Державний заклад
"Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського"

Кафедра математики і методики її навчання

Тамара КОРОСТІЯНЕЦЬ

Методика навчання розв`язанню текстових задач

Методичні рекомендації

для організації самостійної роботи та дистанційного навчання за курсом
"Методика навчання шкільного курсу математики"
здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Одеса - 2023

Рекомендовано до друку рішенням ученої ради Державного закладу "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського" (протокол №11 від 27 квітня 2023 року).

Коростіянець Т.П. Методика навчання розв`язанню текстових задач. Методичні рекомендації для організації самостійної роботи та дистанційного навчання за курсом "Методика навчання шкільного курсу математики" здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем спеціальності 014 Середня освіта (Математика). Одеса, Університет Ушинського, 2023. 33 с.

Рецензенти: Волкова М. Г., кандидат фізико-математичних наук, доцент, в.о. завідуючого кафедри вищої математики Державного університету інтелектуальних технологій і зв`язку.
Галіцан О.А. кандидат педагогічних наук, доцент кафедри педагогіки Державного закладу "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського".

ПЕРЕДМОВА

Методика навчання розв`язанню текстових задач - методичні рекомендації для організації самостійної роботи та дистанційного навчання за курсом "Методика навчання шкільного курсу математики" здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем спеціальності 014Середня освіта (Математика).

Методичні рекомендації містять методику розв'язування текстових задач складанням рівнянь в основній школі. В ній, крім загальних питань, висвітлено методику розв'язування найважливіших типів задач з курсу алгебри арифметичним, алгебраїчним і геометричним методами. Щоб забезпечити наступність у викладанні математики, аналізуються також способи розв'язання задач, характерні для V – VI класів.

ЗМІСТ

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ РОЗВ`ЯЗАННЮ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ

1. Актуальність дослідження. Цілі навчання розв'язанню текстових задач.

На сучасному етапі розвитку суспільства неможливо уявити процес наукового пізнання без застосування математичного апарату. Математична освіта є важливою складовою загальноосвітньої підготовки учнів. Місце математики в системі шкільної освіти визначається її роллю в інтелектуальному, соціальному і моральному розвитку особистості, розумінні будови і використанні сучасної техніки, розвитку економіки, інформаційно-комунікаційних технологій, сприймання наукової картини світу і сучасного світогляду. Математика є опорним предметом при вивченні суміжних дисциплін, тому без належної математичної підготовки неможлива повноцінна освіта сучасної людини. Сьогодні, вирішальне значення для системи шкільної освіти має математична грамотність, яка впливає на формування особистості школяра. Математична освіта розвиває критичне та логічне мислення зокрема, просторове уявлення, увагу, пам’ять, формує загальнокультурні та життєві компетентності учня. У концепції реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти "Нова українська школа" на період до 2029 року зазначено, що "…випускник Нової української школи – іноватор, здатний змінювати навколишній світ, розвивати економіку за принципами сталого розвитку, конкурувати на ринку праці, навчатися впродовж життя. За експертними оцінками, найбільш успішними на ринку праці в найближчій перспективі будуть фахівці, які вміють навчатися впродовж життя, критично мислити, ставити цілі та досягати їх, працювати в команді, спілкуватися в багатокультурному середовищі та володіють іншими уміннями" [19]. Саме тому, одним з головних завдань математичної освіти є забезпечення математичної грамотності учнів, тобто забезпечення готовності і здатності школярів вирішувати життєві завдання за допомогою математики. Нормативні документи Міністерства освіти і науки України визначають мету освітньої галузі "Математика", вбачаючи її у формуванні в здобувачів освіти математичної компетентності на рівні, який стане достатнім для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі; оволодіння знаннями, пов`язаними з іншими освітніми галузями у процесі навчання в закладі освіти, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку їх культури мислення та мовлення, інтуїції, пам`яті, уваги, логіки. Серед завдань галузі значної уваги заслуговують ті, які передбачають практичну спрямованість навчання математики та використання математичних методів у процесі розв`язування задач навчального і практичного призначення. Надзвичайно важливо навчитись застосовувати математичні знання і вміння при опануванні інших навчальних предметів, використовувати отриману інформацію в повсякденному житті.

Серед усіх задач у шкільному курсі математики особливе місце посідають текстові задачі. Вони є чудовим дидактичним та розвиваючим засобом, допомагають здійснювати зв'язок навчання з життям, сприяють засвоєнню математичних понять та встановленню внутрішньопредметних та міжпредметних зв'язків, розвивають мислення, пам'ять, уяву, кмітливість учня тощо, але, головне, вони дозволяють показати учням процес використання математики під час розв`язування задач, що виникають насправді, тобто познайомити їх із математичним моделюванням. Уявлення про моделювання мають для учнів загальнокультурну та загальноосвітню цінність. Тому формування умінь розв`язувати текстові задачі було і залишається однією з головних завдань вчителя математики.

1.1. Поняття текстової задачі та її основні компоненти.

Методиці навчання розв`язуванню текстових задач присвячено багато різних робіт. Текстові задачі всі автори трактують аналогічно як математичні задачі, в яких є хоча б один об'єкт, що є реальним предметом. Такі задачі називають ще сюжетними, практичними, арифметичними тощо.

Перелічені назви беруть початок від способу запису (задача представлена у вигляді тексту), сюжету (описуються реальні об'єкти, явища, події), характеру математичних викладок (встановлюються кількісні відносини між значеннями деяких величин, пов'язані найчастіше з обчисленнями). Сюжетну задачу визначають і як таку задачу, в якій дані та зв'язок між ними включені до фабули. Останнім часом найпоширенішим є термін "текстова задача".

Текстова задача є словесною моделлю ситуації, явища, процесу тощо. Як у будь-якій моделі, у текстовій задачі описується не вся подія чи явище, а лише його кількісні та функціональні характеристики.

У кожному текстовому завданні можна виділити:

1) числові значення величин, які називаються даними, або відомими (їх має бути не менше двох);

2) деяку систему функціональних залежностей у неявній формі, що взаємно пов'язують шукане з даними та дані між собою;

3) вимога або питання, на яке треба знайти відповідь.

Числові значення величин та існуючі з-поміж них залежності, тобто кількісні та якісні характеристики об'єктів задачі та відносин між ними, називають умовою (або умовами) задачі. У задачі зазвичай одна, а кілька умов, які називають елементарними.

Вимоги можуть бути сформульовані як у питанні, так і в оповідальній формі, їх також може бути декілька. Величину, значення якої потрібно знайти, називають шуканою величиною, а числові значення шуканих величин - шуканими чи невідомими.

Основна особливість текстових задач і труднощі у вирішенні полягає в тому, що в них не вказується прямо, яка саме дія (або дії) має бути виконана для отримання відповіді на вимогу задачі, так, наприклад, немає "правила" складання рівняння за умовою задачі . Відповідь на вимогу задачі виходить у результаті її розв'язання. "Вирішити математичну задачу, за словами Л.М.

Фрідмана, - це означає знайти таку послідовність загальних положень математики (означень, аксіом, теорем, правил, законів, формул), застосовуючи які до умов задачі або до їх наслідків (проміжні результати рішення), отримуємо те, що потрібно в задачі, - її відповідь" [23, с. 27].

1.2. Методи розв`язування текстових задач та їх інтеграція.

