180 ° до променя AD;

3) Відкладаємо на промені AM відрізок AE = b;

4) Будуємо промінь EN, який утворює з EA кут β і розташований з точкою D по різні боки від прямої AM;

5) Будуємо промінь DK так, щоб ∠ADK дорівнював δ і щоб промінь DK розташовувався по ту ж сторону прямої DE, що і промінь EN;

6) Відзначаємо точку C перетину променів EN і DK - третю вершину чотирикутника;

7) Четверта вершина B виходить в перетині прямої AF, паралельної CE, з прямою CL, паралельної AE.

Доведення.

∠BAD = ∠BAE + ∠DAE = (180°-β)+(β+α-180°) = α, ∠ABC = ∠CEA, як кути, сторони яких відповідно паралельні і протилежно спрямовані. ∠CEA = β з побудови. ∠ADC = δ з побудови. Відрізок AD = a з побудови. BC = AE, як відрізки паралельних між паралельними. Але AE = b, а значить, і BC = b.

Метод симетрії полягає в наступному. Припускають задачу вирішеною і одну з даних точок (пряму або коло) відображають в який-небудь відомої осі; іноді ця вісь проходить через відому точку. Тоді отриману симетричну точку (пряму або коло) підпорядковують тими самими умовами, яким повинна була задовольняти замінена точка (пряма або окружність). Після цього вийде нове завдання, яке вирішують способами, вже нам відомими. Звичайно, з вирішенням цієї нової задачі запропонована задача вже буде вирішена сама собою, і тільки в рідкісних випадках доведеться ще переходити до первинних умов завдання. Таким чином, метод симетрії призводить рішення запропонованого завдання до вирішення нового завдання.

Використання осьової симетрії вимагає оволодіння наступними діями:

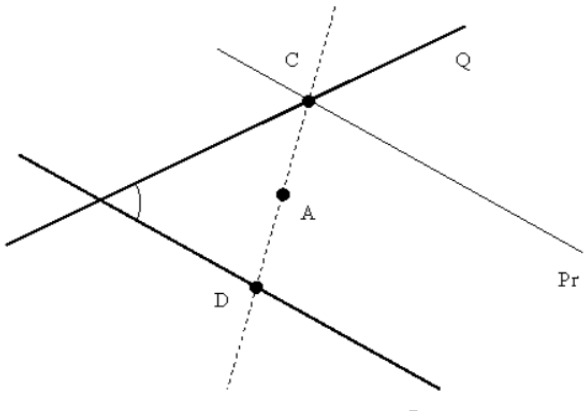
1) будувати образ фігури при осьової симетрії;

2) виділяти при осьової симетрії точки на відповідних при тій же симетрії фігури;

3) бачити вісь симетрії фігури;

4) будувати симетричні відносно прямої точки на заданих фігурах.

Задача. Через точку А, яка дана всередині кута (меншого, ніж розгорнутий), провести пряму, відрізок якої, укладений між сторонами кута, ділиться в цій точці навпіл.



Розв'язання

Позначимо через z симетрію щодо точки А, а через Р і Q - прямі, на яких лежать сторони кута. В результаті симетрії z пряма Р переходить в паралельну їй пряму Р', яка перетинає другу сторону кута в точці С. Так як С ∊ Р', то точка D, симетрична С, належить прямій, яка симетрична Р', тобто D ∊ Р. Таким чином, точки D ∊ Р і С ∊ Q симетричні щодо А, і тому відрізок CD ділиться в точці А навпіл, тобто пряма CD - шукана.

Метод повороту (обертання) Обертанням (поворотом) також користуються як засобом для вирішення геометричних задач на побудову. Ідея методу обертання полягає в тому, щоб повернути будь-яку дану або шукану фігуру близько доцільно обраного центру на відповідний кут так, щоб полегшити проведення аналізу задачі або навіть безпосередньо прийти до вирішення. Пояснимо цей прийом декількома прикладами.

Завдання на обертання близько точки можна розділити на три групи. *Перша* *група.* У задачі цієї групи обертання має той же характер, як і паралельне перенесення, тобто воно зближує частини фігури в положення, зручне для побудови, вводить в креслення дані, поєднує рівні або нерівні кути і лінії і взагалі зводить це завдання на іншу. У завданнях цього роду центр обертання безпосередньо відомий.

Друга група. У задачі цієї групи при даних центрі, куті та відношенню обертання потрібно відшукати дві відповідні точки, що лежать на даних прямих або колах. Очевидно, якщо помножити і повернути пряму (або коло) на даний кут, то вона зустріне іншу пряму (або коло) в шуканої точці.

Третя група. У задачах цієї групи дано дві лінії і на кожній з них по відповідній точці; потрібно визначити на тих же лініях за новою відповідною точкою так, щоб вони задовольняли будь-яким умовам; центр обертання невідомий. Припустимо, що є достатньо даних для суміщення даних ліній і шуканих точок. Тоді можна визначити центр обертання. Залишається помітити залежність між даними, шуканими і центром обертання. Ця залежність дасть вказівку на рішення задачі.

Компонентами вміння застосовувати метод повороту є наступні дії:

1) будувати образи фігур при повороті;

2) виділяти відповідні при повороті точки на відповідних при цьому ж повороті фігури;

3) бачити центр повороту;

4) будувати відповідні при повороті точки на будь-яких заданих фігурах;

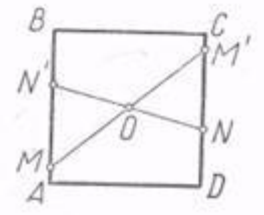
5) використовувати специфічні властивості повороту.

