

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ПЕДАГОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Роль математики в розвитку суспільства вже давно усвідомлена і не викликає сумніву, – переважна кількість досягнень людства в атомній енергетиці, організації космічних польотів, розвитку економічних, комп'ютерних наук, теорії зв'язку, теорії надійності, прогресі в біології, медицині та інших галузях людського пізнання, – все це здійснено завдяки успішному використанню математики. За останні десятиліття в математиці як науці відбулись значні зміни, математичний апарат став більш різноманітним і гнучким. Математика перетворилася на надзвичайно зручний засіб моделювання явищ реального світу. Отже, широке використання математики для розв'язання різноманітних практичних задач стало характерною рисою нашого часу. Не є виключенням і педагогіка, розвиток якої безпосередньо супроводжується використанням різноманітних математичних методів для аналізу й прогнозування результатів дидактичного впливу, оцінювання якості й ефективності навчально-виховного процесу на різних рівнях освіти, перевірки достовірності експериментальних даних тощо.

Можливості використання математичних методів у психолого-педагогічній сфері пізнання розкриті в працях таких науковців, як Дж. Гласс, О. Єрмолаєв, Р. Мейли, Е. Сидоренко, Дж. Стенлі, Г. Суходольський, Г. Юр та ін.

Метою нашої статті є розкриття можливостей застосування сукупності різноманітних, взаємодоповнювальних математичних методів на прикладі конкретного педагогічного дослідження професійної надійності фахівців-соціологів.

На різних етапах проведеного нами дослідження використовувалися різні математичні методи, зумовлені метою кожного з етапів експерименту. Серед них математичне моделювання, регресійний, факторний і кореляційний аналіз та інші методи.

Усвідомлення ролі означених методів у педагогічному дослідженні потребує розкриття їх сутності. Як відомо, математичне моделювання – це дослідження за допомогою математичних моделей – "деяких математичних об'єктів (наприклад, рівнянь, нерівностей, матриць), які відповідають реальному процесу" [1: 16]. Таке дослідження здійснюють шляхом вироблення певних формул чи розв'язання певних рівнянь, їх систем. Отже, математичне моделювання – це переклад реального явища на мову математики, що дозволяє отримати більш точні уявлення про його найсуттєвіші властивості й певною мірою передбачити його розвиток. Процес виокремлення задачі для математичного аналізу супроводжується з'ясуванням головних факторів, що впливають на результат задачі, а також таких незмінних факторів, що описують ситуацію, в якій відбувається розв'язання задачі. Коли визначено суттєві фактори, відбувається безпосередня формалізація задачі. Якщо U – кінцевий результат, X – сукупність так званих керованих змінних, від яких залежить кількісне значення кінцевого результату, Y – сукупність некерованих змінних, що описують ситуацію, то $U = F(X, Y)$, де F – функціональна залежність кінцевого результату від того, що відомо й що потрібно знайти.

Після отримання результату відбувається зворотний перехід з мови математики на мову, за якою була сформульована задача. Це потребує усвідомлення математичного змісту отриманих рішень, а також того, що вони позначають на мові реального світу, який математика покликана описувати.

Побудована модель підлягає перевірці. Зазвичай адекватність моделі певною мірою перевіряють під час постановки задачі.

Математичне моделювання застосовують не тільки для дослідження процесів і явищ, а також для їх проектування. На відміну від фізичного, математичне моделювання дозволяє вирішувати задачі проектування більш повно, оскільки має можливість отримати кількісні результати, не потребує безпосередніх експериментальних досліджень, дозволяє опрацювати велику кількість альтернативних варіантів, надає можливість аналітичному дослідженню.

Засобом побудови математичної моделі професійної надійності спеціаліста соціологічної сфери діяльності в нашому дослідженні стали регресійний, факторний і кореляційний аналізи. Застосування регресійного аналізу було зумовлено тим, що він дозволяє досліджувати залежність однієї (залежної) змінної від кількох інших – незалежних змінних, тобто дозволяє встановлювати наявність і характер зв'язку (у вигляді математичного рівняння, що описує цю залежність) між змінними, прогнозувати значення залежної змінної за допомогою незалежних, визначати внесок незалежних змінних у варіацію залежної.

