МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад:
«ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ К.Д. УШИНСЬКОГО»

Дискретна математика
(частина 1)

Одеса 2022

УДК 519.101

Рекомендовано до друку вченою радою
Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського»

Укладачі:
д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри вищої математики і статистики Вячеслав Миколайович Пивоварчик
к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики і статистики Ольга Миколаївна Яковлєва
к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики і статистики Ольга Миколаївна Болдарєва

Рецензенти:
к.ф.-м.н., доцент, завідувач кафедри вищої математики Одеської державної академії будівництва та архітектури Олександр Васильович Лесечко
д.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського» Дмитро Семенович Калюжний-Вербовецький

Дискретна математика (частина 1). Навчальний посібник / В. М. Пивоварчик, О. М. Яковлєва, О. М. Болдарєва. – Одеса : ПНПУ імені К. Д. Ушинського, 2022. – 145 с.

Навчальний посібник призначений для студентів ЗВО, зокрема для студентів фізико-математичного факультету Університету Ушинського, які вивчають навчальну дисципліну «Дискретна математика». Посібник охоплює такі розділи як теорія множин, комбінаторика, теорія рекурентних співвідношень. Посібник містить необхідний теоретичний матеріал, розв’язки задач різного рівня складності, контрольні питання та завдання, варіанти завдань для самостійної роботи по кожному розділу. Матеріал навчального посібника може бути використано як на лекційних та практичних заняттях, так і в самостійній роботі студента.

ЗМІСТ

Передмова

Дискретна математика історично виникає при використанні людством у давнині системних чисел (числа, що записуються в непозиційних, а пізніше в позиційних системах числення) та пов'язаними з ними алгоритмами виконання арифметичних операцій, розв'язання рівнянь тощо. Дискретна математика починає виділятися як окремий розділ математики з XVII століття, що пов'язано з роботами Леонарда Ейлера в галузі комбінаторного аналізу та теорії графів, і Якоба Бернуллі в галузі комбінаторної теорії ймовірностей. Велику роль у розвитку дискретної математики відіграв Г. В. Лейбніц.

У XIX столітті в галузі дискретної математики працювали відомі математики Ж. Л. Лагранж, А. Келі, Дж. Буль, К. Жордан та багато інших. У XX столітті значний вплив на розвиток дискретної математики надали дослідження та роботи А. Пуанкаре і Д. Гільберта, Е. Л. Поста, А. М. Тьюрінга та ін.. Бурхливий розвиток дискретної математики у другій половині XX століття пов'язують із «цифровою революцією» у телекомунікаційній та обчислювальній техніці. Дискретна математика стала основою проектування і застосування численних цифрових електронних пристроїв. Перші застосування дискретної математики у цій галузі пов'язані з іменами В. А. Котельникова, К. Е. Шеннона, В. І. Шестакова.

Виникнення у межах кібернетики математичної теорії управляючих систем призвело до розвитку нових розділів дискретної математики: теорії складності, теорії тестів, теорії автоматів тощо. Істотний внесок у дискретну математику на цьому етапі було зроблено Дж. фон Нейманом, Б. Расселом, А. Чьорчем, Д. Геделем, З. Кліні, Л. Лукасевичем, А. А. Марковим, І. І. Жегалкіним та ін. У XXI столітті дискретна математика є галуззю, яка бурхливо розвивається.

Назва дисципліни «Дискретна математика» характеризує конструктивний характер дисципліни, яка вивчає алгоритмічні і комбінаторні методи математики. Дискретна математика виділилася в самостійну дисципліну у зв'язку з виникненням та розвитком комп'ютерів і комп'ютерних технологій, хоча, наприклад, комбінаторика, набагато старша за деякі розділи математики. Завдання дискретної математики, як правило, тісно пов'язані з інформатикою, обчислювальною технікою, технічними програмами математики і виражаються у вигляді різних алгоритмів. Необхідність вивчення техніки доведень для майбутніх математиків очевидна. Вона також дуже важлива для розвитку логічного мислення у майбутніх спеціалістів у галузі інформатики. У цьому посібнику застосовуються метод доведення від супротивного і метод математичної індукції.

Характерними прикладами застосувань різних розділів дискретної математики є методи математичного моделювання, логістики, криптографічні протоколи, теорія кодування інформації, комп’ютерні алгоритми, теорія складності алгоритмів, тестування програмного забезпечення тощо.

Дискретна (або скінчена) математика (іноді дискретний аналіз) вивчає скінчені множини і різні структури на скінчених множинах, що виникають у різних розділах математики. Це означає, що поняття границі послідовності або функції, неперервності функції не є предметом вивчення цього розділу математики, хоча можуть використовуватися як допоміжні засоби.

У даному навчальному посібнику деякі факти математичного аналізу використані в розділі «Рекурентні співвідношення» (наприклад, твірна функція є степеневим рядом з точки зору математичного аналізу).

Матеріал навчального посібника побудований на основі курсу лекцій «Дискретна математика», який читають автори на кафедрі вищої математики та статистики в Державному закладі «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» для студентів-математиків фізико-математичного факультету.

У навчальному посібнику розглядаються питання, пов'язані з теорією множин, комбінаторикою, теорією рекурентних співвідношень. Дуже важливим розділом дискретної математики є теорія графів. Ця теорія, будучи самостійним розділом математики, використовує багато результатів комбінаторики. У цьому посібнику цей розділ не розглядається. Автори планують викласти обрані розділи теорії графів та її застосування у наступній частині навчального посібника «Дискретна математика».

Навчальний посібник містить три розділи, в яких розглядаються задачі та алгоритми теорії множин, комбінаторики та теорії рекурентних співвідношень. Теорія множин історично відкриває будь-який курс дискретної математики, оскільки дискретна математика оперує множинами, як правило, скінченними. У розділі, присвяченому вивченню множин, викладаються основні питання цієї теорії: способи завдання множин, операції над множинами та їх властивості, структури на множинах, а також принцип Діріхле.

У наступному розділі викладаються основи комбінаторики, оскільки комбінаторика будується на теорії скінчених множин. У розділі розглядаються як класичні завдання комбінаторики (завдання підрахунку лотерейних номерів, числа способів розбиття групи на підгрупи), так і завдання розбиття множин, і питання підрахунку ін'єктивних або сюр'єктивних функцій, що діють на заданих множинах.

Третій розділ присвячений рекурентним співвідношенням та методам їх розв’язання, при цьому виникають питання вивчення деяких важливих числових послідовностей (числа Фібоначчі, числа Каталана та ін.). Розглядають також поняття рекурсії, складності алгоритму, оскільки рекурентні формули використовуються для опису роботи алгоритму, що рекурсивно звертається до самого себе. У цьому розділі використовуються деякі факти математичного аналізу і лінійної алгебри, які мають бути відомі читачеві.

Структура розділів така: на початку розділу викладаються необхідні теоретичні відомості, які ілюструються розв'язаними прикладами та завданнями, надалі студентам пропонується відповісти на контрольні питання за темами розділу, потім йдуть варіанти завдань у формі тестів для самоперевірки. Теоретична частина розділу завершується коротким історичним екскурсом щодо розвитку викладеної теорії.

Структура і зміст навчального посібника дозволяють студенту використовувати матеріали посібника як на лекційних та практичних заняттях з дискретної математики, так і для самостійної роботи або написання курсових робіт.

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

§1.1. Множина та її елементи

Поняття множини відноситься до понять, які в сучасній математиці не визначені, тобто, є первинними поняттями. Це пов'язано з тим, що деякі поняття в математиці мають бути початковими, служити тією «цеглою», з якої будується загальна теорія. Синонімами слова «множина» в математиці є слова: набір, система, сукупність, клас елементів; у побуті – колекція, зібрання тощо. У повсякденному житті та практичній діяльності часто доводиться говорити про деякі сукупності різних об’єктів: предметів, понять, чисел, символів тощо. Наприклад, сукупність деталей механізму, аксіом геометрії, чисел натурального ряду, літер абетки. На основі інтуїтивних уявлень про подібність сукупностей сформувалося математичне поняття множини. Згодом теорія множин стала окремим, одним із важливіших розділів математики. На сьогодні теорія множин набула фундаментального значення. Вона виникла в XIX ст., а досягла значного розвитку і широкого визнання в XX ст. Теорія і зараз знаходиться у стані активного розвитку. Поряд з отриманням нових фактів, відбувається постійна робота зі створення аксіоматичних систем, за допомогою яких долаються протиріччя, що й зараз існують у цій теорії. Теорія множин, будучи одним з розділів математики, в той же час разом з математичною логікою є підставою для всіх інших розділів математики, зокрема, алгебри, геометрії, математичного аналізу, функціонального аналізу, топології тощо.

Під множиною будемо розуміти сукупність об’єктів (предметів, символів або понять), об’єднаних між собою за деякою спільною для них ознакою. Об’єкти, з яких складається множина, будемо називати елементами цієї множини. Множини будемо позначати великими, а їх елементи – малими латинськими буквами з індексами або без них. Якщо елемент a належить множині А, то пишуть $a \in A$. Коли ж елемент a не належить множині А, то пишуть $a \notin A$. Знак $\in$ називається знаком належності, він був уперше використаний італійським математиком Джераломо Пеано і є скороченням від грецького «εστι» (бути). Вважається, що один елемент належить даній множині тільки один раз, тобто якщо з множини вилучити елемент *a,* то в ній цього елементу вже не буде. Один елемент може належати декільком множинам.

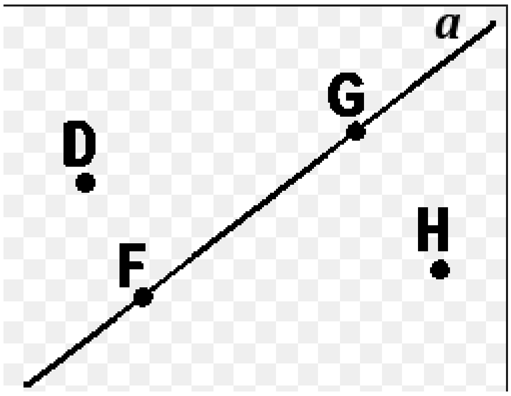


Рис. 1.

Наприклад, серед точок D, G, H, F прямій *a* належать точки G і F, записуємо G $\in a$, F $\in a$, D$\notin a$, H $\notin a$ (пряму *a* ми розглядаємо як певну множину точок).

Якщо множина має тільки один елемент *a*, то пишуть A=$\{a\}$. При цьому важливо відрізняти саму множину від її елемента. Множина може взагалі не мати елементів.

Означення. Множина, яка не має жодного елемента називається *порожньою множиною* і позначається символом $\varnothing$.

Таким чином, $A=\varnothing$ тоді і тільки тоді, коли $\forall x$, $x \notin A$. Отже, для будь-якого елемента *x* виконується $x\notin\varnothing$.

Множину, що має скінчену кількість елементів, називають *скінченою.* Наприклад, A=$\{$r, s, t$\}$, B=$\{5, 6, 7, 8\}$, C= $\{c_1, c_2,\ldots,c_n\}$. Якщо множина не є скінченною, то її називають *нескінченною*. Далі ми дамо строге означення скінченної та нескінченної множин. Відомими прикладами нескінчених множин є такі числові множини:

– множина натуральних чисел N = $\{1, 2, 3, \ldots\}$;

– множина цілих чисел Z = $\{0, 1, –1, 2, –2, 3, –3, \ldots\}$;

– множина раціональних чисел Q = { $\frac{m}{n}$, де $m\in$ Z, $n\in$ N};

– множина дійсних чисел R = (–∞; +∞).

Існує декілька способів завдання множини.

Множину можна задати за допомогою *характеристичної властивості*, тобто властивості, яку мають елементи цієї множини, і тільки вони. Наприклад, характеристичною властивістю множини всіх складених чисел є те, що кожний елемент цієї множини – це натуральне число, яке має більше двох дільників. Якщо А – множина чотирикутників, у яких дві сторони паралельні, а дві інших – не паралельні, то множина А – це множина трапецій.

У загальному випадку завдання множини A за допомоги характеристичної властивості P має вигляд:

$$\text{A} = \{a \mid P(a)\}.$$

Цей вираз читають так: «множина A – це множина всіх таких елементів a, для яких виконується властивість P», де через $P(a)$ позначено властивість, яку мають елементи множини A і тільки вони. Замість вертикальної риски іноді пишуть двокрапку. Наприклад, якщо А – множина дільників числа 12, то її можна записати за допомогою характеристичної властивості так:

$$\text{A} = \{\text{x} \mid \text{x} \in N,\ 12 \vdots x\}.$$

Завдання множини В характеристичною властивістю В={y | y – кити, що живуть у Чорному морі} визначає множину В як порожню множину.

Приклад 1. Знайти елементи наступних множин:

а) A={x | x ∈N, 2 < x ≤ 5}.

Множина А задана характеристичною властивістю: А містить натуральні числа, які більше 2 і менші чи рівні 5, тобто А={3,4,5}.

б) В – множина двозначних натуральних чисел, таких що при діленні на 12 дають остачу 5.

Найменше двозначне натуральне число – 10, найбільше – 99. Ми шукаємо числа вигляду 12k+5, k∈N. Перше таке число 17 (при k=1), далі 29 (при k=2), 41, 53, 65, 77, 89, 101,… Але 101 – тризначне число, тому B = {17, 29, 41, 53, 65, 77, 89}.

в) C – множина точок, рівновіддалених від обох сторін даного кута.

Як відомо зі шкільного курсу планіметрії, множина точок, рівновіддалених від обох сторін даного кута, є бісектрисою даного кута, яку ми розуміємо як певну множину точок.

Приклад 2. Записати такі множини за допомогою характеристичної властивості:

1. $A = \{2;\ 5;\ 8;\ 11; 14; \dots\}$.
2. $B = \{8;\ 4;\ 1;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{16}; \dots\}$.

1. Слід зазначити, що кожне наступне число більше попереднього на три. Тому ми можемо зробити висновок, що числа даної послідовності $-$ це числа виду $2 + 3k$, де $k \in N \cup \{0\}$. Або елементи множини A $-$ це члени арифметичної прогресії, де $a_1=2$ і $d=3$.

Отже, $A = \{x \mid x = 2 + 3k,\ k \in N \cup \{0\}\}$.

2. Кожне наступне число послідовності менше попереднього в чотири рази. Тому ми можемо зробити висновок, що числа даної послідовності $-$ це члени геометричної прогресії, де $b_1 = 8$ і $q = \frac{1}{4}$.

Отже $B = \{x \mid x = 8 \cdot (0{,}25)^n$, де $n \in N \cup \{0\}\}$.

Скінченну множину можна задати *переліком* її елементів. Наприклад, якщо A – множина натуральних дільників числа 12, то $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$. Порядок слідування елементів в запису неістотний.

Множину можна задати *аналітичним способом*, тобто за допомогою формули.

Приклад 3. Задати множину A переліком елементів:

$A = \{x \mid x \in Z,\ 2x^2 - 3x - 5 = 0\}$.

Множину A задано за допомоги формули. З'ясуємо, які числа містить множина A, для цього розв'яжемо рівняння: $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

$$D = 9+40=49$$

$$x_1 = \frac{3-7}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2}.$$

$x_1 \in Z$, $x_2 \notin Z$, тому A = {–1}.

Множину можна задати *графічно.*

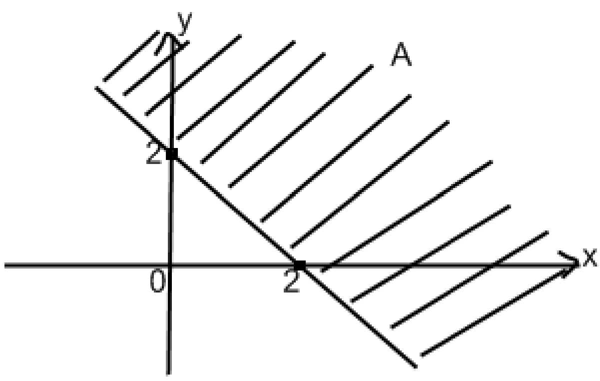


Рис. 2.

Множина А – множина точок площини, які лежать справа від даної прямої або на даній прямій. Аналітично цю множину можна задати наступним способом $A = \{(x, y) | x, y \in R, x + y \geq 2\}$.

§1.2. Підмножини. Рівні множини

Означення. Множина А називається *підмножиною* множини В, якщо кожен елемент множини А є елементом множини В.

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow a \in B)$$

В цьому разі пишуть $A \subseteq B$ і кажуть, що множина А міститься у множині В (включається у множину В), або, що А – це підмножина множини В.

Кожна непорожня множина А має хоча б дві підмножини – це $\varnothing$ і саму множину А. Ці підмножини називаються *невласними*.

Означення. Непорожня множина *C* називається *власною підмножиною* множини *A*, якщо множина *C* міститься в множині *A* і не співпадає з нею. Записують $C \subset A$.

Означення. Множини *A* і *B* називаються *рівними*, якщо вони складаються з одних і тих же елементів, тобто кожний елемент множини А є елементом множини В і, навпаки, кожен елемент множини В є елементом множини А.

$$(A=B) \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow a \in B \wedge \forall b \in B \Rightarrow b \in A)$$

Записують А=В.

Теорема 1.1. $(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

Для наочності оперування з множинами використовують їх графічні зображення за допомогою так званих *діаграм Ейлера–Венна*. При цьому множини зображують деякими зв'язними геометричними фігурами, найчастіше кругами. Шукані підмножини заштриховуються.

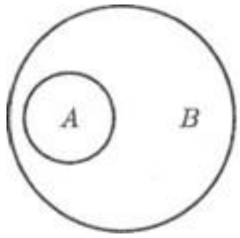


Рис.3. А $\subset$ В

Наприклад, якщо А – множина натуральних чисел, В – множина парних натуральних чисел, то легко помітити, що кожне число множини В міститься у множині А, але В не співпадає з А, тому В $\subset$ А.

Якщо А – множина квадратів, В – множина ромбів, то множина А є підмножиною множини В (А$\subset$В), так як кожний квадрат є ромбом (чотирикутником, що має всі рівні сторони), однак, не кожний ромб є квадратом (довільний ромб не має всі рівні кути, як квадрат) (рис. 4).

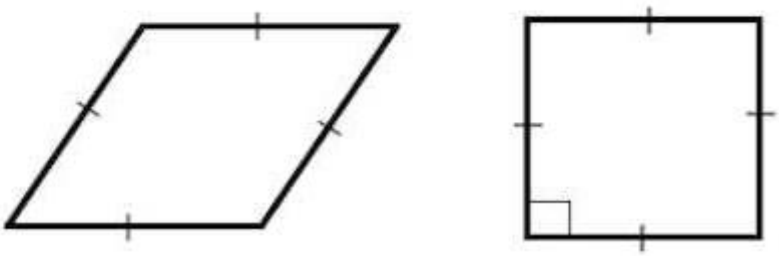


Рис 4.

Для будь-яких множин A, B, C виконуються властивості:

1. $\varnothing \subseteq A$.
2. $A \subseteq A$ (властивість рефлексивності).
3. $A \subseteq \varnothing$ тоді і тільки тоді, коли $A=\varnothing$.
4. Якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ (властивість транзитивності).

Означення. Сукупність всіх підмножин множини А називається її *булеаном* і записується як B(A).

Наприклад, якщо $A=\{1, 2, 3\}$, то булеан цієї множини буде такий:

$$B(A) = \{\{\varnothing\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Теорема 1.2. Якщо А – скінчена множина, яка складається з n елементів, то вона має 2^n підмножин.

§ 1.3. Операції над множинами

На множинах можна ввести ряд операцій, результатом виконання яких будуть також множини. За допомогою цих операцій можна конструювати з заданих множин нові множини. Значну користь для усвідомлення операцій над множинами дає зображення множин за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

Операція перетину множин

Означення. *Перетином* множин A і B називається множина C, що складається з тих і тільки тих елементів, кожен з яких належить як множині A, так і множині B. Позначають: $C = A \cap B$.

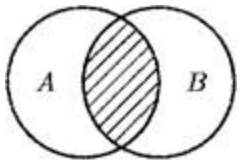


Рис.5. $A \cap B$

$$(x \in A \cap B) \leftrightarrow (x \in A \text{ } i \text{ } x \in B)$$

Наприклад, якщо A = {a, b, c, d, e, f} та B = {b, d, e, g, h}, то обом множинам належать елементи b, d, e. Тому $A \cap B = \{b, d, e\}$.

Теорема 1.3. Для довільних множин A, B, C мають місце такі властивості операції перетину множин:

1. $A \cap B = B \cap A$ (властивість комутативності).
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (властивість асоціативності).
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
4. $A \cap A = A$ (властивість ідемпотентності)..
5. $A \cap B = B \leftrightarrow B \subseteq A$.

Приклад 4. Знайти $A \cap B$, якщо:

$$A = \{x|x \in R, -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{4}\};\ B = \{x|x \in R, -\frac{1}{4} \leq x \leq 2\}.$$

Зобразимо множини A та B на числовій прямій (рис.6).

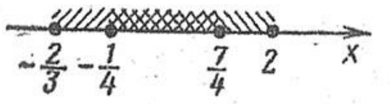


Рис.6.

Перетин $A \cap B$ – частина числової прямої, де є обидва штрихування, тобто відрізок $[-\frac{1}{4}; \frac{7}{4}]$.

$$A \cap B = [-\frac{1}{4}; \frac{7}{4}] = \{x|x \in R, -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{7}{4}\}.$$

Приклад 5. Які геометричні фігури належать перетину даних множин:

1) множини правильних многокутників та множини трикутників;
2) множини ромбів та множини прямокутників?

1) Перетином цих множин є множина правильних трикутників;
2) Перетином цих множин є множина ромбів, які є прямокутниками, тобто, – множина квадратів.

Операція об'єднання множин

Означення. *Об'єднанням* множин A і B називається множина C, що складається з усіх тих і тільки тих елементів, які входять або в множину A, або в множину B, або і в A і в B. Позначають: $C = A \cup B$.

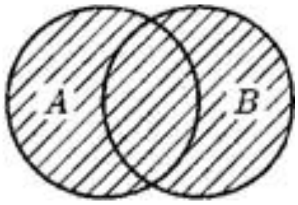


Рис.7. A ∪ B

$(x \in A \cup B) \leftrightarrow (x \in A \text{ або } x \in B)$

Приклад 6. Знайти $A \cup B$, якщо $A = \{x|x \in R, -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{4}\}$

$B = \{x|x \in R, -\frac{1}{4} \leq x \leq 2\}$.

Якщо зобразити дані множини на числовій прямій (рис.6), то об’єднанням $A \cup B$ є частина числової вісі, де є хоча б одне штрихування, тобто відрізок $[-\frac{2}{3}; 2]$. $A \cup B = \{x|x \in R, -\frac{2}{3} \leq x \leq 2\}$.

Теорема 1.4. Для довільних множин A, B, C мають місце властивості операції об’єднання множин:

1. $A \cup B = B \cup A$ (властивість комутативності).
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (властивість асоціативності).
3. $A \cup \emptyset = A$.
4. $A \cup A = A$ (властивість ідемпотентності).
5. $A \cup B = B \leftrightarrow A \subseteq B$.

Теорема 1.5. Операції перетину і об’єднання множин пов’язані законами дистрибутивності:

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивність об’єднання відносно перетину.
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивність перетину відносно об’єднання.

Усі зазначені властивості можна строго довести. Наведемо приклад доведення властивості 1.

Доведення

Для доведення тотожність виду A=B, треба довести, що:

1) якщо $x \in A$, то $x \in B$;

2) якщо $x \in B$, то $x \in A$.

1. Припустимо, що елемент $x \in A \cup (B \cap C)$. Доведемо, що $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Дійсно, нехай $x \in A \cup (B \cap C)$. Тоді або $x \in A$ або $x \in B \cap C$. Розглянемо кожну з цих можливостей.

а) Нехай $x \in A$. Тоді $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$ (це вірно для будь-яких множин B і C). Отже, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

б) Нехай $x \in B \cap C$. Але тоді, згідно з означенням перетину множин, $x \in B$ і $x \in C$. Тому $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$ (це вірно для будь–якої множини А). Отже, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. Припустимо, що елемент $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Доведемо, що $x \in A \cup (B \cap C)$. Дійсно, нехай $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тоді $x \in A \cup B$ і одночасно $x \in A \cup C$.

Нехай $x \in A$. Тоді $x \in A \cup (B \cap C)$ (це вірно для будь–яких множин B і C), і твердження доведене.

Якщо $x \notin A$, то $x \in B$ і $x \in C$, тобто, $x \in B \cap C$. Але тоді $x \in A \cup (B \cap C)$, що доводить наше твердження.

Згідно з теоремою 1, маємо що $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Доведення тотожностей можна проілюструвати за допомогою діаграм Ейлера-Венна. На рис. 8 і 9 зображено формування лівої частини рівності − $A \cup (B \cap C)$.

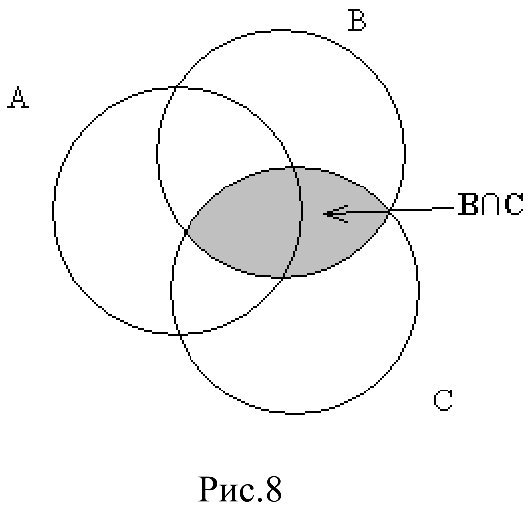


Рис.8

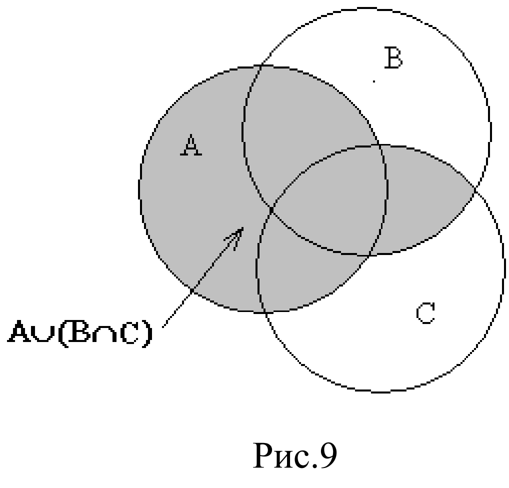


Рис.9

На рис. 10, 11, 12 – зображено формування правої частини рівності – (A∪B)∩(A∪C).

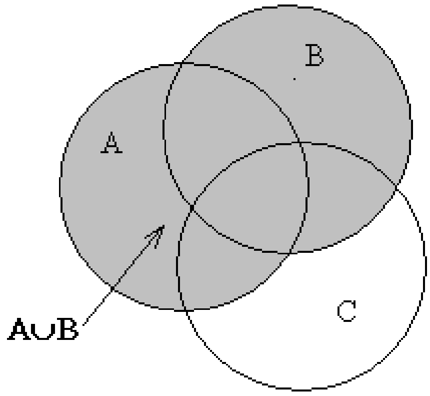


Рис.10

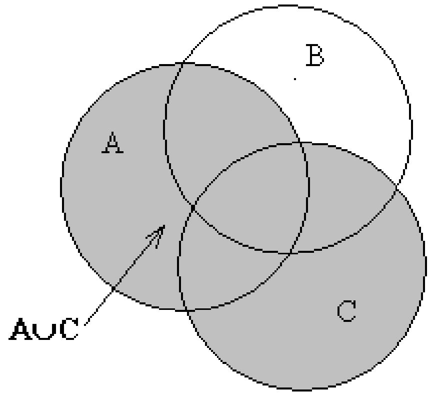


Рис. 11

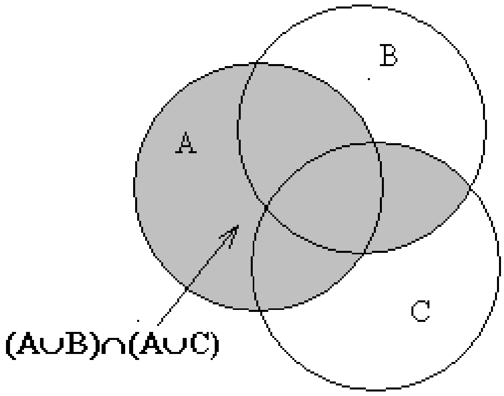


Рис. 12

Ми бачимо, що в результаті виконаних операцій отримуємо рівні множини.

Теорема 1.6. Для довільних множин A і B наступні умови рівносильні:

1. $A \subseteq B$.
2. $A \cup B = B$.
3. $A \cap B = A$.

Доведення

Доведемо, наприклад, що з 1) слідує 2).

Множини рівні, якщо вони складаються з одних і тих же елементів. Покажемо, що якщо $A \subseteq B$, то множини $A \cup B$ і B складаються з одних і тих же елементів.

Нехай x∈A∪B. Це означає, що x∈A або x∈B (за означенням об'єднання множин). Якщо x∈A, то з умови A⊆B випливає, що x∈B, тобто в обох випадках кожен елемент множини A∪B є елементом множини B, значить, A∪B⊆B. Якщо x∈B, тоді за означенням об'єднання множин x∈A∪B. Отже, кожен елемент множини B є елементом множини A∪B, тобто B⊆A∪B.

Тоді A∪B⊆B і B⊆A∪B, а це і означає, що множини B і A∪B рівні.
Інші рівносильності доведіть самостійно.

Операція віднімання множин

Означення. *Різницею* множин A і B називається множина C, що складається з тих і тільки тих елементів множини A, які не належать множині B. Позначають: C = A \ B. Символ «\» є знаком теоретико-множинного віднімання.

$$(x \in A \setminus B) \leftrightarrow (x \in A \ i \ x \notin B)$$

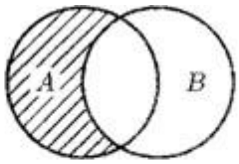


Рис. 13. A \ B

Приклад 8. На рисунку 14 зображено два трикутники. Множину точок трикутника ABC позначимо через P, а трикутника ADC – через Q. Відмітити штриховою лінією наступні множини: а) P∪Q; б) P∩Q; в) P \ Q; г) Q \ P.

