О. М. Синюкова

КОНСТРУКТИВНІ АСПЕКТИ ЕВКЛІДОВОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Тексти лекцій

Одеса – 2021

УДК 514

ББК

Рекомендовано до друку Вченою радою Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського» (протокол №12 від 24 червня)

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Покась С. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

Драганюк С. В., кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Синюкова О. М.

Конструктивні аспекти евклідової геометрії: тексти лекцій. – Одеса, 2021.

Тексти лекцій відповідають всім розділам програми однойменної навчальної дисципліни, опанування якої у Державному закладі «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського передбачено освітньо-професійною програмою «Середня освіта (Математика)» для другого (магістерського) рівня вищої освіти. Дисципліна покликана сформувати у майбутніх викладачів математики різних рівнів освіти уявлення про елементарну геометрію як конструктивну складову евклідової геометрії, найбільш доцільну і, в силу цього, найбільш традиційну щодо опанування її базових елементів у закладах загальної середньої освіти. Змістове наповнення дисципліни розроблено у рамках міжнародного проєкту MoPed. Представлений навчальний матеріал може також бути корисним як для студентів всіх фізико-математичних спеціальностей закладів вищої освіти, так і для вчителів-практиків з математики закладів середньої освіти.

ЗМІСТ

ВСТУП

Загальний опис навчальної дисципліни представлено у наступній таблиці:

Найменування показників	**Галузь знань, ОПП, спеціальність, рівень вищої освіти**	**Характеристика навчальної дисципліни**	
		денна форма навчання	**заочна форма навчання**
Кількість кредитів – 4	**Галузь знань** 01 Освіта / Педагогіка	**Статус дисципліни:** обов'язкова	
Змістових модулів – 4	**ОПП** Середня освіта (Математика. Мова і література (англійська)) **ОПП** Середня освіта (Математика. Інформатика) **Спеціальність** 014.04 Середня освіта (Математика)	**Мова навчання:** українська	
Загальна кількість годин – 120		**Рік навчання:**	
		1-й	1-й
		Семестр:	
		2-й	2-й
Тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 2,5 самостійної роботи студента – ,5	**Рівень вищої освіти** другий (магістерський)	**Лекції**	
		10 год.	4 год
		Практичні, семінарські	
		30 год.	8 год.
		Лабораторні	
		-	-
		Самостійна робота	
		80 год.	108 год.
		Вид контролю: екзамен	

Примітка.

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної і індивідуальної роботи становить:

для денної форми навчання –33 % / 67 %

для заочної форми навчання– 10 % / 90%

Мета та завдання опанування навчальної дисципліни «Конструктивні аспекти евклідової геометрії» полягають у тому, щоб сформувати у здобувачів вищої освіти усвідомлення про елементарну евклідову геометрію як конструктивну складову геометрії тривимірного евклідового простору, сформувати, вдосконалити та відпрацювати їхні вміння та навички проведення конструктивних міркувань, домогтися усвідомлення природи різного типу «побудов» на евклідовій площині та у евклідовому просторі як спеціальних конструктивного типу доведень у межах відповідної аксіоматичної теорії, відпрацювати алгоритми проведення та обгрунтування вірності таких «побудов».

Достатніми умовами для опанування дисципліни є первинне володіння поняттями про аксіоматику та аксіоматичну теорію, про види співвідношень між аксіоматиками та аксіоматичними теоріями; оглядове знайомство з аксіоматичною теорією Д. Гільберта евклідової геометрії; володіння змістовим наповненням курсів математики закладів загальної середньої освіти на рівні, достатньому для опанування будь-яких курсів математики у закладах вищої освіти.

Як результат опанування навчальної дисципліни здобувач відповідної вищої освіти повинен **знати**

- сучасні характеристики понять про аксіоматику та аксіоматичну теорію, найвідоміші співвідношення між аксіоматиками та відповідними аксіоматичними теоріями, різні точки зору на поняття про конструктивні характеристики аксіоматики та конструктивний характер умовиводів відповідної аксіоматичної теорії;
- аксіоматику Д. Гільберта евклідової геометрії, основний принцип її побудови, основні аспекти відповідної аксіоматичної теорії;
- певну аксіоматику теорії «побудов» на евклідовій площині «за допомогою циркуля і лінійки», традиційну загальну схему розв’язання планіметричних задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки»,

сутність методів трикутника, геометричних місць точок, рухів та подібності розв’язання задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки»;

- аксіоматику «циркуля» теорії «побудов» на евклідовій площині;
- аксіоматику «односторонньої лінійки» теорії «побудов» на евклідовій площині;
- аксіоматику ««рухомого» прямого кута» теорії «побудов» на евклідовій площині.

Здобувач відповідної вищої освіти повинен усвідомлювати

- конструктивний характер групи аксіом приналежності і наслідків з них у межах аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії;
- елементарну геометрію як конструктивну складову евклідової геометрії;
- сутність, роль і місце у евклідовій планіметрії задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки»;
- необхідність розробки відповідного канонічного продовження аксіоматики евклідової планіметрії для теоретичного обгрунтування і визначення шляхів розв’язання задач на «побудову» у евклідовій планіметрії за допомогою різних «інструментів»;
- наявність конструктивних і не конструктивних доведень існування геометричних фігур у евклідовій стереометрії як відповідній аксіоматичній теорії;
- доцільність існування поняття про «побудови» у евклідовому просторі за допомогою спеціальних «інструментів»;
- постановку задач на «побудову» зображень стереометричних фігур та «побудови» за зображеннями;
- конструктивні аспекти теорії «побудов» зображень геометричних фігур на евклідовій площині за методом паралельного проєктування.

Здобувач відповідної вищої освіти повинен вміти

- визначати конструктивний або не конструктивний характер наведеної аксіоматики, будувати моделі заданої аксіоматики у аксіоматичній теорії іншої аксіоматики, проводити конструктивного характеру міркування у межах визначеної аксіоматичної теорії;

- визначати і самостійно проводити міркування конструктивного характеру у межах аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії;
- розв'язувати «за допомогою циркуля і лінійки» задачі на «побудову» першого рівня складності, елементарні задачі на «побудову», використовувати для розв'язання задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» метод трикутників, метод геометричних місць точок, метод рухів та метод подібності;
- розв'язувати задачі на «побудову» лише «за допомогою циркуля»;
- розв'язувати задачі на «побудову» лише за допомогою «односторонньої лінійки»;
- розв'язувати задачі на «побудову» «за допомогою «рухомого» прямого кута»;
- проводити конструктивні доведення існування певних планіметричних і стереометричних фігур у межах аксіоматичної теорії О. В. Погорєлова евклідової стереометрії;
- виконувати стереометричні «побудови» на підставі аксіоматики теорії «побудов» у тривимірному евклідовому просторі;
- розв'язувати конструктивного характеру позиційні задачі паралельного проєктування на позиційно повному зображенні.

Знання, вміння та навички, сформовані здобувачем вищої освіти як результат опанування курсу «Конструктивні аспекти евклідової геометрії», сприятимуть поглибленому оволодінню контентом таких, передбачених освітньою програмою, курсів як методика навчання математики в старшій загальноосвітній школі, проєктування дистанційних курсів, наукові засади сучачних курсів алгебри і початків математичного аналізу закладів загальної середньої освіти, методика навчання математики в закладах вищої освіти, історія і методологія математики, впевненій подальшій професійній діяльності та вдалому подальшому навчанню на більш високому рівні освіти.

Навчально-тематичний план та структура навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Загальне поняття про конструктивізм у сучасній математиці.

Тема 1. Конструктивні характеристики поняття про аксіоматику.

Конструктивні та не конструктивні міркування у межах аксіоматичної теорії

Сучасне поняття про аксіоматику та аксіоматичну теорію. Формальні та неформальні аксіоматики. Приклади. Аксіоматики, що містять допоміжні множини серед основних неозначуваних множин. Різні точки зору на поняття про конструктивні характеристики аксіоматики. Співвідношення між аксіоматиками. Приклади. Приклади умовиводів різних аксіоматичних теорій як конструктивного, так і не конструктивного характеру.

Змістовий модуль 2. Елементарна геометрія як конструктивна складова евклідової геометрії

Тема 2. Елементарна евклідова геометрія як конструктивна складова аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії

Аксіоматика Д. Гільберта евклідової геометрії, основний принцип її побудови. Геометрія групи аксіом приналежності. Геометрія груп аксіом приналежності і порядку. Геометрія перших трьох груп аксіом. Абсолютна геометрія. Аксіома паралельних та твердження, еквівалентні до неї. Конструктивний характер аксіоматики приналежності та її теорії у межах аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії. Поняття про елементарну геометрію. Міркування аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії, які не відносяться до елементарної геометрії. Зразки проведення конструктивних і не конструктивних міркувань у межах аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії.

