

РОЗВИТОК ЛОГІЧНОЇ КУЛЬТУРИ УЧНІВ ПРИ ФОРМУВАННІ МАТЕМАТИЧНИХ ПОНЯТЬ

Стаття присвячено розвитку логічної культури в учнів при формуванні математичних понять. Зроблено спробу узагальнити, систематизувати й теоретично осмислити комплекс підходів, пов'язаних з формуванням математичних понять та акцентовано увагу на рекомендаціях щодо їх уведення.

Ключові слова: логічна культура учнів, математичне поняття, формування математичного поняття.

Актуальність дослідження визначає потреба вдосконалення математичної освіти. Мислення формується в процесі вивчення кожного предмета. Далеко не останню роль у його розвитку відіграє навчання математики, яке успішніше проходить в учителя, який проводить його усвідомлено та цілеспрямовано. Кожна наука і кожний навчальний предмет оперує певним колом властивих їм понять, формування яких є одним з основних завдань навчання певного предмета.

Проблема формування логічних міркувань, прийомів розумової діяльності при введенні понять полягає в тому, щоб необхідні їх елементи стали невід'ємною складовою навчання математики, важливим джерелом логічного розвитку учнів.

Уміння міркувати, аналізувати, аргументувати, логічно висловлювати свої думки при введенні понять є однією з основних цілей у процесі навчання математики. Крім того, важливим моментом у вихованні культури мислення учнів є розвиток їхньої мови. Мовна письменність, культура мови – необхідні умови успішного засвоєння основ наук.

Удосконалення викладання математики присвячено значну кількість публікацій вітчизняних і закордонних учених: В.Г. Бевз, Г.П.Бевз, В.П. Беспалько, П.Я. Гальперін, Я.І. Груденов, В.А. Далінгер, І.Л. Нікольська, В.М. Лернер, З.І. Слєпкань та ін. Учені досліджують психолого-педагогічні та методичні засади розвитку мислення учнів (А.В.Усова, Г.Л. Луканкін, Л.В. Виноградова, Л.М. Фрідман, Т.А. Кондрашенкова та ін.), формування понять при навчанні математики (С.А. Владимирцева, М.Б. Гельфанд, С.І. Іванов, І.М. Сарро, Л.С. Шварцбург, Г.Д. Дроздєв, І.Я. Віленкін, Н.Б. Мурадова, І.А. Марьянський, Е.А. Ясиновий та ін.), розвиток логічного мислення при вивченні різних розділів математики (А.І. Александрова, Б.В. Бирюков, Н.Я. Варнауска, В.І. Крупич та ін.).

Метою статті є дослідження розвитку логічної культури в учнів при формуванні математичних понять.

Формування наукових понять є одним з основних завдань навчання математики. Під математичним поняттям будемо розуміти систему логічно взаємопов'язаних упорядкованих суджень, висловлених про певний математичний об'єкт, які називають властивостями й ознаками поняття і складають його зміст. Математичні поняття відображають у нашому мисленні просторові форми та кількісні відношення дійсності, абстрагуючись від реальних ситуацій. Формування конкретного поняття тісно пов'язане із засвоєнням суб'єктами навчання відповідного математичного об'єкта та загального уявлення про нього. Засвоєння поняття – означає засвоєння систему знань про певний об'єкт і навчитися використовувати їх у практичній діяльності.

Найчастіше учні називають ті ознаки та властивості математичних понять, які були детально розглянуті в підручнику, тобто були об'єктом спеціального вивчення. Інші міркування про поняття, з якими учні ознайомлюються в процесі розв'язання задач, як правило, не включаються в його зміст і засвоюються як окремі факти.

На наш погляд, це пов'язано з тим, що в навчальному процесі формування понять не є цілеспрямованим процесом. Аналіз конспектів уроків з математики показує, що "формування поняття" вчителі не включали в мету уроку, а уроки узагальнення і систематизації знань, на яких повинні узагальнюватися і логічно впорядковуватися знання про сформульовані поняття, найчастіше перетворюються на уроки повторення. Це призводить до фрагментарності знань, невміння застосувати їх на практиці.

У методичній зазвичай під введенням математичного поняття мається на увазі етап ознайомлення учнів із новим математичним об'єктом, що закінчується його означенням. У літературі розглядається два підходи щодо введення математичних понять: конкретно-індуктивний (перехід від часткового до загального, від прикладів до визначення) і абстрактно-дедуктивний (перехід від загального до конкретного, від визначення до прикладів) [2-3, 4, 5, 7, 10, 15].