Задача. Земельна ділянка квадратної форми була обгороджена. Від огорожі збереглися два стовпи на паралельних сторонах квадрата. Крім того, залишився стовп в центрі квадрата. Потрібно відновити кордон ділянки.

Розв'язання

Аналіз.

Нехай ABCD - шуканий квадрат, O - його центр, M і N - дані точки відповідно на сторонах AB і CD. Якщо повернути квадрат на 180° відносно його центру O, то він перетворюється сам у себе. Точка M займе деяке положення M ' на стороні CD, а точка N - деяке положення N' на стороні AB. Після цього неважко вже побудувати прямі AB і CD і відновити шуканий квадрат.



Побудова.

1) Будуємо точку M ', симетричну M щодо 0, і точку N', симетричну N щодо O.

2) Будуємо прямі MN ' і NM'.

3) Повернемо побудовані прямі відносно точки О на 90°. Чотири побудовані прямі обмежують шуканий квадрат.

Доведення опускаємо.

Дослідження.

За змістом задачі неможливий випадок, коли точки М і N розташовуються з точкою О на одній прямій, але не симетричні щодо О. Якщо точки М і N симетричні щодо О, то задача стає невизначеною. В інших випадках задача має єдине рішення.

Метод подібності. Основна ідея методу подібності полягає в наступному.

Спочатку будують фігуру, подібну шуканої, так, щоб вона задовольняла всім умовам задачі, крім одного. Потім будують уже шукану фігуру, як фігуру подібну побудованій і яка задовольняє опущеній вимоги.

Метод подібності знаходить застосування зазвичай у випадках, коли серед даних лише одне є відрізком, а всі інші дані - або кути, або відносини відрізків.

Зазвичай доцільно допоміжну фігуру будувати так, щоб вона була не тільки подібної шуканої, але і подібно розташована їй, успіх рішення істотно залежить в цих випадках від вибору центру подібності.

При вирішенні завдань на побудову методом подібності часто корисно скористатися наступним зауваженням.

$$\frac{a'+b'}{a+b}, \frac{a'-b'}{a-b}, \frac{a'+b'-c'}{a+b-c}$$

Якщо дві фігури подібні, то коефіцієнт подібності дорівнює відношенню будь-яких двох відповідних відрізків. Якщо відрізкам a, b, c, ... фігури Ф відповідають відрізки a`, b`, c`, ... подібної фігури Ф`, то коефіцієнт подібності дорівнює також відносинам і т.д.

Компонентами вміння застосовувати метод подібності є наступні дії:

1) використовувати специфічні властивості перетворення;

2) виділити при методі подібності точки на відповідні при тій же симетрії фігури;

3) будувати відповідні при повороті точки на будь-яких заданих фігурах.

Метод гомотетії. Перетворення фігури, при якому кожна її точка переходить в точку отриману побудовою, називається гомотетією відносно центра О. Гомотетія, є перетворення подібності, яка широко застосовується на практиці при виконанні креслень деталей машин, споруд, планів місць та ін. Ці зображення є подібні перетворення уявних зображень в натуральну величину. Коефіцієнт при цьому називається масштабом. Наприклад, якщо ділянка місцевості зображується в масштабі 1: 100, то це означає, що одному сантиметру на плані відповідає 1 м. на місцевості.

Компонентами вміння застосовувати метод гомотетії є наступні дії:

1) використовувати специфічні властивості перетворення;

2) будувати образ зображень на площині;

3) знаходити центр гомотетії, обчислити його коефіцієнт.

І так якщо ми хочемо оволодіти вмінням вирішувати задачі методом перетворень, необхідно виробити в учнів такі вміння і навички методу:

1) будувати образи фігур в кожному перетворенні, яке вимагається;

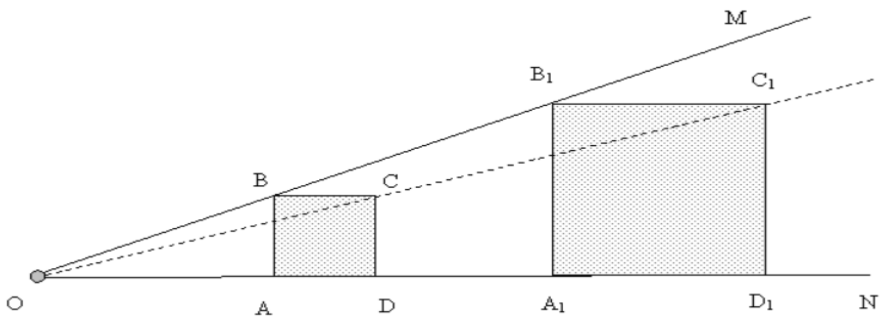
2) бачити відповідні при зазначеному перетворенні точки на відповідних фігурах;

3) виділяти елементи, що визначають те чи інше перетворення (вісь або центр симетрії, центр і кут обертання, вектор паралельного переносу, центр і коефіцієнт гомотетії і т.п.);

4) будувати відповідні при зазначеному перетворенні точки на невідповідних фігурах;

5) використовувати специфічні властивості перетворень.

Задача. Побудувати квадрат, вписаний в даний сектор (дві вершини квадрата лежать на одному радіусі, третя - на іншому, четверта - на дузі сектора).