Існують різні методи розв`язування текстових задач: арифметичний, алгебраїчний, геометричний, логічний, практичний та ін. В основі кожного методу лежать різні види математичних моделей. Наприклад, при методі алгебри розв`язання задачі, складаються рівняння або нерівності, при геометричному - будуються діаграми або графіки. Розв'язання задачі логічним методом починається зі складання алгоритму.

Дамо коротку характеристику перших трьох методів вирішення текстових завдань, що найчастіше зустрічаються у шкільному курсі математики.

1. Арифметичний метод.

Розв'язати задачу арифметичним методом означає знайти відповідь на вимогу задачі за допомогою виконання арифметичних дій над числами. Одну й ту ж задачу в багатьох випадках можна вирішити різними арифметичними способами. Задача вважається вирішеною різними способами, якщо її рішення відрізняються зв'язками між даними та шуканими, покладеними в основу рішень, або послідовністю використання цих зв'язків.

2. Алгебраїчний метод.

У науці цей метод сприймається як метод буквених обчислень. Розв'язати задачу методом алгебри - це означає знайти відповідь на вимогу задачі, склавши і розв'язавши рівняння чи систему рівнянь (чи нерівностей). Одну й ту ж задачу можна також вирішити різними алгебраїчними способами. Задача вважається вирішеною різними способами, якщо при її розв'язуванні складено різні рівняння чи системи рівнянь (нерівностей), в основі складання яких лежать різні співвідношення між даними і шуканими.

3. Геометричний метод.

Він у тому, що логічний доведення чи розв'язання задачі направляється наочним уявленням, іноді доведення чи рішення видно з наочної картини. Під геометричним методом розв'язання текстових алгебраїчних задач розумітимемо надалі метод розв'язання, що полягає у використанні геометричних уявлень (зображень), законів геометрії та елементів аналітичних методів (рівнянь, нерівностей, систем рівнянь, арифметичних виразів та ін.).

Розв'язання будь-якої текстової задачі учень повинен починати з рисунка чи наочного опису, разом із рисунком має йти точне розуміння ситуації, описаної у задачі. Ще Г. Галілей писав: "Геометрія є наймогутнішим засобом для витончення наших розумових здібностей і дасть нам можливість правильно мислити і розмірковувати".

Геометричні уявлення виникають на основі геометричних знань та геометричної інтуїції. Геометричне уявлення умови текстової задачі називатимемо геометричною моделлю цієї задачі. Побудова та використання геометричних моделей у процесі вирішення текстових задач алгебри засновані на законах геометрії. Звідси й назва "геометричний метод".

Проаналізуємо докладніше поняття "геометричний метод розв'язання задач алгебри". Традиційно під геометричним методом розв'язання задач у курсі алгебри розуміли лише конструктивний прийом, коли рішення виконувалося з допомогою точних побудов, і відповідь задачі отримували з креслення. Це обмежувало можливості використання геометричних уявлень, зокрема, під час розв'язання текстових задач. Ми розумітимемо геометричний метод ширше, як метод, що складається з двох прийомів: конструктивного та конструктивно-аналітичного (рис. 1). Конструктивний прийом передбачає виконання всіх побудов креслярськими інструментами на міліметровому папері або папері в клітину з використанням масштабу. Відповідь задачі виходить зазвичай наближена, але прийнятна для практичних цілей, і знаходиться вона шляхом вимірювання довжин відрізків або інших елементів креслення.

Конструктивно-аналітичний прийом дозволяє виконувати креслення схематично від руки. Розв'язання задачі в цьому випадку здійснюється аналітично: або арифметичним шляхом з використанням креслення, або шляхом складання рівняння, що ґрунтується на точних геометричних співвідношеннях (рівності, подоби, рівновеликості та ін.)

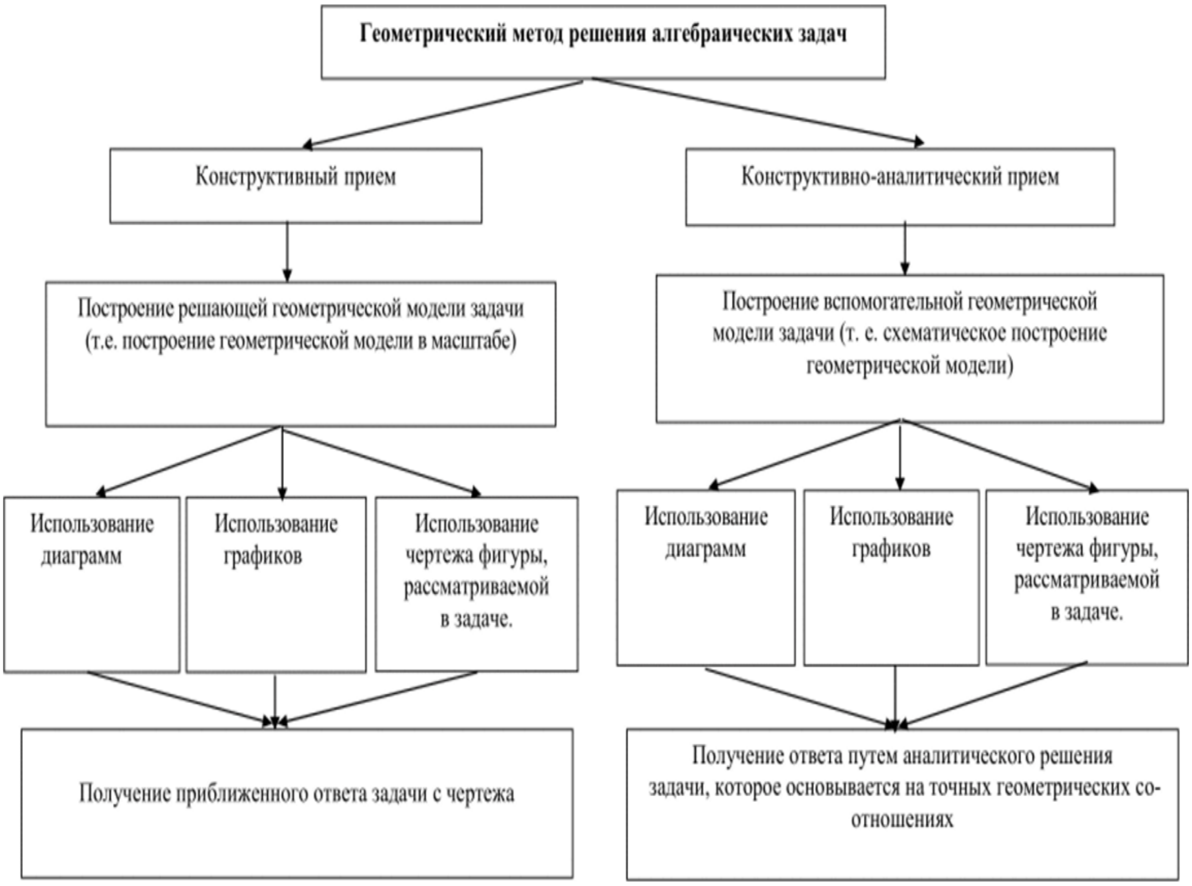

Рис. 1

Таким чином, для розв'язання задачі алгебри геометричним методом необхідно:

1) побудувати геометричну модель задачі: вирішальну чи допоміжну (геометрична модель задачі називається вирішальною, якщо вона дозволяє отримати відповідь задачі без аналітичних викладок, інакше – допоміжною).

