Д. С. Калюжний-Вербовецький[1], В. М. Пивоварчик[2]

Елементи теорії ймовірності

(Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського, Одеса, Україна)

E-mail address: [1] dmitry2k@yahoo.com, [2] vpivovarchik@gmail.com

Зміст

1 Комбінаторика

1.1 Вступ

У самих різних галузях людської діяльності доводиться мати справу з задачами, у яких потрібно підраховувати кількість якихось об'єктів – елементів деяких скінченних множин або число всіляких способів, якими можливо здійснити вибір того чи іншого результату. Наприклад, скількома способами можливо у грі в спортлото обрати 5 номерів з 36? Скільки дігоналей має опуклий n-кутник? Скільки існує варіантів розподілу завмовлення на виробництво трьох видів виробів по трьом різним заводам? Задачі такого типу називають *комбінаторними*, а розділ математики, що вивчає методи їх розв'язання – *комбінаторикою*. У теорії ймовірності – науці о випадкових явищах – часто доводиться користуватись комбінаторикою.

1.2 Правила додавання та множення

Розглянемо наступну просту задачу. В аудиторії перебувають 20 студентів з однієї академгрупи, 25 студентів – з другої академгрупи і 30 студентів – з третьої. Скількома способами викладач може викликати відповідати одного студента (з якої-небудь групи)? Відповідь очевидна: $20 + 25 + 30 = 75$ способами. Наведений приклад узагальнюється наступним правилом.

Правило додавання. Нехай є ℓ непересічних груп яких-небудь об'єктів, і нехай об'єкт першої групи можна обрати m_1 способами, об'єкт другої групи – m_2 способами, і так далі, нарешті, об'єкт ℓ-ої групи можна обрати m_ℓ способами. Тоді вибір одного об'єкта з якої-небудь групи можна здійснити

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_\ell \tag{1.1}$$

способами.

Поставимо тепер наступне питання. В умовах попередньої задачі, скількома способами викладач може викликати для відповіді по одному студенту з кожної групи? Розв'яжемо цю задачу за наступною схемою. Викладач може викликати одного студента з першої групи 20-ма способами. При кожному виборі він може викликати одного студента з другої групи 25-ма способами. Отже, кількість способів, якими можна обрати по одному студенту з цих двох груп, буде рівною $20 \cdot 25 = 500$. При цьому, кожному з цих способів відповідають 30 варіантів вибора одного студента з третьої групи. Таким чином, обрати по одному студенту з кожної з цих трьох академгруп можна $20 \cdot 25 \cdot 30 = 15000$ способами. Описану схему можна узагальнити наступним правилом.

Правило множення. Нехай є ℓ непересічних груп яких-небудь об'єктів, і нехай об'єкт першої групи можна обрати m_1 способами, при кожному такому виборі об'єкт другої групи можна обрати m_2 способами, і так далі, нарешті, при кожному виборі усіх попередніх об'єктів об'єкт ℓ-ої групи можна обрати m_ℓ способами. Тоді обрати по одному об'єкту з кожної групи можна

$$m = m_1 m_2 \cdots m_\ell \tag{1.2}$$

способами.

Задачі. 1. Скільки існує п'ятизначних чисел, які діляться на 5?

2. На вершину гори ведуть 7 доріг. Скількома способами турист може піднятися на гору і спуститися з неї? Дайте відповідь на таке ж саме запитання, якщо підйом і спуск здійснюються різними шляхами?

3. У конкурсі беруть участь 7 співаків, 10 співачок і 5 колективів виконавців. Скількома способами можна визначити гран-прі конкурса? Скількома способами можна визначити по одному переможцю у кожній номінації?

1.3 Знаходження числа елементів об'єднання скінченних множин

Нагадаємо, що $A \cup B$ позначає об'єднання множин A і B, а $A \cap B$ позначає перетин множин A і B (дивись рис. 1). У випадку кількох множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ для їх об'єднання використовується позначення $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, а для їх перетину – позначення $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. Символом $N(A)$ будемо позначати кількість елементів скінченної множини A.

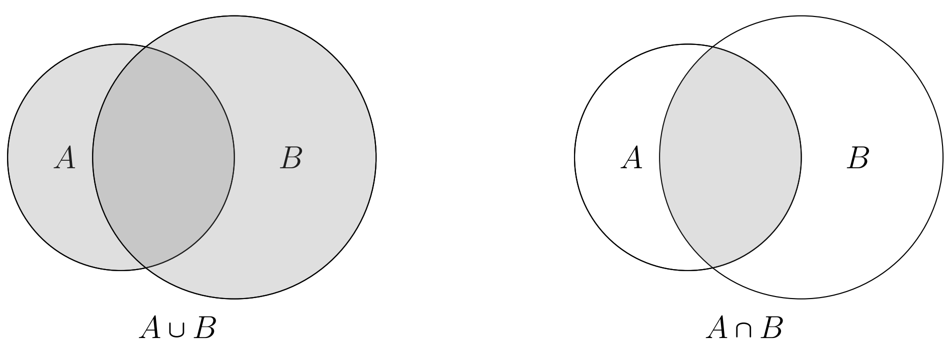

Рис. 1

Для кількості елементів об'єднання скінченних множин A і B є вірною наступна формула:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B). \tag{1.3}$$

Дійсно, $N(A)+N(B)$ є числом, яке отримається, якщо пререлічити всі елементи множини A, а потім – всі елементи множини B. Але у цьому випадку спільні елементи (їх кількість дорівнює $N(A \cap B)$) будуть включатися двічі, тому для того, щоб отримати $N(A \cup B)$, треба з $N(A) + N(B)$ виключити $N(A \cap B)$, що і дає шукану формулу.

Є вірною і більш загальна формула – для кількості елементів n множин:

$$N\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} N(A_k) - \sum_{1\le k<j\le n} N(A_k \cap A_j)$$
$$+ \sum_{1\le k<j<i\le n} N(A_k \cap A_j \cap A_i) - \cdots + (-1)^{n-1} N\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big). \quad (1.4)$$

Тут символ "$\sum$" позначає суму чисел, наприклад,

$$\sum_{k=1}^{n} N(A_k) = N(A_1) + N(A_2) + \cdots + N(A_n),$$

а також,

$$\sum_{1\le k<j\le n} N(A_k \cap A_j) = N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + \cdots + N(A_1 \cap A_n)$$
$$+ N(A_2 \cap A_3) + N(A_2 \cap A_4) + \cdots + N(A_2 \cap A_n) + \cdots + N(A_{n-1} \cap A_n).$$

Формулу (1.3) ми отримали, спочатку включаючи у $A \cup B$ деякі елементи, а потім виключаючи ті з них, які враховувалися двічі. Подібним чином доводиться й формула (1.4). Тому (1.4) (а в окремому випадку, (1.3)) називається *формулою включень і виключень.*

Задача 4. З 100 студентів англійською мовою володіють 28 студентів, німецькою – 30, французькою – 42, англійською і німецькою – 8, англійською і французькою – 10, німецькою і французькою – 5, всіма трьома мовами володіють 3 студенти. Скільки студентів не володіють жодною з трьох мов?

