

Міністерство освіти і науки України
Державний заклад «Південноукраїнський національний
педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»
Фізико-математичний факультет

Бойко Ольга Павлівна
Пивоварчик Вячеслав Миколайович

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ГРАФІВ
Тексти лекцій модулю «Основи теорії
графів» навчальної дисципліни «Дискретна
математика» для студентів 1 курсу
спеціальностей 014 Середня освіта
(Інформатика), 014 Середня освіта
(Математика).

Одеса – 2022

УДК: 519.1+004.02

Друкується за рішенням вченої ради Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» (протокол від жовтня 2022 року).

Вступ до теорії графів: тексти лекцій модулю «Основи теорії графів» навчальної дисципліни «Дискретна математика» для студентів 1 курсу спеціальностей 014 Середня освіта (Інформатика), 014 Середня освіта (Математика).

Рецензенти:

Лесечко Олександр Васильович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури.

Мазурок Тетяна Леонідівна, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та інформатики Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського.

Тексти лекцій з навчального курсу «Дискретна математика» (Вступ до теорії графів) – це навчальне видання для студентів з методики засвоєння теоретичної частини модулю «Елементи теорії графів» навчальної дисципліни «Дискретна математика» для студентів 1 курсу спеціальностей 014 Середня освіта (Інформатика), 014 Середня освіта (Математика).

Поданий у методичних рекомендаціях матеріал висвітлює питання розділу теорія графів, що формують уявлення про дискретність у сучасній науці, є фундаментом дискретної математики і важливою ланкою математичної освіти для спеціалістів у галузі прикладної математики та інформатики.

Наявність розроблених прикладів дає можливість студентам акцентувати увагу на принципах логічних побудов, способах опису графів, на ефективності застосування апарату теорії графів і теорії множин для вирішення прикладних задач.

Ключові слова: дискретна математика, теорія графів, дерево.

ЗМІСТ

1. Поняття графу	5
2. Маршрути в графах.	9
3. Дерева.	10
4. Остовні графи	14
5. Дводольні графи	16
6. Планарність	19
7. Многогранники	24
Література	29

1. Поняття графу

Творцем теорії графів, вважають Леонарда Ейлера. Для розв'язування серйозних математичних задач Л. Ейлер використовував наочні рисунки. Одна з таких задач поклала початок зовсім новій галузі досліджень, що виросла згодом у самостійний розділ математики – теорію графів, особливість якої у геометричному підході до вивчення об'єктів.

Спочатку теорію графів застосовували переважно до математичних розваг і головоломок. Однак уже в XIX столітті графи почали використовувати для побудови схем електричних ланцюгів і молекулярних схем. Саме відтоді граф стає однією з найпоширеніших і найпопулярніших математичних моделей у багатьох сферах науки і техніки. Картинка у вигляді набору точок на площині і ліній, що сполучають деякі з точок, стала зручною і наочною формою зображення найрізноманітніших об'єктів, процесів та явищ. Наприклад, у вигляді графа можуть бути зображені електричні, транспортні, інформаційні і комп'ютерні мережі; карти автомобільних, залізничних і повітряних шляхів, газо- і нафтопроводів; моделі кристалів; структури молекул хімічних речовин; моделі ігор; лабіринти; плани виконання певних робіт (розклади); генеалогічні дерева тощо.

Отже, теорія графів сьогодні – це розділ дискретної математики, особливістю якого є геометричний підхід до вивчення об'єктів. Основне поняття теорії – граф.

Означення 1. Граф складається зі скінченної множини V вершин і набору E пар вершин. Елементи набору E називають ребрами. Вершини зображуються точками, а ребра - лініями (не обов'язково прямими), що з'єднують пари точок. Якщо ребро e з'єднує вершини x і y , то x і y називають суміжними, а ребро, яке їх з'єднує - інцидентним з x і y . Ребро, що зв'язує вершину з нею самою, називають петлею

Приклад 1. Граф із множиною вершин $V = \{a, b, c\}$ і множиною ребер $E = \{(a, b), (b, c)\}$ може бути зображеним, як показано на рис.1 або рис 2.

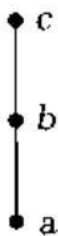


Рис. 1

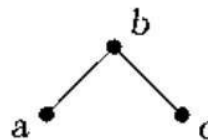


Рис 2

Граф, зображений на Рис. 3 має вершини $V = \{a, b, c, d, e\}$ та ребра $E = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,b), (b,e), (e,a)\}$

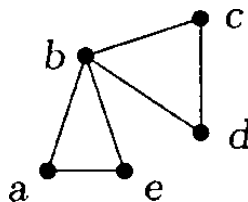


Рис. 3

Приклад 2. (Сім мостів Кьонігсберга). На початку 17-го століття в місті Кьонігсберг в Східній Пруссії (зараз Калінінград) було 7 мостів. Розповідали, що жителі намагалися, вийшовши з дому, пройшовши рівно один раз через кожен міст, повернутися додому. Їм це не вдалося і вони запитали, чи можливо це, у Леонарда Ейлера. Доведення неможливості, дане Ейлером, вважають початком теорії графів. Ейлер зробив наступне. Він звів малюнок 4 (a) до простої діаграми 4 (b)

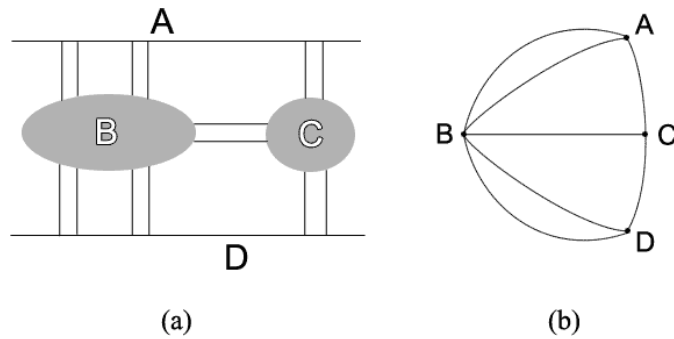


Рис. 4

де кожен масив землі представлений точкою (вершиною графу), а кожен міст - лінією (ребром). Якби шуканий шлях існував, то ми кожен раз потрапляли б у вершину вздовж одного ребра, а друге ребро використовувалося б для шляху з вершини. Тоді кожна вершина повинна була б мати парне число ребер, приєднаних до неї. Але це не так, а значить такий шлях неможливий. Рис. 4 (б) – ще один приклад графу. Він має 4 вершини і 7 ребер.

