Державний заклад
"Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського"

Кафедра математики і методики її навчання

Тамара КОРОСТІЯНЕЦЬ

УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСОМ ЗАСВОЄННЯ ЗНАНЬ

Методичні рекомендації
для організації самостійної роботи та дистанційного навчання за курсом "Методика навчання шкільного курсу математики" здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Одеса - 2023

Рекомендовано до друку рішенням ученої ради Державного закладу "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського" (протокол №11 від 27 квітня 2023 року).

Коростіянець Т.П. Управління процесом засвоєння знань. Методичні рекомендації для організації самостійної роботи та дистанційного навчання за курсом "Методика навчання шкільного курсу математики" здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Одеса, Університет Ушинського, 2023. 44 с.

Рецензенти:

Волкова М. Г., кандидат фізико-математичних наук, доцент, в.о. завідуючого кафедри вищої математики Державного університету інтелектуальних технологій і зв`язку.

Галіцан О.А., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри педагогіки Державного закладу "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського"

ПЕРЕДМОВА

Управління процесом засвоєння знань - методичні рекомендації для організації самостійної роботи та дистанційного навчання за курсом " Методика навчання ШКМ" здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем спеціальності 014Середня освіта (Математика).

Методичні рекомендації присвячені дуже важливій темі шкільного курсу математики такій, як управління навчальним процесом по організації власних дій учнів при навчанні. У рекомендаціях описано методику роботи з означеннями понять, методику роботи з формулюванням теорем, роботу з доведенням теорем. В роботі приводиться багато прикладів, задачі для самостійної роботи структуровані, рекомендовано перелік навчальної літератури. Особливістю методичних рекомендацій є доступна, систематизована, лаконічна форма викладу матеріалу.

ЗМІСТ

ВСТУП

Засвоєння знань - процес складний, що включає в себе оволодіння сукупністю різноманітних операцій і дій.

У психологічному аспекті засвоєння визначається як пізнавальна діяльність, що включає такі психічні процеси, як сприйняття, пам'ять, мислення. Разом з тим, засвоєння знань передбачає не тільки участь розумових процесів. Воно безпосередньо пов'язане також з особливостями особистості - її почуттями, волею і т.д. (Богоявленський Д.Н., Менчинская Н.А.). Дійсне засвоєння можливо тільки тоді, коли учень активно діяв з навчальним матеріалом, пробував застосовувати відповідні знання, що сприяло виробленню певних умінь і навичок. Звідси є важливим, як була організована пізнавальна діяльність учнів, яка пізнавальна активність була при цьому забезпечена, за яких педагогічних умовах вона найбільш яскраво виявлялася.

Отже, засвоєння - це не спонтанний процес оволодіння знаннями, вміннями і навичками, а цілеспрямоване їх формування в процесі спеціально організованої навчально-пізнавальної діяльності учнів.

Численні дослідження (В. В. Давидов, Л. В. Занков, Г.С.Костін, А. А. Люблінська, Н.А.Менчинська, А.А.Смирнов, Л.Б.Ельконін і ін.) показали, що структура навчально-пізнавальної діяльності, в якій взаємодія суб'єкта з об'єктом відбувається під керівництвом учителя, включає наступні компоненти:

1) мета діяльності - усвідомлення учнями конкретної пізнавальної задачі, що саме треба знати і для чого;

2) мотив, що спонукає учня до дії;

3) зміст діяльності - відомі, опорні знання і невідомі, нові зв'язки, відносини, висновки, які треба знайти, вирішуючи завдання;

4) методи, які учень використовує для досягнення мети: вміння, навички, операції, що виконуються в певних умовах діяльності, які відтворюють і творчі, практичні і розумові дії;

5) контроль і оцінка результатів діяльності з боку вчителя, самоконтроль і самооцінка учнів.

В результаті цієї діяльності учень засвоює зміст навчального матеріалу. Організація засвоєння становить завдання діяльності вчителя, який керує цим процесом, надає допомогу учням, контролює отримані результати, планує завдання, зміст і методи. При цьому викладач повинен знати, яким чином відбувається засвоєння знань учнями, як створюється інтерес до навчального предмету, за яких умов учні глибше усвідомлюють, міцніше запам'ятовують і успішніше застосовують вивчений матеріал.

Здобуваючи знання, учні вчаться перебудовувати, переосмислювати їх, застосовувати до вирішення різноманітних завдань. А це означає, що будь-які дії педагога на особистість учня повинні доповнюватися проявом власної активності учня в оволодінні необхідними знаннями і діями, а також зустрічним впливом на який навчає, в результаті якого дещо трансформується діяльність останнього. Але практично кожне вплив на людину, що змінює його стан і викликає відповідну реакцію, прийнято характеризувати як вплив, який управляє. Отже, в умовах взаємодії вчителя і учня під впливом активності кожного, учень засвоює певну систему знань, набуває вміння і навички для подальшого застосування їх на практиці; учитель організовує активну розумову і практичну діяльність учнів по реконструкції навчального матеріалу і його засвоєння, робить процес засвоєння особистісно значущим, тобто керує цим процесом.

УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСОМ ЗАСВОЄННЯ ЗНАНЬ

1.1. МЕТОДИКА РОБОТИ З ОЗНАЧЕННЯМ ПОНЯТЬ

Щоб забезпечити управління навчальним процесом, на думку психологів, необхідно організувати власні дії учнів. Ніяке навчання без особистої активності школяра неможливо - каже один з важливих принципів дидактики. Причому, як показали дослідження А.Н. Леонтьєва, успішність управління засвоєнням залежить не тільки і не стільки від того, що учні щось «роблять» з матеріалом, як від відповідності (адекватності) їх дій цілям навчання. Що ж це таке - адекватні знанням дії? І яким чином можна встановити, які саме дії адекватні матеріалу,що підлягає засвоєнню? Розглянемо методику вивчення понять - основи будь-якого наукового курсу?

Поняття в курсі математики вводяться, як правило, за допомогою означень. Методика роботи з означеннями тому є дуже важливою в викладанні математики. Іноді кажуть, що для засвоєння означення його потрібно просто вивчити. Але це невірно. Щоб переконатися в цьому, зупинимося на результатах одного педагогічного експерименту. Він проводився в класах хороших вчителів, в тому числі в математичних класах. В експерименті брали участь тільки ті учні, які на думку викладачів, успішно засвоїли раніше пройдений матеріал. Учням було запропоновано записати кілька означень шкільного курсу: перпендикулярних прямих, бісектриси кута, суміжних кутів, вертикальних кутів. Після цього, як всі випробовувані впоралися із завданням, кожен учень отримав кілька малюнків і повинен був знайти на них перпендикулярні прямі, встановити, на яких малюнках промінь є бісектрисою кута, вказати вертикальні кути, вказати суміжні кути. З відшукання вертикальних і суміжних кутів впоралися всі випробовувані, а ось з відшукання перпендикулярних прямих і бісектрис кутів - лише близько половини. Нарешті, учням було запропоновано обгрунтувати свої висновки, тобто пояснити, чому на зазначеному малюнку вони вважають кути суміжними (або не суміжними), вертикальними (або не вертикальними) і так далі. Після того, як учні записали текст відповідної означення, можна очікувати, що вони, обґрунтовуючи свої висновки, так чи інакше будуть посилатися на нього. І дійсно, майже всі учні посилалися на означення перпендикулярних прямих і бісектриси кута. Однак тільки одиниці посилалися на означення суміжних і вертикальних кутів. Замість означень багато учнів писали, що кути суміжні, так як сума їх величин 180 °; кути вертикальні, так як вони мають однакову величину. Заключною частиною експерименту були бесіди з випробуваними. Результати бесід показали, що і в тих випадках, коли учні цитують означення, і в тих, коли вони наводять аргументи типу «так як сума величин кутів 180 °», вони в дійсності спираються зовсім не на означення, а на шаблон, зоровий образ, сформований у свідомості в ході знайомства з означенням. Чому вони помилялися, встановлюючи перпендикулярність прямих, робили неправильні висновки про те, чи є промінь бісектрисою кута? Та тому, що креслення були свідомо виконані так, щоб дізнатися об'єкти, порівнюючи їх зі сформованим у свідомості шаблоном, було важко. Наприклад, на малюнку, пред'явленому учням, сторони трикутника були перпендикулярними. Але проведені всередині кута бісектриса і медіана створювали ілюзію тупого кута. Учні, які не бачили подібності з тим образом, який склався у них у свідомості, не розглядали ці прямі у якості кандидатів на перпендикулярні. На іншому малюнку чотирикутник побудований так, що кути, на які промінь OC ділить кут AOB, здавалися, нерівними. Учні, не бачачи подібності з шаблоном, який склався в їх свідомості, не вважали за потрібне виконувати будь-які операції з використанням транспортира. А ось порівнювати з шаблоном суміжні і вертикальні кути простіше. Звідси - практично безпомилкові відповіді на ці питання. Цей експеримент довів, що знання тексту означення напам'ять недостатньо: учні, які його знають часто не справляються з розпізнаванням об'єктів, що входять в обсяг поняття, що визначається; більш того, вони фактично не користуються означенням в практичній роботі з поняттям, проявляючи формалізм в знаннях. Причина цього - неправильне відпрацювання означень, відсутність завдань, які спонукають використовувати в роботі не тільки шаблон поняття, а й сам текст означення.