1.4 Розміщення, перестановки, сполучення

Назвемо скінченну множину A *впорядкованою*, якщо кожному його елементу поставлено у відповідність деяке число (номер елемента) від 1 до n, де n – кількість елементів множини A, причому різні елементи множини A мають різні номери. Будь-яку скінченну множину можна перетворити у впорядковану, занумеровуючи всі його елементи. Впорядковані підмножини n-елементної множини, які містять k елементів, називаються *розміщеннями із n по k*. Наприклад, всілякі способи розподілу трьох призових місць у шахматному турнірі, в якому беруть участь 10 гравців, є розміщеннями із 10 по 3. Кількість всіляких розміщень із n по k позначається A_n^k.

Підрахуємо у наведеному прикладі кількість всіляких розподілів призових місць у турнірі. Перше місце може зайняти будь-який із 10-ти шахматистів. Для кожного з цих 10-ти випадків друге місце може бути зайняте будь-яким із 9-ти залишившихся гравців. Для кожного способу розподілу двох перших місць у турнірі третє місце може бути зайняте будь-яким із залишившихся 8-и гравців. Згідно з правилом множення (дивись п. 1.2, формулу (1.2)), шукана кількість дорівнює $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ способів. Аналогічним міркуванням доводиться і загальна формула:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1). \quad (1.5)$$

Нагадаємо, що для будь-якого натурального числа n добуток всіх натуральних чисел від 1 до n включно позначається $n!$ (читається "ен-факторіал"), причому ми домовляємось, що $1! = 1$, а $0! = 1$ за означенням. Якщо вираз у правій частині формули (1.5) помножити та поділити на $(n-k)! = (n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1$, то отримаємо

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1.5$'$}$$

У випадку, коли $k = n$, усі підмножини n-елементної множини A співпадають з самою множиною A, але відрізняються (тільки) порядком елементів. Розміщення із n по n називають *перестановками n-елементної множини*, а кількість таких перестановок позначається P_n. Звісно, $P_n = A_n^n$. Підставляючи $k = n$ у (1.5), отримаємо

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1, \tag{1.6}$$

а підставляючи $k = n$ у (1.5$'$) і враховуючи, що $0! = 1$, отримаємо

$$P_n = n!, \tag{1.6$'$}$$

що співпадає з (1.6) згідно з означенням $n!$.

Приклад 1. Якою кількістю способів можна розсадити 8 студентів в ряд з 8 місць?

Відповідь. $P_8 = 8! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40320$.

Підмножини n-елементної множини, які містять k елементів, байдуже у якому порядку, називають *сполученнями із n по k*. Наприклад, для множини $A = \{a, b, c\}$ всілякі сполучення із 3-х по два – це підмножини $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$. Зауважимо, що $\{a, b\} = \{b, a\}$, бо для сполучень порядок елементів не має значення. Кількість всіляких сполучень із n по k позначається C_n^k. У наведеному вище прикладі $C_3^2 = 3$. Доведемо зараз наступну формулу:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}, \tag{1.7}$$

або після множення на $(n-k)! = (n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1$, формулу

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.7$'$}$$

для довільних натуральних чисел n і k таких, що $k \le n$.

Доведення. Розглянемо всілякі розміщення із n по k. Нагадаємо, що це впорядковані набори k елементів деякої n-елементної множини A. Кожний такий набір можна отримати, вибираючи спочатку відповідну підмножину з k елементів множини A (комбінацію із n по k), а потім впорядковуючи її елементи (тобто вибираючи деяку перестановку k-елементної множини). Розглянемо дві непересічні групи об'єктів. До першої групи віднесемо всілякі сполучення із n по k, а до другої – всілякі перестановки k-елементної множини. Об'єкт першої групи можна обрати $m_1 = C_n^k$ способами, а потім об'єкт другої групи можна обрати $m_2 = P_k$ способами. Згідно з правилом множення (дивись п. 1.2, формулу (1.2)), обрати по одному елементу з кожної групи можна $m = m_1 m_2 = C_n^k \cdot P_k$ способами, а це якраз кількість розміщень A_n^k. Таким чином, $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$, а значить,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Підставляючи у цю рівність вираз для A_n^k з (1.5) або (1.5′) і враховуючи, що $P_k = k!$ (дивись (1.6)), отримаємо шукані формули (1.7) і (1.7′).

Зауваження. Є зручним розширити формулу (1.7′) і на випадок $k = 0$. Для цього за означенням покладають $C_n^0 = 1$ для усіх $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Приклад 2. Три стрільця виконують по одному пострілу, кожен по своїй цілі. Скільки може вийти різних результатів стрільби?

Розв'язання. Один з можливих результатів полягає в тому, що жодна ціль не уражена: $C_3^0 = 1$. Результати, у яких кількість попадань дорівнює k ($1 \le k \le 3$), можуть вийти C_3^k способами. Таким чином, різних результатів стрільби може вийти

$$C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 1 + \frac{3!}{1!2!} + \frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{3!0!} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8.$$

Приклад 3. Скількома способами із відділення, що містить 10 солдатів, можна трьох призначити в караул?

Відповідь. $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$ способів.

Для будь-яких чисел a і b, і для будь-якого натурального n має місце наступна формула, яку називають *формулою бінома Ньютона*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}. \tag{1.8}$$

Доведення. Розкриваючи усі дужки у добутку

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ разів}},$$

ми отримаємо суму 2^n доданків, кожний з яких має вигляд $a^k b^{n-k}$ для деякого k ($0 \le k \le n$). Справді, для кожного такого доданку ми обираємо у кожному множнику $(a+b)$ одну з двох можливих літер – a або b, і множимо всі обрані літери між собою, і якщо літеру a обрано у k множниках, відповідний добуток буде $a^k b^{n-k}$, а кількість таких доданків, згідно з формулою (1.2), дорівнює

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ разів}} = 2^n.$$

Для кожного фіксованого k, доданок $a^k b^{n-k}$ зустрічається у сумі стільки разів, скільки є всіляких виборів літери a у множниках $(a+b)$ точно k разів (а значить, літеру b при цьому обрано точно $n-k$ разів), що становить C_n^k. Отже, сума всіх 2^n доданків може бути переписаною, враховуючи кратність однакових доданків, як права частина у рівності (1.8), що й треба було довести.