Тема 3. Елементарна геометрія як конструктивна складова аксіоматичної теорії О. В. Погорєлова евклідової геометрії. Концепція елементарної геометрії у сучасних програмах і підручниках з математики для закладів загальної середньої освіти України

Аксіоматика О. В. Погорєлова евклідової геометрії як така аксіоматика, що серед основних неозначуваних множин, як допоміжну неозначувану множину, містить множину дійсних чисел. Загальна характеристика конструктивних аспектів аксіоматики О. В. Погорєлова евклідової геометрії («науковий» варіант та «шкільний» варіант) та відповідної аксіоматичної теорії. Поняття про елементарну геометрію у межах аксіоматичної теорії О. В. Погорєлова евклідової геометрії. Аналіз сучасних програм з математики та сучасних підручників з математики для закладів загальної середньої та передвищої освіти України щодо ступеню відтворення в них конструктивних аспектів евклідової геометрії.

Змістовий модуль 3. Аксіоматичні теорії «побудов» на евклідовій площині за допомогою різних інструментів

Тема 4. Аксіоматика теорії «побудов» на евклідовій площині «за допомогою циркуля і лінійки» як канонічне продовження аксіоматики евклідової планіметрії

Умовні «побудови» на евклідовій площині «за допомогою циркуля і лінійки» і побудови за допомогою циркуля і лінійки у кресленні. Повнота аксіоматики евклідової планіметрії. Необхідність побудови саме канонічного продовження аксіоматики евклідової планіметрії для створення аксіоматики теорії «побудов» на евклідовій площині «за допомогою циркуля і лінійки» і відповідної аксіоматичної теорії. Можливість (і існування) різних аксіоматик «циркуля і лінійки», їхня еквівалентність. Традиційна загальна схема розв’язання планіметричної задачі на «побудову за допомогою циркуля і лінійки», характеристика всіх її етапів. Конструктивний характер постановки і розв’язання задачі на «побудову за допомогою циркуля і лінійки». Точка зору на конструктивні аспекти евклідової планіметрії лише як на задачі на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» та її спростування. Елементарні планіметричні задачі на «побудову за допомогою циркуля і лінійки». Метод трикутників розв’язання планіметричних задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки». Метод геометричних місць точок і особливості його застосування. Застосування рухів і перетворень подібності евклідової площини для розв’язання планіметричних задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки».

Тема 5. Аксіоматики теорій «побудов» на евклідовій площині за допомогою різних «інструментів»

Аксіоматика теорії «побудов» на евклідовій площині «за допомогою циркуля» як канонічне продовження аксіоматики евклідової планіметрії. Відповідна аксіоматична теорія. Аксіоматика теорії «побудов» на евклідовій площині «за допомогою лише лінійки» («односторонньої лінійки») як канонічне продовження аксіоматики евклідової планіметрії. Відповідна аксіоматична теорія. Аксіоматика теорії «побудов» на евклідовій площині «за допомогою двосторонньої лінійки» як канонічне продовження аксіоматики евклідової планіметрії. Відповідна аксіоматична теорія. Інші використовувані набори «інструментів».

Змістовий модуль 4. Теорії «побудов» евклідової стереометрії

Тема 6. Різні точки зору на «побудови» у евклідовому просторі

Погляд на стереометричні «побудови» як на теореми існування конструктивного характеру у межах евклідової стереометрії. Виокремлення таких спеціальних умов визначення існування певних геометричних фігур, які можна прийняти за аксіоми теорії «побудов» у евклідовому просторі.

Відповідне канонічне продовження аксіоматики евклідової стереометрії. «Побудови» у евклідовому просторі за допомогою спеціальних «інструментів». «Побудови» зображень стереометричних фігур та «побудови» за зображеннями.

Тема 7. Задачі на побудову зображень просторових фігур на площині за методом паралельного проєктування як задачі конструктивного характеру

Загальне поняття про паралельне проєктування на площину у напрямку прямої у евклідовій геометрії та його основні характеристики. Поняття про паралельну проєкцію та зображення геометричної фігури. Конструктивні аспекти теорії «побудов» зображень за методом паралельного проєктування геометричних фігур на площині у евклідовій геометрії. Теоретичні зв'язки геометрії і креслення, геометрії і теорії ілюстрування стереометричних міркувань при викладанні евклідової стереометрії.

Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин									
	Денна форма					Заочна форма				
	усього	л	п	сем.	с.р., у тому числі інд. р.	усього	л	п	сем.	с.р., у тому числі інд. р.
Змістовий модуль 1. Загальне поняття про конструктивізм у сучасній математиці.										
Тема1. Конструктивні	10	2	-	-	8	10	2	-	-	8

характеристики поняття про аксіоматику. Конструктивні та не конструктивні міркування у межах аксіоматичної теорії										
Разом за змістовим модулем 1	10	2	-	-	8	10	2	-	-	8
Змістовий модуль 2. Елементарна геометрія як конструктивна складова евклідової геометрії										
Тема 2. Елементарна евклідова геометрія як конструктивна складова аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії	12	2	2	-	8	18	-	-	-	18
Тема 3. Елементарна геометрія як конструктивна складова	26	2	4	4	16	20	-	2	-	18

аксіоматичної теорії О. В. Погорєлова евклідової геометрії. Концепція елементарної геометрії у сучасних програмах і підручниках з математики для закладів загальної середньої освіти України										
Разом за змістовим модулем 2	38	4	6	4	24	38	-	2	-	36
Змістовий модуль 3. Аксіоматичні теорії «побудов» на евклідовій площині за допомогою різних інструментів										
Тема 4. Аксіоматика теорії «побудов» на евклідовій площині «за допомогою циркуля і лінійки» як канонічне продовження аксіоматики	22	2	6	-	14	16	-	2	-	14

евклідової планіметрії										
Тема 5. Аксіоматики теорій «побудов» на евклідовій площині за допомогою різних «інструментів»	10	-	-	2	8	16	2	-	-	14
Разом за змістовим модулем 3	32	2	6	2	22	32	2	2	-	28
Змістовий модуль 4. Теорії побудов евклідової стереометрії										
Тема 6. Різні точки зору на «побудови» у евклідовому просторі	14	2	-	-	12	18	-	-	-	18
Тема 7. Задачі на побудову зображень просторових фігур на площині за методом паралельного проєктування як задачі конструктивного	26	-	8	4	14	22	-	-	4	18

характеру										
Разом за змістовим модулем 4	40	2	8	4	26	40	-	-	4	36
Усього годин	120	10	20	10	80	120	4	4	4	108

Лекція 1. (2 години)

***Тема*. Загальне поняття про конструктивізм у сучасній математиці**

Мета лекції. Систематизувати знання здобувачів вищої освіти за другим (магістерським) рівнем про аксіоматики та побудовані на їх основі аксіоматичні теорії. Висвітлити теоретичні засади формування у майбутніх викладачів математики закладів загальної середньої освіти та закладів передвищої освіти поняття про конструктивні характеристики певної аксіоматики, про умовиводи відповідної аксіоматичної теорії як конструктивного, так і не конструктивного характеру.

План:

1. Роль і місце конструктивізму у сучасній математиці.
2. Сучасне поняття про аксіоматику і відповідну аксіоматичну теорію. Приклади. Сучасний погляд на математику, як науку про аксіоматичні теорії.
3. Формальні та неформальні аксіоматики. Різні точки зору на поняття про конструктивні характеристики аксіоматики та умовиводи конструктивного характеру відповідної аксіоматичної теорії.

Що ми маємо на увазі під термінами «конструювати», «конструктивний характер», «конструктивізм» у буденному розумінні, у розумінні математики як науки, у історії та філософії математики, при викладанні математики у профільних закладах вищої освіти, при викладанні математики у закладах загальної середньої або передвищої освіти?

При будь-якому розумінні тут мається на увазі можливість отримання результату за допомогою реалізації скінченної кількості конкретних кроків, виходячи зі скінченної кількості передумов. У буденному розумінні, у практичній діяльності людей, по-іншому і бути не може.

Нескінченна кількість, нескінченність як певне єдине ціле – це, насамперед, математичні абстракції, що знаходять своє практичне застосування лише через скінченну кількість своїх скінченних наближень, тобто, лише через так звану ефективну процедуру своєї наближеної реалізації. У до-грецькій та «…грецькій математиці розглядалися лише такі абстрактні поняття – фігури і функції, – які будувалися і визначалися, виходячи з елементарних понять і таких принципів побудов, як проведення відрізків, кіл і тому подібне. Грецькі математики надали алгоритм для обчислення числа π – відношення довжини кола до довжини його діаметра, побудували таблиці для обчислення значень функції синуса, досліджували різноманітні конкретні, конструктивно задані криві. Але довільні криві вони виключали з математики, називали їх механічними. У них не було поняття про довільне дійсне число і, тим паче, про довільну функцію. Математика Давньої Греції була конструктивною.

Отже, математика сьогодення, з її алгоритмічною, конструктивною спрямованістю, буцімто повертається до принципів грецької математики, але, зрозуміло, на підставі усього свого попереднього розвитку . . . » [1, с. 347]. Академік О. Д. Александров, у якості першої характерної особливості математики сьогодення відзначив «зростання ролі алгоритмів і алгоритмічних розв’язків, проникнення їх у такі основи математики, головні поняття яких визначаються алгоритмічно». Він вважав, що «математика стає абстрактною інженерною наукою, яка конструює апарати для розв’язання задач інших наук і практики. У такій якості вона зародилася у Єгипті та Вавілонії і тепер повертається до того ж самого на новому рівні» [1, с. 349] .

