Державний заклад "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського"

Кафедра математики і методики її навчання

Тамара КОРОСТІЯНЕЦЬ

НЕРІВНОСТІ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Методичні рекомендації
для організації самостійної роботи та дистанційного навчання за курсом "Методика навчання шкільного курсу математики" здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Одеса - 2023

Рекомендовано до друку рішенням ученої ради Державного закладу "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського" (протокол №11 від 27 квітня 2023 року).

Коростіянець Т.П. Нерівності в шкільному курсі математики. Методичні рекомендації для організації самостійної роботи та дистанційного навчання за курсом "Методика навчання шкільного курсу математики" здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Одеса, Університет Ушинського, 2023. 50 с.

Рецензенти: В

Волкова М. Г., кандидат фізико-математичних наук, доцент, в.о. завідуючого кафедри вищої математики Державного університету інтелектуальних технологій і зв`язку.

Галіцан О.А., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри педагогіки, Державного закладу "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського".

ПЕРЕДМОВА

Нерівності в шкільному курсі математики - методичні рекомендації призначені для організації самостійної роботи та дистанційного навчання за курсом "Методика навчання шкільного курсу математики" здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем 3-го року навчання спеціальності 014 Середня освіта (Математика).

У них викладено основні питання з методики розв`язування нерівностей в ШКМ. Розглянуто теоретичні основи і алгоритми розв`язання різних видів нерівностей, структуровано завдання для самостійної роботи, рекомендовано перелік навчальної літератури.

ЗМІСТ

ВСТУП

Поняття "більше" і "менше" як і поняття «рівність» виникли в зв'язку з необхідністю порівнювати різні величини і, звичайно, з переліком, рахунком предметів. Вже стародавні греки користувалися поняттями нерівності. Межі числа π вказав Архімед. Ряд нерівностей приводить Евклід в своєму знаменитому трактаті "Начала". Він доводить, що середнє геометричне двох чисел не більше їх середнього арифметичного. Сучасні знаки нерівності виникли тільки в VII - VIII ст. Знаки "<" і ">" ввів англійський математик Т. Гарриот, а знаки "≤" і "≥" французький математик П. Буг.

Так як нерівності в шкільній програмі з математики розкривають численні зв'язки із суміжними дисциплінами, то при вивченні нерівностей є можливість опанувати широким спектром методів вирішення математичних задач, освоїти способи моделювання, виявити проблеми прикладних досліджень.

Вивчення лінії нерівностей щільно пов'язане з вивченням функціональної лінії, так як дослідження функції елементарними засобами вимагає мати навик вирішувати їх. Грунтуючись на властивості функції є можливість вирішувати нерівності графічно, досліджувати рішення в залежності від параметра і т. д. Метод інтервалів є окремий випадок графічного методу.

Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів (Математика. 5-9 класи) указує, що учень, щоб забезпечити можливість успішно продовжити освіту на базовому рівні, має можливість навчитися в 7-9 класах:

- діяти за допомогою понять: числова нерівність, нерівність, розв`язання нерівності;
- перевіряти правильність числових нерівностей;
- вирішувати лінійні нерівності і прості нерівності, що зводяться до них;

- розв'язувати системи простих лінійних нерівностей;
- перевіряти, чи є конкретне число коренем нерівності;
- представляти рішення систем нерівностей і самих нерівностей на координатній прямій, а також:
- застосовувати різні методи вирішення нерівностей і систем нерівностей, мати навик вибирати метод вирішення і аргументувати свій вибір;
- застосовувати метод інтервалів для вирішення різних видів нерівностей, в тому числі дрібно-раціональних і нерівностей, що включають в себе ірраціональні вирази;
- знаходити коріння алгебраїчних нерівностей з параметрами і їх систем графічним і алгебраїчним методами;
- застосовувати різні методи доведення різних нерівностей;
- зображувати множини, що задаються нерівностями і їх системами, на площині [].

У щоденному житті і при вивченні інших предметів:
- формулювати і вирішувати нерівності, їх системи в вирішенні завдань інших академічних дисциплін;
- давати оцінку правдивості результатів, які отримали під час перебування коренів різних видів нерівностей і їх систем у вирішенні завдань інших академічних дисциплін;
- складати і знаходити коріння нерівностей, що містять параметр, при вирішенні задач інших предметів;
- складати нерівність або їх систему, що описують реальну ситуацію або прикладну задачу, інтерпретувати отримані результати.

НЕРІВНОСТІ

1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО НЕРІВНОСТІ

1.1. РОЛЬ ЛІНІЇ НЕРІВНОСТЕЙ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Матеріал, пов'язаний з нерівностями становить значну частину шкільного курсу математики. Це пояснюється тим, що рівняння і нерівності широко використовуються в різних розділах математики, у вирішенні прикладних задач.

Зважаючи на важливість і широту матеріалу, пов'язаного з поняттями рівнянь і нерівностей, їх вивчення в сучасній методиці математики організовано в змістовно-методичну лінію рівнянь і нерівностей. Тут розглядаються питання формування понять рівняння і нерівності, загальних і приватних методів їх вирішення, взаємозв'язку вивчення рівнянь і нерівностей з числовою, функціональною та іншими лініями шкільного курсу математики.

Виділеним областям виникнення і функціонування понять рівняння і нерівності в алгебрі відповідають три основних напрямки розгортання лінії рівнянь і нерівностей в шкільному курсі математики.

Прикладна спрямованість лінії рівнянь і нерівностей розкривається головним чином при вивченні алгебраїчного методу розв'язання текстових задач. Цей метод широко застосовується в шкільній математиці, оскільки він пов'язаний з навчанням прийомам, використовуваним в додатках математики.

В даний час провідні положення в додатках математики займає математичне моделювання. Використовуючи це поняття, можна сказати, що прикладне значення рівнянь і нерівностей та їх систем визначається тим, що вони є основною частиною математичних засобів, що використовуються в математичному моделюванні.

Теоретико-математична спрямованість лінії рівнянь і нерівностей розкривається в двох аспектах: по-перше, у вивченні найбільш важливих класів рівнянь і нерівностей та їх систем і, по-друге, у вивченні узагальнених понять і методів, що відносяться до лінії в цілому. Обидва ці аспекти необхідні в курсі шкільної математики. Основні класи рівнянь і нерівностей пов'язані з найпростішими і одночасно найбільш важливими математичними моделями.

Використання найбільш узагальнених понять і методів дозволяє логічно впорядкувати вивчення лінії в цілому, оскільки вони описують щось спільне, що є в процедурах і прийомах розв`язування, що відносяться до рівнянь і нерівностей та їх систем. У свою чергу ці загальні поняття і методи спираються на основні логічні поняття: невідоме, рівність, еквівалентність, логічне слідування, нерівність, які також повинні бути розкриті в лінії рівнянь, нерівностей.

Для лінії рівнянь, нерівностей характерна спрямованість на встановлення зв'язків з іншим змістом курсу математики. Ця лінія тісно пов'язана з числовою лінією. Основна ідея, реалізована в процесі встановлення взаємозв'язку цих ліній - це ідея послідовного розширення числової системи.

Всі числові області, що розглядаються в шкільній алгебрі і засадах аналізу, за винятком області всіх дійсних чисел, виникають у зв'язку з розширенням будь-яких рівнянь, нерівностей, їх систем.

Наприклад, числові проміжки виділяються нерівностями або системами нерівностей. Області ірраціональних і логарифмічних виразів пов'язані відповідно з рівняннями $x^2 = b (k \in \mathrm{N}, k > 1)$, $a^x = b$.

Зв'язок лінії рівнянь і нерівностей з числовою лінією двостороння. Наведені приклади показують вплив рівнянь і нерівностей на розгортання числової системи. Зворотний вплив проявляється в тому, що кожна знову введена числова область розширює можливості складання і розширення різних рівнянь і нерівностей.

Лінія рівнянь і нерівностей тісно пов'язана також і з функціональної лінією. Один з найважливіших таких зв'язків - додатки методів, що розробляються в лінії рівнянь і нерівностей, до дослідження функцій (наприклад до завдання на знаходження області визначення деякої функції, її коренів, проміжку знакосталості і т.д.) З іншого боку, функціональна лінія має суттєвий вплив як на зміст лінії рівнянь і нерівностей, так і на стиль її вивчення. Зокрема функціональні перетворення є основою залучення графічної наочності до вирішення і дослідження рівнянь, нерівностей, їх систем.

Як останній приклад відзначимо взаємозв'язок лінії рівнянь і нерівностей з алгоритмічної лінією. Сам зміст поняття алгоритму може бути в значній мірі виділено на основі аналізу процесу розв`язування рівнянь і нерівностей, рівнянь і нерівностей різних класів. Вплив же алгоритмічної лінії на лінію рівнянь і нерівностей полягає перш за все в можливості використання її понять для опису алгоритму розв`язування рівнянь і нерівностей, їх систем різних класів.

1.2. ОЗНЧЕННЯ ПОНЯТТЯ НЕРІВНОСТІ

Визначаючи поняття числові нерівності та нерівності зі змінною автори підручників використовували різні підходи. Довгий час в шкільних підручниках обмежувалися геометричним означенням числової нерівності: число А називали більшим числа В якщо точка, яка зображує число А на координатній прямій перебувала правіше від точки, яка зображує число В.

Останні роки автори підручників повернулися до традиційного підходу у вивченні числових нерівностей і нерівностей зі змінною. Якщо елементи А і В деякої множини не перебувають у відношенні рівності то кажуть, що вони перебувають у відношенні нерівності і записують $A \neq B$. Вводиться таке означення: Число А більше числа В якщо різниця А - В - додатне число, якщо різниця A - B - від`ємне число, то число A менше числа B. Також розглядаються відносини "не більше", "не менше": якщо різниця A - B - від`ємне число або дорівнює "0" (тобто не додатне), то говорять, що число A не більше числа B і пишуть $A \le B$.

Всі співвідношення: $A < B$, $A \le B$, $A > B$, $A \ge B$ мають загальну назву нерівностей.

Нерівності $A < B$ и $C > D$; $A \le B$ и $C \ge D$ називаються нерівностями протилежного змісту, а нерівності $A < B$ і $C < D$; $A > B$ і $C > D$ - нерівностями однакового змісту. Якщо нас не цікавить конкретне значення знака нерівності, то символічно нерівність записують у вигляді $A \vee B$, де значок $\vee$ може означати один із знаків $\ge$, $\le$, $<$, $>$. Тоді в співвідношенні знак $\vee$ розглядається як знак відносин протилежного змісту, тобто відповідно $\ge$, $\le$, $<$, $>$.

На множені F функцій від аргументів $x_1, x_2, \ldots x_n$, с загальною областю визначення функцій D, відношення "менше" встановлюється наступним чином. Кажуть, що функція $F_1 \in F$ знаходиться у відношенні "менше" з функцією $F_2 \in F$ над множиною D, якщо при кожній системі значення аргументів $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in D$ значення функції F_1 менше значення функції F_2. Наявність відношення "менше" функції F_1 з функцією F_2 над множиною D визначається записом $F_1 < F_2$. Ця нерівність має назву тотожної нерівності над множиною D.

Для поняття нерівності існує формальна характеристика: два аналітичних вирази U і V з'єднані знаком $\ge$ або $\le$, або $<$, або $>$, утворюють нерівність $U \ge V$, або $U \le V$, або $U < V$, або $U > V$.