Тому числа C_n^k називаються *біноміальними коефіцієнтами*.

Біноміальні коефіцієнти мають наступні властивості:

1) $C_n^{n-k} = C_n^k$,

2) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$,

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

(дивись Приклад 2, що ілюструє останню властивість).

Доведення. Рівність 1) випливає безпосередньо з формули (1.7′).

Щоб довести 2), запишемо за допомогою формули (1.7′):

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!(k+1)}{k!(k+1)(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k-1)!(n-k)} \\ &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1}. \end{aligned}$$

Рівність 3) є спеціальним випадком формули (1.8) для $a = b = 1$.

Властивість 2), разом з рівностями $C_n^0 = C_n^n = 1$, використовують для поступового ітеративного обчислення біноміальних коефіцієнтів, для будь яких n і k. Ми маємо для $n = 0$: $C_0^0 = 1$, для $n = 1$: $C_1^0 = C_1^1 = 1$, для $n = 2$: $C_2^0 = 1$, $C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2$, $C_2^2 = 1$, і т.д. Для цього є зручним розташувати біноміальні коефіцієнти у таку нескінченну трикутну таблицю (на практиці, обмежуються тільки скінченною таблицею, з потрібною кількістю рядків), яку називають *трикутником Паскаля*:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & C_0^0 & & & & & \\ & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\ & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\ & & \iddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & \\ & C_n^0 & & C_n^1 & \dots & \dots & \dots & C_n^{n-1} & & C_n^n & \\ \iddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{array} \qquad (1.9)$$

Кожний елемент у цьому трикутнику є сумою двох найближчих сусідів понад ним. Наприклад, якщо обмежитись тільки n: $0 \le n \le 5$, отримаємо

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
\tag{1.10}
$$

Задачі. 5. Скількома способами можуть розміститися 5 покупців у черзі в касу?

6. Скількома способами можна розсадити 5 студентів на 12 місцях?

7. На площині дано 10 точок так, що ніякі 3 з них не лежать на одній прямій. Скільки різних прямих можна провести через ці точки так, що кожна пряма проходить через дві точки?

8. Довести рівність $C_n^m + 2C_n^{m+1} + C_n^{m+2} = C_{n+2}^{m+2}$.

9. Переконатися, що спеціальними випадками формули бінома Ньютона для $n = 2$ і $n = 3$ є рівності $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ та $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Який вигляд мають спеціальні випадки цієї формули для $n = 4$ і $n = 5$? (Відповідні біноміальні коефіцієнти можна знайти у таблиці (1.10)).

2 Виникнення, предмет і задачі теорії ймовірності

Як уже говорилося, *теорія ймовірності* – це наука про випадкові явища (події). Наприклад, монета може впасти гербом, а може – цифрою, зерно може прорости, а може – не прорости, постріл може влучити, а може – не влучити у ціль. Проте, якщо розглядати одиничне випадкове явище, ніякої закономірності підмітити не можна. Закономірності можна встановити тільки при повторенні випробувань. Наприклад, якщо монету підкидати багато разів підряд, то чим більше разів кидаємо, тим ясніше становиться, що приблизно у половині випадків випадає герб, а у половині – цифра, тобто частота випадання герба наближається до 1/2. Це число 1/2 і є ймовірність випадання герба.

Теорія ймовірності як самостійна наука виникла у середині XVII століття. Тоді у Європі були поширені азартні ігри (французьке слово "hasard" означає "випадок"): гра в кості та ін. Задачі, з ними пов'язані, не можна було розв'язати відомими у той час математичними методами. Виникнення теорії ймовірності підштовкнули дві задачі, запропоновані кавалером де Мере – пристрасним гравцем і освіченим аристократом знаменитому французькому математику Б. Паскалю. Перша: Скільки разів треба метати кістки у надії отримати найбільше число очок, тобто дванадцять; друга: про розподіл виграша у незакінченній партії. Паскаль розв'язав обидві задачі, а пізніше написав про них іншому відомому французькому математику П. Ферма, який їх також розв'язав, але іншим способом. Між вченими зав'язалося жваве листування, у ході якого і виникли основи нової теорії. Новою дисципліною зацікавилися й інші вчені – сучасники Паскаля і Ферма, зокрема, голандець Х. Гюйгенс, написавший твір "Про розрахунки в азартних іграх", і швейцарець Я. Бернуллі (його ім'ям названо схему повторних випробувань). У подальший розвиток теорії ймовірності зробили внесок такі видатні вчені як П. Лаплас, К.-Ф. Гаус, С. Пуасон, П. Л. Чебишев, А. А. Марков, К. Пірсон, Н. Вінер і багато інших. Теорія ймовірності проникла у досить різні науки: фізику, біологію (генетику), економічні і соціальні науки, та ін. Особливо широкою зараз є область застосування ймовірносних методів у математичній економіці і фінансах, у зв'язку з задачами керування риночними процесами, задачами прогнозування. В окрему наукову дисципліну виділилася математична статистика – розділ теорії ймовірності, що вивчає закономірності масових випадкових явищ.

3 Алгебра випадкових подій

Подія називається *випадковою*, якщо в деякому випробуванні, тобто за даних умов, воно може або відбутися, або не відбутися. Далі під терміном "подія" будемо мати на увазі "випадкову подію".

Приклад 4. В урні лежать кольорові кулі. З урни беруть навмання одну кулю. Вилучення кулі з урни є випробуванням. Поява кулі певного кольору – подія.

Подія називається *вірогідною*, якщо за даних умов вона обов'язково відбувається (позначення: I). Подія називається *неможливою*, якщо за даних умов воно не може відбутися (позначення:). Подія називається *протилежною* події A, якщо вона відбувається тоді і тільки тоді, коли A не відбувається (позначення: $\bar{A}$).

Приклад 5. При підкиданні монети (зрозуміло, за умов земного тяжіння) вірогідним є падіння монети, а неможливим – зависання у повітрі. Якщо подія A полягає в тому, що монета впаде гербом, то $\bar{A}$ полягає в тому, що монета впаде цифрою.

Сумою подій A і B (позначається: $A + B$) називається подія, що полягає у настанні або A, або B, або обох. *Добутком* подій A і B (позначається: AB) називається подія, що полягає у настанні і A, і B разом. *Сумою* (відповідно *добутком*) *кількох подій* $A_1, A_2, \dots, A_n$ (позначаються відповідно: $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k$ і $\prod\limits_{k=1}^{n} A_k$) називається подія, що полягає в настанні хоча б однієї (відповідно, кожної) з цих подій.

Приклади. 6. Нехай подія A полягає в тому, що обране навмання число від 1 до 100 виявиться парним, а подія B – у тому, що воно виявиться простим. Тоді $A + B$ – подія, що полягає в тому, що обране навмання число від 1 до 100 виявиться або парним, або простим, або парним і простим одночасно; AB – подія, що полягає у виборі простого парного числа, а це може бути, як відомо, тільки число 2.