Якщо ми хочемо керувати процесом засвоєння, то недостатньо тільки організувати роботу на «вході» (поставити перед учнем саме ту задачу, рішення якої необхідно для успішного засвоєння матеріалу) або тільки переконатися в правильності результату на «виході» (встановити, що учень правильно відповів на питання завдання). Необхідно втрутитися в ті процеси, які відбуваються при вирішенні поставленого завдання в свідомості кожного учня, забезпечити ефективне звернення до матеріалу, який підлягає засвоєнню. Існують способи втручання в розумову діяльність кожного з учнів? Або можна, наприклад, змусити учня в ході розпізнавання приналежності до поняття орієнтуватися переважно на означення, а не на шаблони, що склалися в свідомості? Психологи відповідають на це питання ствердно. Механізм такого навчання описаний в роботах П.Я. Гальперіна, Н.Ф. Тализіної та інших вчених. Пояснимо його дію на прикладі розпізнавання приналежності до поняття «бісектриса кута». Для цього розберемо, що ж робили ті деякі учні, які брали участь в експерименті і успішно впоралися із завданням про бісектрису. Вони міркували за такою приблизно схемою: «Луч є бісектрисою кута, якщо виконуються дві умови: 1) початок променя збігається з вершиною кута, 2) промінь ділить кут на два рівних кута. Оскільки завдання полягає в тому, щоб дізнатися, чи є промінь бісектрисою кута, треба перш за все встановити, збігається початок променя з вершиною кута. Якщо ця умова виконується, треба перевірити, чи розділився даний кут на два рівних кута ». Перевірка першої умови; висновок про те, що необхідно перейти до перевірки другої умови, або про необхідність припинити перевірку; перевірка другої умови (якщо це необхідно); остаточний висновок - ось операції, з яких складається вирішення цієї та аналогічних задач. Контроль за її правильністю зводиться до контролю за правильністю виконання кожної операції. Однак, якщо рішення виконується в розумі і вчителю повідомляється лише кінцевий результат, неможливо проконтролювати окремі операції і їх правильність. Отже, необхідно організовувати роботу таким чином, щоб кожна з операцій виконувалася у формі, що дозволяє здійснювати потрібний контроль. Оскільки найчастіше мета навчання - забезпечити вміння виробляти відповідні операції в розумі, контроль треба поступово замінити самоконтролем.

Питання:

1. Як ви розумієте термін «управління засвоєнням»?

2. Як ви розумієте термін «адекватні знанням дії»?

3. Учень уважно слухав вчителя, який просив нічого не записувати, не ставив ніяких питань і взагалі ніяким чином не стимулював власної активності учня. Проте матеріал був цим учнем засвоєний. Як узгодити цей факт з твердженням психологів про те, що засвоєння знань досягається лише в тому випадку, якщо забезпечується потрібна активність (діяльність, адекватна знанням)?

Будь-яке означення може бути представлено у формі

$$(\forall\, x \in M)\ (A(x) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B(x)) \quad (1)$$

Тут «належати множині М є родовим поняттям, предикат А (х) вводить новий термін, а предикат В (х) містить перерахування видових відмінностей». Оскільки в означеннях шкільного курсу не завжди чітко виділений предикат В (х) і не завжди зазначено множину М, вчителю важливо освоїти переклад означень в форму (1). Покажемо приклад, як може бути здійснений запис в такій формі означення паралелограма: «паралелограмом називається чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні». Родовим по відношенню до даного поняття є поняття чотирикутника: саме в множині чотирикутників виділяється підмножина, елементи якої позначаються терміном «паралелограм», це прямо підкреслено в означенні. Видову відмінність - властивість «протилежні сторони попарно паралельні», яка рівносильна кон'юнкції властивостей: «дві сторони паралельні між собою» і «дві інші сторони паралельні між собою». Таким чином, означення паралелограма може бути представлено у вигляді: (для будь-якого чотирикутника x) ((x - паралелограм) $\Leftrightarrow$ ((дві сторони x паралельні між собою) і (дві інші сторони x паралельні між собою))). Це означення можна записати компактніше, якщо скористатися звичайними позначеннями чотирикутника, його сторін і паралельності:

$$(\forall\, ABCD)\ ((ABCD \text{ - паралелограм}) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} ((AB \parallel CD) \text{ і } (BC \parallel AD)))$$

Питання:

1. Які слова треба поставити замість точок, щоб вийшли відомі речення шкільного курсу математики? Перепишіть ті з них які є в цьому курсі означеннями, поставивши, де потрібно, знак def:

а) $(\forall\, ABCD)\ ((ABCD \text{ - …}) \Leftrightarrow (ABCD \text{ - має центр симетрії}))$;

б) $(\forall\, ABCD)\ ((ABCD \text{ - …}) \Leftrightarrow (((AB \parallel CD) \text{ і };(AB = CD)))$;

в) $(\forall\, ABCD)\ ((ABCD \text{ - …}) \Leftrightarrow (((AB \parallel CD) \text{ і } (BC \nparallel AD)))$;

2. Які знаки логічних операцій треба поставити замість точок, щоб вийшли відомі означення:

а) $(\forall \Delta\, ABC)\ (((\Delta\, ABC \text{ - рівнобедрений}) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} ((AB = BC) \ldots (BC = CA) \ldots$
$(CA = AB)))$;

б) $(\forall \Delta\, ABC)\ ((\Delta\, ABC \text{ - рівносторонній} \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} ((AB = BC) \ldots (BC = CA) \ldots$
$(CA = AB)))$?

3. Запишіть кожне з наступних означень в формі (1):

а) ромбом називається паралелограм, дві суміжні сторони якого рівні;

б) дріб називається неправильним, якщо його чисельник не менше знаменника;

в) дві прямі називаються паралельними, якщо вони не співпадають, або належать одній площині і не мають спільних точок;

г) логарифмом числа a при основі b (де $a \succ 0,\ b \succ 0,\ b \neq 1$)називається показник степеня, в який треба піднести число b, щоб отримати число a;

д) гомотетією з центром О і коефіцієнтом К (де $К \neq 0$) називається відображення площини на себе, яке переводить точку А в таку точку $А_1$, що $ОА_1 = К \cdot ОА$

4. Дайте означення круга і кола, та запишіть їх в формі (1).

Щоб встановити, які дії адекватні означенням, з'ясуємо, дотримуючись рекомендацій психологів, яка мета вивчення означень в шкільному курсі математики. Ця мета дуже широка: тут і саме введення понять, і досягнення розуміння ролі означень в побудові точних наук. Тексти підручників і методичні вказівки досить орієнтують вчителя в цій спільній меті і в її втіленні з приводу кожного введеного означення. І викладач, який пояснює матеріал, враховує ці вказівки, а значить працює в напрямку даної мети. Ясно, що одного цього орієнтування недостатньо. Потрібно концентрувати ці цілі з точки зору діяльнісного підходу до навчання - зрозуміти, які дії повинен вміти виконувати учень, що засвоїв означення. Для цього потрібно розглянути, як може використовуватися текст означення при розв`язуванні задач. У завданнях можуть бути дві принципово різні ситуації. По-перше, може зустрітися термін, що вводиться цим означенням, і для розв`язуванні задачі знадобитися цей термін розшифрувати. По-друге, може знадобитися довести, що об'єкт, про який йдеться в задачі, можна назвати цим терміном (і скористатися всім, що ми про нього знаємо), для чого потрібно вміти доводити приналежність об'єкта до даного поняття. Наприклад, у всіх численних задачах, що вимагають застосування означення паралелограма, це застосування зводиться або до встановлення того, що деяка фігура є (або не є) паралелограмом, або до висновку наслідків з того, що дана фігура є (або не є) паралелограмом. Ось задача: побудувати паралелограм по його висоті і двом суміжним сторонам. За формою вона не має нічого спільного з двома тільки описаними діями. Однак, вирішуючи це завдання, учень повинен розгорнути поняття «паралелограм», і при доказі правильності побудови перевірити, побудований чотирикутник - дійсно паралелограм; тільки в цьому і полягає застосування означення при вирішенні цієї задачі. І взагалі будь-яке застосування будь-якого означення є не що інше, як умовивід, зроблений на підставі істинності імплікації (1). А таких умовиводів рівно два види:

1) якщо справжня (помилкова) кон'юнкція висловлювань ($x \in M$) $\wedge$ $B(x)$, то об'єкт їх можна (не можна) позначити терміном А;

2) якщо об'єкт можна (не можна) позначити терміном А, то справжня (помилкова) кон'юнкція висловлювань ($x \in M$) $\wedge$ $B(x)$.

Дії, адекватні означенню, і полягають у виконанні одного з двох видів умовиводів. Перше з них будемо називати дією підведення під поняття, друге - дією виведення наслідків. Як ми тільки що бачили на прикладі задачі на побудову, обидва ці дії необхідні при роботі з означенням; інших дій не може бути, тому що ніяких інших висновків на підставі означення зробити не можна.

Питання:

1. Які дії повинні виконати учні, використовуючи означення паралелограма при вирішенні наступних задач:

а) Доведіть, що бісектриси двох протилежних кутів паралелограма паралельні.

б) При перетині бісектрис кутів паралелограма утворився чотирикутник. Доведіть: 1) цей чотирикутник є паралелограм; 2) всі кути цього чотирикутника прямі.

2. Придумайте задачі, для вирішення яких необхідно використовувати означення лінійної функції, виконуючи при цьому: а) дію підведення під поняття; б) дію виведення наслідків.