Починаючи з першої половини XX століття, сучасну математику найчастіше представляють як науку про аксіоматичні теорії [2, 3]. Одночасно, у дослідженнях з підстав математики було доведено існування математичних теорій, які не можна представити у вигляді аксіоматичних [5, с.385]. І значення подібного відкриття важко переоцінити як з математичної, так і з філософської точки зору.

У той же час, у подальшому, у даному курсі мова буде йти про теорію евклідової геометрії. Вона представляє собою перший з історичної точки зору зразок аксіоматичної теорії, отже, аксіоматизовної математичної теорії. З курсу підстав математики згадаємо, як у сучасному розумінні розглядають таке поняття.

Базу аксіоматичної теорії складає відповідна аксіоматика або рід структур.

Аксіоматикою або родом структур називають текст, що містить

1) назви неозначуваних множин даної аксіоматики і відповідної аксіоматичної теорії;
2) назви неозначуваних відношень даної аксіоматики і відповідної аксіоматичної теорії разом з типізацією цих відношень;
3) перелік аксіом даної аксіоматики і відповідної аксіоматичної теорії.

Вищевказані положення вимагають пояснень.

У якості назв неозначуваних множин аксіоматики можуть виступати довільні слова відповідного алфавіту. З точки зору конструктивної характеристики аксіоматики, суттєвою є потужність множини таких слів. Теоретично, вона може бути довільною. Але у математиці часто прагнуть до найменшої доцільної потужності, головним чином, до скінченної.

Назви неозначуваних відношень даної аксіоматики і відповідної аксіоматичної теорії також можуть бути довільними. Принциповим, знову-таки, є питання про їх кількість. Найчастіше, зрозуміло, прагнуть до їх скінченної кількості, до найменшої доцільної їх скінченної кількості. Типізацією або типовою характеристикою відношення називається вказівка на те, між якими множинами це відношення діє. (Як відомо, відношенням між множинами називається непорожня підмножина декартового добутку даних множин).

У найпростішому варіанті неозначувані відношення аксіоматики діють між неозначуваними множинами цієї аксіоматики. Але, у загальному випадку, розглядають так звану шкалу або башту, побудовану на підставі сукупності неозначуваних множин, як кажуть, над неозначуваними множинами даної аксіоматики. Елементами башти є множини, визначені, а, в силу цього і згруповані, за певними ступенями або поверхами. Перший поверх утворює сукупність неозначуваних множин даної аксіоматики. Другий поверх утворює сукупність всіх підмножин цих неозначуваних множин та сукупність попарних декартових добутків цих неозначуваних множин. Третій поверх містить множини, аналогічним чином утворені на підставі сукупності множин першого і другого поверхів. І подалі. Неозначуваними відношеннями аксіоматики можуть бути відношення між певними елементами башти, побудованої над неозначуваними множинами даної аксіоматики.

Аксіоми вказують на ті властивості неозначуваних множин і неозначуваних відношень даної аксіоматики, які вважаються справедливими за домовленістю, за виключенням будь-яких обгрунтувань. Аксіоматика може містити як скінченну, так і нескінченну кількість аксіом, так звані схеми аксіом, скінченну або нескінченну кількість схем аксіом.

Аксіоматику вважають конструктивною або такою, що має конструктивний характер, якщо вона містить скінченну кількість назв неозначуваних множин, скінченну кількість назв неозначуваних відношень і скінченну кількість аксіом.

Аксіоматику конструктивного характеру часто позначають як

$$\sum\left(m_i;p_j;\alpha_k\right),\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,p};\ k=\overline{1,q}\ \ \left(n,p,q\in N\right),$$

маючи на увазі, що для даної аксіоматики m_i – назви неозначуваних множин, p_j – назви неозначуваних відношень, α_k – аксіоми.

Як відомо з курсу підстав математики, переважна більшість аксіоматик класичної математики є такими, що мають конструктивний характер. Відомо також, що серед різних аксіоматик теорії множин є такі, що містять схеми аксіом, тобто, безліч аксіом, і, в силу цього, не мають конструктивного характеру.

Окреслений вище підхід до конструктивного характеру аксіоматики, фактично, ототожнює конструктивний характер з фінітним. Одночасно, з точки зору конструктивізму, аналізують і окремі аксіоми. Конструктивними за своїм змістом вважають такі аксіоми, які забезпечують існування і однозначну визначеність певної множини (скінченної кількості певних множин) за умови існування певної іншої множини (скінченної кількості інших множин). Одночасно, аксіоми, які забезпечують лише існування множини певного виду, а не існування певної однозначно визначеної множини, і аксіоми, які взагалі не містять ані умовного, ані абсолютного твердження про існування певної множини, вважають не конструктивними за своїм змістом [5. с.49]. Виходячи з подібних міркувань, можна було би вважати конструктивними лише ті аксіоматики виду

$$\sum\left(m_i;p_j;\alpha_k\right),\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,p};\ k=\overline{1,q}\ \ \left(n,p,q\in N\right),$$

всі аксіоми α_k яких є конструктивними за своїм змістом. Подібна точка зору у математиці існує [3], але подібний підхід здається занадто вузьким і, в силу цього, не завжди доцільним.

Для кращого усвідомлення сутності питання, наведемо певні приклади.

1. Аксіоматика бінарного відношення еквівалентності має структуру $\sum\left(m;p;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$. Ця аксіоматика містить

1) назву лише однієї неозначуваної множини, яку позначено буквою m, ця назва співпадає зі словом «множина»;

2) назву лише одного неозначуваного відношення, яке позначено буквою p, звучить як «відношення еквівалентності», має типізацію $p \subset m^2$;

3) три аксіоми: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Аксіома α_1 визначає той факт, що відношення p є рефлексивним, тобто, якщо елемент $a \in m$, то вірно, що $(a;a) \in p$. Аксіома α_2 стверджує, що відношення p є симетричним, якщо для елементів a, $b \in m$ вірно, що $(a;b) \in p$, то вірно і що $(b;a) \in p$. Аксіома α_3 стверджує, що відношення p є транзитивним, якщо для елементів $a,b,c \in p$ вірно, що $(a;b) \in p$ і $(b,c) \in p$, то вірно і, що $(a,c) \in p$. Аксіоми $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ є конструктивними за своїм змістом.

2. Аксіоматика приналежності за Д. Гільбертом [4] відношення приналежності (інцидентності) евклідової площини має структуру $\sum(m_1, m_2; p; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Тут містяться назви двох неозначуваних множин: m_1 – множина точок, m_2 – множина прямих; одне відношення p із назвою «відношення приналежності» (або «відношення інцидентності») і типізацією $p \subset m_1 \times m_2$, якщо для $A \in m_1, l \in m_2, (A,l) \in p$, то пишуть, що $A \in l$; чотири аксіоми. Аксіома α_1 є вимогою того, щоб кожні дві точки були інцидентними до певної прямої: для $\forall\, A, B \in m_1\ \exists\, l \in m_2$, така, що $A \in l$ і $B \in l$. Аксіома α_2 є вимогою того, щоб кожні дві різні точки були інцидентними не більш ніж до однієї прямої: $\forall A, B \in m_1,\ A \not\equiv B$, якщо $A,B \in a$, $A,B \in b$, $a,b \in m_2$, то $a \equiv b$. Аксіома α_3 є вимогою того, щоб кожна пряма була інцидентною принаймні до двох точок: $\forall a \in m_2; \exists\, A, B \in m_1; A \not\equiv B; A \in a$ і $B \in a$. Аксіома α_4 вимагає, щоб

існували принаймні три точки, які не є інцидентними до жодної однієї прямої: $\exists\ A,B,C \in m_1; A \neq B, A \neq C, B \neq C$, такі, що для $\forall a \in m_2$ одночасно не є справедливими твердження про те, що $A \in a; B \in a; C \in a$. Аксіоми $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ за своїм змістом є конструктивними.

Аксіоматики обох прикладів, зрозуміло, мають конструктивний характер у вищенаведеному найбільш широкому розумінні.

Аксіоматична теорія, породжена аксіоматикою $\sum$ або теорія аксіоматики $\sum$, яку найчастіше позначають як $T\left(\sum\right)$ або $T_{\sum}$, містить саму аксіоматику, а також, всі можливі твердження (теореми), отримані з її аксіом виключно за допомогою законів математичної логіки, та всі поняття, які можна за допомогою тієї ж математичної логіки означити через неозначувані поняття даної аксіоматики, або через попередньо означені поняття. При цьому миттєво виникає питання про те, яка логіка мається на увазі.

Якщо у аксіоматиці певної аксіоматичної теорії до назв неозначуваних понять не входять терміни математичної логіки, а її аксіоми не містять правил логічного виведення, то і аксіоматика, і відповідна аксіоматична теорія називаються неформальними (змістовними). І навпаки, якщо певні поняття і аксіоми математичної логіки, що характеризують правила логічного виведення, включені до аксіоматики явним чином, то аксіоматика і відповідна аксіоматична теорія називаються формальними (або дедуктивними). Отже, формальні аксіоматичні теорії утворюються як результат об'єднання аксіоматичної системи логіки з певною змістовною аксіоматичною теорією.