Розв'язання

Нехай ABCD і $A_1B_1C_1D_1$ - два квадрата, вписані в кут MON. При гомотетії з центром O, що переводить точку B в B_1, (коефіцієнт цієї гомотетії дорівнює $k = OB_1 / OB$), відрізок AB переходить у відрізок A_1B_1, а тому квадрат ABCD переходить в квадрат (оскільки кути, а також відношення відрізків зберігаються). З цього випливає, що вершини C і C_1, лежать на одному промені, що виходить з точки O. Тепер ясно, що, побудувавши який-небудь квадрат ABCD, вписаний в кут MON, і провівши промінь OC, ми зможемо знайти вершину C_1 шуканого квадрата (тобто точку перетину променя OC з дугою MN сектора), а потім добудувати шуканий квадрат.

Ієрархія виділених умінь застосовувати геометричні перетворення в конкретних ситуаціях така, що кожне наступне вміння охоплює попереднє і разом з тим піднімає учнів на новий, більш високий рівень в оволодінні методом геометричних перетворень. Необхідно мати на увазі те, що вміння застосовувати геометричні перетворення в конкретних ситуаціях передбачає володіння багатьма зазначеними діями на розумовому етапі. Так само варто відзначити те, що застосування осьової симетрії, а також і інших перетворень передбачає володіння умінням подумки будувати образи фігур без безпосередніх побудов. І оволодіння різними діями передбачає різні рівні їх формування, що має бути передбачено при конструюванні вправ.

Тема 12. Вектори на площині.

12.1. Вступні зауваження.

Одним із фундаментальних понять сучасної математики є вектор і його узагальнення – тензор. Еволюція поняття вектора відбувалася завдяки широкому застосуванню цього поняття в різних галузях математики, механіки, техніки. На сучасному етапі розвитку математики на векторній основі викладаються лінійна алгебра, аналітична і диференціальна геометрії.

Отже, природно, що ще в 50-х рр. XX ст. висловлювалася думка про необхідність впровадження в шкільний курс математики ідею вектора, при цьому спостерігалося два підходи: крайній модерністський (представники якого – Ж. Дьєдонне, Г. Шоке та ін. - наполягали на тому, щоб зробити ідею вектора базисною ідеєю ШКМ) і поміркований (який очолювали А.М. Колмогоров і О.І. Маркушевич з пропозицією ввести поняття вектора і необхідний апарат векторної алгебри із загальноосвітньою метою).

Матеріалу, безпосередньо пов'язаного з вивченням векторів на площині, відводиться досить небагато часу в шкільній програмі з математики. Хоча, варто зауважити, що курс геометрії в старших класах середньої школи будується саме на основі векторних уявлень. Даний матеріал грає важливу роль при вирішенні школярами багатьох геометричних і фізичних задач, закладає основу для вивчення поняття вектора в просторі.

Сучасна програма з математики і автори паралельних підручників не ставлять за мету систематичне використання векторного методу при доведенні теорем і розв’язуванні задач, а передбачають вивчати їх із розвивальною метою і послуговуватися ними лише для розв’язування найпростіших стандартних задач. Звичайно, в спеціалізованих класах фізико-математичного профілю, на факультативах передбачається більш детальне вивчення і застосування векторів.

За програмою 2017 р. вивчення векторів на площині відбувається в 9 кл. Ознайомленню з векторами передує вивчення декартових координат і геометричних перетворень. Програма вимагає від учнів мати уявлення про вектор, рівні вектори, вміти виконувати операції над векторами, що передбачені цією програмою, використовувати векторний метод до розв’язування нескладних стандартних задач.

12.2. Означення вектора.

Поняття вектора - одне з основоположних, тому воно розмите і багатолике. У старих підручниках зустрічається поняття "закріплений (пов'язаний) вектор" і "вільний вектор". З точки зору лінійної алгебри вектор - елемент векторного простору, об'єкт, для якого визначені операції додавання і множення на число, що задовольняють певним вимогам. Ототожнення точки з її радіус-вектором дозволяє вважати, що вектор - це точка площини (простору) або ж пара (трійка) чисел - її координати. Можна також сказати, що вектор є паралельний перенос площини (простору). Цей підхід був загальноприйнятий в період поширення підручників А.М. Колмогорова і Є.М.Скопця. У визначенні вектора особливу складність представляє поняття співнаправленості, більшість підручників апелює до наочних уявлень. Досить суворим виклад можна зробити, вдавшись до координатного визначення вектора, хоча при цьому втрачається наочність. Елементи цього підходу є в підручниках.

Численні дискусії, які тривають протягом багатьох років з приводу того, яке ж означення вектора взяти в ШКГ не безпричинні. Найчастіше в підручниках пропонується таке означення вектора: "Вектор – це напрямлений відрізок". Однак не всі методисти з таких означенням погоджуються, адже вважають неправомірним ототожнювати поняття з його зображенням. Так, наприклад, ділення позначають двокрапкою, але речення "двокрапка називається діленням" ніхто не назве вірним означенням.

Вперше учні знайомляться з поняттям векторної величини (як величини, що характеризується не тільки числом (довжиною вектора), а ще й напрямком) в курсі фізики, і у них може скластися невірне уявлення про те, що вектор – фізичне поняття. Насправді в фізиці та геометрії розглядають різні поняття вектора. В фізиці розрізняються *зв'язані (прикладені*) та *ковзні* вектори, в геометрії вивчаються тільки *вільні* вектори. Прикладений вектор визначається довжиною, напрямком і точкою прикладання, ковзний – довжиною, напрямком і прямою, вільний – тільки довжиною і напрямом.