Основна перевага першого підходу полягає в тому, що при введенні нового поняття учитель опирається на знання і життєвий досвід учнів. Цей підхід сприяє розвитку індуктивного мислення суб'єктів навчання.

У методичній практиці склалося неправильне уявлення про те, що означення можна "відкрити". З цього приводу Г. Фройденталь писав: "Як можна визначити щось, якщо ми не знаємо, що визначають?" [14]. О.С. Міщенко зазначив, що зовні діяльність "з відкриття означення" на уроці виглядає цілком сучасно, спонукає учнів до аналізу ситуації, як кажуть "актуалізує" їх розумову діяльність. Насправді ж, указаний спосіб уведення понять втомлює дітей і створює неправильне уявлення про науку математику в цілому. Усі зусилля при цьому мають бути спрямовані на закріплення використання понять, відповідних термінів, позначень, з метою їх використання в математичних міркуваннях. Основна роль означень у математиці – бути початковою ланкою в дедукутивному впорядкуванні міркувань про певне поняття [8].

Абстрактно-дедуктивний підхід зазвичай використовують, коли означення нового об'єкта не складне за структурою, а сам об'єкт відомий учням. Цей підхід економічніший за часом, але після введення нового означення зі складною структурою потрібна окрема робота для його засвоєння. Частину означень з курсу геометрії і математичного аналізу учні засвоюють лише після цілеспрямованої роботи, заснованої на вивченні їх структури. Наприклад, розпізнавання прямої, перпендикулярної до площини, не є складним. В учнів є уявлення про предмети, розташовані вертикально відносно поверхні землі. Труднощі при вивченні даної теми пов'язані, передусім, із зображенням просторових об'єктів на площині та складністю структури самого означення, формування якого містить слово "будь-який": пряму називають перпендикулярною до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у площині.

Означення понять у широкому сенсі є логічною операцією, в процесі якої розкривається зміст поняття, тобто вказуються відмінні істотні ознаки предметів, відображених у даному понятті. Визначити поняття – означає коротко висловити загальні, основні й істотні властивості означуваного предмету, не вичерпуючи всіх його властивостей, сторін, зв'язків. Уміння точно означити поняття, а отже, знання правил означення понять, має величезне значення у всіх галузях науки і практики.

Однією з головних причин складності навчання математики є низький рівень мислення учнів, слабкий розвиток логічного апарату. Проблема навчання математики не може бути успішно розв'язана без прищеплення учням логічної грамотності.

Під логічною грамотністю зазвичай розуміється володіння певним комплексом елементарних логічних понять і дій, складових основи логічного мислення. Формуванням логічного апарату учнів необхідно спеціально займатися. Сумнівні і суперечки фахівців можуть виникнути у зв'язку з вирішенням питання про вік, найбільш придатний для розвитку елементів логічного мислення.

При дедукутивній побудові курсу геометрії в ЗОНЗ поняття, що вивчаються, розташовують так, щоб кожне наступне можна було означити, посилюючись на раніше вивчені їх властивості.

При вивченні перших математичних означень доцільно виявляти їх структуру через рід і видову відмінність. За аналогічним принципом будуються означення понять і в інших галузях знання. Для прикладу наведемо такі означення: ромбом називають паралелограм, в якого всі сторони рівні; обмін інформації – процес, у ході якого джерело інформації її передає, а одержувач приймає; дієслово – частина мови, яка означає поняття дії або стану як процесу і має такі основні граматичні категорії: часу, виду, способу, стану, особи і числа.

У кожному з цих означень нове поняття визначається через рід (паралелограм, процес, частина мови) і видову відмінність. Спеціальне навчання складання означень шляхом вказівки на рід і видову відмінність, привчає дітей не лише правильно формулювати означення, але і бачити місце даного поняття в системі інших понять, тобто підводить їх до розуміння методу наукового знання, названого класифікацією.

В курсі геометрії розглядають класифікацію трикутників за величиною їх кутів і за сторонами, чотирикутників, багатокутників. Важливо не лише вести поняття класифікації, але й організувати процес його засвоєння так, щоб цю загальнологічну дію учні виконували усвідомлено і могли переносити на інші навчальні предмети.