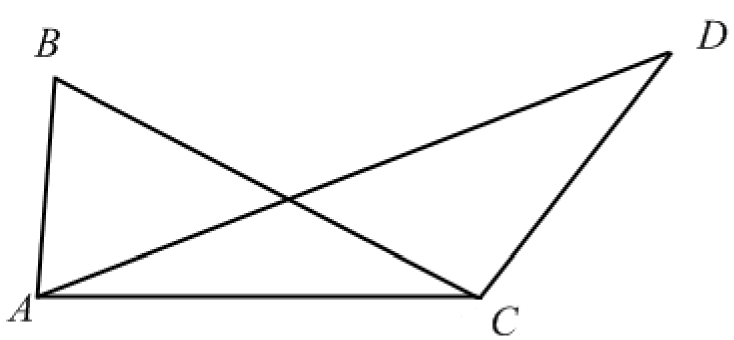


Рис. 14

а) *Об'єднанням* множин A і B називається множина C, що складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать або множині A, або множині B. Тому, маємо P∪Q:

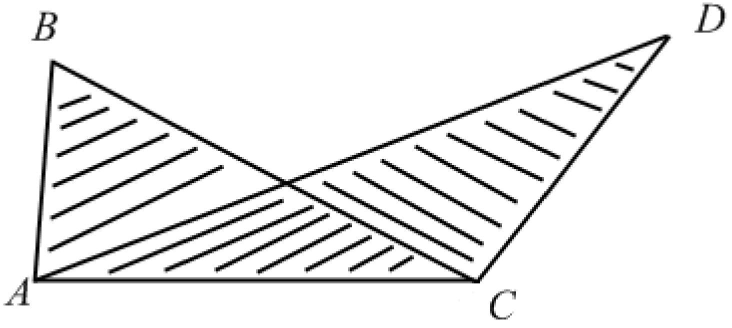


Рис. 15

б) Згідно з означенням, до перетину двох множин входять ті та тільки ті елементи, які одночасно належать обом множинам, отже P∩Q:

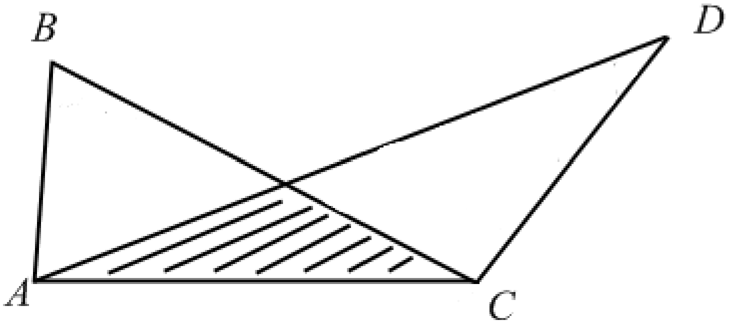


Рис. 16

в) За означенням різниці множин маємо, що P \ Q:

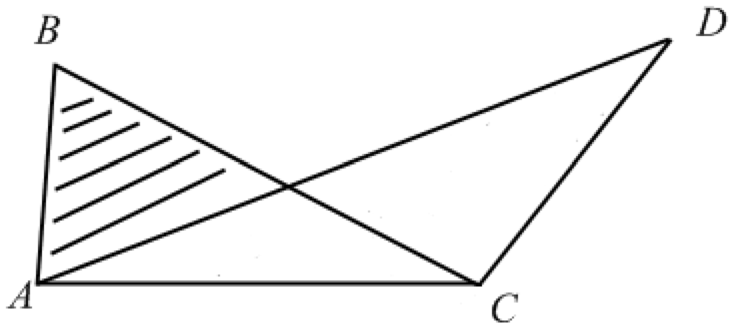


Рис.17

г) Аналогічно, $Q \setminus P$:

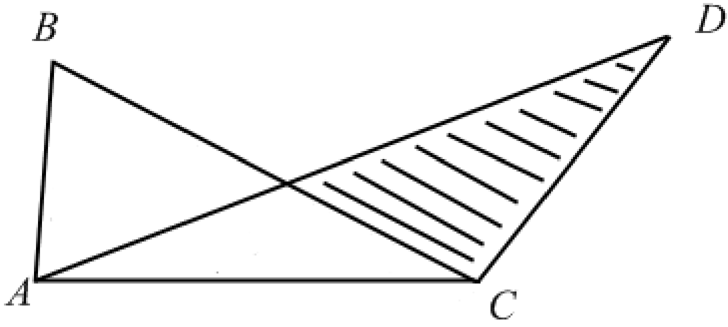


Рис.18

Приклад 9. Нехай А – прості числа, менші за число 40, В – непарні числа, більші за число 14, але менші за число 29. Знайти $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Задамо множини А та В переліком елементів.

A={2,3,5,7,11,13, 17, 19, 23, 29, 31, 37},

B={15, 17, 19, 21, 23, 25, 27}.

За означенням:

$A \setminus B = \{2,3,5,7,11,13, 29, 31, 37\}$,

$B \setminus A = \{15,21,25,27\}$.

Теорема 1.7. Для довільних множин A, B, C мають місце властивості операції віднімання множин:

1. $A \setminus \emptyset = A$.
2. $\emptyset \setminus A = \emptyset$.
3. $A \setminus A = \emptyset$.
4. $A \setminus B = \emptyset \leftrightarrow A \subseteq B$.
5. $A \setminus B = A \leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
6. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.
7. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

Означення. *Симетричною різницею* множин А і В називається множина С, елементи якої належать множинам А і В, але не належать їх перетину.

Симетричну різницю множин А і В позначають символом $A \Delta B$.

За означенням: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

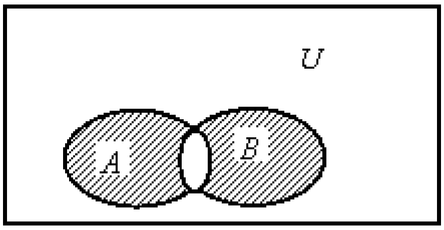


Рис. 19. A Δ B

Зауваження. Симетрична різниця множин A і B може бути визначена наступним способом: $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Перевірте за допомогою діаграм Ейлера-Венна, що завдання симетричної різниці цим способом є рівносильним означенню симетричної різниці множин.

Приклад 10. Знайти A \ B, B \ A, A Δ B, якщо

$$A = \{x|x \in R, -\frac{2}{3} \le x \le \frac{7}{4}\};\ B = \{x|x \in R, -\frac{1}{4} \le x \le 2\}.$$

Різницею A\ B є напівінтервал $[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{4})$, тобто

$$A \setminus B = \{x|x \in R, -\frac{2}{3} \le x < -\frac{1}{4}\}$$

(точка $x = -\frac{1}{4}$ належить множині B, тому не належить множині A \ B).

Аналогічно,

$$B \setminus A = (\frac{7}{4}; 2] = \{x|x \in R, \frac{7}{4} < x \le 2\}$$

(точка $x = \frac{7}{4}$ належить множині A, тому не належить множині B \ A).

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = [-\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}) \cup (\frac{7}{4}; 2].$$

Приклад 11. Дано множини: P – множина паралелограмів; M – множина прямокутників; R – множина ромбів; K – множина квадратів. Охарактеризувати множини: M∩ R, M \ R, R \ K, K \ R.

M∩ R – це множина, яка містить прямокутники, які є ромбами, тобто – квадрати, M∩ R= K.

M \ R – це множина, яка містить прямокутники, які не є ромбами, тобто прямокутники, у яких довжина та ширина різні.

R \ K – це множина, яка містить ромби, які не є квадратами, тобто ромби, які не мають прямого кута.

K \ R – це множина квадратів, яка не містить ромбів. Це порожня множина, бо кожний квадрат є ромбом.

За допомогою операції віднімання для підмножин деякої множини вводиться операція *доповнення множини*.

Означення. Якщо B ⊆ A, то множину A \ B називають доповненням множини B в множині A (доповненням множини B до множини A). Доповнення множини B позначають $\overline{B}$.

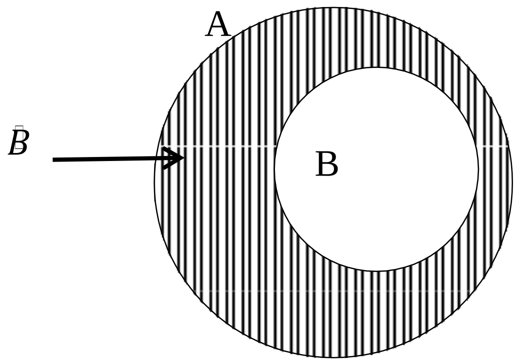


Рис. 20. Доповнення множини B в множині A

§1.4. Універсальна множина

У будь-якому конкретному завданні доводиться мати справу з підмножинами деякої, фіксованої для цього завдання, множини. Її прийнято називати універсальною (універсумом) і позначати символом U. Наприклад, якщо A – множина кішок, B – множина собак, то для множин A і B універсальною є множина U – множина домашніх тварин. Якщо ми розглядаємо множини трапецій, паралелограмів, квадратів, то як універсальну множину для цих множин можна вибрати, наприклад, множину чотирикутників.

Для однієї і тієї ж ситуації універсальну множину можна визначити, зазвичай, декількома способами. Якщо ми розглядаємо множину A студентів-математиків і множину B студентів-соціологів певного університету, то в якості універсальної множини U можна розглядати множину всіх студентів цього університету. Окрім указаних студентів, універсальна множина U включає також студентів-фізиків, філологів та інших. Також в якості універсальної множини можна розглядати множину студентів університетів України, Європи тощо.

При графічному зображенні множин зручно використовувати діаграми Ейлера-Венна, на яких універсальну множину зазвичай представляють у вигляді прямокутника, а інші множини у вигляді овалів, що розташовані всередині цього прямокутника:

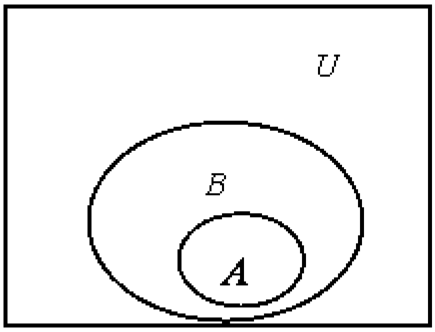


Рис. 21

Приклад 12. Знайти множину, що є об'єднанням множин A = {1, 2, 5, 7, 10} і B = {2, 3, 5, 6, 7, 9}. Знайти універсальну множину для множин A і B.

C = AUB = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10}.

U – універсальна множина, тобто множина, що включає у себе множини A і B. Наприклад, це може бути множина перших 10 натуральних чисел: $U = \{x \mid x \le 10, \text{ де } x \in N\}$. Також множину U можемо визначити, наприклад, як множину N.

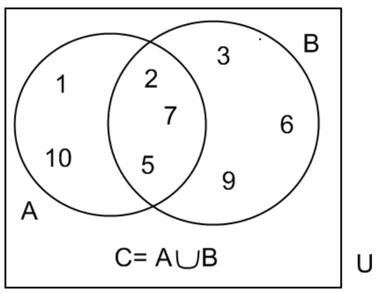


Рис. 22

Означення. Множину U \ A називають доповненням множини A до універсальної множини U і позначають символом $\overline{A}$.

$$\overline{A} = U \setminus A.$$

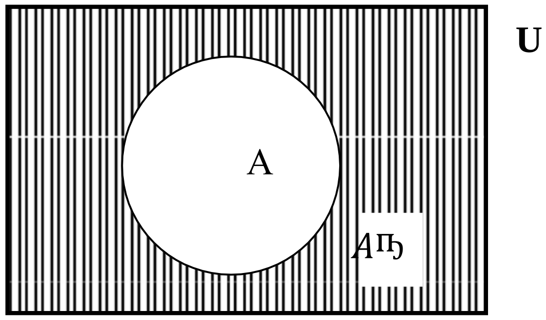


Рис. 23

Приклад 13. Дано множину A = {2, 3}. Знайти $\overline{A}$, якщо: 1) U = N; 2) U = Z; 3) U = R.

Згідно з означенням доповнення множини до універсальної множини, маємо:

1) $\overline{A} = N \setminus A = \{1; 4; 5;\ldots\}$.
2) $\overline{A} = Z \setminus A = \{\ldots -2; -1; 0; 1; 4; 5; 6;\ldots\} = \{0; \pm1; -2; -3; \pm4; \pm5;\ldots\}$.
3) $\overline{A} = R \setminus A$.

$$\overline{A} = (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty).$$

Теорема 1.8. Для довільних підмножин A і B універсальної множини U виконуються такі властивості:

1. $A \cup U = U$.
2. $A \cap U = A$.
3. $A \cup \overline{A} = U$.
4. $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
5. $\overline{\overline{A}} = A$.
6. Якщо $A \subset B$, то $\overline{B} \subset \overline{A}$.
7. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
8. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

§1.5. Основні властивості операцій над множинами. Кільце множин

Наведемо основні властивості операцій об'єднання, перетину, різниці і доповнення множин:

1. Комутативність:

1.1. $A \cup B = B \cup A$;

1.2. $A \cap B = B \cap A$.

2. Асоціативність:

2.1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

2.2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3. Дистрибутивність:

3.1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

3.2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4. Ідемпотентність:

4.1. $A \cup A = A$;

4.2. $A \cap A = A$.

5. Закони поглинання:

5.1. $A \cup (A \cap B) = A$;

5.2. $A \cap (A \cup B) = A$.

6. Закони де Моргана:

6.1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

6.2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

7. Закон подвійного заперечення : $\overline{\overline{A}} = A$.

8. Закон включення: якщо $A \subset B$, то $\overline{B} \subset \overline{A}$.

9. Властивості нуля і одиниці (нуль – порожня множина $\emptyset$, одиниця – універсальна множина U):

9.1. $A \cup \emptyset = A$;

9.2. $A \cap \emptyset = \emptyset$;

9.3. $A \cup U = U$;

9.4. $A \cap U = A$.

10. Закон різниці:

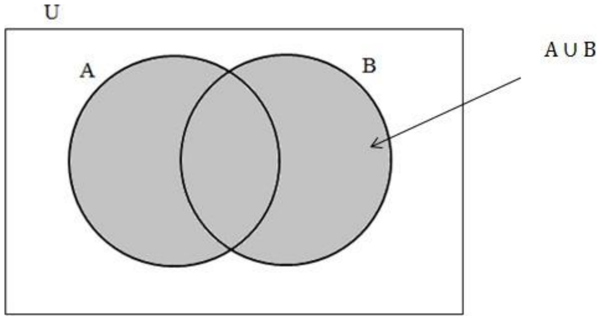
$A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

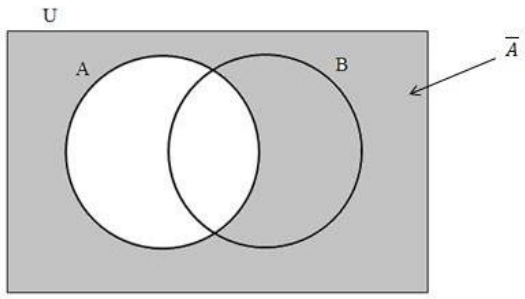
Проілюструємо виконання властивостей на діаграмах Ейлера-Венна. Наприклад, розглянемо закони де Моргана.

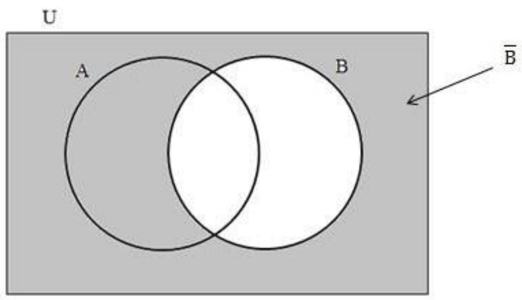
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap B$$

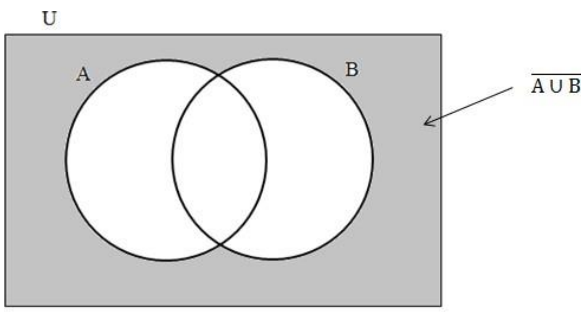
Зобразимо множини, що стоять у лівій та правій частині рівності, та порівняємо їх.

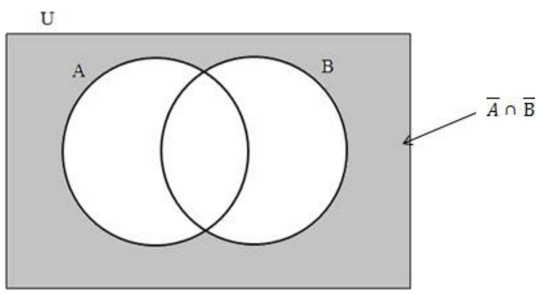
$A \cup B$ | $\overline{A} \cap B$









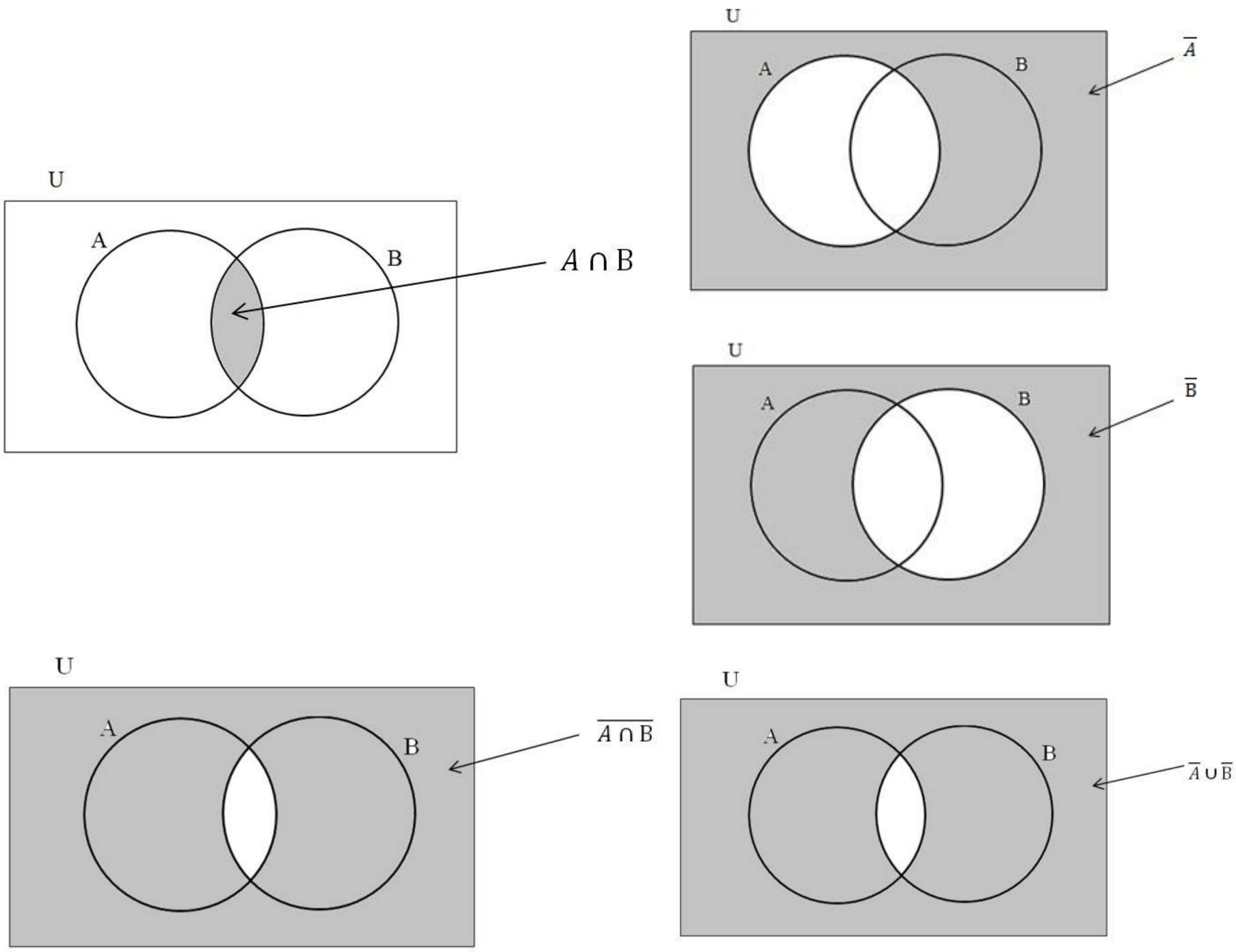


Бачимо, що зліва та справа стоять рівні множини, тобто рівність вірна. Відмітимо, що зображення множин на діаграмах Ейлера-Венна не є строгим доведенням рівності.

Аналогічно:

$$\overline{A \cap \mathrm{B}} = \overline{A} \cup \mathrm{B}$$

$A \cap \mathrm{B}$ $\qquad\qquad$ $\overline{A} \cup \mathrm{B}$



Нехай А – множина і В(А) – її булеан. Розглянемо на булеані бінарну алгебраїчну операцію симетричної різниці А Δ В.

Теорема 1.9. Булеан множини А утворює абелеву групу відносно операції симетричної різниці множин (булеву групу).

Доведення

Дійсно, операція Δ комутативна та асоціативна (перевірте на діаграмах Ейлера-Вена):

$$A \Delta B = B \Delta A$$

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$$

Нейтральним елементом відносно цієї операції є порожня множина $\emptyset$: $B \Delta \emptyset = (B \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus B) = B \cup \emptyset = B$ для довільної множини B.

Симетричним елементом до елемента B відносно операції симетричної різниці є елемент B:

$$B \Delta B = (B \setminus B) \cup (B \setminus B) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Нагадаємо, множина, що містить всі можливі підмножини даної множини A, називається її *булеаном,* і позначається $B(A)$.

Теорема 1.10. Булеан множини А відносно операцій Δ і $\cap$ утворює комутативне кільце з одиницею.

Доведення

1) B(A) утворює абелеву групу відносно операції Δ (теорема 1.9);

2) Операція перетину множин асоціативна і комутативна на B(A):

$(A\cap B)\cap C = A\cap (B\cap C)$;

$A\cap B = B\cap A$;

3) Операція $\cap$ дистрибутивна відносно операції Δ (перевірте самостійно на діаграмах Ейлера-Венна):

$$(A\Delta B)\cap C=(A\cap C)\Delta(B\cap C)$$

(ми можемо перевірити дистрибутивність тільки справа або зліва, так як операція перетину множин комутативна);

4) Порожня множина $\emptyset$ є нейтральним елементом відносно операції $\cap$. Для довільної множини B з множини B(A) виконується:

$$\emptyset \cap B = B\cap \emptyset = B.$$

§ 1.6. Декартів (прямий) добуток множин

Означення. Декартовим (прямим) добутком $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ у вказаному порядку називається множина всіх можливих впорядкованих *n*-місних наборів (кортежів), *i*-ті компоненти яких беремо з відповідних множин A_i ($i \in \{1,2,\ldots,n\}$):

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}: a_i \in A_i\}.$$

Якщо всі множини A_i декартового добутку $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ рівні між собою, то декартів добуток називається *n*-им декартовим степенем множини А: $A^n = A \times A \times \ldots \times A$.

Означення. Впорядковані набори $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ та $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ називаються рівними, якщо для довільного $i=1, 2, \ldots, n$ буде $a_i = b_i$.

При цьому пишуть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

У довільному впорядкованому наборі $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ елементи не можна міняти місцями, тому що при зміні порядку слідування елементів ми отримуємо зовсім інший упорядкований набір. У впорядкованому наборі відомо, який елемент стоїть першим, який – другим тощо.

Частинним випадком декартового добутку множин є декартів добуток двох множин.

Означення. Декартовим добутком множин *A* і *B* є множина, елементами якої є *впорядковані пари* елементів виду:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Пари (a, b) і (b, a) – це загалом різні впорядковані пари елементів. Вони співпадають тільки у випадку, коли $a=b$.

Означення. Добуток $A \times A$ позначається A^2 і називається *декартовим квадратом* множини А.

Наприклад, якщо $A=\{0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, то

$A x B = \{(0,1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$

$B x A = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$

$A \times A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0)\}$

Звідси видно, що $A\times B \neq B\times A$, тому що, наприклад, впорядкована пара $(1, 2)\in A$xB і $(1, 2)\notin B$xA. Отже, операція множення множин не комутативна.

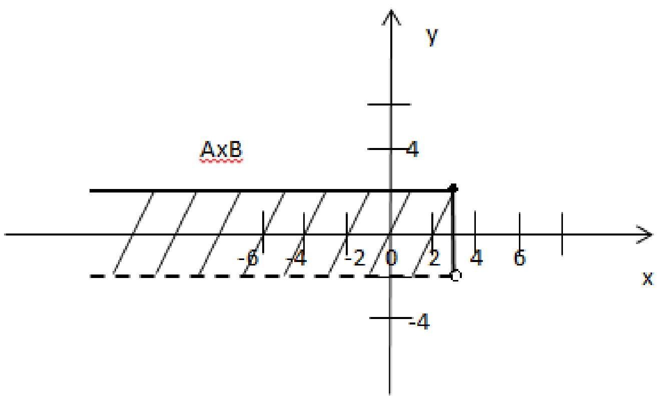
Зауваження. Якщо множина А містить m елементів, а множина В містить n елементів, то множина АхВ складається з $m\cdot n$ елементів.

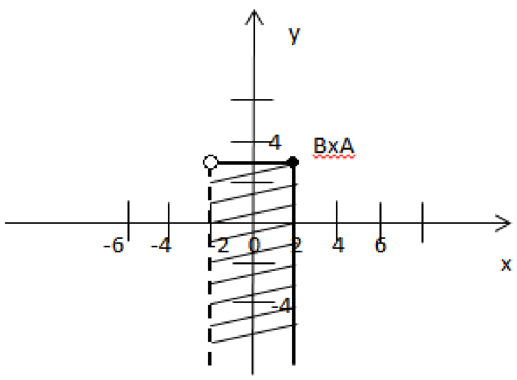
Декартів добуток множин можна задавати не тільки переліком пар (цей спосіб доцільний, коли множини скінченні), а представляти графічно. Проілюструємо цей спосіб на прикладах.

Приклад 14.

1) Зобразіть на координатній площині добутки AхB і BхA, якщо:
   $A = \{x \mid x\leq 3, x\in R\}$, $B=\{y \mid -2<y\leq 2, y\in R\}$.

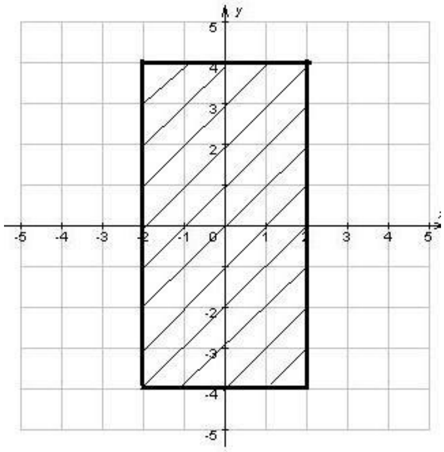
Множина А графічно уявляє півплощину, яка знаходиться зліва від прямої x=3, границя області пряма x=3 включено в область. Множина В графічно уявляє собою полосу між прямими $y = -2$ та $y = 2$, при чому пряму $y = -2$ не включено в область, а пряму $y = 2$ – включено. Тепер знаходимо перетин цих множин и отримуємо шуканий добуток AхB.





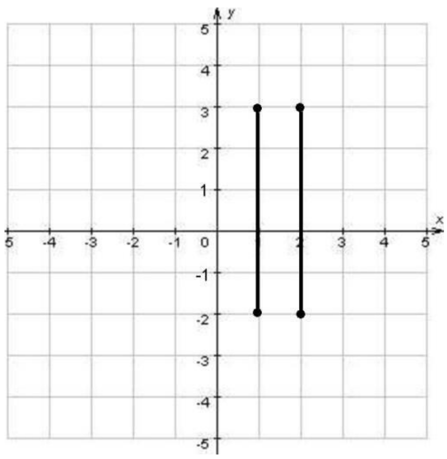
Аналогічні міркування справедливі і для знаходження декартового добутку BхА.

2) Зобразіть на координатній площині добуток XxY, якщо:
   $X = \{x \in R \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \in R \mid -4 \leq x \leq 4\}$.



3) Зобразіть на координатній площині добуток XxY, якщо:

$$X = \{x \in N\, |x \leq 2\,\},\ \ Y = \,\{y \in R| - 2 \leq y \leq 3\}.$$



Зауважимо, що множина складається з двох елементів $X = \{1,2\}$. Добутком XxY будуть два відрізки, які паралельні осі ординат, які розміщені на 1 та 2 одиниці від початку координат.

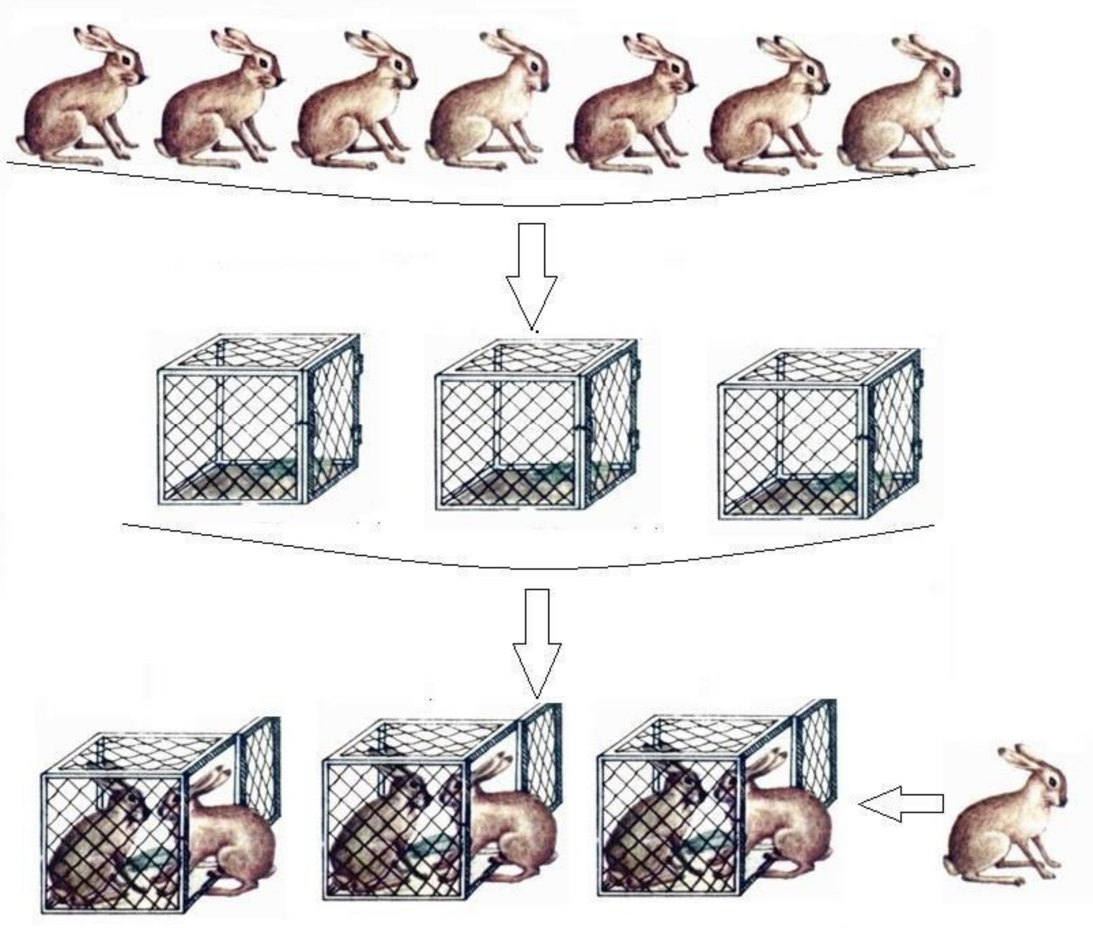
§ 1.7. Принцип Діріхле

Принцип Діріхле (принцип голубів та ящиків, кроликів та кліток тощо), на перший погляд, очевидний та простий, але його застосування в математиці дуже широке. Принцип названий на честь німецького математика Петера Густава Діріхле (1805-1859 рр), який у 1834 році сформулював та успішно застосовував його до доведень арифметичних тверджень.