Відповідний знак нерівності висловлює наявність висловлювання або предиката про нерівність U і V в залежності від того, чи є U і V числовими виразами або виразами зі змінними.

В навчанні про нерівності аналогом поняття рівняння є поняття "нерівності зі змінними". Воно може бути визначене в такий спосіб: нехай дано дві функції F_1 $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ и F_2 $(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Символічний запис задачі про відшукання таких систем значень аргументів $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, при яких значення функції F_1 знаходиться в стосунках $\vee$ із значенням функції F_2, називається нерівністю зі змінними $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Символічно нерівність зі змінними записуються як звичайну нерівність $F_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \vee F_2(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Часто виникає питання, чи не потрібно вводячи новий термін "нерівність зі змінними" побудувати відповідне означення аналогічно побудові означення рівняння. Але це виявляється вкрай незручно хоча б з лінгвістичної точки зору. Наприклад, раз в підручнику "Алгебра 7-9" Г.П. Бевза сказано, що "рівність зі змінною називають рівнянням", то аналогічне означення повинно звучати тавтологічно ("нерівність зі змінною називають ...").

Ми вважаємо за краще користуватися назвою "нерівності зі змінними", яке підкреслює призначення поняття, що позначається цим терміном, - висловлювати постановку задачі, про яку вже йшлося. Там, де це не призводить до непорозумінь, замість "нерівність зі змінними" кажуть коротше: "нерівність".

Загальну частину області визначень функцій F_1 і F_2, що представляють ліву і праву частини нерівності $F_1 \vee F_2$, називають областю визначення нерівності або областю допустимих значень змінних (ОДЗ). Будь-яка допустима система значень невідомих, при якій нерівність $F_1 \vee F_2$ вірна, називається рішенням нерівності. Розв`язати нерівність - значить знайти всю безліч її рішень.

1.3. ПРОПЕДЕВНИЧНЕ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ ЗІ ЗМІНИМИ

Як в самій математиці, так і в її додатках з нерівностями доводиться стикатися не менше (якщо не більше) часто, ніж з рівняннями. Так, при виявленні властивостей функції f (x) доводиться вирішувати не тільки рівняння $f(x) = 0$, а й нерівності $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ або $f(x) > C$, $f(x) < C$. Широко поширена в життєвій практиці операція вимірювання величин принципово не може дати точного числа, і ми змушені задовольнятися межами точного значення вимірюваної величини x: $а < x < в$. Ще задовго до приходу в школу діти набувають досвіду в обігу з поняттями "більше", "менше", "не дорівнює". Звідси зрозуміло, що пропедевтичне вивчення нерівностей має здійснюватися спільно з пропедевтичним вивченням рівнянь. З співвідношеннями "більше", "менше" між числами та знаками цих відносин " < ", " > " діти знайомляться в 1 класі вже при вивченні чисел першого десятка. У 2 класі виконуються вправи в порівнянні буквених виразів, тобто по суті доводяться найпростіші тотожні нерівності.

Наприклад, порівнюючи два вирази $а + 3$ і $а + 1$, діти міркують: перший доданок в обох висловах однаковий, але другий доданок першого виразу більше другого доданка другого виразу, значить перша сума буде більшою за другу $а + 3 > а + 1$. У цьому ж класі починаються і розв`язування нерівностей. Завдання ставляться приблизно в такій формі:

1. Користуючись таблицею (дається таблиця чисел) вкажіть ті значення а, при яких $а + 28 < 32$.

2. При яких значеннях букв будуть вірні такі нерівності: $а + 200 < 203$, $b-120 > 10$,?

3. $48 : b < 24$. При яких значеннях b буде вірним цей запис?

Термін "нерівність" ще не вживається, але водиться на початку 3-го класу. Завдання набувають вже таку форму:

1. Запишіть кілька значень букв, при яких вірні нерівності $а > 9$, $с < 14$, $n > 424$.

2. При яких значеннях букв вірні нерівності: $x + 25 < 40$, $а-к > 36$,
$в : 4 > 8$, $а - 41 > у - 41$?

Як бачимо вираз " розв`язати нерівність" не застосовується - поняття про розв`язування нерівності в початковій школі не вводиться. Проте рішення нерівностей записується в загальному вигляді.

Так, при виконанні вправи "Знайти значення букви а, при яких правильна нерівність 20-а > 16" міркування ведуться так: 20-а = 16 при а = 4. Щоб різниця 20-а було більше, ніж 16, треба, щоб від'ємник було менше, ніж 4. Відповідь: а <4.

У 5 класі вивчення нерівностей ведеться як і раніше індуктивно. Наочною опорою для порівняння чисел служить числовий промінь. Однак формальний запис числової нерівності вже явно трактується як висловлювання, яке може бути істинним (вірним) або хибним (неправильним). Ні в програмі, ні в пояснювальній записці до неї немає певних вказівок, в якому плані повинні вивчатися нерівності зі змінними в 5 класі. Однак глибокі аналогії в побудові теорії рівнянь і теорії нерівностей зі змінними дають підставу для побудови пропедевтичного курсу вивчення нерівностей зі змінними за аналогією з пропедевтичної вивченням рівнянь.

Тому слідом за означенням поняття рівняння буде природним введення поняття нерівностей зі змінними.

До введення цього поняття слід йти від задачі, вирішення якої призводить до нерівності зі змінною. Отримана нерівність відповідно до поставленої задачі може бути витлумачена як форма запису вимоги знайти ті значення змінної, при якій нерівність вірна.

У 5 класі в основному обмежуються вимогою відшукання кінцевої безлічі рішень нерівності. Навіть при розв`язуванні нерівності х > а в множині натуральних чисел учням вказується, яку кількість рішень потрібно знайти. Це не означає, що потрібно зовсім відмовитися від вправ, які формують уявлення про існування нескінченної кількості розв`язків відповідних нерівностей. Так, після того, як знайдено кілька рішень нерівності х > а, доцільна постановка питань: чи можна ще вказати рішення цієї нерівності? Скільки ще рішень? Не слід побоюватися узагальнення: нерівність має безліч рішень - йому задовольняють всі натуральні числа, більші числа а, починаючи з числа а + 1.

З розширенням множини цілих невід'ємних чисел до множини невід'ємних раціональних чисел (з введенням дробів, зокрема десяткових) подібного роду міркування корисно застосовувати і при вирішенні нерівностей виду $x < a$, а також подвійних нерівностей. Основне призначення таких вправ - порівняння чисел, попутне ж - формування уявлення про властивості нескінченності і щільності множини чисел на кінцевих числових інтервалах. Так, якщо вирішується задача: "Знайти одне рішення нерівності $0,1 < y < 0,2$" - і вказано в якості розв`язку, наприклад, число 0,14, то тут же можливо обговорення таких питань: чи будуть розв`язком нерівності числа 0,141, 0,149, 0,19567? Чи буде розв`язком нерівності середнє арифметичне чисел 0,1 і 0,14; середнє арифметичне чисел 0,1 і 0,2? Абсолютно необхідні вправи на застосування подвійних нерівностей для запису результатів вимірювання величин. Учні повинні спостерігати звуження кордонів точного значення вимірюваної величини з підвищенням точності вимірювального інструмента.

У 6 класі для встановлення відносин <, > на множині раціональних чисел вводиться поняття модуля числа. У зв'язку з цим розглядаються нерівності виду

$| x | < A$, $x \geq a$, $| x - y | < A$, які вирішуються по міркуванню із залученням числової осі. На тій же основі встановлюється еквівалентність зазначених нерівностей нерівностям $-a < x < a$, $-a \leq x \leq a$ відповідно. Залишається в силі - як основне - орієнтування на знаходження кінцевої безлічі розв`язків нерівностей. Таким чином, розвиток уявлень учнів про нескінченність безлічі рішень відповідних нерівностей як і раніше знаходиться в залежності від розумної ініціативи вчителя.

На підставі поняття про подвійну нерівність в курсі алгебри 8 класу вводиться поняття про числові проміжках, які знаходять застосування при вивченні функції. Будь-яких нових відомостей про нерівності зі змінними до вивчення теми "Нерівності" в 9 класі учням не дається. Зазначена тема є початком систематичного вивчення нерівностей зі змінними.

2. РАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

2.1. ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ І СИСТЕМИ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНІЄЮ ЗМІНОЮ

Систематичне вивчення нерівностей зі змінними починається з вивчення числових нерівностей. У 9 класі розглядаються наступні теореми.

Теорема 1. Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

Доведення: Якщо $a < b$ і $b < c$, то числа $a - b$ і $b - c$ - від`ємні. Їх сума $(a - b) + (b - c) = a - c$ - число від'ємне.

А якщо $a - c < 0$, то $a < c$. Що й потрібно було довести.

Теорема 2. Якщо до обох частин правильної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну нерівність.

Доведення: Якщо $a < b$ то $a - b < 0$. Оскільки $a - b = (a + c) - (b + c)$, то $(a + c) - (b + c) < 0$. А це означає, що $a + c < b + c$.

Теорема 3. Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність. Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне й те саме від`ємне число і поміняти знак нерівності на протилежний, то отримаємо правильну нерівність.

Доведення: Нехай $a < b$ і $c > 0$. У цьому випадку числа $a - b$, $(a - b)\,c$, $ac - bc$ - від`ємні тобто $ac < bc$.

Якщо $a < b$ і $c > 0$, то $(a - b)\,c$, $ac - bc$ - додатні. Тому $ac > bc$.

Теорема 4. Нерівності однакового змісту можна почленно додавати, тобто якщо, $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Доведення: Якщо $a < b$ і $c < d$, то за теоремою 2 $a + c < b + c$ і

$b + c < b + d$, звідки $a + c < b + d$.

Теорема 5. Нерівності однакового змісту можна почленно перемножувати якщо їх ліві і праві частини - додатні числа, тобто якщо $a < b$, $c < d$, то $a + c < b + d$.

Доведення: Нехай $a < b$ і $c < d$, а числа c і $b > 0$. За теоремою 3 $ac < bc$ і $bc < bd$, звідки за теоремою 1 $ac < bd$.

Як відомо рівності зі змінними можуть бути двох видів: тотожності і рівняння. Тотожності - доводяться, рівняння - розв`язуються. Аналогічно розглядаються два види нерівностей зі змінними: тотожні нерівності і нерівності зі змінними. Тотожні нерівності - доводяться, нерівності з змінними - розв`язуються.

Для розв`язування нерівностей зі змінними в 9 класі розглядаються їх властивості, аналогічно властивостям рівнянь.

1. Якщо виконати тотожні перетворення деякої частини нерівності, що не змінюють допустимі значення змінної, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

2. Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу частину доданок, змінивши його знак на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

3. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

4. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від`ємне число, змінивши його знак на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

При розв`язуванні лінійних нерівностей з однією змінною слід використовувати аналогію з рівняннями. Як для введення означення, так і для способу розв'язання.

Лінійною нерівністю з однією змінною називають нерівність виду $ax < b$ або $ax > b$ (або $ax \leq b$ або $ax \geq b$), де x - змінна, a, b - числа.

Якщо $a \neq 0$, то безліччю рішень нерівності $ax < b$ є безліч $\left(\infty; \frac{b}{a}\right)$ або безліч$\left(\frac{b}{a}; \infty\right)$.