2) знайти відповідь задачі: якщо модель вирішальна, то відповідь "знімаємо" з креслення, у разі допоміжної геометричної моделі треба:

а) скласти числовий вираз чи рівняння (систему рівнянь), нерівність (систему нерівностей), використовуючи геометричні співвідношення одержаних фігур;
б) знайти значення числового виразу чи розв'язання рівняння, нерівності (системи рівнянь чи нерівностей);
в) досліджувати отримані рішення: з'ясувати, чи задовольняють коріння рівняння (системи рівнянь), розв'язання нерівності (системи нерівностей) умові та вимоги задачі, чи вичерпують вони всі розв'язки задачі тощо.

Для навчання учнів алгебраїчного та геометричного методів розв'язання текстових задач необхідна спеціальна пропедевтична робота. Така робота здійснюється в основному 5-6-х класах (у 1-4-х класах задачі вирішуються арифметичним способом).

2. Пропедевтика алгебраїчного та геометричного методів розв'язання текстових задач.

Виділяють два основні етапи пропедевтичної роботи. На першому етапі завдання вчителя полягає в тому, щоб систематично та цілеспрямовано формувати в учнів деякі важливі загальнонавчальні та математичні навички. На другому етапі основна увага має бути приділена виявленню залежностей між величинами, що входять до тексту задачі, та навчання перекладу цих залежностей математичною мовою. Зупинимося на кожному етапі докладніше.

І етап пропедевтики. Тут необхідно сформувати в учнів такі вміння:

1) вміння уважно читати текст задачі;

2) вміння проводити первинний аналіз тексту задачі – виділяти умову та питання задачі;

3) вміння оформлювати короткий запис тексту задачі;

4) вміння виконувати креслення (рисунки) за текстом задачі.

У методиці навчання математики розроблено відповідні прийоми роботи вчителя щодо формування виділених умінь (3. П. Матушкіна).

1. Прийоми, що формують уміння читати текст задач.

- показ зразків правильного читання задачі;

- проведення спеціальної роботи над текстом задачі по засвоєнню її змісту: різні форми пред'явлення задачі: текстом, коротким записом тексту, рисунком. Сюди включаються також прийоми роботи за засвоєнням змісту задачі: зміна числових даних задачі; зміна сюжету задачі; зміна сюжету та числових даних.

2. Прийоми, що формують вміння виділяти умову та питання задачі:

- виявлення ролі питання в знаходженні способу розв'язання задачі; звернення уваги точність, ясність формулювання питання задачі; пере формулювання питання задачі. Цей прийом спрямований на виховання у учнів потреби виділяти умову та питання задачі;

- формулювання одного або декількох питань до умови задачі;

- знаходження необхідних даних для відповіді на питання задачі;

- складання задачі з питання.

3. Прийоми навчання оформлення короткого запису тексту задачі:

- оформлення короткого запису у вигляді таблиці, схеми;

- оформлення короткого запису в рядок (стовпець);

- читання короткого запису задачі;

- складання задачі з її короткого запису.

4. Прийоми навчання виконання креслень (рисунків) за текстом задачі.

Основні з них такі:

- пред'явлення задач, що вимагають виконання рисунку;

- читання рисунка, виконаного за текстом задачі;

- складання задачі за рисунком або кресленням.

До виконання креслень висуваються вимоги: вони мають бути наочними, чіткими, відповідати тексту задачі; на них повинні бути відображені по можливості всі дані, що входять до умови задачі; виділені на них дані та шукані повинні відповідати умові задачі та загальноприйнятим позначенням.

Формування вміння виконувати креслення буде успішним, якщо учні вмітимуть читати креслення. У зв'язку з цим дуже важливо навчити складати текст задачі за кресленням, рисунком. Внаслідок виконання таких вправ формуються навички перекладу графічних даних на словесний текст.

II етап пропедевтики. Важливим тут є навчання розумінню учнями способів словесного вираження зміни величин та фіксація їх у вигляді математичних виразів чи рівнянь. Досягається це з допомогою відповідних вправ. Наприклад, щодо дій множення натуральних чисел у 5 класі учні розглядають одне із застосувань множення - збільшення числа у кілька разів. Тут можливі вправи:

1) Батько старший за сина в 4 рази. Скільки років батькові, якщо синові т років? (4т.)

2) На перших двох полицях стоїть по п книг на кожній, а на третій - т книг. Скільки книг на трьох полицях? (2п + т.)

3) Порівняйте а і с, якщо а = 5с. (а більше с в 5 р. або с менше а в 5 р.).

4) Складіть рівність, виходячи з умови: х більше у в п раз. (х = пу.)

5) Складіть задачу за рівнянням 2х = 28. (Наприклад, у кошику було кілька грибів. Після того, як до неї додали стільки ж, у ній стало 28 грибів. Скільки грибів було в кошику?)

Аналогічні вправи можуть бути запропоновані учням щодо інших арифметичних дій.

У методиці навчання розв'язанню задач пропонуються також інші системи вправ задля досягнення поставленої мети. Наприклад, розглядаються конкретні текстові задачі та після прочитання їх текстів учням пропонується відповісти на запитання. Наведемо приклади.

Задача 1. Теплохід "Метеор" за годину проходить відстань у 5 разів більша за катер. Скільки км за годину проходить кожен із них, якщо сума їх швидкостей дорівнює 90 км/год?

Завдання. 1) Назвіть величини, які пов'язані залежностями: а) одна більша за іншу в 5 разів; б) одна менша за іншу в 5 разів; 2) Якщо катер проходить v км/год, то як можна витлумачити вирази 5v; 5v + v? Значення якої величини відоме за умовою завдання?

Задача 2. На шкільній математичній олімпіаді було запропоновано 8 задач. За кожну розв'язану задачу зараховувалося 5 очок, а за кожну невирішену задачу списувалося 3 очки. Скільки задач правильно вирішив учень, якщо він здобув 24 очки?

Завдання. Встановіть, до розв'язання яких із наведених рівнянь зводиться розв'язання запропонованої задачі:

а) 5х - 3(8 - х) = 24; в) 5(8 - л) - ах = 24; д) Зу = 24;

б) 5х = 24; г) 5л; - 3(8 + л) = 24; е) 5л: + 3(8 - л) = 24.

Завдання до задач не потребують розв'язання вихідних задач. Перша група задач спрямована на формування вміння бачити всілякі залежності між величинами, які входять у задачу; друга група формує вміння бачити в математичному вираженні чи формулі певний зміст, тобто математичну модель.

Текстові задачі у 5-6-х класах та методи їх розв'язання мають важливе методичне значення. Міцне засвоєння методів розв'язання "чисто арифметичних" задач дозволяє підготувати учнів до усвідомленого розв'язання задач алгебраїчним та геометричним методами.

Програма з математики середньої школи передбачає у 5-6-х класах розв'язання (поряд із відомими типами задач) основних задач на відсотки, дроби і складання пропорцій.

У 5 класі вивчаються 3 основні задачі на відсотки: а) знаходження відсотків числа; б) знаходження числа за даною кількістю його відсотків; в) знаходження відсоткового відношення двох чисел. Однак ці види задач не виділяються, тому що як основний спосіб розв'язання задач на відсотки прийнятий спосіб приведення до одиниці. Він має переваги:

1) простіший до виконання обчислень;

2) привчає учнів виділяти число, яке приймається за 100%;

3) не вимагає запам'ятовування правил розв'язування того чи іншого виду задач на відсотки, а ґрунтується на міркуваннях.