Петер Густав Діріхле

Діріхле належить ряд значних результатів в різних областях математики, механіки, математичної фізики. Так, в математичному аналізі Діріхле ввів поняття умовної збіжності ряду та дав ознаку збіжності. Наприклад, в теорії чисел Діріхле довів теорему про те, що послідовність натуральних чисел виду $\{a + nb\}$, де a, b – взаємно-прості числа, містить нескінченну кількість простих чисел, займався питаннями наближення ірраціональних чисел раціональними, де використовував цей принцип при доведенні теорем.

У найпростішому вигляді принцип формулюється так: «Не можна посадити семеро кроликів в три клітки таким чином, щоб в кожній клітці знаходилися не більше двох кроликів». Дійсно, якщо в кожній клітці не більше двох кроликів, то всього кроликів не більш ніж 2·3=6, що не задовольняє умові.



Застосування цього принципу дає у багатьох випадках найбільш простий і витончений розв’язок задачі. Цей принцип є ефективним засобом для доведення важливих теорем теорії чисел, алгебри, геометрії тощо. Принцип Діріхле застосовується при доведенні теорем дискретної математики та в теорії діофантових наближень.

Цей параграф складається з двох досить простих теорем і декількох прикладів. Почнемо з найбільш відомої форми принципу клітини.

Теорема 1.11. Якщо розмістити $n+1$ голубів у n ящиках, то принаймні в одному ящику буде більш ніж один голуб.

Доведення

Якщо в кожному ящику не більше одного голуба, то голубів не може бути більше, ніж ящиків. Тоді у всіх ящиках разом має бути не більш ніж n голубів, що є протиріччям умові.

З цієї теореми випливає, що якщо $m > n$ і треба m голубів розмістити у n ящиках, то принаймні в одному ящику буде більш ніж один голуб.

Приклад 15. Доведіть, що у множині, що містить $m+1$ натуральне число, принаймні два числа мають однаковий залишок при діленні на m.

Нехай $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, a_{m+1}$ – дані послідовні натуральні числа. Припустимо, що для $1 \leq i \leq m + 1$ маємо $a_i = q_i m + r_i$, де $0 \leq r_i < m$, r_i– остача при діленні числа a_i на m. Кожне число з нашої множини замінимо на відповідну остачу, розглянемо тепер множину $r_1, r_2, r_3, \dots, r_m, r_{m+1}$ – це множина, що містить $m+1$ невід'ємне ціле число, менше ніж m. Однак, існує тільки m різних невід'ємних чисел, менших ніж m. Отже два з чисел r_i мають бути рівними.

Приклад 16. Доведіть що, якщо у прямокутнику зі сторонами 6 і 8 см розміщені п'ять точок, то існують дві точки, відстань між котрими не перевищує 5 см.

Розділимо вихідний прямокутник на 4 прямокутника розміром 3 х 4 см кожний. Оскільки п'ять точок мають знаходитись або в середині, або на границях чотирьох прямокутників, то хоча б дві точки мають бути або в середині, або на границі одного і того ж самого прямокутника розміром 3х4 см. Але будь-які дві такі точка знаходяться на відстані, що не перевершує 5 см.

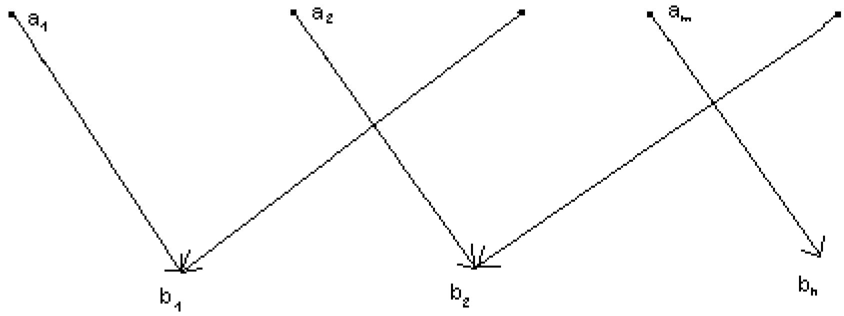
Тепер наведемо посилену форму принципу голубів і ящиків.

Теорема 1.12. Нехай $m > n$ голубів розміщені в n ящиках, тоді є ящик, в якому є не менше ніж $\lceil\frac{m}{n}\rceil$ голубів, де $\lceil\frac{m}{n}\rceil$ означає цілу частину числа $\frac{m}{n}$.

Доведення

Нехай кожний ящик містить менше ніж $\lceil\frac{m}{n}\rceil$ голубів. Тоді, оскільки нас цікавлять цілі голубі, кожен ящик містить менше ніж $\frac{m}{n}$ голубів. Тому загальна кількість голубів менша ніж $n\frac{m}{n} = m$, що протирічить умові.

Нехай є дві скінченні множини A=$\{a_1, a_2, \ldots , a_m\}$ і B=$\{b_1, b_2, \ldots , b_n\}$. Якщо кожному елементу a_i з множини A поставлено у відповідність деякий елемент b_j множини B, тоді кажуть, що задано відображення множини A у множину B, при цьому елемент b називають образом елемента a.



Якщо A – множина голубів, а B – множина кліток, в яких треба розмістити кроликів, то, визначивши клітку для кожного кролика, дістанемо відображення множини A у множину B.

У термінах теорії множин принцип Діріхле можна сформулювати так: Нехай $m > n$ і A=$\{a_1, a_2, \ldots , a_m\}$, B=$\{b_1, b_2, \ldots , b_n\}$, тоді при будь-якому відображенні множини A у (на) множину B знайдуться два елементи множини A, які мають один і той же образ.

Найпростіший спосіб довести існування об'єкту із заданими властивостями – це вказати його і переконатися, що він дійсно володіє потрібними властивостями. Наприклад, щоб довести, що рівняння має рішення, достатньо навести якийсь його розв'язок. Доведення існування такого роду називають прямими або конструктивними. Але бувають і непрямі доведення існування об’єкту, коли обґрунтування факту, що шуканий об'єкт існує, відбувається без прямої вказівки на сам об'єкт. Одним із способів побічно довести існування і є принцип Діріхле. За допомогою принципу Діріхле доводять існування деякого об’єкта, не вказуючи алгоритм його знаходження чи побудування. Це дає так зване неконструктивне доведення – ми не можемо сказати, в якому саме ящику сидять два голуби, але знаємо, що такий ящик є. При розв’язанні задач за допомогою принципу Діріхле іноді важко здогадатися, що вважати «голубом», а що «ящиком».

Приклад 17. В місті більше ніж 8 000 000 жителів. Науковці вважають, що в кожної людини менш ніж 200 000 волосин на голові. Доведіть, що є, принаймні, 41 житель з однаковою кількістю волосин на голові.

Оскільки $40 \cdot 200\,000 = 8\,000\,000$ (кількість волосин у людини коливається від 0 до 199 999, усього 200 000 варіантів), то, згідно з принципом Діріхле знайдеться, принаймні, 41 житель, що має однакову кількість волосин на голові. Тут роль «голубів» відіграють жителі, а роль «ящиків» – усі можливі варіанти кількості волосин на голові.

Доведемо принцип Діріхле в узагальненій формі.

Теорема 1.13. Якщо $k \cdot n+1$ предмет розкладений в k ящиків, то, принаймні, в одному з ящиків лежить не менше, ніж $n+1$ предмет.

Доведення

Доведення проведемо методом математичної індукції.

1. Доведемо вірність твердження при $k=1$. В цьому випадку всього буде $n \cdot 1+1=n+1$ «предметів». Якщо їх розкласти в $k=1$ «ящиків», то в цьому ящику буде $n+1$ «предмет».

2. Припустимо тепер, що при розміщенні $p \cdot n+1$ «предметів» в $k=p$ «ящиках» знайдеться ящик, в якому є не менше, ніж $n+1$ «предмет».

3. Доведемо вірність твердження при $k=p+1$. В цьому випадку число «предметів» дорівнює $(p+1) \cdot n+1 = (n \cdot p+1) + n$, а число «ящиків» дорівнює $p+1$.

Якщо в одному з цих «ящиків» більше, ніж n «предметів», тобто не менше, ніж $n+1$ предмет, то твердження доведене. Якщо в цьому «ящику» не більше, ніж n «предметів», то в останніх p «ящиках» знаходиться не менше, ніж $n \cdot p+1$ «предмет». А тоді, по припущенню 2, знайдеться «ящик», в якому не менше, ніж $n+1$ «предмет».

Отже, в обох випадках підтвердилася вірність твердження для $k=p+1$. Це означає, що твердження вірно для будь-якого натурального значення k. Теорему доведено.

Приклад 18. На п'яти поличках книжкової шафи 161 книга, причому на одній з поличок – 3 книги. Доведіть, що знайдеться поличка, на якій не менше ніж 40 книг.

Припустимо, що на кожній з решти чотирьох поличок не більш ніж 39 книг. Тоді на всіх п'яти поличках не більше ніж 3+4·39=160 книг, що суперечить умові. Отже, на одній із поличок не менше ніж 40 книг. У цьому випадку книги – «предмети», полички – «ящики».

§ 1.8. Короткий нарис розвитку теорії множин

Теорія множин – розділ математики, в якому вивчаються загальні властивості множин. Теорія множин лежить в основі більшості математичних дисциплін; вона мала глибокий вплив на розуміння предмета самої математики. Створення теорії множин було підготовлено роботами математиків XIX століття, які ставили за мету розробку підстав математичного аналізу. Перші роботи в цій галузі були присвячені числовим множинам і множинам функцій (Б. Больцано, Р. Дедекінд).

Бернард Больцано

Уже в цих роботах виникло питання про кількісне порівняння нескінченних множин.

Перший нарис теорії множин виклав чеський математик та філософ Бернард Больцано (1781-1848) у роботі «Парадокси нескінченного» (вид. у 1851 р.). Він розглядав довільні нескінченні числові множини, і для їх порівняння визначив поняття взаємно-однозначної відповідності. За Больцано, нескінченне розуміється як кількість. *«Але кількістю (і величиною) займається саме математика. Тому саме математичні конструкції з нескінченністю мають принципове значення».* Робота Б. Больцано носить переважно філософський характер, в ній немає цілісної математичної теорії.

Незважаючи на те, що підстави теорії множин визначив Бернард Больцано, створення теорії в цілому одноголосно приписується німецькому математику Георгу Кантору (1845-1918). Кантору належить наступна характеристика поняття «множина»: *«Множина – це об'єднання певних, різних об'єктів, званих елементами множини, в єдине ціле»*. У 1870 р. Георг

Георг Кантор

Кантор розробив свою програму стандартизації математики, у рамках якої будь-який математичний об'єкт повинен був виявлятися тією або іншою «множиною». Цей підхід викладений в двох його статтях, опублікованих в 1879-1897 рр. у відомому німецькому журналі «Математичні аннали». Г. Кантор підкреслено називав свою програму не *теорією множин* (цей термін з'явився багато пізніше), а *вченням про множини*.

Ріхард Дедекінд

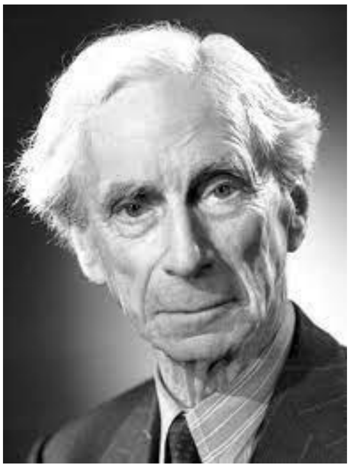
У 1885-1895 роки роботи зі створення наївної теорії множин отримали розвиток, перш за все, в працях Ріхарда Дедекінда. Так, в книзі «Що таке числа і для чого вони служать?» систематично викладені отримані на той час найбільш узагальнені результати теорії множин: для множин довільної природи (не обов'язково числових) нескінченну множину визначено як множину, між якою та її власною підмножиною можна встановити взаємно-однозначну відповідність, сформульована теорема Кантора- Бернштейна, яка дозволяє порівнювати потужності множин, викладена алгебра множин та встановлені властивості теоретико-множинних операцій. Німецький математик Ернст Шредер у 1895 році звертає увагу на збіг алгебри множин та обчислення висловлювань, тим самим встановлюючи глибокий зв'язок між математичною логікою і теорією множин

У 1895-1897 роки Кантор публікує цикл з двох робіт, який в цілому завершує створення *наївної теорії множин*.

Програма Кантора викликала різкі протести з боку багатьох сучасних йому математиків. Особливо виділявся своїм непримиренним до неї відношенням Леопольд Кронекер, який вважав, що математичними об'єктами можуть вважатися лише натуральні числа і те, що до них безпосередньо зводиться (відома його фраза про те, що «бог створив натуральні числа, а усе інше – справа рук людських»). Повністю відкинули теорію множин і такі авторитетні математики, як Герман Шварц і Анрі Пуанкаре. Проте, інші математики – зокрема, Готліб Фреге, Ріхард Дедекінд і Давид Гільберт – підтримали Кантора в його намірі перекласти усю математику теоретико-множинною мовою. Теорія множин стала фундаментом теорії міри і інтеграла, топології і функціонального аналізу і багатьох інших розділів математики.

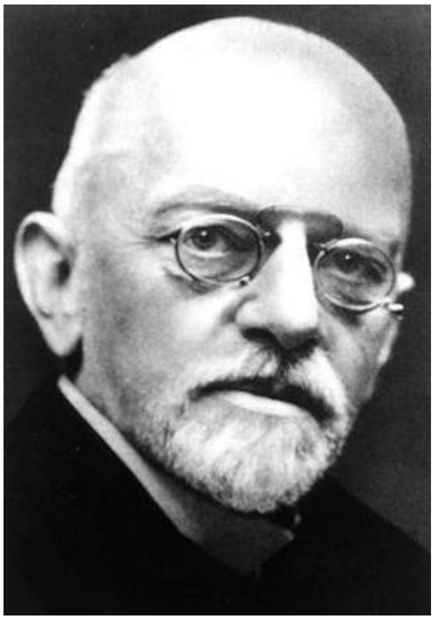
Незабаром з'ясувалося, що установка Кантора на необмежене свавілля при операції з нескінченними множинами (виражена їм самим в принципі «суть математики полягає в її свободі») є невірною. А саме, були виявлені ряд теоретико-множинних антиномій (протиріч): виявилось, що при використанні теоретико-множинних уявлень деякі твердження можуть бути доведені разом зі своїми запереченнями (а тоді, згідно з правилами класичної логіки висловлювань, може бути доведено абсолютно будь-яке твердження).

У 1903 році видатний англійський філософ і логік Бертран Рассел (1872-1970) показав, що теорія множин Кантора є непослідовною. Це поставило під сумнів можливість використання поняття множини без будь-яких обмежень. Відомий так званий парадокс Рассела, який формулюється наступним чином: Нехай K – множина всіх множин, які не містять себе у якості свого елементу. Чи містить K само себе у якості елементу? Якщо так, то, за визначенням K, воно не має бути елементом K – протиріччя. Якщо ні – то, за визначенням K, воно має бути елементом K – знову протиріччя. Існує багато популярних формулювань цього парадоксу. Одне з них традиційно називається парадоксом цирульника і звучить так: Одному сільському цирульникові наказали: «Голити всякого, хто сам не голиться, і не голити того, хто сам голиться». Як він повинен поступити з собою? Навіть сам Кантор усвідомлював труднощі, до яких призводило існування множини всіх множин, сформулювавши проблемне визначення множини, яка містить сама себе в якості елемента.



Бертран Рассел

Після виявлення парадокса (антиномії) Рассела частина математиків вирішила повністю відмовитися від використання теоретико-множинних уявлень. Інша ж частина математиків, очолена видатним німецьким математиком Давідом Гільбертом (1862-1943), зробила ряд спроб строго обґрунтувати ту частину теоретико-множинних уявлень, яка здавалася їм найбільш відповідальною за виникнення антиномій.



Давид Гільберт

У 1908 році німецький математик Ернест Цермело (1871-1953) запропонував формальну аксіоматичну теорію множин, метою створення якої було уникнення парадоксів, таких як парадокс Рассела. В теорії не припускалося існування універсальної множини. Пізніше, у 1922 році систему Ернеста Цермело удосконалив ізраїльський математик Абрахам Френкель (1891-1965), який доповнив систему аксіом Цермело. Теорія Ернста Цермело (1908 р.) і її уточнення, розроблені Абрахамом Френкелем (1922 р.), Туральфом Альбертом Сколемою (1923 р.), Джоном фон Нейманом (1925 р.) та іншими авторами, сформували фундамент, на якому будується сучасна теорія множин. Нині найбільш поширеною аксіоматичною теорією множин є так звана ZFC – теорія Цермело-Френкеля. В цій теорії не використовується поняття множини всіх множин, що дозволяє уникати протиріч. Однак, питання про несуперечливість теорії ZFC залишається невирішеним.

Через зазначені протиріччя «наївна» теорія множин, тобто та теорія множин, яку створив Кантор, не може бути використана в повному обсязі. З одного боку, незважаючи на суперечливість, нею продовжують користуватися в різних областях математики. Необхідно було виправити існуючий стан справ. Були запропоновані різні виходи із ситуації, але їх довелося визнати в кінцевому підсумку незадовільними.

Контрольні запитання і завдання

1. Чи є множина означуваним поняттям?
2. Укажіть способи завдання множини, наведіть приклади.
3. Що називається характеристичною властивістю множини?
4. Задайте декілька множин характеристичною властивістю.
5. На які класи діляться множини за кількістю елементів? Наведіть приклади.
6. Яка множина називається порожньою?
7. Що називається підмножиною даної множини? Наведіть приклади.
8. Що називається власною підмножиною непорожньої множини? невласною?
9. Що називається булеаном множини?
10. Скільки елементів містить булеан множини, що містить n елементів?
11. Наведіть приклад нескінченої множини, виберіть у ній декілька скінчених та нескінчених підмножин.
12. Наведіть властивості включення множин.
13. Які множини називаються рівними?
14. Що називається діаграмами Ейлера-Венна? Яке їх застосування у теорії множин?
15. Сформулюйте означення операції об’єднання множин.
16. Сформулюйте означення операції перетину множин.
17. Сформулюйте означення операції різниці множин.
18. Сформулюйте означення операції симетричної різниці множин.
19. Наведіть властивості операції перетину множин.
20. Чи є асоціативною операція різниці множин? Доведіть за допомогою діаграм Ейлера-Венна.
21. Чи є асоціативною операція симетричної різниці множин?
22. Який закон описує зв'язок між операцією різниці і перетину двох множин? Доведіть його за допомогою діаграм Ейлера-Венна.
23. Які з операцій над множинами комутативні?

24. Які з операцій над множинами асоціативні?
25. Відносно яких операцій множини утворюють кільце? Чи є воно комутативним? Чи існує у цьому кільці одиниця?
26. Опишіть множину X з рівняння $A \backslash X = B$, якщо:

    а) $B \subseteq A$; б) $A \subseteq B$; в) $A \cap B = \varnothing$; г) $A \cap B \neq \varnothing$, де A і B довільні множини.
27. Яку множину ми отримуємо у результаті операції $A \Delta A$?
28. Яку множину ми отримуємо у результаті операції $A \Delta \emptyset$?
29. Дайте означення доповнення множини. Назвіть її властивості та наведіть приклади.
30. Опишіть доповнення множини натуральних чисел до множини цілих чисел.
31. Опишіть доповнення множини раціональних чисел до множини дійсних чисел.
32. Опишіть доповнення множини квадратів до множини ромбів.
33. Опишіть доповнення множини ромбів до множини паралелограмів.
34. Що називається універсальною множиною? Як ви вважаєте, чи можна для даної множини визначити універсальну множину однозначно?
35. Що називається декартовим добутком n множин?
36. Що називається декартовим добутком множин А і В?
37. Що називається кортежем?
38. Які впорядковані пари називають рівними?
39. Чи комутативна операція добутку двох множин? Наведіть приклад.
40. Чи асоціативна операція добутку множин? Наведіть приклад.
41. Скільки елементів містить декартів добуток множин $A\text{x}\varnothing$?
42. Скільки елементів містить декартів добуток множин АхВ, якщо множина А містить 4 елементи, а множина В – 3 елементи.
43. Чи дистрибутивна операція декартового добутку відносно операцій об’єднання, перетину, різниці множин?

Завдання для самоперевірки

Варіант 1

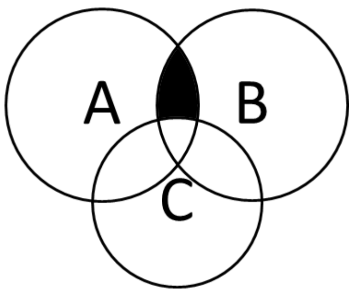
1. Яка з наведених операцій над множинами не володіє властивістю комутативності?

А	Б	В	Г
об'єднання множин	різниця множин	перетин множин	симетрична різниця множин

2. Множина А – це множина цілих чисел, множина В – множина додатних раціональних чисел. Як можна задати множину натуральних чисел за допомогою множин А і В?

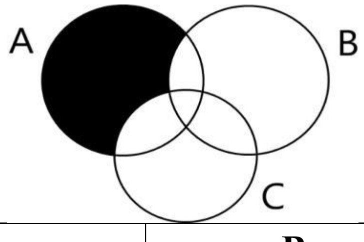
А	Б	В	Г
$B\setminus A$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A\setminus B$

3. Множини А, В, С зображені кругами Ейлера. Визначити, якому виразу відповідає заштрихована множина.



А	Б	В	Г
$(A \cap B) \cap C$	$(A \cup B) \cap C$	$(A \cup B)\setminus C$	$(A \cap B)\setminus C$

4. Множини А, В, С зображені кругами Ейлера. Визначити, якому виразу відповідає заштрихована множина.



А	Б	В	Г
$A\setminus(B\setminus C)$	$(A\setminus C) \cap B$	$(A \cup C) \cap \bar{B}$	$(A\setminus B)\setminus C$

5. Якщо множина $A = \{x \mid -2 < x \leq 4, x \in R\}$ і множина $B = \{x \mid -3 < x < 0, x \in R\}$, то множиною $A \cap B$ є множина:

А	**Б**	**В**	**Г**
$(-2; 0)$	$[-2;0)$	$(-2; 0]$	$[-2; 0]$

6. Якщо множини $A = \{x|x \in R, x < 3\}$, $B = \{x|x \in R, 1 \leq x \leq 6\}$, $C = \{x|x \in R, x < 2\}$, то множиною $(B \backslash C) \cap A$ є множина:

А	**Б**	**В**	**Г**
$\{x|x \in R, 2 \leq x < 3\}$	$\{x|x \in R, 1 \leq x < 3\}$	$\emptyset$	$\{x|x \in R, 2 < x < 3\}$

7. Скільки підмножин містить будь-яка множина, що складається з n елементів?

А	**Б**	**В**	**Г**
$2n$	2^n	n	$n!$

8. Які з тверджень є вірними?

a) $1 + \sqrt{3} \in Q$
b) $\frac{1}{5} \notin N$
c) $\pi \notin Q$
d) $-22{,}32 \in Q$
e) $e \in R$
f) $2{,}3(4) \notin R$

А	**Б**	**В**	**Г**
d, c, e	b, c, d, f	b, c, d, e	a, c, d, e

9. Скільки елементів містить множина $A = \{x|x \in Q\ x(x^2 - 2) = 0\}$?

А	**Б**	**В**	**Г**
жодного	один	два	три

10. Записати множину $A = (-\infty, 1{,}5]$ за допомогою характеристичної властивості.

А	**Б**	**В**	**Г**
$\{x|x \in Q, x > 1{,}5\}$	$\{x|x \in R, x \leq 1{,}5\}$	$\{x|x \in R, x < 1{,}5\}$	$\{x|x \in Q, x > 1{,}5\}$

11.Записати множину $A = \{-\frac{4}{9}, -\frac{5}{18}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{18}, \frac{2}{9}, \dots\}$ за допомогою характеристичної властивості.

А	**Б**
$\{x \mid x \in Q, x = -\frac{4}{9} + \frac{3}{18}k, k \in Z\}$	$\{x \mid x \in Q, x = -\frac{4}{9} + \frac{3}{9}k, k \in N\}$
В	**Г**
$\{x \mid x \in Q, x = -\frac{4}{9} + \frac{3}{18}k, k \in N \cup \{0\}\}$	$\{x \mid x \in Q, x = -\frac{4}{9} + \frac{3}{18}k, k \in N\}$

12.Знайти доповнення до множини $A = \{-2,\ 5\}$ у множині цілих чисел.

А	**Б**
AЂ $= \{1, 2, 3, 4, 6,7, \dots\}$	AЂ $= \{\dots, -4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$
В	**Г**
AЂ $= (-\infty, -2) \cup (-2; 5) \cup (5, +\infty)$	AЂ $= \{\dots, -4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, \dots\}$

13.Знайти доповнення до множини $A = \{x \mid x \in N, x = 2k\}$ у множині натуральних чисел.

А	**Б**
AЂ $= \{x \mid x \in N, x = 2k + 1\}$	AЂ $= \{$прості числа$\}$
В	**Г**
AЂ $= \{x \mid x \in N, x = 2k - 1\}$	AЂ $= \{-1, -3, -5, -7, -9, -11, \dots\}$

14.Яка множина є рівною множині $A \backslash (A \backslash B)$?

А	**Б**	**В**	**Г**
$\emptyset$	$A \cap B$	$B \backslash A$	$A \backslash B$

15.Яка множина є рівною множині $(A \backslash B) \cup (C \backslash B)$?

А	**Б**	**В**	**Г**
$(A \backslash C) \cap B$	$(A \cap C) \backslash B$	$(A \cup C) \cap B$	$(A \cup C) \backslash B$

16.Знайти перетин множин А і В, якщо А – множина чисел кратних 12, а В – множина чисел, кратних 8.

А	**Б**	**В**	**Г**
множина парних чисел	множина чисел, які діляться на 4	множина чисел, які діляться на 24	множина чисел, які діляться на 48

17.На столі лежать 15 фруктів – яблука та груші. Відомо, що серед будь яких обраних навмання 10 фруктів обов’язково є яблуко, а серед 7 фруктів – груша. Скільки яблук та скільки груш лежать на столі?

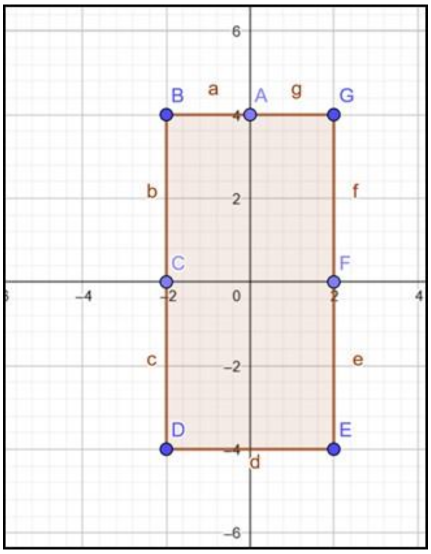
А	**Б**	**В**	**Г**
9 яблук і 6 груш	10 яблук і 5 груш	11 яблук і 4 груші	визначити неможливо

18.У мішку лежать кульки трьох різних кольорів. Яку найменшу кількість кульок потрібно вийняти з мішка, щоб серед них точно дві кульки виявились одного кольору?

А	**Б**	**В**	**Г**
п’ять	дві	три	чотири

19.На рисунку зображено декартів добуток множин X та Y. Серед даних множин знайти множини X та Y.

А $X = \{x \in R \mid -2 < x < 2\}$, $Y = \{y \in R \mid -4 < x < 4\}$.
Б $X = \{x \in R \mid -2 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \in R \mid -4 \le x \le 4\}$.
В $X = \{x \in R \mid -2 \ge x \ge 2\}$, $Y = \{y \in R \mid -4 \ge x \ge 4\}$.
Г $X = \{x \in R \mid x \le 2\}$, $Y = \{y \in R \mid x \le 4\}$.



20.Знайти декартів добуток множин AхB, якщо:

$A = \{x \in N \mid 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{y \in N \mid 2 < x \leq 3\}$.

А	**Б**
$\{(1,2),(1,3),(2,3),(3,2)\}$	$\{(1,3),(2,3),(3,3)\}$
В	**Г**
$\{(1,3),(2,3),(3,2)\}$	$\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$

Варіант 2

1. Яка з наведених операцій над множинами не володіє властивість комутативності?

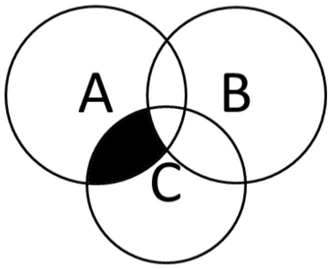
А	Б	В	Г
перетин множин	декартів добуток множин	симетрична різниця множин	об’єднання множин

2. Множина А – це множина натуральних чисел, множина В – множина цілих чисел. Як можна задати множину невід’ємних цілих чисел за допомогою множин А і В?

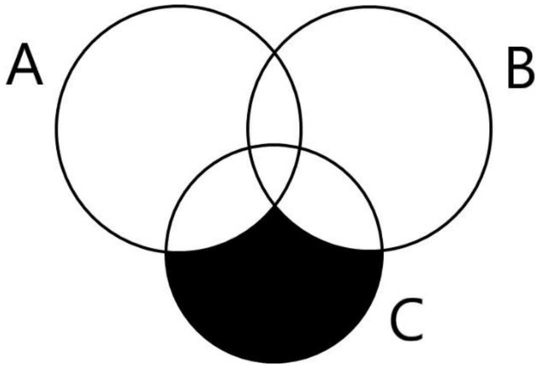
А	Б	В	Г
$B \setminus A$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$

3. Множини А, В, С зображені кругами Ейлера. Визначити, якому виразу відповідає заштрихована множина.

А $(A \cap C) \setminus B$	**Б** $(A \cup C) \cap B$
В $(A \cup B) \setminus C$	**Г** $(A \cap B) \cap C$



4. Множини А, В, С зображені кругами Ейлера. Визначити, якому виразу відповідає заштрихована множина.



А $C \setminus (A \setminus B)$	**Б** $(A \cap C) \setminus B$
В $(C \setminus A) \cap B$	**Г** $C \setminus (A \cup B)$

5. Якщо множина $A = \{x \mid -3 < x \le 2, x \in R\}$ і множина $B = \{x \mid -7 < x < 1, x \in R\}$, то множиною $A \cup B$ є множина:

А	**Б**	**В**	**Г**
$(-3; 1)$	$(-7; 2)$	$(-7; 2]$	$(-3; 2]$

6. Скільки елементів містить множина, яка має 32 підмножини?