Переважна більшість аксіоматичних теорій класичної математики є неформальними. Їх побудова передбачає використання так званої буденної або інтуїтивної логіки, яка послідовно формується у людини під час опанування математики. Зрозуміло, що цілком природним при цьому є питання про теоретичну можливість і практичні способи перетворення цих неформальних теорій у формальні. Подібні дослідження проводяться у межах математичної логіки, знайомство з ними виходить за межи нашого курсу. Із загальними міркуваннями, покладеними у основу таких досліджень, можна ознайомитися у [5, с.323-336; 3. с.165-190].

Наведені приклади були прикладами аксіоматик неформальних аксіоматичних теорій. Класичні аксіоматики евклідової геометрії, як і ті їх спрощені варіанти, що покладено у основи курсів геометрії закладів загальної середньої освіти, також носять неформальний характер. Отже, у подальшому, будемо вести мову лише про неформальні аксіоматики і відповідні аксіоматичні теорії. Наведена характеристика аксіоматики з точки зору її конструктивного характеру у повному степені також підходить лише для неформальних аксіоматик. Для формальних аксіоматик вона є значно складнішою в силу того, що формальні аксіоматики передбачають використання спеціальної символьної мови, яка також аналізується з точки зору різних підходів до поняття про конструктивний характер [4, с. 165-190].

Приклади аксіоматик, що містять безліч аксіом, виходять за межи даного курсу. Для усвідомлення сутності питання, процитуємо класичну монографію з підстав теорії множин А. Френкеля та І. Бар-Хіллера [5, с. 383–384] «Серед тих математичних теорій, які можна аксіоматизувати, найбільш важливими здаються ті, які з самого початку будуються на підставі скінченної кількості аксіом… Відомо, наприклад, що класичне пропозиційне числення можна аксіоматизувати за допомогою скінченної кількості аксіом, якщо до його правил виведення включено правило підстановки, і не можна аксіоматизувати за допомогою скінченної кількості аксіом, якщо єдиним його правилом виведення є правило modus ponens… Серед різних аксіоматик теорії множин, наприклад, аксіоматики Неймана, Бернайса та Гьоделя мають скінчену кількість аксіом, системи Цермелло та Тарського містять безліч аксіом, доведено, що їх скінченна аксіоматизація є неможливою» [5, с. 384].

Під умовиводами конструктивного характеру у математиці, у межах певної аксіоматичної теорії, мають на увазі умовиводи, отримані на підставі скінченної кількості вихідних даних, у результаті реалізації скінченної послідовності визнаних допустимими кроків міркувань. Отже, міркування конструктивного характеру є можливими і у межах аксіоматичної теорії, яка сама по собі конструктивного характеру не має. Особливе місце серед умовиводів конструктивного характеру грають теореми існування конструктивного характеру, тобто, умовиводи конструктивного характеру, результатом яких є обґрунтування існування у межах відповідної аксіоматичної теорії певного математичного об’єкту. При цьому конструктивним не вважають обґрунтування існування того чи іншого математичного об’єкту, проведене виключно на підставі апеляції до логічної неминучості. Представники такого напрямку філософії математики, як неоінтуіціонізм, взагалі не визнають у математиці іншого існування, ніж існування конструктивного характеру у вищевказаному розумінні. Одночасно, історії математики відома значна кількість випадків, коли обґрунтування існування певного математичного об’єкту на підставі принципу неминучості підказало для доведення такого існування бажані конструктивні шляхи.

Означення аксіоматичної теорії вважають означенням конструктивного характеру, якщо воно виокремлює означуваний об’єкт з більш широкої множини об’єктів за допомогою скінченної кількості ознак, наявність яких допускає ефективну (за скінченну кількість кроків) перевірку. Вважають також, що означення певного математичного об’єкту має конструктивний характер, якщо воно супроводжується конструктивним доведенням існування означуваного об’єкту.

Існує й інша, вельми цікава для майбутніх викладачів математики, точка зору на конструктивізм у математиці. Багато видатних математиків порівнювали (і порівнюють) математику з музикою і вважають, що, «так само, як композитор може підказати учню ідею, як створити симфонію – не просто навчаючи гармонії, а й намагаючись описати, як він сам це зробив, – так і математик повинен на власних прикладах, відкривати своїм учням конструктивне таїнство математичної творчості» [5 , с. 257]. Подібна точка зору на процес навчання математики погано узгоджується з постійним скороченням аудиторних навчальних годин, відведених навчальними планами на опанування даного предмету, та надмірною регламентованістю усіх етапів процесу навчання.

Список використаних і рекомендованих джерел інформації:

1. Александров А. Д. Проблемы науки и позиция учёного. Лениеград: Наука, 1988. 511 с.
2. Бурбаки Н. Архитектура математики. Москва: Знание, 1972. 48 с.
3. Егоров И. П. О математических структурах. Москва: Знание, 1976. 64 с.
4. Столл Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. Москва: Просвещение, 1968. 231 с.
5. Френкель А. А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. Пер. с англ., Москва: Мир, 1966. 556 с.
6. Borceux F. An Axiomatic Approach to Geometry. Geometric Trilogy I//Springer International Publishing. 2014 – 403 p.
7. Blumenthal Leonard M. A. Modern View of Geometry (Dover Books on Mathematics) Paperback. Dover Publications, 2017. 208 p.
8. Smith James T. Methods of Geometry. Wiley-Interscience. Breinigsville, PA USA, 2000. 507 p.

Питання для самоконтролю за змістом лекції 1

1. Що, як правило, мають на увазі під термінами «конструювати», «конструктивний характер», «конструктивізм» у буденному розумінні?
2. Яким чином такі математичні абстракції як «нескінченна кількість», «нескінченність, як певне єдине ціле», найчастіше, знаходять своє практичне застосування?

3. Виключно якого типу абстрактні математичні поняття розглядалися у до-грецькій та грецькій математиці?
4. На підставі чого ми можемо вважати, що математика Давньої Греції була конструктивною?
5. Яку рису сучасної математики академік О. Д. Александров визначив як першу характерну особливість математики сьогодення?
6. Яким чином, починаючи з першої половини двадцятого століття, найчастіше, визначають предмет математики?
7. Що, у сучасному розумінні вважають основою, базою аксіоматичної теорії?
8. Що, у сучасному розумінні, називають аксіоматикою або родом структур?
9. Як можна охарактеризувати назви неозначуваних множин аксіоматики?
10. Як можна охарактеризувати назви неозначуваних відношень аксіоматики? Що таке типізація відношення? Що називають шкалою або баштою, побудованою над неозначуваними множинами даної аксіоматики?
11. Як можна охарактеризувати аксіоми даної аксіоматики?
12. Яку аксіоматику вважають такою, що має конструктивний характер?
13. Які аксіоми вважають конструктивними за своїм змістом?
14. Яку аксіоматику іноді вважають такою, що має конструктивний характер у більш вузькому розумінні?
15. Які можна навести найпростіші приклади аксіоматик конструктивного характеру у широкому розумінні?
16. У якому випадку аксіоматику і відповідну аксіоматичну теорію називають формальними?
17. У якому випадку аксіоматику і відповідну аксіоматичну теорію називають неформальними або змістовними?
18. Формальними чи не формальними є переважна більшість аксіоматичних теорій класичної математики?

19. Де і як використовують формальні аксіоматичні теорії?
20. Які умовиводи у межах певної аксіоматичної теорії називають умовиводами конструктивного характеру?
21. Які обгрунтування існування тих чи інших геометричних фігур у межах певної аксіоматичної теорії вважають теоремами існування конструктивного характеру?
22. Які означення аксіоматичної теорії вважають означеннями конструктивного характеру?

Лекція 2. (2 години)

Тема. **Конструктивна складова аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії. Загальне поняття про елементарну евклідову геометрію.**

Мета лекції. Домогтися усвідомлення студентами конструктивних і не конструктивних аспектів аксіоматики і аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії, сформувати поняття про елементарну евклідову геометрію як конструктивну складову евклідової геометрії.

План:

1. Конструктивний характер сукупності основних неозначуваних понять аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії.
2. Аксіоматика приналежності у аксіоматичній теорії Д. Гільберта евклідової геометрії та її конструктивний характер. Можливість побудови моделі даної аксіоматики на скінченних множинах. Абсолютна несуперечливість даної аксіоматики і відповідної аксіоматичній теорії.
3. Геометрія перших двох груп аксіом аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії, її умовиводи та поняття як конструктивного, так і не конструктивного характеру.
4. Теореми Лежандра у аксіоматичній теорії Д. Гільберта евклідової геометрії.
5. Поняття про елементарну геометрію у складі евклідової геометрії та його відносний характер. Залежність цього поняття від обраної аксіоматики евклідової геометрії.

Як добре відомо, історично, одним з перших зразків аксіоматичної теорії, створеної людством, і історично першим зразком аксіоматичної теорії, який є людським набуттям сьогодення, є аксіоматична теорія евклідової геометрії, розроблена давньогрецьким вченим, геніальним Евклідом, у третьому столітті до нашої ери.

Сучасне поняття про аксіоматику та відповідну аксіоматичну теорію сформувалося у математиці наприкінці дев'ятнадцятого століття під впливом виникнення неевклідової геометрії. З точки зору усвідомлених при цьому нових підходів до сутності такого поняття, аксіоматична теорія Евкліда все більше і більше почала вимагати суттєвого вдосконалення.