Великої шкоди навчанню завдає відсутність звички виникати у зміст означень, що вводяться, закріплювати їх на прикладах раніше набутих знань і на самостійно розв'язаних задачах. Дуже часто учні зводять вивчення нових понять до запам'ятовування означень, замість того, щоб засвоювати вкладений у них зміст. У результаті спостерігається формалізм знань. Одним з найважливіших завдань геометрії, як будь-якого іншого розділу математики, є уточнення застосованих у ній термінів, строгі означення понять, що вводяться.

При введенні різних означень нових понять у вчителя з'являється можливість активізувати роботу учнів, дати можливість проявити ініціативу, висловити свої підходи до означення поняття. При цьому поряд зі стандартними можна почути і некоректні, неправильні підходи до означення, але вчителю потрібно набратися терпіння і спокійно пояснити, у чому полягає помилка запропонованого варіанту, які логічно можливі помилки при цьому допускаються, відзначити переваги і вказати на недоліки кожного запропонованого означення. Такий аналіз буде корисним і для всього класу, оскільки братиме участь у пошуку правильного формулювання означення. Самостійність міркувань учнів варто заохочувати.

Дуже часто учні, даючи означення, неправильно використовують математичні терміни, плутають відрізок, промінь і пряму. Наприклад, "висотою трикутника називається промінь, що проходить через його вершину перпендикулярно до протилежної сторони".

Часто учні плутають слова "існує" і "для будь-якого". Такі помилки є наслідком низької логічної культури учнів. Необхідно помилкові означення логічно проаналізувати, з'ясувати суть помилки, використовувати ці означення для навчання учнів безпомилково визначати різні поняття.

Якщо учень дає означення ширшого поняття, ніж потрібно, то варто запропонувати йому розв'язати приклад, який задовольняє запропоноване ним означення, але не задовольняє справжньому. Наприклад, якщо він скаже, що "ромбом називається чотирикутник, діагоналі якого взаємноперпендикулярні", йому можна запропонувати перевірити, чи існує чотирикутник із перпендикулярними діагоналями і не рівними сторонами. Якщо ж учень дає неправильні означення поняття, йому варто запропонувати приклад, що не задовольняє запропонованому ним означенню, але задовольняє істинному.

Учням можна запропонувати для аналізу означення, що містять зайві слова. Наприклад "середньою лінією трикутника називається відрізок, що сполучає середини двох сторін і паралельний до третьої сторони" або "прямокутник – це паралелограм, у якого всі кути прямі і діагоналі рівні". Учням пропонуються знайти і вилучити зайві слова в означеннях.

З метою розвитку логічної культури учнів доцільно не давати відразу завершене означення нового поняття. Корисно заздалегідь розглянути конкретні приклади реалізації даного поняття, потім разом з учнями відшукати правильне формулювання означення, його подальше уточнення, відкидання зайвих слів.

Іноді помилки у означеннях пов'язані з невдалим методикою викладу відповідного питання. Наприклад, учні кажуть, що "іраціональним числом називається число, з якого не добувається корінь". Тут, зрозуміло, є очевидна помилка – сплутані корінь і підкоренеє число. Крім того, зрозуміло, що з будь-якого числа можна добути, наприклад, корінь третього степеня. Проте, аналізуючи це означення, можна виявити помилку, яка полягає в тому, що учні пов'язують поняття іраціонального числа лише із добуванням коренів. Точнішим було б означення "Іраціональним числом називається дійсне число, що не є раціональним". У цьому випадку центр ваги переноситься вже з поняття іраціональності на загальне поняття дійсного числа.

Одним з важливих моментів при роботі з означеннями є навчання навичкам наводити конкретні приклади під означення. Наприклад, при введенні означення рівнобедреної трапеції, нарисувати на дошці трапецію і запитати, які рівності повинні виконуватися, щоб ця трапеція була рівнобедреною? і за допомогою яких вимірювань можна перевірити ці рівності?, як перевірити те, що трапеція є рівнобедреною за допомогою циркуля? Аналогічно, після повідомлення учням означення арифметичної прогресії треба вписати скінченну послідовність чисел і запитати, як перевірити, чи є вона арифметичною

прогресію? Важливим моментом є також виявлення спільних властивостей у кількох об'єктів і формування цих властивостей. Наприклад, при введенні поняття прямокутника корисно нарисувати на дошці кілька прямокутників і запитати, які спільні властивості зображених фігур? Учні дадуть відповідь, що це чотирикутники, в яких всі кути прямі. Отже, вони придуть до одного з означень поняття прямокутника. Тоді можна запитати, чи є ці прямокутники паралелограмами? Потім можна запитати, чи не можна дати означення поняття прямокутника користуючись паралелограмом? Після короткого обговорення з'ясується, що досить зажадати взаємної перпендикулярності однієї пари суміжних сторін, і можна сформулювати нове означення: "Прямокутником називається паралелограм, у якого є пара взаємно перпендикулярних сторін". Виявлена початкова властивість (всі кути прямі) стає тепер теоремою.