Приклад 3. (Задача обслуговування). Старовинна задача: розглядаються 3 будинки А, В, С, які повинні бути з'єднані з кожною зі служб (газ, вода, електрика), причому проводи не повинні перетинатися. Іншими словами, чи може малюнок

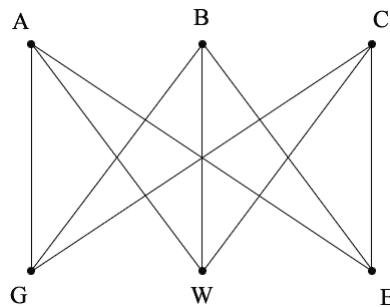


Рис. 5.

бути перемальований так, щоб лінії не перетиналися? Цей малюнок - ще один приклад графу.

Зауважимо, що ми називаємо E набором пар, а не множиною пар, щоб допустити повторення ребер. Якщо два або більше ребер з'єднують одну й ту

саму пару вершин, вони називаються кратними ребрами. Наприклад, граф, зображений на рис. 4 (b), має дві пари кратних ребер. Граф малюнку 5 не має петель і кратних ребер. Він називається простим. Кількість ребер, інцидентних вершині v називається степенем або валентністю вершини v і позначається $d(v)$. Друга назва – валентність, пов'язана з тим, що графи з'явилися при зображенні молекул у хімії. Наприклад, етан C_2H_6 можна уявити, як це зроблено на рисунку 7, де внутрішні вершини валентності 4 представляють атоми вуглецю, а решта 6 вершин – атоми водню. Вершина степеня 1 називається висячою, а степеня 0 – ізольованою. Якщо граф містить петлю, то петля вносить доданок 2 в степінь відповідної вершини.

Приклад 4. У графі, що на рис. 6, вершини a і c є суміжними, а e_1, e_2, e_3 – суміжні ребра.

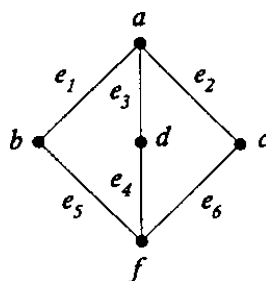


Рис. 6

Однак, вершини a і f не є суміжними, а e_2, e_5 не є суміжними ребрами. Вершини b, c, d мають степінь 2, вершини a і f – степінь 3.

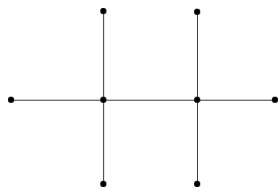


Рис. 7

Наступний результат (теорему 1) іноді називають леммою про рукостискання: число потисків рук дорівнює подвоєному числу учасників вечірки. Звідси відразу отримуємо наслідок 1.

Теорема 1. Сума степенів вершин графу дорівнює подвоєній кількості ребер.

Наслідок 1. Сума степенів вершин графу – парне число.

Приклад 5. Повний граф K_n це простий граф з n вершинами, в якому кожна пара вершин пов'язана ребром. Оскільки в повному графі кожна вершина порядку $n-1$, число q ребер задовольняє умові $2q = n(n-1)$, тобто що і очікувалося, так як q - число способів вибору 2 з n вершин, тобто $C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$.

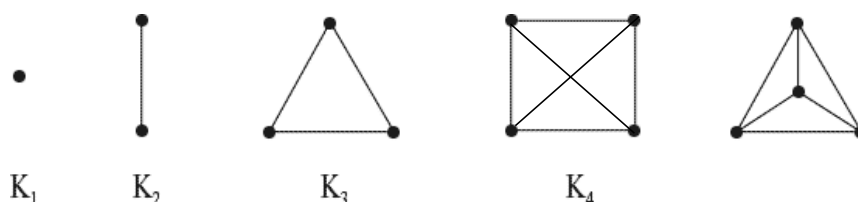


Рис. 9

Графи K_n ($n \leq 4$) показані на рисунку 8. Позначення прийнято в честь польського математика К. Куратовського (1896-1980), якому належить важлива теорема (критерій планарності), яку ми розглянемо нижче.

Відзначимо, що граф K_4 містить в собі граф K_3 . Ідея про граф, що містить в собі інший граф, лежить у наступному означенні.

Означення 2. Граф H називається підграфом графу G , якщо множина вершин H є підмножиною множини вершин G , а множина ребер H є підмножиною множини ребер G .

Таким чином, наприклад, K_m є підграфом графу K_n , якщо $m < n$. Нарешті, в цьому розділі ми введемо кілька позначень. Через p і q позначимо число вершин і ребер, відповідно, а під (p, q) будемо мати на увазі граф з q ребрами і p вершинами. Так, наприклад, K_4 є $(4,6)$ - графом.

2. Маршрути в графах

Багато важливих застосувань теорії графів пов'язані з рухом уздовж графу в сенсі переходу від однієї вершини до іншої вздовж ребер, інцидентних цим вершинам. Введемо відповідні означення .

Означення 3. Маршрут на графі визначається послідовністю ребер наступної форми $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n$. Цей маршрут, іноді, в простому графі може бути більш компактно описаний так $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$. Відзначимо, що маршрут має напрямок: v_0 називається початковою, а v_n - кінцевою вершиною. Число n ребер називається довжиною маршруту. Маршрут, всі ребра якого - різні, називається ланцюгом. Ланцюг, у якому всі вершини різні, крім, можливо, $v_0 = v_n$, називається простим. Ланцюг (простий ланцюг) з $v_0 = v_n$ називається циклом (простим циклом).

Приклад 6. На рисунку 9 $z \rightarrow u \rightarrow y \rightarrow v \rightarrow u$ ланцюг, але не простий, $u \rightarrow y \rightarrow w \rightarrow v$ простий ланцюг довжини 3, $u \rightarrow y \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow u$ простий цикл довжини 4.

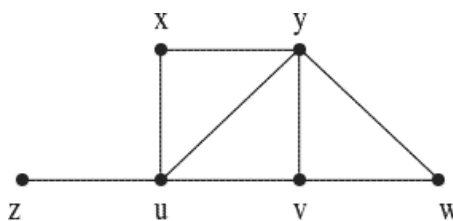


Рис. 9.

Природньо ототожнювати цикли $u \rightarrow y \rightarrow v \rightarrow u$ та $y \rightarrow v \rightarrow u \rightarrow y$. Таким чином, у багатьох випадках задають тільки вершини циклу. Ми будемо цикл довжини n позначати C_n (n вершин і n ребер, $n > 1$), P_n - простий ланцюг довжини $n-1$ (тобто n вершин). Так, наприклад, $P_2 = K_2$, $C_3 = K_3$.

Означення 4. Граф називається зв'язним, якщо для будь-якої пари вершин x, y знайдеться простий ланцюг з x в y . Якщо граф не є зв'язним, то його зв'язні частини називаються компонентами.