Якщо $a = 0$ безліччю рішень нерівності є або безліч всіх чисел (при $b > 0$), або порожня множина (при $b < 0$).

До поняття системи лінійних нерівностей з однією змінною потрібно прийти через задачу.

Задача**:** Турист вийшов з турбази у напрямку до станції, розташованої на відстані 20 км. Якщо турист збільшить швидкість на 1 км / год., то за 4 години він пройде відстань, більшу 20 км. Якщо він зменшить швидкість на 1 км / год., то навіть за 5 годин він не встигне дійти до станції. Яка швидкість туриста?

Розв`язання: Нехай швидкість туриста x км / год. Якщо турист буде йти зі швидкістю (x + 1) км / год., то за 4 години він пройде 4 (x + 1) км. За умовою задачі 4 (x + 1) > 20.

Якщо турист буде йти зі швидкістю (x-1) км / год., то за 5 годин він пройде 5 (x-1) км. За умовою завдання 5 (x + 1) < 20.

Потрібно знайти ті значення x, при яких правильна як нерівність 4 (x + 1) > 20 так і нерівність 5 (x + 1) < 20 тобто знайти спільний розв`язок цих нерівностей.

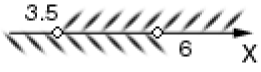
У таких випадках кажуть, що треба розв`язати систему нерівностей і використовують запис: $\begin{cases} 4(x+1) > 20 \\ 5(x-1) < 20 \end{cases}$. Замінивши кожне нерівність системи рівносильним йому нерівністю, отримаємо систему: $\begin{cases} x > 4 \\ x < 5 \end{cases}$. Значить, значення x має задовольняти умові 4 < x < 5.

Відповідь: Швидкість туриста більше 4 км / год., але менше 5 км / год.

Далі вводимо означення поняття "розв`язок системи нерівностей з однією змінною" і поняття "що означає  розв`язати систему нерівностей з однією змінною". Розглядаємо приклади.

Приклади:

1. Розв`язати систему нерівностей



$\begin{cases} 2x-1>6 \\ 5-3x>-13 \end{cases} \begin{cases} 2x>7 \\ -3x>18 \end{cases} \begin{cases} x>3{,}5 \\ x<6 \end{cases}.$

Відповідь: $x \in (3{,}5;6)$

2. Розв`язати систему нерівностей

$\begin{cases} 3x-2>25 \\ 1-x<0 \end{cases} \begin{cases} 3x>27 \\ -x<-1 \end{cases} \begin{cases} x>9 \\ x>1 \end{cases}$

Відповідь: $x \in (9;+\infty)$

3. Розв`язати систему нерівностей

$\begin{cases} 1-5x>11 \\ 6x-18>0 \end{cases} \begin{cases} -5x>10 \\ 6x>18 \end{cases} \begin{cases} x<-2 \\ x>3 \end{cases}$

Відповідь: $x \in \varnothing$

4. Розв`язати подвійну нерівність -1<3+2x<3.

Подвійна нерівність представляє собою інший запис системи нерівностей.

$\begin{cases} 3+2x>-1 \\ 3+2x<3 \end{cases} \begin{cases} 2x>-4 \\ 2x>0 \end{cases} \begin{cases} x>-2 \\ x<0 \end{cases}$ ***-2<x<0.***

Показати розв`язання подвійної нерівності без запису системи нерівностей. -1<3+2x<3; -4<2x<0; -2<x<0.

Відповідь: $x \in (-2;0)$.

Далі розглядають розв`язування нерівностей виду (x-b)(x-a) $\vee$ 0;

$\dfrac{x-a}{x-b} \vee 0.$

Приклади:

1. Розв`язати нерівність (x-2)(x+5)<0.

Добуток двох чисел від`ємний, якщо одне з чисел - від`ємне , а інше - додатне. Тому розв`язування цієї нерівності зводимо до розв`язування двох систем нерівностей $\begin{cases} x-2>0 \\ x+5<0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x-2<0 \\ x+5>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>2 \\ x<-5 \end{cases}$ і $\begin{cases} x<2 \\ x>-5 \end{cases}$; -5<x<2.

Відповідь: $x \in (-5;2)$.

2. Розв`язати нерівність $\dfrac{x-2}{x+5}<0$.

Значення дробу від`ємне, якщо один з її членів - від`ємний, а другий - додатний. Тому розв`язок цієї нерівності такий ж самий, як і розв`язок нерівності в прикладі 1.

Бажано, щоб при вирішенні нерівностей цього виду були присутні такі приклади: $(x^2+1)(5-x)\le 0$; $\frac{3x+5}{x(x^2+1)}>0$; $\frac{x^3}{x-3}<0$; $\frac{x^2+2}{x-2}>0$.

Приклади для самостійного розв`язування лінійних нерівностей і систем лінійних нерівностей з однією зміною:

1. $\begin{cases}\mathbf{3x+6\ \ge 0}\\ \mathbf{10-2x\ \ge 0}\end{cases}$ 2. $\begin{cases}\mathbf{57-7x\ >3x-2}\\ \mathbf{22x-1<2x+47}\end{cases}$ 3. -3$<\mathbf{2x-1<3}$

4. $\frac{x-1}{3}-x>1$ 5. $\begin{cases}\frac{x}{6}+\frac{2}{3}(x-7)<\frac{3x-20}{9},\\ 3x-\frac{2x-13}{11}>2.\end{cases}$ 6. $\begin{cases}10-4x>0\\ 3x-1>5\end{cases}$

7. $\begin{cases}10>4x\\ 3x>5+1\end{cases}$ 8. $\begin{cases}\frac{10}{4}>\frac{4x}{4}\\ \frac{\quad}{3}>\frac{\quad}{3}\end{cases}$ Системы линейн 9. $\begin{cases}1{,}2(3-x)-0{,}8x\ge 6\\ -2(1-4x)-5x<x\end{cases}$

10. $\begin{cases}6y\ge 42\\ 4y+12\le 0\end{cases}$ 11. $\begin{cases}1{,}5x+4{,}5\le 0\\ \frac{1}{9}x\ge 1\end{cases}$

2.2. НЕРІВНОСТІ ДРУГОГО СТУПЕНЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Розв`язування нерівності другого ступеня з однією змінною передбачено в курсі алгебри 9 класу і пов'язане з графіком квадратичної функції. Розв`язування нерівностей цього виду розглянемо на конкретних прикладах, попередньо ввівши їх означення.

Означення: нерівність виду $ax^2+bx+c>0$ і $ax^2+bx+c<$ де x - змінна, a, b, c - числа, причому $a\neq 0$ називають нерівностями другого ступеня з однією змінною.

Поставлену вимогу "вирішити нерівність виду $ax^2 + bx + c > 0$ і $ax^2 + bx + c < 0$" можна замінити вимогою "визначити, при яких значеннях змінної, квадратична функція від`ємна або додатна».

Знакосталість квадратичної функції можна визначити по її графіку. З'ясовуємо далі, які точки на графіку квадратичної функції потрібні для визначення її знакосталості.

Приклади:

1. Розв`язати нерівність $5x^2 + 9x - 2 < 0$.

Розглянемо функцію $y(x) = 5x^2 + 9x - 2$. Графіком цієї функції є парабола, гілки якої спрямовані вгору. Для з'ясування питання про її знакосталість необхідні точки перетину графіка функції з віссю OX, тобто нулі функції. Тому, вирішивши рівняння $5x^2 + 9x - 2 = 0$, отримаємо $x_1 = -2$; $x_2 = \frac{1}{5}$. Покажемо схематично, як розташована парабола в координатної площини.

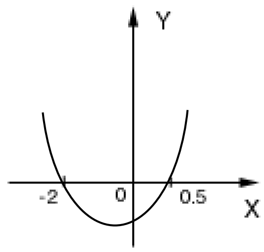


Рис. 1

З рисунка 1 видно, що функція набуває від'ємних значень коли $x \in \left(-2; \frac{1}{5}\right)$. Отже, безліччю розв`язків даної нерівності є числовий проміжок $\left(-2; \frac{1}{5}\right)$.

2. Розв`язати нерівність $-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 < 0$.

Графіком цієї функції є парабола, гілки, якої спрямовані вгору. Знайдемо нулі функції, для цього вирішимо рівняння $-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 = 0$.

Отримали x = 4.

Рівняння має єдиний корінь, значить, парабола стосується осі X.

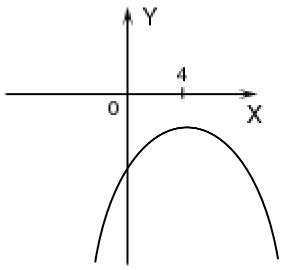


Рис. 2

Зображаємо схематично параболу. Знайдемо, що функція набуває від'ємних значень при будь-якому X, крім 4.

3. Розв`язати нерівність $x^2 - 3x + 4 > 0$.

$x^2 - 3x + 4 = 0 \qquad D = -7 < 0$. Це рівняння не має коренів, значить парабола, гілки якої спрямовані вгору не перетинає вісь X. Показавши схематично розташування параболи в координатній площини, знайдемо, що функція набуває додатних значень при будь-якому X.

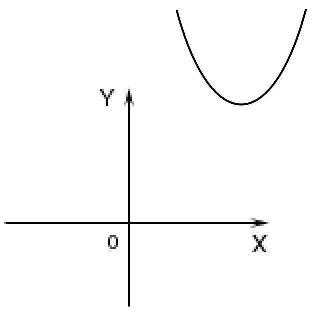


Рис. 3 Відповідь: $x \in (-\infty; \infty)$.

4. Розв`язати нерівність $x^2 - 3x + 4 < 0$.

Схематичне розташування параболи квадратичної функції показано на попередньому рисунку. Отримаємо, що функція не приймає від'ємних значень за жодних X. Тому відповідь: $x \in \varnothing$.

Слід дати учням алгоритм розв`язування нерівностей другого степеня з однією змінною:

1. Знайти дискримінант квадратного тричлена і з'ясувати, чи має тричлен коріння.

2. Якщо тричлен має коріння, то відзначити їх на осі OX і через відмічені точки провести схематично параболу, гілки якої спрямовані вгору при X > 0 і вниз - при X < 0. Якщо тричлен не має коренів, то зобразимо параболу, розташовану у верхній півплощині при X > 0 або в нижній півплощині при X <0.

3. Знайти на осі X проміжки, для яких точки параболи розташовані вище осі X (якщо вирішувати нерівність f(x) > 0), або нижче осі X (якщо вирішувати нерівність f(x) < 0.