Питання вибору означень поняття в курсі математики ЗОНЗ є одним зі складних і спірних моментів у процесі навчання [3, 7]. Часто предметом дискусії стають різні аспекти даної проблеми: логічний та інтуїтивний рівень, абстрактність і практична спрямованість тощо. Багато авторів висловлюють переконливі аргументи на користь своїх поглядів, не зважаючи на те, що часто ними стають протилежні положення. Найбільш спірні моменти щодо означення понять математики в ЗОНЗ виникають у зв'язку з пошуком діалектично доцільного співвідношення логіки й інтуїції у виборі означень. Для встановлення такого співвідношення потрібно виокремити логічний і інтуїтивний компоненти в математичному мисленні учнів і визначити значення цих компонентів у пізнавальній діяльності.

В процесі навчання логічних умовиводів, виправляючи логічні помилки учнів, учитель контролює рівень їх логічної підготовленості. Міра розвитку їх інтуїції учителю менш відома, оскільки інтуїція не є об'єктом настільки пильної уваги і контролю, яким є логіка. Між іншим для формування математичної культури і взагалі в математичному мисленні інтуїтивний компонент не менш важливий, ніж логічний.

З метою оптимізації процесу формування поняття потрібно шукати дидактично доцільне співвідношення в ньому інтуїції та логіки. Розглянемо приклад взаємозв'язку інтуїції і логіки (див. рис. 1).

Площини α і β паралельні, а трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні. Учням було задано запитання: "Об'єм якої піраміди більший?"

На основі інтуїтивних міркувань більшість з опитуваних учнів указували на праву піраміду, але після логічних міркувань встановили, що вони мають рівні об'єми. Отже, виникла діалектична суперечність між інтуїцією і логікою, розв'язання якої відбувалося за рахунок певної перебудови інтуїції, її корекції. Систематична робота в цьому плані є засобом розвитку інтуїції, залучення учнів до евристичних методів міркувань і одночасно засобом мотивування логічних вимог щодо міркувань.

Як показала практика, означення рівності трикутників, дане в посібнику О.В. Погорелова [11], створює певне непорозуміння в інтуїтивному розумінні рівності фігур, і передусім у тих учнів, які схильні до свідомого сприйняття математики.

Одну з основних функцій логіки ми вбачаємо в тому, щоб вона, діалектично взаємодіючи з інтуїцією й евристичними міркуваннями, сприяла розвитку "сильної" математичної інтуїції в учнів, на основі якої можна було б продуктивно виводити в процесі вивчення математики.

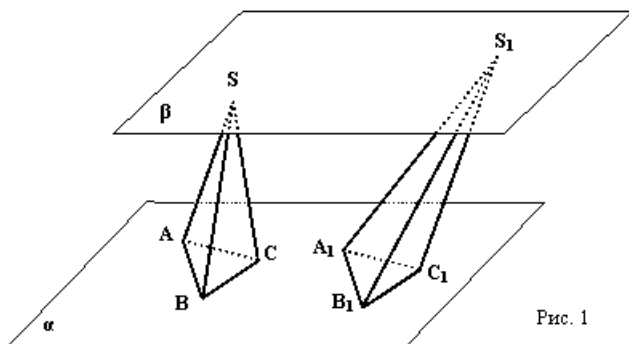


Рис. 1

Висновки. Підсумовуючи вище викладене, зазначимо, що будь-які математичні поняття, що вводяться в курсі математики ЗОНЗ, повинні бути переконливими та необхідними.