Приклад 7. Граф на рис. 10 не є зв'язним, оскільки немає маршруту, наприклад, від вершини v_0 до вершини v_3 , або від вершини v_2 до v_4 .

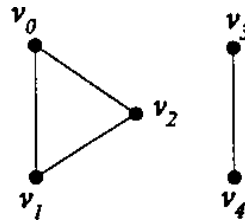


Рис. 10

3. Деревя

Означення 5. Деревом називається зв'язний простий граф без циклів.

Означення 6. Довільний ациклічний граф називається лісом. Очевидно, що зв'язними компонентами лісу є дерева, і тому, кожен ліс може бути зображений у вигляді прямої суми дерев.

Приклад 8. Граф, зображений на рис. 11 є прикладом дерева.

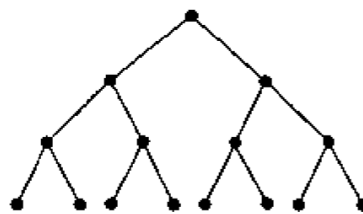


Рис. 11. Граф, що є деревом

Граф, зображений на рис 12 не є деревом, оскільки містить цикл.

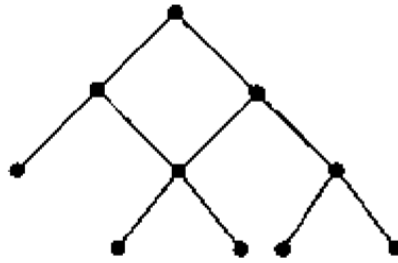


Рис. 12. Граф, що не є деревом

Граф, зображений на рис. 13 є лісом.

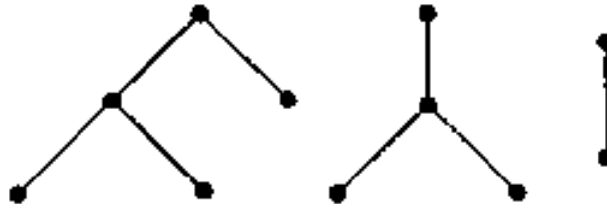


Рис. 13. Приклад лісу

Наприклад, граф етану на рис. 11 є деревом, також як і всі P_n . Зауважимо, що у графа етану $p = 8$ і $q = 7$, в той час як P_n має $p = n$ і $q = n - 1$, і в обох випадках $p - q = 1$. Ця властивість характерна для тих зв'язних графів, які є деревами. Для доведення цього доведемо спочатку таку теорему.

Теорема 2. Якщо T дерево з $p \geq 2$ вершинами, то T містить не менше, як 2 висячих вершини.

Доведення. Так як T має p вершин, всі прості ланцюги в T повинні мати довжини менше p . Тому, існує найдовший простий ланцюг в T , скажімо $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_r$. Ми стверджуємо, що v_1 і v_r мають степінь 1. Якщо степінь v_1 більша 1, то існує ребро $v_1 v_0$ де v_0 не входить у множину v_2, \dots, v_r (інакше був би цикл) так, що $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_r$ простий ланцюг, довший за ланцюг $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_r$, тобто ми прийшли до протиріччя. Отже, v_1 має степінь 1. Аналогічно доводиться, що і v_r має степінь 1.

Теорема 3. Нехай T простий граф з p вершинами. Тоді наступні твердження еквівалентні:

- 1) T - дерево;
- 2) T має $p - 1$ ребро і не має циклів;
- 3) T має $p - 1$ ребро і є зв'язним.

Доведення. 1) \Rightarrow 2). Доведемо, що всі дерева з p вершинами мають $p-1$ ребро. Це очевидно для $p = 1$. Нехай це справедливо для всіх дерев з $k \geq 1$ вершинами і нехай T дерево з $k + 1$ вершинами. Тоді за теоремою 2 дерево T має висячу вершину, яку позначимо через w . Видалимо w і інцидентне з нею ребро і отримаємо дерево T' з k вершинами. За індукційним припущенням T' має $k - 1$ ребро. Це означає, що T має $(k - 1) + 1 = k$ ребер.

2) \Rightarrow 3). Нехай T має $p-1$ ребро і не має циклів і припустимо, що T складається з $t \geq 1$ компонент T_1, T_2, \dots, T_t , кожна з котрих не має циклів і повинна бути деревом (бо кожний T_i простий граф без циклів). Позначимо через p_i кількість вершин у T_i . Тоді $\sum_i p_i = p$ і число ребер в T дорівнює $\sum_i (p_i - 1) = p - t$ (згідно з 1) \Rightarrow 2)), тобто $t=1$, що означає зв'язність T .

3) \Rightarrow 1) Нехай T має $p - 1$ ребро, але не є деревом. Тоді T має цикл. Видаленням ребер з циклів, поки не залишиться циклів, ми не порушимо зв'язності і отримаємо граф, який є деревом. Це дерево має p вершин і $q < p-1$ ребер, що суперечить 1) \Rightarrow 2).

Ця теорема дозволяє встановити "деревообразність" деяких молекул.

Приклад 9. Довести, що молекули виду $C_n H_{2n+2}$ мають "деревообразну" форму.

Розв'язання. Кожна молекула подана у вигляді графа з $n + (2n + 2) = 3n + 2$ вершинами. З цих вершин n мають ступінь 4 і $2n + 2$ мають ступінь 1. За теоремою 1

$$2q = 4n + 2n + 2 = 6n + 2,$$

звідки $q = 3n + 1$, що дорівнює $p-1$. Оскільки молекула - зв'язна, то по теоремі 3 вона повинна бути деревом.

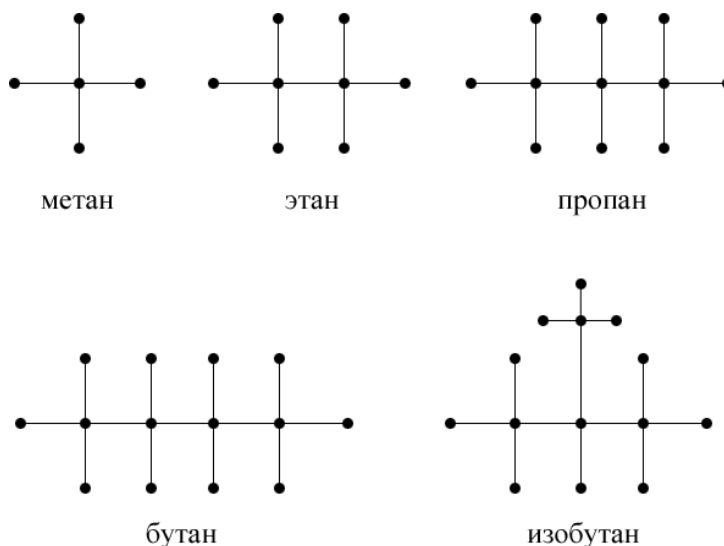


Рис 14. Алкани

Відзначимо, що C_4H_{10} відповідають два "різних" дерева.