Розглянемо, з яких елементарних операцій складаються названі дії, тобто з'ясуємо, які операції доводиться здійснювати учневі при виконанні цих дій. Операції при підведенні під поняття можуть бути різними, в залежності від способу завдання істинності значень висловлювань $x \in M$ і $B(x)$: або у вигляді безпосередньої інформації, або у вигляді інформації непрямої. Наприклад, те, що x - чотирикутник, може бути сказано в задачі прямо, а може і через якийсь характеристичної властивість чотирикутника (скажімо, через вказівку числа його діагоналей). Точно так же по-різному може бути повідомлена інформація про паралельність сторін. Слід особливо підкреслити випадок, коли доводиться робити підведення під поняття для об'єктів, які задаються не словесним описом, а у вигляді матеріальних (пластмасових, дерев'яних і т.п.) або матеріалізованих (намічених на дошці, показаних на екрані і щось подібне) моделей. Якщо істинне значення виразу $x \in M$ або висловлювання B (x) дано побічно, то учень повинен зробити деякі операції для з'ясування цих значень. Це можуть бути, зокрема, матеріальні операції (наприклад, вимір), а також розумові дії (умовиводи, засновані на раніше вивченому матеріалі). Будь-яку послідовність операцій щодо з'ясування істинності значення виразу $x \in M$ або висловлювання B (x) ми будемо називати розпізнаванням.

Отже, дія підведення під поняття може здійснюватися в різних варіантах:

1) складатися з розпізнання істинності значень висловлювань $x \in M$ і B (x) і з виведення наслідків про істинність висловлювання A (x)

2) складатися з розпізнання істинності значення тільки одного з висловлювань $x \in M$, B (x) (якщо значення іншого відомо) і з виведення слідства про A (x)

3) складатися тільки з виведення слідства про A (x) (якщо істинності значення висловлювань $x \in M$, B (x) відомі).

Дидактичне значення цих трьох варіантів різне. У першому варіанті учень змушений оперувати з кожною складовою означення, встановлювати тим чи іншим способом справжнє значення кожного висловлювання, що входить в умову, і робити з цього відповідні висновки. В результаті відбувається і запам'ятовування всього тексту означення, і з'ясування його зміст і структура. Разом з тим настільки докладна робота з окремо взятим означенням може перешкодити сприйняттю загальних прийомів роботи з означенням і загальних алгоритмів логічних умовиводів. У другому (а ще більше - в третьому) варіанті добре проявляються ці загальні методи логічної обробки матеріалу, але в меншій мірі відпрацьовується конкретний зміст даного означення. Наприклад, означення: квадратом називається ромб, у якого є прямий кут. Тут М - це множина ромбів; В (х) (х має прямий кут), А (х) (х - квадрат). Дія підведення під поняття - це висновок про істинність (хибність) висловлювання «даний об'єкт - квадрат» на підставі наявних відомостей про істинність (хибність) кон'юнкції висловлювань «даний об'єкт - ромб» і «даний об'єкт - має прямий кут». Перший варіант виконання цієї дії полягає в тому, що учень розпізнає справжнє значення висловлювань «даний об'єкт - ромб» і «даний об'єкт має прямий кут» самостійно. Приклади задач, які змушують учня діяти саме так: а) чи є квадратом фігура, намальована на дошці (вирізана з картону і т.п.); б) чи є квадратом паралелограм, якщо кожна з його діагоналей ділить його на рівнобедрені прямокутні трикутники) в) чи представляє собою квадрат прямокутник, діагоналі якого перетинаються під кутом 60 °.

Другий варіант виконання підведення під поняття при роботі з тим же означенням квадрата полягає в тому, що учень розпізнає самостійно істинність значення тільки одного з висловлювань «даний об'єкт - ромб» і «даний об'єкт має прямий кут», а значення іншого з цих висловлювань відомо за умовою задачі. Приклади: а) серед ромбів, намальованих на дошці, знайдіть квадрати; б) серед прямокутників, намальованих на дошці, знайдіть квадрати.

У третьому варіанті виконання підведення під поняття квадрата учневі відомі всі дані про істинність висловлювань «даний об'єкт - ромб» і «даний об'єкт має прямий кут». Учневі залишається тільки вивести слідство про істинність висловлювання "даний об'єкт - квадрат". Приклади: а) встановіть, є квадратом ромб ABCD з прямим кутом A; б) встановіть, є квадратом ромб ABCD з кутами A = 30 °, B = 150 °, C = 30 °, D = 150 °.

Питання:

1. Розглянемо визначення: "квадратичною функцією називається функція, яку можна задати рівнянням виду $y = ax^2 + вx + c$, де $a \neq 0$. Які операції доведеться здійснювати учневі, виконуючи підведення під поняття квадратичної функції для наступних об'єктів:

а) рівняння $x + y = x^2 - 1$;

б) рівняння $x^2 + y^2 = 2x + 1$;

в) рівняння $x^2 + вx - 4 = y$;

г) рівняння $y = a\,x^2 + вx + c$, де а - корень рівняння $к^2 + к = 0$?

2. Придумайте ситуації для різних варіантів виконання дії підведення під поняття арифметичної прогресії.

Сказане про третій варіант дії підведення під поняття в повній мірі відноситься і до дії виведення наслідків. Адже це дія - не що інше, як визначення справжнього значення кон'юнкції ($x \in м$) $\wedge$ В (х) на підставі істинного значення висловлювання А (х). Але останнє можна задати єдиним способом - прямо повідомити, чи можна даний об'єкт назвати даним терміном: при роботі з означенням ми про дане поняття просто нічого, крім означення, не знаємо. Отже, ми з'ясували, що в першу чергу повинен виконувати учень, щоб оволодіти тим чи іншим означенням, яке вводиться. Для того, щоб здійснювати управління засвоєнням означення, потрібно домагатися виконання цих дій кожним учнем в підконтрольній (а отже, матеріальної) формі. Організувати таку роботу (адекватне оперування з навчальним матеріалом) можна лише за допомогою завдань, що спонукають до виконання підведення під поняття і виведення наслідків.

Завдання на відпрацювання цих дій можуть бути різних типів (типом завдання ми називаємо таке спонукальне речення зі змінною, яке стає текстом завдання при підстановці значення змінної). Зведемо типи завдань, необхідних для відпрацювання означень в таблицю (див. Табл.1), ставлячи знак «+», якщо з умови задачі можна зробити висновок, що висловлювання істинно, знак «-», коли можна встановити, що висловлення помилкове, і символ «?» - якщо в умові завдання висловлювання може бути як істинним, так і помилковим. Порожні клітини символізують питання завдання. Відзначимо, що до сих пір ми говорили про ситуацію, в яких можна було точно встановити справжнє значення того чи іншого висловлювання. Робота над конкретним означенням важлива також і для відпрацювання спільних логічних знань, умінь і навичок. Як показують спеціальні дослідження в галузі педагогічної психології і в області логіки, завдання з неповними даними необхідні для виховання свідомого ставлення до умов завдань взагалі.

Ось як виглядає таблиця типів завдань для відпрацювання означення, записаного у вигляді $(\vee\, x \in M)\ (A(x) \Leftrightarrow B(x))$

def

Таблиця 1

Тип завдань	x ∈ M	B(x)	A(x)
1	+	+	
2	+	–	
3	+	?	
4	–	+	
5	–	–	
6	–	?	
7	?	+	
8	?	–	
9	?	?	
10			+
11	+		–
12		+	–
13	?		–
14		?	–
15	–		–
16		–	–

Питання:

Як виглядають типи завдань 1-16 для наведеного означення ромба?

Варіюючи істинні значення висловлювань $x \in M$ і $B(x)$, ми отримуємо перші 9 типів завдань - завдань на підведення під поняття. Залежно від будови M і B вони можуть мати підвиди. Так, якщо B має диз'юнктивну структуру і складається з двох компонентів B_1 і B_2 ($B = B_1 \vee B_2$, то тип 1 розпадається на наступні 5 підтипів (див. Табл. 2).

Таблиця 2.

$x \in M$	$B_1(x)$	$B_2(x)$	$B(x)$	$A(x)$
+	+	+		
+	+	–		
+	+	?		
+	–	+		
+	?	+		

Питання:

Як виглядають 5 підтипів типа1 завдання для означення трапеції?

Завдання на виведення наслідків можуть бути трьох типів:

1) A (x) істинно. Що можна сказати про B (x) і $x \in M$?

2) A (x) помилково. Що можна сказати про B (x) і $x \in M$?

3) A (x) невідомо. Що можна сказати про B (x) і $x \in M$?

Перший з цих типів - це тип 10; тип 3 не приводить до змістовних завдань і тому в таблиці не врахований; а ось тип 2 породжує типи 11-16. Треба відзначити, що і самі типи 11-16 також можуть породжувати підтипи в залежності від тої чи іншої будови предикатів $x \in M$, B (x). Таким чином можна отримати досить велику кількість типів і підтипів завдань для відпрацювання означення.

Яким же чином здійснювати їх відбір в конкретних умовах? У якості відправної рекомендації можна запропонувати наступне:

а) при відпрацюванні перших означень курсу не аналізувати склад предикатів, що входять у означення, обмежившись типами задач, даними в таблиці 1. Забезпечити виконання кожним учнем 3-4 завдань типу 1 і хоча б одного завдання з інших 15 типів;

б) у міру відпрацювання перших 5-6 означень скорочувати число завдань, зводячи їх до 3-4 завдань типу 1, 1 завданню з типів 2-9, 1 завданню типу 10 і одному завданню з типів 11-16. При цьому треба почати аналізувати склад M і B, переходячи від типів 1-16 до їх підтипів.