У навчально-методичній літературі зустрічаються різні означення вільних векторів. Вектори трактуються як:

1) напрямлений відрізок евклідового простору, в якого один кінець називається початком вектора, а другий – його кінцем;

2) упорядкована пара точок;

3) клас еквівалентних напрямлених відрізків;

4) паралельне перенесення;

5) упорядкована пара, трійка, ..., n-ка чисел.

Кожне з наведених трактувань є інтерпретацією більш загального абстрактного поняття вільного вектора, означення якого формулюється в теоретичних курсах геометрії: будь-яку множину об'єктів, яка задовольняє вісім аксіом системи Вейля, називають множиною векторів, а будь-який елемент цієї множини – вектором.

У школі з дидактичних міркувань звичайно розглядають одну з інтерпретацій. Але яке б означення учням не пропонувалося, відразу ж після його формулювання треба сказати, що на рисунках вектори зображують напрямленими відрізками і показати, як це роблять.

12.3. Методика вивчення основних понять і теорем.

З метою мотивації введення поняття "вектор" учням слід нагадати, що вони зустрічалися з цим поняттям у курсі фізики (наприклад, сила – векторна величина).

Поняття вектора в геометрії виникло як математична абстракція об’єктів, які характеризуються величиною і напрямком на відміну від скалярних величин, які визначаються лише числом. Проте не будь-яка величина, що характеризується модулем (числовим значенням при даній одиниці) і напрямом, є вектором. Справді, потік машин на вулиці можна виміряти кількістю машин за 1 год, і цей потік має напрям, однак такі величини не додаються як вектори, наприклад, за правилом трикутника або паралелограма.

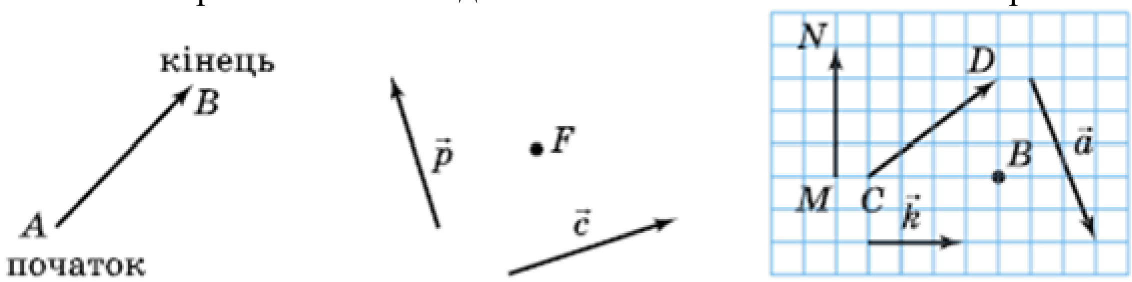
Викладений у підручниках [1; 2] теоретичний матеріал стосовно векторів, як зазначають методисти, вигідно відрізняється чіткістю, економністю, простотою доведень законів дій над векторами (завдяки обраному методу викладу - координатному).

У темі, присвяченій векторам на площині, вводиться значна кількість нових для учнів понять – абсолютна величина (модуль вектора), нульовий вектор, координати вектора, колінеарні вектори та ін.

Означення. Відрізок, для якого визначено напрям, називають направленим відрізком або вектором.

Вектор зручно зображувати відрізком зі стрілкою, яка показує напрям вектора. Вектор позначають двома великими латинськими літерами, першу з яких вважають початком, а другу - його кінцем, та стрілкою над ними.

Інколи вектори позначають однією маленькою латинською літерою.



Більшість понять вводиться абстрактно-дедуктивним методом.

Одним з найважливіших для подальшого викладу матеріалу є поняття про координати вектора. Не можна обмежуватися лише формальним введенням означення цього поняття, доцільно мотивувати потребу в ньому, дати учням наочне уявлення про координати вектора на координатній площині.

Якщо на площині ввести систему координат, то кожний вектор можна задати парою чисел - координатами вектора.

Записують вектор $\overline{AB}$, указуючи його координати, так: $\overline{AB}(x;y)$.

Якщо вектор задано координатами начала і координатами кінця, тобто $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, то $\overline{AB}(x_2 - x_1;y_2 - y_1)$.

Означення. Довжиною (або модулем) вектора $\overline{AB}$ називається довжина відрізка, що зображує вектор

Модуль вектора учні можуть вивести самі, потрібно дати їм тільки напрямок пошуку. Вектори вивчаються за допомогою декартових координат. Вектор заданий двома точками (початком і кінцем), а формула відстані між двома точками відома. Тому формулу модуля (довжини) вектора вивести не важко.

$|\overline{AB}(x;y)| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Далі вводимо означення нульовому, ненульовому вектору, колінеарним векторам, співнапрямленим і протилежно напрямленим векторам, рівним векторам. Обов'язково супроводжувати введення понять демонстраціями на рисунках.

Означення. Два вектори називаються рівними, якщо вони суміщаються паралельним перенесенням.

Детально обгрунтовуються властивості рівних векторів:

1) Рівні вектори співнапрямлені і мають однакові довжини.

2) Якщо вектори співнапрямлені і мають однакові довжини, то вони рівні.