Пропонується також розв'язувати деякі задачі на відсотки за допомогою рівнянь. Ці рекомендації відносяться до двох видів задач: знаходження числа за даною кількістю його відсотків та знаходження відсоткового відношення двох чисел.. У 6 класі вивчаються дві основні задачі на дроби: а) знаходження дробу числа; б) знаходження числа за даним значенням його дробу. Основним способом вирішення цих задач є спосіб приведення до одиниці, виражений правилами:

- щоб знайти дріб від числа, потрібно число помножити на цей дріб;
- щоб знайти число за даним значенням його дробу, треба це значення поділити на дріб.

Розв'язання задач за допомогою пропорцій у 6 класі передбачає використання понять "пряма пропорційність" або "зворотна пропорційність". Тому необхідно вчити учнів коротко записувати умову задачі так, щоб відповідні однорідні величини записувалися стовпчиком друг під одним. Це дозволить учням побачити, які стосунки кожної пари позитивних чисел рівні.

Загалом у учнів 5-6-х класів мають бути сформовані вміння складати числові та буквені вирази, пропорції, лінійні рівняння за умовами текстових задач, розв'язувати задачі за допомогою арифметичних прийомів (способів) та рівнянь.

Будь-яка текстова задача, яка зводиться до рівняння першого ступеня, може бути розв'язана арифметичним способом. Тому зіставлення арифметичного та алгебраїчного способів розв'язання текстових задач у процесі формування умінь розв'язувати ці задачі сприятиме підвищенню інтересу учнів до розв'язання задач, а також накопиченню ними досвіду самостійного пошуку рішень.

3. Етапи розв'язання задач на складання рівнянь та їх реалізація

У методиці математики загальноприйнятий також розподіл процесу розв'язання задач: 1) аналіз тексту задач; 2) пошук способу розв'язування задачі та складання плану розв'язання; 3) здійснення знайденого плану; 4) вивчення (аналіз) знайденого розв'яку.

Виділені етапи представляють норму діяльності з розв'язанні задач. Однак у реальному процесі розв'язання необов'язково явним чином проходити всі зазначені етапи. Це залежить від того, наскільки тому, хто розв'язує, відомий спосіб розв'язання задачі. Кожен етап має ознаки (орієнтири), керуючись якими вчитель формує в учнів компоненти загального вміння розв'язувати задачі.

На першому етапі вчитель повинен домогтися, щоб учні "прийняли" задачу, тобто зрозуміли її сенс, зробивши метою своєї діяльності. І тут задача стає об'єктом мислення. Тому засвоєння тексту задачі учнями буде першою важливою метою вчителя.

Вихідним тут є виділення в задачі умови, тобто даних та відносин між ними, і вимоги задачі, тобто шуканого (шуканих) та відносин між ними. Потім виявляється у задачі основне відношення, що спрямовує процес пошуку розв'язку. Це відношення зазвичай має вигляд функціональної залежності двох типів: a · b = c і a + a ^ = аз.

Важливе значення на цьому етапі мають короткий запис тексту задачі, складання схем, рисунків. Схеми та рисунки виступають у ролі наочного уявлення змісту задачі та залежностей величин, що входять до неї. Ще більшого значення набуває схема в ролі моделі, що виявляє приховані залежності між величинами. Тому складанню коротких записів та схем за текстом задачі необхідно спеціально навчати.

На першому етапі рішення необхідно також актуалізувати "базу" розв'язання задачі, тобто теоретичну та практичну основу, необхідну для обґрунтування рішення. Тут же з'ясовується, чи не належить задача до відомого типу задач.

На другому етапі процесу розв'язання задачі з'ясовується стратегія розв'язання:

1) встановлюється, чи буде невідомим, щодо якого складається рівняння, шукана величина або проміжна величина (якщо знаходять спочатку проміжну величину, то шукана величина виражається через неї);

2) з'ясовується, для яких величин відповідні вирази прирівнюватимуть.

Потім здійснюється пошук способу розв'язання задачі на основі побудови моделі пошуку. Аналітико-синтетичний пошук рішення закінчується одержанням рівняння. Відповідний план розв'язання обговорюється з учнями, при цьому використовується табличний запис пошуку розв'язання задачі. Іноді план як спосіб розв'язання задачі оформляється письмово. У цьому він виконує роль орієнтовної основи діяльності учня.

На третьому етапі здійснюється знайдений план розв'язання, виконується перевірка розв'язку та записується отримана відповідь.

Четвертий етап – вивчення (аналіз) знайденого розв'язання задачі. На цьому етапі виділяється головна ідея рішення, суттєві його моменти, відбувається узагальнення розв'язання задач цього типу. З'ясовуються недоліки розв'язання та проводиться пошук іншого, більш раціонального рішення, виявляються та закріплюються в пам'яті учнів прийоми, які були використані у процесі розв'язання задачі. Перед учнями ставляться питання:

1) Яка головна ідея вирішення цього завдання?

2) Чи не можна вказати інші способи розв'язання цієї задачі?

3) Чому розглянутий спосіб розв'язання є раціональним?

Форми запису розв'язання

1) Розгорнута, коли розв'язання оформляється як зв'язкова розповідь.

2) Запис-перелік, коли дається перелік величин, виражених через невідоме, і поруч пояснення, що означає кожна величина і основі чого складається рівняння; цей запис включає і розв'язання рівняння.

3) Таблична, коли розв'язання задачі оформляється у вигляді таблиці.

Розкриємо методику навчання розв'язання текстових завдань на прикладах.

І. Задачі на складання рівнянь першого ступеня

Задача І. (основне відношення $a_1 + a_2 = aj$) У першому елеваторі було зерна вдвічі більше, ніж у другому. Коли з першого елеватора вивезли 750 т зерна, і привезли у другий 350 т, зерна в обох елеваторах стало порівну. Скільки тонн зерна було спочатку у кожному елеваторі?

І етап (аналіз тексту задачі) реалізується шляхом відповіді на запитання:

1) Скільки ситуацій розглядається у задачі?

2) Скільки зерна було у першому елеваторі?

3) Скільки зерна було у другому елеваторі?

4) Скільки зерна вивезли із першого елеватора (привезли на 2-й елеватор?

5) Скільки зерна стало в обох елеваторах?

6) Що потрібно дізнатися у задачі?

Підсумком першого етапу роботи над задачею є запис тексту задачі. Вона може бути оформлена у вигляді таблиці 1. Уміння учня оформити відповідну таблицю свідчить, чи прийняв він задачу чи ні. Як зазначалося, існують інші форми записи, див. [1].

Таблиця 1.

Кількість зерна т	І елеватор	ІІ елеватор
Спочатку	?	?
Потім	? - 750	? + 350

ІІ етап (пошук способу розв'язання задачі та складання плану розв'язання). Тут обговорюється стратегія розв'язання. Потім вводиться позначення шуканої чи іншої невідомої величини залежно від стратегії.

Нехай х т - кількість зерна, яке було у другому елеваторі, тоді модель пошуку розв'язання задачі у вигляді таблиці 2 набуде вигляду:

Таблиця 2.