Приклади для самостійного розв`язування нерівностей другого ступеня з однією зміною та їх систем:

1. $x^2 - 16 > \mathbf{0}$; 2. $x^2 - 8x + 15 > \mathbf{0}$; 3. $- x^2 - 10x - 25 > \mathbf{0}$; 4. $- x^2 + 6x - 9 > \mathbf{0}$;

5. $-9x^2 < 1 - 6x$; 6. $\begin{cases} \mathbf{4}x^2 - \mathbf{27}x - \mathbf{7} > \mathbf{0} \\ x > \mathbf{0} \end{cases}$; 7. $\begin{cases} x - \mathbf{4} > \mathbf{0} \\ \mathbf{3}x^2 - \mathbf{15}x < \mathbf{0} \end{cases}$;

8. $\begin{cases} x + \mathbf{1} < \mathbf{0} \\ \mathbf{2}x^2 - \mathbf{18} > \mathbf{0} \end{cases}$; 9. $\begin{cases} x^2 + x - \mathbf{6} < \mathbf{0} \\ -x^2 + \mathbf{2}x + \mathbf{3} > \mathbf{0} \end{cases}$; 10. $\begin{cases} x^2 + \mathbf{4}x - \mathbf{5} > \mathbf{0} \\ x^2 - \mathbf{2}x - \mathbf{8} < \mathbf{0} \end{cases}$

2.3. РОЗВ`ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ МЕТОДОМ ІНТЕРВАЛІВ

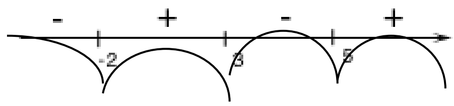
2.3.1. Розглянемо нерівність виду $(x-a)(x-b)(x-c) \vee 0$ (1)

Ліву частину цієї нерівності розглядаємо як функцію $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$. Областю означення цієї функції є всі дійсні числа. Нулями функції служать числа a, b, c. Вони розбивають область означення функції на проміжки. У кожному з проміжків знак функції зберігається, а при переході через нуль її знак змінюється. Цю властивість і використовуємо для вирішення нерівностей зазначеного виду. Такі нерівності вирішуються в 9 класі в курсі алгебри.

Приклади:

1. Розв`язати нерівність $(x+2)(x-3)(x-5)<0$.

Визначаємо знак функції y(x) = $(x+2)(x-3)(x-5)$, взявши довільне значення Х з кожного інтервалу

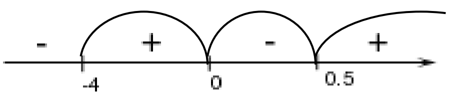


Визначаємо знак функції y(x)=$(x+2)(x-3)(x-5)$, взявши довільне значення Х з кожного інтервалу.

Відповідь: $x \in (-\infty;-2) \cup (3;5)$.

2. Розв`язати нерівність $x(0,5-x)(x+4)<0$.

Наведемо таку нерівність до виду (1). Для цього в двочленні 0,5-Х винесемо за дужки множник -1. отримаємо: $-x(x-0,5)(x+4)<0$. Звідки $x(x-0,5)(x+4)>0$. Ми отримали нерівність виду (1), яка рівносильна даній нерівності. Відзначимо на координатної прямої нулі функції $g(x)=x(x-0,5)(x+4)$.

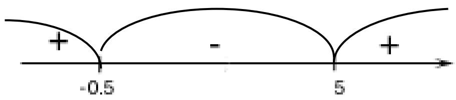


Відповідь: $x \in (-4;0) \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

3. Розв`язати нерівність $(5x+1)(5-x) \geq 0$.

Наведемо таку нерівність до виду (1). Для цього в першому двочленні винесемо за дужки множник 5, а в другому -1. отримаємо $-5\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-5)\geq 0$

Розділивши обидві частини нерівності на -5, матимемо $\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-5)\leq 0$.



Відповідь: $x\in\left[-\frac{1}{5};5\right]$.

Приклади для самостійного розв`язування нерівностей:

1. $(x+\mathbf{1,2})(\mathbf{6}-x)(x-\mathbf{4})>\mathbf{0}$; 2. $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}-x\right)\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}-x\right)\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}-x\right)<\mathbf{0}$;

3. $(x+\mathbf{0,6})(\mathbf{1,6}+x)(\mathbf{1,2}-x)>\mathbf{0}$; 4. $(\mathbf{1,7}-x)(\mathbf{1,8}+x)(\mathbf{1,9}-x)<\mathbf{0}$;

5. $(x^{\mathbf{2}}-\mathbf{16})(x+\mathbf{17})>\mathbf{0}$; 6. $(x^{\mathbf{2}}-\mathbf{15}x)(x^{\mathbf{2}}-\mathbf{36})<\mathbf{0}$.

2.3.2. Дробово-раціональні нерівності

Дробово-раціональні нерівності найпростіші вивчаються в 9 класі, більш складні - в 10 класі.

У 9 класі розглядають нерівності виду $\frac{x-a}{x-b}\vee 0$; $\frac{ax^2+bx+c}{x-k}\vee 0$.

Їх розв`язування зводять до сукупності двох систем. Але оскільки учні вже знайомі з методом інтервалів, то слід показати розв`язування таких нерівностей цим методом, і в 9 класі перейти до більш складних видів дробово-раціональних нерівностей.

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_k)^{m_p}}$, де

$n_1,n_2,\ldots,n_k,m_1.m_2,\ldots,m_p$ - натуральні числа

$a_i\neq a_j\ b_i\neq b_j\ i\neq j\ a_i=b_j\quad (i=1,2,\ldots,k;\ j=1,2,\ldots,p)$

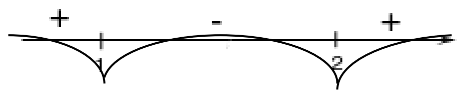
У точках x=a_i функція дорівнює нулю (ці точки називають нулями функції), точки x = $в_i$ - точки розриву функції f (x). Якщо все нулі функції і точки розриву відзначити на числовій прямій, то вони розіб'ють її на к + р + 1 проміжок.

З курсу математичного аналізу відомо, що всередині кожного з цих проміжків функція f (x) неперервна і зберігає постійний знак. Для встановлення цього знака досить взяти будь-яку точку з проміжку, який нас цікавить, і визначити знак функції в цій точці.

Приклади:

1. Розв`язати нерівність $\frac{2x+4}{3x-3} \le 0$.

Нуль функції $f(x)=\frac{2x+4}{3x-3}$ це точка x=2, Точка розриву – x=1.



У проміжку $(-\infty;1)$ візьмемо точку x = 0. Маємо $f(0)=\frac{4}{3}>0$. Отже у $(-\infty;1)$ f(x)>0. У проміжку (1;2) візьмемо точку x =1,5.Маємо $f(1{,}5)=-\frac{2}{3}<0$. Отже у (1;2) f(x)<0. У проміжку$(2;+\infty)$ візьмемо точку x =3. Маємо $f(3)=\frac{1}{3}>0$. Отже у $(2;+\infty)$ f(x)>0.

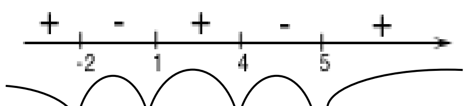
Нам треба розв`язати нерівність (x) ≤ 0. З проведеного міркування ясно, що ця нерівність виконується в проміжку $(1;2]$.

Відповідь: $x \in (1;2]$

2. Розв`язати нерівність $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-4)(x-5)}>0$.

Нулі функції - точки $x_1=1, x_2=-2$. Точки розриву - $x_1=4, x_2=5$.

У проміжку $(-\infty;-2)$ візьмемо точку x =-3. Маємо $f(-3)=\frac{1}{14}>0$. Отже у $(-\infty;-2)$ f(x)>0. У проміжку $(-2;1)$ візьмемо точку x = 0. Маємо

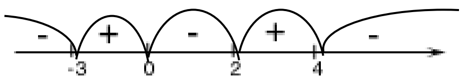


$f(0) = -\frac{1}{10} < 0$. Отже у $(-2;1)$ f(x)<0. У проміжку $(1;4)$ візьмемо точку x =3 . Маємо $f(3) = 5 > 0$. Отже у $(1;4)$ f(x)>0. У проміжку $(4;5)$ візьмемо точку x =4,5 . Маємо $f(4{,}5) = -81 < 0$. Отже у $(4;5)$ f(x)<0.

Відповідь: $x \in (-\infty;-2) \cup (1;4) \cup (5;+\infty)$.

3. Розв\`язати нерівність $\frac{x^2(x-2)^3(x+3)}{(x-4)^7} > 0$.

Функція $f(x) = \frac{x^2(x-2)^3(x+3)}{(x-4)^7}$ має нулі в точках $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -3$,точка розриву x=4. Ці чотири точки розбивають числову пряму на п'ять проміжків.



У проміжку $(-\infty;-3)$ візьмемо точку x = -4. Маємо $f(-4) < 0$. Отже у $(-\infty;-3)$ f(x)<0. У проміжку $(-3;0)$ візьмемо точку x = -1. Маємо $f(-1) > 0$. Отже у $(-3;0)$ f(x)>0. У проміжку $(0;2)$ візьмемо точку x = 1. Маємо $f(1) > 0$. Отже у $(0;2)$ f(x)>0. У проміжку $(2;4)$ візьмемо точку x=3. Маємо $f(3) < 0$. Отже $(2;4)$ f(x)<0. У проміжку $(4;+\infty)$ візьмемо точку x =5. Маємо $f(5) > 0$. Отже у $(4;+\infty)$ f(x)>0.

Відповідь: $x \in (-3;0) \cup (0;2) \cup (4;+\infty)$.

Розв\`язуючи дробово-раціональні нерівності з учнями розписуємо їх рішення як показано вище, в двох - трьох прикладах.

Слід дати готовий алгоритм:

1. Якщо c - найбільше з чисел a_i, b_j, то в проміжку $(c;+\infty)$ функція f (x) - додатна.

2. Якщо a_i (відповідно b_j) - така точка, що показник ступеня h_i виразу $(x - a_i)^{h_i}$ є число непарне, то справа і зліва від a_i (або b_j) тобто в суміжних

проміжках, функція f (x) має протилежні знаки. Така точка a_i (відповідно b_j) називається простою. Висловлене вище твердження означає, що при переході через просту точку функція f (x) змінює знак на протилежний.

3. Якщо a_i (відповідно b_j) - така точка, що показник ступеня h_i виразу $(x-a_i)^{h_i}$ є число парне, то справа і зліва від a_i (або b_j) тобто в суміжних проміжках, функція f (x) має однакові знаки. Така точка a_i (відповідно b_j) називається подвійною. Висловлене вище твердження означає, що при переході через подвійну точку функція f (x) не змінює знак на протилежний.

Приклади:

1. Розв`язати нерівність $\frac{(x-1)(x+2)^2(x-3)^5(x+6)}{x^2(x-7)^3} \le 0$.

Відзначимо на числової прямої зафарбованими кружечками нулі функції, тобто точки -6, -2, 1, 3 і не зафарбованими кружечками точки розриву функції, тобто точки 0 і 7. Відзначимо, що точки -2 і 0 є подвійними точками, і проведемо криву знаків.

Відбираючи проміжки, де $f(x) \le 0$ (крива знаків під числовою прямою), отримаємо наступний розв`язок заданої нерівності.

Відповідь:x є $[6;0) \cup (0;1] \cup [3;7]$.

2. Розв`язати нерівність $\frac{x^2-3x-18}{13x-x^2-42} \ge 0$.

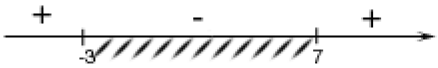
Наведемо спочатку нерівність до виду (2), що дозволяє застосувати метод інтервалів. Для цього чисельник і знаменник дробу представимо у вигляді добутку множників, а для цього кожен з квадратних тричленів $x^2-3x-18$ и $13x-x^2-42$ прирівняємо до нуля.