Варіант оновленої аксіоматичної теорії евклідової геометрії, розроблений Д. Гільбертом (вперше книгу Д. Гільберта «Grundlagen der geometrie» було видано у 1899 році), історично не був тим першим варіантом, який задовольняє всі вимоги сьогодення. Він став класичним у першу чергу тому, що виявився найбільш зручним. «Д. Гільберту вдалося сконструювати аксіоматику геометрії, розчленовану таким природним чином, що логічна структура геометрії стала цілком прозорою. Таке розчленування аксіоматики дозволяє як сформулювати її аксіоми найбільш простим і стислим чином, так і досліджувати, як далеко можна розвити відповідну теорію, якщо покласти у її основу не всі аксіоми у цілому, а ті чи інші групи аксіом, що відповідають складовим такого розчленування». ([1, с. 23])

Аксіоматика Д. Гільберта евклідової геометрії [1] містить вісім неозначуваних понять. Це основні множини, які мають назви:

M – множина точок;

L – множина прямих;

Π – множина площин;

та основні відношення:

p_1 – інцидентність точок і прямих (приналежність точки до прямої), типізація $p_1 \subset M \times L$;

p_2 – інцидентність точок і площин (приналежність точки до площини), типізація $p_2 \subset M \times \Pi$;

p_3 – « лежати між » для трьох точок (однієї прямої), $p_3 \subset M^3$;

p_4 – конгруентність (рівність) відрізків, $p_4 \subset B^2$, де B – множина всіх відрізків (множина B є елементом шкали, побудованої над множинами M, $L, П$);

p_5 – конгруентність (рівність) кутів, $p_5 \subset K^2$, де K – множина всіх кутів (кутів-каркасів) (множина K є елементом шкали, побудованої над множинами M, $L, П$).

Отже, кількість назв неозначуваних понять даної аксіоматики є скінченною, тобто, сукупність неозначуваних понять даної аксіоматики має конструктивний характер.

Аксіоматика Д. Гільберта евклідової геометрії містить 20 аксіом, (які включають до себе 26 окремих вимог), поділених на 5 груп.

Перша група складається з 8 аксіом, так званих аксіом інцидентності (приналежності), які характеризують властивості неозначуваних відношень p_1 і p_2.

Нехай точка А і пряма a пов'язані між собою відношенням p_1 : $(A,a) \in p_1$. При цьому говорять, що «точка A і пряма a є інцидентними між собою», або, що «точка A належить прямій a », або, що «пряма a проходить через точку A». Всі три висловлювання мають однаковий зміст. Замість позначення $(A,a) \in p_1$ використовують теоретико-множинне позначення виду $A \in a$. (У той же час, аксіоматична теорія Д. Гільберта евклідової геометрії не передбачає усвідомлення прямої як сукупності точок).

Аналогічні твердження мають місце і для відношення p_2 . Якщо $(A,\alpha) \in p_2$, то висловлювання «точка A і площина α є інцидентними між собою», «точка A належить площині α », «площина α проходить через точку A» вважають висловлюваннями однакового змісту, замість позначення

$(A,\alpha)\in p_2$ використовують теоретико-множинне позначення $A\in\alpha$, не уявляючи при цьому площину як сукупність точок.

Аксіоми інцидентності формулюються наступним чином.

α_1. Для будь-яких двох різних точок існує інцидентна до них пряма. (Через будь-які дві різні точки проходить принаймні одна пряма.)

α_2. Для будь-яких двох різних точок існує не більш ніж одна, інцидентна до них, пряма. (Через будь-які дві різні точки проходить не більш ніж одна пряма).

α_3. Кожна пряма є інцидентною принаймні до двох різних точок. Існують три точки, разом не інцидентні до жодної прямої. (Кожна пряма містить принаймні дві різні точки. Існують три точки, які разом не належать до жодної прямої.)

α_4. Будь-які три точки, разом не інцидентні до жодної прямої, є інцидентними до певної площини. Кожна площина є інцидентною принаймні до однієї точки. (Через будь-які три точки, які не належать одній прямій, проходить принаймні одна площина. Кожна площина містить принаймні одну точку).

α_5. Будь-які три точки, які разом не є інцидентними до жодної прямої, є інцидентними не більш ніж до однієї площини. (Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, проходять не більш ніж одна площина).

α_6. Якщо дві точки, які є інцидентними до певної прямої, є інцидентними до певної площини, то кожна точка даної прямої є інцидентною до даної площини. (Якщо дві точки прямої належать певній площині, то і кожна точка цієї прямої належить до даної площині).

α_7. Якщо дві площини є інцидентними до певної спільної точки, то вони є інцидентними принаймні ще до однієї спільної точки. (Якщо дві площини мають спільну точку, то вони мають принаймні ще одну спільну точку).

α_8. Існують чотири точки, разом не інцидентні до жодної площини. (Існують чотири точки, які разом не належать до жодної площини).

Отже, аксіоматика інцидентності аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії має структуру

$$\sum\nolimits_1 \left(M, L, П; p_1, p_2; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8 \right).$$

Зрозуміло, що це аксіоматика конструктивного характеру.

Аксіоматика $\sum_1$ допускає моделювання на сукупності скінченних множин.

Будемо вважати, наприклад, що множина M містить чотири різні букви: $M = \{a, b, c, d\}$. Саме ці букви і лише ці букви будемо вважати точками шуканої моделі евклідового простору. Отже, у такій моделі евклідів простір буде скінченним, буде складатися з чотирьох точок. У якості прямих, елементів множи L, будемо розглядати всі двоелементні підмножини множини M: $L = \{\{a;b\}, \{a;c\}, \{a;d\}, \{b;c\}, \{b;d\}, \{c;d\}\}$. Отже, прямих у даній моделі буде шість. У якості площин, елементів множини $П$, будемо розглядати всі трьохелементні підмножини множини M: $П = \{\{a;b;c\}; \{a;b;d\}; \{a;c;d\}; \{b;c;d\}\}$. Це означає, що дана модель містить точно чотири площини.

Відношення інцидентності p_1 промоделюємо як відношення «бути елементом» між множинами M та L. Так, точка a і пряма $\{a;b\}$ є інцидентними $\left((a; \{a;b\}) \in p_1 \right)$ тому, що буква a є елементом множини $\{a;b\}$ $\left(a \in \{a;b\} \right)$. Точка a і пряма $\{b;d\}$ не є інцидентними $\left((a; \{b;d\}) \notin p_1 \right)$ тому, що буква a не є елементом множини $\{b;d\}$ $\left(a \notin \{b;d\} \right)$.

Відношення інцидентності p_2 промоделюємо як відношення «бути елементом» між множинами M та Π. Так, точка a і площина $\{a;c;d\}$ є інцидентними $\left(\left(a;\{a,c,d\}\right)\in p_2\right)$ тому, що буква a є елементом множини $\{a;c;d\}\left(a\in\{a;c;d\}\right)$; точка a і площина $\{b;c;d\}$ не є інцидентними $\left(\left(a;\{b,c,d\}\right)\notin p_2\right)$ тому, що буква a не є елементом множини $\{b;c;d\}\left(a\notin\{b;c;d\}\right)$.

Легко переконатися у тому, що при подібному моделюванні твердження всіх аксіом $\alpha_i, i=\overline{1,8}$ будуть справедливими в силу елементарних властивостей скінченних множин.

Розглянемо, наприклад, твердження аксіоми α_5. У цій аксіомі мова йде про довільні три точки, які разом не є інцидентними до жодної прямої. Але, згідно проведеного моделювання, кожна з шести прямих є інцидентною лише до двох різних точок. Отже, можна взагалі розглядати три довільні точки. Згідно принципу побудови множини Π, кожні три різні точки, три різних елемента множини M , утворюють її певну, однозначно визначену, трьохелементну підмножину, яка, згідно наведених означень, і є тією єдиною площиною, що містить три різні розглянуті точки. Іншої площини, яка має таку ж властивість, у множині Π не існує.

Справедливість тверджень інших аксіом $\left(\alpha_i, i=\overline{1,4}, i=\overline{6,8}\right)$ перевірте аналогічним чином самостійно.

Можливість побудови моделі аксіоматики Σ_1 на скінченних множинах забезпечує її абсолютну несуперечливість. Теорія аксіоматики Σ_1 містить лише скінченну кількість тверджень. Справедливість кожного з них можна продемонструвати, а, отже, і передбачити, за допомогою побудованої моделі.

Так, як відомо, у евклідовій геометрії дві прямі називають паралельними, якщо вони належать одній площині і не перетинаються, паралельні прямі існують, через будь-яку точку, що не належить даній прямій, проходить пряма, паралельна до даної, і лише тільки одна.

За означенням, у аксіоматичній теорії аксіоматики $\sum_1$, пряма є інцидентною до площини, якщо кожна точка цієї прямої є інцидентною до цієї площини. І означення паралельних прямих, і твердження про їх існування є висловлюваннями, які, безумовно, мають зміст у аксіоматичній теорії аксіоматики $\sum_1$, у обох випадках мова йде виключно про точки, прямі, площини та відношення інцидентності між ними. Але поняття про паралельні прямі не є поняттям теорії аксіоматики $\sum_1$, бо існування таких прямих у $\mathrm{T}\left(\sum_1\right)$ довести неможливо: у побудованій моделі паралельних прямих не існує вже тому, що кожна площина тут складається з трьох різних точок, а кожна пряма – з двох. Спираючись на побудовану модель, можна було би припустити, що поняття про паралельні прямі не має сенсу взагалі. Але добре відомими для всіх є моделі аксіоматики $\sum_1$ у межах теорій інших аксіоматик, які вже забезпечують існування паралельних прямих у розумінні наведеного означення. Згадайте, що це за моделі.