Кількість зерна т	І елеватор	ІІ елеватор
Спочатку	2x	x
Потім	2x - 750	x + 350

ІІІ етап (здійснення знайденого плану розв`язання). Після побудови таблиці 2 робимо пояснення: "Так як у задачі сказано, що в обох елеваторах зерна стало порівну, то можна скласти рівняння 2х-750 = х + 350, х = 1100."

Відповідь: в 1 елеваторі було 2200 т, у ІІ елеваторі - 1100 т.

IV етап (вивчення (аналіз) знайденого розв`язку). На цьому етапі можна розв`язати цю задачу за допомогою лінійної діаграми. Проілюструємо, як реалізуються етапи розв'язання задачі у цьому випадку.

І етап (побудова лінійної діаграми). Після прочитання тексту задачі обговорюються такі питання (самими учнями або за допомогою вчителя):

1) Скільки ситуацій розглядається у задачі? (Дві: початкова та кінцева.)

2) З якої ситуації слід розпочати побудову лінійної діаграми? (Можна почати побудову з першої ситуації і від неї перейти до другої, а можна спочатку побудувати лінійну діаграму кінцевої ситуації і перейти від неї до початкової. Розглянемо перший варіант побудови лінійної діаграми.)

3) Якою буде лінійна діаграма початкової ситуації? (Два відрізки, один з яких у 2 рази більший за інший. Перший відрізок буде зображати кількість зерна в першому елеваторі, а другий - у другому.) Після цього учні будують діаграму початкової ситуації. Потім міркування продовжуються.

4) Як перейти на діаграмі від першої ситуації до другої? (Треба від першого відрізка відняти відрізок, що умовно зображає 750 т, а до другого відрізка додати відрізок, що зображує 350 т.)

5) Чи довільно беруться ці відрізки? (Ні, слід враховувати, що знову отримані відрізки мають бути рівними, тому що на обох елеваторах зерна стало порівну.)

Виконавши події з відрізками, учні отримують діаграму кінцевої ситуації. Перший етап роботи над задачею закінчується позначенням відрізків та оформленням записів на кресленні.

II етап (розв`язання геометричної задачі, що вийшла.)

Побудована лінійна діаграма перетворює алгебраїчну задачу на геометричну, вирішення якої засноване на використанні властивостей довжини відрізка, а саме: 1) рівні відрізки мають рівні довжини; менший відрізок має меншу довжину; 2) якщо точка ділить відрізок на два відрізки, то довжина всього відрізка дорівнює сумі довжин цих двох відрізків.

Розв`язання учні записують геометричною мовою, використовуючи позначення відрізків, а результат перекладають природною мовою. У разі цей переклад здійснюється автоматично з допомогою перенесення термінології (III етап). Спочатку слід робити докладний запис розв`язання із зазначенням, що зображує кожен відрізок. Поступово можна переходити до короткого запису, оскільки деякі факти видно на кресленні.

Наведемо докладний запис розв'язання задачі 1.

Розв`язання

III етап. Нехай відрізок AB зображує кількість зерна в першому елеваторі (рис. 2), тоді відрізок CD зображатиме кількість зерна в другому елеваторі.

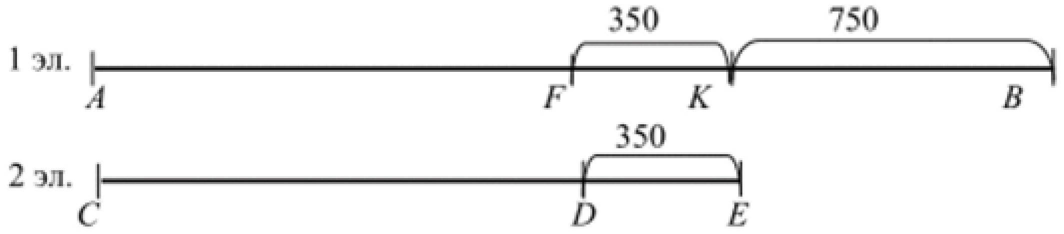

Рис.2

AB = 2 CD - початковий розподіл зерна між елеваторами. З першого елеватора вивезли 750 т зерна, а на другий елеватор привезли 350 т, тому віднімемо з відрізка AB відрізок KB, умовно зображує 750 т, а до відрізку CD додамо відрізок DE, що зображує 350 т. (Відрізки KB і DE беремо не довільно, а такі, щоб відрізки AK і CE були рівними.) AK = CE - кінцевий розподіл зерна між елеваторами.

IV етап. 1 спосіб. CD = AF = FB (за побудовою), FB = FK + KB = 350 + 750 = 1100, отже, CD = 1100, AB = 1100 · 2 = 2200.Відповідь: у першому елеваторі було 2200 т зерна, у другому - 1100 т.

Учні можуть робити короткий запис розв'язання задачі, наприклад, вона може бути такою:

Розв`язання

AB = 2· CD - початковий розподіл зерна між двома елеваторами. AB - BK = AK, CD + DE = AK. AK = CE - кінцевий розподіл зерна між елеваторами.

CD = AF = FB (за побудовою), FB = FK + KB, FB = 350 + 750 = 1100, тоді CD = 1100, AB = 1100 · 2 = 2200.

Відповідь: 2200 т, 1100 т.

Як бачимо, у разі відповідь отримали, не становлячи рівняння.

Слід зазначити, що діаграма дозволяє скласти нс лише арифметичний вираз, а й різні рівняння до задачі, які учні неспроможні записати без креслення. Таким чином, з'являється можливість розв'язати алгебраїчну задачу декількома способами.

Наведемо короткий запис інших способів розв'язання задачі І.

2 спосіб. Нехай AK = CE = x, тоді як AB = 2· CD, отримаємо: x+ 750 = 2 · (x - 350), звідки x = 1450, CD = 1450 – 350 = 1000, AB = 1100 • 2 = 2200.

Відповідь: 2200 т, 1100 т.

Як бачимо, у разі відповідь отримали, не становлячи рівняння.

3 спосіб. Нехай CD = x, тоді AB = 2 CD. Так як AK = CE, то маємо:

2x – 750 = x + 350. (Таке ж рівняння виходить при розв`язанні задачі без діаграми.)

Задача 2 (основне відношення a • b = c). За планом бригада мала виконати замовлення за 10 днів. Але фактично вона перевиконувала норму на 27 деталей на день і за 7 днів роботи не лише виконала передбачене планом завдання, а й виготовила понад план 54 деталі. Скільки деталей на день мала виготовляти бригада за планом?

I етап. У ході аналізу тексту задачі учнів запитують:

1) За скільки днів бригада має виконати замовлення за планом?

2) За скільки днів бригада фактично виконала замовлення?

3) Чому бригада виконала замовлення раніше?

4) Скільки деталей виготовила бригада понад план?

5) Які величини містяться у завданні?

6) Як пов'язані між собою ці величини?

7) Скільки різних ситуацій можна виділити у завданні?

8) Які величини, що входять до умови та питання завдання, невідомі?

9) Яка величина задачі є шуканою?

Через підсумку учні становлять таблицю 3.

Таблиця 3.

Величини	За планом	Фактично
Продуктивність бригади, дет. в день	7	? на 27
Час роботи дн.	10	7
Обсяг виконаної роботи	7	? на 54

II етап (пошук способу розв'язання). Учні з'ясовують тут основне ставлення: V = p • t, позначають через шукану величину і становлять модель пошуку розв`язання у вигляді таблиці 4.