7. Нехай події A_1, A_2, A_3 полягають в тому, що перший (відоповідно другий, відповідно третій) з трьох стрільців вразив ціль (кожен виконує по одному пострілу). Тоді $\sum\limits_{k=1}^{3} A_k = A_1 + A_2 + A_3$ – подія, що полягає в тому, що хоча б один стрілець влучив у ціль, а $\prod\limits_{k=1}^{3} A_k = A_1 A_2 A_3$ – подія, що полягає в тому, що усі три стрільця влучили у ціль.

Властивості дій над подіями.

$$
\begin{array}{rcr}
A + B = B + A & AB = BA & (3.11) \\
(A + B) + C = A + (B + C) & (AB)C = A(BC) & (3.12) \\
A + O = A & AI = A & (3.13) \\
A + I = I & AO = O & (3.14) \\
A + A = A & AA = A & (3.15) \\
(A + B)C = AC + BC & AB + C = (A + C)(B + C) & (3.16) \\
A + \bar{A} = I & A\bar{A} = O & (3.17) \\
\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B} & \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B} & (3.18) \\
\bar{O} = I & \bar{I} = O & (3.19) \\
\bar{\bar{A}} = A & & (3.20)
\end{array}
$$

Зазначимо двоїстість (симетричність) властивостей у лівій та правій колонках. Властивість (3.20) є самодвоїстою, тобто двоїстою самій собі. Доведення усіх властивостей, крім властивості (3.16) у другій колонці, випливає з означень дій над подіями і надається читачеві. Доведемо властивість (3.16) у другій колонці.

$$(A + C)(B + C) = AB + CB + AC + CC$$

(ми використали властивість (3.16) у першій колонці). Згідно з (3.11), $AC = CA$, а в силу (3.15), $CC = C$. Так як, за (3.13), $C = CI$, то застосовуючи ще раз властивість (3.16) з першої колонки, отримаємо:

$$(A + C)(B + C) = AB + CB + CA + CI = AB + C(B + A + I) = AB + CI = AB + C$$

(ми використали (3.14) і (3.13)), і властивість (3.16) доведено.

Події називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу інших у тому ж випробуванні.

Приклад 8. Кинута гральна кістка. Випадання трійки несумісне з випаданням будь-якого іншого числа очок у тому ж випробуванні.

Для двох подій A і B властивість несумісності записується так:

$$AB = 0. \tag{3.21}$$

Кілька подій $A_1, \ldots, A_n$ складають *повну групу подій*, якщо в результаті випробування обов'язково з'являється хоча б одне з них:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = I. \tag{3.22}$$

Якщо події, що складають повну групу, попарно несумісні (тобто $A_j A_k = 0$ при $j \neq k$), то в результаті випробування відбувається одна і тільки одна з цих подій.

Приклад 9. Стрілець виробляє два постріли по цілі. Обов'язково відбудеться одна з наступних подій: два попадання, одне попадання і один промах, два промахи. Ці три несумісні події складають повну групу подій.

Події, які у данному випробуванні мають рівні можливості появи, будемо називати *рівноможливими*. Проте значення слів "рівні можливості появи" не можна пояснити за допомогою якихось інших понять. Подібно тому, як у геометрії поняття точки, прямої або відстані є фундаментальними неозначуваними поняттями, у теорії ймовірності поняття рівноможливих подій є також неозначуваним.

Приклад 10. При киданні гральної кістки випадання будь-якого числа від 1 до 6 є рівноможливим.

Кажуть, що подія A *сприяє* події B, або що A є частиною B, якщо при появі A обов'язково з'являється й B. Позначення: $A \subset B$.

Приклади. 11. Із чисел від 1 до 100 обрали навмання число. Нехай подія A полягає в тому, що обрали двійку, а подія B – в тому, що обрали парне число. Тоді $A \subset B$.

12. Нехай кожній множині A на площині відповідає подія, що полягає в тому, що в попаданні у цю множину навмання обраної точки площини (позначимо цю подію також через A). Тоді $A \subset B$ означає: A є підмножиною B (дивись рис. 2). Зауважимо, що порожній множині $\varnothing$ відповідає неможлива подія 0, і оскільки для будь-якої множини A на площині ми маємо $\varnothing \subset A$ (як множини), то $O \subset A$ (як події).

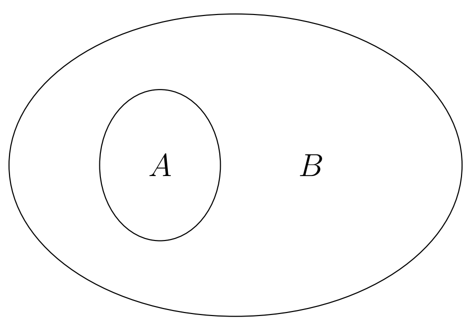

Рис. 2

Подія A називається *елементарною*, якщо вона не має частин, відмінних від неможливої події O і самої події A. Наприклад, випадання герба є елементарною подією при киданні монети. Сукупність подій називається *фундаментальною системою елементарних подій (ФСЕП)*, якщо ці події

1) елементарні;
2) рівноможливі;
3) несумісні;
4) складають повну групу подій.

Приклади. 13. "Герб" і "цифра" складають ФСЕП у випробуванні підкидання монети.

14. Випадання чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 при киданні гральної кістки складають ФСЕП.

Задачі. 10. Нехай A, B, C – деякі події. Знайти вирази, що полягають у тому, що

а) настала тільки подія A; б) настали A і B, але C не настало; в) настала хоча б одна з цих подій; г) не настала жодна з цих подій; д) настали всі три події; е) настало не більше двох з цих подій.

11. Показати, що $A \subset B$ тоді і тільки тоді, коли $\bar{B} \subset \bar{A}$.

12. В урні знаходиться велика кількість білих і чорних куль. Навмання витягують три кулі. Описати ФСЕП.