А	**Б**	**В**	**Г**
5	8	4	3!

7. Які з тверджень є вірними?

a) $0 \in N$

b) $\frac{1}{5} \notin Z$

c) $-\frac{1}{4} \in Q$

d) $\pi \in Q$

e) $e + \sqrt{5} \in R$

f) $1{,}8(2) \notin Q$

А	**Б**	**В**	**Г**
d, c, e	b, c, e	a, c, e	b, c, f

8. Скільки елементів містить множина $A = \{x \mid x \in N, x^2 - x - 2 < 0\}$.

А	**Б**	**В**	**Г**
жодного	один	два	чотири

9. Записати множину $A = (-2, +\infty)$ за допомогою характеристичної властивості:

А	**Б**	**В**	**Г**
$\{x \mid x \in Z, x > -2\}$	$\{x \mid x \in R, x \ge -2\}$	$\{x \mid x \in R, x < -2\}$	$\{x \mid x \in R, x > -2\}$

10. Яка з множин є рівною множині $(A \backslash B) \cap (C \backslash B)$?

А	**Б**	**В**	**Г**
$(A \cup B) \cap C$	$(A \cap C) \setminus B$	$A \cap B \cap C$	$(B \setminus C) \cap A$

11. Вказати множину $C \backslash (B \cap A)$, якщо А – множина дільників числа 60, В – множина однозначних парних чисел, С – множина натуральних чисел, що не перевищують числа 21 й кратні 4.

А	**Б**	**В**	**Г**
$\{x \mid x \in N, x = 4k\}$	$\{8, 12, 16, 20\}$	$\{4, 8, 12, 16, 20\}$	$\{4\}$

12. Знайти доповнення до множини $A = [-2; \quad 5]$ у множині дійсних чисел.

А	**Б**
AЂ $= (-\infty, -2) \cup (-2; 5) \cup (5, +\infty)$	AЂ $= \{\dots, -4, -3, 6, 7, 8 \dots\}$
В	**Г**
AЂ $= (-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$	AЂ $= \{6, 7, 8 \dots\}$

13. Вказати неправильні твердження для довільних множин A та B:

a) $A \cap B \neq B \cap A$;

b) $\overline{A \cap B} = \bar{B} \cap A$Ђ;

c) $A \cap \emptyset = A$;

d) $A \setminus B = A \setminus (B \cap A)$.

А	**Б**	**В**	**Г**
b, d	*b, c, d*	*a, c*	*a, b, c*

14. Записати множину $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$ за допомогою характеристичної властивості:

А	**Б**
$\{x \mid x \in N, x = 2^k, k \in N\}$	$\{x \mid x \in N, x = 2^{-k}, k \in N\}$
В	**Г**
$\{x \mid x \in N, x = 2^k, k \in N \cup \{0\}\}$	$\{x \mid x \in N, x = 2^{2k}, k \in N\}$

15. Скільки людей може бути в групі, якщо відомо, що хоча б у чотирьох учасників день народження припадає на один місяць?

А	**Б**	**В**	**Г**
31	32	36	37

16. Обрати правильне твердження для даних множин: Р – множина ромбів, К – множина квадратів, С – множина чотирикутників, L – множина паралелограмів.

А	**Б**	**В**	**Г**
$K \subset P \subset L \subset C$	$L \subset P \subset K \subset C$	$P \subset K \subset L \subset C$	не має вірної відповіді

17. У ящику лежать кульки різних кольорів. Указати максимальну кількість різних кольорів, якщо відомо, що серед п'яти навмання витягнутих кульок хоча б дві кульки мають однаковий колір.

А	**Б**	**В**	**Г**
2	3	4	5

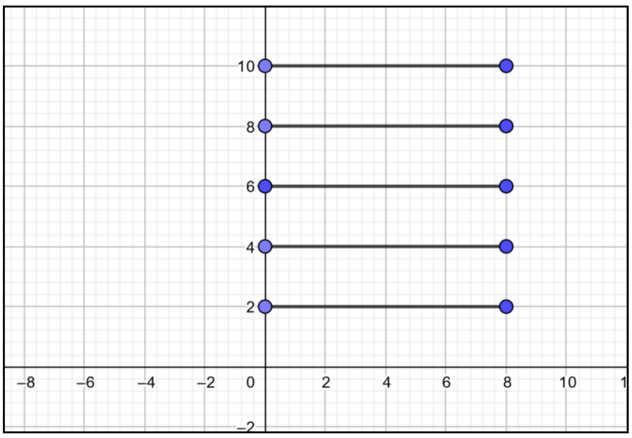
18. Скільки елементів містить множина $A \times B$, якщо множина А містить m елементів, а множина В містить n елементів?

А	**Б**	**В**	**Г**
n^m	mn	$\frac{m}{n}$	m^n

19. Вказати об'єднання множин А і В, якщо А – множина рівнобедрених трикутників, В – множина рівносторонніх трикутників.

А	**Б**	**В**	**Г**
множина довільних трикутників	множина рівнобедрених трикутників	множина рівносторонніх трикутників	множина рівнобедрених трикутників, що не є рівносторонніми.

20. Усі елементи декартового добутку двох множин X та Y зображені точками в прямокутній системі координат (див. рис). Запишіть множини X та Y.



А $X = \{x \in N \,\vert 0 \leq x \leq 8\,\}$, $Y = \{y \in N\vert 2 \leq x \leq 10\}$.	**Б** $X = \ \{x \in R \,\vert -2 \leq x \leq 2\,\}$, $Y = \ \{y \in R\vert -4 \leq x \leq 4\}$.
В $X = \{x \in R \,\vert 0 \leq x \leq 8\,\}$, $Y = \{y \in N\vert 2 \leq x \leq 10\}$.	**Г** $X = \{x \in N \,\vert 0 \leq x \leq 8\,\}$, $Y = \{y \in R\vert 2 \leq x \leq 10\}$.

Відповіді на завдання для самоперевірки

До варіанту 1				До варіанту 2			
№	відповідь	№	відповідь	№	відповідь	№	відповідь
1	Б	11	В	1	Б	11	Б
2	В	12	Г	2	А	12	В
3	Г	13	В	3	А	13	Г
4	Г	14	Б	4	Г	14	В
5	А	15	Г	5	В	15	Г
6	А	16	В	6	В	16	А
7	Б	17	А	7	Б	17	В
8	Г	18	Г	8	Б	18	Б
9	Б	19	Б	9	Г	19	Б
10	Б	20	Б	10	Б	20	В

РОЗДІЛ 2. КОМБІНАТОРИКА

§ 2.1. Основні правила комбінаторики

Будемо позначати через $|\quad|$ потужність множини (для скінченної множини – це кількість елементів.

Нехай A і B – скінчені множини з потужностями $|A| = n, |B| = m$.

Комбінаторика будується на двох правилах (суми і добутку):

1. Правило суми

$$|A \cup B| = |A| + |B|, \text{ якщо } A \cap B = \emptyset.$$

Це випливає з формули включень-виключень. Дійсно, елемент $a \in A$ можна обрати n способами, елемент $b \in B$ можна обрати m способами. Тоді елемент $x \in A \cup B$ можна вибрати $n + m$ способами.

Приклад 1. На тарілці лежать 3 яблука і 4 груші. Скількома способами можна вибрати один фрукт з тарілки?

$|Я| = 3, |Г| = 4, Я \cap Г = \emptyset$, тому $|Я \cup Г| = 3 + 4 = 7$ способів.

Зауваження. Формулу можна узагальнити для більшого числа множин. Нехай $A_1, A_2, \cdots, A_k$ – *множини, які попарно не перетинаються (тобто* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *якщо* $i \neq j$) *. Тоді число елементів у їх об'єднанні, тобто число способів вибору одного з них, дорівнює:*

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + \cdots + |A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

2. Правило прямого добутку

Згадаємо означення декартового добутку двох множин.

Декартовим (прямим) добутком множин A і B називається множина впорядкованих пар виду (a, b), де $a \in A, b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}.$$

Правило прямого добутку:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Дійсно, нехай множина $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Вибір елемента з множини A не залежить від вибору елемента з множини B.

Порахуємо, скільки впорядкованих пар виду (a_i, b_j), $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, можна скласти. Зафіксуємо елемент $a_1 \in A$. З цим елементом можна скласти пари $(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), \dots, (a_1, b_m)$ – всього m пар. Аналогічно, з елементом a_2 можна скласти m пар, з елементом a_n також m пар. Тоді всього можна скласти $n \cdot m$ пар. Тобто $|A \times B| = n \cdot m$.

Приклад 2. У шкільній їдальні першу страву можна вибрати з 2-х, другу страву – з 3-х запропонованих. Скільки можна скласти варіантів обідів з першої та другої страви?

За правилом прямого добутку число варіантів вибору страв потрібно перемножити $2 \cdot 3 = 6$.

Зауваження. Формулу можна узагальнити для більшого числа множин.

Приклад 3. Скільки існує тризначних чисел, які діляться на 5?

Тризначне число можна записати у вигляді $\overline{abc}$, де цифра $c \in \{0;\ 5\} = \mathrm{C}$, бо за умовою завдання число ділиться на 5, тобто закінчується цифрою 0 або 5, тому $|C|$=2. Цифра $b \in \{0, \dots, 9\} = B$, $|B|$=10, цифра $a \in \{1, \dots, 9\} = A$, $|A|$=9.

$$|A \times B \times C| = |A| \cdot |B| \cdot |C| = 9 \cdot 10 \cdot 2 = 180 \text{ чисел.}$$

Тобто першу цифру можна вибрати 9 способами, другу – 10 способами, третю – 2 способами. За правилом добутку потрібно перемножити числа способів вибору цифр числа.

Приклад 4. Знайдіть кількість чотиризначних чисел.

Чотиризначне число записуємо у вигляді $\overline{abcd}$, де цифра $a \in \{1, \dots, 9\}$, цифри $b, c, d \in \{0, \dots, 9\}$. Тоді кількість чотиризначних чисел дорівнює $9 \cdot 10^3 = 9000$.

Приклад 5. У меню їдальні три види перших страв, шість других страв і п'ять десертів. Можна вибрати на обід або першу і другу страву, *або* другу і третю. Скільки існує способів вибору обіду?

Позначимо через A_1 число способів вибору першого і другого блюд, а через A_2 – число способів вибору другого і третього.

Тоді шукане число знайдемо за формулою:
$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| =$ (за правилом суми) = 3 · 6+ 6 · 5=48 (за правилом добутку).

§ 2.2. Основні комбінаторні схеми

Розміщення з повтореннями

Означення. Довільний упорядкований набір k елементів n-елементної множини A називається *розміщенням з повтореннями* з n *елементів по* k.

1) Елементи в розміщенні можуть повторюватися.

2) Розміщення з повтореннями вважаються різними, якщо вони або мають різний склад елементів, або, в разі однакового складу елементів, відрізняються порядком розміщення елементів.

Наприклад, нехай множина $A = \{a, b, c\}$ і оберемо $k = 2$.

Складемо всілякі розміщення елементів множини A по 2 елементи: $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$ – отримали 9 ($9=3^2$) розміщень з повтореннями, причому розміщення ab і ba вважаються різними: у них однаковий склад елементів, але різний порядок слідування елементів у розміщенні.

Теорема 2.1. Число розміщень з повтореннями з n по k дорівнює n^k.

Нехай з n-елементної множини A нам потрібно вибрати розміщення з повтореннями по k елементів: $(a_1, a_2, \cdots a_k)$. Порахуємо кількість можливих варіантів вибору. Елемент $a_1 \in A$ можна вибрати n способами, елемент $a_2 \in A$ можна вибрати n способами, …, елемент $a_k \in A$ можна вибрати n способами. Тоді число розміщень з повтореннями з n по k дорівнює:

$|A \times A \times \cdots (k \text{ разів}) \cdots \times A| = n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^k$ (як наслідок з правила добутку).

Приклад 6. Скільки тризначних чисел можна скласти:

1) з цифр 2, 3 7, 8 за умови, що цифри в числі можуть повторюватися.
2) з цифр 0,3,4 за умови, що цифри в числі можуть повторюватися.

1) Тут $A = \{2, 3, 7, 8\}, |A| = 4, k = 3$. Кількість тризначних чисел дорівнює $4^3 = 64$.

2) Тут $A = \{0,\ 3,\ 4\},\ |A| = 3$. Потрібно відмітити, що перша цифра числа не може дорівнювати 0, тому першу цифру ми можемо обрати тільки двома способами, а дві інші цифри – 3^2 способами ($n = 3,\ k = 2$). Тому існує $2 \cdot 9 = 18$ шуканих чисел.

Розміщення без повторень

Нехай множина A скінчена, $|A| = n$ і відомим є число $0 \le k \le n$.

Означення. Довільний упорядкований набір k елементів n-елементної множини A, яка не містить повторюваних елементів, називається *розміщенням без повторень з n елементів по k.*

1) Елементи в розміщенні не можуть повторюватися.

2) Розміщення без повторень вважаються різними, якщо вони або мають різний склад елементів, або, в разі однакового складу елементів, відрізняються порядком розміщення елементів.

Число розміщень без повторень позначається символом A_n^k (читаємо: A з n по k).

З'ясуємо, скільки розміщень без повторень довжини k можна скласти з n елементів множини A.

Спочатку розберемо завдання на конкретному прикладі. Нехай дано множину $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ і нехай $k = 2$. Складемо всілякі розміщення з повтореннями, їх 9.

1,1 1,2 1,3

2,1 2,2 2,3

3,1 3,2 3,3

Оберемо з них розміщення без повторень Їх 6.

1,2 1,3.

2,1 2,3

3,1 3,2

Теорема 2.2. Число розміщень без повторень з n по k дорівнює $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Необхідно вибрати упорядкований набір різних елементів $a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_k$ з множини A, $|A| = n$. Перший елемент a_1 ми можемо вибрати n способами, другий елемент a_2 – $(n\ -\ 1)$ способом, оскільки перший елемент буде вже обраний, і другий елемент можна вибрати з $(n\ -\ 1)$ елементів, що залишилися і т.д. Тоді отримуємо, що:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

Означення. Факторіалом натурального числа n називається добуток всіх послідовних натуральних чисел, що не перевищують даного n.

Факторіал числа n позначають через $n!$. За означенням $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$. Наприклад, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Вважають, що $0! = 1$ за означенням.

Термін «факторіал» походить від англійського слова «фактор» (множник).

Формулу можна перетворити таким способом:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Приклад 7. На змаганнях з волейболу розігрується комплект медалей між 7 командами-учасницями. Скількома способами можуть бути розподілені медалі?

Тут $n = 7, k = 3$. Обчислимо $A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ способів розподілення медалей.

Зауваження. Потрібно пам'ятати, що при обчисленні числа розміщень порядок слідування елементів враховується.

Перестановки

Означення. Будь-яке розміщення без повторень n елементів по n називається *перестановкою*.

Перестановка P_n – окремий випадок розміщень без повторення A_n^k при $k = n$.

Тому
$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

Приклад 8. На полиці розставлено 6 книг, 4 з математики, 2 – з фізики. Скількома способами можна розставити ці книги на одній полиці? Скількома способами можна розставити книги на полиці так, щоб книги з математики стояли поруч? Скількома способами можна розставити книги на полиці так, щоб книги з фізики не стояли поруч?

Число можливих способів розставити 6 книг на полиці дорівнює
$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Щоб обчислити кількість способів розставлення книг таким чином, щоб книги з математики стояли поруч, «склеїмо» книги з математики. Тоді маємо 3 «книги», число способів їх розставлення дорівнює $3! = 6$, а тепер обчислимо кількість варіантів розміщення 4 книг з математики між собою, коли вони стоять поруч, число варіантів дорівнює $4! = 24$. Тоді число шуканих варіантів за правилом добутку дорівнює $6 \cdot 24 = 144$.

Щоб обчислити кількість способів розставлення книг таким чином, щоб книги з фізики не стояли поруч, підрахуємо спочатку число варіантів можливого розставлення книг без обмежень та віднімемо число варіантів, коли книги з фізики стоять поруч. Маємо $6! - 5! \cdot 2! = 720 - 240 = 480$ варіантів.

Комбінації

Означення. *Комбінаціями* з n елементів по k без *повторень* називаються можливі розміщення довжини k, які відрізняються один від одного тільки складом.

Позначаються комбінації як C_n^k (читаємо: С з n по k).

Розглянемо для прикладу множину $A = \{1, 2, 3\}$ і оберемо $k = 2$. Випишемо всі впорядковані набори елементів множини *A* по два.

1,1	1,2	1,3
2,1	2,2	2,3
3,1	3,2	3,3

Комбінації повинні відрізнятися тільки складом елементів, порядок слідування елементів не враховується. З виписаних наборів комбінацій рівно три комбінації є комбінаціями без повторень: 1,2   1,3 і 2,3, тобто $C_3^2 = 3$.

За означенням вважаємо, що $C_n^0 = C_n^n = 1$ для всіх цілих $n \geq 0$.

Теорема 2.3. Число комбінацій з n по k дорівнює $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ при $k \geq 1$.

Зрозуміло, що число $C_n^k < A_n^k$. При $k < n$ число комбінацій C_n^k можна отримати, якщо з числа розміщень без повторень прибрати розміщення з тими ж елементами, але які відрізняються порядком слідування елементів, це число дорівнює $P_k = k!$ Тоді: $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Приклад 9. У лотереї учасник викреслює 6 номерів з набору від 1 до 49. Порядок ролі не грає. Число можливих комбінацій дорівнює:

$$C_{49}^6 = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13983816.$$

Приблизно, один шанс з 14 мільйонів зірвати джекпот!

Зауваження. Мовою теорії множин число C_n^k *дорівнює числу* k*-елементних підмножин* n*-елементної множини А при* $0 \leq k \leq n$.

$C_n^0 = 1$ – це число підмножин n-елементної множини A, які не містять жодного елементу, така підмножина одна: це порожня множина.

$C_n^1 = n$ – це число одноелементних підмножин n - елементної множини A, воно дорівнює числу елементів множини A.

$C_n^n = 1$– це число підмножин n-елементної множини A, які містять n елементів, така підмножина одна: це сама множина A.

Бачимо, що $|\mathrm{B(A)}| = 2^n$. Тоді ми одразу отримаємо формулу:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Приклад 10. Скільки 4-х елементних підмножин можна вибрати з 7-ми елементної множини?

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3} = 35 \text{ підмножин.}$$

Приклад 11. Бінарні послідовності – це послідовності, що складаються з нулів і одиниць. Існує 2^n n-значних бінарних послідовностей, так як кожен з знаків приймає значення 0 і 1. Так, наприклад, є 8 бінарних послідовностей довжини 3: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

1) Скільки бінарних послідовностей довжини 12 містить рівно 6 нулів?

2) Скільки з них мають більше нулів, ніж одиниць?

1) Шість нулів займають 6 з 12 місць. Тому, існує $C_{12}^6 = 924$ способів вибору шести позицій з 12. Це і є шукане число.

2) Існує $2^{12} - 924$ послідовностей з нерівним числом нулів і одиниць. З огляду на симетрію, рівно половина з них, тобто $\frac{2^{12}-924}{2} = 1586$, мають нулів менше, ніж одиниць.

Закінчимо цей параграф двома простими властивостями чисел C_n^k.

Теорема 2.4.

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$ для всіх k, $0 \le k \le n$.

2) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ для всіх k, $0 < k \le n$.

Доведення

1) Обчислимо за формулою:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-n+k)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Також достатньо помітити, що вибрати k з n це все одно, що вибрати $n-k$, які не слід вибирати.

2) k предметів, вибрані з $n+1$ предмета $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ можуть містити x_{n+1} або не містити x_{n+1}. Якщо не містять, то k предметів обираються з $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Способів такого вибору C_n^k.

Якщо вибрані k предметів містять x_{n+1}, то інші $k-1$ предмет повинні бути вибрані з $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Способів такого вибору існує C_n^{k-1}. Результат тепер слідує за правилом суми.

Інший спосіб доведення:

$$\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{n!(n+1)}{k(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \mathrm{C}_{n+1}^k.$$

Комбінації з повтореннями

Припустимо тепер, що ми хочемо вибрати k елементів з n із можливими повтореннями, не враховуючи порядку слідування. Наприклад, існує 10 способів вибору двох елементів з множини {1, 2, 3, 4} не враховуючи порядку слідування з можливими повтореннями. Ось вони: 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 2,2; 2,3; 2,4; 3,3; 3,4; 4,4.

Теорема 2.5. Число комбінацій k елементів з n із можливими повтореннями дорівнює C_{n+r-1}^r

Доведення

Кожна обрана комбінація містить x_1 першого елементу, x_2 другого елемента і т. д., при цьому $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$. Отже, шукане число комбінацій дорівнює кількості розв'язків рівняння

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

у невід'ємних цілих числах.

Ми можемо записати розв’язок рівняння у вигляді бінарної послідовності: $\underbrace{00\ldots0}_{x_1}1\underbrace{00\ldots0}_{x_2}1\,00\ldots0\,1\underbrace{00\ldots0}_{x_n}$, одиниці тут розглядаються як перехід між елементами, за умовою, що вони різні.

Наприклад, розв’язку $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 1$ рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ відповідає бінарна послідовність 00110010.

У бінарній послідовності, що відповідає розв’язку рівняння $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$, буде r нулів і $n - 1$ одиниць. Довжина цієї послідовності буде $n + r - 1$.

Справедливим є і обернене твердження: кожній бінарній послідовності довжини $n + r - 1$, що містить r нулів відповідає розв’язок рівняння $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ у невід’ємних цілих числах. При цьому r нулів можуть перебувати на будь-яких $n + r - 1$ місцях в послідовності і, таким чином, число невпорядкованих виборів, тобто число комбінацій C_{n+r-1}^{r} є шуканим числом.

Тим самим ми довели також такий результат.

Теорема 2.6. Число розв’язків рівняння $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ у невід’ємних цілих числах дорівнює C_{n+r-1}^{r}.

Приклад 12. Число розв’язків рівняння $x + y + z = 17$ у невід’ємних цілих числах дорівнює $C_{17+3-1}^{17} = C_{19}^{17} = C_{19}^{2} = 171$.

Приклад 13. Скільки розв’язків має рівняння $x + y + z = 17$ у додатних цілих числах?

За умови $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ тому, ми покладемо

$x = 1 + u, y = 1 + v, z = 1 + w$.

Підставляючи в рівняння, отримуємо $u + v + w = 14$. Тепер ми шукаємо розв’язок нового рівняння в невід'ємних цілих числах u, v, w. Число розв’язків дорівнює $C_{14+3-1}^{14} = C_{16}^{2} = 120$.

Приклад 14. Скільки існує бінарних послідовностей, що містять рівно p нулів і q одиниць з $q \geq p - 1$, що не мають поряд нулів.

Уявимо собі q одиниць, що розташовані в ряд: $\cdots 1 \cdots 1 \cdots 1 \cdots$.

Вони утворюють $q + 1$ комірку, у які необхідно розмістити нулі ($q - 1$ комірка між одиницями і по одній з країв). p нулів повинні бути поміщені в різні комірки, тому число способів їх розташування дорівнює C_{q+1}^{p}

Зведемо результати параграфу у таблицю:

Число способів вибору r елементів з n	*З урахуванням порядку*	*Без урахування порядку*
Без повторень	A_n^r	C_n^r
З повтореннями	n^r	C_{n+r-1}^{r}

§ 2.3. Біном Ньютона і трикутник Паскаля

Слово біном означає «два числа». У математиці біномом називають формулу для розкладання в суму цілого невід'ємного ступеня суми двох доданків $(a+b)^n$. Біном Ньютона – формула, що при $n > 0$ має вигляд:

$$(a+b)^n =$$
$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^{n-3}b^3 + \dots + nab^{n-1} + b^n =$$
$$= a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \dots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n,$$

де C_n^kчисло комбінацій з n елементів по k:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Числа C_n^k називають ще *біноміальними коефіцієнтами*. Зараз побачимо, чому. Зауважимо, що

$$(a+b)^0 = 1,$$
$$(a+b)^1 = a + b,$$
$$(a+b)^2 = a + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \text{ і т. д.}$$

Коефіцієнти складають трикутник, який називають трикутником Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

……………………………………………

або

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&C_0^0=1&&&& \\ &&&C_1^0=1&&C_1^1=1&&& \\ &&C_2^0=1&&C_2^1=2&&C_2^2=1&& \\ &C_3^0=1&&C_3^1=3&&C_3^2=3&&C_3^3=1& \\ C_4^0=1&&C_4^1=4&&C_4^2=6&&C_4^3=4&&C_4^4=1 \end{array}$$

……………………………………………………………………………………......

Елементи r-го рядка трикутника Паскаля є біноміальними коефіцієнтами C_n^r $(0 \le r \le n)$.

Ісаак Ньютон

Трикутник ілюструє наступні властивості коефіцієнтів:

1) симетрію кожного рядка коефіцієнтів;

2) кожен наступний елемент рядка є сумою двох елементів, що стоять над ним;

3) сума елементів кожного рядка коефіцієнтів є відповідним степенем числа 2.

Насір ад-Дін Тусі

Хоча формула бінома носить ім'я Ісака Ньютона (1643-1727), вона була відома задовго до нього. Сам І. Ньютон в кінці XVII століття узагальнив формулу бінома для випадку, коли показник степеня n — будь-яке дійсне або комплексне число. У цьому випадку біном являє собою нескінченний ряд. Запис формули бінома Ньютона, що зберігся для нащадків, зустрічається вперше в книзі 1265 року персидського математика Насір ад-Діна Тусі, в якій є таблиця біноміальних коефіцієнтів до $n = 12$ включно.

Формула бінома була відома китайському математику Яну Хуею, що жив в XIII столітті, а також перському математику Аль-Каші (XV століття).

Блез Паскаль

У середині XVI століття німецький математик Міхаель Штіфель (бл.1487-1567) описав біноміальні коефіцієнти і також склав їх таблицю до n = 18. Детальне вивчення властивостей біноміальних коефіцієнтів провів французький математик і філософ Блез Паскаль (1623-1662) у 1654 році, використовуючи їх у своїй роботі з теорії ймовірностей. Строге доведення формули бінома для довільного натурального значення n було наведене в 1713 році швейцарським математиком Якобом Бернуллі (1655-1705). Формула бінома Ньютона для натурального показника n є окремим випадком розкладання функції $(1 + \mathrm{x})^{\alpha}, \alpha \epsilon \mathbb{R}$ в ряд Тейлора.

Якоб Бернуллі

Теорема 2.7 (біноміальна теорема). Для кожного натурального значення n справедлива формула:

$$(x + y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \cdots + C_n^n y^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^{n-r} y^r \ (*).$$

Доведення

Представимо вираз $(x + y)^n$ у вигляді добутку n множників:

$(x + y)^n = (x + y)(x + y) \cdots (x + y).$

Коефіцієнт при $x^{n-r}y^r$ дорівнює кількості способів отримати $x^{n-r}y^r$ при розкритті дужок. Кожен член, отриманий при розкритті дужок є добутком по одному з доданків з кожних дужок. Таким чином, $x^{n-r}y^r$ виходить стільки раз, скільки способів є обрати y з r дужок (або, що те ж саме, x з $n-r$ дужок). Але це і є число комбінацій з n по r. Формулу $(*)$ доведено.

Наслідок 1. $(1+y)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r y^r$.

Достатньо покласти $x = 1$ у рівняння (*).

Наслідок 2. Покладемо $x = y = 1$ у рівняння (*) і отримаємо

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

Наслідок 3. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0, (n > 0)$.

Достатньо покласти $x = 1, y = -1$ у рівняння (*).

Приклад 15. Складіть трикутник Паскаля до $n = 7$.

				1				0-ий рядок
			1		1			1-ий рядок
		1		2		1		
		1	3		3	1		
	1	4		6		4	1	
1	5		10		10	5	1	
1	6	15		20		15	6	1
1	7	21	35		35	21	7	1	7-ий рядок

Наприклад, сума елементів трикутника, що розташовані на лінії, яка паралельна послідовності одиниць трикутника зліва, дорівнює 1+3+6+10+15=35.

Теорема 2.8 . Для всіх $m \geq 0$ і $n \geq 0$

$$C_m^m + C_{m+1}^m + \cdots + C_{m+n}^m = C_{m+n+1}^{m+1}.$$

Доведення

Застосуємо властивість комбінацій: $C^{m+1}_{m+n+1} = C^m_{m+n} + C^{m+1}_{m+n}$, знову застосуємо цю властивість: $C^{m+1}_{m+n+1} = C^m_{m+n} + C^m_{m+n-1} + C^{m+1}_{m+n-1}$ і т.д. Остаточно $C^{m+1}_{m+n+1} = C^m_{m+n} + C^m_{m+n-1} + \cdots + C^m_{m+1} + C^{m+1}_{m+1}$.

Оскільки $C^{m+1}_{m+1} = 1 = C^m_m$, отримаємо шуканий результат.

Біноміальна теорема дозволяє отримати деякі тотожності.

Приклад 16. Розглянемо тотожність

$$(1 + x)^n(1 + x)^n = (1 + x)^{2n},$$

тобто

$$(C^0_n + C^1_n x + \cdots + C^n_n x^n)(C^0_n + C^1_n + \cdots + C^n_n x^n) = \sum_{r=0}^{2n} C^r_{2n} x^r.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при x^n в обох частинах цієї тотожності, отримуємо рівність

$$C^0_n C^n_n + C^1_n C^{n-1}_n + \cdots + C^n_n C^0_n = C^n_{2n},$$

яка може бути записаною у вигляді

$$(C^0_n)^2 + (C^1_n)^2 + \cdots + (C^n_n)^2 = C^n_{2n}.$$

Наприклад, при $n = 4$ отримаємо

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 70 = C^4_8.$$

Аналогічно отримуємо результат для знакозмінної суми.

Приклад 17. Використати тотожність $(1 - x^2)^n = (1 - x)^n(1 + x)^n$ для знаходження суми $(C^0_n)^2 - (C^1_n)^2 + (C^2_n)^2 - \cdots + (-1)^n C^n_n$.

Розглянемо коефіцієнт при x^n в обох частинах рівності. Права частина має вигляд

$$(1 - x)^n(1 + x)^n = (1 - C^1_n x + C^2_n x^2 - \cdots + (-1)^n C^n_n x^n)(1 + C^1_n x + C^2_n x^2 + \cdots + C^n_n x^n).$$

Коефіцієнт при x^n дорівнює

$$\sum_{r+s-n} (-1)^r C^r_n C^s_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C^r_n C^{n-r}_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r (C^r_n)^2.$$

Коефіцієнт при x^n у лівій частині дорівнює нулю, якщо n – непарне, і дорівнює $(-1)^{\frac{n}{2}}C_n^{\frac{n}{2}}$, якщо n – парне. Отже, ми маємо

$$(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - \cdots + (-1)^n(C_n^n)^2 = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}C_n^{\frac{n}{2}}, & \text{якщо } n \text{ є парним.} \\ 0, & \end{cases}$$

Наприклад,

$$(C_5^0)^2 - (C_5^1)^2 + (C_5^2)^2 - (C_5^3)^2 + (C_5^4)^2 - (C_5^5)^2 = 0,$$

$$(C_4^0)^2 - (C_4^1)^2 + (C_4^2)^2 - (C_4^3)^2 + (C_4^4)^2 = 1 - 16 + 36 - 16 + 1 = 6 = C_4^2.$$

$$(C_6^0)^2 - (C_6^1)^2 + (C_6^2)^2 - (C_6^3)^2 + (C_6^4)^2 - (C_6^5)^2 + (C_6^6)^2 = -20 = -C_6^3.$$

§ 2.4. Розбиття множини

Означення. Розбиттям множини S називається непорожній набір підмножин $S_1, \ \dots \ , \ S_r$ множини S, котрі попарно не перетинаються, та об'єднання яких дорівнює S.