Отже, ми вважаємо за потрібне, щоб кожен учень при відпрацюванні перших означень вирішив по кожному з них близько 20 завдань, а в подальшому вирішував би не менше 6-7 завдань по кожному означенню. Однак не слід думати, що саме по собі пред'явлення учням завдань на підведення під поняття і на виведення наслідків - достатня міра для організації адекватного оперування з означенням. Істотно не тільки те, які завдання виконує учень. але і як він їх виконує.

Організовуючи цю роботу, необхідно поставити учня в такі умови, щоб всі висновки (про належність чи неналежність даного об'єкта до поняття, яке вводиться, про об'єкт, який названий даним терміном, всієї сукупності видових відмінностей і т.д.) він робив би на підставі означення , з явним посиланням на його текст, зокрема, перевіряючи послідовно істинність висловлювань $x \in M$, B (x). Наприклад, поставлена задача на підведення під поняття паралелограма: "Які з креслень а-д на малюнку зображують паралелограми?" Потрібно домагатися від учнів не просто відповіді: «б, г», а відповідей такого виду: "На малюнку а - не паралелограм, так як одна з пар протилежних сторін - не паралельні відрізки, а за означенням паралелограма обидві пари протилежних сторін паралельні; на малюнку в - не паралелограм, так як це шестикутник, а за означенням паралелограма - це чотирикутник, на малюнку б - паралелограм, так як це чотирикутник, дві його сторони паралельні і дві інші теж паралельні" і так далі.

Характер виконання дій підведення під поняття і виведення наслідків істотно залежить від того, наскільки сформовані у учнів окремі операції, що входять в ці дії: як логічні, так і змістовні. Логічних операцій, на яких засновано переважна більшість означень, що входять в шкільний курс математики не так вже й багато: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, логічне слідування і рівносильність. Тому серед означень шкільного курсу багато схожих за своєю логічною структурі. Наприклад, означення бісектриси кута кон'юнктивне (видові відмінності, що входять до нього, з'єднуються логічним союзом «і»). Ту ж структуру має означення прямої пропорційності як функції, яку можна задати формулою у = кх, і при цьому $к \neq 0$. Навпаки, означення нестрогої нерівності містить логічний союз «або», тобто це означення диз'юнктивне.

При знайомстві з означенням, логічна структура якого ще недостатньо відома учням, потрібно забезпечити поетапне формування дій підведення під поняття і виведення наслідків. Справді, розумові дії, які необхідно сформувати в учнів, не можуть бути засвоєні ними відразу в розумової, внутрішньої формі. Як пише А.Н. Леонтьєв, «на відміну від зовнішньої дії внутрішня дія безпосередньо не може бути побудована ззовні. Будуючи зовнішню дію, її можна показати дитині, можна, нарешті, механічно втрутитися в її виконання ... Інша справа - дія внутрішня, дія « в розумі». ЇЇ не можна ні показати, ні побачити; в процес її виконання дитиною не можна безпосередньо втрутитися. Тому для того, щоб побудувати у дитини нову розумову дію, її потрібно дати попередньо дитині як дію зовнішню»[1, С. 383]. Це положення емпірично відкрито вже давно. Дослідження А.Н. Леонтьєва, П. Я. Гальперіна, Н.Ф. Тализіної та інших психологів і педагогів відкрили такий алгоритм поетапного формування розумових дій, який дозволяє керувати засвоєнням. Цей алгоритм зводиться до наступного.

1. Учням дається орієнтовна основа дій (тобто роз'яснення, які дії їм належить здійснити і з яких операцій повинні складатися ці дії), фіксується в будь-якій матеріальній формі, і відразу після цього організовується робота учнів в матеріалізованої, зовнішньою формою. Наприклад, для засвоєння дії підведення під поняття бісектриси кута учням пред'являються різні пари (кут; промінь) і по кожній з них ставиться питання: чи є промінь бісектрисою кута? Таке завдання слід ставити на всіх етапах формування даної дії, але на першому етапі постановка задачі відрізняється тим, що при вирішенні перед учнями повинні знаходиться фіксовані раніше орієнтири - текст означення у формі, зручній для аналізу, наприклад, у вигляді такої картки:

Бісектриса кута - це промінь,

1) виходить з вершини кута

і

2) який ділить кут навпіл

Виконання завдань на цьому етапі має бути дуже докладним, щоб будь-яку можливу змістовну або логічну помилку можна було виявити і виправити. Учень на цьому етапі повинен говорити так: "Перед нами промінь ВД. Він виходить з вершини кута АВС і ділить кут АВС навпіл. Значить, промінь BD - бісектриса кута ABC. Луч PK не виходить з вершини кута DEF. Отже, PK - не бісектриса кута DEF. А ось промінь MN виходить з вершини кута FMK, але він не ділить кут FMK навпіл. Значить, промінь MN - не бісектриса кута FMK." Можливий і скорочений варіант відповіді, але скорочення повинно стосуватися тільки форми відповіді, а не самих операцій учнів. Наприклад, можна відповідати так: "Для кута АВС і променя ВД перша умова виконується і друга умова виконується, значить, BD - бісектриса кута ABC".

Треба тільки вимагати, щоб при відповідях учень дивився на означення, читав його (а якщо може процитувати його напам'ять, то робив би це явно, а не "про себе"). У центрі уваги повинна бути не дана модель, а текст означення. Поки кожен учень не виконає самостійно кілька завдань в цій формі, переходити до наступної не можна.

2. Організовується робота в зовнішньої мовної формі. Перед учнями немає приписи, яка їх орієнтує (на кшталт плаката з означенням), вони нічого не вимірюють, але пояснення проводять так само докладно, як і при роботі в першій формі. Якщо хто-небудь з учнів не справляється з роботою, то це означає, що його потрібно повернути до першої форми (тобто дати скористатися означенням, вимагати проведення вимірювань і т.д.).

3. Організовується робота в внутрішньої мовної формі. Учні вимовляють все пояснення про себе, працюють мовчки. Однак кожне міркування завершується відповіддю, що матеріалізується. Наприклад, при роботі з тільки що розглянутим завданням учні заповнюють таблицю (див. Табл. 3).

Таблиця 3.

Луч	Кут	Умова 1	Умова 2	Чи є луч бісектрисою кута
BD	ABC	+	+	+
PK	DEF	–		–
MN	EMK	+	–	–

4. Організовується робота у внутрішній, згорнутої формі. На ті ж питання учні швидко відповідають "так" або "ні" і тільки в разі помилки пояснюють свої відповіді (що означає повернутися назад). Такий алгоритм був багаторазово випробуваний при індивідуальному навчанні [2]. Стосовно до класно-урочної навчання можна внести в нього наступні видозміни: а) злити в одну другу і третю форми; б) усне мовлення замінити письмовим.

Таким чином, розроблений наступний скорочений алгоритм з трьох етапів формування розумових дій, причому кожному етапу відповідає своя форма роботи учнів:

1. Матеріалізовані дії, супроводжувані письмовим мовою всіх учнів і усною мовою деяких з них

2. Розумові дії, фіксуються в розгорнутому писемного мовлення всіх учнів.

3. Згорнута виконання розумових дій.

Організувати ці три форми роботи в умовах класно-урочної системи навчання можна, наприклад, так.

Перший етап повинен проходити в самому початку знайомства з означенням - під час викладу матеріалу вчителем. Розповідаючи про ту ж бісектрисі кута, вчитель просить встановити, які з зображень пар (кут; промінь) підходять під означення бісектриси, заповнюючи таблицю (на кшталт таблиці 3). У той же час спочатку сам учитель, а потім деякі з учнів розповідають вголос, як при цьому потрібно міркувати. Далі робота триває із застосуванням так званих завдань з пропусками. Найкраще, якщо ці завдання поміщені в зошиті з друкованою основою, але можна їх пред'явити учням і на дошці, і на екрані проектора, і навіть усно. Ось два завдання з пропусками на підведення під поняття бісектриси кута.

1) Заповніть пропуски:

щоб встановити, чи служить промінь бісектрисою кута, необхідно перевірити, що він а) виходить з ... кута і б) ділить кут ... .

2) Встановіть, на якому з малюнків а-е (малюнки наводяться в зошиті) промінь МК є бісектрисою даного кута.

Рішення. Перша вимога: : "Промінь МК виходить з ... кута" - виконується на малюнках .... Друга вимога: "промінь МК ділить кут ..." - виконується на малюнках .... Значить, обом вимогам задовольняє промінь МК на малюнках ... .

Як бачимо, є письмове промовляння. Якщо додати, що при цьому перед очима учнів повинно знаходитися означення бісектриси, то характеристика цього етапу буде вичерпана.

Другий етап також може виконуватися шляхом заповнення таблиці (табл. 3). Різниця в тому, що на цей раз перед очима учнів немає означення і правильні відповіді не аргументуються ні письмово, ні усно. На цьому етапі також зручно використовувати зошити з друкованою основою.

Третій етап не потребує коментарів. Учні просто вирішують завдання, відразу розпізнаючи бісектриси кутів (тих, хто цього зробити не може, повертають на попередні етапи в процесі індивідуальної додаткової роботи). Така робота для школи традиційна, але, на жаль, не завжди розглядається як щось результуюче. Найчастіше учитель вимагає її виконання відразу після повідомлення означення.

Питання.

Опишіть етапи і форми відпрацювання дії підведення під поняття "менше або дорівнює".