4 Класичне і геометричне означення ймовірності

Нехай події $A_1, \ldots, A_N$ складають ФСЕП, і нехай події B сприяють m_B з них. *Ймовірністю* події B називають число

$$P(B) = \frac{m_B}{N}. \tag{4.23}$$

Приклад 15. Подія B – випадання числа, більшого 4, при одноразовому киданні гральної кістки. Цій події сприяють наступні елементарні події: випадання числа 5 і випадання числа 6. Таким чином, шукана ймовірність події B: :

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Очевидно, ймовірність неможливої події дорівнює 0:

$$P(O) = 0,$$

а ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці:

$$P(I) = 1.$$

Наведене вище класичне означення ймовірності непридатне у випадку нескінченного числа подій. Тому вводять також геометричне означення ймовірності. Нехай відрізок l складає частину відрізка L, $d(l)$ і $d(L)$ – довжини цих відрізков. На відрізок L навмання кидається точка. Можна вважати, що попадання цієї точки у точки відрізка L складають ФСЕП, хоча й нескінченну (у цьому випадку означення повної групи подій залишається тим же, але формулу (3.22) вже написати не можна). Нехай подія B полягає в попаданні в інтервал l. Припустимо, що попадання в інтервали рівної довжини є рівноможливими подіями. Тоді *ймовірністю* події B будемо називати число

$$P(B) = \frac{d(l)}{d(L)}. \tag{4.24}$$

Зауважимо, що означення не зміниться, якщо відрізки L і l замінити незамкненими інтервалами тієї ж довжини. Якщо мова йде про попадання у точки площини, то мірою є площа. Нехай плоска фігура g з площею $S(g)$ складає частину плоскої фігури G з площею $S(G)$. На фігуру G навмання кидається точка. Вважається, що попадання в точки фігури G складають ФСЕП (нескінченну, як і у попередньому випадку), а також, що попадання в області рівної площі (незалежно від форми областей) – рівноможливі. Тоді *ймовірністю* події B, що полягає у попаданні точки на фігуру g, називається число

$$P(B) = \frac{S(g)}{S(G)}. \tag{4.25}$$

Проілюструємо геометричне означення ймовірності наступним прикладом.

Приклад 16. Розглянемо наступну задачу. На площині проведені паралельні лінії, відстань між якими почергово дорівнює 2 см і 8 см. Знайти ймовірность того, що навмання кинутий на цю площину круг радіусу 3 см не буде перетнутим жодною лінією.

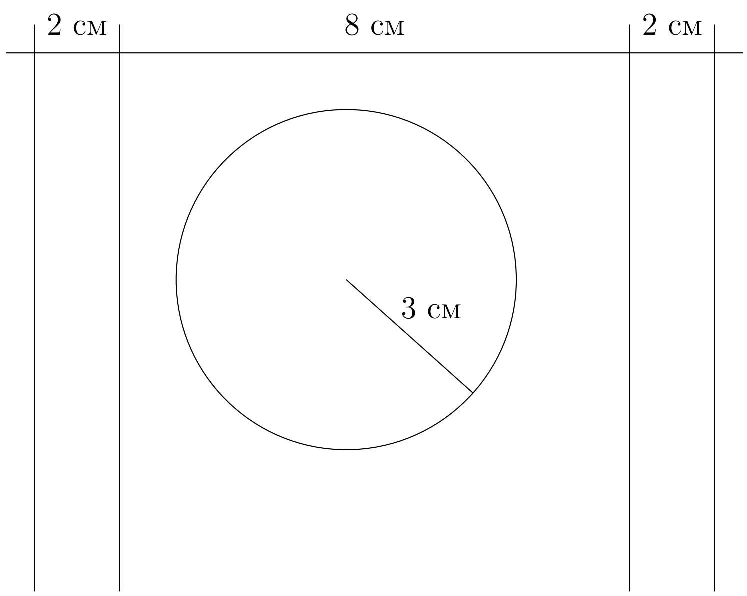

Рис. 3

Розв'язання. Можна вважати, без обмеження загальності, що лінії – вертикальні. Нехай x – відстань від центру круга до лівої межі найближчої зліва вузької смуги, тобто смуги шириною 2 см (см. рис. 3). Тоді, очевидно, $0 \le x \le 2 + 8 = 10$. Круг не буде перетнутий жодною лінією за умови, що $2 + 3 < x < 10 - 3$, тобто $5 < x < 7$. Отже, у даному прикладі $L = [0, 10]$, $l = (5, 7)$. Шукана ймовірність:

$$P(B) = \frac{d(l)}{d(L)} = \frac{2 \text{ см}}{10 \text{ см}} = 0.2.$$

Відзначимо наступні властивості ймовірності.

1. Для будь-якої події A,
$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Якщо подія A є частиною події B, тобто $A \subset B$, то
$$P(A) \le P(B).$$

Задачі. 13. Куб, усі грані якого пофарбовані, розпиляний на тисячу кубиків однакового розміру. Отримані кубики ретельно перемішані. Знайти ймовірність того, що кубик, витягнутий навмання, буде мати тільки пофарбовані сторони.

14. З повного набору кісток доміно навмання беруться п'ять кісток. Знайти ймовірність того, що серед них жодна не містить шістки.

15. З відрізка $[-1, 2]$ навмання взяті два числа. Яка ймовірність того, що їх сума більше одиниці, а добуток менше одиниці?

5 Основні формули для обчислення ймовірностей

Теорема 1. (про ймовірність суми двох подій). Для довільних подій A і B,
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{5.26}$$

Доведення дамо для випадку, коли ФСЕП складається із скінченного числа подій, тобто для випадку класичної ймовірності. Нехай ФСЕП складається із N елементарних подій. Зобразимо їх для наочності точками на площині (дивись рис. 4).

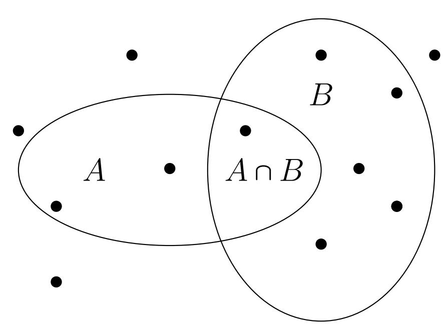

Рис. 4

Тоді подіям A і B відповідають скінченні множини точок – підмножини ФСЕП. Будемо позначати їх також A і B. Число подій, що сприяють $A + B$, дорівнює тоді

$m_{A+B} = N(A \cup B)$. Аналогічно, $m_A = N(A)$, $m_B = N(B)$, $m_{AB} = N(A \cap B)$. Згідно з формулою (1.3), отримаємо

$$\begin{aligned} P(A+B) = \frac{m_{A+B}}{N} = \frac{N(A \cup B)}{N} = \frac{N(A) + N(B) - N(A \cap B)}{N} \\ = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} - \frac{N(A \cap B)}{N} = \frac{m_A}{N} + \frac{m_B}{N} - \frac{m_{AB}}{N} \\ = P(A) + P(B) - P(AB), \end{aligned}$$

що і треба було довести.

Наслідок 1. Якщо події A і B – несумісні,

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{5.27}$$

Справді, у цьому випадку, згідно з (3.21), $AB = O$, а оскільки $P(O) = 0$, з (5.26) отримаємо (5.27).

Аналогічно доведенню теореми 1, за допомогою формули (1.4), що узагальнює формулу (1.3), доводиться наступна формула, що узагальнює формулу (5.26).