3) Від будь - якої точки можна відкласти вектор, що дорівнює даному, і притому тільки один.

Завдяки спеціально підібраних вправ учні мають дійти висновкам:

1) координати рівних векторів однакові, а різних – різні;
2) модуль вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат.

Отже, учні дістали потребу довести необхідну і достатню умову рівності двох векторів.

Теорема. У рівних векторів відповідні координати рівні, і навпаки, якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні.

Доведення теореми проводиться на основі декартових координат, метод вивчення - проблемний.

12.4. Вивчення дій над векторами.

Додавання і віднімання векторів.

На наступному уроці учням пропонується знайти координати трьох векторів, які утворюють трикутник і встановити залежність між ними. Це підведе учнів до означення суми двох векторів, тобто таке означення доцільно ввести конкретно-індуктивним способом.

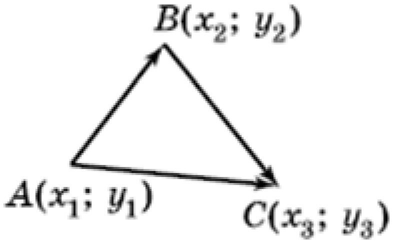
Аналогічно тому, як було введено означення суми двох векторів, можна ввести означення різниці двох векторів через їх координати. Для векторного методу розв’язування задач важливо, щоб учні навчились вільно, шляхом відповідних побудов знаходити суму і різницю векторів. Тут виявляється ефективним алгоритмічний підхід – вміння знаходити суму двох векторів за правилом трикутника або паралелограма.

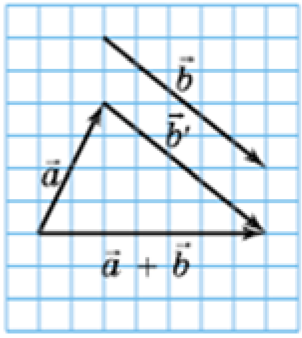
Означення. Сумою векторів $\bar{a}$ $(x_1;y_1)$ і $\bar{b}(x_2;y_2)$ називають вектор $\bar{c}$ $(x_1+ x_2; y_1+ y_2)$.

Для векторів так само, як і для дійсних чисел виконуються переставний і сполучний закони. Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати векторів.

Теорема. Для будь-яких точок A, B, C справджується рівність $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$.

Доведення теореми засноване на декартових координатах, використовуємо проблемний метод навчання.



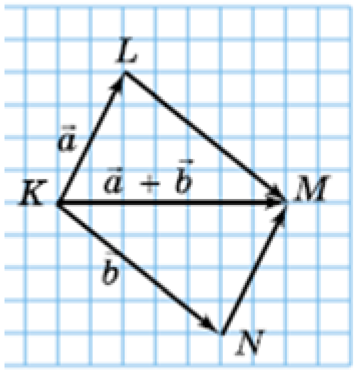


Після доведення теореми приходимо до правила побудови суми двох довільних векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ методом трикутника:

1) від кінця вектора $\bar{a}$ відкладаємо вектор $\bar{b}$`, що дорівнює вектору $\bar{b}$;

2) будуємо вектор, початок якого збігається з початком вектора $\bar{a}$, а кінець - з кінцем вектора $\bar{b}$`, цей вектор і є сумою векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Суму двох векторів можна знаходити і за правилом паралелограма.



Віднімання векторів вивчається аналогічно додаванню і як операція зворотна додаванню.

Множення вектора на число. Скалярний добуток векторів.

Згадуємо з учнями що таке сума чисел а + а, к + к + к. В алгебрі такі суми записували 2а, 3к. Якщо є сума векторів $\bar{a} + \bar{a} + \bar{a}$, то як і в алгебрі будемо записувати (на основі операції суми над векторами) $3\bar{a}$.

Результатом множення вектора на число є вектор, *тобто добутком вектора* $\bar{a}(x;y)$ *на число* μ *називають вектор* $\mu\bar{a}(\mu x;\ \mu y)$.

Для добутку вектора на число справджуються властивості:

1) $(\alpha + \beta)\,\bar{a} = \overline{\alpha a} + \overline{\beta}a$;

2) $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$.

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати лівої і правої частин рівностей.

Учні повинні розуміти, що за означенням суми, різниці векторів та добутку вектора на число можна визначити координати будь-якого вектора, записаного у вигляді алгебраїчної суми векторів, координати яких відомі.

Далі доводимо важливу теорему.

Теорема. Модуль вектора $\alpha\bar{a}$ дорівнює $|\alpha||\bar{a}|$. Вектор $\alpha\bar{a}$ співнапрямлений з вектором $\bar{a}$, якщо $\alpha > 0$, і протилежно напрямлений, якщо $\alpha < 0$.

При доведенні теореми вчитель підказує учням вибір системи координат і розміщення необхідних векторів. Далі діє проблемний метод навчання (метод доведення - координатний учням відомий).

З доведеної теореми випливає важливий висновок, який дає можливість визначити умову колінеарності векторів - пропорційність відповідних координат (це необхідна і достатня умова).

Розглянемо це одну операцію з векторами. Це скалярний добуток векторів.

Означення. Скалярним добутком векторів $\bar{a}\,(x_1;y_1)$ і $\bar{b}(x_2;y_2)$ називають число $x_1x_2 + y_1y_2$.