Так йде справа з відпрацюванням одного, взятого означення. Питання в тому, як при викладанні даного поняття повторювати пройдений матеріал, завжди вважався актуальним в дидактиці. До сих пір однозначної відповіді на це питання ми не отримали. Учитель в більшості випадків веде повторення окремо від вивчення нового матеріалу. Уроки як би розсікаються на вивчення нового і повторення пройденого. На нашу думку, повторювати матеріал слід тільки в зв'язку з знову вивчаємим матеріалом, точніше в процесі вивчення нового матеріалу. (Мова не йде про підсумковому повторенні, про уроки систематизації знань учнів).

Психологи встановили, що ефект повторення істотно залежить від того, що саме робить людина при повторному виконанні дії. Як правило, "діючи повторно, людина діє часто-густо по-іншому, ніж діяла раніше. Вона не робить точно те ж саме, що робилося нею до цього. Частина дій випадає, замість них з'являються нові дії, деякі колишні дії якісно змінюються в порівнянні з тим, якими вони були в попередній раз. Змінюється спрямованість дій, зміст діяльності, характер її виконання " (А.А. Смирнов. Психология запоминания. Москва, 1948. С. 307). Тому вимагати буквального повторення тих самих дій, як це часто буває в викладанні, - протиприродно. Відомо, що повторення використовується як засіб для запам'ятовування матеріалу. Однак і запам'ятовування протікає успішніше не в результаті багаторазових повторень, а в процесі діяльності, яка протікає різноманітно. Звідси випливає, що повторення повинне включати в себе щось нове, не зводячись до простого відтворення того, що вже було. Повторення повинно бути включено в діяльність по вивченню нового матеріалу. Повторення забезпечується і в ході формування нових понять, в ході засвоєння нових означень. Як уже говорилося всяке означення задається на деякій множині М, яка характеризує обсяг поняття, родового по відношенню до того, що вводиться. Частина властивостей об'єктів, які відповідають означенню, обумовлена їх приналежністю до множини М; інші властивості обумовлені видовими відмінностями. Так, рівність протилежних сторін прямокутника "успадковується" їм від паралелограма, а рівність діагоналей обумовлена наявністю прямого кута. Це добре знають вчителі-практики, і при вивченні поняття прямокутника вони завжди повторюють поняття паралелограма, але роблять це зазвичай окремо від вивчення нового. Але ж при вивченні прямокутника абсолютно не потрібно давати завдання: "Встановіть, що даний чотирикутник - паралелограм". Абсолютно достатньо завдань на підведення поняття прямокутника, і паралелограм буде повторений. Таким чином, всі поняття, що виступають в якості родових в будь-яких означеннях шкільного курсу, будуть повторені при вивченні цих означень. Аналогічно буде повторений і весь той матеріал, який використовується для формування видових відмінностей в будь-яких означеннях. Але цим не вичерпуються можливості організації природного безперервного повторення.

Велику роль в повторенні при вивченні нового матеріалу відіграють і самі завдання. Щоб дізнатися, який матеріал доцільно використовувати для постановки завдань, слід встановити місце даного досліджуваного поняття в курсі математики в цілому: з'ясувати, з яким раніше вивченим матеріалом воно пов'язане і з яким майбутнім. Аналіз матеріалу, який підлягає засвоєнню, не може обмежитися одним лише виявленням типів завдань. Потрібно ще визначити самі завдання, їх текст, спосіб їх вирішення. Адже тип завдання - це пропозиція зі змінними. Скажімо, "вирішити лінійне рівняння" - це тип завдання. Підставивши сюди конкретне рівняння, отримаємо текст завдання, - наприклад "вирішити рівняння 5х 4 = 0". Але і текст завдання - це ще не завдання. Наприклад, з цього тексту не ясно, чи потрібно рівняння вирішувати усно або письмово, буде перевірятися лише відповідь або важливий хід рішення тощо. Так що процес створення завдань - процес багатоетапний. Ми розглянули перший його етап. Звернемося до другого - до складання текстових завдань.

Щоб дізнатися, який матеріал можливо і доцільно використовувати для постановки завдань, слід встановити місце даного досліджуваного поняття в курсі математики в цілому: з'ясувати з яким раніше вивченим матеріалом воно пов'язане і з яким майбутнім. Встановлення цих зв'язків дозволить визначити, які саме об'єкти потрібно пред'являти для підведення під нове поняття і для виведення наслідків. Пояснимо сказане на прикладі означення суми векторів. Це поняття стоїть у ряді таких понять: вектор - способи завдання - сума векторів - комунікативність суми векторів - ... Традиційно вчителі повторюють тільки поняття вектора. Але беручи до уваги місце поняття суми векторів в розглянутому ряду понять, можна повторити питання про способи завдання векторів (даючи таке завдання на відшукання суми векторів, в якому вектори - доданки, що задані тим чи іншим з повторюваних способів). Крім того, можна організувати пропедевтику комунікативності суми, даючи такі завдання на підведення під поняття: встановити, чи є вектор $\vec{a} + \vec{в}$ сумою векторів $\vec{в}$ і $\vec{a}$; перевірити рівність $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ і так далі. Більш того, облік перспективи і ретроперспективи досліджуваного поняття не просто можливий і не тільки бажаний, але і необхідний при складанні науково обґрунтованої системи завдань, при відборі матеріалу для організації дій учнів, адекватних означенню, що вивчається.

Питання.

1. При вивченні яких визначень природно організувати повторення понять функції; дробу; трапеції; границі функції; паралельності відрізків?

2. При вивченні яких визначень природно організувати пропедевтику тих же понять?

Таким чином, виконання кожним учнем дій підведення під поняття і виведення наслідків - необхідна умова засвоєння означень шкільного курсу математики. У той же час виконання завдань, що стимулюють ці дії, виявляється достатнім засобом для організації повторень і пропедевтики наступного матеріалу. Це означає, що правильна організація засвоєння означень вирішує різні і різноманітні завдання курсу математики. Суттєвим є і те, що всі «знахідки», які спостерігаються на уроках, присвячених вивченню конкретних означень, як правило, легко передбачити, виходячи з описаної методики побудови викладання. У методичній літературі, на жаль, не завжди враховується необхідність організації підведення під поняття і виведення наслідків під час вирішення задач. Але навіть в тих випадках, коли рекомендується організувати таку роботу, вона, як правило, спирається на сформований у свідомості учня еталон, а не на видові відмінності, зафіксовані у означенні. В результаті розв`язування задач виявляється відірваним від теоретичного матеріалу, який вивчається, і не сприяє його засвоєнню.

Розглянемо як приклад систему завдань, високо оцінену на одному з відкритих уроків і призначену для уроку на тему "Бісектриса кута". Учитель проводить бесіду з учнями з питань:

1. Повторимо, що таке промінь.

2. Які властивості променя?

3. Накресліть кут і проведіть в ньому три променя. Покажіть на дошці, як ви провели промені (три учні, викликані до дошки, показують, як вони провели промені).

4. Чи буде серед них хоча б один промінь, який ділить кут навпіл? (Одні відповідають "так", інші - "ні".)

5. Як в цьому переконатися? (Перегнути, але в зошитах це робити незручно. У вас у кожного є моделі кутів. Візьміть спочатку модель прямого кута. Перегніть модель так, щоб кути розділилися навпіл.)

6. Що це за промінь? (Він виходить з вершини кута і ділить кут навпіл.)

- Ось такий промінь, діти, - звертається вчитель до класу, - називається бісектрисою кута.

7. Візьміть ще модель тупого кута і перегніть її так, щоб кут розділився навпіл.

8.Откуда виходить такий промінь?

9. Що він робить з кутом?

10. Як ми назвали такий промінь?

Пояснюється тема уроку, яка була записана на додатковій дошці, звертається увага на написання цього слова (учні записують в зошити).

11. Намалюйте кут і розділіть його на око навпіл.

12. А як перевірити? (Перегнути) Надалі ми дізнаємося ще один спосіб. (Вивішується плакат).

13. Покажіть на цій таблиці, в якому кутку проведена бісектриса? (Рис. 3)

14. Чому?

15. Чому ви думаєте, що на малюнку 3 не буде бісектриси кута?

16. А на рис.4?

17. А на малюнку 5?

Клас переглядає два кадри зі слайдів "Кути та їх види". Далі вирішуються усні завдання, використовуючи моделі розгорнутого кута. Учні самі роблять висновок: "Бісектриса розгорнутого кута ділить його на два кути, кожен з яких прямий". Учні читають параграф підручника, запам'ятовують, що називається бісектрисою кута ".

Можна було б докладно зупинитися на некоректності деяких завдань. Наприклад, учням важко відповісти на питання 8, так як при перегинанні моделі ніякого променя не виходить; виходить відрізок. Але в даному випадку нас цікавить не це. Істотно, що в ході роботи формується певний шаблонний образ: промінь (відрізок), який виходить при перегинанні паперової моделі. Особливістю цього способу є те, що в ньому не фіксується положення початку променя по вершини кута. Свідомість учнів концентрується тільки на одній ознаці: поділ кута навпіл.

Після того, як термін "бісектриса" введений, йде формування того ж шаблону. Дійсно, на що пропонується звертати увагу при перевірці правильності виконання завдання 12? Тільки на рівність кутів (адже тільки це можна встановити перегинанням). Те ж можна віднести і до всіх інших заданій, крім 13-15. За допомогою завдань 13-15 можна було б організувати підведення під поняття "бісектриса", спираючись на обидві видові відмінності, зафіксовані у означенні. Однак, наскільки можна судити по наведеному опису, і ці завдання розраховані на привернення уваги учнів не до означення, а все до того ж шаблону. Що ж стосується завдань на виведення наслідків, то такі відсутні зовсім: ні в одному завданні не дано, що об'єкт є бісектрисою кута (не бісектриса), ні в одному не потрібно накреслити бісектрису. А адже наведеними завданнями відпрацювання поняття бісектриси вичерпується, клас переходить до самостійної роботи.