Означення 7. Два графа G_1 і G_2 ізоморфні, якщо вершини графів можна занумерувати тими ж самими номерами так, що для будь-якої пари номерів u, v число ребер, що сполучають їх, однакове в G_1 і G_2 .

Приклад 10

1. Два останніх графа малюнку 8 ізоморфні.
2. Графи бутану і ізобутану на рис. 14 не ізоморфні. У ізобутану є одна вершина степеня 4, яка пов'язана з усіма іншими вершинами степеня 4.

З цим пов'язана така задача: знайти $T(n)$ - число неізоморфних дерев з n вершинами. Маємо $T(1) = T(2) = T(3) = 1$ і можна перевірити, що $T(4) = 2$, $T(5) = 3$, $T(6) = 6$. Немає простої формули для $T(n)$, хоча $T(n)$ є коефіцієнтами у відомому, але дуже складному ряді. Однак, існує прекрасна формула для числа дерев з n занумерованими вершинами. Так, наприклад, $T(3) = 1$, але існує 3 дерева з вершинами, занумерованих 1, 2, 3, як показано на рис. 15.

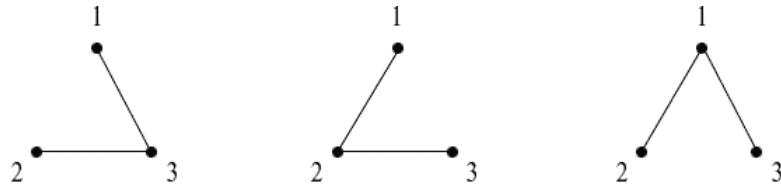


Рис. 15

В 1889 році Кэли показав, що число нумерованих дерев с n вершинами дорівнює n^{n-2} .

4. Остовні графи

Нехай, зв'язний граф описує залізничну мережу. Вершини відповідають містам, а ребра - ділянках колії. Бажано позбутися від зайвих ділянок. При цьому система повинна пов'язувати всі міста. Потрібно знайти дерево, яке є підграфом вихідного графа, що містить всі вершини.

Означення 8. Остовним деревом зв'язного графу називається підграф, що є деревом і містить всі вершини вихідного графу.

Приклад 11

- 1) K_3 має три остовних дерева, що показано на рис. 15.
- 2) K_4 має $4^2 = 16$ остовних дерев.
- 3) на рис. 9 остовним деревом є, наприклад, граф, який складається з ребер zu, ux, uv, vy, vw .

У разі зваженого графу, тобто, коли кожне ребро e має вагу $w(e)$, де $w(e)$ - позитивне число (наприклад, довжина ребра e), може виникнути необхідність знайти остовне дерево з мінімальною вагою.

Поглинаючий (жадібний) алгоритм

Іноді цей алгоритм ще називають алгоритмом **Крускала**.

Процедура:

1. Оберемо ребро з найменшою вагою.

2. На кожному етапі обираємо ще не обране ребро найменшої ваги, включення якого не створює циклу.
3. Продовжуємо, поки не отримаємо остовне дерево. (Якщо граф має p вершин, то процедура закінчується, коли обрано $p-1$ ребро).

Приклад 12. Застосуємо поглинаючий алгоритм до графу рисунка 16.

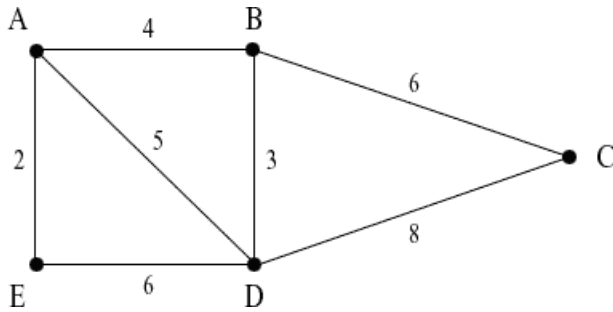


Рис. 16

Розв'язання. Оберемо ребро AE (вага 2). Потім BD (вага 3), потім AB (вага 4). Ми не можемо обрати тепер AD (вага 5) через виникнення циклу. Також не можна обрати DE . Обираємо BC (6). Ребра AE, AB, BD, BC утворюють остовне дерево мінімальної ваги: $2 + 3 + 4 + 6 = 15$.

Припустимо, що поглинаючий алгоритм призводить до дерева T , але що є інше остовне дерево U з вагою, меншою, ніж вага T . Так як $T \neq U$ і обидва мають однакову кількість ребер, то T повинно мати ребро, якого немає в U . Нехай e - одне з таких ребер, при цьому, найменшої (серед них) ваги. Додавання e до U утворює цикл C , який містить e і e' , де $e' \notin T$. Але $w(e') \geq w(e)$, оскільки в іншому випадку e' було б обрано поглинаючим алгоритмом замість e . Якщо прибрати e' з C , отримуємо нове каркасне дерево V таке, що $w(V) \leq w(U)$ і V має на одно спільне з T ребро більше, ніж U . Повторюючи цей процес, прибираючи по одному ребру, ми, нарешті, перейдемо від U до T . Таким чином, отримуємо $w(T) \leq w(U) \leq w(T)$.

Алгоритм поглинання ("жадібний" алгоритм) називається так тому, що він "жадібно" мінімізує вагу на кожному етапі, ігноруючи можливі в майбутньому ускладнення. Недолік цього алгоритму полягає в труднощі визначення, чи не виникає циклу при виборі чергового ребра на кожному етапі. (Ця трудність виникає, якщо граф великий). Ця проблема не виникає, якщо використовувати трохи змінений алгоритм згідно Приму (1957). В його алгоритмі граф, який конструюють, весь час залишається деревом на кожному етапі. Вибираємо ребро найменшої ваги, але так, щоб у результаті було дерево.

Алгоритм Прима

1. Обираємо будь-яку вершину, потім обираємо ребро найменшої ваги з тих, які інцидентні з обраною вершиною.
2. На кожному етапі обираємо ребро найменшої ваги, але таке, щоб воно єдиною вже включеною вершиною з ще не включеною вершиною.
3. Продовжуємо, поки не включимо всі вершини.

Приклад 13. (знову) (см. Рис. 16).

Почнемо з вершини В. Обираємо ВD (3), потім ВА (4), потім АЕ (2), потім ВС (6) і отримуємо той самий результат, що і "жадібним" алгоритмом.