$x^2-3x-18=0$ $\qquad$ $-x^2+13x-42-0$

$x_1=-3; x_2=6;$ $\qquad$ $x_1=6; x_2=7$

Тоді таку нерівність запишемо у вигляді $\frac{(x+3)(x-6)}{-(x-6)(x-7)} \geq 0$ або

$\frac{(x+3)(x-6)}{(x-6)(x-7)} \leq 0$.

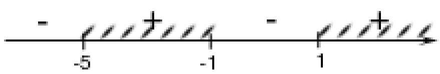


Звідки знаходимо $-3 \leq x \leq 7$. Виключивши з цього проміжку точку x = 6, отримаємо розв`язок заданої нерівності.

Відповідь: $x \in [-3;6) \cup (6;7)$.

3. Розв`язати нерівність $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} < 1$.

Перетворимо задану нерівність до виду, що дозволяє застосувати метод інтервалів: $\frac{x^2-x-6}{x^2-1} - 1 \leq 0$; $\frac{x+5}{(x-1)(x+1)} > 0$;



Відповідь: $x \in (-5;-1) \cup (1;+\infty)$.

Вирішуючи дробово-раціональні нерівності, учні допускають багато помилок в ході їх перетворення. Найпоширеніша з них - відкидання знаменника зі змінною. За аналогією з рішенням дробово-раціональних рівнянь йде заміна дробової нерівності на цілу.

На простому конкретному прикладі дрібнїо нерівності потрібно показати учням, що робити цього не можна, і пояснити чому.

Приклади:

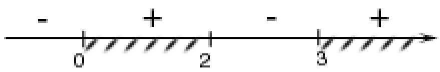
1. Розв`язати нерівність $x + \frac{6}{x} > 5$.

$\frac{x^2+6-5x}{x} > 0$ Якщо відкинути знаменник, то отримаємо нерівність $x^2+6-5x > 0$. Вирішуючи її, отримаємо два числових проміжки, в яких значення x задовольняють останньої нерівності: $(-\infty;2)$ і $(3;+\infty)$. Але при x = -

1, яке належить першому проміжку, дана нерівність $x+\frac{6}{x}>5$ перетворюється в невірну числову нерівність -7> 5. Помилка вийшла при переході від нерівності даної до нерівності $x^2+6-5x>0$.

Відкидання знаменника означає множення обох частин даної нерівності на вираз x, який може бути як позитивним так і негативним. При множенні на негативне x обох частин нерівності потрібно змінити знак нерівності на протилежний. Перейти від дрібної нерівності до цілої можна, якщо по множити обидві частини нерівності на додатнй1 вираз.

В даній нерівності потрібно чисельник дробу розкласти на множники, представивши нерівність у вигляді, зручному для застосування методу інтервалів $\frac{(x-2)(x-3)}{x}>0$.



Відповідь: $x\in(0;2)\cup(3;+\infty)$.

Приклади для самостійного розв`язування нерівностей:

1. $(x+4)(9x-2)\le 0$;   2. $x^3-x^2-4x+4<0$;   3. $\frac{x^2+2x-3}{x^2-4x+4}>0$;

4. $\frac{x^2(x-1)(x^2+1)}{x-3}\le 0$;   5. $x^2+x(2a-4)-8a\le 0$;   6. $\frac{x-3}{x^2+6x-2}\ge\frac{1}{6}$.

2.3.3. Нерівності, в яких зміна находиться під знаком модуля

Вперше з поняттям модуля учні знайомляться в 6 класі. У цьому ж класі вирішують найпростіші нерівності, що містять змінну під знаком модуля, користуючись визначенням модуля і його геометричним змістом. Вирішуються такі завдання:

1. Відзначте на координатній прямій точки, координати яких дорівнюють цілим значенням x, якщо а) $|x|<4,3$ б) $|x|>6,7$.

2. Відзначте на координатній прямій точки M(x),для яких а) $|x|<3$; б) $|x|\ge 3$;   в) $|x-5|\le 2$.

3. Знайдіть добуток всіх цілих рішень нерівності а) $\frac{|x|}{-4} < -\frac{1}{2}$; б) $\frac{|x|-3}{-2,4} < 1$.

У 9 класі при систематичному вивченні нерівностей знайомимо учнів з іншими методами розв`язування нерівностей, що містять змінну під знаком модуля:

Приклади:

1. Розв`язати нерівність $|x-1| < 2$.

1 спосіб. Так як за означенням $|x-1| = \begin{cases} x-1, если (x-1) \geq 0 \\ -(x-1), если (x-1) < 0 \end{cases}$, то задана нерівність рівносильна сукупності двох систем

$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 < 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x-1 < 0 \\ -(x-1) < 2 \end{cases}$.З першої системи маємо $1 \leq x < 3$,з другої - –1<x<1

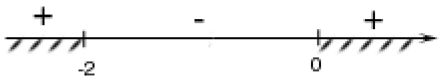
Об'єднавши ці розв`язки, знаходимо розв`язок заданої нерівності: $(-1;3)$.

2 спосіб. Так як обидві частини нерівності додатні при всіх х і $(|x-1|)^2 = (x-1)^2$, то після зведення в квадрат обох частин нерівності отримаємо нерівність $(x-1)^2 < 4$ рівносильну даній.

3 спосіб. Відомо, що якщо x_1 і x_2 - точки числової прямої, то відстань між ними можна розглядати як відстань між точками 1 і х. Отже, розв`язком даної нерівності буде множина всіх тих точок, які віддалені від точки 1 на відстань, меншу, ніж на дві одиниці. На числовій прямій є дві точки віддалені від точки 1 на дві одиниці. Це точки -1 і 3. Значить шуканий розв`язок - це проміжок (-1; 3).

2. Розв`язати нерівність

$|2x-1| \le |3x+1|$



$(2x-1)^2 \le (3x+1)^2$

$x(x+2) \ge 0$

Відповідь: $x \in (-\infty;-2] \cup [0;+\infty)$.

3. Розв`язати нерівність $\left|x^2-3x+2\right| \le 2x-x^2$.

Дана нерівність рівносильна сукупності систем

$$\begin{cases} x^2-3x+2 \ge 0 \\ x^2-3x+2 \le 2x-x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-3x+2 < 0 \\ -\left(x^2-3x+2\right) \le 2x-x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-2) \ge 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2) \le \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)(x-2) < 0 \\ x-2 \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 1; x \ge 2 \\ \frac{1}{2} \le x \le 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x \le 1 \end{cases}$$

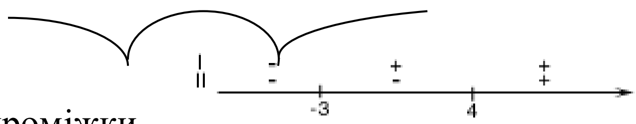
$\frac{1}{2} \le x \le 1, x = 2$; $\qquad 1 < x < 2$.

Об'єднуючи знайдені рішення, одержимо $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Відповідь: $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

4. Розв`язати нерівність $|2x+6| + |x-4| > 10$.

Відзначимо на числовій прямій точки, в яких висловлювання, що стоять під знаком модуля, звертаються в нуль. Це точки -3; 4. Числова пряма



розбивається цими точками на три проміжки

Вибираючи довільну точку в кожному проміжку знайдемо знаки виразів, що стоять під знаком модуля і відзначимо на малюнку.

При $x = -4; (2x+6) < 0; (x-4) < 0$

При $x=0;(2x+6)>0;(x-4)<0$

При $x=5;(2x+6)>0;(x-4)>0$

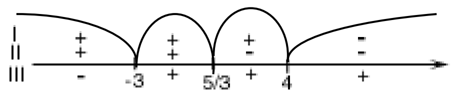
Розглядаючи задану нерівність на кожному з цих трьох проміжків $[-\infty;-3];[-3;4];[4;+\infty]$, отримаємо сукупність трьох систем:

$$\begin{cases} x\le 3 \\ -(x-4)-(2x+6)>10 \end{cases};\ \begin{cases} -3\le x\le 4 \\ -(x-4)+(2x+6)>10 \end{cases};\ \begin{cases} x\ge 4 \\ (x-4)+(2x+6)>10 \end{cases}$$

З першої системи находимо x<-4, з другої - $0<x\le 4$, з третьої - $x\ge 4$. Об'єднуючи знайдені рішення, одержимо $(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$.

Відповідь: $(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$.

5. Розв`язати нерівність $|7-2x|<|5-3x|+|x+2|$.



$$\begin{cases} x\le -2 \\ 7-2x<5-3x-(x+2) \end{cases};\ \begin{cases} -2<x<5/3 \\ 7-2x<5-3x+x+2 \end{cases};\ \begin{cases} 5/3<x\le 3{,}5 \\ 7-2x<-(5-3x)+x+2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x>3.5 \\ -(7-2x)<-(5-3x)+x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\le -2 \\ x<-2 \end{cases};\ \begin{cases} -2<x\le 5/3 \\ 7<7 \end{cases};\ \begin{cases} 5/3<x\le 3{,}5 \\ x>5/3 \end{cases};\ \begin{cases} x>3{,}5 \\ x>-2 \end{cases}$$

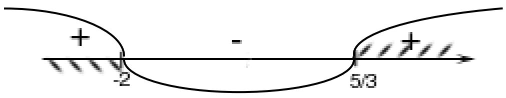
x<-2; $\varnothing$; $5/3<x\le 3{,}5$; $x>3{,}5$

Відповідь: : $x\in(-\infty;-2)\cup(5/3;+\infty)$.

В 10 класі ця нерівність може бути розв`язана іншим способом. Так як $7-2x=(5-3x)+(x+2)$ і $|a+b|<|a|+|b|\Leftrightarrow ab<0$, то

$|7-2x|<|5-3x|+|x+2|$ при $(5-3x)(x+2)<0$

або $(3x+5)(x+2)>0$.



Відповідь: $x \in (-\infty;-2) \cup \left(5/3;+\infty\right)$.

Приклади для самостійного розв`язування нерівностей:

1. $|2x+3|<x+7$; 2. $|x^2+2x-3|+3(x+1)<0$; 3. $\left|x^2-2|x|-3\right|<2$;

4. $\left|x^2+2x-3\right|+3(x+1)<0$; 5. $\left|x^2+2x-3\right|>x$; 6. $\left|x^2+x+1\right| \le \left|x^2+3x+4\right|$.

3. НЕРІВНОСТІ СТАРШОЇ ШКОЛИ

3.1. ІРРАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

При розв`язуванні ірраціональних нерівностей використовуються ті ж самі методи, що і при розв`язуванні ірраціональних рівнянь: піднесення обох частин нерівності в одну і ту ж саму ступень, введення нової змінної.

Виконувати розв`язування можна, якщо дотримуватися, наприклад, такого плану:

1) Знайти область визначення даної нерівності.

2) Розв`язати дану нерівність, керуючись запропонованими правилами рівносильності нерівностей.

3) З найдених розв`язків вибрати значення змінної, які належать області визначення даної нерівності.