Наводячи і оцінюючи цей урок, присутні на ньому відзначають і активність учнів і застосування технічних засобів навчання, і виконання практичної роботи (перегинання моделей). Але, на жаль, в даному випадку активність спрямована не на адекватне оперування з досліджуваним поняттям. Так що в повній мірі мета уроку - формування поняття бісектриси кута - досягнута бути не могла.

Сформульовані в цьому параграфі вимоги до організації засвоєння означень в ході поетапного формування адекватних їм розумових дій (підведення під поняття і виведення наслідків) дозволяють розробляти сукупності завдань, що забезпечують досягнення поставлених цілей на кожному етапі засвоєння. Наведемо тексти і зразки відповідей, які можна використовувати на першому етапі засвоєння визначення бісектриси кута (при поясненні нового матеріалу).

Завдання на підведення під поняття.

1. На яких кресленнях промінь m служить бісектрисою кута А?

Зразок відповіді. На кресленні а) промінь m виходить з вершини кута А, але не ділить кут навпіл (визначено за допомогою транспортира); значить, він не задовольняє означенню бісектриси. На кресленні б) промінь m виходить з вершини кута А і ділить кут навпіл; значить, він задовольняє означенню. На кресленні в) промінь m не виходить з вершини кута А; значить, він не задовольняє означенню.

2. Учень накреслив кут і промінь, який ділить цей кут навпіл. Можна сказати, що він накреслив бісектрису кута?

Зразок відповіді. Так як невідомо, виходить промінь з вершини кута, то невідомо, чи задовольняє він означенням бісектриси.

3. Чи може промінь АВ бути бісектрисою кута АОВ?

Зразок відповіді. Ні, так як промінь АВ не виходить з точки О (вершини кута АОВ), а значить, не задовольняє означенню бісектриси.

Завдання на виведення наслідків.

1. Луч а служить бісектрисою кута В. Що це означає?

Зразок відповіді. Це означає за означенням, що промінь а виходить з вершини кута В і ділить його навпіл.

2. Луч k не є бісектрисою кута А. Що це означає?

Зразок відповіді. Це означає за означенням, що або k починається не в точці А, або починається в точці А, але не ділить кут А навпіл, або починається не в точці А і не ділить кут навпіл.

3. Бісектриса кута М проходить через точку В. Як можна позначити цю бісектрису?

Зразок відповіді. Бісектриса кута - це за означенням промінь. По тому ж означенню початок цього променя - вершина кута, тобто точка М. Так як промінь цей проходить через точку В, то його можна позначити МВ.

Питання.

Для будь-якого з означень: паралелограм, ромб, неправильний дріб, паралельні прямі, логарифм числа а по основі в, гомотетія з центром О і $к \neq 0$ складіть завдання на підведення під поняття і на виведення наслідків.

1.2. РОБОТА З ФОРМУЛЮВАННЯМ ТЕОРЕМ

Перейдемо до розгляду тих дій, які адекватні формулюванню теореми. Як і для означення, будемо шукати ці дії, використовуючи загальну форму запису формулювань теорем

$$(\forall\ x \in M)\ (A(x) \Leftrightarrow B(x)) \quad (2)$$

Тут M - множина, на якій задана теорема; перша частина формулювання $\forall x \in M$ - ; предикат A(x) - умова теореми; предикат B(x) - висновок теореми.

Така термінологія, на перший погляд, суперечить загальноприйнятій. Наприклад, умовою теореми прийнято вважати все те, чим користуються при її доведенні, зокрема приналежність розглянутих в теоремі об'єктів x до множини M. Проте протиріччя тут чисто зовнішнє: заданість предикатів A(x) і B(x) на множині M якраз і означає, що кожен з розглянутих в теоремі об'єктів x, по-перше, в силу приналежності до множини M має всі властивості об'єктів з множини M, по-друге, має ті властивості, які позначені предикатом A(x). Наприклад, в теоремі "Якщо в трикутнику ABC AB = BC, то кут C дорівнює куту A" слова "в трикутнику ABC" відносяться і до умови, і до висновку, тобто не належать спеціально до жодного з них, а відносяться до всієї теоремі в цілому. Це і є роз'яснювальна частина даної теореми

$(\forall \Delta ABC)\ ((AB = BC) \Rightarrow (\angle C = \angle A))$.

Виділення в кожній теоремі не тільки умови і висновку, але і роз'яснювальної частини дозволяє надати чіткий сенс таким важливим поняттям, як зворотна теорема і метод доведення від супротивного. Так, теорема, зворотна до тільки що розглянутої виглядає наступним чином:

$(\forall \Delta ABC)\ ((\angle C = \angle A) \Rightarrow (AB = BC))$.

На цьому прикладі видно алгоритм утворювання зворотної теореми: умова і висновок прямої теореми міняються місцями, а роз'яснювальна частина залишається незмінною. Зауважимо, що якщо роз'яснювальну частина вважати, як це зазвичай роблять, частиною умови і утворювати зворотну теорему, міняючи місцями умову і висновок, то вийде нісенітниця.

Питання

1. Сформулюйте слова з наступних теорем; Вкажіть уточнюючу частину, умову та висновок:

а) $(\forall A, B, M)\ ((M \in AB) \Rightarrow (AM + BM = AB))$;

б) $(\forall A, B, M)\ ((AM + BM = AB) \Rightarrow (M \in AB))$;

в) ($\forall$ A, B, C, $\forall$ прямій l, де $A \in l$, $B \in l$, $C \notin l$, $A \neq B$) (($BC \perp l$) $\Rightarrow$ ($BC \prec AC$));

г) ($\forall\angle A$, $\angle B$) (($\angle A$, $\angle B$ - вертикальні) $\Rightarrow$ ($\angle A = \angle B$));

д) ($\forall\angle A$, $\angle B$) (($\angle A$, $\angle B$ - суміжні) $\Rightarrow$ ($\angle A + \angle B = 180°$));

е) ($\forall\Delta ABC$) ($AB = BC$) $\Rightarrow$ (пряма, якій належить бісектриса $\angle B$, є віссю симетрії ΔABC);

ж) ($\forall\Delta ABC$) (($AB = AC$) $\Rightarrow$ (вісь симетрії точок B і C є віссю симетрії ΔABC);

з) ($\forall\Delta ABC$) (($AB \cong BC \cong AC$) $\Rightarrow$ ($\angle A = \angle B = \angle C$));

и) ($\forall\Delta ABC$) (($\angle A = \angle B + \angle C$) $\Rightarrow$ ($\angle A = 90°$));

к) ($\forall\Delta ABC$) (($AB = BC$) $\Rightarrow$ ($\angle BAC \prec 90°$)).

2. Запишіть кожну з наступних теорем за формою (2):

а) Діагоналі паралелограму діляться точкою їх перетину навпіл.

б) Протилежні сторони паралелограму рівні.

в) Чотирикутник, протилежні сторони якого попарно рівні, є паралелограмом.

г) Середня лінія паралелограму паралельна основі.

д) Довжина середньої лінії трикутника дорівнює половині основи.

е) Площа паралелограму дорівнює добутку його основи на висоту.

ж) Для будь-яких двох рівних відрізків існує єдиний рух, який зберігає орієнтування і переводить один відрізок у другий.

з) У прямокутному трикутнику квадрат довжини гіпотенузи дорівнює сумі квадратів довжин його катетів.

и) Якщо квадрат довжини однієї сторони трикутника дорівнює сумі квадратів довжин двох інших сторін, то цей трикутник прямокутний.

к) Протилежні сторони прямокутника рівні.

3. З теорем, які перераховані в завданні 2, виберіть ті, для яких є вірними обернені теореми. Запишіть ці обернені теореми в формі (2).

Щоб визначити дії, адекватні формулюванні теореми, уточнимо мету, з якою це формулювання вивчається. Ясно, що мета ця вельми широка: адже формулювання теореми вводить деяку властивість поняття, розвиває понятійний апарат, пов'язує між собою раніше пройдені означення та теореми, є зразком дедуктивного кроку в побудові точної науки і т.д. Нас тут цікавить (як і при розгляді питання про означення), які дії повинен вміти робити учень з формулюванням теореми після її засвоєння, при вирішенні задач. Це - єдина дія: виявивши, що в деякій ситуації виконується умова теореми, учень повинен зробити висновок: "Значить, виконується і висновок теореми". Справді, записавши теорему в формі (2), відразу бачимо, що її змісту (формулюванню) адекватна дія, що складається у виконанні наступного умовиводу:

$$((\forall x \in M) \text{ і } (A(x)) \Rightarrow B(x)).$$

Ця дія цілком тотожна дії підведення під поняття при відпрацюванні означення. І це не випадково: одне й теж саме твердження може в одному курсі виступати як теорема, а в іншому - як означення; учнів навіть не завжди точно інформують про характер досліджуваного твердження. Наприклад, тільки в вузі вони зможуть дізнатися, що 3 + 1 = 4 - це означення числа 4, а 2 + 2 = 4 - це теорема. Як і в разі роботи з означеннями, дія підведення під поняття при відпрацюванні теореми складається з операцій розпізнання та виведення наслідків: розпізнається істинність висловлювань $x \in M$ і $A(x)$, робиться висновок про істинність $B(x)$.