Теорема 2 (про ймовірність суми кількох подій). Для довільних подій A_1, A_2, $\ldots$, A_n,

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1 \le k < j \le n} P(A_k A_j) + \sum_{1 \le k < j < i \le n} P(A_k A_j A_i) - \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right). \tag{5.28}$$

Наслідок 2. Якщо події A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ – попарно несумісні, то

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \tag{5.29}$$

(порівняй з (5.27)).

Наслідок 3. Якщо A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ – попарно несумісні події, що складають повну групу подій, то сума їх ймовірностей дорівнює 1:

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1. \tag{5.30}$$

Якщо $\bar{A}$ – протолежна A подія, то A і $\bar{A}$ складають повну групу подій і є попарно несумісними (дивись (3.17)), тому

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Звідси отримаємо наступну теорему.

Теорема 3 (про ймовірність протилежної події).

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \tag{5.31}$$

Приклад 17. Яка ймовірність, що витягнута навмання карта з колоди із 36 карт виявиться дамою або картою пікової масті?

Розв'язання. Нехай подія A означає вилучення “дами”, а B означає вилучення “піки”. Тоді

$$P(A) = \frac{m_A}{N} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \qquad P(B) = \frac{m_B}{N} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, \qquad P(AB) = \frac{1}{36}$$

(подія AB полягає у вилученні “дами пік”). Тому шукана ймовірність дорівнює

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 18. Яка ймовірність попасти на область B координатної площини (дивись рис. 5), якщо точка кидається навмання на одиничний квадрат?

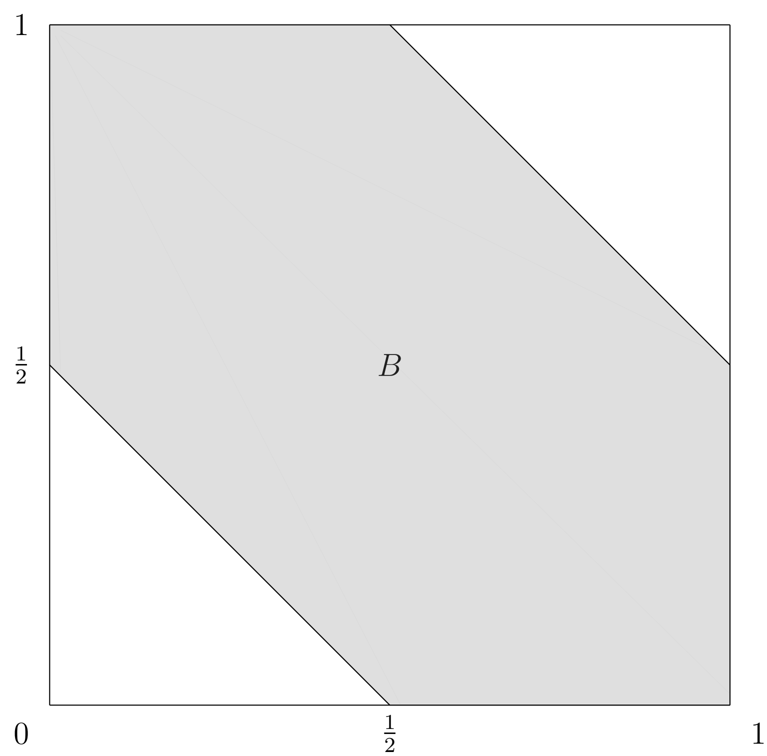

Рис. 5

Розв'язання. Заштрихуємо область B. Нехай A – це незаштрихована частина квадрата. Введемо події, що полягають у попаданні в області на площині (будемо їх позначати тими ж літерами, що і області). Тоді отримаємо, що $B = \bar{A}$. Згідно з геометричним означенням ймовірності,

$$P(A) = \frac{S(A)}{S_\square} = \frac{2S_\triangle}{S_\square} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1^2} = \frac{1}{4}$$

(тут A складається з двох рівнобічних прямокутних трикутників з катетами $\frac{1}{2}$). За формулою (5.31),

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Задачі. 16. Стрілець робить постріл у мішень, що складається з центрального круга і двох концентричних кілець. Ймовірності попадання в круг і кільця відповідно дорівнюють $0,20$, $0,15$ і $0,10$. Знайти ймовірність попадання у мішень.

17. Знайти ймовірність того, що партія із ста виробів, з яких п'ять – браковані, буде прийнята при випробуванні навмання обраної половини всієї партії, якщо умовами прийома припускається бракованих виробів не більше одного з п'ятидесяти.

Приклад 19. Навмання обирають двозначне число. Яка ймовірність, що це число – просте? Таке ж запитання для випадку, коли число починається з четвірки.

Розв'язання. Нехай A – подія, що полягає у виборі простого числа, B – подія, що полягає у виборі двозначного числа, що починається з четвірки. Всього двозначних чисел $N = 90$, з них простих чисел (тобто сприятливих результатів випробування) $m_A = 22$: це числа $11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91, 97$. Тому відповідь на перше запитання:

$$P(A) = \frac{m_A}{N} = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}.$$

У випадку, коли відомо, що відбулася подія B, загальне число можливих результатів буде $m_B = 10$, а сприятливих результатів $m_{AB} = 3$ (оскільки відбулися обидві події A і B, що означає вибір чисел $41, 43, 47$). Таким чином, у цьому випадку шукана ймовірність (позначимо її $P_B(A)$) дорівнює

$$P_B(A) = \frac{m_{AB}}{m_B}, \tag{5.32}$$

тобто $P_B(A) = \frac{3}{10}$. Порівняння відповідей на ці два запитання задачі показує, що додаткові відомості (B) про результат випробування впливають на ймовірність настання події A.

Розглянутий приклад призводить до поняття *умовної ймовірності*. *Ймовірністю події A за умови B* (позначається $P_B(A)$) називається ймовірність настання A у випадку, коли при цьому вже настала подія B. Тими ж міркуваннями, що і у наведеному прикладі, можна показати, що у випадку, коли ФСЕП скінченна, тобто для класичної ймовірності, справедлива формула (5.32), природно у випадку, коли $m_B \neq 0$. Якщо N – число елементарних подій ФСЕП, то $P(AB) = \frac{m_{AB}}{N}$, $P(B) = \frac{m_B}{N}$ і

$$P_B(A) = \frac{m_{AB}}{m_B} = \frac{m_{AB}/N}{m_B/N} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Таким чином, отримаємо ще одну формулу для умовної ймовірності:

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \tag{5.33}$$

яка справедлива, якщо $P(B) \neq 0$.