Позначають скалярний добуток векторів так само, як добуток чисел або змінних: $\bar{a}\bar{b}$ або $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

Для розв`язування задач дуже важливо використовувати скалярний квадрат вектора. Треба пояснити учням, що скалярний добуток вектора самого на себе $\bar{a} \cdot \bar{a}$ позначають $\bar{a}^2$ і називають скалярним квадратом вектора. *Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля* $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$. Коли при розв`язування задач треба знайти довжину вектора, то шукають квадрат довжини вектора через скалярний квадрат вектора.

З означення скалярного добутку векторів випливають такі *властивості*:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;

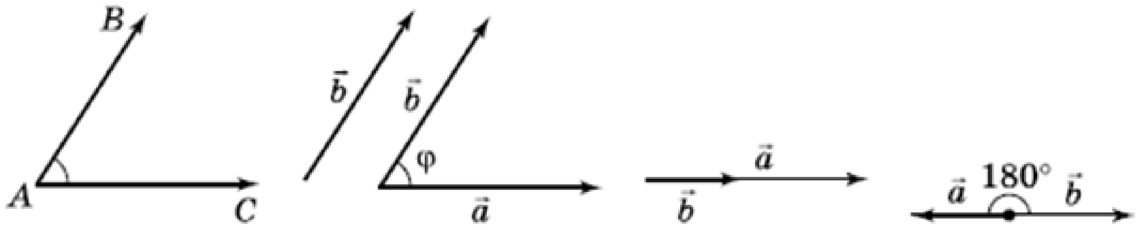
2) $(\alpha\bar{a}) \cdot \bar{b} = \alpha(\bar{a} \cdot \bar{b})$;

3) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$.

Для доведення цих властивостей достатньо порівняти числа, яким відповідно дорівнюють ліва і права частини рівностей.

Далі треба ввести ще одне важливе поняття - це поняття кута між векторами.

Означення. Кутом між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ називають кут BAC. Кутом між двома ненульовими векторами, які не мають спільного початку, називають кут між векторами, що дорівнюють даним і мають спільний початок.



Кут між співнапрямленими векторами дорівнює нулю, кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180°.

Теорема. Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх модулів на косинус кута між ними.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi$$

Доведення теореми про скалярний добуток векторів є яскравим прикладом використання скалярного квадрата вектора та властивості скалярного добутку векторів. Пошук путі доведення теореми організувати проблемним методом навчання. Треба все більше і більше активізувати пізнавальну діяльність учнів, розкривати перед ними арсенал методів математики.

Після доведення теореми сформулювати два наслідки з теореми.

Наслідок. Якщо вектори перпендикулярні. то їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Наслідок. Якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні.

Скалярний добуток векторів дає змогу знайти косинус кута між ненульовими векторами.

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}.$$

12.5. Застосування векторного методу.

До складу діяльності, спрямованої на використання векторного методу, входять такі специфічні розумові дії:

1) переформулювання відношень між фігурами з геометричної мови на мову векторів і обернена дія;

2) дії (операції над векторами);

3) подання вектора у вигляді суми, різниці двох векторів, добутку вектора на число;

4) перетворення векторних рівностей з використанням законів векторної алгебри і властивостей скалярного добутку;

5) перехід від співвідношень між векторами до співвідношень між їх довжинами.

Згідно з теорією поетапного формування розумових дій важливе попереднє поетапне відпрацювання кожної розумової дії, що входить до процесу розв’язування задач векторним методом. З метою успішного засвоєння учнями першої розумової дії можна запропонувати учням таблицю основних відношень обома мовами (див. підручник З.І.Слєпкань, с. 316).

З векторним методом доведення геометричних тверджень і відповідним правилом орієнтиром доцільно ознайомити учнів на прикладі доведення двох тверджень, доведення першого з яких знайоме учням без застосування векторів (наприклад, властивість середньої лінії трикутника).

Організовуючи колективний пошук розв’язання, можна прийти до правила орієнтира застосування векторного методу (див. підручник З.І.Слєпкань, с. 319).

Слід звернути увагу учнів на те, що векторний метод доведення тверджень не є універсальним: його зручно застосовувати для доведення паралельності та перпендикулярності прямих і відрізків, належності трьох точок одній прямій, подільності відрізка в даному відношенні для доведення співвідношень між довжинами відрізків і величинами кутів.

При розв’язуванні метричних задач, зокрема на визначення довжини відрізка і міри кута векторним методом, доцільно запропонувати учням відповідні алгоритми (див. підручник З.І.Слєпкань, с. 320).

Крім того аналіз діяльності застосування векторів в конкретних ситуаціях дозволяє виділити в її структурі основні дії (компоненти), які визначають зміст вправ на оволодіння векторним методом. Розглянемо навчання учнів векторному методу за допомогою знакових моделей - схем, таблиць, формул. Зазначимо, що блок-схеми виступають в якості наочного способу фіксації зв'язків між даними і шуканими об'єктами, тому оформимо рішення наступного завдання, використовуючи схему.

Задача. Доведіть, що якщо в чотирикутнику ABCD діагоналі, перетинаючись, діляться навпіл (в точці O), то цей чотирикутник - паралелограм.

Дано: ABCD - чотирикутник

$O = AC \cap BD$, $AO = OC$, $BO = OD$.

Довести: ABCD - паралелограм.