Таблиця 4.

Величини	За планом	Фактично
Продуктивність бригади, дет. в день (p)	x	x + 27 на 27
Час роботи дн. ($t_{p)}$	10	7
Обсяг виконаної роботи (V_p)	10x	(x + 27) • 7 на 54

III етап (здійснення плану розв'язання)

Оскільки за умовою задачі бригада за 7 днів роботи нс виконала завдання, а й виготовила понад план 54 деталі, можна скласти рівняння: $10x + 54 = (x + 27) \cdot 7$, $10x + 54 = 7x + 189$, $3x = 135$, $x = 45$.

Розв'язання задачі не може закінчуватися розв'язуванням рівняння: необхідно перевірити, чи задовольняє отриманий корінь рівняння умові та вимогам задачі, тобто необхідно зробити перевірку кореня рівняння за змістом задачі.

Перевірка: $x = 45$ - позитивне число, $x + 27 = 45 + 27 = 72$ - позитивне число, $(x + 27) \cdot 7 = 72 \cdot 7 = 504$ – позитивне число, $10x = 10 \cdot 45 = 450$ - позитивне число, $504 – 450 = 54$ – позитивне число, що є даним. Отже, $x = 45$ задовольняє умові задачі, тобто є її розв`язком.

Відповідь: бригада мала виготовляти на день за планом 45 деталей.

IV етап (вивчення та аналіз знайденого розв`язку). На цьому етапі можна розв`язати із учнями задачу геометричним методом за допомогою двовимірної діаграми. Двовимірна діаграма може складатися із площі одного або декількох прямокутників (паралелограмів, трикутників, трапецій).

Розв`язання

Нехай відрізок AB зображує продуктивність бригади щодня за планом (рис. 3). AD - термін виконання замовлення за планом, тоді S_{ABCD} визначає все замовлення з випуску деталей. AM зображує кількість деталей, що випускала бригада щодня, AP – термін виконання замовлення, тоді S_{AMNP} відповідає кількості деталей, яку випустила бригада за 7 днів.

За умовою завдання бригада випустила понад план 54 деталі, тому маємо: $AB \cdot 10 + 54 = (AB + 27) \cdot 7$, $AB = 45$.

Відповідь: бригада мала виготовляти на день за планом 45 деталей.

Одна з переваг геометричного методу полягає у наочності.

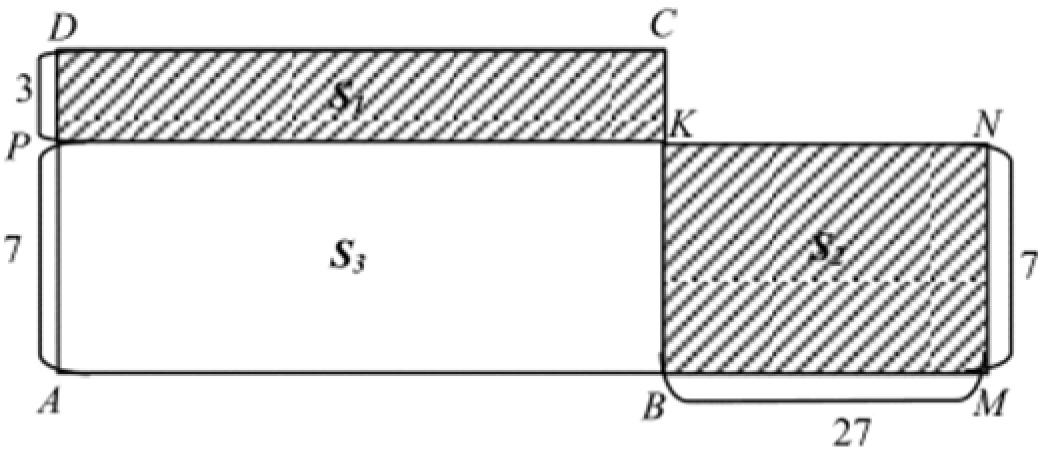

Рис. 3.

Побудова двовимірної (або лінійної) діаграми і перехід від одного стану до іншого робить більш відчутним процес, що описується в задачі, і тим дозволяє краще зрозуміти її.

При розв'язанні задачі геометричним методом учні можуть спиратися на креслення, використовувати геометричні знання та вміння. Іноді можуть вирішити задачі, навіть нс складаючи рівняння, відповідь видно на кресленні. Геометричний метод розв'язання задачі можна використовувати як перевірку розв`язку, отриманого без креслення, чисто алгебраїчно. (

Задачі на складання рівняння другого ступеня, в яких реалізовано відношення a • b = c, мають ту особливість, що при одному і тому ж обраному невідомому вони допускають не менше двох різних шляхів пошуку розв`язку. Цю особливість нс завжди мають задачі на складання рівнянь першого ступеня. Наведемо приклад.

Задача 3. Спортивний майданчик прямокутної форми має площу 840 м^2. Якщо довжину майданчика зменшити на 5 м, а ширину збільшити на 4 м, то вийде прямокутник, що дорівнює даному. Знайти розмір спортивного майданчика.

Якщо a – ширина, м, b – довжина, м, c – площа, м^2, то a • b = c. Нехай x м - ширина спортивного майданчика, тоді модель пошуку матиме вигляд:

Таблиця 5.

Величини	Розміри майданчика 1	Розміри майданчика 2

Ширина, м	a	a + 4, на 4
Довжина, м	b	b - 5, на 5
Площа, м^2	840	840

Рівняння в даному випадку виходить шляхом порівняння двох виразів однієї і тієї ж величини (довжини), що є другим компонентом основного відношення a • b = c. $\frac{840}{a} = \frac{840}{a+4} + 5$.

При тому обраному невідомому рівняння можна скласти шляхом порівняння двох виразів іншої величини - площі, що є третім компонентом основного відношення a • b = c.

Таблицая 6.

Величини	Розміри майданчика 1	Розміри майданчика 2
Ширина, м	x	x + 4, на 4
Довжина, м	840/x	840/x - 5, на 5
Площа, м^2	840	840

Рівняння матиме вигляд: $\frac{840}{x} \cdot x = (\frac{840}{x} - 5) \cdot (x + 4)$.

Можливий третій шлях пошуку розв`язання. Якщо через x м позначити ширину майданчика, а через y м її довжину, то модель пошуку розв'язання задачі призведе до системи рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 840, \\ (x+4)(y-5) = 840. \end{cases}$$

Цю задачу можна розв'язати і геометричним методом за допомогою двовимірної діаграми. Причому геометрична модель її матиме такий самий вигляд, як і в задачі 2, тільки, на відміну від першого випадку, площі S і S_2 будуть рівні. (Розв'яжіть задачу геометричним методом самостійно!)

Великі можливості у розв'язанні текстових задач геометричним методом є використання графіків рівномірних процесів. Метод вирішення у разі називається графико-геометрическим. Наведемо приклади.

Задача 4. З двох аеродромів назустріч один одному вилетіли одночасно два літаки. На момент зустрічі перший пролетів на 200 км більше за другий. Решту путі до аеродрому перший пролетів за 5/3 години, а другий за 12/5 години. Знайти відстань між аеродромами.