Факторний аналіз дозволяє представити в компактній формі узагальнену інформацію про структуру зв'язків між певними ознаками досліджуваного соціального явища на основі виокремлення деяких прихованих факторів, що безпосередньо не спостерігаються. Головне припущення факторного аналізу полягає в тому, що кожну досліджувану ознаку можна виразити у вигляді суми деяких інших ознак (факторів), помножених кожен на свій коефіцієнт. Розраховані значення цих коефіцієнтів послужили основою для змістових висновків. Головною метою факторного аналізу є: скорочення кількості змінних (редукція даних) та виявлення структури взаємозв'язків між ними, тобто класифікація змінних. Факторний аналіз застосовується також для визначення впливу факторів на результат. Базуючись на експериментальних спостереженнях ознак об'єкта, факторний аналіз дає можливість виокремити групу змінних, що визначають кореляційний взаємозв'язок між ознаками.

Відомо, що кореляція виникає тоді, коли залежність однієї ознаки від інших ускладнена низкою випадкових факторів. Кореляційний аналіз як практичний метод дослідження кореляційної залежності між двома чи більше випадковими факторами забезпечує отримання певної інформації про одну змінну за допомогою іншої.

Слід зауважити, що математичне моделювання як метод пізнання майже не використовується в педагогічних дослідженнях. У нашому дослідженні побудова математичної моделі виступила одним із способів ведення існування професійної надійності й виявлення її структури. Створення математичної моделі відбувалось на основі обробки емпіричних даних за такими етапами: стандартизація інструменту вимірювання; визначення кількісних меж зон вияву (пасивної, потенційної, активної) показників професійної надійності; обчислення емпіричних значень професійної надійності спеціалістів соціологічної сфери діяльності; побудова рівняння лінійної множинної регресії як математичної моделі професійної надійності фахівців-соціологів; обчислення теоретичних значень професійної надійності й оцінка отриманого рівняння лінійної регресії; оцінка параметрів математичної моделі професійної надійності та її спрощення; виявлення кількісних меж зон вияву професійної надійності фахівців-соціологів; ранжування факторних ознак і якісний аналіз моделі.

Завдяки стандартизації методик, ми змогли зіставити результати, отримані в різних спеціалістів за різними методиками, виразити реальні тестові оцінки у відносних показниках – середньозважених значеннях для кожного респондента за кожною методикою.

Наступний етап був пов'язаний із виявленням пасивної, потенційної та активної зон вияву професійної надійності. Для вирішення цього завдання був застосований метод визначення середньоквадратичних відхилень. Обираючи цей метод, було враховано, що в психометрії найбільш розповсюдженим способом перетворення первинних оцінок є їх центрування шляхом середньоквадратичних відхилень. Для такого центрування результати, отримані за кожною з методик, розглядалися як значення дискретних випадкових величин X_1, X_2, \dots, X_{13} . Для кожної з них були підраховані математичне сподівання її значень, а також їх середнє квадратичне відхилення за формулами:

$$\bar{x} = M = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

де M – математичне сподівання; σ – середнє квадратичне відхилення; x_i – значення ознаки, що спостерігається; n – кількість спостережень [5: 21].

У пасивну зону вияву професійної надійності (за кожною методикою окремо) були включені результати обстеження тих спеціалістів, середньозважені значення яких перевищували величину математичного сподівання (M) менш, ніж за $0,5\sigma$; у потенційну – середньозважені значення яких коливались від $M - 0,5\sigma$ до $M + 0,5\sigma$. Результати тестування спеціалістів, середньозважені значення яких перевищували $M + 0,5\sigma$, утворили активну зону. Розподіл середньозважених значень за пасивною, потенційною й активною зонами вияву професійної надійності, надав кількісні межі для результатів тестування за кожним показником.