Приклади:

1. Розв`язати нерівність $\sqrt{5x-4}<x$ . ОДЗ: $x \ge \frac{4}{5}$. Так як на множині $x \ge \frac{4}{5}$ обидві частини нерівності не від`ємні, то при піднесені обох частин нерівності в квадрат маємо $5x-4<x^2$ або $x^2-5x+4>0$. Ця нерівність рівносильна даній нерівності в області її визначення. З останньої нерівності знаходимо x<1; x>4. З цієї сукупності x<1; x>4 розв`язком даної

нерівності будуть лише ті значення x, які належать області визначення даної нерівності, тобто значення x, що є розв`язком системи $\begin{cases} x < 1; x > 4 \\ x > 4/5 \end{cases}$.

Відповідь: $x \in \left[4/5;1\right) \cup \left(4;+\infty\right)$.

2. Розв`язати нерівність $\sqrt{x+2} < x + \frac{1}{2}$. ОДЗ: $x \geq -2$

На множині $x \geq -2$ ліва частина даної нерівності не від`ємна, а права частина може приймати як не від`ємні так і від`ємні значення. Тому необхідно розглянути два випадки $x + 1/2 \geq 0$, $x + 1/2 < 0$.

У першому випадку можна обидві частини нерівності піднести в квадрат, у другому випадку робити цього не можна, і не треба, бо зрозуміло, що при $x + 1/2 < 0$ ліва частина нерівності не від`ємна, а права - від`ємна (не від`ємне число не може бути більшим за від`ємне). Тобто у другому випадку нерівність розв`язків не має. Отже, дана нерівність у своїй області визначення рівносильна системі $\begin{cases} x + \frac{1}{2} \geq 0 \\ \left(\sqrt{x+2}\right)^2 < \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$. Звідки находимо, що $x > \frac{\sqrt{7}}{2}$. Залишається з розв`язків $x > \frac{\sqrt{7}}{2}$ вибрати значенні x, які належать множині $x \geq -2$, тобто розв`язати систему нерівностей $\begin{cases} x > \frac{\sqrt{7}}{2} \\ x \geq -2 \end{cases}$.

Відповідь: $x \in \left(\frac{\sqrt{7}}{2};+\infty\right)$.

3. Розв`язати нерівність $\sqrt{x+2} > x + \frac{1}{2}$.

ОДЗ: $x \geq -2$.

Як і в попередньому прикладі треба розглянути два випадки $x+{}^{1}\!/_{2}\geq 0$ і $x+{}^{1}\!/_{2}<0$. Однак тепер у другому випадку дана нерівність виконується при всіх x з ОДЗ (невід'ємне число в лівій частині даної нерівності більше від`ємного числа в правій частині). Таким чином, дана нерівність рівносильна в своїй області визначення сукупності $\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}\geq 0 \\ \sqrt{x+2}>\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$; $x+{}^{1}\!/_{2}<0$.

З першої системи знаходимо $-\dfrac{1}{2}\leq x<\dfrac{\sqrt{7}}{2}$, а з нерівності $x+{}^{1}\!/_{2}<0$ отримуємо $x<-\dfrac{1}{2}$. Об`єднуючи ці значення x, маємо $x<\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. Залишається розв`язати систему нерівностей $\begin{cases} x\dfrac{\sqrt{7}}{2} \\ x\geq -2 \end{cases}$.

Відповідь: $x\in\left[-2;\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

4. Розв`язати нерівність $\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}\geq 1$.

ОДЗ: $\begin{cases} 3x\geq 0 \\ 2x+1\geq 0 \end{cases}$; $x\geq 0$. Перш ніж зводити обидві частини даної нерівності в квадрат, перепишемо її так $\sqrt{3x}\geq 1+\sqrt{2x+1}$. Далі $\left(\sqrt{3x}\right)^2\geq\left(1+\sqrt{2x+1}\right)^2, 2\sqrt{2x+1}\leq x-2$. Ця нерівність рівносильна системі:

$\begin{cases} x-2\geq 0 \\ \left(2\sqrt{2x+1}\right)^2\leq (x-2)^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x\geq 2 \\ x\leq 0, x\geq 12 \end{cases}$; $x\geq 12$. Залишається вирішити систему нерівностей $\begin{cases} x\geq 0 \\ x\geq 12 \end{cases}$.

Відповідь: $x\in[12;+\infty)$.

Приклади для самостійного розв`язування нерівностей:

1. $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 0$; 2. $\sqrt{x+2} > x$; 3. $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} > \sqrt{2x-8}$;

4. $\sqrt[3]{x^2 + 6x} > x$; 5. $\sqrt{-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{\sqrt{3}}$; 6. $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ - $\sqrt{x-\sqrt{x}} > \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$;

7. $\sqrt{x+2a} < a - \sqrt{x}$; 8. $\sqrt{x+a} - \sqrt{\frac{a^2}{x+a}} < \sqrt{x+2a}$; 9. $\sqrt{2x^2+3} < x - a$.

3.2. ПОКАЗНИКОВІ НЕРІВНОСТІ

Показові нерівності, які вирішуються в шкільному курсі математики (10 клас) можна розбити на наступні види:

1) $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ або $a^{f(x)} < a^{g(x)}$

2) $a \cdot p^{f(x)} + b \cdot p^{f(x)+n} + c \cdot p^{f(x)} < d$ або $a \cdot p^{f(x)} + b \cdot p^{f(x)+n} + c \cdot p^{f(x)} > d$

3) $a \cdot p^{2x} + b \cdot p^{x} + c > 0$ або $a \cdot p^{2x} + b \cdot p^{x} + c < 0$

4) $a^{f(x)} > b^{f(x)}$ або $a^{f(x)} < b^{f(x)}$

5) $a^{f(x)} > b$ або $a^{f(x)} < b$ (цей вид нерівності розглядається після вивчення логарифма).

Приклади:

1. Розв`язати нерівність $3^{2-x} > 27$.

Перепишемо нерівність у вигляді $3^{2-x} > 3^3$. Так як тут а = 3 і 3> 1, то 2-х> 3 (при основі ступеня більшої 1 показникова функція зростає). 2 – х > 3; х < 1.

Відповідь: $x \in (-\infty; -1)$.

2. Розв`язати нерівність $(0{,}04)^{5x-x^2-8} < 625$.

Так як 0,04 = 4/100 = 1/25 = 25^{-1}, то таку нерівність можна переписати так $25^{-5x+x^2+8} < 25^2$. Ця нерівність рівносильна нерівності x^2-5x+8 < 2. Звідки знаходимо рішення нерівності (2; 3).

Відповідь: (2; 3).

3. Розв`язати нерівність $\frac{5^{4x}}{10^{3x}} < 20^x \cdot \frac{1}{16^{x-1}}$.

Приведемо дану нерівність до однієї основи $\frac{5^{4x}}{2^{3x}5^{3x}} < 5^x 4^x \frac{1}{2^{4x-4}}$;

$\frac{5^{4x}}{2^{3x}} < \frac{5^x 2^{2x}}{2^{4x-4}}$;

$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4}$. Оскільки, а = 1/2 и 1/2 < 1, то 3x > 2x-4; x > -4.

Відповідь: x $\in$ (-4; +∞).

4. Розв`язати нерівність $3^{x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} - \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3-x}{2}} > 99$.

Приведемо дану нерівність до однієї основи $\mathbf{3^{x-1}}$ + $\mathbf{3^{x-2}}$ - $\mathbf{3^{x-3}}$ > 99;

$\mathbf{3^{x-3}}$($\mathbf{3^2}$+3 - 1) > 99; $3^{x-3} > 9$; $3^{x-3} > 3^2$; $x-3 > 2$; $x > 5$.

Відповідь: x $\in$ (5; +∞).

5. Розв`язати нерівність

$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$

$4 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x - 16 \cdot 2^x > 5 \cdot 5^x - 25 \cdot 5^x$

$-20 \cdot 2^x > -20 \cdot 5^x$

$2^x < 5^x$

Розділивши обидві частини нерівності на $5^x > 0$, отримаємо $(2/5)^x < 1$;

$(2/5)^x < (2/5)^0$; x > 0.

Відповідь: x $\in$ (0; +∞).

6. Розв`язати нерівність $\left(\frac{1}{9}\right)^{x} - \frac{28}{3^{x+1}} + 3 < 0$. Введемо нову змінну

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$, тоді $\left(\frac{1}{9}\right)^{x} = y^2$ і нерівність має вигляд $y^2 - \frac{28}{3}y + 3 < 0$;

$\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

Розв`язком цієї нерівності другого ступеня буде $\left(\frac{1}{3};9\right)$, тобто $\frac{1}{3}$<y<9.

Перейдемо до початкової змінної $\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x} < 9$; $\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$. Функція

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ спадна. Тому розв`язком нерівності будуть числа, які задовольняють

нерівності -2 <x <1.

Відповідь: x є (-2;1).

7. Розв`язати нерівність $5 \cdot 3^{3x^2} > 3 \cdot 5^{3x^2}$.

Розділимо почленно цю нерівність на добуток $5 \cdot 3$, отримаємо:

$\left(\frac{3}{5}\right)^{3x^2-1} > 1$ або $\left(\frac{3}{5}\right)^{3x^2-1} > \left(\frac{3}{5}\right)^{0}$. Основа $\frac{3}{5}$<1, тому $3x^2$-1<0.

$\left(\sqrt{3}x - 1\right)\left(\sqrt{3}x + 1\right) < 0$; $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

8. Розв`язати нерівність $36x - 2 \cdot 18^{x} - 8 \cdot 9^{x} > 0$.

$6^{2x} - 2 \cdot 6^{x}3^{x} - 8 \cdot 3^{2x} > 0$. Розділимо почленно цю нерівність на 3^{2x}>0. Отримаємо $2^{2x} - 2 \cdot 2^{x} - 8 > 0$. Позначимо 2^x=y, y>0. Тоді дана нерівність набуде вигляду y^2-2y-8>0. Звідки маємо y<2, y>4. Розв`язування першої нерівності не розглядаємо бо воно не задовольняє нерівності y>0. Переходимо до старої змінної в другої нерівності 2^x >4; 2^x >2^2; x >2 .

Відповідь: $x \in (2;+\infty)$.

9. Розв`язати нерівність $3^x > 7$.

Прологарифмуємо обидві частини даної нерівності за основою 3. Оскільки 3> 1 і $\log_3 x$ - зростаюча функція, то знак нерівності збережеться. $\log_3 3^x > \log_3 7$. За властивістю логарифму $x \log_3 3 > \log_3 7$; $x > \log_3 7$.

Відповідь: $x \in (\log_3 7;+\infty)$.

Приклади для самостійного розв`язування нерівностей:

1. $\mathbf{2^{2x+2} + 3 \cdot 2^x - 1 > 0}$; 2. $3 \cdot \mathbf{7^{2x} + 5 - 2 \cdot 7^{-x} < 0}$;

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x+\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$; 4. $\frac{1}{5-\left(\frac{1}{3}\right)^x} + \frac{2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^x} < 1$;

5. $4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x \cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$; 6. $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x \cdot 30^x$;

7. Розв`язати нерівності графічно: а) $2^{x-1} \leqslant 2 - x$; б) $2^{|x|} > 4$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < x + 2$.

3.3. ЛОГАРИФМІЧНІ НЕРІВНОСТІ

Логарифмічні нерівності в шкільному курсі математики можна виділити таких видів:

1) $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ або $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, де a>0, a $\neq$ 1, f(x) >0,g (x) >0. Ця нерівність рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$, якщо a>1 або $f(x) < g(x)$, якщо 0<a<1 (на підставі монотонності логарифмічної функції).