І. Алгебраїчний метод розв'язання задачі (без креслення) призводить до системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{5x}{3y} = \dfrac{12y}{5x}, \\ \dfrac{12}{5}y - \dfrac{5}{3}x = 200, \end{cases}$$

де х км/год – швидкість першого літака, у км/год – швидкість другого літака.

ІІ. Розв'яжемо задачу графіко-геометричним методом.

Розглянемо дві прямокутні системи координат хОу та хО`у (рис. 4).

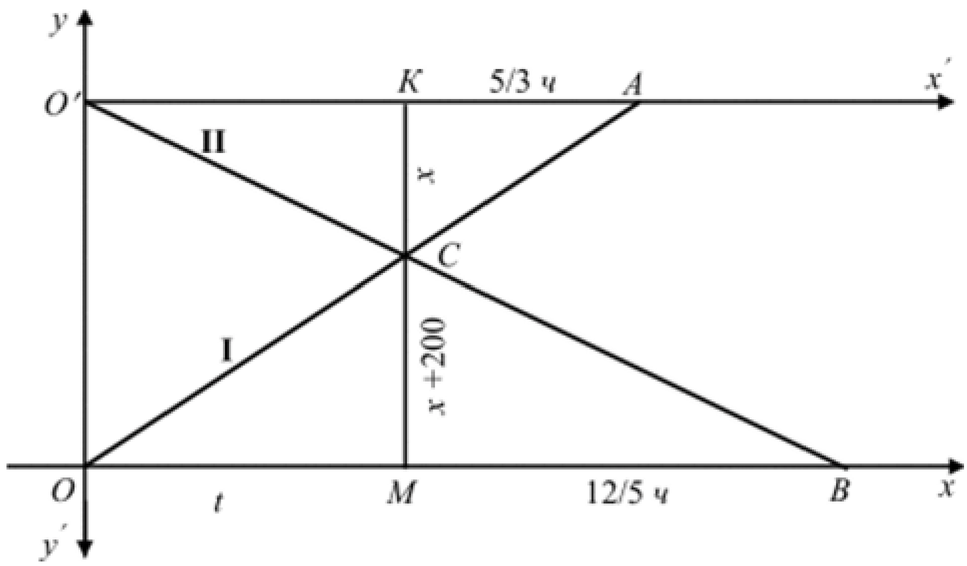

Рис. 4.

Ox та O`x – осі часу з однаковими масштабами. Відрізок OO` зображує відстань між аеродромами.

Оскільки рух рівномірний, то відрізок OA - графік руху першого літака. Другий літак рухається назустріч першому, тому відрізок O'B – графік руху другого літака. Перетин графіків у точці C відповідає моменту зустрічі літаків.

Позначимо через x км шлях, що пролетів другий літак до зустрічі, тоді (дг + 200) км пролетів до зустрічі перший літак.

Розглянемо дві пари трикутників: Δ OMC ~ ΔAKC (за першою ознакою), тоді:

$$\frac{3t}{5} = \frac{x + 200}{x}. \qquad (1)$$

ΔBMC ~ ΔO`KC (за першою ознакою), тоді:

$$\frac{12}{5t} = \frac{x + 200}{x}. \qquad (2)$$

З рівностей (І) та (2) отримуємо $\frac{3t}{5} = \frac{12}{5t}$, звідки $t^2 = 4$, тоді $t = 2$ (негативний корінь рівняння нс задовольняє умові задачі). Підставивши отримане значення в (1), отримаємо:

$\frac{6}{5} = \frac{x + 200}{x}$, вирішуючи це рівняння, знаходимо: $x = 1000$, тоді $x + 200 = 1000 + 200 = 1200$. Вся відстань $S = 1000 + 1200 = 2200$ (км).

Відповідь: 2200 км.

Аналогічно вирішуються задачі на спільну роботу.

Задача 5. Двоє робітників, виконуючи завдання разом, могли б закінчити його за 12 днів. Якщо спочатку працюватиме лише один із них, а коли він виконає половину всієї роботи, його замінить другий робітник, то все завдання буде закінчено за 25 днів. За скільки днів кожен робітник окремо може виконати завдання?

I. Алгебраїчний метод розв'язання задачі (без креслення) призводить до рівняння: $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(25-x)} = \frac{1}{12}$, де x - кількість днів, протягом якого перший робітник виконає все завдання.

II. Розв'яжемо задачу графіко-геометричним методом.

Побудуємо графічну модель задачі (рис. 5). Для певності припустимо, перший робочий працює швидше, ніж другий. Оскільки завдання розглядається як рівномірний процес, то відрізок AN - графік роботи першого робочого, а відрізок BD - графік роботи другого робочого. AQ зображує час спільної роботи. AQ = 12. Проведемо NK || BD, тоді AK = 50. Потім використовуємо подібність трикутників, що утворилися.

ΔNMA ~ ΔPKA ~ ΔPCN, звідки $\frac{MN}{CP} = \frac{12+x}{x}$ (3)

ΔNMK ~ ΔPQD ~ ΔPCB, звідки $\frac{MN}{CP} = \frac{38-x}{12}$ (4)

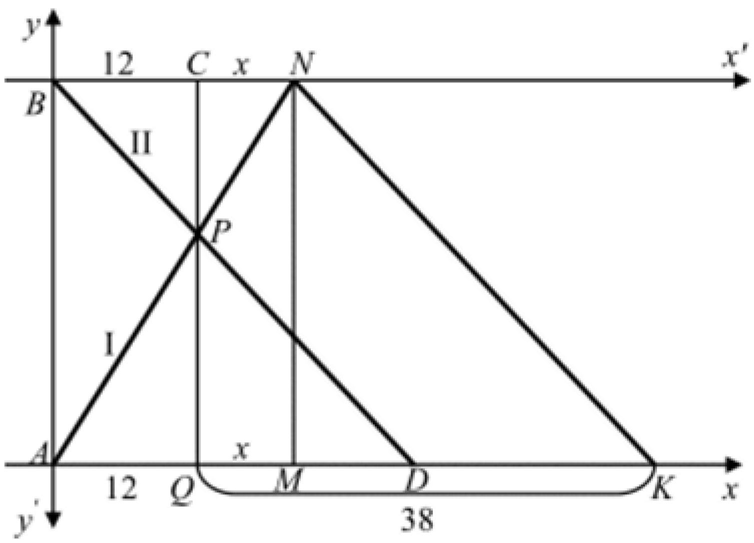

Рис. 5

З рівностей (3) та (4) отримуємо, що $144 + 12x = 38x - x^2$. Розв`язуючи це рівняння, знаходимо: $x_1 = 18$, $x_2 = 8$. Враховуючи, що перший робітник працює швидше, значить, x = 8. Тоді час t_1 (його зображує відрізок AM) дорівнює 20 год, а час x_2 (його зображує відрізок MK) дорівнює 30 год.

Відповідь: 20 год. і 30 год.

У задачах 4 і 5 геометричний метод розв`язання є інтеграцією графічного методу, методу подібності трикутників і методу рівнянь і нерівностей.

Інтеграція алгебраїчного та геометричного методів дозволяє іноді оригінально та швидко вирішити досить складну (в алгебраїчному сенсі) задачу. Наведемо приклад.