Подальший етап був пов'язаний з безпосереднім створенням математичної моделі професійної надійності, для чого за результатами діагностування 112 спеціалістів була введена дискретна випадкова величина Y , значення якої обчислено як $M + 0,5\sigma$, де M – її математичне сподівання, σ – середнє квадратичне відхилення. Надалі ці значення стали емпіричними значеннями професійної надійності – $Y_{\text{емп}}$.

Знання емпіричних значень $Y_{\text{емп}}$ дозволило побудувати рівняння лінійної множинної регресії – математичну модель професійної надійності спеціалістів соціологічної сфери діяльності [4: 44]:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 \cdot X_2 + \beta_3 \cdot X_3 + \dots + \beta_m \cdot X_m + \epsilon,$$

де значення параметрів $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_m$ вказують на ступінь впливу факторних ознак X_1, X_2, \dots, X_m на результативну ознаку Y ; β_0 – початковий рівень професійної надійності; ϵ – помилка.

За результатами регресійного аналізу й використання програмного продукту MS Excel було отримано таке рівняння регресії:

$$Y = 0,315 + 0,062 \cdot X_1 + 0,07 \cdot X_2 + 0,07 \cdot X_3 + 0,009 \cdot X_4 + 0,145 \cdot X_5 + 0,114 \cdot X_6 + 0,064 \cdot X_7 + 0 \cdot X_8 + 0 \cdot X_9 + 0,092 \cdot X_{10} + 0 \cdot X_{11} + 0 \cdot X_{12} + 0,068 \cdot X_{13},$$

де залежна змінна Y є результативною ознакою професійної надійності й залежить від багатьох змінних – факторних ознак X_1, X_2, \dots, X_{13} , що зумовило використання в дослідженні саме множинної лінійної регресії. У побудованій моделі забезпечена статистична надійність результатів, оскільки виконується

умова: $n \geq 3(m+1)$, де n – кількість спостережень (112), m – кількість факторних ознак (13) [4: 44]. У нашому випадку – $112 \geq 52$. Згідно з отриманими даними, знайдена математична модель професійної надійності спеціалістів соціономічної сфери має стандартну похибку $S = 0$, що вказує на точність оцінок [4: 47].

Загальна якість рівняння лінійної регресії виявлена за значенням коефіцієнта детермінації, що визначає долю загального розсіювання результативної ознаки Y за рівнянням регресії – $0 \leq R^2 \leq 1$. Тобто, чим ближче R^2 до 1, тим краще рівняння лінійної регресії пояснює поведінку результативної ознаки Y [4: 50]. Для нашого випадку коефіцієнт детермінації $R^2 = 1$, оскільки теоретичні значення $Y_{\text{теор}}$ зівпали з емпіричними $Y_{\text{емп}}$, а похибка розрахунків становила $1 \cdot 10^{-16}$.

Рівняння лінійної множинної регресії дозволило оцінити параметри моделі $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_m$ – коефіцієнти при змінних X_1, X_2, \dots, X_{13} та ступінь їх впливу на результативну ознаку Y . Так, з рівняння лінійної регресії видно, що змінні X_8, X_9, X_{11} та X_{12} увійшли до математичної моделі професійної надійності з нульовими коефіцієнтами. З цього випливає, що прийом інформації (X_8), інтелектуальна лабільність (X_9), соціальна фрустрованість (X_{11}), а також міжособистісні відносини (X_{12}) не впливають на результативну ознаку Y , тобто на вияв професійної надійності спеціалістів соціономічної сфери діяльності.