З іншого боку, у евклідовій геометрії дві прямі називають мимобіжними, якщо не існує жодної площини, яка їх обидві містить, до якої ці обидві прямі є інцидентними. Згідно вищенаведених міркувань, поняття про мимобіжні прямі є поняттям теорії аксіоматики $\sum_1$. У побудованій теорії мимобіжні прямі існують. Це, наприклад, прямі $\{a;b\}$ і $\{c;d\}$. Більш за це, у наведеній моделі, для кожної прямої, очевидно, (поясніть, чому очевидно), існує мимобіжна до неї пряма. Звідси випливає припущення про те, що факт існування мимобіжних прямих є теоремою теорії аксіоматики $\sum_1$, поняття про мимобіжні прямі є поняттям аксіоматики $\sum_1$.

Конструктивний характер аксіоматики $\sum_1$ і можливість побудови її моделі на скінченних множинах гарантує існування конструктивного характеру умовиводів для всіх тверджень її теорії.

Наприклад, у теорії аксіоматики $\sum_1$, насправді, є справедливою наступна теорема:

Теорема. У теорії аксіоматики $\sum_1$ існує пара мимобіжних прямих.

Доведення

1. Згідно аксіоми α_8, у евклідовому просторі існують чотири різні точки, нехай для визначеності, точки A, B, C і D, які разом не є інцидентними до жодної площини.

2. Згідно аксіоми α_1, існує пряма, яка є інцидентною до точок *A* і *B*. Позначимо цю пряму через *AB*.

3. Згідно аксіоми α_1, існує пряма, яка є інцидентною до точок *C* і *D*. Позначимо цю пряму через CD.

4. Припустимо, існує площина α, до якої обидві прямі *AB* і *CD* є інцидентними. Але тоді, згідно відповідного означення, інцидентними до площини α є і точки A, B, C і D, що суперечить їх вибору відповідно до аксіоми α_8.

Отже, прямі *AB* і CD є мимобіжними. Існування мимобіжних прямих в аксіоматичній теорії аксіоматики $\sum_1$ обґрунтовано за допомогою міркувань конструктивного характеру.

Аксіоматика $\sum_1$, як і аксіоматична теорія аксіоматики $\sum_1$ є складовими всієї аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії, тобто безпосередньо евклідової геометрії.

Друга група аксіом аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії містить чотири аксіоми, які мають назву аксіом порядку і, головним чином, характеризують властивості неозначуваного відношення p_3 – відношення «лежати між» для трьох точок однієї прямої.

Як відомо, відношення p_3 має типізацію $p_3 \subset M^3$. Якщо впорядкована трійка точок $A,B,C \in M$ входить до відношення p_3 $\left(\left(A,B,C\right) \in p_3\right)$, то говорять, що точка B лежить між точками A і C, використовують позначення $A-B-C$.

Формулювання аксіом порядку мають наступний вид:

β_1. Якщо точка B лежить між точками A і C $\left(A-B-C\right)$, то, одночасно, справедливими є твердження а) точки A,B,C є різними; б) точки A,B,C належать одній прямій; в) точка B лежить між точками C і A $\left(C-B-A\right)$.

β_2. Для будь-яких двох різних точок A і B існує принаймні одна така точка C, що точка B лежить між точками A і C $\left(A-B-C\right)$.

Аксіома β_2 має назву аксіоми необмеженого продовження прямої. Мова, зрозуміло, йде про пряму AB, інцидентну до точок A і B, однозначне існування якої забезпечено аксіомами α_1 і α_2.

β_3. Серед будь-яких трьох різних точок, інцидентних до однієї прямої, не більш ніж одна лежить між двома іншими.

Аксіоми $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ носять назву лінійних аксіом порядку. Формулюванню аксіоми β_4 передує наступне означення відрізка. Систему з двох різних точок A і B називають відрізком і позначають AB чи BA. Точки A і B називають кінцями відрізка AB, точки, що лежать між кінцями відрізка, називають точками відрізка AB. Всі інші точки прямої, яка проходять через точки A і B, називають точками, що лежать поза відрізком AB.

β_4. Нехай точки A,B,C, не інцидентні до жодної однієї прямої, є інцидентними до площини α, пряма a площини α не є інцидентною до жодної з точок A,B,C, але вона є інцидентною до певної точки відрізка AB. Тоді пряма a є інцидентною або до певної точки відрізка AC, або до певної точки відрізка BC.

Аксіома β_4 носить назву аксіоми Паша на ім'я математика М. Паша, який, мабуть, вперше, усвідомив необхідність доповнення системи аксіом Евкліда аксіомами, які в аксіоматиці Д. Гільберта утворюють групу аксіом порядку.

У результаті, аксіоматика перших двох груп аксіом аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії має структуру

$$\sum\nolimits_2 \left(M, L, П; p_1, p_2, p_3; \alpha_i, i = \overline{1,8}, \beta_j, j = \overline{1,4} \right)$$

Згідно наведених означень, це аксіоматика конструктивного характеру.

У той же час, у аксіоматичній теорії аксіоматики $\sum_2$, як результат використання аксіом аксіоматики $\sum_2$ скінченну кількість разів, можна обґрунтувати, що

1) на кожній прямій, за умови наявності на ній довільної скінченної кількості різних точок, існує принаймні ще одна точка, відмінна від даних;
2) на кожному відрізку існує принаймні одна внутрішня точка, за умови наявності на відрізку довільної скінченної кількості різних точок, на ньому існує принаймні ще одна точка, відмінна від даних;
3) на кожній площині, за умови наявності на ній довільної скінченної кількості різних точок, існує принаймні ще одна точка, відмінна від даних;

і аналогічні твердження, і подалі.

Подібні факти свідчать про те, що аксіоматику $\sum_2$ вже не можна промоделювати у теорії лише скінченних множин.

Теорія аксіоматики $\sum_2$ містить поняття про безліч точок, безліч прямих, безліч інших геометричних фігур, обґрунтування існування таких понять вимагає використань відповідних аксіом аксіоматики $\sum_2$ нескінченну кількість разів. Отже, теорія аксіоматики $\sum_2$ містить умовиводи як конструктивного, так і не конструктивного характеру. (Наприклад, твердження про те, що кожний відрізок має принаймні одну внутрішню точку, є твердженням конструктивного характеру. Твердження про те, що кожний відрізок має безліч внутрішніх точок, не є твердженням конструктивного характеру).

Аксіоматика $\sum_2$, разом з конструктивного характеру умовиводами її теорії, тобто, твердженнями її теорії, справедливість яких у даній теорії можна обґрунтувати за допомогою міркувань конструктивного характеру, та тими поняттями її теорії, існування яких у межах даної теорії можна обґрунтувати за допомогою міркувань конструктивного характеру, утворює так звану елементарну складову аксіоматичної теорії аксіоматики $\sum_2$.

Група аксіом конгруентності аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії містить п'ять аксіом, які, головним чином, описують основні неозначувані поняття p_4 – конгруентність відрізка відрізку і p_5 – конгруентність кута куту. (Поняття про кут-каркас та про плоский кут вводяться у теорії аксіоматики $\sum_2$. Обидва поняття мають конструктивний характер).

Аксіоми цієї групи формулюються наступним чином.

γ_1. Для довільного відрізка AB, довільної прямої a , довільної точки A', що належить прямій a (є інцидентною до прямої a), на прямій a, як по одну, так і по іншу сторону відносно точки A', існує така точка B' (точка B' також є інцидентною до прямої a), що відрізок $A'B'$ є конгруентним (дорівнює) відрізку AB.

Як відомо, бінарне відношення конгруентності (рівності) відрізків p_4, має типізацію: $p_4 \subset B^2$, де B – множина всіх відрізків. Умову $\left(AB, A'B'\right) \in p_4$, яка означає, що відрізки AB і $A'B'$ пов'язані між собою відношенням p_4, є конгруентними (рівними) між собою, за домовленістю записують як $AB = A'B'$. Згідно означення відрізка, для його позначення вказівка порядку його вершин не є суттєвою, поняття «відрізок AB » і «відрізок BA» мають однаковий зміст, отже, однаковий зміст мають і твердження: $AB = A'B'$, $BA = A'B'$, $BA = B'A'$, $AB = B'A'$.

Аксіому γ_1 називають аксіомою про відкладання на даній прямій, відрізка, що дорівнює даному.

γ_2. Якщо відрізок $A'B'$ і відрізок $A''B''$ є конгруентними до одного й того ж відрізка AB, то відрізок $A'B'$ є конгруентним до відрізка $A''B''$. (Якщо вірно, що $A'B' = AB$ і $A''B'' = AB$, то вірно, що $A'B' = A''B''$).