Тому, для відпрацювання формулювання теореми необхідні ті ж типи завдань, що і для відпрацювання підведення під поняття, яке означується, тобто потрібні завдання типів 1-9 з таблиці 1 (зрозуміло, з перестановкою найменувань А і В). Певна різниця полягає в тому остаточному виведенні, яке робиться в разі хибності кон'юнкції, заданої умовою. Якщо не виконується вимога означення, то учень повинен зробити висновок, що об'єкт не входить в обсяг поняття, що означується. Якщо ж не виконується умова теореми, учень повинен лише зробити висновок, що даний об'єкт не підпадає під дію досліджуваної теореми (тобто невідомо, чи виконується висновок теореми). Ця різниця - не предмет відпрацювання для будь-якої окремо взятої теореми, а предмет загального розмови про те, що таке означення і що таке теорема. Отже, отримуємо такі 9 типів завдань, необхідних для відпрацювання формулювання теореми (див. Таблицю 4). Порожні місця в таблиці символізують питання завдань.

Таблиця 4.

Тип	x ∈ M	A(x)	B(x)
1	+	+	
2	+	-	
3	+	?	
4	-	+	
5	-	-	
6	-	?	
7	?	+	
8	?	-	
9	?	?	

Сказане про умови і способи пред'явлення цих завдань при роботі з означеннями і про кількість необхідних завдань кожного типу вірно і для відпрацювання формулювання теореми. Точно так же тут може бути застосовано і все сказане про етапи формування розумових дій (див. § 1).

Питання.

Придумайте по одному завданню кожного типу на відпрацювання формулювання кожної з теорем:

а) графіком лінійної функції у = кх +b є пряма лінія, що проходить через точки (0; b) і (1; к + b);

б) функції, які мають одну і ту ж похідну, відрізняються на константу;

в) функція у = cos x має період 2π.

Як і в разі організації засвоєння означень, матеріал, на якому здійснюється адекватне оперування, повинен підбиратися з урахуванням необхідності включення даної теореми в систему знань: повторення пов'язаних з нею раніше вивчених означень і теорем, а також пропедевтики майбутнього матеріалу. Роль теореми в розвитку наскрізних теоретичних ліній курсу не рівнозначна ролі означення: якщо означення вводить нове поняття, то теорема розвиває наше знання про поняття, вводячи нові його властивості. З'являється бажання організувати повне повторення всіх раніше вивчених властивостей даного поняття, наприклад, при вивченні кожної нової властивості або ознаки паралелограма повторити всі раніше вивчені його властивості і ознаки, починаючи з означення; при вивченні періодичності синуса - всі раніше вивчені властивості синуса і т.д. Виконання цього може привести до вельми серйозних наслідків - "розбухання" роботи над теоремою. Рекомендується повторювати тільки ті питання, які дійсно потрібні при відпрацюванні формулювання теореми. Частину інших питань доцільно повторити як необхідну для доведення теореми, а весь круг цих питань - при запланованому підсумковому повторенні всієї теми. Які ж питання необхідно повторити для відпрацювання формулювання теореми? При виконанні операції розпізнавання з неминучістю повторюються всі достатні ознаки приналежності об'єкта до безлічі abc і до обсягу поняття А; як відомі за означеннями, так і введені раніше вивченими теоремами. Наприклад, розглянемо теорему: "Якщо в паралелограмі діагоналі перпендикулярні, то цей паралелограм - ромб". Запишемо цю теорему в формі (2):

$$(\forall \text{паралелограма } ABCD)\big((AC \perp BD) \Rightarrow (ABCD - \text{ромб})\big).$$

Підбираючи матеріал для виконання підведення під поняття, необхідно використовувати раніше вивчені ознаки того, що даний чотирикутник є паралелограм (паралельність протилежних сторін, наявність центру симетрії і т. д.), дані прямі перпендикулярні (утворюють рівні суміжні кути, перетинаються під прямим кутом і т . д.). Для здійснення цього потрібні, наприклад, такі завдання: "Чи є даний чотирикутник по даній теоремі ромбом, якщо: а) це паралелограм, діагоналі якого утворюють нерівні суміжні кути; б) це центрально симетричний чотирикутник, діагоналі якого перетинаються під прямим кутом". Отже, відпрацювання формулювань теорем відбувається в процесі вирішення завдань тих же типів, що і відпрацювання підведення під поняття при вивченні означень. Зміст цих завдань визначається місцем даної теореми в курсі математики - її взаємозв'язками з раніше вивченим і майбутнім матеріалом.

Питання.

На якому матеріалі доцільно будувати завдання для відпрацювання формулювань теорем, наведених на сторінці 25.

1.3. РОБОТА З ДОВЕДЕННЯМ ТЕОРЕМ

Перейдемо до розгляду тих дій, які відповідають (адекватні) доведенню теорем. У багатьох випадках доведення теореми "Якщо А, то В" - це ланцюжок умовиводів виду "Якщо А, то A_1; якщо A_1, то A_2; ...; якщо $A_{п-1}$, то $A_к$; якщо $A_к$, то В. Отже, якщо A_1, то В ". Такий синтетичний шлях доведення теорем використовується в шкільному курсі математики досить широко. Учень, який доводить теорему цим способом, виробляє виведення наслідків: A_1 з А, A_2 з A_1 і т.д. Крім того учень повинен розуміти, що ставлення "слідувати" транзитивно: без цього він не зробить остаточного виведення ні в одному доведенні, що містить більше одного кроку. Типовим прикладом такого доведення служить висновок формули для $(a + b)^2$.

Питання.

Розгляньте доведення формули $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Де в ньому А, В, A_1, ..., $A_к$?

Обидві зазначених дії: безпосереднє виведення слідства і опосередковане виведення слідства - відпрацьовуються вже при введенні понять і розгляді формулювань теорем, так що нічого нового поки ми не виявили. Справді, при підведенні під поняття "паралелограм" чотирикутника ABCD, у якого всі кути прямі, учень виконує справжнісіньке доведення:

У чотирикутника ABCD всі кути прямі

↓ ↓

$\angle A$ *- прямий,* $\angle B$ *- прямий* $\angle B$ *- прямий,* $\angle C$ *- прямий*

↓ ↓

$AD \perp AB, BC \perp AB$ $AB \perp BC, CD \perp BC$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$AD \parallel BC \qquad\qquad AB \parallel CD$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

ABCD - паралелограм

$$\downarrow$$

або: *У чотирикутника ABCD усі кути прямі* A

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$\angle A$ - *прямий*, $\angle B$ - *прямий* і $\angle B$ - *прямий*, $\angle C$ - *прямий* A_1

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$AD \perp AB, BC \perp AB$ і $AB \perp BC, CD \perp BC$ A_2

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$AD \parallel BC$ і $AB \parallel CD$ A_3

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

ABCD - паралелограм B

Однак навіть при доведенні теорем синтетичним методом все настільки просто лише до тих пір, поки ми не намагаємося вчити доведенням, а лише вчимо повторювати наявні доведення. Такий шлях - не найкращий. Крім завдання навчання наявним в підручниках доведенням, потрібно вирішувати і іншу задачу: вчити відшукувати доведення. Показавши декілька доведень (і пояснивши тим самим, який сенс вкладається в поняття доведення), учитель переходить до більш складної роботи: він вимагає від учнів, щоб вони самі знайшли доведення цієї теореми; воно схоже на доведення попередньої. Учень повинен розглядати умову А даної теореми, зробити з неї висновок A_1, і так далі. Але якщо з А можна зробити не один висновок, а декілька? Тоді виявляється необхідною ще одна дія: вибір з отриманих різних наслідків одного (або кількох), достатнього для доведення даної теореми. Уміння зробити такий вибір, звичайно теж потрібно виховувати. Але навчити завжди безпомилково робити такий вибір - не можна.

Отже, при синтетичному методі доведення теорем потрібні дві дії: виведення наслідків і вибір наслідків, достатніх для доведення.

Не менш важливим, ніж синтетичний, є аналітичний метод доведення, схема якого така: "Для В досить $A_к$; для $A_к$ досить $A_{к-1}$; ...; для A_2 досить A_1; для A_1 досить А. Отже, для В досить А" . Більш того, можна стверджувати, що синтетичне доведення - це завжди лише оформлення знайденого, осмисленого доведення, і елементи аналізу присутні в будь-якому доведенні. Навіть в настільки "лобовому" русі вперед, яке має місце при доведенні формули для $(a + b)^2$, елементи аналізу наявні: ми знаємо, що потрібно отримати многочлен, і саме тому розкриваємо дужки.

Питання.

Наведіть приклад чисто аналітичного доведення.

Проводячи чисто аналітичне доведення, ми здійснюємо підведення під поняття (наприклад, "х підходить під поняття В, так як він підходить під поняття $A_к$" нічим не відрізняється від звичайного підведення під поняття, про яке говорилося в п.1 та п.2). Але і тут справа ускладнюється тим, що невідомо, яке $A_к$ можна довести, спираючись на умову А. Тим часом для В досить багато різних достатніх умов. Очевидно, що і в цьому випадку потрібно вміти здійснювати вибір - вибір достатньої умови, яка необхідно випливає з умови даної теореми. Однак не можна навчити завжди безпомилково робити і такий вибір. Таким чином, аналітичний спосіб доведення полягає в розгортанні достатніх умов і в виборі з низ умови, яка необхідно випливає з умови теореми. При цьому перша дія спирається на дію підведення під поняття.

Питання.

Проведіть аналітичне доведення теореми: "Чотирикутник з попарно рівними протилежними сторонами є паралелограм" і покажіть, де в цьому доведенні здійснюється кожна із перелічених дій.