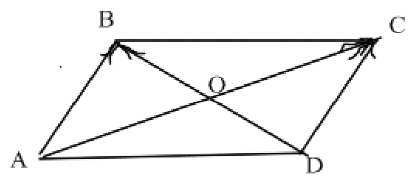


Схема розв`язування задачі за допомогою знакових моделей

Введення векторів $\longleftrightarrow$ Переклад геометричних понять і відносин на мову векторів - перший етап рішення задачі

$\downarrow$

↓

Уявімо ↔ Виконання дій над векторами, перетворення векторних рівностей - другий етап рішення задачі

↓ ↓

то , ABCD – розв`язування наступної ↔ Переклад векторного результату на геометричну мову - третій етап рішення задачі

На прикладі вирішеної задачі ми виділили основні компоненти векторного методу, роз'яснили його суть.

Кожне з виділених вище дій визначає відповідний йому вид вправ, в процесі виконання яких учні будуть опановувати векторним методом.

Приклад 1. Запишіть у векторному вигляді

а) точки А і В співпадають ($\overrightarrow{AB} = 0$);

б) прямі АВ і CD паралельні ($\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$);

в) точка X лежить на відрізку CD (CX = k·XD);

г) три точки M, N, P лежать на одній прямій (M N = k·MP);

д) три точки A, B, C є вершинами трикутника ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$\$

е) точка С - середина відрізка АВ ($\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB}$);

ж) точка К лежить на відрізку АВ і ділить його у відношенні $\frac{p}{q}$ ($\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}} = \frac{p}{q}$).

Приклад 2. Використовуючи скалярний добуток, запишіть у векторному вигляді

а) точки А і В співпадають ($\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \cdot 0 = 0$);

б) прямі АВ і CD перпендикулярні ($\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$);

в) $\angle ABC > 90°$, $\angle MPK < 90°$ ($\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}<0$, $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PK} >0$);

г) точка X лежить на прямій AB ($|\overrightarrow{AX}| \cdot |\overrightarrow{AB}|$).

В цих прикладах здійснюється переклад термінів і відносин з геометричного мови на векторну.

Приклад 3. Який геометричний зміст векторних співвідношень

а) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (відрізки AC і BD паралельні і рівні);

б) $\overrightarrow{PQ} = k \cdot \overrightarrow{ST}$ (прямі PQ і ST паралельні);

в) $\overrightarrow{AK} = \varphi\ \overrightarrow{AB}$ (точки А, К, В лежать на одній прямій);

г) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{MK}$ (N - середина відрізка МК);

д) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$ (А - середина ВС).

У цій вправі здійснюється переклад термінів і відносин з векторного мови на геометричну.

Далі можна скласти систему вправ по другому етапу вирішення задач векторних методом - уявлення вектора у вигляді суми (різниці) двох векторів, добутку вектора на число, перетворення векторних рівностей. (На практичному занятті)

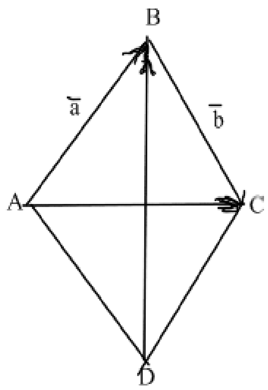
Підвищена увага зазначеним вище задачам полегшує використання векторів в конкретних ситуаціях, до того ж викликає певну розумову діяльність. В процесі вирішення цих типів задач виробляються критерії використання векторів для доведення деяких залежностей, але ці критерії не повідомляються учням в готовому вигляді, учні опановують ними в процесі вирішення задач.

Відмітимо, що формування багатьох умінь, які є компонентами уміння застосовувати векторний апарат, діючі підручники з геометрії забезпечують недостатнім чином. Вміння представляти вектор у вигляді суми, різниці двох векторів, добутку вектора на число та здійснення додавання, віднімання, множення вектора на число є зворотними, як і переклад з геометричної мови на векторну і переклад з векторної мови на геометричну. Зворотні асоціації відіграють важливу роль в здійсненні розумових процесів, вони дозволяють усвідомлювати різноманіття зв'язків між досліджуваними поняттями.

Вирішимо задачу, в якій застосовуються компоненти векторного методу.

Розглянемо доведення теореми за допомогою векторів.

Теорема. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

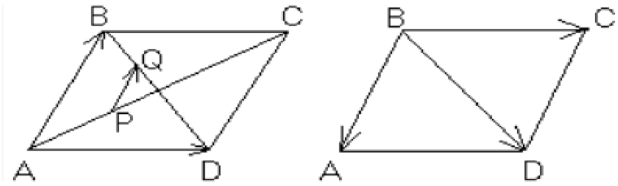


Доведення.

Нехай ABCD - даний ромб. Введемо позначення: AB = $\vec{a}$, BC = $\vec{b}$. З означення ромба: AB = DC = a, AD = BC = b. За означенням суми і різниці векторів $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$. Розглянемо $\overrightarrow{AC} * \overrightarrow{DB} = (\vec{a} + \vec{b}) * (\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2$.

Так як сторони ромба рівні, то a = b. Отже, AC * DB = 0. З останнього отримуємо те, що треба було довести.

Задача: В паралелограмі ABCD діагоналі AC і BD розділені в співвідношенні 1: 2 і 2: 3 відповідно точками P і Q. Розкласти вектор $\overline{PQ}$ по векторам $\overline{AB}, \overline{AD}$.



Розв`язання

Використовуючи правило складання векторів, висловимо вектори $\overline{\text{AC}}$ і $\overline{\text{BD}}$ через вектори $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ наступним чином: $\overline{\text{AC}} = \overline{AB} + \overline{AD}$; $\overline{\text{BD}} = \overline{AD} - \overline{AB}$.