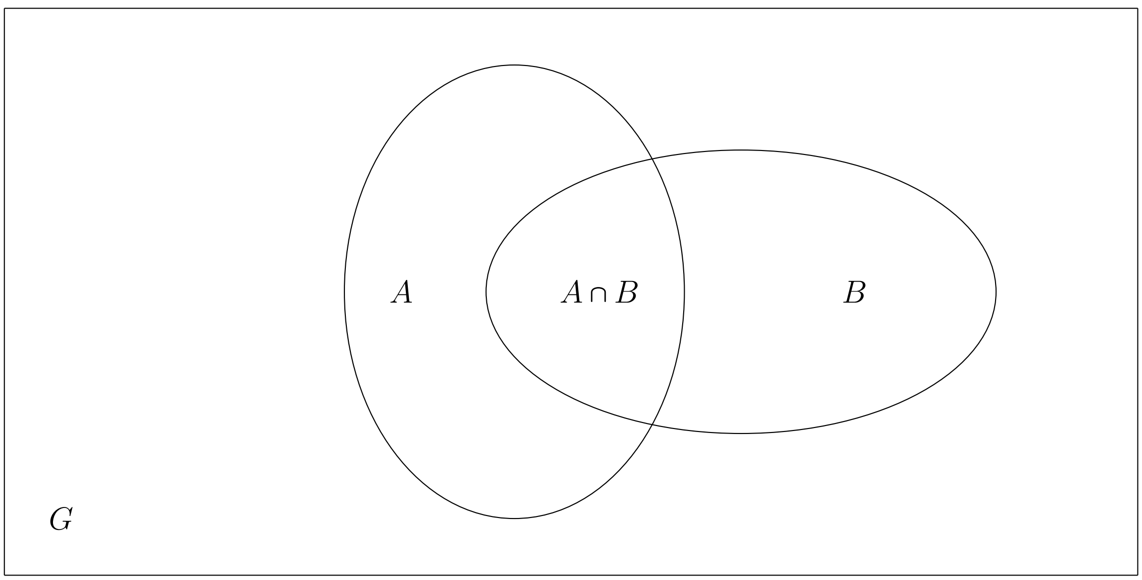

Рис. 6

Для випадку геометричної ймовірності легко побачити (дивись рис. 6 і формулу (4.25)), що

$$P_B(A) = \frac{S(A \cap B)}{S(B)}. \tag{5.34}$$

Оскільки, згідно з (4.25), $P(AB) = \frac{S(A \cap B)}{S(G)}$, $P(B) = \frac{S(B)}{S(G)}$,

$$P_B(A) = \frac{S(A \cap B)}{S(B)} = \frac{S(A \cap B)/S(G)}{S(B)/S(G)} = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

то формула (5.33) для обчислення $P_B(A)$ справедлива також і для випадку геометричної ймовірності.

Теорема 4 (про ймовірність добутку двох подій).

$$P(AB) = P(B)P_B(A). \qquad (5.35)$$

Доведення. Формула (5.35) випливає з (5.33).

Оскільки $AB = BA$ (дивись (3.11)), а застосування теореми 4 до події BA дає $P(BA) = P(A)P_A(B)$, отримаємо

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \qquad (5.36)$$

Порівняння (5.35) і (5.36) дає

Наслідок 4. Для будь-яких подій A і B,

$$P_B(A)P(B) = P(A)P_A(B). \qquad (5.37)$$

Назвемо подію B *незалежною від події* A, якщо умовна ймовірність $P_A(B)$ дорівнює безумовній ймовірності $P(B)$, тобто

$$P_A(B) = P(B), \qquad (5.38)$$

або $P(A) = 0$.

Приклад 20. З колоди карт (всього 36 карт) навмання обирається карта. Нехай подія A=“дама”, подія B=“карта пікової масті”. Тоді (дивись приклад 17) $P(A) = \frac{1}{9}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = \frac{1}{36}$. За формулою (5.33) обчислюємо

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/36}{1/4} = \frac{1}{9}, \qquad P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/36}{1/9} = \frac{1}{4}.$$

Легко побачити, що $P_B(A) = P(A) = \frac{1}{9}$, $P_A(B) = P(B) = \frac{1}{4}$, тобто як подія A не залежить від B, так і подія B не залежить від A.

Теорема 5. Якщо подія B не залежить від події A, то і подія A не залежить від події B.

Доведення. Нехай подія B не залежить від A. Тоді або $P_A(B) = P(B)$, або $P(A) = 0$. У випадку, коли $P(B) = 0$, A не залежить від B (за означенням), і для цього випадку теорема доведена. Якщо ж $P(B) \neq 0$, а $P(A) = 0$, то з (5.37) отримаємо, що $P_B(A) = P(A) = 0$ і значить, A не залежить від B. Нарешті, якщо $P(B) \neq 0$, $P(A) \neq 0$ і $P_A(B) = P(B)$, то розділивши ліву частину рівності (5.37) на $P(B)$, а праву частину (5.37) на $P_A(B)$, отримаємо рівність $P_B(A) = P(A)$, тобто A не залежить від B. Таким чином, для всіх можливих випадків теорема 5 доведена.

Зауваження. Теорема 5 показує, що можна говорити тільки про *взаємно незалежні* події, якщо одна з подій не залежить від другої.

Сформулюємо ще один наслідок теореми 4.
Наслідок 5. Для взаємно незалежних подій A і B,

$$P(AB) = P(A)P(B). \qquad (5.39)$$

Доведення. Якщо $P_B(A) = P(A)$, то формула (5.39) випливає з (5.35). Якщо ж $P(B) = 0$, то оскільки AB є частиною B, $0 \le P(AB) \le P(B)$, а значить, $P(AB) = 0$, і формула (5.39) у цьому випадку також справедлива.

Теорему 4 можна узагальнити наступним чином.

Теорема 6 (про ймовірність добутку кількох подій). Для довільних подій A_1, A_2,..., A_n

$$P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\cdots P_{A_1A_2\cdots A_{n-1}}(A_n). \tag{5.40}$$

Наслідок 6. Для попарно незалежних подій A_1, A_2,..., A_n

$$P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k). \tag{5.41}$$

Нарешті, відмітимо ще одну формулу, що зводить обчислення ймовірності суми кількох подій до обчислення ймовірності добутку протилежних подій.

Теорема 7. Для довільних подій A_1, A_2,..., A_n

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\prod_{k=1}^{n} \bar{A}_k\right). \tag{5.42}$$

Доведення. Перш за все відмітимо, що формули (3.18) можна узагальнити на будь-яку кількість подій:

$$\overline{\sum_{k=1}^{n} A_k} = \prod_{k=1}^{n} \bar{A}_k, \qquad \overline{\prod_{k=1}^{n} A_k} = \sum_{k=1}^{n} \bar{A}_k. \tag{5.43}$$

Тоді з (5.31) та (5.43) отримаємо:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\overline{\sum_{k=1}^{n} A_k}\right) = 1 - P\left(\prod_{k=1}^{n} \bar{A}_k\right),$$

що і треба було довести.