Приклади:

1. Розв`язати нерівність $\log_2 x > \log_2 16$.

ОДЗ: x>16. Так як основа логарифму 2 і 2>1, то ця нерівність рівносильна такої нерівності x>16.

Відповідь: $x \in (16;+\infty)$.

2. Розв`язати нерівність $\log_3(3^x - 8) < 2 - x$. ОДЗ: $3^x - 8 > 0$;

$$\log_3(3^x-8)<\log_3 3^{2-x}\ ; \qquad\qquad 3^x>8;$$

$$3^x-8<3^{2-x}; \qquad\qquad \log_3 3^x>\log_3 8;\ \ x>\log_3 8;$$

$$3^x-8<\frac{9}{3^x};$$

$3^x-8-\dfrac{9}{3^x}<0$; $\quad \dfrac{3^{2x}-8\cdot 3^x-9}{3^x}<0$. Позначимо $3^x=y$, $y>0$. Дану нерівність переписуємо у вигляді $\dfrac{y^2-8y-9}{y}<0;$ $\quad \dfrac{(y-9)(y+1)}{y}<0$.

Отримаємо y<1, y>9.Перейдемо до старої змінної $3^x<1$ і $3^x>9$; $3^x<0^0$ і $3^x>3^2$; $x<0$ и $x>2$.

З огляду на ОДЗ, необхідно розв`язати систему $\begin{cases} x>\log_3 8 \\ x<0; x>2 \end{cases}$; $x>2$.

Відповідь: $x\in(2;+\infty)$.

3. Розв`язати нерівність $\log_{1/3}(2-x)<\log_{1/3}(7+x)$ ОДЗ: $\begin{cases} 2-x>0 \\ 7+x>0 \end{cases}$;

$-7<x<2$.

Так як основа логарифма $\mathbf{\frac{1}{3}}$, $\mathbf{\frac{1}{3}}$<1,то дана нерівність рівносильна нерівності $2-x>7+x$; $2x<-5$; $x<-\dfrac{5}{2}$. З огляду на ОДЗ, необхідно розв`язати систему $\begin{cases} -7<x<2 \\ x<-2{,}5 \end{cases}$; $-7<x<-2{,}5$.

Відповідь: $x\in(-7;-2{,}5)$.

2) Логарифмічні нерівності, в рішенні яких використовуються властивості логарифмів.

Приклади:

1. Розв`язати нерівність $\lg\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{2}\lg(2x+15)<1$ ОДЗ: $\begin{cases} x-1>0 \\ 2x+15>0 \end{cases}$

x>1.

$$\frac{1}{2}\lg(x+1)+\frac{1}{2}\lg(2x+15)<1$$

$$\lg((x-1)(2x+15))<2$$ Так як основа логарифму більша за 1, то

$$\lg((x-1)(2x+15))<\lg 100$$

остання нерівність рівносильна нерівності $(x-1)(2x+15)<100$;

$$2x^2+13x-115<0$$

$$-11{,}5<x<5$$

З огляду на ОДЗ, необхідно розв`язати систему $\begin{cases} x>1 \\ -11{,}5<x<5 \end{cases}$;

Відповідь: $x \in (1;5)$.

2. Розв`язати нерівність $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2>0$;ОДЗ:

$\begin{cases} x-4>0 \\ x-2>0 \end{cases}$;

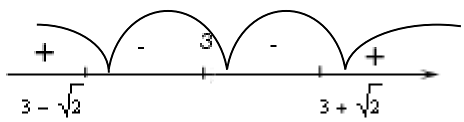
$\log\left((x-2)^2(x-4)^2\right)>0$; $x \in (2;4) \cup (4;+\infty)$;

При «переході» від даної нерівності до подальшої нерівності, помічаємо, що область визначення останньої нерівності розширилася.

$$\log_3\left((x-2)^2(x-4)^2\right)>\log_3 1$$

$$(x-2)^2(x-4)^2>1$$

$$((x-2)(x-4))^2-1>0$$



$$\left(x^2-6x+8-1\right)\left(x^2-6x+8+1\right)>0$$

$$\left(x^2-6x+7\right)\left(x^2-6x+9\right)>0$$

$$\left(x-\left(3+\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(3-\sqrt{2}\right)\right)(x-3)^2>0$$

$$x<3-\sqrt{2};\, x>3+\sqrt{2}$$

З огляду на ОДЗ, необхідно розв`язати систему $\begin{cases} x<3-\sqrt{2},\, x>3+\sqrt{2} \\ 2<x<4,\, x>4 \end{cases}$;

$x>3+\sqrt{2}$.

Відповідь: $x \in \left(3+\sqrt{2};+\infty\right)$.

При розв`язуванні даної нерівності неможна переходити до нерівності $2\log_3(x-2)+2\log_3(x-4)>0$, тому що при цьому область визначення даної нерівності звузиться, що може привести до втрати розв`язків.

3. Розв`язати нерівність $\lg(x+7)+\frac{1}{2}\lg x^2<1$ ОДЗ: $\begin{cases} x>-7 \\ x\neq 0 \end{cases}$;

$\begin{matrix} -7<x<0 \\ x>0 \end{matrix}$ Пропозиція учнів замінити $\frac{1}{2}\lg x^2$ на $\frac{1}{2}2\lg x$ або $\lg(x^2)^{1/2}$ призводить до звуження області визначення даної нерівності. Тому при вирішенні цієї нерівності треба розглянути два випадки: 1) -7 < x < 0, тоді запишем так $\lg(x+7)+\lg(-x)<1$;

lg $(-\boldsymbol{x}^2$ - 7x) < 1; lg $(-\boldsymbol{x}^2$ - 7x) < lg 10; -$\boldsymbol{x}^2$-7x < 10; -$\boldsymbol{x}^2$-7x- 10 < 0; x^2+7x +10 > 0; x < 5; x >2; 2) x > 0, тоді $\lg(x+7)+\frac{1}{2}x^2<1$ запишемо так $\lg(x+7)+\lg x<1$; lg((x + 7) x) < lg 10;$\boldsymbol{x}^2$ +7x - 10 <0; $\frac{-7-\sqrt{89}}{2}$ < x <$\frac{-7+\sqrt{89}}{2}$;

Об'єднаймо рішення, отримані в першому і в другому випадках, враховуємо ОДЗ і отримуємо відповідь.

Відповідь: $x\in(-7;0)\cup(0;+\infty)$.

3) Логарифмічні нерівності, що зводяться до нерівностей другого ступеня.

Приклади:

1. Розв`язати нерівність $\log_2{}^2 x-5\log_2 x+6<0$ ОДЗ: x > 0

Обозначим $\log_2 x=y$. Тогда данное неравенство перепишем в виде y^2 - 5y + 6 < 0; 2 < y < 3. Перейдемо до старої змінної 2 < $\log_2 x$ < 3, тобто

$\begin{cases} \log_2 x<3 \\ \log_2 x>2 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_2 x<\log_2 8 \\ \log_2 x>\log_2 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x<8 \\ x>4 \end{cases}$; 4 < x < 8.

Відповідь: $x\in(4;8)$.

2. Розв`язати нерівність

$$3\sqrt{\lg x}+2\lg\sqrt{\frac{1}{x}}<2$$

$$3\sqrt{\lg x}+2\lg\sqrt{x^{-1}}<2 \qquad \text{ОДЗ: } x\geq 1.$$

$$3\sqrt{\lg x}-\lg x<2$$

Позначимо $\sqrt{\lg x}$ = y, y ≥ 0. Отримаємо 3y - y^2 - 2 < 0; y^2 - 3y + 2 > 0; y <1, y > 2.

Перейдемо до старої змінної $\begin{array}{l}\sqrt{\lg x}<1\\ \lg x<1\\ \lg x<\lg 10\\ x<10\end{array}$; $\begin{array}{l}\sqrt{\lg x}>2\\ \lg x>4\\ \lg x>\lg 10^4\\ x>10^4\end{array}$; Враховуємо ОДЗ і

розв`яжемо систему $\begin{cases}x\geq 1\\ x<10, x>10^4\end{cases}$;

Відповідь: $x\in[1;10)\cup(10^4;+\infty)$.

4). Логарифмічні нерівності, що містять змінну в підставі логарифма $\log_{h(x)} f(x)>\log_{h(x)} g(x)$ или $\log_{h(x)} f(x)<\log_{h(x)} g(x)$.

Приклади:

1. Розв`язати нерівність

$$\begin{array}{l}\log_{3x+7}(5x+3)+\log_{5x+3}(3x+7)\geq 2\\ \log_{3x+7}(5x+3)+\dfrac{1}{\log_{3x+7}(5x+3)}\geq 2\end{array}; \qquad \text{ОДЗ: } \begin{cases}3x+7>0\\ 5x+3>0\\ 3x+7\neq 1\\ 5x+3\neq 1\end{cases}; \quad \begin{cases}x>-\dfrac{3}{5}\\ x\neq -\dfrac{2}{5}\end{cases};$$

Позначимо log$_{3x+7}$(5x+3) = y. Тоді дану нерівність запишемо у вигляді $y+\frac{1}{y}-2\geq 0$; $\frac{y^2-2y+1}{y}\geq 0$; $\frac{(y-1)^2}{y}\geq 0$; y > 0 ; log$_{3x+7}$(5x+3) > 0; log$_{3x+7}$(5x+3) > log$_{3x+7}$1; (*) Область визначення даної нерівності - об'єднання проміжків $\left(-\frac{3}{5};-\frac{2}{5}\right)\cup\left(-\frac{2}{5};+\infty\right)$. У ОДЗ вираз 3x + 7 > 1, тому нерівність (*) рівносильна нерівності 5x+3 >1; 5x > -2; x > -$\frac{2}{5}$.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{2}{5};+\infty\right)$.

2. Розв`язати нерівність $\log_{x+1}(x^2 - x - 2) \le 1$; ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ x > 2 \end{cases}$;

Якщо область визначення даної нерівності є проміжок (2; + □), то підстава логарифма x + 1 більше одиниці. Маємо $\log_{x+1}(x^2 - x - 2) \le \log_{x+1}(x+1)$; $x^2 - x - 2 \le x + 1$; $x^2 - x - 2 \le 0$ $-1 \le x \le 3$.

Враховуємо ОДЗ і розв`яжемо систему $\begin{cases} x > 2 \\ -1 \le x \le 3 \end{cases}$; $2 < x \le 3$.

Відповідь: $x \in (2;3]$.