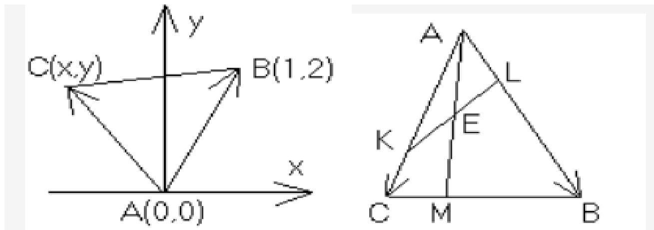
Вектори $\overline{\text{B}Q}$ і $\overline{\text{AP}}$ колінеарні векторам $\overline{\text{BD}}$ і $\overline{\text{AC}}$ відповідно, тому

$\overline{\text{B}Q} = \frac{2}{5}\,\overline{\text{BD}} = \frac{2}{5}(\overline{AD} - \overline{AB})$; $\overline{\text{AP}} = \frac{1}{3}\,\overline{\text{AC}} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AD})$.

В чотирикутнику ABQP можна записати наступне співвідношення

$\overline{PQ} = \overline{AB} + \overline{\text{B}Q} - \overline{\text{AP}} = \overline{AB} + \frac{2}{5}(\overline{AD} - \overline{AB}) - \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AD}) = \overline{AB} + \frac{2}{5}\overline{AD} - \frac{2}{5}\overline{\text{AB}} - \frac{1}{3}\overline{AB} - \frac{1}{3}\overline{AD} = \frac{4}{15}\overline{AB} + \frac{1}{15}\overline{AD}$.

Задача. На координатній площині точки A(0;0), B(1;2) є вершинами правильного трикутника. Знайти координати вектора $\overline{\text{AC}}$, який утворює тупий кут з віссю абсцис, якщо C - третя вершина трикутника.



Розв`язання

За умовою задачі $|\overline{\text{AB}}| = |\overline{\text{AC}}| = \sqrt{5}$. $\angle BAC = 60°$. Запишемо скалярний добуток векторів $\overline{\text{AC}}$(x;y) і $\overline{\text{AB}}$(1;2). Маємо $\overline{\text{AC}} \cdot \overline{\text{AB}} = x + 2y$.

З іншої сторони маємо рівняння $\overline{\text{AC}} \cdot \overline{\text{AB}} = |\overline{\text{AB}}| \cdot |\overline{\text{AC}}| \cos 60° = \frac{5}{2}$. Тобто $x = \frac{5}{2} - 2y$. Так як $|\overline{\text{AC}}| = \sqrt{5}$, то отримуємо рівняння $(\frac{5}{2} - 2y)^2 + y^2 = 5$. $4y^2 - 8y + 1 = 0$. $y_{1,2} = 1 \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$. $x_{1,2} = \frac{1}{2} \mp \sqrt{3}$.

Так як вектор $\overline{\text{AC}}$ утворює тупий кут з віссю абсцис, то $x < 0$, $y > 0$. Тоді вектор $\overline{\text{AC}}$ має такі координати $\overline{\text{AC}}(\frac{1}{2} - \sqrt{3};\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Рекомендована література

1. Бевз Г.П. "Уроки геометрії в 7 класі". Посібник для вчителів /Г.Бевз, В.Бевз, Н.Владімірова. К., "Вежа", 2008. 128 с.
2. Бевз Г.П. "Методи навчання математики". Х.: Вид. Група "Основа ", 2003. 96 с.
3. Бурда М.І. Вивчення геометрії у 7 класі. Методичний посібник. К.: Радянська школа. –1984. 112 с.
4. Галайко Р.П. Ознаки рівності трикутників. *Математика*. 2003. №1. С.6–10.
5. Кушнір І.А. Трикутник у задачах. К.: Либідь. 1994. 104 с.
6. Медяник А.Г. "Учителеві про шкільний курс геометрії". Книга для вчителя. К.: Рад. Шк., 1988. 124 с.
7. Навчальні програми з математики для загальноосвітніх навчальних закладів України + опис ключових змін. 5 – 9 класи. - К.: 47 Видавничий дім "Освіта", 2017. 56 с.
8. Ненхо Т. Вивчення шкільної геометрії як засіб розвитку різних видів мислення учнів. *Математика в школі*. –2003. №2. С. 34– 35.
9. Омел’яненко В.О. Сума кутів трикутника. Математика. 2003. №11. С.14–16.
10. Паньков В.Г. Методи розв’язування задач на побудову (методичний посібник). Кам’янець-Подільський. 1996. 64 с.
11. Слєпкань З.І. "Методика навчання математики" Підручник для студ. мат. спеціальностей пед. навч. К.: Зодіак - Еко, 2000. 512 с.
12. Тадеєв В.О. Геометрія. 7 клас. Поглиблений курс / Підручник. "Тернопіль. Навчальна книга – Богдан", 2007. 352 с.
13. Сморжевський Л.О. Геометрія 7–9. Дидактичні матеріали та тематичні перевірочні роботи для рівневого навчання. Кам’янець-Подільський: Абетка-Нова. 2002. 104 с.
14. Тарасенкова Н.А. "Математика. На допомогу вчителю". Київ. Видавничий дім "Освіта". 2013. " 56 с.

15. Таранська С.І. Сума кутів трикутника. *Математика в школі*. 2003. №1. С.13–15.