При формуванні математичних понять бажано дотримуватись таких рекомендацій:

1. Введенню будь-якого поняття повинен передувати розгляд конкретних прикладів, математичною моделлю яких є це поняття. Такий підхід покаже учням, що математичні поняття не є плодом "власне мислення", а виникають у ході пізнання об'єктів і явищ матеріального світу.
2. При введенні нового поняття опиратися на вже відомі учням поняття.
3. Включати нові поняття в систему відомих понять (або розширюючи її, або конкретизуючи у вже відомій системі).
4. Мотивувати не лише введення самих понять, але і доцільність відповідних означень.
5. Мотивуючи вивчення нового поняття, обґрунтовуючи або ілюструючи властивості математичного об'єкту дотримуватись строгості і систематичності викладу, не допускати математично некоректних тлумачень, чітко відрізняти мотивування від доведення.
6. При введенні математичних понять наголошувати учням на те, що існують різні їх означення, з яких має бути вибрано одне, яке і зобов'язані запам'ятати учні. Цей вибір повинен опиратися передусім на методичні міркування, загальний задум викладу даного предмету, простоту і природність підходу.
7. Не обов'язково відразу давати учням означення певного поняття в завершених формі. При цьому є корисною діяльність учнів з відшукування правильного його формулювання, подальшого уточнення, відкидання зайвих слів, скорочення за рахунок використання вже відомих математичних понять.
8. При повторенні певного означення на наступних уроках доцільно показувати учням на прикладах у чому полягає помилковість їх формулювань. Необхідно уважно стежити за мовою учнів, вказуючи на кожну помилку, вимагаючи чіткості формулювань означень.
9. Потрібно проводити систематичну роботу щодо вироблення навичок підготовки до означення і формулювання означень.
10. Сприяти засвоєнню термінології, символіки, розумінню кожного слова в означенні, опануванню обсягу поняття.
11. Розкривати взаємозв'язок поняття з іншими, навчати їх застосовувати. Формувати усвідомлене розуміння ролі конкретного поняття в усій системі математичних знань.

ЛІТЕРАТУРА

1. Антипов И.Н. Символы, обозначения, понятия школьного курса математики / И.Н. Антипов, Л.С. Шварцбург. – М. : Просвещение, 1978. – 64 с.
2. Виленкин И.Я. Определения в школьном курсе математики и методика работы над ними / И.Я. Виленкин // Математика в школе. – № 4. – 1984. – С. 43-47.
3. Владимирцева С.А. О разных подходах к введению математических понятий / С.А. Владимирцева // Математика в школе. – № 7. – 2005. – С. 46-52.
4. Гельфанд М.Б. Формування математичних понять у процесі викладання алгебри і початків аналізу : книга для вчителя / Михайло Борисович Гельфанд. – Київ : Рад. школа, 1976. – 142 с.
5. Груденов Я.И. Изучение определений, аксиом, теорем : Пособие для учителей / Я.И. Груденов. – М. : Просвещение, 1981. – 95 с.
6. Луканкин Г.Л. Основные понятия современного школьного курса математики : пособие для учителя / Г.Л. Луканкин. – М. : Просвещение, 1974. – 382 с.
7. Марьянский И.А. Ещё раз об определении функции / Изяслав Адольфович Марьянский // Математика в школе. – № 4. – 1991. – С. 71-72.
8. Мищенко А.С. О некоторых проблемах школьного математического образования / А.С. Мищенко // Методологические проблемы преподавания математики. – М. : 1987. – С.82-104.
9. Мотова З.П. Методика формирования геометрических понятий с помощью системы обучающих задач : дис. ... канд. пед. наук / Зинаида Петровна Мотова. – Ростов н/Д, 1976. – 173 л.
10. Мурадова Н.Б. О воспитании логической грамотности при введении основных понятий геометрии / Н.Б. Мурадова // Материалы научно-практической конференции, посвященной 60-летию математического факультета ДГПУ. – Махачкала, 2005. – 142 с.
11. Погорелов О.В. Геометрия : Планиметрия : Підруч. для 7-9 кл. серед. шк. / О.В. Погорелов. – К. : Освіта, 1998. – 223 с.
12. Слєпкань З.І. Методика навчання математики / З.І. Слєпкань. – К. : Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
13. Шихалиев Х.Ш. Больше внимания формированию математической культуры учащихся / Х.Ш. Шихалиев // Математика в школе. – № 2. – 1994. – С. 128.
14. Фройденталь Г. Математика как наука – педагогическая задача / Ганс Фройденталь. – М. : Просвещение, 1982. – 140 с.
15. Ясиновий Э.А. Об определениях, даваемых учениками / Э.А. Ясиновий // Математика в школе. – № 3. – 1982. – С. 51.