Підмножини S_i називаються *частинами розбиття*.

Наприклад, $\{1, 2, 4\} \cup \{3, 6\} \cup \{5\}$ є розбиттям множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ на три частини. Зазначимо, що порядок в розташуванні частин та порядок елементів у частині ролі не грають.

Приклад 18. При грі в бридж 52 карти розподіляються між чотирма гравцями, котрі отримають по 13 карт. Скільки способів такого розподілу?

Число способів вибору 13 карт з 52 дорівнює C_{52}^{13}. З 39 карт, що залишились, існує C_{39}^{13} способів вибору наступних 13 карт. Потім є C_{26}^{13} способів вибору 13 з 26 карт, що залишились. Після цього залишається 13 карт. Таким чином, маємо

$$C_{52}^{13} \cdot C_{39}^{13} \cdot C_{26}^{13} = \frac{52!}{13!\,39!} \cdot \frac{39!}{13!\,26!} \cdot \frac{26!}{13!\,13!} = \frac{52!}{(13!)^4}$$

способів розбиття колоди. Але не всі ці способи різні. Кожне розбиття зустрічається 4! раз. Остаточно, число можливих розбиттів дорівнює $\frac{52!}{(13!)^4 4!}$.

Існує інший метод розв'язання цієї задачі.

Розглянемо строку з 52 елементів, які об'єднані в групи по 13:

$$(\cdots)\,(\cdots)\,(\cdots)\,(\cdots).$$

Карти можуть бути розкладені $52!$ способами. У кожній групі є $13!$ способів розміщення 13 карт. Таким чином ми повинні поділити 4 рази на $13!$, тобто на $(13!)^4$. Число способів розміщення груп становить 4!. Отже, треба ще розділити на 4!. Отримаємо ту ж саму відповідь $\frac{52!}{(13!)^4 4!}$.

Теорема 2.9. Множину з $m \cdot n$ елементів можна розбити на mn–елементних підмножин $\frac{(\mathrm{mn})!}{(\mathrm{n}!)^{\mathrm{m}}\mathrm{m}!}$ способами.

Наслідок. $2m$ елементів можна розбити на m пар $\frac{(2m)!}{(2!)^m m!}$ способами.

Приклад 19. Скільки є способів утворити пари з 16 команд учасників у футбольному кубку?

$$\frac{16!}{2^8 8!} = 2027025.$$

Аналогічні міркування можна використовувати, коли частини розбиття містять різну кількість елементів.

Приклад 20. Скільки існує способів розбити 25 студентів на 4 групи по 3 людини, 2 по 4 та 1 групу з 5 людей?

Існує $25!$ способів розташувати 25 студентів. Але ми вважаємо за однакові способи з однаковим складом груп, навіть якщо порядок різний. Тому загальну кількість способів потрібно поділити на $(3!)^4 \cdot (4!)^2 \cdot 5!$. Але якщо групи поміняти місцями, то отримаємо таке ж саме розбиття, тому це число потрібно поділити ще на $4! \cdot 2!$. Тобто, число способів розташування дорівнює

$$\frac{25!}{(3!)^4 \cdot (4!)^2 \cdot 5! \cdot 4! \cdot 2!}.$$

Означення. Розбиттям n-елементної множини, яка складається з α_i підмножин з i елементів, де $1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}$, $\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i = n$ називається *розбиттям типу* $1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot n^{\alpha_n}$.

Узагальнюючи результат прикладу, отримаємо наступну теорему.

Теорема 2.10. Число розбиттів типу $1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot n^{\alpha_n}$ дорівнює

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} (i!)^{\alpha_i} \alpha_i!}.$$

§ 2.5. Числа Стірлінга 2-го роду. Числа Белла

Мова піде про розбиття множини на задане число частин.

Означення. Позначимо через S (n, k) число способів розбиття множини з n елементів на k частин. Числа S (n, k) називаються *числами Стірлінга 2-го роду.*

Вочевидь, що для всіх n виконується $S\ (n, 1) = S\ (n, n) = 1$.

Приклад 21. Знайдемо $S\ (\ 4, 2\ )$:

$\{1\} \cup \{2, 3, 4\}$; $\{2\} \cup \{1, 3, 4\}$; $\{3\} \cup \{1, 2, 4\}$; $\{4\} \cup \{1, 2, 3\}$;

$\{1, 2\} \cup \{3, 4\}$; $\{2, 4\} \cup \{1, 3\}$; $\{1, 4\} \cup \{2, 3\}$.

Отже: $S\ (\ 4, 2\ ) = 7$.

Для знаходження $S\ (n, k)$ для великих n та k слугує наступна теорема.

Теорема 2.11. $S\ (n, k) = S\ (n - 1, k - 1) + kS\ (n - 1, k)$ для $1 < k < n$.

Доведення

У будь-якому розбитті множини $\{1,\ 2,\ \dots\ ,\ n\}$ на k частин елемент n може фігурувати як окрема підмножина або як частина підмножини, яка містить більше одного елемента. Якщо він сам є підмножиною, то інші $n - 1$ елементи повинні утворювати розбиття множини $\{1,\ 2,\ \dots\ ,\ n - 1\}$ на $k - 1$ підмножину. Це може бути виконано $S\ (n - 1, k - 1)$ способами.

З іншого боку, якщо елемент n знаходиться в підмножині розміру $\geq\ 2$, то можна вважати, що ми розбили множину $\{1,\ 2,\ \dots\ ,\ n - 1\}$ на k підмножин (що можна виконати $S\ (n - 1,\ k)$ способами), а потім додали n в одну з множин отриманого розбиття, що можна зробити k способами.

Таким чином, $S\ (n, k) = S\ (n - 1, k - 1) + kS\ (n - 1, k)$.

Приклад 22. Знову обчислимо $S\ (4,2) = S\ (3,1) + 2S\ (3,2) = 1 + 2(S\ (2,1) + 2S\ (2,2)) = 1 + 2(1 + 2) = 7.$

Теорема 2.12. *Для усіх* $n \geq 2$ виконується $S\ (n,2)\ =\ 2^{n-1} - 1.$

Доведення

Доведення проводимо індукцією за n.

Для $n = 2$ $\quad S\ (2,2) = 2^{n-1} - 1 = 1.$

Нехай $S\ (k,2) = 2^{k-1} - 1$ для усіх $k \geq 2.$

Тоді $\quad S\ (k + 1,2) = S\ (\ k,1) + 2S\ (\ k,2) = 1 + 2(2^{k-1} - 1\ ) = 2^{k} - 1 = 2^{(k+1)-1} - 1.$

Отже, твердження вірне для усіх $n \geq 2.$

Означення. *Числами Белла* називаються числа, що обчислюються за формулою

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S\ (n,k).$$

Число $B(n)$ – це загальне число способів розбиття n-елементної множини.

Згідно з означенням, маємо: $B(0) = S\ (0,0) = 1.$

Теорема 2.13. *Для* $n \geq 1$

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{k} B(k).$$

Доведення

n-ий елемент множини при розбитті може опинитись в одній з підмножин разом з j $(j\ \geq\ 0)$ інших елементів. Тоді $n\ -\ 1\ -\ j$ елементів, що залишились, можна розбити $B(n - 1 - j)$ способами. Таким чином

$$B(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{j} B(n - 1 - j).$$

Зробивши заміну $n-1-j=k$, отримаємо

$$B(n)=\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{n-1-k}B(k)$$

або

$$B(n)=\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}B(k).$$

Приклад 23. $B(9)=\sum_{k=0}^{9} C_9^k B(k) = 21147.$

У таблиці 1 наведено декілька перших чисел Стірлінга, а в останній колонці – тісно пов’язані з ними числа Белла.

Таблиця 1

$n\backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	$B(n)$
1	1								1
2	1	1							2
3	1	3	1						5
4	1	7	6	1					15
5	1	15	25	10	1				52
6	1	31	90	65	15	1			203
7	1	63	301	350	140	21	1		877
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1	4140

§ 2.6. Підрахунок функцій

Розглянемо відображення (функції), які діють з множини X, $|X| = m$, у множину Y, $|Y| = n$, $f : X \to Y$. Нагадаємо, що запис $|X| = m$ означає, що множина X містить m елементів. Іншими словами можемо сказати, що X – m-елементна множина, а Y – n-елементна множина.

Визначимо, скільки всього існує функцій, що діють з X в Y. Спочатку розглянемо приклад.

Теорема 2.14. Якщо $|X| = m$, $|Y| = n$, то функцій $f: X \to Y$ є рівно n^m.

Доведення

Нехай X={$x_1, x_2, \ldots, x_m$}. Якщо $f: X \to Y$, то кожній функції f можна поставити у відповідність впорядкований набір ($y_1, y_2, \ldots, y_n$), де $y_i = f(x_i), i = \overline{1, m}.$ Різним функціям будуть відповідати різні набори, і навпаки.

1-ий елемент набору може приймати n значень (Y – n-елементна множина).

2-й елемент набору може приймати n значень і т. д.

Згідно з правилом добутку, число різних наборів буде дорівнювати $n \cdot n \ldots \cdot n$ (m разів) $= n^m$. Теорема доведена.

Інколи цю теорему зручно формулювати в інших термінах.

Теорема 2.15. Число можливих розміщень m різних предметів по n різним ящикам дорівнює n^m.

Теорема 2.16. Число можливих слів довжини m у алфавіті з n символів дорівнює n^m.

Пояснимо на прикладі.

Приклад 24. Обчислимо, скільки існує функцій, що діють з X={0, 1} в Y={2, 3, 4}. Тут $m = 2$, $n = 3$, число функцій дорівнює $n^m = 3^2$=9. Опишемо явно функції.

f_1	X	0	1
	Y	2	2
f_2	X	0	1
	Y	2	3
f_3	X	0	1
	Y	3	2
f_4	X	0	1
	Y	3	3
f_5	X	0	1
	Y	3	4

f_6	X	0	1
	Y	4	3
f_7	X	0	1
	Y	4	4
f_8	X	0	1
	Y	2	4
f_9	X	0	1
	Y	4	2

Накладемо деякі умови на функції $f: X \to Y$.

Означення. Функція $f: X \to Y$ називається ін'єктивною, якщо з умови $x_i \neq x_j$ випливає $f(x_i) \neq f(x_j)$, тобто різні елементи мають різні образи.

У термінах розміщення предметів за ящиками ін'єктивність функції буде означати, що у кожнім ящику знаходиться не більше одного предмета.

У термінах слів у даному алфавіті – кожен символ (буква) у слові зустрічається не більше одного разу.

Нагадаємо, що число розміщень без повторень дорівнює

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Теорема 2.17. Якщо $|X| = m$, $|Y| = n$, то кількість ін'єктивних функцій $f: X \to Y$ дорівнює A_n^m.

Доведення

Нехай $X=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, якщо $f: X \to Y$, то кожній функції f можна поставити у відповідність впорядкований набір $(y_1, y_2, \dots, y_m)$, де $y_i = f(x_i), i = \overline{1, m}$. Так як усі функції ін'єктивні, то усі елементи у наборі різні.

1-ий елемент набору може приймати n значень (Y – n-елементна множина).

2-й елемент набору може приймати $n-1$ значення.

3-й елемент набора може приймати $n-2$ значення и т. д.

Згідно з правилом добутку, число різних наборів буде дорівнювати $n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = A_n^m$. Теорема доведена.

У термінах розміщення: m предметів можна розмістити по різним n ящикам A_n^m способами, при умові, що у кожному ящику знаходиться не більше одного предмету.

У термінах слів у даному алфавіті: число слів довжини m, у яких усі символи (букви) різні, у алфавіті з n символів дорівнює $A^m{}_n$

Приклад 25. Число ін'єктивних функцій з прикладу 24 дорівнює значенню $A_3^2 = 3(3-1) = 6$. Це функції $f_2, f_3, f_5, f_6, f_8, f_9$.

Розглянемо підстановки скінченої множини як ін'єктивні відображення множини на себе.

Означення. *Підстановкою* скінченої множини називається взаємо-однозначне відображення цієї множини на себе.

Оскільки елементи скінченої множини можна занумерувати, то можна дати підстановці таке означення.

Означення. *Підстановкою n-го степеня* називається взаємо-однозначне відображення множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ на себе.

Підстановка звичайно записується у вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \varphi(3) & \ldots & \varphi(n) \end{pmatrix}, \quad \text{де } \varphi(i) \in \{1, 2, \ldots, n\},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

У цьому випадку $X = Y$ і $|X| = |Y| = n$. Згідно з теоремою, число підстановок дорівнює $A_n^n = n!$.

Нагадаємо, що *образом чи областю значень функції* $f : X \to Y$ називають множину елементів з Y, для яких існує $x \in X$:

$$Im\, f = E(f) = \{y \in Y : \exists x \in X\ f(x) = y\}.$$

Для кожної функції $f : X \to Y$ область значень є підмножиною множини Y ($Im\ f \subseteq Y$). Поставимо наступне питання: скільки функцій мають областю значень $k -$ елементну підмножину множини Y $(0 \le k \le n)$?

Якщо існує k функцій f: $X \to Y$, то множину X можна розбити на k підмножин таким чином, що i-та підмножина буде складатися з тих елементів множини X, котрі переводяться функцією f в i-й елемент $Im\ f$. Таким чином, функція $f : X \to Y$, розмір області визначення якої дорівнює k, може бути побудована наступним чином:

1) розіб'ємо X на k частин $X_1, X_2, \ldots, X_k$ (це можна зробити $S\,(m, k)$ числом способів);

2) оберемо область значень в Y розміру k (це можна зробити C_n^k способами);

3) зіставимо кожному X_i один елемент з області значень (це можна зробити $k!$ способами).

Таким чином, число функцій $f : X \to Y$ з областю значень розміру k дорівнює $S\,(m,k) C_n^k\, k!$.

Приклад 26. Проілюструємо вищевикладене на прикладі.

Нехай множини $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$, $m = 3, n = 4$. Оберемо $k = 2$.

Розіб'ємо множину X на 2 частини:

$$\{0\} \cup \{1, 2\} \text{ або } \{0, 1\} \cup \{2\} \text{ або } \{1\} \cup \{0, 2\}.$$

Розіб'ємо множину Y на 2 частини:

$$\{0, 1\} \text{ або } \{0, 2\} \text{ або } \{0, 3\} \text{ або } \{1, 2\} \text{ або } \{1, 3\} \text{ або } \{2, 3\}.$$

Тоді число функцій з областю значень розміру 2 дорівнює:

$$S\,(3, 2) \cdot C_4^2 \cdot 2 = 3 \cdot 6 \cdot 2 = 36.$$

Теорема 2.18. *Нехай* $|X| = m$ *та* $|Y| = n$, *де* $m \geq 1, n \geq 1$. *Тоді*

1) Число функцій $f : X \to Y$ *з областю значень розміру* k *дорівнює* $S\,(m,k) C_n^k\, k!$.

2) Справедлива рівність

$$n^m \quad \sum_{k=1}^{n} S\,(m,k) C_n^k\, k! \qquad (1)$$

Доведення

1) Доведено вище;

Зазначимо, що число сюр'єкцій, тобто функцій $f : X \to Y$, область значень яких $\mathrm{Im}\, f = Y$, дорівнює $n!\, S\,(m,n)$ (ми покладемо $n = k$).

2) k приймає значення від 1 до n, а, як було показано раніше, число функцій дорівнює n^m.

Приклад 27. Перевіримо, чи виконується рівність (1) для випадку, коли $m = 5, n = 4$.

$$\sum_{k=1}^{n} S\,(5,k) C^k_k\, k! = 4S\,(5{,}1) + 12S\,(5{,}2) + 24S\,(5{,}3) + 24S\,(5{,}4) =$$

$$= 4 + 180 + 600 + 240 = 1024 = 4^5.$$

Зазначимо, що, вважаючи за означенням $S\,(m, 0) = 0$ для усіх $m \geq 1$ та $S\,(0, 0) = 1$, можемо переписати (1) наступним чином:

$$n^m = \sum_{k=0}^{n} S\,(m,k) C_n^k k!$$

Наступні лема і теорема дають можливість швидко отримати вираз для чисел Стірлінга 2-го роду через біноміальні коефіцієнти.

Лема. Якщо $j \le k \le i$, то $C_i^k C_k^j = C_i^j C_{i-j}^{k-j}$.

Доведення

$$C_i^k C_k^j = \frac{i!}{(i-k)!\,k!} \cdot \frac{k!}{(k-j)!\,j!} = \frac{i!}{(i-k)!\,(k-j)!\,j!}$$

$$= \frac{i!}{j!\,(i-j)!} \cdot \frac{(i-j)!}{(i-k)!\,(k-j)!} = C_i^j C_{i-j}^{k-j}.$$

Теорема 2.19. *Нехай матриця* A *розміру* $(n+1) \times (n+1)$ *має елементи* $a_{ij} = C_i^j$ $(i, j = 0, \dots, n)$, *а* B *- матриця того ж розміру з елементами* $b_{ij} = (-1)^{j+i} C_i^j$. *Тоді* $BA = I$.

Доведення

$$A = \begin{pmatrix} C_0^0 & C_0^1 & \dots & C_0^n \\ C_1^0 & C_1^1 & \dots & C_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^0 & C_n^1 & \dots & C_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & \frac{(n+1)}{2}n & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} C_0^0 & -C_0^1 & C_0^2 & \dots \\ -C_1^0 & C_1^1 & -C_1^2 & \dots \\ C_2^0 & -C_2^1 & C_2^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & \frac{(n+1)}{2}n & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Для (i,i)-го елемента матриці BA маємо (рахуючи, що $C_n^r = 0$, якщо $r > m$)

$$(BA)_{ii} = \sum_k (-1)^{i+k} C_i^k C_k^i = (-1)^{i+i} (C_i^i)^2 = 1.$$

Якщо $i \neq j$, то

$$(BA)_{ij} = \sum_k (-1)^{i+k} C_i^k C_k^i = (-1)^i \sum_k (-1)^k C_i^k C_k^i = (-1)^i \sum_k (-1)^k C_i^j C_{i-j}^{k-j}$$

$$= (-1)^i C_i^j \sum_k (-1)^k C_{i-j}^{k-j}.$$

Для $k < j$ $C_{i-j}^{k-j} = 0$, тому

$$(BA)_{ij} = \sum_{l=0}^{i-j} C_{i-j}^l (-1)^{j+l} = (-1)^j \sum_{l=0}^{i-j} C_{i-j}^l (-1)^l = (-1)^j (1-1)^{i-j} = 0.$$

Наслідок 1. *Якщо* $a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k$ *для усіх* $n \geq 0$, *то*

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} C_n^k a_k.$$

Наступний наслідок є формулою для підрахунку чисел Стірлінга 2-го роду через біноміальні коефіцієнти.

Наслідок 2. *Для усіх* $m \geq 1, n \geq 0, m \geq n$:

$$S(m,n) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^m.$$

Для доведення формули достатньо у наслідку 1 покласти

$$a_k = k^m b_k = k!\ S(m,k).$$

Приклад 28.

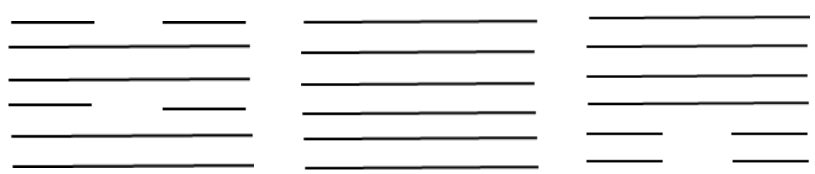
$$S(5,3) = \frac{1}{3!}\left(\sum_{k=0}^{3} (-1)^{3-k} C_3^k k^5\right) = \frac{1}{6}(-0 + 3 - 3 \cdot 2^5 + 3^5) = 25.$$

§ 2.7. Короткий нарис історії комбінаторики

З задачами, в яких потрібно обирати той або інший предмет, розташовувати їх у визначеному порядку і обирати серед предметів ті, які відповідають окремо визначеним умовам, люди стикалися ще з давніх давен. Ці та інші навички необхідні були людині й під час полювання, воєнних дій або при виборі інструментів праці, при ведені торгівлі, освоєнні ремесел.

Виникла необхідність використання комбінаторних знань і під час гри, коли необхідно оцінити й попередити дії супротивника. Зрозуміло, що розв'язок таких практичних задач у давнину не потребував особливих комбінаторних підходів.

Перша згадка про питання, близькі до комбінаторних, зустрічається у китайських рукописах XII-XIII ст. до н.е. У рукописі «Же Кім» («Книга перестановок» або «Книга змін») велась мова про те, що все в світі комбінується з різних поєднань чоловічого і жіночого начал (їх позначали рисками -------------- і – – – відповідно). Книга містить 64 символи (гексаграми), кожен з яких виражає ту або іншу життєву ситуацію в часі з точки зору її поступового розвитку. Кожна гексаграма складається з двох триграм з трьох рисок; риски позначають послідовні ступені розвитку даної ситуації.



Комбінаторні уявлення були і в Стародавній Греції. Значний внесок у розвиток комбінаторики зробили вчені Піфагорійського союзу (VI століття до н.е.). Числа вони уявляли наглядно, розуміючи кожне число як об'єкт, складений з одиниць. Тому у них виникли так звані фігурні числа: трикутні, чотирикутні тощо (рис.1, рис.2), які стали першими задачами на підрахунок скінченних сум 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4 ….

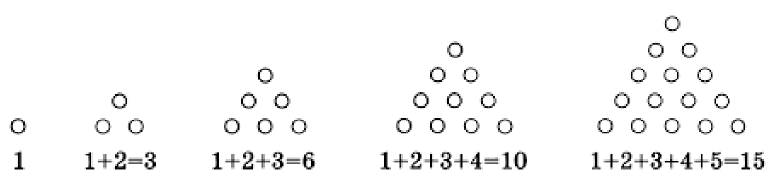


Рис. 1 Трикутні числа

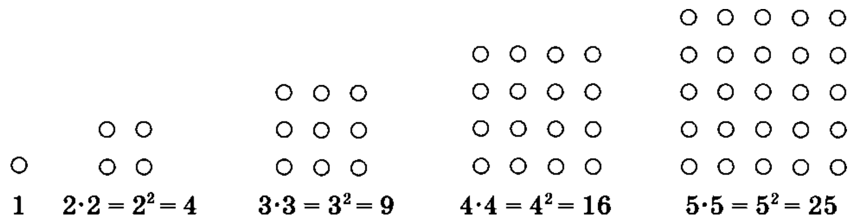


Рис. 2 Чотирикутні числа

Нам відомі інші комбінаторні задачі Давньої Греції. Наприклад, Хрисипп (ІІІ століття до н. е.) і Гіппарх (ІІ століття до н. е.) підрахували, скільки наслідків можна отримати з 10 аксіом. Як вони рахували, нам невідомо, у Хрисиппа вийшло понад 1000000, а у Гіппарха – більше 100000 наслідків. Математик Папп Олександрійський, який жив у IV ст. н.е., обчислював число пар і трійок, які можна отримати з трьох елементів, допускаючи їх повторення.

Комбінаторикою займались астрологи. Їх цікавило питання про рух планет і їх вплив на долю людини. Особливу увагу вони приділяли зустрічі планет в одному знаку зодіаку. Астролог бен Езра у 1140 році обчислив кількість комбінацій планет з 7 по 2, по 3 тощо і виявив, що $C_7^2 = C_7^5$, $C_7^4 = C_7^3$, якщо користуватися сучасною комбінаторною символікою.

Загальну формулу для обчислення числа комбінацій (C_n^k)

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

отримав у XIV столітті французький математик, астроном і філософ Леві бен Гершом (1288-1344). У трактаті «Справа обчислювача» (1321 р.) Гершом першим в Європі вивів основні комбінаторні формули для підрахунку числа комбінацій, перестановок і розміщень. Для їх доведення він застосував математичну індукцію і впритул підійшов до виділення індукції в окремий метод, хоча остаточне оформлення цього методу зазвичай приписується Б. Паскалю. Однак, робота Гершома була написана древньоєврейською мовою, маловідомою для учених того часу, і її майже не помітили.

Комбінаторикою цікавилися і арабські математики. Вони займалися обчисленнями біноміальних коефіцієнтів і знали їх деякі властивості, наприклад, властивість $C_{n+1}^{k} = C_{n}^{k} + C_{n}^{k-1}$.

Комбінаторні задачі розглядали у Давньому Китаї та Індії. У VII столітті індійський математик Бхаскара в своїй основній праці «Лілаваті» докладно дослідив задачі, пов'язані з перестановками і комбінаціями, включаючи перестановки з повтореннями.

Леонардо Фібоначчі

Розвиток торгівлі привів до проникнення у Європу арабської, індійської і китайської науки. У 1202 році вийшла праця «Libero abaci» («Книга абак») італійця Леонардо Пізанського, пізніше названого Фібоначчі (бл.1170-1250). Його фундаментальна праця з арифметики містила і нові комбінаторні задачі. Наприклад, знайти найменше число гір, достатнє для зважування будь-якого товару вагою від 1 до 40 фунтів. Найвідомішою задачею Л. Фібоначчі залишається знаменита задача про кроликів (хтось придбав пару кроликів і помістив їх в обгороджений з усіх боків загін. Скільки кроликів буде через рік, якщо вважати, що кожен місяць пара дає в якості приплоду нову пару кроликів, які з другого місяця життя також починають приносити приплід?), яка зводилась до рекурентного співвідношення $u_n = u_{n+1} + u_{n+2}$, яка визначала так звані числа Фібоначчі. Ця формула вважається першою в історії математики рекурентною формулою. Метод рекурентних співвідношень у подальшому виявився одним з самих потужних для розв’язку великого кола комбінаторних задач.

Подальший поштовх розвитку комбінаторики дали азартні ігри, особливо гра в кості – два або три кубика з нанесеними на них очками кидали на стіл, і ставку брав той, у кого випала більша сума очок. Б. Паскаль (1623-1662) і П. Ферма (1601-1665) зайнялись питаннями комбінаторики саме завдяки тому, що до них звернулися гравці з проханням розтлумачити результати гри в кості, і сформулювали перші теореми комбінаторики й теорії ймовірностей.

П'єр Ферма

Окрім азартних ігор, розвитку комбінаторики сприяло таємне листування дипломатів та бунтівників того часу, які застосовували шифри з використанням комбінаторних засад. Таємне листування використовували й самі вчені між собою, аби уникнути передчасного розголосу власних результатів досліджень.

Роботи Б. Паскаля і П. Ферма ознаменували народження двох нових гілок математичної науки – комбінаторики й теорії ймовірностей. Раніше комбінаторні проблеми лише порушувалися в загальних працях з астрології, логіки і математики або здебільшого відносилися до області математичних розваг.

Термін «комбінаторика» ввів Г. Лейбніц (1646-1716) в «Дисертації про комбінаторне мистецтво» (1666), у якій він виконував комбінаторні обчислення. Правда, термін «комбінаторика» Г. Лейбніц розумів більш широко. На думку Г. Лейбніца, комбінаторика є складовою будь-якого дослідження, яке передбачає спочатку аналіз (поділ цілого на частини), а потім синтез (з'єднання частин в ціле). До області комбінаторики Г. Лейбніц відносив і «універсальну характеристику» – математику суджень, тобто прообраз теперішньої математичної логіки.

Готфрід Лейбніц

Учень Лейбніца Якоб Бернуллі, один із засновників теорії ймовірностей, виклав у своїй книзі «Мистецтво припущень» (1713) основні відомості з комбінаторики. Робота Я. Бернуллі перевершила роботи його попередників і сучасників систематичністю, простотою використаних методів, строгістю викладу і протягом XVIII століття користувалося популярністю не тільки як серйозний науковий трактат, але і як навчальне видання. У роботах Я. Бернуллі і Г. Лейбніца були ретельно вивчені властивості комбінацій, розміщень, перестановок.

Таким чином, комбінаторика як розділ математики, що вивчає комбінації і розміщення предметів, виникла у XVII сторіччі. Родоначальником сучасної комбінаторики вважається Г. Лейбніц.

У XVIII столітті до розв'язку комбінаторних задач зверталися видатні математики. Знаменитий математик і механік Леонард Ейлер (1707-1783) розглядав завдання про розбиття множин, про комбінації, про циклічні розстановки, про побудову магічних і латинських квадратів. Завдання про мости в Кенігсберзі, яку вивчав Леонард Ейлер, стала прародителькою теорії графів, а методи, використані ним при розв'язуванні задачі про розбиття, виросли з часом в науку про інтегральні перетворення, яка застосовується для розв'язку рівнянь математичної фізики.

Леонард Ейлер

Задача про кенігсберзькі мости. Місто Кенігсберг (нині м. Калінінград, РФ) розташоване на берегах річки Прегель і на двох островах. Різні частини міста сполучені сімома мостами. Щонеділі мешканці міста любили здійснювати прогулянки містом і зацікавилися питанням: чи можна здійснити прогулянку, вийшовши з дому і повернувшись, так, щоб кожним мостом пройти рівно один раз?

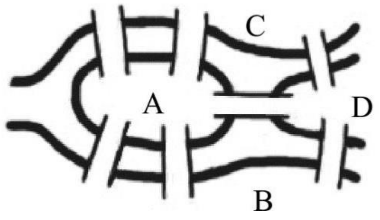


Рис 3. Схема мостів у Кенігсберзі

Для розв'язування цієї задачі Л. Ейлер увів поняття «мережа» (або за сучасною термінологією «граф»). Якщо у деякій вершині графа сходиться непарне число ребер, то таку вершину Л. Ейлер називав неправильною або «дивною». Вершина з парною кількістю ребер - правильна (у першоджерелі – «мудра»). Як бачимо, з кожної вершини графа кенігсберзьких мостів виходять або три, або п’ять ребер, тобто всі вони неправильні. Тому так званою безупинної «доріжки Ейлера», яка проходить через кожну вершину тільки один раз, для цього графа не існує.

У кінці XVIII століття вчені спробували побудувати загальну комбінаторну теорію, використовуючи для цього нескінченні ряди і операції над ними: множення, ділення, піднесення до степеня, знаходження коренів, звернення рядів, розвинення трансцендентних функцій у ряди тощо, тим самим заклавши теорію твірних функцій.

У XX столітті комбінаторика зазнала потужного процесу алгебраїзації завдяки роботам американо-канадських вчених Дж.-К. Рота і Р. Стенлі. Вивчення ними частково впорядкованих множин, виявлення їх ролі при розв’язуванні комбінаторних задач сприяли збагаченню комбінаторних методів дослідження.