Третій алгоритм діє так: прибираємо ребра вихідного графу, руйнуючи цикли, поки залишиться остовне дерево. На кожному етапі прибираємо ребро найбільшої ваги, при цьому не повинна порушуватися зв'язність графу. У прикладі 13 прибираємо DC, потім DE, потім AD. Цей підхід буде більш швидким, ніж інші, якщо число ребер мале.

5. Дводольні графи

Означення 9. Граф називається дводольним, якщо множину вершин V можна розділити на два множини B і W таким чином, що кожне ребро з'єднує

вершину з B з вершиною з W . Поділ $V = B \cup W$ називається дводольним поділом вершин.

Приклад 14. Дводольні графи.

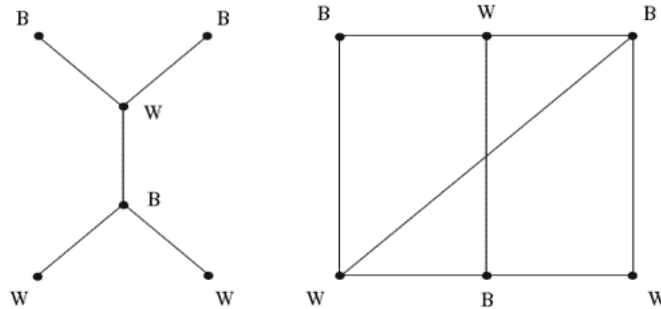


Рис. 17

Якщо інтерпретувати B і W як чорні і білі, то ми бачимо, що граф дводольний тоді і тільки тоді, коли вершини можуть бути пофарбовані в два кольори так, що жодне ребро не з'єднує вершини однакового кольору. Тому, дводольні графи іноді називають двокольоровими.

Приклад 15. Цикл C_n – дводольний тоді і тільки тоді, коли n – парне.

Теорема 4. Зв'язний граф є дводольним тоді і тільки тоді, коли він не містить циклів непарної довжини.

Доведення. Якщо граф G містить непарний цикл (цикл непарної довжини), то він, вочевидь, не дводольний. Нехай тепер G не містить непарних циклів. Покажемо, як можна розфарбувати вершини B і W .

Оберемо будь-яку вершину v графа G , а поділ множини V на $B \cup W$ робимо наступним чином:

$$B = \{u \in V : \text{найкоротший маршрут з } v \text{ в } u \text{ має парну довжину} \}$$

$$W = \{u \in V : \text{найкоротший маршрут з } v \text{ в } u \text{ має непарну довжину} \}.$$

Тоді $v \in B$, так як 0 – парне. Нам потрібно показати, що жодне ребро з G не має обох кінців в W . Припустимо, що є ребро xu з $x \in B$ і $y \in B$. Тоді, позначаючи через $d(v_1, v_2)$ довжину найкоротшого шляху з v_1 до v_2 , ми маємо

$d(v, x) = 2m$ і $d(v, y) = 2n$ для деяких цілих m і n . Але існує маршрут з v в y через x довжини $2m + 1$, отже $2n \leq 2m + 1$. Аналогічно, $2m \leq 2n + 1$. Тому, $m = n$.

Позначимо найкоротші шляхи з v до x і до y через $P(x)$ і $P(y)$, відповідно. Оскільки $m = n$, обидва шляхи $P(x)$ і $P(y)$ мають однакову довжину. Позначимо через w останню спільну вершину шляхів $P(x)$ і $P(y)$ (можливо, $w = v$). Тоді частина $P(x)$ з w до x і частина $P(y)$ з w до y повинні мати рівну довжину. Оскільки при цьому вони мають тільки одну спільну вершину w , вони, доповнені ребром wy , утворюють цикл непарної довжини. Але за умовою G не має непарних циклів і припущення про існування ребра wy - невірне. Отже, немає ребер з обома кінцями в B . Аналогічно, немає і ребер з обома кінцями в W .

Наслідок 2. Все дерева – дводольні.

Означення 10. (повного дводольного графа). Простий дводольний граф з набором вершин $V = B \cup W$ називається повним, якщо кожна вершина з B пов'язана з кожною вершиною з W . Якщо $|B| = m$ і $|W| = n$, то такий граф позначається $K_{m,n}$ або $K_{n,m}$.

Наприклад, граф обслуговування з рис. 5 є графом $K_{3,3}$, а граф молекули метану з рис. 14 є графом $K_{1,4}$.

Зрозуміло, що $K_{m,n}$ має $m+n$ вершин і mn ребер, m вершин мають ступень n і n вершин мають ступень m .

Повні графи K_n і повні дводольні графи $K_{m,n}$ грають важливу роль в теорії графів, зокрема при вивченні планарності, до чого ми й прямуємо.

6. Планарність

Граф називається планарним, якщо він може бути намальований на площині без перетину ребер. Проблема планарності вже виникала, коли ми розглядали задачу обслуговування, яка може бути сформульована так: чи є $K_{3,3}$ планарним?

Якщо граф планарний, то будь-який рисунок його без перетину ребер називається плоским графом. Наприклад, K_4 – планарний, як показано на рис. 8. Другий рисунок K_4 – плоский граф.

Планарні графи виникають природним чином в задачі чотирьох кольорів. При розфарбовуванні географічної карти природно фарбувати сусідні країни в різні кольори. Стало загально прийнятим вважати, що чотирьох кольорів досить для розмалювання будь-якої карти. Загальне доведення було запропоновано А. Кемпе в 1879 році. Через 10 років, однак, Хейвуд знайшов помилку в доведенні Кемпе і замість теореми про чотири кольори залишилася гіпотеза про чотири кольори. Нарешті, в 1976 р. справедливість гіпотези була доведена К. Апелем і В. Хакеном.

Задача розфарбовування карти може бути зведена до задачі розфарбування вершин планарного графу. Якщо дана карта, то ми можемо уявити кожну країну як вершину і з'єднати дві вершини ребром в тому (і тільки тому) випадку, коли відповідні країни мають спільний кордон. Наприклад, на рис. 18 зображена карта і відповідний планарний граф.

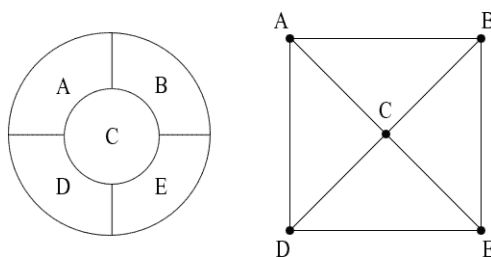


Рис. 18.

Таким чином, завдання зводиться до задачі фарбування вершин планарного графу в чотири кольори так, що суміжні вершини пофарбовані в різні кольори.

Будь-який плоский граф, очевидно, розділяє площину на сусідні області, одна з яких - нескінченна. Основний результат про плоскі графи називається формулою Ейлера. Ейлер спочатку отримав цю формулу, розглядаючи многогранники (поліедри) і ми також почнемо з них.