γ_3. Якщо AB і BC є відрізками певної прямої a, які не мають спільних внутрішніх точок, а $A'B'$ і $B'C'$ є аналогічними відрізками (не мають спільних внутрішніх точок) тієї ж самої прямої a, або іншої прямої a', і при цьому $AB = A'B'$ і $BC = B'C'$, то $AC = A'C'$.

Аксіому γ_3 називають аксіомою додавання відрізків. Аксіоми $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ називають лінійними аксіомами третьої групи аксіом аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії.

Аксіому γ_4 називають аксіомою про відкладання кута, що дорівнює даному, від даного променю у задану півплощину. Мова йде про кут- каркас, який у теорії аксіоматики $\sum_2$ визначено як систему двох різних променів, що не належать одній прямій і мають спільний початок. (Розгорнутий кут, таким чином, у якості кута тут не розглядається). Промені, традиційно, називають сторонами кута, а їх спільний початок − вершиною кута. Якщо кут-каркас утворено променями h і k, то його позначають як $\sphericalangle(h;k)$. Згідно наведеного означення кута-каркаса, при його позначенні порядок його старін не є суттєвим. Отже, вважають, що позначення $\sphericalangle(h;k)$ і $\sphericalangle(k;h)$ мають однаковий зміст.

Бінарне відношення конгруентності (рівності) кутів, p_5, має типізацію $p_5 \subset K^2$, де K − множина всіх кутів-каркасів. Умову $\left(\sphericalangle(h;k), \sphericalangle(p;q)\right) \in p_5$, яка означає, що кути-каркаси $\sphericalangle(h;k)$ і $\sphericalangle(p;q)$ є конгруентними (рівними) між собою, за домовленістю, записують як $\measuredangle(h;k)=\measuredangle(p;q)$. При цьому, з вищенаведеного зрозуміло, що твердження $\measuredangle(h;k) = \measuredangle(p;q)$; $\measuredangle(k;h)=\measuredangle(p;q)$; $\measuredangle(k;h)=\measuredangle(q;p)$, $\measuredangle(h;k)=\measuredangle(q;p)$ мають однаковий зміст.

γ_4: Нехай на довільній площині α задано довільний кут-каркас $\measuredangle(h;k)$, пряма a є довільною прямою тієї ж площини α або іншої довільної площини α', промінь p є довільним променем прямої a. Пряма a розділяє, відповідно, площину α або площину α' на дві півплощини, визначено одну з них. Існує один і лише один такий промінь q, початок якого співпадає з початком променя p, всі внутрішні точки якого належать визначеній півплощині, що кут $\measuredangle(h;k)$ є конгруентним до кута $\measuredangle(p;q)$: $\measuredangle(h;k)=\measuredangle(p;q)$. Кожний кут-каракас вважається конгруентним сам до себе.

Кут-каркас з вершиною у точці B, одна сторона якого містить точку A, а інша – точку C, позначають також як $\measuredangle ABC$ або, що те ж саме, як $\measuredangle CBA$.

Поняття про трикутник є поняттям аксіоматичної теорії аксіоматики $\sum_2$. Трикутником (трикутником-каркасом) називають геометричну фігуру, утворену трьома точками, що не лежать на одній прямій, і трьома відрізками з кінцями у цих точках. Точки, традиційно, називають вершинами трикутника, а відрізки – його сторонами. Якщо точки A, B, C є вершинами трикутника, трикутник позначають як $\triangle ABC$.

У відповідності до вищевказаних означень і позначень, аксіому γ_5 формулюють наступним чином:

γ_5: Якщо для трикутників ABC і $A'B'C'$ мають місце конгруентності $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, то справедливою є і конгруентність $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$.

Аксіоми γ_4 і γ_5, за цілком природних обставин, називають площинними аксіомами конгруентності.

Як підсумок, аксіоматика перших трьох груп аксіом аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії має структуру

$$\sum\nolimits_3 \left(M, L, \Pi; p_1, p_2, p_3, p_4, p_5; \alpha_i, i = \overline{1,8}; \beta_j, j = \overline{1,4}; \gamma_k, k = \overline{1,5} \right).$$

Зрозуміло, що, згідно наведених означень, аксіоматика $\sum_3$ має конструктивний характер. Зрозуміло, також, що $\sum_1 \subset \sum_2 \subset \sum_3$, аксіоматика $\sum_2$ є канонічним продовженням аксіоматики $\sum_1$, аксіоматика $\sum_3$ є канонічним продовженням аксіоматики $\sum_2$. Звідси випливає, що аксіоматична теорія аксіоматики $\sum_1$ у повному обсязі входить до аксіоматичної теорії аксіоматики $\sum_2$, аксіоматична теорія аксіоматики $\sum_2$ у повному обсязі входить до аксіоматичної теорії аксіоматики $\sum_3$.

Але це, автоматично, не означає, що теорія аксіоматики $\sum_3$, як і теорія аксіоматики $\sum_2$ містить умовиводи не лише конструктивного, а й не конструктивного характеру. Аксіоматика $\sum_3$ утворюється з аксіоматики $\sum_2$ як результат доповнення аксіоматики $\sum_2$ назвами двох нових неозначуваних відношень та аксіомами $\gamma_k, k = \overline{1,5}$. Теоретично, серед аксіом $\gamma_k, k = \overline{1,5}$ можуть бути твердження, які визначають такі властивості понять аксіоматичної теорії аксіоматики $\sum_2$, що дозволяють замінити умовиводи не конструктивного характеру теорії $\mathrm{T}\left(\sum_2\right)$ умовиводами вже конструктивного характеру теорії $\mathrm{T}\left(\sum_3\right)$, зрозуміло, без зміни відповідних підсумкових висновків. Але у даному випадку, як свого часу було обґрунтовано, подібного не відбувається. Аксіоматична теорія аксіоматики $\sum_3$ включає до себе всі умовиводи не конструктивного характеру аксіоматики $\sum_2$. Замінити їх умовиводами конструктивного характеру теорії аксіоматики $\sum_3$

неможливо, теорія аксіоматики $\sum_3$ містить умовиводи як конструктивного, так і не конструктивного характеру, умовиводи конструктивного характеру утворюють її елементарну складову.

Майже всі умовиводи елементарної складової аксіоматичної теорії аксіоматики $\sum_3$ входять до традиційного змісту курсів геометрії закладів загальної середньої освіти. До таких умовиводів, зокрема, відноситься факт існування паралельних прямих. (Як було пояснено раніше, поняття про паралельні прямі є поняттям, навіть, аксіоматичної теорії аксіоматики $\sum_1$, але факт існування таких прямих у теорії аксіоматики $\sum_1$ обґрунтувати неможливо).

Четверта група аксіом аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії має назву групи аксіом паралельності, але містить лише одну аксіому, так звану аксіому паралельності.

p: Для кожної точки A, що не належить прямій a, у площині, яка містить точку A і пряму a, існує не більш ніж одна пряма, що проходить через точку A паралельно до прямої a.

За своїм змістом ця аксіома не має конструктивного характеру. Вона набуває конструктивного характеру лише після свого приєднання до аксіоматичної теорії аксіоматики $\sum_3$.

П'ята група аксіом аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії має назву групи аксіом неперервності і складається з наступних двох аксіом.

δ_1: Для двох довільних відрізків AB і CD на прямій, що містить відрізок AB, існує скінченна кількість таких точок $A_1, A_2, \ldots, A_n \left(n \in N\right)$, що кожний з відрізків AA_1, A_1A_2, …, $A_{n-1}A_n$ є конгруентним до відрізка CD і справджуються твердження $A - A_1 - A_2$, $A_1 - A_2 - A_3$, …, $A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$, $A - B - A_n$.

δ_2: Якщо на довільній прямій a задано таку нескінченну послідовність відрізків A_1B_1, A_2B_2,..., що кінці кожного наступного відрізка є внутрішніми точками відрізка попереднього, і, більш за це, для кожного відрізка CD серед відрізків даної послідовності існує такий відрізок A_nB_n, що $A_nB_n <$ CD, то пряма a містить точку M, яка є спільною внутрішньою точкою всіх відрізків даної послідовності.

Поняття «більше» (« > ») і «менше» (« < ») для відрізків (і для кутів) належать теорії аксіоматики $\sum_3$.

Група аксіом неперервності дозволяє охарактеризувати так звану властивість неперервного розташування точок на прямій, а також, побудувати теорії вимірювання відрізків і кутів.

Виходячи з міркувань історичного характеру аксіому δ_1 називають аксіомою Архімеда, а аксіому δ_2 – аксіомою Кантора. За своїм змістом аксіома Кантора, безумовно, не носить конструктивного характеру. У певному розумінні можна стверджувати, що такого характеру не носить і аксіома Архімеда.

Аксіоматика всіх груп аксіом аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії , за виключенням аксіоми паралельності, має структуру

$$\sum\nolimits^{*}\left(M, L, \Pi; p_1, p_2, p_3, p_4, p_5; \alpha_i, i=\overline{1,8}; \beta_j, j=\overline{1,4}; \gamma_k, k=\overline{1,5}; \delta_1; \delta_2\right).$$

Як відомо з курсу підстав математики, вона називається аксіоматикою абсолютної геометрії. Її теорія $\mathrm{T}\left(\sum^{*}\right)$ є спільною складовою як тієї теорії, що має назву евклідової геометрії, так і тієї теорії, що має назву неевклідової геометрії Лобачевського.