За допомогою комбінаторного аналізу було розшифровано єгипетські ієрогліфи, клинопис, кріто-мікенську лінійну писемність.

У 1953 році у Кембриджі вчені-біологи Ф. Крік і Дж. Уотсон засобами комбінаторного аналізу розшифрували будову молекули ДНК, що дало поштовх для подальшого розшифрування генетичного коду.

Комбінаторика була корисною і при відкритті періодичної таблиці елементів Д. І. Мендєлєєва, вона дала можливість перерахувати ізомери (сполуки що мають однаковий склад, але різну будову) заданого складу.

У фізиці комбінаторика застосовується при вивченні властивостей кристалів, опису моделі феромагнетизму тощо.

На початку XX століття виникла комбінаторна геометрія. Сучасним стимулом подальшого розвитку комбінаторики став стрімкий розвиток теорії графів і комп’ютерних технологій.

Комбінаторика або комбінаторний аналіз – розділ математики, в якому вивчаються завдання вибору, розташування та перерахунку елементів даної скінченої множини відповідно до заданих умов. Об'єкти, що конструюються за цих умов з елементів даної множини, називаються комбінаторними конфігураціями. Комбінаторними конфігураціями можуть бути підмножини даної множини, кортежі, впорядковані множини, послідовності і т.д. Значну частину комбінаторики становлять перелічувальні завдання, у яких потрібно або здійснити перебір всіх конфігурацій заданого виду, або лише підрахувати їх число, або виконати те й інше. Числа, що отримуємо при лічбі комбінаторних конфігурацій, називаються комбінаторними числами, з деякими з них ви познайомилися у цьому розділі.

Комбінаторні методи і результати отримали широке застосування у теорії ймовірностей. Вони грають фундаментальну роль у вивченні різних гілок так званої скінченної математики, теорії кодування, криптографії, дослідженні операцій. Комбінаторний аналіз знаходить найрізноманітніші додатки у фізиці, хімії, біології, економіці, лінгвістиці тощо.

Контрольні запитання і завдання

1. Запишіть формулу включень-виключень для двох множин, для трьох множин.
2. Сформулюйте правило суми.
3. Що називається прямим добутком двох різних множин, трьох множин, n множин?
4. Чи володіє операція прямого добутку множин властивістю комутативності?
5. Сформулюйте правило прямого добутку.
6. Що називається розміщенням з повтореннями з n елементів по k?
7. Які розміщення з повтореннями вважаються різними?
8. Чому дорівнює число розміщень з можливими повтореннями з n елементів по k?
9. Нехай $A = \{a, b, c\}$. Скільки розміщень по два елементи з повтореннями можна скласти з елементів множини A?
10. Що називається розміщенням без повторень з n елементів по k?
11. Які розміщення без повторень вважаються різними?
12. Чому дорівнює число розміщень без повторень з n елементів по k?
13. Нехай $A = \{a, b, c, d\}$. Скільки розміщень по два елементи без повторень можна скласти з елементів множини A?
14. Що називається перестановкою n елементів з точки зору розміщень?
15. Чому дорівнює число перестановок n елементів по k?
16. Нехай $A = \{a, b, c\}$. Скільки перестановок можна скласти з елементів множини A? Запишіть всі перестановки.
17. Що називається комбінаціями з n елементів по k без повторень?
18. Чому дорівнює число комбінацій k елементів з n без повторень?
19. Нехай $A = \{a, b, c, d\}$. Скільки комбінацій по два елементи без повторень можна скласти з елементів множини A? Запишіть їх.

20. Чому дорівнює C_n^0; C_n^1 ; C_n^n?

21. Чому дорівнює число комбінацій k елементів з n елементів із можливими повтореннями?

22. Обчисліть число розв'язків рівняння $x + y + z = 7$ у невід'ємних цілих числах.

23. Запишіть біном Ньютона $(a + b)^n$ у загальній формі.

24. Як обчислюються біноміальні коефіцієнти?

25. Чому дорівнює сума $1 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$?

26. Що таке трикутник Паскаля?

27. Складіть трикутник Паскаля до $n = 8$.

28. Запишіть формулу $(a - b)^7$.

29. Які властивості біноміальних коефіцієнтів ілюструє трикутник Паскаля? Доведіть їх у загальному вигляді.

30. У сумі $(a + b)^9$ обчисліть біноміальний коефіцієнт при добутку a^5b^4; a^2b^7.

31. Скількома способами може бути розбита множина з $2n$ елементів на n-елементні підмножини?

32. Скількома способами $2m$ елементів можна розбити на m пар?

33. Що таке число Стірлінга 2-го роду?

34. Чому дорівнюють числа Стірлінга 2-го роду $S\,(n, 1)$; $S\,(n, n)$? Який зміст в термінах розбиття мають ці числа?

35. Як числа Стірлінга 2-го роду можна обчислити через біноміальні коефіцієнти? Запишіть формулу.

36. Обчисліть число Стірлінга 2-го роду S(6,2).

37. Запишіть формулу для обчислення чисел Стірлінга 2-го роду виду $S\,(n, 2)$. Обчисліть $S\,(5, 2)$.

38. Що таке число Белла?

39. Обчисліть число Белла B(5).

40. Чому дорівнює число відображень (функцій) m-елементної множини X у n-елементну множину Y?

41. Яка функція називається ін'єктивною? Сюр'єктивною?

42. Чому дорівнює число ін'єктивних відображень (функцій) m-елементної множини X у n-елементну множину Y?

43. Чому дорівнює число сюр'єктивних відображень (функцій) m-елементної множини X на n-елементну множину Y?

44. Нехай $X = \{0,\ 1\}$ $Y = \{1,2,3\}$. Знайдіть число відображень (функцій) множини X у множину Y. Скільки серед них ін'єктивних відображень (функцій), а скільки сюр'єктивних? Запишіть їх.

45. Що називається підстановкою з n елементів з точки зору відображень?

46. Скільки існує підстановок n-елементної множини?

47. Скільки існує взаємно-однозначних відображень чотирьох елементної множини на себе?

48. Скільки слів з чотирьох букв можна скласти, використовуючи алфавіт з 10 букв? А скільки слів не будуть містить повторів букв?

Завдання для самоперевірки

Варіант 1

1. Скільки існує способів обрати 5 предметів з 11 у певному порядку без повторень?

А	Б	В	Г
C_{11}^{5}	A_{11}^{5}	11^5	A_{16}^{5}

2. Скільки існує способів обрати 5 предметів з 11 у довільному порядку з можливими повтореннями?

А	Б	В	Г
C_{11}^{5}	A_{16}^{5}	11^5	C_{15}^{5}

3. У кафе можна обрати 4 види закуски, 4 види основної страви та 2 види десерту. Скільки варіантів є обрати або закуску та основну страву, або основну страву та десерт?

А	Б	В	Г
21	20	24	9

4. Скільки розв’язків має рівняння x+y+z=16 у невід’ємних цілих числах?

А	Б	В	Г
19	4!15!	C_{18}^{3}	C_{16}^{3}

5. Скільки способів розділити 9 предметів на 3 множини з 3 предметами в кожній?

А	Б	В	Г
160	200	280	176

6. Скільки способів розділити 8 предметів на 4 пари?

А	Б	В	Г
105	75	69	64

7. Чому дорівнює число Белла B(4)?

А	Б	В	Г
24	25	15	C_{10}^4

8. Чому дорівнює число Стірлінга другого типу S(4,2)?

А	Б	В	Г
10	9	8	7

9. Чому дорівнює число Стірлінга другого типу S(5,2)?

А	Б	В	Г
7	10	15	18

10. Чому дорівнює коефіцієнт при добутку a^5b^2 у розкладі $(a+b)^7$?

А	Б	В	Г
35	56	7	21

11. Чому дорівнює коефіцієнт при доданку a^3 у розкладі $(2a+3)^5$?

А	Б	В	Г
$72C_5^3$	$5\cdot 8!$	11	C_5^3

12. Скільки існує чотиризначних парних чисел?

А	Б	В	Г
4500	5000	1000	A_{10}^4

13.Скільки існує чотиризначних чисел, які діляться на 5?

А	Б	В	Г
C_{10}^{4}	800	2000	1800

14. Обчисліть $\frac{A_5^2}{C_4^3}$.

А	Б	В	Г
8	12	5	7

15.Скільки існує функцій, що діють з трьохелементної множини в двохелементну?

А	Б	В	Г
6	8	9	27

16. Число можливих слів з 5 букв в алфавіті, що містить 20 букв, дорівнює:

А	Б	В	Г
100	5^{20}	20^{5}	2^{100}

17.Скільки існує ін’єктивних функцій, що діють з множини, що містить три елементи, в п’ятиелементну множину?

А	Б	В	Г
15	60	125	243

18. Знайдіть номер члена розкладу бінома Ньютона $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^{16}$, що не залежить від *x*.

А	Б	В	Г
4	5	6	3

19. Знайдіть 13-й член розкладу $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^{15}$.

А	**Б**	**В**	**Г**
78900	87560	86320	87360

20. Обчисліть суму $3^n + C_n^1 3^{n-1}\cdot 2 + C_n^2 3^{n-2}\cdot 2^2 + \cdots + C_n^{n-1} 3^1 \cdot 2^{n-1} + 2^n$.

А	**Б**	**В**	**Г**
1	6^n	5^n	-1

Варіант 2

1. Скільки існує способів обрати 6 предметів з 10 у довільному порядку без повторень ?

А	Б	В	Г
C_{10}^{6}	A_{10}^{6}	10^6	A_{16}^{6}

2. Скільки існує способів обрати 5 предметів з 11 у певному порядку з можливими повтореннями ?

А	Б	В	Г
C_{11}^{5}	A_{11}^{5}	11^5	A_{16}^{5}

3. У кафе можна обрати 5 видів закуски, 4 види основної страви та 2 види десерту скільки варіантів є обрати або закуску та основну страву, або основну страву та десерт, або закуску та десерт?

А	Б	В	Г
40	28	11	32

4. Скільки розв'язків має рівняння x+y+z+v=15 у невід'ємних цілих числах?

А	Б	В	Г
24	4!15!	C_{15}^{4}	C_{18}^{4}

5. Скільки способів розділити 6 предметів на 2 множини з 3 предметами в кожній?

А	Б	В	Г
10	12	24	30

6. Скільки способів розділити 6 предметів на 3 пари?

А	Б	В	Г
25	16	15	8

7. Чому дорівнює число Белла B(5)?

А	Б	В	Г
45	52	110	C_{10}^{5}

8. Чому дорівнює число Стірлінга другого типу S(4,3)?

А	Б	В	Г
6	5	4	3

9. Чому дорівнює число Стірлінга другого типу S(6,2)?

А	Б	В	Г
19	31	100	26

10. Чому дорівнює коефіцієнт при добутку a^3b^4 у розкладі $(a+b)^7$?

А	Б	В	Г
35	7	12	21

11. Чому дорівнює коефіцієнт при доданку a^4 у розкладі $(2a+1)^5$?

А	Б	В	Г
72	64	102	80

12. Скільки існує тризначних непарних чисел?

А	Б	В	Г
A_{10}^{3}	800	500	450

13. Скільки існує тризначних чисел, які не діляться на 5?

А	Б	В	Г
210	180	720	C_{10}^8

14. Обчисліть $\frac{A_6^2}{C_5^3}$.

А	Б	В	Г
3	6	9	5

15. Скільки існує функцій, що діють з множини, що містить чотири елементи, в трьохелементну множину?

А	Б	В	Г
12	27	64	81

16. Число можливих слів з 4 букв в алфавіті, що містить 15 букв, дорівнює:

А	Б	В	Г
2^{60}	15^4	4^{15}	60

17. Скільки існує ін’єктивних функцій, що діють з двохелементної множини у множину, що містить чотири елементи?

А	Б	В	Г
12	16	8	10

18. Знайдіть номер члена розкладу бінома Ньютона $\left(\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}} + 2x^3\right)^{40}$, що не залежить від x.

А	Б	В	Г
10	9	8	11

19. Знайдіть п’ятий член розкладу $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$.

А	Б	В	Г
$915x^5$	$715x^5$	$715x^4$	$715x^3$

20. Обчисліть суму $C_{100}^{0} - C_{100}^{1} + C_{100}^{2} - C_{100}^{3} + \cdots + C_{100}^{100}$.

А	Б	В	Г
0	1	-1	2^{100}

Відповіді на завдання для самоперевірки

До варіанту 1				До варіанту 2			
№	відповідь	№	відповідь	№	відповідь	№	відповідь
1	Б	11	А	1	А	11	Г
2	Г	12	А	2	В	12	Г
3	В	13	Г	3	Б	13	В
4	В	14	В	4	Г	14	А
5	В	15	Б	5	А	15	Г
6	А	16	В	6	В	16	Б
7	В	17	Б	7	Б	17	А
8	Г	18	Б	8	А	18	Б
9	В	19	Г	9	Б	19	Б
10	Г	20	В	10	А	20	А

РОЗДІЛ 3. РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

§ 3.1. Декілька прикладів

Розглянемо послідовності чисел і способи їх завдання. Якщо ми знаємо, як обчислити елемент послідовності a_n для кожного значення n, то таке завдання послідовності називається явним. Часто послідовність задають явно, використовуючи формулу обчислення члена послідовності в залежності від його номера. Наприклад, послідовність невід'ємних раціональних чисел, задана формулою $a_n = \frac{1}{n}$, при $n = 4$ дає $a_4 = \frac{1}{4}$. Однак явне завдання послідовності не завжди зручно для розв'язування завдань. Існує спосіб рекурентного завдання послідовності: кожен елемент послідовності обчислюється через його номер і один або кілька попередніх елементів цієї послідовності. Наприклад, факторіал ми можемо визначити рекурентним способом так:

$n! = (n-1)! \cdot n$ для $n > 0$ з початковою умовою $0! = 1$.

Зрозуміло, що для обчислення будь-якого елементу послідовності за допомогою заданого рекурентного співвідношення потрібно обчислення всіх попередніх її елементів.

Приклад 1. Башти Ханоя.

Почнемо зі знаменитої завдання-головоломки, яку придумав французький математик Едуард Люка (Lucas) в 1883 році. Завдання полягало в наступному: дано три стержня, на один з яких нанизані вісім дисків різних розмірів і завжди диск меншого розміру лежить на більшому. Завдання полягає в тому, щоб перенести піраміду з восьми дисків за найменше число ходів на інший стрижень. За один раз дозволяється переносити тільки один диск, причому не можна класти більший диск на менший.

Придумана до головоломки професора Люка легенда свідчить, що «у Великому храмі міста Бенарес, під собором, який зазначає середину світу, знаходиться бронзовий диск, на якому закріплені три алмазних стрижня, висотою в один лікоть і товщиною з бджолу. Давним-давно, на самому початку часів, монахи цього монастиря завинили перед богом Брахмою. Розгніваний Брахма спорудив три високих стрижня і на один з них поклав 64 диски, зроблених з чистого золота. Причому так, що кожен менший диск лежить на більшому. Як тільки всі 64 диска будуть перекладені зі стрижня, на який Брахма склав їх при створенні світу, на інший стрижень, вежа разом з храмом перетворяться в пил і у супроводі грому загине світ». Зазвичай пропонується оцінити складність отриманого розв'язку.

Як ми покажемо нижче, кількість переміщень $a_n = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$ і, якщо робити одне переміщення дисків за секунду, то для потрібних переміщень буде необхідно $5{,}82 \cdot 10^{11}$ дій, тобто робота монахів тривала б 584 мільярдів років.

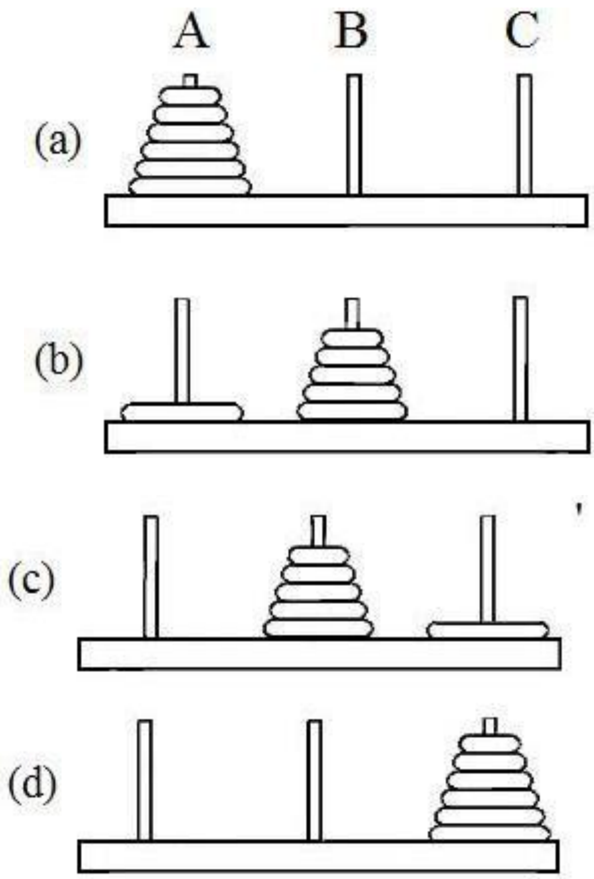


Рис. 1. Башти Ханоя (6 дисків)

Ми розглянемо розв'язок задачі в загальному випадку, коли замість восьми дисків ми будемо перекладати n дисків.

Маємо n дисків різного діаметра з отворами в центрах і три вертикальних стрижні, на які можна насаджувати ці диски. Спочатку всі диски знаходяться на одному стрижні, впорядковані за розміром, з найбільшим внизу, утворюючи вежу. Завдання полягає в тому, щоб, переставляючи диски по одному, отримати таку ж вежу на іншому стрижні. При цьому ні в який момент диск більшого діаметра не повинен лежати на диску меншого діаметру. Яку найменшу кількість дій необхідно виконати?

Позначимо через a_n шукану найменшу кількість дій, які необхідно виконати. Зрозуміло, що $a_1 = 1$ та $a_2 = 3$. Як знайти a_n? Вочевидь, для того, щоб перемістити найнижчий диск потрібен порожній стрижень, на який буде насаджений нижній диск. Отже, $n - 1$ диск повинен бути насаджений на третій стрижень. Для цього потрібно a_{n-1} дій. Потім переносимо найнижчий диск з першого стрижня на другий і, потім, потрібно ще a_{n-1} дій, щоб перенести всі інші диски з третього стрижня на другий. Таким чином, $a_n = 2a_{n-1} + 1$.

Це рекурентне співвідношення $a_n = 2a_{n-1} + 1$ разом з початковою умовою $a_1 = 1$ дає можливість знайти a_n.

Маємо, $a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3, a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7, a_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$ ...

Зауважимо, що $a_2 = 3 = 2^2 - 1$, $a_3 = 7 = 2^3 - 1$ і т.д. За допомогою методу математичної індукції нескладно довести, що $a_n = 2^n - 1$.

Такі роздуми в процесі виконання завдання про вежі Ханоя, з іншого боку, можна назвати *рекурсивними*: процес («перекладання n дисків») містить сам себе («перекладання $n - 1$ диска») і містить умову («перенесення самого нижнього диска на порожній другий стрижень тільки за один хід»), яку можна використовувати для визначення моменту закінчення виконання завдання. Таку умову називають базисною або нерекурсивною умовою.

Деякі функції також дозволяють рекурсивне визначення, хоча вони можуть бути задані і безпосередньо.

Можливість рекурсивного означення функції не завжди очевидна. Наприклад, функція $f(n) = a^n$, $n \in N$, допускає таке своє рекурсивне означення

$$f(0) = 1, \quad f(k+1) = a \cdot f(k), \qquad k \in N.$$

Перша умова є базисною.

Рекурсивний алгоритм розв'язування завдань часто і ефективно використовують у багатьох мовах і середовищах програмування.

Під *рекурсією* в програмуванні мають на увазі виклик функції або процедури з неї ж самої, безпосередньо (проста рекурсія) або через інші функції (складна або непряма рекурсія). Кількість вкладених викликів функції або процедури називається глибиною рекурсії. Використання рекурсії може бути структурно простіше і наочніше, особливо якщо синтаксис мови програмування не містить циклічних структур для організації повторюваних обчислень. Однак необхідно уникати в рекурсивних програмах великої глибини рекурсії.

Зауважимо, що, якщо організація обробки даних влаштована так, що дії повторюються багато разів, але не призводять при цьому до викликів самих себе, – це ітерація (в широкому сенсі). У вузькому сенсі, під ітерацією розуміють один крок циклічного процесу. У математиці під ітерацією розуміють повторне застосування будь-якої математичної операції.

Приклад 2. Існує 3^n n-значних послідовностей, кожен знак у яких дорівнює 0, 1 або 2. Скільки таких послідовностей мають непарне число нулів?

Позначимо через b_n число таких послідовностей довжини n, що мають непарне число нулів. Кожна така послідовність закінчується 0, 1 або 2. Послідовність, що закінчується одиницею, має b_{n-1} варіантів послідовностей, які передують останній одиниці. Аналогічно, існує b_{n-1} послідовностей, що закінчуються двійкою. Якщо послідовність закінчується нулем, то цьому нулю повинна передувати послідовність довжини $n-1$ з парним числом нулів, але число таких послідовностей дорівнює 3^{n-1} (загальне число послідовностей довжини $n-1$) мінус b_{n-1} (число послідовностей довжини $n - 1$ з непарним числом нулів). Таким чином, існує $3^{n-1} - b_{n-1}$ послідовностей довжини n з непарним числом нулів, що мають в кінці нуль. За принципом додавання маємо

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-1} + 3^{n-1} - b_{n-1}, \text{ тобто } b_n = b_{n-1} + 3^{n-1}.$$

Можемо знайти b_n за допомогою ітерації:

$$b_n = 3^{n-1} + b_{n-1} = 3^{n-1} + (3^{n-2} + b_{n-2}) = \cdots$$

$$\ldots = 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3 + b_1.$$

Але $b_1 = 1$, тому $b_n = 1 + 3 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$.

Приклад 3. Мощення садової доріжки.

Садова доріжка має ширину 2 м та довжину n м. Камені для мощення мають розмір 1 м на 2 м. Обчисліть кількість способів мощення доріжки.

Позначимо через p_n число способів вимостити доріжку розміру 2хn.

Зрозуміло, що $p_1 = 1$. Зрозуміло також, що $p_2 = 2$ (див. рис. 1.а), а значення $p_3 = 3$ (див. рис. 1.б).

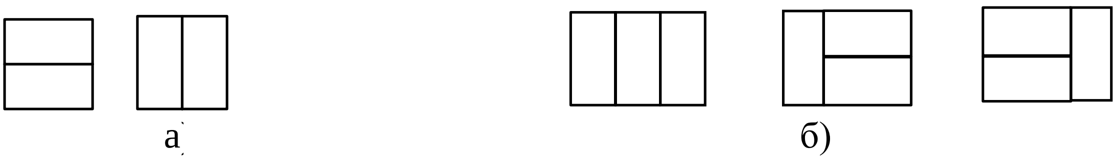


Рис. 1. Кількість способів мощення доріжки з двох, трьох каменів

Може здатися, що $p_n = n$ однак, це не так (див. нижче). Для доріжки 2хn $(n > 2)$ мощення повинно починатися одним з способів, зображених на рис. 2.

Рис. 2. Можливі варіанти початку мощення доріжки 2хn

У першому випадку існує p_{n-1} спосіб подальшого мощення, у другому - p_{n-2}. За принципом додавання

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} \ (n \geq 3).$$

Це рекурентне співвідношення 2-го порядку, оскільки кожне число способів виражається через два попередні. Отримуємо,

$p_4 = 3 + 2 = 5,\ \ p_5 = 5 + 3 = 8,\ \ p_6 = 5 + 8 = 13,\ \ p_7 = 13 + 8 = 21$ і т.д.

Це добре відома послідовність Фібоначчі (F_n):

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Приклад 4. Розфарбування прапора.

Прапор складається з n горизонтальних смуг, кожна смуга може бути або червоною, або синьою, або білою, сусідні смуги не повинні бути одного кольору. За цих умов сама верхня смуга може бути будь-якого з трьох кольорів, друга може бути двох кольорів, третя – двох і т.д. (Колір смуги не повинен збігатися з кольором смуги, що знаходиться над нею). Таким чином, можливі $3 \cdot 2^{n-1}$ варіанти розфарбування.

Уявімо тепер, що для того, щоб не переплутати низ і верх, нижня і верхня смуги повинні бути різних кольорів. Позначимо через a_n число таких прапорів з n смугами. Тоді $a_1 = 0$, а $a_2 = 6$. Далі, оскільки існує взаємно-однозначна відповідність між прапорами з n смуг, у яких верхня і нижня смуги одного кольору, і прапорами з $n-1$ смуг, у яких нижня смуга відрізняється від верхньої, то $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - c_n$, де c_n – число прапорів з n смуг з однаковим кольором нижньої і верхньої смуги. Помічаємо, що число прапорів з n смуг з однаковим кольором нижньої і верхньої смуги дорівнює числу прапорів з $n - 1$ смуг із різними кольорами нижньої і верхньої смуги (нижня смуга прапора з $n-1$ смуги не повинна бути такого ж кольору як n-а смуга прапора з n смуг). Таким чином, $c_n = a_{n-1}$.

Тому, $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - a_{n-1}$. Оскільки звідси $a_n + a_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$, то ми маємо також $a_{n-1} + a_{n-2} = 3 \cdot 2^{n-2}$. Звідси

$$2(a_{n-1} + a_{n-2}) = 3 \cdot 2^{n-1} = a_n + a_{n-1}$$

та $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$.

Отримано рекурентне співвідношення 2-го порядку. Зараз ми побачимо, як його можна розв’язати.

§ 3.2. Розв’язування рекурентних співвідношень за допомогою характеристичного рівняння

Для розв’язування рекурентних співвідношень використовують один з двох основних методів:

1) розв’язування за допомогою характеристичного рівняння;

2) розв’язування за допомогою твірної функції.

У цьому параграфі ми розглянемо розв’язування рекурентних співвідношень за допомогою характеристичного рівняння. Цей метод практично повністю збігається з методом розв’язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Означення. Рекурентне співвідношення, яке описується рівнянням вигляду

$$a_n = \mathrm{B}_1 a_{n-1} + \mathrm{B}_2 a_{n-2} + \cdots + \mathrm{B}_k a_{n-k}, n \geq k, \tag{3.1}$$

називається однорідним лінійним рекурентним співвідношенням k-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Присутні у цьому рівнянні константи $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \dots, \mathrm{B}_k$ називаються коефіцієнтами рівняння.

Щоб отримати більш звичний вигляд однорідного рівняння, перенесемо всі доданки рівняння (3.1) в ліву частину і перепозначимо коефіцієнти:

$$a_n + A_1 a_{n-1} + A_2 a_{n-2} + \cdots + A_k a_{n-k} = 0, \ n \geq k. \tag{3.2}$$

Наприклад, геометрична прогресія задається лінійним однорідним рекурентним співвідношенням 1-го порядку за допомогою рівняння:

$$u_{n+1} = q u_n.$$

Арифметичний прогресія задається лінійним однорідним рекурентним співвідношенням 2-го порядку. Дійсно, якщо ми розглянемо два співвідношення, записані для двох сусідніх значень n:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + d \quad \text{і} \quad u_{n+1} = u_n + d,$$

то одержимо з них шляхом почленного віднімання

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n,$$

або

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Означення. Алгебраїчне рівняння вигляду

$$x^k + A_1x^{k-1} + A_2x^{k-2} + \cdots + A_k = 0 \qquad (3.3)$$

називається характеристичним рівнянням лінійного однорідного рекурентного співвідношення (3.2).

Зауваження. Вочевидь, що для лінійного однорідного рекурентного співвідношення (3.1) характеристичне рівняння буде мати вигляд

$$x^k = \mathrm{B}_1x^{k-1} + \mathrm{B}_2x^{k-2} + \cdots + \mathrm{B}_k. \qquad (3.4)$$

Згідно з основною теоремою алгебри характеристичне рівняння (3.3) має k коренів (дійсних чи комплексних). Ці корені відіграють вирішальну роль в знаходженні послідовності, яка відповідає заданому рекурентному співвідношенню. Надалі ми зупинимось на випадках, коли характеристичне рівняння має тільки дійсні корені. Випадок комплексних коренів ми розглядати не будемо.

На прикладі лінійного однорідного рекурентного співвідношення 2-го порядку

$$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}, \ (n \geq 3), \qquad (3.5)$$

де A та B – сталі величини, $B \neq 0$ та a_1 і a_2 є заданими, обґрунтуємо метод розв'язування за допомогою характеристичного рівняння.

По-перше, чи існують дійсні числа $\alpha \neq 0$ такі, що рівність $a_n = \alpha^n$ задовольняє (3.5)? Підставляючи $a_n = \alpha^n$ у співвідношення (3.5), отримаємо

$$\alpha^n = A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2},$$

тобто

$$\alpha^{n-2}(\alpha^2 - A\alpha - B) = 0.$$

Звідси або $\alpha = 0$, але це можливо тільки за умов, що $a_1 = 0$ і $a_2 = 0$, (в цьому випадку $a_n = 0$) або $\alpha^2 - A\alpha - B = 0$.

Таким чином, якщо $a_1 \neq 0$ або $a_2 \neq 0$, то $a_n = \alpha^n$ є розв'язком рівняння (3.5) у тих і лише тих випадках, коли α є розв'язком допоміжного (характеристичного) рівняння

$$x^2 = Ax + B\ . \qquad (3.6)$$

Як наслідок, якщо α і β – різні корені рівняння (3.6), то $a_n = \alpha^n$ і $a_n = \beta^n$ обидва є розв'язками рівняння (3.5).

Якщо допоміжне рівняння має кратний корінь α, то

$$x^2 - Ax - B = (x-\alpha)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2\ , \quad A = 2\alpha, \qquad B = -\alpha^2.$$

У цьому випадку $a_n = n\alpha^n$ також задовольняє рівняння (3.5), оскільки

$$Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = A(n-1)\alpha^{n-1} + B(n-2)\alpha^{n-2} =$$
$$= 2(n-1)\alpha^n - (n-2)\alpha^n = n\alpha^n = a_n.$$

Розглянемо дві теореми, що описують структуру загального розв'язку однорідного лінійного рекурентного співвідношення k-го порядку в залежності від виду коренів характеристичного рівняння.

Теорема 3.1. Якщо характеристичне рівняння однорідного рекурентного співвідношення k-го порядку має k різних коренів λ_1, λ_2,…, λ_k, то загальний розв'язок однорідного рекурентного співвідношення має вигляд:

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\,\lambda_2^n + \cdots + C_k\,\lambda_k^n\,,$$

де $C_1, C_2, \dots, C_k$ – довільні константи.

Зауваження. Для визначення констант C_1, C_2, … , C_k *(знаходження частинного розв'язку рекурентного співвідношення) потрібно задати* k *початкових умов, тобто задати* k *елементів послідовності* $a_1, a_2, \dots,\ a_k$.