Зауважимо, що факторні ознаки можуть бути виключеними з регресійної моделі у двох випадках: якщо вони не впливають на результативну ознаку або якщо вони сильно пов'язані з іншими ознаками [4: 50]. За результатами кореляційного аналізу було встановлено, що: інтелектуальна лабільність (X_9) та соціальна фрустрованість (X_{11}) не корелюють з жодною факторною ознакою, оскільки їх відкидання з математичної моделі професійної надійності не змінило коефіцієнтів регресії. Щодо факторних ознак "прийом інформації" (X_8) та "міжособистісні відносини" (X_{12}), то було виявлено, що X_8 та X_{12} корелюють із здатністю до самоуправління X_{10} (коефіцієнти кореляції $r(X_8, X_{10}) = 0,86$; $r(X_{12}, X_{10}) = 0,758$ відповідно); X_{12} корелює також з професійно важливими якостями X_4 (коефіцієнт кореляції $r(X_{12}, X_4) = 0,703$). Отже, спрощена математична модель професійної надійності спеціалістів соціономічної сфери набула вигляду:

$$Y = 0,315 + 0,062 \cdot X_1 + 0,07 \cdot X_2 + 0,07 \cdot X_3 + 0,009 \cdot X_4 + 0,145 \cdot X_5 + 0,114 \cdot X_6 + 0,064 \cdot X_7 + 0,092 \cdot X_{10} + 0,068 \cdot X_{13}.$$

Розглядаючи Y як лінійну функцію відносно змінних $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_{10}$ та X_{13} , були з'ясувані її найменше та найбільше значення на інтервалі $[0; 1]$ змінення кожного аргументу, а саме: $Y_{\min} = 0,315$; $Y_{\max} = 1,009$.

Наступний етап дозволив урахувати інтервали змінення кожного з аргументів за пасивною, потенційною та активною зонами вияву професійної надійності фахівців-соціономістів. Підстановка граничних значень інтервалів змінення кожного аргументу за кожною зоною в рівняння лінійної множинної регресії й визначення серед них найменшого та найбільшого значень дозволили отримати: у пасивній зоні: $Y_{\min} = 0,3150$; $Y_{\max} = 0,7002$; у потенційній зоні: $Y_{\min} = 0,7002$; $Y_{\max} = 0,7788$; в активній зоні: $Y_{\min} = 0,7788$; $Y_{\max} = 1,0091$. Відтак, математична модель професійної надійності дала можливість за значеннями параметрів моделі $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{13}$ проранжувати факторні ознаки за ступенем їх впливу на вияв професійної надійності спеціалістів соціономічної сфери й спрогнозувати результати її формування в процесі їхньої професійної підготовки.

Слід зазначити, що кореляційний аналіз був застосований не тільки в процесі побудови метаметричної моделі професійної надійності фахівців-соціономістів, але й під час аналізу тих факторів, що впливають на неї за типових і нетипових умов протікання діяльності. Аналіз наукових джерел дозволив нам виявити 24 фактори, що можуть спричиняти вплив (негативний або позитивний) на вияв професійної надійності. Залучення кореляційного аналізу дозволило нам з'ясувати кореляційні зв'язки між різними факторами й на цій основі проранжувати їх за ступенем значущості в типових та нетипових ситуаціях професійної діяльності спеціаліста, а також відкинути незначущі фактори. Зазвичай для вивчення зв'язку між факторами, що виміряні за номінальною шкалою (тобто тобто ознак виду "так або ні"), використовують таблиці сполученості, статистику Фішера-Пірсона X^2 , різноманітні міри зв'язку ознак (коефіцієнти Юла, Крамера, Чупрова та ін.), а також логарифмічні лінійні моделі. Для аналізу отриманих даних ми використовували таблиці сполученості. Для того, щоб пов'язати кожен фактор з іншими, перевірялися гіпотези про відсутність зв'язку (незалежність) серед факторів. Припущення було сформульовано таким чином. Незай H_0 – гіпотеза, суть якої в тому, що між двома факторами немає статистично значущого зв'язку, тобто вони є однорідними. Відповідно, суть гіпотези H_1 в тому, що такий зв'язок є. Зауважимо, що гіпотеза про відсутність зв'язку відкидається, якщо статистика Фішера-Пірсона X^2 приймає невідповідно великі значення або коефіцієнти кореляції значно відхилені від 0. Таблиці сполученості було укладено для кожної пари з 24 факторів. За даними отриманих таблиць за формулою

$$X^2 = n \cdot \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{n_{ij}^2}{n_i n_j} - 1 \right],$$