Приклад 21. Три елементи електричного ланцюга з'єднані послідовно. Надійність кожного з них (ймовірність справної роботи) становить 0,8; 0,6; 0,7 відповідно. Знайти ймовірність того, що ланцюг розімкнеться.

Розв'язання. Позначимо шукану подію через A, введемо також подію A_k = "k-й елемент справний" ($k = 1, 2, 3$). Тоді $P(A_1) = 0,8$; $P(A_2) = 0,6$; $P(A_3) = 0,7$. При послідовному з'єднанні елементів ланцюга струм переривається (тобто ланцюг розмикається), якщо принаймні один з елементів виходить з ладу. Таким чином, $A = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3$. За формулою (5.42)

$$P(A) = P(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{\bar{A}}_1\bar{\bar{A}}_2\bar{\bar{A}}_3) = 1 - P(A_1A_2A_3)$$

(ми застосували тут (3.20)). Оскільки події A_k ($k = 1, 2, 3$) попарно незалежні, згідно з (5.41),

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,7 = 0,336,$$

звідки $P(A) = 1 - 0,336 = 0,664$.

Задачі. 18. Двоє по черзі кидають монету. Виграє той, у якого раніше з'явиться герб. Визначити ймовірності виграшу для кожного з гравців.

19. Ймовірність ураження цілі одним стрільцем дорівнює 0,8, а другим 0,6. Знайти ймовірність того, що ціль буде уражена тільки одним стрільцем.

Нехай події H_1, H_2, …, H_n складають повну групу попарно несумісних подій (далі ми будемо називати H_k гіпотезами.

Теорема 8. (формула повної ймовірності). Ймовірність будь-якої події A дорівнює сумі добутків ймовірності кожної гіпотези на умовну ймовірність події A за умови настання цієї гіпотези:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P_{H_k}(A). \tag{5.44}$$

Доведення. Згідно з властивостями (3.13), (3.15) і означенням повної групи подій (3.22),

$$P(A) = P(A \cdot I) = P\left(A \cdot \sum_{k=1}^{n} H_k\right) = P\left(\sum_{k=1}^{n} AH_k\right).$$

Оскільки гіпотези H_k – попарно несумісні, тобто $H_kH_j = O$ при $k \neq j$, то і

$$(AH_k)(AH_j) = AH_kAH_j = AAH_kH_j = AH_kH_j = A \cdot O = O$$

при $k \neq j$ (ми використали властивості (3.12), (3.11), (3.15), (3.13)), тобто події AH_k також попарно несумісні. Згідно з наслідком 2 теореми 2 і з теоремою 4, маємо

$$P(A) = P\left(\sum_{k=1}^{n} AH_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(AH_k) = \sum_{k=1} P(H_k)P_{H_k}(A),$$

що і треба було довести.

Приклад 22. Радіолампа, встановлена в телевізорі, може належати до однієї з трьох партій з ймовірностями $p_1 = 0,25$, $p_2 = 0,5$, $p_3 = 0,25$. Ймовірності того, що лампа пропрацює задане число годин, для цих партій відповідно становлять $0,1$, $0,2$ і $0,4$. Визначити ймовірність того, що лампа пропрацює задане число годин.

Розв'язання. Нехай A – шукана подія, тобто "лампа пропрацює задане число годин", H_1, H_2, H_3 – гіпотези, що полягають у тому, що лампа належить до першої, другої, третьої партії, відповідно. Тоді $P(H_1) = p_1 = 0,25$, $P(H_2) = 0,5$, $P(H_3) = p_3 = 0,25$; $P_{H_1}(A) = 0,1$, $P_{H_2}(A) = 0,2$, $P_{H_3}(A) = 0,4$. За формулою повної ймовірності, знаходимо

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A) = 0,25 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,25 \cdot 0,4 = 0,225.$$

Теорема 9 (формула Байєса). Ймовірність $P_A(H_j)$ гіпотези H_j за умови настання події A визначається формулою

$$P_A(H_j) = \frac{P(H_j)P_{H_j}(A)}{P(A)}, \tag{5.45}$$

або, враховуючи (5.44),

$$P_A(H_j) = \frac{P(H_j)P_{H_j}(A)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P_{H_k}(A)}. \tag{5.46}$$

Доведення. Згідно з наслідком 4 (формула (5.37)), $P(H_j)P_{H_j}(A) = P(A)P_A(H_j)$, звідки отримаємо (5.45), а значить, і (5.46).

Приклад 23. В умовах прикладу 22 знайти ймовірність того, що лампа належить першій партії, якщо вона вже пропрацювала задане число годин.

Розв'язання. У цьому прикладі необхідно знайти $P_A(H_1)$. За формулою Байєса (у даному випадку застосуємо формулу (5.45), оскільки у прикладі 22 $P(A)$ вже знайдено):

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,1}{0,225} = \frac{1}{9}.$$

Задачі. 20. З повного набору кісток доміно навмання беруться дві кістки. Визначити ймовірність того, що другу кістку можна приставити до першої.

21. Два автомати виробляють однакові деталі, які складають потім в один ящик. Продуктивність першого автомату вдвічі більше продуктивності другого. Перший автомат виробляє 60% деталей відмінної якості, а другий – 84% деталей відмінної якості. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться відмінної якості. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь виготовлена першим автоматом, якщо вже відомо, що вона виявилася відмінної якості.

22. Для участі у студентських спортивних відбіркових змаганнях виділено з однієї групи – 4, з другої – 6, з третьої – 5 студентів. Ймовірності того, що студент I, II, III групи потрапить до збірної інституту дорівнюють відповідно 0,9; 0,7 і 0,8. Навмання обраний студент в підсумку змагань потрапив до збірної. До якої групи найбільш ймовірно належить цей студент?

Рекомендована література

1. Гнєденко Б. В. Курс теорії ймовірностей. К., ВПЦ Київський університет, 2010.
2. Дороговцев А.Я Збірник задач з теорії ймовірностей. К., Вища школа, 1976.
3. Жалдак М. І., Кузьміна Н. М., Берлінська С. Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології. К., Вища школа, 1995.
4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., Наука, 1965.
5. Гмурман В. Е., Руководство к решению задач по теории вероятностей и матстатистике. М., Высшая школа, 1975.
6. Гмурман В. Е., Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшая школа, 1977.
7. Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Элементы комбинаторики. М., Наука, 1977.
8. Renyi A. Probability theory. North Holland, 1970.
9. Ross S. A first course in probability. Pearson, 10th Edition, 2019.