Теорема 5 (Формула Ейлера). Будь-який зв'язний плоский (p, q) - граф розділяє площину на r областей, де

$$p - q + r = 2.$$

Доведення. Якщо у графі є цикл, то приберемо одне ребро з нього, але так, щоб граф залишився зв'язним. Тоді q і r зменшаться на 1 (так як дві області зливаються), при цьому p не зміниться. Отриманий таким чином граф має $p' = p$, $q' = q - 1$, $r' = r - 1$, звідки $p' - q' + r' = p - q + r$. Повторюємо цю процедуру, поки не залишиться циклів. Отриманий граф буде деревом з $p'' - q'' + r'' = p - (p-1) + 1 = 2$.

Приклад 17. Плоский граф на рисунку 18 має

$$p - q + r = 5 - 8 + 5 = 2.$$

Є 4 скінченні області і одна нескінченна.

Означимо степінь області плоского графа як число ребер при обході кордону області .

Приклад 18. На рисунку 19 області 3 і 4 мають степінь 3. Нескінченна область 1 має ступінь 5. Область 2 має степінь 9 (зауважимо, що одне ребро тут враховується двічі).

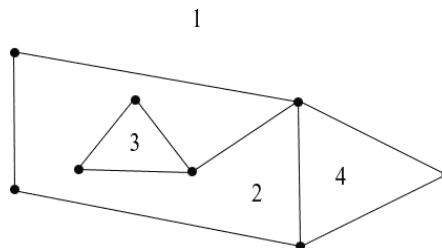


Рис. 19.

На додаток маємо наступну теорему схожу на лему про рукостискання.

Теорема 6. У зв'язному плоскому графі $2q =$ сумі степеней областей.

Доведення. Кожне ребро входить двічі в границі областей.

Теорема 7. Граф K_4 - планарний граф тільки при $n \leq 4$.

Доведення. Досить показати, що K_5 – не планарний. K_5 має $p = 5$, $q = C_5^2 = 10$. Тому, якщо плоске зображення K_5 існує, то воно повинно мати $r = 2 - 5 + 10 = 7$ областей (за формулою Ейлера). Кожна область повинна мати ступінь ≥ 3 . Тепер за теоремою 3.8 : $20 = 2q \geq 7 \cdot 3 = 21$. Протиріччя.

Теорема 8. Граф $K_{3,3}$ – не планарний.

Доведення. Граф $K_{3,3}$ має $p = 6$ і $q = 9$, тому, якщо плоске зображення існує, то воно має $r = 2 - 6 + 9 = 5$ областей. Оскільки, $K_{3,3}$ - простий дводольний, він не може мати циклів довжини 2 і непарних циклів. Це означає, що степені областей ≥ 4 . Таким чином, $18 = 2q \geq 4 \cdot 5 = 20$. Протиріччя.

Наслідок 3.

$K_{m,n}$ - планарний $\Leftrightarrow \min(m,n) \leq 2$.

Техніка підрахунку сум степенів областей вельми корисна. Її можна застосувати до знаменитого графу Петерсена, зображеного на рисунку 20.

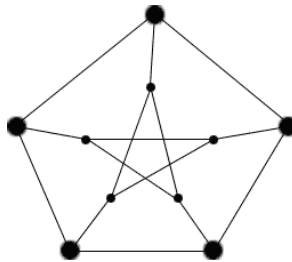


Рис. 20.

Приклад 19. Довести, що граф Петерсена не планарний.

Розв'язання. Припустимо існування плоского зображення графу Петерсена. Оскільки $p = 10$ і $q = 15$, маємо $r = 2 - 10 + 15 = 7$. З рисунку видно, що найкоротший цикл має довжину 5. Значить, за теоремою 6

$30 = 2q = 7 \cdot 5 = 35$. Протиріччя.

Теорема Куратовського

Що робить граф не планарним? Ясно, що, якщо він містить K_5 або $K_{3,3}$ як підграф, то він не планарний. У 1930 році польський математик Куратовський довів, що тільки наявність K_5 або $K_{3,3}$ робить граф непланарним.

Щоб роз'яснити це твердження зазначимо таке. Оскільки K_5 - не планарний, то граф, зображений на рисунку 21, також не планарний.

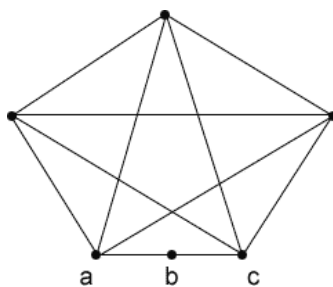


Рис. 21

Інакше ми могли б видалити вершину b з ребра ac і отримати плоске зображення K_5 . Додавання вершини в існуюче ребро називається підрозбиттям. Одне або більше підрозбиттів ребер призводять до підрозбиттю графу.

Теорема 9 (теорема Куратовського). Граф планарний тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфів K_5 або $K_{3,3}$.

Приймемо цю теорему без доведення.

Покажемо, як за допомогою цієї теореми можна довести, що граф Петерсена не планарний. На лівій стороні рисунку 22 розташований граф Петерсена. На правій – той же граф без двох ребер. Цей підграф є підрозбиттям $K_{3,3}$, що ясно при відповідному позначенні вершин.

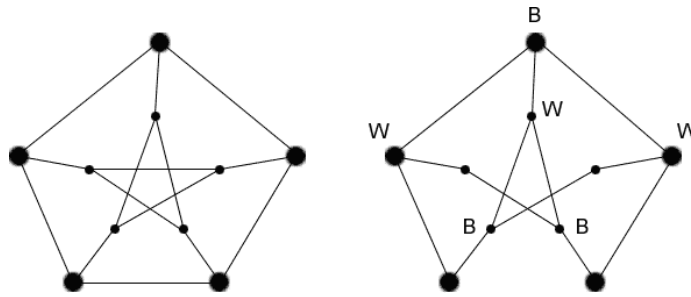


Рис. 22

Хорди кола

Ми закінчимо цей розділ про планарність прикладом застосування формули Ойлера до відомої задачі про хорди кола.

Нехай є n точок, розташованих на колі. Наше завдання з'єднати кожену пару точок хордою так, щоб ніякі три хорди не перетиналися в одній точці. На скільки областей буде розбите коло? Випадки $n = 3, 4, 5$ показані на рисунку 23. Може здатися, що при $n = 6$ кількість таких областей буде 32. Однак, це не так. (Перевірте!)