Більшість теорем шкільного курсу математики доводиться тим чи іншим поєднанням синтетичного і аналітичного міркування (аналітико-синтетичний метод доведення). Тому для доведення більшості теорем шкільного курсу, незалежно від змісту умови і висновку, треба виконувати дії підведення під поняття, виведення необхідних наслідків, розгортання достатніх умов, а також дію вибору наслідків, які необхідно випливають з умови і в той же час достатніх для висновку теореми.

Питання.

Проведіть аналітико-синтетичне доведення теореми: "У паралелограма діагоналі в точці перетину діляться навпіл", оформляючи його за схемою, що аналогічна наведеній на сторінці 30, і покажіть, де в цьому доведенні здійснюється кожна із перелічених дій.

Якщо не торкатися особливих методів доведення (метод доведення від протилежного, метод математичної індукції), то можна сказати, що навчання учнів доведенню зводиться до навчання перерахованим діям. Як можна здійснити це навчання?

Підведення під поняття; виведення наслідків; розгортання достатніх сукупностей.

Кожне доведення, яке проводиться аналітико-синтетичним методом набуває форму $A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow ... \rightarrow A_к \rightarrow B$. Наприклад, працюючи з A_2, ми отримуємо його як наслідок з A_1 і як достатню умову для A_3. Для того, щоб отримати A_2 як наслідок з A_1, ми повинні взагалі вміти отримувати необхідні слідства з A_1. Але поняття A_1 в шкільному курсі вивчається раніше, ніж відбувається доведення нашої теореми (при введенні означень і формулюванні теорем, що передують даному доведенню), або є деяким поєднанням раніше вивчених понять. Тому для отримання A_2 потрібно вміти виводити всі вивчені слідства з A_1 і мати досвід отримання поєднань цих наслідків. Те саме можна сказати і про A_2 як достатню умову для A_3: всі достатні умови для A_3 раніше вивчені, потрібно лише володіти вмінням їх отримувати і мати досвід поєднувати їх один з одним. Зокрема, при з'ясуванні, що A_2 достатньо для A_3, необхідно вміти підводити під поняття A_3. Як бачимо, ці три дії повинні були бути відпрацьовані при введенні означень і теорем, що передують даному доведенню (в тому числі, формулювання теореми, що доводиться); при роботі над даним доведенням використовуються лише ті навички підведення під поняття, які вже сформовані у учнів.

Питання.

Уточніть, при роботі з якими означеннями і формулюваннями теорем повинні бути відпрацьовані дії підведення під поняття, виділення наслідків і розгортання достатніх умов, що зустрічаються при аналітико-синтетичному доведенні теореми "Діагоналі паралелограма в точці перетину діляться навпіл".

До моменту доведення теореми всі необхідні для цього дії повинні бути відпрацьовані, а весь необхідний фактичний матеріал учні повинні або твердо пам'ятати, або мати перед очима. Нагадати учням матеріал, який вони могли забути, можна під час роботи над формулюванням теореми, яка передує доведенню, або спеціально. Хорошим способом для таких нагадувань і актуалізації необхідного матеріалу є включення його в математичний диктант. Наприклад, при доведенні теореми про логарифм добутку учні повинні пам'ятати основну властивість ступеня (при відпрацюванні формулювання цієї теореми основна властивість ступеня може і не знадобитися). Включивши один, два питання про основну властивість ступеня в математичний диктант (скажімо, завдання представити у вигляді ступеня твір 2^6 і 2^{12}), нагадаємо учням цю властивість, а після диктанту відразу ж з'ясуємо, як потрібно виконати це завдання. Так що учні, які не пам'ятали основну властивість ступеня, згадають його тепер, до початку доведення теореми про логарифм добутку.

Деякі методисти пропонують вивішувати таблиці з переліком всіх належних умов рівності двох відрізків, паралельності двох прямих і так далі, а також з переліками властивостей паралельних прямих, рівних трикутників тощо. При цьому вони вважають, що це звернення учнів до таких списків буде допомагати при доведенні теорем і сприятиме запам'ятовуванню цих таблиць. Проте всім вчителям добре відомо, що наявність в кабінеті таблиць з формулами тригонометрії або з латинського алфавіту навіть при частому зверненні до них мало сприяє запам'ятовуванню їх змісту, якщо тільки не організована спеціальна робота з формулами або літерами. Незнання учнями формул тригонометрії істотно ускладнює вирішення завдань, хоча учень і може в будь-який момент звернутися до довідкової таблиці. З іншого боку, обсяг таблиць з властивостями і ознаками понять геометрії буде настільки великий, що навряд чи їм вистачить місця на стінах кабінету. Значить потрібно побудувати навчання так, щоб такі списки стали об'єктом цілеспрямованої діяльності учнів. Таке відбувається, наприклад, в тому випадку, якщо після доведення чергової теореми учням пропонується перерахувати всі відомі, включаючи і тільки що вивчену теорему, властивості поняття, що входить в умову теореми, а також всі ознаки поняття, що міститься у висновку цієї теореми. Ця робота сприятиме не толь засвоєнню формулювання досліджуваної теореми, а й формуванню понять в повному обсязі їх властивостей і ознак, а також підготує учнів до доведення нових теорем.

Три розглянутих дії необхідно виконувати при всякому доведенні. Підведення під поняття обов'язково при здійсненні будь-якого переходу від одного поняття до іншого в процесі доведення, розгортання достатніх умов - при всякому аналітичному кроці, без якого не обходиться осмислення жодного доведення, виведення наслідків - при побудові синтетичного міркування, що вимагається при остаточному оформленні будь-якого доведенні. При доведенні, що складається з одного або двох кроків, або при більш складному за своєю структурою, але очевидному для учнів доведенні (скажімо, при доведенні основної властивості ступенів з натуральними показниками) цих трьох дій буде достатньо.

Питання.

Покажіть, що для доведення теореми "$(a^x)^y = a^{xy}$" для натуральних x і y досить трьох перерахованих дій.

Однак, якщо доведення відразу не виходить, то необхідні і дві інших дії: вибір достатніх для доведення умов з числа необхідних наслідків і вибір необхідних умов з числа достатніх сукупностей. Навчити вибирати такі слідства не можна, але вчити цьому мистецтву можна. Як і будь-яке навчання, воно включає в себе показ достатнього числа прикладів. Це означає, що вчитель повинен ретельно пояснювати наведені ним доведення, по можливості аргументуючи, чому він в тому чи іншому випадку робить той чи інший вибір. Важливо при цьому показати добре підібрані приклади, в тому числі дуже прості. Але вчитель має справу з тими саме доведеннями, які дані в підручнику. Як знайти місце для спеціально підібраних? Таке місце є - це відпрацювання означень і формулювань теорем. Зупинимося на цьому трохи докладніше. Як було відзначено, процес доведення теореми являє собою багатокрокову дію підведення під поняття. Отже, при вивченні означень і формулювань теорем потрібні такі завдання на підведення під поняття, щоб для їх вирішення потрібно було виконувати кілька кроків. Наприклад, при вивченні означення паралелограма можна запропонувати встановити, чи є паралелограмом чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші перпендикулярні до однієї з паралельних сторін. Безпосередньо використовувати означення тут не вдається. Треба довести спочатку паралельність другої пари сторін, тобто в даному випадку підведення під поняття виконується в два етапи: спочатку доводиться паралельність другої пари сторін чотирикутника і тільки після цього робиться висновок про належність даного чотирикутника обсягу поняття "паралелограм". Завдання такого роду сприяють як відпрацюванню даного означення, так і підготовці до поняття суті процесу доведення. Їх цінність особливо висока на початку систематичного вивчення доведень.

Описана робота готує учнів до розуміння суті процесу доведення, виробляє у них ряд необхідних умінь. Разом з тим ясно, що без демонстрації конкретних доведень, без залучення учнів до "відкриття" доведень досліджуваних теорем сам процес доведення, різноманіття застосовуваних способів останутся поза увагою учнів. Тому дуже істотну роль грає організація знайомства учнів з доведеннями шкільного курсу математики.

Оскільки однією з цілей навчання є вироблення вміння вирішувати задачі (в тому числі, задачі на доведення), то вивчення доведень теорем шкільного курсу треба переважно організовувати як "відкриті" доведення силами учнів. При цьому вибір учителем шляху побудови доведення (аналітичний, синтетичний, аналітико-синтетичний) залежить від конкретного доведення, даного в підручнику, і можливостей класу. Але в будь-якому випадку запис доведення повинен бути таким, щоб учневі було легко простежити зв'язок між окремими етапами доведення, добудовувати доведення в будь-якому з напрямів і, нарешті, простежити все доведення від початку до кінця.

Рекомндована література

1. Болтянский В.Г. Использование логической символики при работе с определениями. *Математика в школе.* 1973, №5. С. 45–50.
2. Груденов Я.И. Изучение определений, аксиом, теорем: Пособие для учителей. – Москва: Просвещение, 1981. 342 с.
3. Гальперин П.Я. Основные результаты исследований по проблеме "Формирование умственных действий и понятий". М.: МГУ, 1965. 26 с.
4. Ильясов И.И. Структура процесса учения. М., 1986. 200 с.
5. Методика навчання математики. Загальна методика: Практикум для організації самостійної роботи студентів: У 4-х ч. Черкаси : ЧДУ ім. Б. Хмельницького, 2004. 254 с.
6. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-9 класи. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas
7. Сайт шкільних підручників з математики. https://portfel.info.
8. Слєпкань З. І. Методика навчання математики. Київ : Зодіак-ЕКО, 2006. 512 с.

9. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний. М.: МГУ, 1975. 344 с.