Приклади для самостійного розв`язування нерівностей:

1. $\boldsymbol{log_3(x+4) < log_3(x^2+2x-2)}$; 2. $\boldsymbol{log_{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{x}+7}{2\mathrm{x}+3} < log_{\frac{1}{2}}(5-\mathrm{x})}$;

3. $\frac{\boldsymbol{log_{\frac{1}{3}}\mathrm{x}-1}}{\boldsymbol{log_{\frac{1}{3}}\mathrm{x}+2}} < \frac{\boldsymbol{log_{\frac{1}{3}}\mathrm{x}-3}}{\boldsymbol{log_{\frac{1}{3}}\mathrm{x}+4}}$; 4. $\boldsymbol{log_8(\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}+3) < 1}$; 5. $\boldsymbol{log_{x-1}(x+1) > 2}$;

6. $\boldsymbol{log_{3x}\frac{3}{x} + {log_3}^2 x > \frac{1}{x}}$; 7. $\boldsymbol{x^{2-2log_2 x-{log_2}^2 x} > \frac{1}{x}}$; 8. $\boldsymbol{log_{\frac{1}{2}} log_8 \frac{x^2-1}{x-2} < 0}$;

9. Розв`язати нерівності графічно: а) $|\boldsymbol{log_2}\mathrm{x}| \geqslant 2$; б) $\boldsymbol{log_3|x-1| < 1}$;

в) $\boldsymbol{log_{\frac{1}{2}}|x| \geqslant |x|-1}$; 10. $3\boldsymbol{{log_a}^2 x + log_a x > 0}$; 11. $\boldsymbol{\frac{3}{log_a(2a^2x)} + log_{2ax}a + 2log_{2x}a > 0, a > 0, a \neq 1}$; 12. $\boldsymbol{\frac{1}{2} lg(3a-x) < 1 - \frac{1}{2}\, lg(2x-a)}$.

3.4.ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ

Розв`язування тригонометричних нерівностей (10 клас) зводиться, як правило, до розв`язування найпростіших тригонометричних нерівностей виду

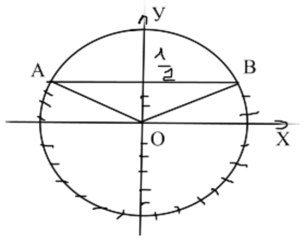
sinx > a, cosx < a і т.д.

Для розв`язування найпростіших тригонометричних нерівностей зручно користуватися одиничним колом, на якому безліч значень змінної, що задовольняє заданій найпростішій нерівності, зображується у вигляді однієї або декількох дуг.

Ніяких загальних формул для вирішення тригонометричних найпростіших нерівностей не виводиться, їх розв`язування розглядаються на конкретних прикладах. Після рішення кількох прикладів бажано записати з учнями планово послідовність виконання дій.

Приклади:

1. Розв`язати нерівність $\sin x < \frac{1}{2}$.



Відзначимо на осі У значення синуса рівне $\frac{1}{2}$ і проведемо пряму, паралельну осі Х до перетину з колом. Далі на осі У відзначимо значення sin x, менше $\frac{1}{2}$ і відповідну їм дугу на колі. Розв`язки даної нерівності лежать на зазначеній дузі, тепер необхідно записати її кінці. При цьому треба пам'ятати, що якщо при прочитанні дуги відбувається перехід через 0^0, то лівий кінець дуги записується від'ємним значенням, а правий - додатнім.

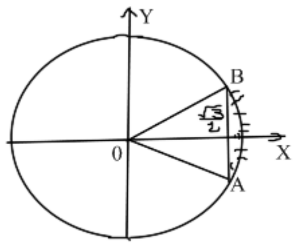
Точці В відповідає кут, синус якого дорівнює $\frac{1}{2}$. Цей кут π / 6.

Точці А буде відповідати кут - $7\frac{\pi}{6}$.

З огляду на те, що якщо точка кола відповідає числу а, то вона відповідає і всім числам виду а + 2π к (к $\in$ z), отримуємо $-7\frac{\pi}{6} + 2\pi к < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi к$, (к$\in$z).

Відповідь: $x \in (-7\frac{\pi}{6}+2\pi к;\ \frac{\pi}{6}+2\pi к)$.

2. Розв`язати нерівність $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.



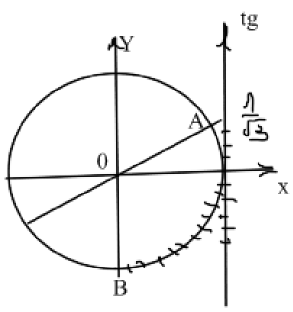
На осі X відкладаємо значення косинуса, рівне $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Відзначаємо значення косинуса, які більші за $\frac{\sqrt{3}}{2}$ на осі X і відповідну цим значенням дугу. Записуємо кінці дуги, вибравши напрямок її прочитання.

$A = -\frac{\pi}{6}+2\pi п$; $B = \frac{\pi}{6}+2\pi п$; $(п \in z)$.

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi п \leq x \leq \frac{\pi}{6}+2\pi п; \quad (п \in z).$$

Відповідь: $x \in (-\frac{\pi}{6}+2\pi п;\ \frac{\pi}{6}+2\pi п)$.

3. Розв`язати нерівність $\operatorname{tg} x < 1/\sqrt{3}$; ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi к$; $(к \in z)$.



В = $-\frac{\pi}{2}+\pi n$; А = $\frac{\pi}{6}+\pi n$;

Відповідь: $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \frac{\pi}{6}+\pi n$; ($n\in z$).

4. Розв`язати нерівність $\sin x \cos 5x \le \sin 9x \cos 3x$.

$\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin(-4x)) \le \frac{1}{2}(\sin 12x+\sin 6x)$; $\sin6x-\sin4x-\sin12x-\sin6x \le 0$;

$\sin4x+\sin 12x \ge 0$; $2\sin8x\cos4x \ge 0$; $\begin{cases}\sin 8x \ge 0\\ \cos 4x \ge 0\end{cases}$; і $\begin{cases}\sin 8x \le 0\\ \cos 4x \le 0\end{cases}$;

$$\begin{cases}0^\circ + 2\pi n \le 8x \le \pi + 2\pi n\\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le 4x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n\end{cases}; \; i \; \begin{cases}\pi + 2\pi n \le 8x \le 2\pi + 1\pi n\\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n \le 4x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\end{cases};$$

$$\begin{cases}\frac{\pi n}{4} \le x \le \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}\\ -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \le x \le \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\end{cases}; \; i \; \begin{cases}\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{4}\\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \le x \le \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\end{cases};$$

$$0^\circ + \frac{\pi}{2}n \le x \le \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2n} \; u \; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2n} \le x \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n}; \; 0^\circ + \frac{\pi}{2n} \le x \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n;$$

Відповідь: $x \in \left[\frac{\pi}{2n}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n\right]$.

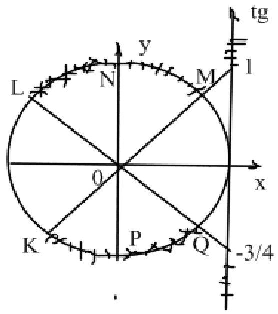
5. Розв`язати нерівність $6\sin^2 x - \sin x \cos - \cos^2 x > 2$ (5)

Так як $2 = 2(\sin^2 x+\cos^2 x)$, то можна перетворити нерівність (5) до виду $4\sin^2 x - \sin x \cos x - 3\cos^2 x > 0$ (6). Так як $\cos^2 x \ge 0$, то нерівність (6) рівносильне наступній сукупності систем $\begin{cases}\cos^2 x > 0\\ 4tg^2 x - tgx - 3 > 0\end{cases}$ і $\begin{cases}\cos^2 x = 0\\ 4\sin^2 x > 0\end{cases}$

(7)

Друга система сукупності (7) має рішення $x = \frac{\pi}{2}+\pi k$. Перша система цієї сукупності рівносильна наступній системі $\begin{cases}x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k\\ (tgx - 1)(tgx + \frac{3}{4}) > 0\end{cases}$; яка, в свою чергу, рівносильна сукупності нерівностей tgx < $-\frac{3}{4}$; tgx > 1 (8).

Знайдемо рішення сукупності (8). Геометричним розв`язком нерівності tgx> 1 є об'єднання відкритих дуг MN і KP.



Геометричним розв`язком нерівності tgx < $-\frac{3}{4}$ є об'єднання відкритих дуг NL і PQ. Геометричний розв`язок сукупності (8) являє собою об'єднання чотирьох дуг MN, KP, NL, PQ. Так як далі, геометричний розв`язок другої системи сукупності (7) являє собою двоелементну множину [N, P], то геометричний розв`язок цієї сукупності являє собою об'єднання двох дуг ML і KQ, тобто ML: $\frac{\pi}{4}+2\pi k < x < \pi - arctg\frac{3}{4}+2\pi k,\ k \in Z$.

З огляду на те, що дуга KQ виходить з дуги NL поворотом на 180^0, ми можемо не складати аналітичний запис дуги KQ, а відразу записати розв`язок сукупності (8) у вигляді $\frac{\pi}{4}$ +2πк < x < π - arctg$\frac{3}{4}$ + πк, $k \in Z$. Це і є розв`язок нерівності (5).

Приклади для самостійного розв`язування нерівностей:

1. sin$\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2. sin $(x-1) \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3. cos2x< $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4. tg$(2x-1) < 1$;

5. 2$cos^2x - 7sinx < 5$; 6. 12cos^2x+7sinx< 13 ; **7.** cos4x+cos2x< 0 ;

8. sinx + cosx > $-\sqrt{2}$; 9. cos2x sinx< $0, -\pi \le x < \pi$; 10. 2tg2x≤ $3tgx$;

11. $\frac{2+\sqrt{2}-4\cos^2 x}{\sin x-\cos 2x} \geq 2$; 12. $4\sin x \ \sin 2x \ \sin 3x < \sin 4x$; 13. $4\cos^3\frac{x}{2} + 3\sqrt{2}\sin x \leq 8\cos\frac{x}{2}$.

1. $\begin{cases} \sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; 2. $\begin{cases} \sin x \geq \frac{1}{2} \\ \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; 3. $\begin{cases} tgx \geq -\sqrt{3} \\ \sin x < \frac{1}{2} \end{cases}$; 4. $\begin{cases} \sin x > \cos y \\ -2\pi < x < 2\pi \end{cases}$.

Рекомендована література

1. Бевз Г.П. Методика викладання математики. К.: Вища школа, 1989 .
2. Бевз Г.П. Нерівності. *Математика в школі*. 2009. № 1 2. С. 23 – 27.
3. Бевз В.Г., Васильєва Д.В. Збірник завдань з математики ДПА 2020, Харків: "Освіта", 2020. 80 с.
4. Березняк М.В. Підсумкові контрольні роботи Математика 9 клас. Тернопіль: "Підручники і Посібники", 2019. 64 с.
5. Белешко Д.Т. Розв‘язуємо ірраціональні рівняння та нерівності: Навч. Пос. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. 80с.
6. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. институтов. М.: Просвещение, 1988. 223 с.
7. Навчальні програми, підручники та навчально-методичні посібники, рекомендовані МОН України. Електроний ресурс. Доступно: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogramipidruchniki-ta-navchalno-metodichni-posibnikirekomendovani-mon.
8. Невяжский, Г.Л. Неравенства. Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1947. 204 с.
9. Севрюков П.Ф., Смоляков А.Н. Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства: учебное пособие. М.: Илекса, 2008. 352 с.

10.Слєпкань З. І. Методика навчання математики. Київ : Зодіак-ЕКО, 2006. 512 с.
11.Big Ideas Math: Algebra 1 Student Journal. 2014. 227 p.
12. Cvetkovski, Z. Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems. - Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. 455 p.
13. Herman, J., Kucera, R., Simsa, J., Dilcher. K. Equations and inequalities: elementary problems and theorems in algebra and number theory. 2000. 344 p.
14. Riasat, S. Basics of Olympiad Inequalities. 2008. 45 p.
15. Zawaira, A., Hitchcock, G. A primer for mathematics competitions. – New York, 2009. 360 p.