Рис. 23

Припустимо, що ми маємо n точок і намалювали C_n^2 хорд. Тоді утворюється n областей, що мають дугу кола, як частину границі. Розглянемо тепер інші області. Перетворимо малюнок (вже без дуг) в граф, намалювавши вершини в точках перетину хорд. Скільки точок перетину вийде? По одній на кожену пару хорд, тобто по одній на кожену четвірку вершин, тобто C_n^4 . Таким чином,

отриманий граф має $n + C_n^4$ вершин. Кожна з n вихідних вершин має ступінь $n - 1$, а кожна з нових C_n^4 вершин має ступінь 4. Тоді за лемою про рукостискання

$$2q = n(n - 1) + 4C_n^4,$$

тобто

$$q = C_n^2 + 2C_n^4.$$

Таким чином,

$$r = 2 - p + q = 2 - n - C_n^4 + C_n^2 + 2C_n^4 = 2 - n + C_n^2 + C_n^4.$$

Тут r включає в себе одну нескінченну область, тому, число областей, на які поділено n -кутник, на 1 менше і дорівнює $1 - n + C_n^2 + C_n^4$. Сюди слід додати n криволінійних областей. Таким чином, число областей, на які розділене коло, дорівнює $1 + C_n^2 + C_n^4$

Перевіримо: для $n = 3$ маємо 4, для $n = 4$ маємо 8, для $n = 5$ маємо 16 і для $n = 6$ маємо 31.

7. Многогранники

Многогранником називається об'ємне тіло, обмежене скінченною кількістю мнгокутників. Наприклад, піраміда на рисунку 24 (а) є многогранником з п'ятьма вершинами, п'ятьма гранями (чотирма трикутними і однієї квадратної (основи)) і вісьмома ребрами.

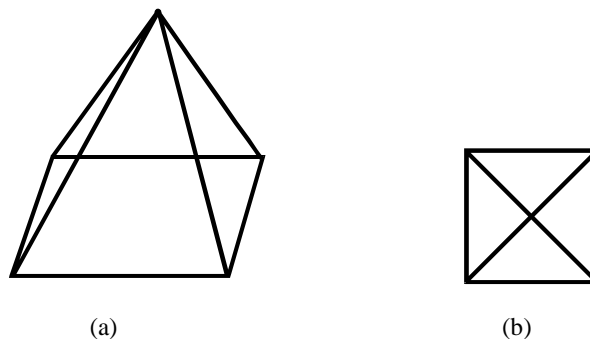


Рис. 24. Піраміда і відповідний плоский граф.

Як було сказано раніше, формула Ойлера вперше виникла при вивченні многогранників для зв'язку числа вершин з числами ребер і граней опуклого многогранника. Многогранник називається опуклим, якщо будь-який відрізок, що з'єднує дві вершини, повністю лежить всередині многогранника. Такий многогранник може бути представлений у вигляді плоского графу, отриманого проєктуванням многогранника на площину. Граф рисунку 24 (в) представляє піраміду. Ми вважаємо, що внутрішня вершина - це верхівка піраміди, а основа його представлено нескінченної областю (ступеня 4).

Куб є прикладом регулярного многогранника. Многогранник називається регулярним, якщо існують цілі числа $m \geq 3$ і $n \geq 3$ такі, що в кожній вершині зустрічаються m граней (або m ребер) і кожна грань обмежена n ребрами. Для куба $m = 3$ і $n = 4$. Опуклі регулярні многогранники називаються многогранниками Платона. Вони розглядалися стародавніми греками, які знали, що існує всього 5 таких многогранників. У наступній теоремі будемо використовувати термінологію теорії графів, переходячи від многогранника до відповідного графу.

Теорема 10. Припустимо, що регулярний многогранник має вершини ступеня m і області ступеня n . Тоді (m, n) - одне з $(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)$. Більш того, існує многогранник Платона, відповідний кожній парі.

Доведення.

Маємо $p - q + r = 2$, де $2q =$ сумі ступенів вершин $= mr$ і

$2q =$ сумі ступенів граней $= nr$. Отже

$$\left(\frac{2}{m} - 1 + \frac{2}{n} \right) q = 2$$

або

$$(2m + 2n - mn)q = 2mn. \tag{x}$$

Звідси

$$2m + 2n - mn > 0$$

або

$$(m - 2)(n - 2) < 4.$$

Отже, $(m - 2)(n - 2) = 1, 2$ або 3 , звідки отримуємо наступні варіанти:

$$m = 3, n = 3 \Rightarrow (m - 2)(n - 2) = 1;$$

$$m = 4, n = 3 \Rightarrow (m - 2)(n - 2) = 2;$$

$$m = 3, n = 4 \Rightarrow (m - 2)(n - 2) = 2;$$

$$m = 5, n = 3 \Rightarrow (m - 2)(n - 2) = 3;$$

$$m = 3, n = 5 \Rightarrow (m - 2)(n - 2) = 3.$$

Для будь-якої можливої пари (m, n) з формули (х) можна знайти q , а потім p і r за формулами $p = \frac{2q}{m}$, $r = \frac{2q}{n}$. У таблиці 1 затабульовані значення і назви відповідних многогранників Платона.

Табл. 1.

m	n	p	q	r	назва
3	3	6	4	4	тетраедр
3	4	12	8	6	куб
4	3	12	6	8	октаедр
3	5	30	20	12	додекаедр
5	3	30	12	20	ікосаедр

Зауважимо, що назви відповідають кількості граней g . П'ять многогранників і їх плоскі граfi показані на рис 25.

Поряд з п'ятьма регулярними многогранниками існують напіврегулярні або архімедові многогранники. Хоча вони були відомі стародавнім грекам, першу згадку про них у літературі знаходимо у Ойлера у 1619 році. Ці многогранники мають більш, ніж один тип граней. Причому кожна вершина має однакову структуру граней навколо себе. Наприклад, усічений куб, отриманий відсіканням всіх кутів куба. Таке тіло має 8 трикутних граней і 6 восьмикутних. При цьому в кожній вершині сходяться дві восьмикутних і одна трикутна грань.