Теорема 3.2. Якщо характеристичне рівняння однорідного рекурентного співвідношення k-го порядку має корінь λ кратності k, загальний розв'язок однорідного рекурентного співвідношення має вигляд:

$$a_n = (C_1 + C_2 n + \cdots + C_{k-1}\,n^k)\lambda^n\ ,$$

де $C_1, C_2, \dots, C_{k-1}$ – довільні константи.

Доведення теорем проведемо для випадку k=2. Для інших значень k доведення аналогічні.

Теорема 3.3. Нехай послідовність $\{a_n\}$ задовольняє рівняння (3.1), початкові значення a_1 та a_2 визначені, α та β – корені характеристичного рівняння послідовності, тоді:

1) якщо $\alpha \neq \beta$ (корені дійсні і різні), то існують сталі K_1 і K_2 такі, що

$a_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n$ для всіх $n \geq 1$;

2) якщо $\alpha = \beta$ (корінь кратний), то існують сталі K_3 і K_4 такі, що $a_n = (K_3 + nK_4)\alpha^n$ для всіх $n \geq 1$.

Доведення

1) Оберемо K_1 і K_2 так, що $a_1 = K_1\alpha + K_2\beta$, $a_2 = K_1\alpha^2 + K_2\beta^2$, тобто, візьмемо $K_1 = \frac{a_1\beta - a_2}{\alpha(\beta-\alpha)}$, $K_2 = \frac{a_1\alpha - a_2}{\beta(\alpha-\beta)}$.

Тоді, очевидно, твердження теореми є справедливим для $n = 1, 2$. Далі застосуємо індукцію.

Нехай твердження є справедливим для всіх $n \leq k$. Тоді

$$a_{k+1} = Aa_k + Ba_{k-1} = A(K_1\alpha^k + K_2\beta^k) + B(K_1\alpha^{k-1} + K_2\beta^{k-1})$$
$$= K_1\alpha^{k-1}(A\alpha + B) + K_2\beta^{k-1}(A\beta + B) = K_1\alpha^{k+1} + K_2\beta^{k+1}.$$

Твердження 1) доведено.

2) Оберемо K_3 і K_4 так, що $a_1 = (K_3 + K_4)\alpha$ і $a_2 = (K_3 + 2K_4)\alpha^2$, тобто так, що $K_3 = \frac{2a_1\alpha - a_2}{\alpha^2}$, $K_4 = \frac{a_2 - a_1\alpha}{\alpha^2}$.

Тоді твердження, що $a_n = (K_3 + nK_4)\alpha^n$, очевидно, є справедливим для значень $n = 1,2$.

Припустимо, що воно справедливе для всіх $n \leq k$. Тоді маємо, що

$$a_{k+1} = Aa_k + Ba_{k-1} = A(K_3 + kK_4)\alpha^k + B(K_3 + (k-1)K_4)\alpha^{k-1}$$
$$= K_3\alpha^{k-1}(A\alpha + B) + K_4\alpha^{k-1}(Ak\alpha + B(k-1))$$
$$= K_3\alpha^{k+1} + K_4\alpha^{k-1}(2k\alpha^2 - \alpha^2(k-1))$$
$$= K_3\alpha^{k+1} + K_4(k+1)\alpha^{k+1}.$$

Твердження 2) доведено.

Опис цих випадків можна знайти у [14]. Випадок комплексних коренів рівняння (3.6) розглянуто у [3,4,11].

Приклад 4 (продовження). У задачі про стяги ми отримали рекурентне співвідношення $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, де $a_1 = 0, a_2 = 6$.

Відповідне характеристичне рівняння має вид:

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Це рівняння має два різних кореня $\alpha = -1, \beta = 2$. Тому загальний розв'язок рекурентного співвідношення записуємо так:

$$a_n = K_1(-1)^n + K_2 2^n,$$

де K_1 і K_2 можна визначити з початкових умов:

$$\begin{cases} 0 = -K_1, +2K_2 \\ 6 = K_1, +4K_2 \end{cases},$$

звідки маємо $K_1 = 2, K_2 = 1$.

Отже,

$$a_n = 2(-1)^n + 2^n.$$

Приклад 5. Послідовність Фібоначчі задається наступним чином:

$$F_1 = 1, \qquad F_2 = 2, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ (n \geq 3).$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$x^2 - x - 1 = 0$$

має корені $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, тому $F_n = K_1 \alpha^n + K_2 \beta^n$,

де $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$.

Підставляючи в початкові умови, отримуємо

$$\begin{cases} 1 = K_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + K_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \\ 2 = K_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + K_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2. \end{cases}$$

Звідки $K_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ та $K_2 = -\frac{\beta}{\sqrt{5}}$ так, що

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right). \qquad (2.7)$$

Це так звана *формула Біне*.

Може здатися дивною присутність ірраціональностей у формулі n – го члена послідовності, так як числа Фібоначчі – цілі, однак, при перетвореннях виразу ірраціональності пропадають.

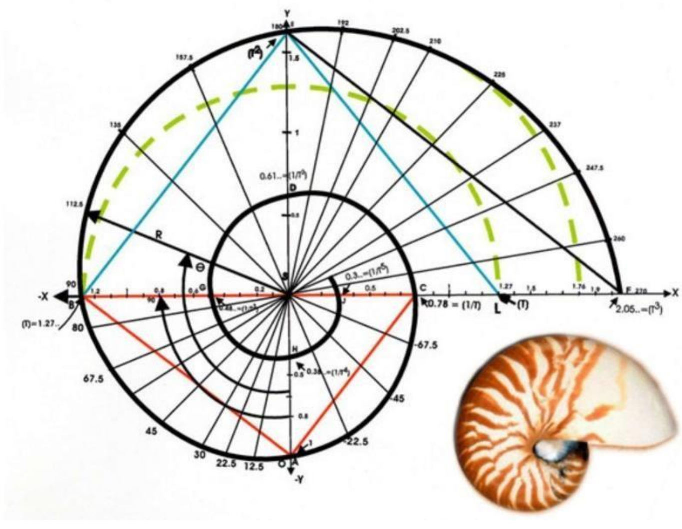
Відомо, що $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Число $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ називається *золотим перерізом*.

Золотий переріз – це таке пропорціональне ділення відрізка на нерівні частини, при якому довжина усього відрізку відноситься до довжини більшої частини, як довжина більшої частини відноситься до довжини меншої.

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$$

Золотий переріз часто можна зустріти в природі: в будові квітки соняшника, раковини молюска, павутини, молекули ДНК тощо можна знайти золотий переріз.

Прийнято вважати, що поняття про золотий переріз ввів в математику Піфагор (приблизно 570-490 рр. до н.е.), давньогрецький філософ і математик. Є припущення, що поняття золотого перерізу він запозичив у єгиптян, які використовували золотий переріз при будівництві пірамід, храмів, барельєфів, предметів побуту та прикрас.



Золотий переріз у раковині молюска

Давньогрецький філософ Платон (427-347 рр. до н.е.) також знав про поділ відрізка в золотій пропорції.

На фасаді давньогрецького храму Парфенона присутні золоті пропорції. При його розкопках виявлені циркулі, якими користувалися архітектори і скульптори античного світу.

Парфенон

Евклід

В античній літературі золотий переріз математично описаний в «Началах» Евкліда (близько 325 - близько 270 до н. е.). У другій книзі «Начал» дається геометрична побудова золотого перерізу. Це число зустрічається в правильному п'ятикутнику; в «золотому» рівнобічному трикутнику з кутом при вершині 36^0; в правильному десятикутнику тощо.

Після Евкліда дослідженням золотого перерізу займалися Гіпсікл (II.ст. до н.е.), Папп (III ст. н.е.) та інші. У середньовічній Європі перші знання про золотий переріз здобули в арабських перекладах «Начал» Евкліда.

Золотий переріз у квітці

Приклад 6. Розв'язати рекурентне співвідношення

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2},\ (n \geq 3),\ \text{де}$$
$$a_1 = 1, a_2 = 3.$$

Відповідне характеристичне рівняння має вигляд

$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$

тобто $(x-2)^2 = 0, x = 2$ – кратний корінь рівняння. Тому загальний розв'язок співвідношення має вигляд: $a_n = (K_1 + nK_2)2^n$.

Використаємо початкові умови і отримаємо:

$$\begin{cases} 1 = 2(K_1 + K_2) \\ 3 = 4(K_1 + 2K_2) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2K_1 + 2K_2 = 1 \\ 4K_1 + 8K_2 = 3. \end{cases}$$

Звідки $K_1 = K_2 = \frac{1}{4}$. Тому, $a_n = (n + 1)2^{n-2}$.

Приклад 7. Нехай $a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 14$ і для будь-якого $n \geq 4$, $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$. Знайти a_n.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \text{ або } (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0.$$

Корені рівняння – числа 1, 2 та 3. Тому загальний розв'язок співвідношення записується у вигляді $a_n = K_1 + K_2 2^n + K_3 3^n$.

Використовуючи початкові умови і розв'язуючи відповідну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} K_1 + 2K_2 + 3K_3 = 3 \\ K_1 + 4K_2 + 9K_3 = 6 \\ K_1 + 8K_2 + 27K_3 = 14 \end{cases},$$

отримуємо, що $K_1 = 1, K_2 = \frac{1}{2}, K_3 = \frac{1}{3}$, отже тоді $a_n = 1 + 2^{n-1} + 3^{n-1}$.

Приклад 8. Знайти a_n, якщо $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 12$ та для будь якого $n \geq 3$ $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$.

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \text{ або } (x - 2)^3 = 0.$$

Це випадок кратного кореня характеристичного рівняння. Отже, загальний розв'язок має вигляд $a_n = (C_1 + nC_2 + n^2 C_3)2^n$.

Використовуючи початкові умови, розв'язуючи відповідну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ 2C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 2 \\ 4C_1 + 8C_2 + 16C_3 = 12 \end{cases},$$

отримуємо, що $C_1 = 1,\ C_2 = -1,\ C_3 = 1$, та $a_n = (1 - n + n^2)2^n$.

Випадок, коли характеристичне рівняння має корені різної кратності, розглянутий у [3,4,11].

§ 3.3. Неоднорідні лінійні рекурентні співвідношення зі сталими коефіцієнтами

У цьому параграфі коротко розглянемо лінійні неоднорідні рекурентні співвідношення зі сталими коефіцієнтами і один з методів їх розв'язку.

Означення. Рекурентне співвідношення, яке визначається рівнянням виду

$$a_n = \mathrm{B}_1 a_{n-1} + \mathrm{B}_2 a_{n-2} + \cdots + \mathrm{B}_k a_{n-k} + f_n, \quad n \geq k, \tag{3.8}$$

називається неоднорідним лінійним рекурентним співвідношенням k-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Константи B_1, B_2, ... , B_k задані, f_n – деяка задана функція від n, яка тотожньо не дорівнює нулю.

Запишемо рівняння (3.8) в більш звичному вигляді, перепозначивши при цьому коефіцієнти:

$$a_n + A_1 a_{n-1} + A_2 a_{n-2} + \cdots + A_k a_{n-k} = f_n, \; n \geq k. \tag{3.9}$$

У § 3.2 ми розглянули метод розв'язування однорідних лінійних рекурентних співвідношень зі сталими коефіцієнтами за допомогою характеристичного рівняння. Виявляється, існує зв'язок між лінійним неоднорідним рекурентним співвідношенням зі сталими коефіцієнтами і відповідним йому однорідним рекурентним співвідношенням.

Теорема 3.4. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами може бути записаний як сума загального розв'язку, відповідного однорідного рекурентного співвідношення і будь-якого частинного розв'язку даного лінійного неоднорідного рекурентного співвідношення.

Як знаходити частинний розв'язок лінійного неоднорідного рекурентного співвідношення зі сталими коефіцієнтами? У загальному випадку, не можна запропонувати універсальний метод. Але якщо права частина неоднорідного рекурентного співвідношення має спеціальний вид (наприклад, многочлен), то для знаходження частинного розв'язку існують універсальні алгоритми.

Приклад 9. Розв'язати рекурентне співвідношення

$$a_n = -a_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}, \quad a_1 = 0.$$

Потрібно розв'язати спочатку відповідне однорідне співвідношення $a_n = -a_{n-1}$. Так як його характеристичне рівняння $x + 1 = 0$ має єдиний корінь $x = -1$, то існує загальний розв'язок однорідного рекурентного співвідношення має вигляд

$$a_n = C \cdot (-1)^n, \ C - const.$$

Частинний розв'язок неоднорідного співвідношення $a_n = -a_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}$ будемо шукати у вигляді $a_n = A \cdot 2^n$, константу A потрібно визначити. Підстановка в вихідне рівняння дає:

$$A \cdot 2^n = -A \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1},$$

звідки $2A = -A + 3$, тобто A=*1*.

Згідно з теоремою 3.4, загальний розв'язок неоднорідного рекурентного співвідношення має вид $a_n = C \cdot (-1)^n + 2^n$, де $C = const$.

Оскільки $a_1 = 0$, отримуємо з $0 = C \cdot (-1)^0 + 2^0$, що $C = 2$ та, остаточно, $a_n = 2 \cdot (-1)^n + 2^n$.

Зауважимо, що початкову умову застосовуємо в самому кінці процедури.

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок співвідношення

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 2n.$$

Знайдемо спочатку розв'язки відповідного однорідного співвідношення

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0.$$

Його характеристичне рівняння $x^2 - 6x + 9 = 0$ має корінь $x = 3$ кратності 2, тобто загальний розв'язок однорідного рекурентного співвідношення має вид

$$a_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 3^n \cdot n = (C_1 + C_2 n) \cdot 3^n, \qquad C_1, C_2 - const.$$

Частинний розв'язок неоднорідного співвідношення будемо шукати у вигляді правої частини, тобто многочлена 1-го ступеня $a_n = Ax + B,$ константи A і B потрібно визначити. Підставивши в вихідне рівняння знайдене співвідношення, отримаємо:

$$A(n+2) + B - 6(A(n+1) + B) + 9(An + B) = 2n.$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, отримаємо

$$(\mathrm{A} - 6\mathrm{A} + 9\mathrm{A})n + 2A + B - 6A - 6B + 9B = 2n$$

або

$$4\mathrm{A}n = 2n$$

та

$$-4A + 4B = 0$$

і, отже

$$A = B = 0{,}5.$$

Згідно з теоремою 3.4, загальний розв'язок неоднорідного рекурентного співвідношення має вигляд

$$a_n = (C_1 + C_2 n) \cdot 3^n + 0{,}5n + 0{,}5, \qquad C_1, C_2 - const.$$

Більш детально з теорією неоднорідних лінійних рекурентних співвідношень зі сталими коефіцієнтами можна ознайомитися у [11].

Для розв'язування багатьох обчислювальних задач застосовують *ітераційні методи розв'язку*, які, за змістом, являють собою процедури розв'язування рекурентних співвідношень.

Так, метод простої ітерації для розв'язування нелінійного алгебраїчного рівняння $f(x) = 0$ описується рекурентним рівнянням виду

$$x(n+1) = x(n) + f(x(n)).$$

Метод Ньютона або метод дотичних – інший класичний алгоритм розв'язування алгебраїчного рівняння $f(x) = 0$ – є алгоритмом чисельного розв'язування рекурентного рівняння $x(n+1) = x(n) - \frac{f(x(n))}{f^F(x(n))}$.

Рекурентні рівняння використовуються для чисельного розв'язування і аналізу розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь в частинних похідних, інтегральних рівнянь, функціональних рівнянь. Більш докладно про це можна прочитати в [11, 17].

§ 3.4. Твірна функція рекурентної послідовності

Розглянемо однорідну рекурентну послідовність k-го порядку $\{a_n\}$, що задовольняє співвідношення

$$a_{n+k} + A_1 a_{n+k-1} + A_2 a_{n+k-2} + \cdots + A_k a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2 \ldots \qquad (3.10)$$

Перші k-членів послідовності $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})$ задані. Числа, що входять в послідовність, можуть мати різну природу.

Означення. Формальний степеневий ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \qquad (3.11)$$

називається *твірною функцією* або *генератрисою* рекурентної послідовності (3.10).

Якщо всі члени послідовності (3.10), починаючи з деякого, дорівнюють нулю, то твірна функція є *твірним многочленом*.

Прикладом твірного многочлена є біном Ньютона:
$(x + 1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^n$ при $n \in \mathrm{N}$.
Він визначає послідовність $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n, 0, 0, \ldots$

Фактично в контексті даного параграфа нас цікавлять тільки коефіцієнти формального степеневого ряду. Наприклад, для послідовності Фібоначчі $\{F_n\}$ = $\{1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$, твірна функція має вигляд:

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + F_n x^n + \cdots$$

Твірна функція для послідовності $\{2^n\}$ має вигляд:

$$f(x) = 1 + 2x + 2^2 x^2 + 2^3 x^3 + \cdots + 2^n x^n + \cdots$$

Запис твірної функції у явному вигляді (через формулу) називають у теорії рекурентних послідовностей записом у *замкнутому вигляді*.

Для вказаного прикладу замкнутий вид твірної функції такий:

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}, \quad |x| < \frac{1}{2}.$$

Обмеження $|x| < \frac{1}{2}$ пов'язане з тим, що у інтервалі $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ ряд $1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + \cdots + 2^nx^n + \cdots$ збігається, а поза ним розбігається.

Із курсу математичного аналізу відомо, що степеневий ряд у правій частині (3.11) має область збіжності, що є інтервалом (відкритим, замкненим або напівзамкнутим, може навіть бути точкою). Питання знаходження інтервалу збіжності можна знайти, наприклад, у [6]. Ми використовуємо ці ряди як допоміжний інструмент, і нам не є важливим точний опис інтервалу збіжності. Метод твірної функції застосовується при тих значеннях x, при яких ряд збігається. Відмітимо, що похідна та інтеграл від твірної функції також визначається формально.

Найчастіше розглядаються такі функції і ряди:

Степеневий ряд	Функція	Послідовність
$1 + x + \cdots + x^n + \cdots$	$\frac{1}{1-x}$	1, 1, 1, 1, …
$1 - x + \cdots + (-1)^nx^n + \cdots$	$\frac{1}{1+x}$	1, -1, 1, -1,...
$1 + 2x + 3x^2 \ldots + (n+1)x^n + \cdots$	$\frac{1}{(1-x)^2}$	1, 2, 3, 4, …
$1 + 2x + 4x^2 \ldots + 2^nx^n + \cdots$	$\frac{1}{1-2x}$	1, 2, 4, 8, 16, …
$1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$	$(1+x)^m$	$1, m, \frac{m(m-1)}{2!}, \ldots$

Розглянемо на прикладах метод для знаходження твірної функції в замкнутому вигляді і формули n-го члена послідовності, якщо послідовність задана рекурентним співвідношенням. Більш детально ознайомитися з теоретичними основами методу можна в [2, 11].

Приклад 11. Розглянемо стаціонарну послідовність 1, 1, 1, …, яка може бути задана рекурентним співвідношенням $a_{n+1} = a_n$. Вона визначається функцією

$$f(x) = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots.$$

Знайдемо вираз для цієї функції у замкнутому вигляді. Для цього помножимо обидві частини рівності на x. Тоді отримаємо

$$xf(x) = x + x^2 + \cdots$$

або $xf(x) = f(x) - 1$, звідки $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Приклад 12. Розглянемо рекурентне співвідношення прикладу 9

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - a_{n-1},\ a_1 = 0,\ n \geq 2.$$

Нехай $f(x) = a_1x + a_2x^2 \ldots + a_nx^n + \cdots$, тоді

$$f(x) = a_1x + (3 \cdot 2^1 - a_1)x^2 + (3 \cdot 2^2 - a_2)x^3 + \cdots =$$

$$= a_1x + 3(2x^2 + 2^2x^3 + \cdots) - (a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots).$$

Цю рівність можна переписати у такому вигляді:

$$f(x) = 6x^2(1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots) - xf(x),$$

звідки

$$f(x) = \frac{6x^2}{(1-2x)(1+x)}, \quad |x| < \frac{1}{2}.$$

Ми отримали вид твірної функції в замкнутому вигляді.

Тепер знайдемо формулу n-го члена послідовності. Для цього розкладемо дріб на елементарні дроби і застосуємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$f(x) = \frac{6x^2}{(1-2x)(1+x)} = 6x^2\left(\frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1+x}\right),$$

де $A = \frac{2}{3},\ B = \frac{1}{3}$.

Тоді $f(x) = 2x^2 \left(\frac{2}{1-2x} + \frac{1}{1+x}\right)$.

Розклавши кожний доданок у дужках в ряд Маклорена, отримаємо

$$f(x) = 4x^2(1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots) + 2x^2(1 - x + x^2 - \cdots).$$

Знайдемо коефіцієнт при x^n:

$$a_n = 4 \cdot 2^{n-2} + 2 \cdot (-1)^{n-2} = 2^n + 2 \cdot (-1)^n.$$

Приклад 13. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, a_1 = 1, a_2 = 3, n \geq 3$.

Для знаходження твірної функції виконаємо дії, аналогічно прикладу 12.

$$f(x) = a_1x + 3x^2 + (4a_2 - 4a_1)x^3 + (4a_3 - 4a_2)x^4 + \cdots$$
$$= x + 3x^2 + 4(a_2x^3 + a_3x^4 + \cdots) - 4(a_1x^3 + a_2x^4 + \cdots) .$$

Цю рівність можна переписати в такому вигляді:

$$f(x) = x + 3x^2 + 4x(f(x) - a_1x) - 4x^2f(x),$$

звідки

$$f(x) = \frac{x - x^2}{(1 - 2x)^2}.$$

Знов використовуючи ряд Маклорена, маємо

$$\frac{1}{(1 - 2x)^2} = 1 + 2 \cdot 2x + 3 \cdot 2^2x^2 + \cdots f(x)$$
$$= (x - x^2)(1 + 2 \cdot 2x + 3 \cdot 2^2x^2 + \cdots).$$

Тепер знайдемо формулу *n*-го члена послідовності.

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} = n2^{n-1} - (n - 1)2^{n-2} = (n + 1)2^{n-2}.$$

Приклад 14. Знайти формулу *n*-го члена послідовності Фібоначчі.

$$F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n \geq 2.$$

У цьому прикладі вчинимо інакше, ніж в двох попередніх. Помножимо всі рівності на x^0, x^1, ... , x^n відповідно та просумуємо отримані рівності. Отримаємо:

$$x^1F_1 + \sum_{n=2}^{\infty} x^n F_n = x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n F_{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} x^n F_{n-2}.$$

Перепишемо це рівняння у вигляді

$$x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n F_n = x + x\sum_{n=2}^{\infty} x^{n-1} F_{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} F_{n-2.}$$

Позначимо $f(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} x^n F_n$, тоді $f(x) = x + xf(x) + x^2f(x)$, звідки $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ – твірна функція послідовності Фібоначчі.

Представимо твірну функцію у вигляді степеневого ряду. Для цього розкладемо дріб на елементарні дроби і застосуємо метод невизначених коефіцієнтів.

Корені рівняння $1 - x - x^2 = 0$: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. Розкладемо дріб на елементарні дроби:

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}.$$

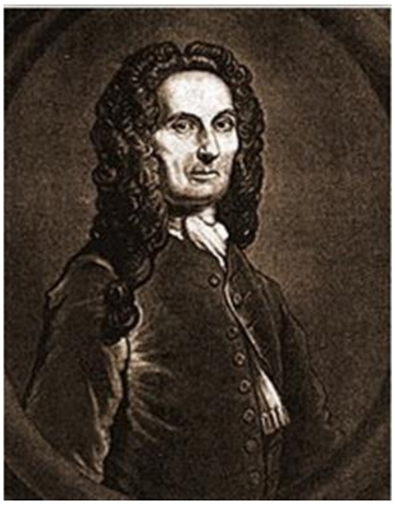
Зведемо праву частину до спільного знаменника та розв’яжемо відповідну систему, отримаємо $A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, B = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Тоді

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}(x-x_1)} + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}(x-x_2)} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}x_1}\cdot\frac{1}{(1-\frac{x}{x_1})} + \frac{-1+\sqrt{5}}{\overline{2\sqrt{5}x_2}}\cdot\frac{1}{(1-\frac{x}{x_2})}.$$

Використовуючи формулу $\frac{1}{1-\alpha x} = 1 + \alpha x + (\alpha x)^2 + \cdots + (\alpha x)^n + \cdots$ та застосувавши деякі алгебраїчні перетворення виразів під знаком суми, отримаємо

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty} x^n\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

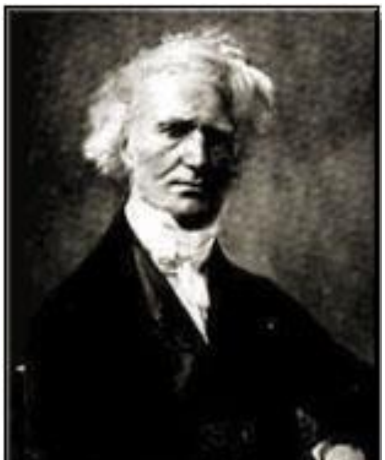
де $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$ (знову формула Біне).



Абрахам Муавр

Основи теорії лінійних рекурентних послідовностей були закладені в першій третині XVIII століття англійським математиком Абрахамом де Муавром (1667-1754) і голландським математиком Данилом Бернуллі (1700-1782). Леонард Ейлер виклав цю теорію в тринадцятому розділі свого «Вступ до аналізу нескінченно малих» (1748).

Початок методу твірної функції поклав Абрахам де Муавр, а подальшому розвитку і продовженню даного методу сприяли роботи Леонарда Ейлера. А. Муавр займався отриманням формули для загального члена послідовності Фібоначчі. Для цього він розробив метод твірної функції, який і в сучасній математиці застосовується в задачах комбінаторики, теорії ймовірностей і теорії чисел.



Жак Біне

Алгоритм утворення послідовності Фібоначчі дуже простий, але загальну формулу n-го члена послідовності математики не могли отримати кілька століть. Абрахам Муавр в 1730 році, через п'ятсот років після опису послідовності в роботі Леонардо Фібоначчі (1202), за допомогою методу твірної функції вивів формулу n-го члена послідовності

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n).$$

Зараз формулу називають формулою Біне (Жак Філіп Марі Біне, 1786-1856, французький математик, механік і астроном, перевідкрив цю формулу через сто років після Муавра).

Підсумовування рекурентних послідовностей є завданням обчислення скінчених різниць. Такими задачами займалися А. Муавр, Д. Бернуллі, Л. Ейлер, І. Ньютон, Б. Тейлор, Дж. Стірлінг та ін.

Обчислення скінчених різниць набуло статусу самостійної математичної дисципліни тільки на початку XVIII в. в працях Ісаака Ньютона («Метод різниць», 1811). Теорія рекурентних послідовностей є частиною обчислення скінчених різниць, яка, в свою чергу є розділом математичного аналізу функцій цілочисельних аргументів (функцій з дискретно змінним аргументом).

§ 3.5. Розупорядкування

Припустимо, що n чоловік залишають пальто в гардеробі театру. Після спектаклю вони беруть пальто навмання. Яка ймовірність того, що жодному не дістанеться його пальто?

Означення. Розупорядкуванням чисел $1,2, \ \dots \ , \ n$ називається порушення порядку цих чисел $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$ таким чином, що для усіх $\pi(i) \neq i$.

Наприклад, існує дев'ять розупорядкувань чисел 1 2 3 4:

2 4 1 3, 2 1 4 3, 2 3 4 1, 3 1 4 2, 3 4 2 1, 3 4 1 2, 4 1 2 3, 4 3 1 2, 4 3 2 1.

В усіх цих комбінаціях 1 знаходиться не на першому місці, 2 – не на другому, і так далі.

Позначимо через d_n число розупорядкувань чисел $1,2, \ \dots \ , \ n$. Достатньо легко обчислити, що $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, d_3=2, $d_4 = 9$. Наша мета – знайти рекурентні співвідношення для d_i, а потім – формулу для обчислення d_n.

Помітимо спочатку, що d_n є числом способів розміщення n об'єктів в n коробок, коли для кожного об'єкту одна коробка є забороненою і коли кожна коробка заборонена для одного з об'єктів. Вище коробку і об'єкти було занумеровано $1,2, \ \dots \ , \ n$, де $i -$ та коробка заборонена для $i -$ ого предмета. Взагалі кажучи, нумерація може бути довільною.

Помітимо далі, що серед дев'яти розупорядкувань чисел 1, 2, 3, 4 є три, де число 4 міняється місцями з іншим числом, це розупорядкування: 2 1 4 3, 3 4 1 2 і 4 3 2 1.

У інших шести розупорядкуваннях число 4 не міняється місцями з іншим числом. Враховуючи це, маємо

$d_n = e_n + f_n$,

де e_n – число розупорядкувань, в яких число n міняється з яким-небудь іншим, а f_n – число розупорядкувань, в яких чсло n не міняється місцями з іншим числом. Якщо число n міняється місцями з числом i (всього існує $(n-1)$ спосіб вибору i), то числа, яких залишилося $(n-2)$, можна розупорядкувати d_{n-2} способами.

Таким чином, $e_n = (n-1)d_{n-2}$.

Якщо n йде зі свого місця і на це місце приходить число r (кількість способів вибору цього r є $(n-1)$), тоді залишається $n-1$ місць і $n-1$ чисел, і знову для кожного числа заборонено одно місце, і для кожного місця заборонено одне число (для усіх чисел заборонені свої місця, а для n заборонено $r-$те місце).

Тому, $f_n = (n-1)d_{n-1}$.

Таким чином,

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}) \tag{3.12}$$

Використовуючи це рекурентне співвідношення, отримуємо, що

$$d_5 = 4(9+2) == 44,$$

$$d_6 = 5(44+9) = 265$$

і так далі.

Рекурентне співвідношення (3.12) не можна розв'язати методом допоміжного рівняння, оскільки коефіцієнти при d_{n-1} і d_{n-2} (обоє рівні $(n-1)$) не сталі. Проте, ми можемо привести (3.6) до зручнішої форми.

Рівність (3.12) перепишемо у виді

$$d_n - nd_{n-1} = -(d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}).$$

Вираз в правій частині виходить, якщо в лівій частині поміняти знак і замінити n на $(n-1)$. Тому, ітеруя, отримуємо

$$d_n - nd_{n-1} = -(d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}) = (-1)^2(d_{n-2} - (n-2)d_{n-3}) =$$
$$\cdots = = (-1)^{n-2}(d_2 - 2d_1) = (-1)^n(1-0) = (-1)^n,$$

тобто,

$$d_n - nd_{n-1} = (-1)^n . \tag{3.13}$$

Таким чином,

$$\frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Склавши рівності $\frac{d_m}{m!} - \frac{d_{m-1}}{(m-1)!} = \frac{(-1)^m}{m!}$, де $m = 2,3,\dots,n$, отримуємо

$$\frac{d_n}{n!} - \frac{d_1}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{m=2}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Але $d_1 = 0$, тому ми маємо

$$d_n = n! \sum_{m=0} \frac{(-1)^m}{m!} = n!\,(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{1}{n!}). \tag{3.14}$$

Одним з цікавих наслідків цього результату є те, що

$$\frac{d_n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}.$$

Таким чином, ймовірність того, що ніхто не отримає своє пальто, прямує при $n \to \infty$ до $\frac{1}{e} = 0{,}36788$ ....