де n – величина вибірки, $n_i = n_{i1} + n_{i2} + n_{i3}$, $n_j = n_{1j} + n_{2j} + n_{3j}$ [7: 277], було розраховано значення X^2 (розрахунки проведені за допомогою програмного продукту MS Excel).

Розрахункове значення X^2 було порівняне з критичним, взятим із чотирма ступенями свободи та рівнем значущості $\alpha = 0,001$. За умови, що розрахункове значення X^2 було більше за критичне ($X^2_{\text{крит}} = 18,466$), гіпотеза H_0 про однорідність факторів була відкинута й була прийнята гіпотеза H_1 про наявність між ними статистично значущого зв'язку. Якщо гіпотеза H_0 про однорідність факторів була відкинута, то з'ясувалась сила зв'язку між факторами. Для оцінки тісноти зв'язку в цих таблицях використаний коефіцієнт Крамера, що визначається за формулою:

$$K = \sqrt{\frac{X^2}{n \cdot \min(k-1, m-1)}}$$

(ступені свободи $k = m = 4$) та є аналогом коефіцієнта кореляції для даних, що оцінюються за номінальною шкалою [3: 209]. Статистично значущим вважався коефіцієнт Крамера, значення якого більше за 0,5, що відповідало узятому рівню значущості для X^2 . Значення коефіцієнтів Крамера дозволили виявити й відкинути фактори, що не мають зв'язку з іншими; проранжувати ті фактори, що лишилися, а також за кількістю зв'язків обрати центральні фактори.

Для перевірки отриманих у процесі дослідження результатів на достовірність були застосовані статистичні методи. Перша перевірка достовірності результатів відбувалася після розподілу студентів на контрольні й експериментальні групи і мала довести, що вказані групи належать до однієї сукупності студентів, тобто різниця у сформованості їхньої професійної надійності не є статистично вагомою. Статистична гіпотеза про належність медіан сукупностей

значень результатів діагностування в групах студентів однієї генеральної сукупності була сформульована так: $H_0 : Md_e = Md_k$. Вибір гіпотези про рівність саме медіан сукупностей даних був зумовлений тим, що закон їх розподілу не є нормальним. У такому випадку медіана є найбільш усталеною й

коректною оцінкою центральної тенденції. Перевірка гіпотези H_0 здійснювалася за медіанним критерієм для двох вибірок різного розміру [3: 158]. Зауважимо, що скільки експериментальні дані не підпорядковувалися нормальному закону розподілу, то всі методи статистичної обробки результатів експерименту, що застосовувалися, були непараметричними. На цьому етапі дослідження розрахунки також проводились із застосуванням MS Excel за критичними значеннями статистичних критеріїв [6: 419]. Перевірка сформульованої статистичної гіпотези для об'єднаної вибірки здійснювалася шляхом обчислення значення медіани за формулою:

$$Md = X_{Md} + \frac{h \left(\frac{n}{2} - m_x^{\max} \right)}{m_m}$$

де $n = \sum_{i=1}^k n_i$ – загальна кількість студентів, що брали участь в експерименті; n_i – кількість студентів i -тої групи; k – кількість груп; X_{Md} –

фактична нижня границя медіанного інтервалу; h – ширина медіанного інтервалу; m_x^{\max} – частота, що набула до початку медіанного інтервалу; m_m – частота в медіанному інтервалі [2: 61]. Медіанний критерій розрахований за формулою:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(L_i - K_i)^2}{K_i},$$

де L_i – кількість більших за медіану значень i -тої сукупності даних, що спостерігалася; K_i – кількість більших за медіану значень i -тої сукупності даних, що очікувалася:

$$K_i = \frac{n_i \sum_{j=1}^k L_j}{n} \quad [231: 159].$$

Розраховане значення медіанного критерію порівнювалося із критичним значенням розподілу $\chi^2_{табл}$, узятим з рівнем значущості $\alpha = 0,05$ та ступенем свободи $(k-1)$.