Задача 6. Син вибіг зі школи о 17.00, за кілька хвилин батько вийшов із дому до школи. Син прибіг додому за 4 хвилини після того, як батько вийшов з дому. Батько прийшов до школи о 17.10 того ж дня. Яку частину шляху син пробіг до зустрічі із батьком? (Швидкості батька та сина вважати постійними).

Розв'яжемо цю задачу, виділяючи етапи розв`язання.

Розв`язання

1 етап (переклад задачі на геометричну мову).

OB – графік руху сина (рис. 6). CD – графік руху батька. Треба знайти відношення MN: NK.

II етап (задачі геометричною мовою).

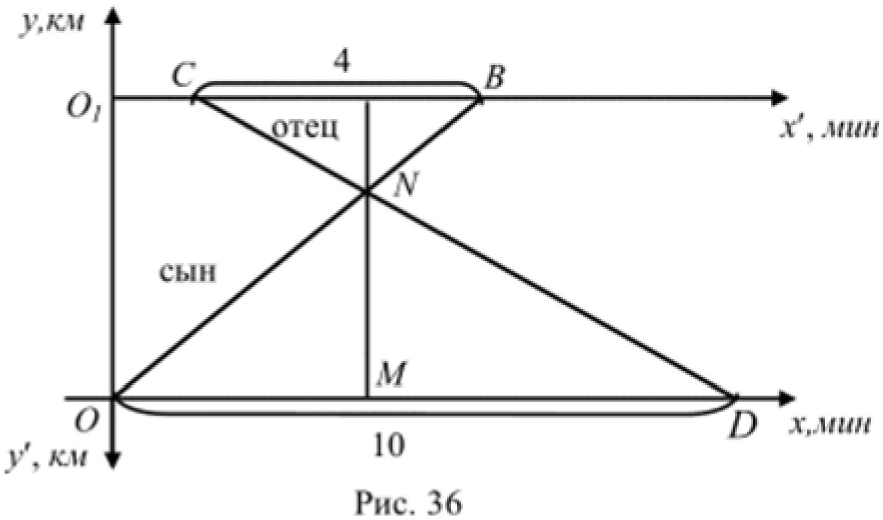

Рис. 36

$\Delta ODN \sim \Delta BNC$ (за I ознакою), тому $\frac{CB}{OD}=\frac{NB}{NO}=\frac{CN}{ND}=\frac{2}{5}$.

Алгебраїчний метод розв'язання задачі призводить до системи рівнянь:

$$\begin{cases} y\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)=\frac{1}{15}, \\ x\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)=\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{x}{x+y}=\frac{5}{7},$$

де 5 км пройшов до зустрічі син, а 7 км пройшов до зустрічі батько.

Запитання та задачі

1. Як трактується поняття "текстова задача"? Назвіть основні компоненти.
2. Яка основна особливість текстових задач?
3. Які існують методи розв'язання текстових задач? Охарактеризуйте їх.
4. Що розуміється під геометричним методом розв'язання текстових задач? У чому перевага перед іншими методами?
5. Яка пропедевтична робота необхідна для навчання учнів розв'язанню текстових задач? Проаналізуйте підручники з математики для 5-6 класів різних авторів. Чи містяться у них вправи, створені задля пропедевтики алгебраїчного і геометричного методів розв'язання текстових задач? Наведіть відповідні приклади.
6. Які типи текстових задач розв`язують учні у 5-6 класах? Які методи розв`язання найбільше тут використовуються?
7. Які види задач на відсотки вивчаються у 5 класі? Наведіть приклади. Яким чином вирішуються ці задачі?
8. Охарактеризуйте етапи розв'язання текстового завдання.
9. Які існують форми запису розв'язання текстової задачі?
10. Знайдіть у підручниках алгебри задачі, які розв'язуються геометричним методом: а) за допомогою лінійної діаграми; б) за допомогою двовимірної діаграми; в) з допомогою графіків. Оформіть запис розв'язання цих задач у зошитах.
11. Що розуміється під інтеграцією алгебраїчного та геометричного методів розв'язання текстової задачі?

Рекомендована література

1. Бевз В.Г., Васильєва Д.В. Збірник завдань з математики ДПА 2020, Харків: "Освіта", 2020. 80 с.
2. Березняк М.В. Підсумкові контрольні роботи Математика 9 клас. Тернопіль: "Підручники і Посібники", 2019. 64 с.
3. Гарнагіна І.А., Як навчити розв'язувати задачі, Математика в школах України, 2008, № 27, С.7
4. Глущенко Л., Розв'язування текстових задач, Математика, 2008, № 31-32. С. 22-23
5. Захарченко Н. М., Текстові задачі в завданнях ЗНО, Електроний ресурс. Доступно: https://maimo.elit.sumdu.edu.ua/images/stories/docs/tekstovyye-zadachi.pdf
6. Істер О.С. Математика 5 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти, 2018. 288 с.
7. Істер О.С. Математика 6 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти, 2014. 296 с.
8. Істер О.С. Математика 7 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти, 2015. 256 с.
9. Істер О.С. Математика 8 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти, 2016. 272 с.
10. Істер О.С. Математика 9 клас: підруч. для заклад. загальн. середн. освіти, 2017. 264 с.
11. Істер О.С., Єргіна О.В. Збірник ДПА 2018 з математики. 9 клас, 2017. 33 с.
12. Істер О.С., Єргіна О.В. Збірник ДПА 2019 з математики. 9 клас, 2019. 41 с.
13. Колячин Ю.М. Оганесян В.А. Учись решать задачи. М.: Просвещение, 1980. 96 с.

14. Лук'янова С.М., Розв'язування текстових задач арифметичним способом: 5-6 клас, 2006. 128 с. 15. Лук'янова С.М., Текстові задачі на уроках і в позаурочний час: алгебра: 7-9 класи, 2012. 125 с.

15. Метод розв'язання задач з відсотками Електроний ресурс, Доступно: http://ua.onlinemschool.com/math/library/percent/percent3/

16. Михайленко Л. Ф., Ковальчук М. Б., Розв'язування текстових задач як засіб формування математичної компетентності старшокласників, Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми, 2016, Вип.46. С.65-69.

17. Навчальні програми, підручники та навчально-методичні посібники, рекомендовані МОН України. Елекстроний ресурс. Доступно: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogramipidruchniki-ta-navchalno-metodichni-posibnikirekomendovani-mon.

18. Нова українська школа. концептуальні засади реформування середньої школи, 2016, Електроний ресурс. Доступно: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainskashkola-compressed.pdf

19. Про схвалення концепції реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти "Нова українська школа" на період до 2029 року Електроний ресурс: http://www.nmc.od.ua/wp- 82 content/uploads/2017/02/%D0%9A%D0%9E%D0%9D%D0%A6%D0%95%D0%9F%D0%A6%D0%86%D0%AF.pdf

20. Романишин І. Я. Математика, Методика роботи над текстовими задачами, 2002, 152 с.

21. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: підручник, 2006. 582 с.

22. Ткаченко С., Задачі з нестандартними умовами, Розвиток критичного мислення учнів на уроках математики, Студентський науковий методичний збірник, Випуск 8, 2018, 293 с.

23. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи. Пособие для учащихся. М. : Просвещение, 1984. 175 с.

24. Шелехова Л.В. Сюжетная задача как объект изучения. Електроний ресурс. Доступно: http://cyberleninka.ru/article/n/syuzhetnaya-zadacha-kakobektizucheniya