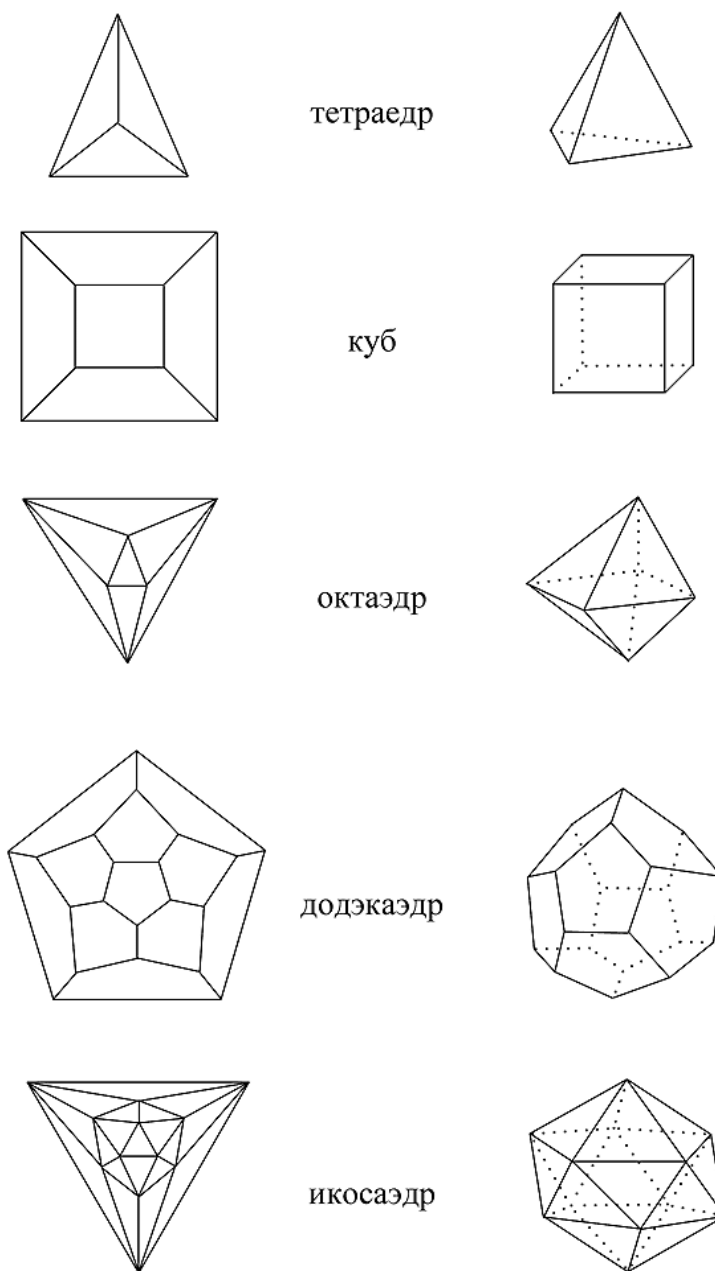


Рис. 25

Приклад 20. Поверхня багатогранника складається з п'ятикутників і шестикутників з трьома гранями, що сходяться в кожній вершині. Показати, що число п'ятикутних граней дорівнює 12.

Розв'язання. Маємо $p - q + r = 2$ і $2q =$ сумі степеней граней $= 3p$. Отже, $2q = 6r - 12$. Позначимо число п'ятикутних граней через x , а число шестикутних через

у. Тоді $r = x + y$ і $2q =$ сумі степеней граней $= 5x + 6y$. Підставляючи ці вирази в $2q = 6r - 12$, отримуємо $5x + 6y = 6x + 6y - 12$, звідки $x = 12$.

Випадок $x = 12, y = 0$ відповідає додекаедру. Випадок $x = 12, y = 20$ відповідає формі футбольного м'яча. Відповідний многогранник Архімеда є усічений ікосаедр. Він виходить, якщо зрізати верхівки ікосаедра. Цей багатогранник викликав великий інтерес в 1990 році, коли було виявлено існування третього твердого стану вуглецю (поряд з алмазом і графітом). Ця форма позначається C_{60} . Вона складається з 60 атомів вуглецю, розташованих у вершинах усіченого ікосаедра. Ті, хто відкрив цю молекулу назвали її Букмінстерфуллеріном, так як знайшли її схожою на купол, побудований архітектором Букмінстер Фуллером. Але, як ми відзначали, ця форма була відома математикам набагато раніше. У графітній формі вуглецю атоми розташовані в формі бджолиних сот - шестикутників.

Є й інші молекули фуллеріни, такі як C_{70} , які мають 12 п'ятикутних і 25 шестикутних граней. Їх форма нагадує м'яч для регбі.

Література

1. Alexandru T. Balaban P. Applications of Graph Theory in Chemistry // Department of Organic Chemistry, Polytefhnice Institute. Bucharest, Roumania. - J. Chem. InJ Compur. Sci. Received March 12, 1985, 25, 334-343
2. Priyanka Bhalerao. Use of Graph Theory for Applications, Representations, Modeling and Problem Solving in Mathematics and other fields // International Journal of Scientific & Engineering Research Volume 8, Issue 10, October – 2017. p. 847-851
3. Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications: 7th ed. / Kenneth H. Rosen. - New Jersey: Prentice Hall, 2012. – 903 p.
4. Tzvetalin S. Vassilev, Laura J. Huntington On the Minimum ABC Index of Chemical Trees // Department of Computer Science and Mathematics, Nipissing University, North Bay, Ontario, P1B 8L7, Canada, Applied Mathematics 2012, 2(1): 8-16
5. Андерсон, Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика: Пер. с англ. / А. Джеймс. – М. : Издательский дом “Вильямс”, 2004. – 960 с.
6. Бойко С. М. Деякі аспекти теорії графів / С. М. Бойко // Математика в школах України. Позакласна робота. – 2011. - № 11. – с. 21-25
7. Карнаух Т. О. Теорія графів у задачах / Т. О. Карнаух, А. Б. Ставровський. – К. : КНУ, 2012. – 90 с.
8. Матвєєнко Х. С., Мартинюк О. М. Елементи теорії дерев для учнів середніх закладів освіти // Інформатика, інформаційні системи та технології: тези доповідей шістнадцятої всеукраїнської конференції студентів і молодих науковців. Одеса, 19 квітня 2019 р. – Одеса, 2019. – с. 59-60.
9. Мерзляк А. Г. Математика. 5 клас : підруч. для закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Вид. 2-ге, доопрац. відповідно до чинної навч. програми. – Х. : Гімназія, 2018. – 272 с.
10. Скляр І. В. Теорія графів у школі : задачі : посібник / І. Скляр. – К. : Шкільний світ, 2010. – 128 с.

11. Ю. В. Бондарчук, Б. В. Олійник Основи дискретної математики. “Києво-Могилянська Академія”, Київ, 2007р. 302с.
12. М. Й. Ядренко. Дискретна математика. Навчально-методичний посібник, Київ: Вид.-поліграф. цент "Експрес", 2003р. 244с.
13. В. І. Андрійчук, М. Я. Комарницький, Ю. Б. Іщук. Вступ до дискретної математики. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2003р. 254с.
14. Ю. В. Капітонова, С.Л. Кривий, О.А. Летичевський, Г.М. Луцикий, М.К. Песурін. Основи дискретної математики. Київ: "Наукова думка 2002р. 262с.
15. R. P. Brualdi. Discrete and Combinatorial Mathematics. Boston, Pearson Education, Inc., 2003, 833 p.