Наприклад, для $n = 6$ маємо $\frac{d_6}{6!} = \frac{265}{720} \approx 0{,}36806$, що співпадає до третього знаку з $\frac{1}{e}$.

Приклад 15. Знайти число перестановок чисел $1,2, \dots, n$, в яких k чисел знаходяться на своїх місцях.

Існує C_n^k способів вибору k номерів, які фіксуємо. Решта $n - k$ мають бути розташовані не на своїх місцях. Число способів таких розташувань дорівнює d_{n-k}. Тому, за принципом множення отримуємо відповідь $C_n^k d_{n-k}$.

§ 3.6. Алгоритми сортування

Часто в задачах необхідно мати можливість оцінити число елементарних операцій або час, необхідний комп'ютеру для виконання всього алгоритму. Це важливо, оскільки виконання одних операцій триває довше, ніж виконання інших.

Іноді також потрібно для виконання алгоритму враховувати обсяг пам'яті комп'ютера, точність обчислень тощо. Вочевидь, це важливо тільки для програм, які потребують для виконання значного часу, що може залежати від такого фактору як обсяг даних. Саме тому часто розглядають поняття тимчасової складності алгоритму. Незважаючи на те, що функція часової складності алгоритму в деяких випадках може бути визначена точно, в більшості випадків шукати точне її значення є безглуздим.

Розгляд вхідних даних розміру і оцінка порядку зростання часу роботи алгоритму приводять до поняття *асимптотичної складності алгоритму*. При цьому алгоритм з меншою асимптотичною складністю є більш ефективним для всіх вхідних даних, за винятком лише, можливо, даних малого розміру. Для запису асимптотичної складності алгоритмів використовуються асимптотичні позначення. Зокрема фраза «складність алгоритму є «О велике від $f(n)$» означає, що зі збільшенням кількості вхідної інформації алгоритму, час роботи алгоритму буде зростати не швидше, ніж деяка константа, помножена на $f(n)$ і, позначається як $O(f(n))$. Літера «n» тут є розміром вхідних даних, а функція, наприклад, «$f\ (n) = n^2$» всередині «О ( )» дає нам уявлення про те, на скільки складним є алгоритм у відношенні до кількості вхідних даних.

Якщо деякому алгоритму потрібно виконати $17n^3 + 3n$ умовних операцій для того, аби опрацювати n елементів вхідних даних, то зі збільшенням n на кінцевий час роботи суттєво впливатиме піднесення n до кубу, ніж множення n на 17 або ж додавання $3n$. Часова складність алгоритму дорівнює $O(n^3)$, тобто залежить від розміру вхідних даних кубічно.

Використання великої літери О (або так звана О-нотація) пришла з математичного аналізу, де її використовують для порівняння асимптотичної поведінки функцій. Час роботи алгоритму може бути класифіковано залежно від того, яка функція перебуває під О-нотацією. Наприклад, алгоритм з складністю $O\ (n)$ називають алгоритмом з *лінійним часом роботи*, алгоритм з $O(\ n^{\alpha}\ )$ для деякого α > 1 називають *поліноміальним*.

Так, наприклад, якщо розглянути алгоритм додавання двох матриць розміру $m\ \times\ n$, то очевидно виконується mn операцій додавання. Тоді число всіх виконуваних арифметичних операцій має показник складності $O(N^2)$, де $N = \max\{m, n\}$.

Аналогічно, число виконуваних арифметичних операцій при множенні матриці розміру $m\ \times\ p$ на матрицю розміру $p\ \times\ n$ має порядок $O(N^3)$, де число $N\ =\ \max\{m,\ n,\ p\}$ (mnp операцій додавання і mnp операцій множення).

Можна також розглядати *константну складність алгоритму* $\mathrm{O}(1)$. Це означає, що для обраної операції потрібен константний час. Такі операції не залежать від кількості даних. Наприклад, для визначення значення п'ятого елемента масиву не потрібно ні запам'ятовувати елементи, а ні проходити по елементам кілька разів. Завжди потрібно просто дочекатися в потоці вхідних даних п'ятий елемент і це буде результатом, на обчислення якого для будь-якої кількості даних потрібно приблизно один і той самий час.

Існують також алгоритми з *логарифмічною складністю,* її позначають як $O(log\ \ n)$. Останній запис є стандартним записом для алгоритмів логарифмічної складності незалежно від основи логарифму. Такий запис використовується через те, що у комп'ютерах прийнята двійкова система числення, тому потрібно як основу логарифму використовувати 2 (тобто отримаємо запис $log_2 n$). Однак при переході основи логарифму $log_2\ n$ та $\log_b n$ відрізняються лише на постійний множник $log_b\ 2$, який у О-нотації відкидається. Найпростішим алгоритмом з логарифмічною складністю є бінарний пошук. Дійсно, якщо масив даних відсортовано, то ми можемо перевірити, чи є в ньому якесь конкретне значення методом ділення навпіл. Далі перевіряємо середній елемент, якщо він більше шуканого, то відкинемо другу половину масиву, оскільки там точно не має потрібного елемента. Якщо ж менше, то навпаки – відкинемо першу половину масиву. Аналогічно далі будемо ділити пополам отриманий «напівмасив», кожна така операція зменшує кількість вхідних даних вдвічі, у підсумку перевіримо $log\ n$ елементів масиву.

Лінійною складністю $O(n)$ володіє наприклад алгоритм пошуку найбільшого елемента у не відсортованому масиві. Нам потрібно пройтись по всім n елементам масиву, щоб зрозуміти, який з них є максимальним.

Квадратичну складність $O(n^2)$ має, наприклад, алгоритм сортування вставками. У своїй канонічні реалізації це два вкладених цикли: один для того, аби проходити по всім елементам масиву, а другий цикл для знаходження місця черговому елементу в уже відсортованій частині. Таким чином кількість операцій буде залежати від розміру масиву, так як $n * n$, тобто n^2. Іноді алгоритмів з такою складністю не уникнути, однак квадратична складність – привід переглянути алгоритми або структури даних, що використовуються. Прикладом алгоритму з квадратичною складністю є алгоритм бульбашкового сортування масиву.

Існують також алгоритми з *лінійно-логарифмічною* $O(n \cdot log^k n)$, *полілогарифмічною* $O(log^k n)$, *квазілінійною* $O(n \cdot log^k n)$ складностями для деякого k та ін. Прикладом лінійно-логарифмічною алгоритму є алгоритм сортування за допомогою бінарного дерева, прикладом квазілінійного алгоритму – алгоритми швидкого сортування або сортування кучею тощо.

Алгоритм з *поліноміальною складністю* $O(n^k)$ для деякого k утворюють клас алгоритмів P, що є центральним у теорії обчислювальної складності (див. [5, 8, 9]). Усі базові арифметичні операції реалізуються алгоритмом за поліноміальний час.

Задачі, час виконання яких потребує виконання часу експоненційно, називаються *експоненціальними*. Їхня складність обмежена функцією $e^{P(n)}$, де $P(n)$ – деякий многочлен, що залежить від розміру вхідних даних n.

Зауважимо, що експоненти мають більшу складність, ніж многочлени. Так алгоритм складності $O(2^n)$ є більш складним, ніж $O(n^{99})$.

Зауважимо, що факторіали мають більшу складність ніж степінь. Коротке доведення цього факту полягає в розумінні того, що факторіали та степінь містять однакову кількість добутків, але числа, що множимо, зростають для факторіалів, залишаються незмінними для степеня.

Дослідженням алгоритмів різної складності займається теорія алгоритмів.

Розглянемо деякі найпоширеніші алгоритми сортування: бульбашковий алгоритм і алгоритм злиттям.

Нехай є купа листків з письмовими відповідями студентів. Ми хочемо розсортувати їх, тобто розкласти в порядку зростання або зменшення оцінок. Чи існує ефективний спосіб зробити це? Почнемо з простої, але не дуже ефективної процедури.

Сортування бульбашковим методом

Спочатку відзначимо, що сортування завжди вимагає дій, які повторюються, для чого використовують або цикли, або рекурсія. Ефективність алгоритму оцінюється за кількістю необхідних дій. Найчастіше для цього обчислюємо число попарних порівнянь елементів сортованих даних (масивів) та кількість обміну сусідніх елементів у парах.

Алгоритм бульбашкового сортування – досить простий у реалізації алгоритм сортування масивів. У літературі можна зустріти й інші назви цього алгоритму: бульбашкове сортування, Buble sort або сортування простими обмінами. Алгоритм названий бульбашковим, тому що більше (або менше) значення «спливає» (зсувається) до краю масиву після кожної ітерації. Алгоритм сортування бульбашковим методом полягає в повторюваних проходах по масиву, що сортується. На кожній ітерації послідовно порівнюються сусідні елементи, і, якщо порядок у парі неправильний, елементи міняють місцями. За кожен прохід масивом, як мінімум, один елемент встає на своє місце, тому необхідно зробити не більше $n - 1$ проходів, щоб відсортувати масив, де n розмір масиву.

Проілюструємо роботу алгоритму на прикладі.

Візьмемо n листків робіт студентів в довільному порядку, вони утворюють масив. Будемо сортувати листки у порядку зростання оцінок студентів.

Порівняємо перші два і поміняємо їх місцями, якщо вони розташовані не в порядку зростання оцінок. Потім порівняємо другий з третім і знову поміняємо їх місцями, якщо потрібно. Діючи так до кінця послідовності, отримаємо найбільшу оцінку на останньому місці. Потім повторимо процедуру для перших $n - 1$ номерів. Тоді другий за величиною номер потрапить на передостаннє місце. Повторимо процедуру для перших $n - 2$ номерів і так далі.

Загальна кількість переміщень листків (порівнянь) у цій процедурі дорівнює

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$$

В цьому випадку ми говоримо, що алгоритм має показник складності $O(n^2)$.

Приклад 16. Нехай є листки з оцінками 7, 10, 4, 6, 3. Відсортуємо їх за зростанням оцінок бульбашковим способом.

Після перших 4 переміщень листків маємо 7, 4, 6, 3, 10. Після наступних 3 переміщень: 4, 6, 3, 7, 10. Після наступних двох: 4, 3, 6, 7, 10. Після останнього порівняння оцінок: 3, 4, 6, 7, 10.

Загальна кількість переміщень – 10.

Сортування злиттям

Ідея полягає в поділі даного набору на дві (приблизно рівні) частини. Потім сортуємо кожну частину, а потім зливаємо (комбінуємо) їх.

Процес злиття двох відсортованих наборів довжин l і m в один набір потребує $l + m - 1$ порівнянь. Це пояснюється таким чином. Нехай є два відсортованих набори в порядку зростання. Порівняємо перші (найменші) номера наборів і виберемо менший з них в якості першого номера нового набору. При цьому викреслимо цей номер з того набору, з якого він узятий. Повторимо процедуру і знайдемо другий номер нового набору і так далі. Очевидно, число порівнянь не перевищує $l + m - 1$, так як для вибору останнього не потрібно порівняння.

Перш, ніж порівнювати дві відсортовані частини, потрібно їх впорядкувати. Нехай t_n – число порівнянь, необхідних для сортування n номерів обраним методом сортування. Якщо ми розділимо набір з n елементів на два з l і m елементів, то отримаємо

$$t_n = t_l + t_k + l + k - 1 = t_l + t_k + n - 1.$$

Таким чином, якщо ми розглянемо частинний випадок $n = 2^m$ так, щоб набір міг бути розділений пополам на кожній стадії, то отримаємо

$$t_{2^m} = 2\, t_{2^{m-1}} + (2^m - 1)$$

Підставимо $a_m = t_{2^m}$. Тоді рекурентне співвідношення має вигляд

$$a_m = 2\, a_{m-1} + (2^m - 1). \qquad (3.15)$$

Розв’яжемо спочатку однорідне рекурентне співвідношення

$$a_m = 2\, a_{m-1}.$$

Очевидно, розв’язок має вигляд $a_n = A2^n$, де А – довільна константа. Знайдемо тепер частинний розв’язок співвідношення (3.15). Використаємо метод невизначених коефіцієнтів.

Спосіб знаходження розв’язку у вигляді $a_n = B2^n + C$ не призведе до результату, оскільки 2^n є розв’язком однорідного рекурентного співвідношення, тому ми шукаємо частинний розв’язок у вигляді

$$a_n = Bn2^n + C.$$

Після підстановки отримаємо

$$Bn2^n + C = 2B(n-1)2^{n-1} + 2C + 2^n - 1,$$

тобто

$$0 = -B2^n + 2^n - 1 + C,$$

звідки маємо $B = C = 1$ та, відповідно,

$$a_n = A2^n + n2^n + 1.$$

Але $a_1 = 1$, і відповідно, $A = -1$. Остаточно маємо, що

$$a_n = 2^n(n-1) + 1.$$

Таким чином, $t_{2^m} = 1 + 2^m(m-1)$.

Підставимо $n = 2^m$, тоді отримаємо $t_n = 1 + n(log_2 n - 1)$.

Отже, даний метод сортування має показник складності $O(nlog_2 n)$. Це краще, ніж при використанні попереднього методу, показник складності якого $O(n^2)$ бо n^2 зростає з ростом n швидше, ніж $nlog_2 n$.

Нижче наведено таблицю поширених алгоритмів сортування масивів та їх часової складності.

Алгоритм	Структура даних	Часова складність
Сортування злиттям	Масив	$O(n\,log_2\,n)$
Пірамідальне сортування	Масив	$O(n\,log\,n)$
Бульбашкове сортування	Масив	$O(n^2)$
Сортування вставками	Масив	$O(n^2)$
Сортування вибором	Масив	$O(n^2)$

§ 3.7. Числа Каталана

У цьому параграфі ми введемо відому числову послідовність, звану числами Каталана, яка виникає в багатьох задачах різного типу. Числа Каталана названі ім'ям бельгійського математика Каталана (E. C. Catalan

1814-1894), який розглядав їх в своїх публікаціях. Але ще раніше вони розглядалися іншими математиками, в тому числі Л. Ейлером в його роботі про розбиття багатокутника на трикутники (про це ми надалі коротко).

Ми повністю опишемо один випадок, де зустрічаються числа Каталана і почнемо з наступного простого завдання.

Приклад 17. Скільки шляхів «вгору-вправо» існує з точки А в точку В (рис.1)?

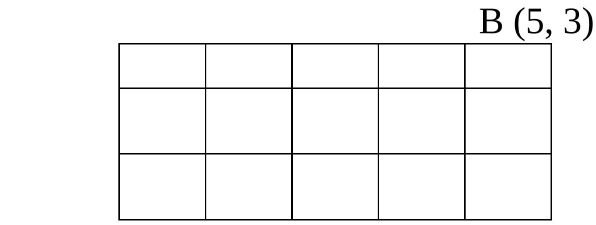


Рис. 1

Під шляхом «вгору-вправо» ми маємо на увазі рух уздовж сторін малих квадратів завжди вгору або вправо. Кожен шлях складається з 5 рухів праворуч і 3 рухів вгору. Таким чином, загальне число можливих шляхів дорівнює C_8^3. У загальному випадку, якщо прямокутник має довжину m і висоту n, то число таких шляхів дорівнює C_{m+n}^n

Нехай тепер ми маємо квадрат $n \times n$ і потрібно знайти число p_n шляхів «вправо-вгору» з нижнього лівого кута у верхній правий, які проходять під діагоналлю АВ (можливо, торкаючись її). У разі $n = 3$, зображеному на рис. 2, є 5 таких шляхів, які можна описати так: ПВПВПВ, ПВППВВ, ППВВПВ, ППВПВВ, ПППВВВ, де П означає вправо, В означає вгору. Отже $p_3 = 5$. А чому дорівнює p_n?

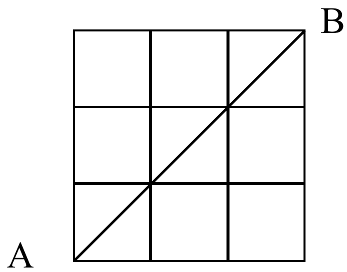


Рис. 2

Будемо називати «правильним» будь-який шлях, що задовольняє наші умови. Такий шлях торкається діагоналі хоча б один раз, ще не дійшовши до точки B (хоча б тільки в точці A). Розглянемо будь-який правильний шлях. Нехай його останній перед B дотик діагоналі відбувається в точці C(m,m), де $1 \le m < n$. Тоді p_m – це число правильних шляхів з A в C. Шлях з точки C повинен продовжитися в точку D($m+1$, m), а звідти в точку E(n, n-1) (див. рис. 3), але він ніде не повинен проходити над лінією DE, інакше C не буде останньою точкою торкання діагоналі. Але точки D і E є протилежними вершинами квадрата зі стороною $n - m - 1$, і число правильних шляхів з D в E дорівнює p_{n-m-1}.

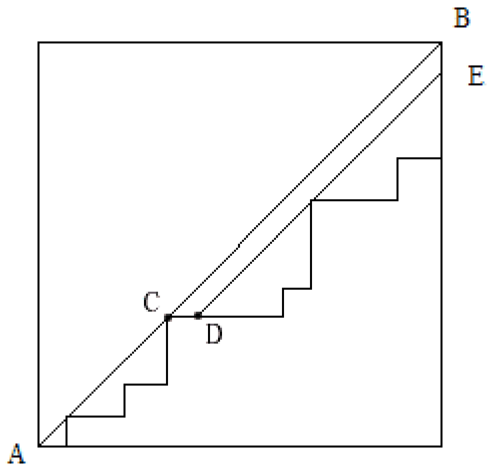


Рис. 3

За правилом добутку, число правильних шляхів з A в B з останнім до точки B дотиком діагоналі в точці (m,m) дорівнює $p_m p_{n-m-1}$.

Оскільки m може приймати всі значення від 0 до n-1, за правилом суми отримуємо

$$p_n = \sum_{m=0}^{n-1} p_m p_{n-m-1}. \tag{3.16}$$

Початкова умова $p_1 = 1$ є очевидною і тоді за формулою (3.16) $p^2{}_0 = 1$.

Отже, оберемо $p_0 = 1$.

Це рекурентне співвідношення відрізняється від розглянутих раніше тим, що воно не є лінійним. Для розв'язання співвідношення застосуємо метод твірної функції.

Нехай $f(x) = \quad p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots$

Тоді, використовуючи (3.16), отримуємо

$$f^2(x) = (p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots)(p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n(p_0p_n + p_1p_{n-1} + \cdots + p_np_0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1}x^n$$

Таким чином, $xf^2(x) = f(x) - p_0 = f(x) - 1$, звідки

$$xf^2(x) - f(x) + 1 = 0.$$

Розв'язуючи це квадратне рівняння, отримуємо:

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \frac{1}{2x}(1 - (1 - 4x)^{\frac{1}{2}}).$$

Ми вибираємо знак мінус перед коренем (можна вибрати будь-який знак), щоб уникнути наявності члена виду $\frac{1}{x}$ в $f(x)$.

Розкладаючи $(1 - 4x)^{\frac{1}{2}}$ в ряд Маклорена, маємо:

$$f(x) = \frac{1}{2x}\{1 - (1 - \frac{1}{2} \cdot 4x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4^2x^2}{2!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4^3x^3}{3!} - \cdots)\} =$$
$$= \frac{1}{2x}(\frac{1}{2} \cdot 4x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4^2x^2}{2!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4^3x^3}{3!} + \cdots) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4x}{2!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4^2x^2}{3!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4^3x^3}{4!} + \cdots$$

Таким чином, для $n \geq 1$

$$p_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n(n+1)!} \cdot 4^n = \frac{2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-1)}{(n+1)!} = \frac{2^n(2n)!}{(n+1)!\, 2^n n!}$$
$$= \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

Наприклад, $p_3 = \frac{1}{4} C_6^3 = 5$, а $p_4 = \frac{1}{5} C_8^4 = 14$. Відмітимо, що $p_0 = 1$ задовольняє умові $C_0^0 = 1$.

Означення. Числа p_n називаються *числами Каталана*, їх прийнято позначати як K_n.

Отже,

$$K_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n. \tag{3.17}$$

Послідовність $\{K_n\}_{n \geq 0}$ починається так 1, 1, 2, 5, 14, 42, 139, 429, …

З (2.17) отримуємо

$$K_m = K_0 K_{m-1} + K_1 K_{m-2} + \dots + K_{m-1} K_0. \qquad (3.18)$$

Як вже було сказано раніше, числа Каталана виникають в різних ситуаціях. Так, замінивши П і В на 0 і 1 відповідно, отримуємо, що числа Каталана K_n дорівнюють числу бінарних послідовностей довжини $2n$, що містять n нулів і n одиниць, за умови, що на кожній ділянці, яка починається з лівого кінця, число одиниць не перевищує числа нулів.

Вперше з цією послідовністю зіткнувся Л. Ейлер при розв'язуванні наступної задачі: скількома способами можна розрізати непересічними діагоналями опуклий n-кутник на трикутники? Вочевидь, що для n = 3 ця задача не має розв'язків, для n = 4 існує два способи, для n = 5 існує 5 способів, для n = 6 існує 14 способів.

У загальному випадку число Каталана K_{n-2} дорівнює числу способів поділу опуклого n-кутника на трикутники $(n - 3)$-ма діагоналями. Наприклад, $K_3 = 5$ способу поділу п'ятикутника на трикутники показані на рис. 4.

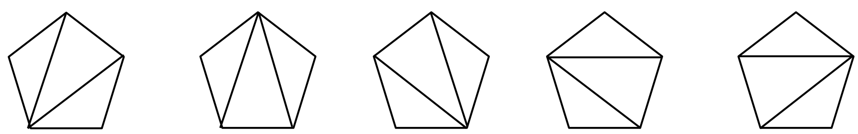


Рис. 4

У 1838 року Каталан розв'язав таке завдання: «Нехай є ланцюжок з n букв, розташованих у заданому порядку. Необхідно розставити $(n - 1)$ пару дужок так, щоб усередині кожної пари стояло рівно два «вирази». Цими спареними виразами можуть бути або дві сусідні літери, або два сусідні вирази. Скількома способами можуть бути розставлені дужки?». Розв'язання задачі призвело до математики числової послідовності, яка надалі почала носити його ім'я.

Хочемо відзначити, що числа Каталана часто виникають під час розв'язання комбінаторних завдань. Більш детально з цією послідовністю можна ознайомитись, наприклад у [12, 14, 16, 17].

Контрольні запитання і завдання

1. Наведіть приклад задачі, яка приводить до рекурентних співвідношень.
2. Що ми розуміємо під рекурсією?
3. Які рекурентні співвідношення виникають в задачі про башти Ханою?
4. Якими методами можна розв'язувати рекурентні співвідношення?
5. Як визначити порядок рекурентного співвідношення? Який порядок має рекурентне співвідношення $a_n - 4\, a_{n-1} + a_{n-2} + 5\, a_{n-3} = 0$?
6. Яке рекурентне співвідношення називають лінійним? Наведіть приклад.
7. Яке рекурентне співвідношення називають однорідним? Наведіть приклад.
8. Яке рекурентне співвідношення називають неоднорідним? Наведіть приклад.
9. Яке рівняння називають характеристичним рівнянням лінійного однорідного рекурентного співвідношення виду $a_n + A_1 a_{n-1} + A_2 a_{n-2} + \cdots + A_k a_{n-k} = 0,\ n \geq k$?
10. Запишіть характеристичне рівняння рекурентного співвідношення $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 4a_n = 0$.
11. Як пов'язані загальний розв'язок лінійного рекурентного співвідношення з правою частиною і загальний розв'язок однорідного рекурентного співвідношення?
12. Запишіть рекурентне співвідношення послідовності чисел Фібоначчі та відповідне йому характеристичне рівняння.
13. У яких практичних задачах виникають числа Фібоначчі?
14. Запишіть формулу Біне.
15. Яке число ми називаємо золотим перерізом. Якій геометричний зміст має це число?
16. Що називають твірною функцією рекурентного співвідношення? Наведіть приклад.
17. Яку послідовність чисел визначає біном Ньютона?

18. Як застосовується твірна функція для розв'язування рекурентних співвідношень?
19. Запишіть розкладання у степеневий рід функції $\frac{1}{1-x}$ і відповідну їй числову послідовність.
20. Запишіть розкладання у степеневий ряд функції $\frac{1}{1+x^2}$ і відповідну їй числову послідовність.
21. Запишіть розкладання у степеневий ряд функції $(1 + x)^m$ і відповідну їй числову послідовність.
22. Що називається розупорядкуванням чисел $1,2, \dots, n$? Наведіть приклад задачі, в якій виникає розупорядкування.
23. Що називають асимптотичною складністю алгоритму? Що означає той факт, що алгоритм має експоненціальну складність; поліноміальну складність?
24. В якій задачі виникають числа Каталана?
25. Запишіть загальну формулу для чисел Каталана.

Завдання для самоперевірки

Варіант 1

1. Розв'язати рекурентне співвідношення: $a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $n \geq 2$ з початковими умовами $a_0 = 7$, $a_1 = 4$.

2. Розв'язати рекурентне співвідношення: $a_n - 2\,a_{n-1} - a_{n-2} + 2\,a_{n-3} = 0$, $n \geq 3$ з початковими умовами $a_0 = 6$, $a_1 = 3$, $a_2 = 9$.

3. Розв'язати рекурентне співвідношення методом твірної функції:

$a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2}$, $n \geq 2$ з початковими умовами $a_0 = -7$, $a_1 = -15$.

4. Розглянемо послідовності довжини n, кожний елемент яких дорівнює або 0, або 1, або 2. Позначимо через a_n кількість таких послідовностей довжини n, у яких немає сусідніх 1 та сусідніх 2. Напишіть рекурентне співвідношення для a_n.

Варіант 2

1. Розв'язати рекурентне співвідношення: $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, $n \geq 2$ з початковими умовами $a_0 = -2, a_1 = 6$.

2. Розв'язати рекурентне співвідношення: $a_n - 3\,a_{n-1} - a_{n-2} + 3\,a_{n-3} = 0$, $n \geq 3$ з початковими умовами $a_0 = 4$, $a_1 = 0$, $a_2 = 4$.

3. Розв'язати рекурентне співвідношення: $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $n \geq 2$ з початковими умовами $a_0 = 9$, $a_1 = 0$.

4. Розглянемо бінарні послідовності довжини n, кожний елемент дорівнює або 0, або 1. Позначимо через a_n кількість таких послідовностей довжини n, у яких немає сусідніх 1. Напишіть рекурентне співвідношення для a_n.

Відповіді на завдання для самоперевірки

Варіант 1

Відповідь 1: $a_n = 2(-3)^n + 5(2)^n$

Відповідь 2: $a_n = 3 + 2^n + 2(-1^n)$

Відповідь 3: $a_n = (4n - 7)\ 5^n$

Відповідь 4: $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$

Вказівки до розв'язання задачі 4:

Позначимо через a_n те, що ми шукаємо, тобто кількість послідовностей довжини n, у яких немає сусідніх 1 та сусідніх 2. Через c_n позначимо кількість послідовностей, в яких немає сусідніх 1 та сусідніх 2 і які, крім того, починаються з 1. Оскільки 1 и 2 можна поміняти місцями в умовах задачі, кількість послідовностей, в яких немає сусідніх 1 та сусідніх 2 і які, крім того, починаються з 2, також дорівнює c_n. Тоді всі послідовності довжини n, у яких нема сусідніх 1 та сусідніх 2, можна розділити на три групи: 1) ті з них, що починаються з 0, 2) ті, що починаються з 1, 3) ті з них, що починаються з 2. У першій групі тоді будуть всі послідовності довжини n-1 (перша позиція зайнята 1), таких послідовностей буде a_{n-1}. Кількість послідовностей у другій групі c_n (за означенням c_n). Кількість послідовностей у третій групі така ж, як і в другій (2 і 1 входять симетрично в умови задачі).

Отже $a_n = a_{n-1} + 2c_n$.

Тепер розглянемо послідовності, які не мають сусідніх 1 та сусідніх 2, і починаються з 1. Кількість таких послідовностей c_n (за означенням c_n). Всі ці послідовності можна розділити на дві групи: 1) ті, у яких на другому місті стоїть 2, 2) ті, у яких на другому місті стоїть 0 (1 не може йти після 1). Отже, кількість послідовностей довжини n, у яких немає сусідніх 1 та сусідніх 2 і таких, що починаються з 1, дорівнює різниці кількості послідовностей довжини n-1, у яких немає сусідніх 1 та сусідніх 2, і кількості послідовностей довжини n-1, у яких немає сусідніх 1 та сусідніх 2 і таких, що починаються з 1.

Таким чином: $c_n = a_{n-1} - c_{n-1}$.

Виразимо c_n і c_{n-1} з першого рівняння і підставимо у друге рівняння:

$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$.

Варіант 2

Відповідь 1: $a_n = (-2 + 4n)\ 3^n$

Відповідь 2: $a_n = 2 + 2(-1^n)$

Відповідь 3: $a_n = 6(-1)^n + 3(2)^n$

Відповідь 4: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$

Покажчик

Список використаних джерел

1. Абрамов С. А. Вычислительная сложность алгоритмов: конспект лекций. Москва: МГУ, 2005. 68 с.
2. Андерсон Дж. А. Дискретная математика и комбинаторика. Перевод с англ. Москва: Вильямс, 2004. 960 с.
3. Білоус Н. В., Дудар З. В., Лісна Н. С., Шубін І. Ю. Основи комбінаторного аналізу. Харків : ХТУРЕ, 2000. 110 с.
4. Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. Комп'ютерна дискретна математика: підручник. Харків: Компанія СМІТ, 2004. 480 с.
5. Грин Д., Кнут Д. Математические методы анализа алгоритмов. Москва: Мир, 1987. 120 с.
6. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: підручник: у двох частинах. Київ: Либідь, 1994.
7. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А. Основи дискретної математики. Київ: Наукова думка, 2002. 578 с.
8. Кормен Т., Лейзерсон Ч. Э., Ривест Р. Н., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. Москва: Вильямс, 2015. 1328 с.
9. Кнут Д. Э. Искусство программирования. Том 1. Основные алгоритмы: 3-е изд. Москва: Вильямс, 2006. 720 с.
10. Кнут Д. Э. Искусство программирования. Том 3. Сортировка и поиск. Москва: Вильямс, 2000. 832 с.
11. Сеславин А. И., Сеславина Е. А. Математическая экономика (рекуррентные уравнения): учебн. пособ. Москва : МИИТ, 2008. 175 с.
12. Слоун Н. Дж. А. Справочник числовых последовательностей: веб-сайт. URL: https://bit.ly/3jBR5Uw (дата звернення: 27.03.2022)
13. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. Москва: Наука, 1979. 384 с.
14. Anderson I. A first course in discrete mathematics. Berlin: Springer, 2001. 200 p.

15. Barnett S. Discrete mathematics: numbers and beyond. Harlow, England: Addison, 1998. 441 p.
16. Dossey J. A., Otto A. D., Spence L. E., Vanden Eynden C. Discrete mathematics. NY : Addison Wesley, 2001. 600 p.
17. Grimaldi R. P. Discrete and combinatorial mathematics. NY: Addison Wesley, 2003. 1005 p.