Розрахунки показали: для результатів діагностування вияву професійної надійності студентів експериментальних і контрольних груп на констатувальному етапі дослідження значення медіанного критерію – $\chi^2 = 0,049$. Ураховуючи, що $\chi^2_{табл} = 3,84$, статистична гіпотеза H_0 була прийнята на рівні значущості $\alpha = 0,05$. Отже, різниця між результатами діагностування студентів експериментальних і контрольних груп не була статистично вагомою. Відтак, на початку формувального експерименту студенти експериментальних і контрольних груп суттєво не відрізнялися за виявом професійної надійності.

Наступна перевірка достовірності результатів дослідження була зумовлена тим, що порівняння відсоткових значень за виявом професійної надійності наприкінці формувального експерименту недостатньо для доведення позитивних зрушень у процесі її формування. Для перевірки статистичної значущості таких зрушень було сформульовано низку додаткових статистичних гіпотез. Аналогічним чином було з'ясовано, що різниця між результатами діагностування студентів контрольних і експериментальних груп є статистично вагомою на рівні $\alpha = 0,05$. Різниця між виявом професійної надійності студентів експериментальних груп до й після формувального експерименту є статистично вагомою на рівні $\alpha = 0,001$. Різниця між виявом надійності у студентів контрольних груп до й після дослідно-експериментальної роботи не є статистично вагомою, що підтвердило позитивні зрушення у процесі формуванні професійної надійності студентів експериментальних груп.

Отже, застосування різноманітних математичних методів у педагогічному дослідженні професійної надійності фахівців-соціологів засвідчило не тільки можливість їх широкого застосування, але й необхідність їх залучення для отримання обґрунтованих і достовірних результатів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Андрианова В. Е. Деятельность человека в системах управления / Андрианова В. Е. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974. – 135 с.
2. Гласс Дж., Стэнли Дж. Статистические методы в педагогике и психологии / Дж. Гласс, Дж. Стэнли; [пер. с англ.]. – М.: Прогресс, 1976. – 495 с.
3. Лапач С. Н. Статистика в науке и бизнесе / Лапач С. Н., Чубенко А. В., Бабич П. Н. – К.: МОРИОН, 2002. – 640 с.
4. Просветов Г. И. Эконометрика: задачи и решения: [учебно-методическое пособие] / Г. И. Просветов. – М.: РДЛ, 2007. – 192, [4] с.
5. Сидоренко Е. В. Методы математической обработки в психологии / Е. В. Сидоренко. – СПб.: Речь, 2004. – 350 с.
6. Суходольский Г. В. Основы математической статистики для психологов / Г. В. Суходольский. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1972. – 429 с.
7. Тюрин Ю. Н. Анализ данных на компьютере / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров ; [под ред В.Э. Фигурнова]. – М.: ИНФРА-М., 2003. – 544, [3] с.

Подано до редакції 16.04.10

РЕЗЮМЕ

У статті подано характеристику математичних методів та приклади щодо їх застосування в педагогічному дослідженні.

Ключові слова: педагогічне дослідження, математичні методи, математичне моделювання, кореляція.

В.В. Корнешчук

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

РЕЗЮМЕ

В статье предлагается характеристика математических методов и примеры их использования в педагогическом исследовании.

Ключевые слова: педагогическое исследование, математические методы, математическое моделирование, корреляция.

V.V. Korneshchuk

MATHEMATICAL METHODS IN PEDAGOGICAL RESEARCH

SUMMARY

The article characterizes some mathematical methods and examples of their application in pedagogical research.

Keywords: pedagogical research, mathematical methods, mathematical modeling, correlation.