Згідно наведених означень, аксіоматика $\sum^{*}$ є аксіоматикою конструктивного характеру. Але не всі її аксіоми є конструктивними за своїм змістом. Теорія $\mathrm{T}\left(\sum^{*}\right)$ містить умовиводи як конструктивного, так і не конструктивного характеру. Умовиводи конструктивного характеру теорії $\mathrm{T}\left(\sum^*\right)$ утворюють її так звану елементарну складову.

Виходячи як з логічних, так і з історичних міркувань, важливе місце у $\mathrm{T}\left(\sum^*\right)$, тобто, у абсолютній геометрії, займають теореми, що мають назву теорем Лежандра. Як відомо з курсу підстав математики, ці теореми формулюються наступним чином.

Перша теорема Лежандра: Сума кутів довільного трикутника не перевищує суми двох прямих кутів.

Друга теорема Лежандра: Якщо існує трикутник, сума кутів якого дорівнює сумі двох прямих кутів, то сума кутів кожного трикутника дорівнює сумі двох прямих кутів.

Доведення цих теорем у $\mathrm{T}\left(\sum^*\right)$ є достатньо складним і вимагає для своєї реалізації використання аксіом неперервності, принаймні, аксіоми Архімеда (див. наприклад, [3]). Отже, ці теореми не відносять до елементарної складової теорії $\mathrm{T}\left(\sum^*\right)$.

Повна аксіоматика аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії має структуру

$$\sum\left(M,L,\Pi;\, p_t, t=\overline{1,5};\, \alpha_i, i=\overline{1,8;};\, \beta_j, j=\overline{1,4;}\, \gamma_k, k=\overline{1,5;}\, p, \delta_1; \delta_2\right).$$

Вона є канонічним продовженням аксіоматики абсолютної геометрії $\sum^*$. $\mathrm{T}\left(\sum\right)$, як і $\mathrm{T}\left(\sum^*\right)$, містить умовиводи як конструктивного, так і не конструктивного характеру. Умовиводи конструктивного характеру аксіоматичної теорії $\mathrm{T}\left(\sum\right)$ утворюють елементарну складову теорії $\mathrm{T}\left(\sum\right)$, так звану елементарну евклідову геометрію відповідно до аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії.

Приєднання до аксіоматики $\sum^*$ абсолютної геометрії евклідової аксіоми паралельності p дозволяє у аксіоматичній теорії аксіоматики $\sum$

конструктивним чином довести теорему про те, що сума кутів довільного трикутника дорівнює двом прямим кутам (відповідне доведення міститься у кожному підручнику з геометрії для учнів 7-их класів закладів загальної середньої освіти, математичні й методичні недоліки різних варіантів таких доведень зараз залишимо поза межами обговорення). Звідси, як безпосередні наслідки, випливають вже конструктивні обґрунтування справедливості обох теорем Лежандра.

Цей факт є чудовим прикладом того, що при переході від певної аксіоматики до її канонічного продовження може звузитися елементарна складова відповідної аксіоматичної теорії.

Наведений приклад неявним чином свідчить про те, що поняття про елементарну евклідову геометрію як конструктивну складову аксіоматичної теорії евклідової геометрії, щодо свого змістового наповнення, має відносний характер. Це змістове наповнення суттєвим чином залежить від тієї аксіоматики, на підставі якої побудовано теорію евклідової геометрії.

Цілком природно, що при побудові курсів геометрії закладів загальної середньої освіти варто прагнути до збільшення у цих курсах міркувань саме конструктивного характеру. З теоретичної точки зору є два шляхи до досягнення подібної мети. По-перше, можна звузити відповідний програмний об’єм матеріалу з евклідової геометрії, вилучивши з нього низку умовиводів не конструктивного характеру. По-друге, можна перетворити частину умовиводів не конструктивного характеру на умовиводи конструктивного характеру за допомогою безпосереднього перенесення таких умовиводів у категорію аксіом або такою загальною зміною системи аксіом, яка надасть можливість замінити відповідні міркування не конструктивного характеру на міркування конструктивного характеру.

Задача розробки відповідного освітнього контенту, знаходження при цьому найоптимальніших варіантів поєднання обох визначених шляхів, є однією з найактуальніших задач методики навчання геометрії у закладах загальної середньої освіти сьогодення, насамперед, з точки зору впровадження у закладах загальної середньої освіти практико-орієнтованого підходу до процесу навчання.

По відношенню до формальних аксіоматичних теорій, у підставах математики існує таке означення: «Формалізована теорія, у якій квантори загальності та існування не беруться від предикатів, називається елементарною теорією» [2, с. 62].

Неформальну аксіоматичну теорію евклідової геометрії Д. Гільберта можна формалізувати шляхом приєднання до її аксіоматики аксіоматики числення предикатів. Доведено той факт, (це стверджується у [2, с. 63]), що формалізована таким чином аксіоматична теорія евклідової геометрії у розумінні вищенаведеного означення елементарною не буде. При цьому, зрозуміло, можна буде вести розмову про її елементарну складову. У будь-якому випадку до такої складово будуть відноситися всі умовиводи конструктивного характеру, отримані на підставі аксіом, конструктивних за своїм змістом.

Список використаних і рекомендованих джерел інформації:

1. Гильберт Д. Основания геометрии. Москва-Ленинград: ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 491 с.
2. Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. Москва: Наука, 1983, 80 с.
3. Егоров И. П. О математических структурах. Москва: Знание, 1976. 64 с.
4. Euclidean geometry URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_geometry
5. Smith James T. Methods of Geometry. Wiley-Interscience. Breinigsville, PA USA, 2000. 507 p.
6. *Simmons Keith. Tarski's logic. In Dov M. Gabbay; John Woods (eds.).* Logic from Russell to Church. *Elsevier, 2009. 574 p.*

7. *Mäenpää Petri Mäenpää. From backward reduction to configurational analysis. In Michael Otte; Marco Panza (eds.).* Analysis and synthesis in mathematics: history and philosophy. *Springer., 1999.* 210 p. ISBN 0-7923-4570-3. *1999*

Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 2

1. Яка математична аксіоматична теорія історично є першою, відомою людству?
2. Коли у математиці сформувалося сучасне поняття про аксіоматику та аксіоматичну теорію, що створило передумови для такого формування?
3. Який варіант оновленої аксіоматичної теорії евклідової геометрії став тим класичним зразком аксіоматичної теорії евклідової геометрії, що задовольняє вимоги сьогодення? Завдяки чому?
4. Охарактеризуйте основні неозначувані поняття аксіоматики евклідової геометрії Д. Гільберта.
5. Охарактеризуйте структуру сукупності аксіом аксіоматики евклідової геометрії Д. Гільберта.
6. Охарактеризуйте першу групу аксіом аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії.
7. Що і на підставі чого можна стверджувати про абсолютну несуперечливість аксіоматики і відповідної аксіоматичної теорії першої групи аксіом аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії?
8. Як, з точки зору конструктивізму можна охарактеризувати аксіоматику і аксіоматичну теорію першої групи аксіом аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії?
9. Охарактерзуйте другу групу аксіом аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії.

10. Як з точки зору конструктивізму можна охарактеризувати аксіоматику і аксіоматичну теорію перших двох груп аксіом аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії?
11. Охарактеризуйте третю групу аксіом аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії.
12. Як з точки зору конструктивізму можна охарактеризувати аксіоматику і аксіоматичну теорію перших трьох груп аксіом аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії?
13. Сформулюйте аксіому паралельності аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії.
14. Охарактеризуйте п'яту групу аксіом аксіоматики Д. Гільберта евклідової геометрії.
15. Що і на підставі чого називають абсолютною геометрією?
16. Охарактеризуйте з точки зору конструктивізму теореми Лежандра у аксіоматичній теорії абсолютної геометрії Д. Гільберта.
17. Як можна охарактеризувати елементарну складову аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії?
18. Які приклади свідчать про те, що поняття про елементарну геометрію як конструктивну складову аксіоматичної теорії евклідорвої геометпії щодо свого змістового наповнення має відносний характер? Чому і як цей факт варто враховувати при побудові курсів геометрії закладів загальної середньої освіти?

Лекція 3. (2 години)

***Тема*. Елементарна геометрія у сучасних програмах і підручниках з геометрії для закладів загальної середньої освіти та закладів передвищої освіти України**

***Мета лекції*:** проаналізувати питання про аксіоматики, явним чи неявним чином покладені у основу сучасних програм і підручників з геометрії для закладів загальної середньої освіти та передвищої освіти України. Усвідомити ступінь відтворення у курсах геометрії для закладів загальної середньої та передвищої освіти конструктивних аспектів евклідової геометрії як елементарної геометрії. Обґрунтувати значення міркувань конструктивного характеру у курсах геометрії для формування ключових компетентностей учнів закладів загальної середньої освіти і закладів передвищої освіти.

План:

1. Стислий загальний огляд питання про аксіоматики евклідової геометрії, покладені у основу сучасних навчальних програм і підручників з геометрії для закладів загальної середньої освіти та закладів передвищої освіти України. Елементарна геометрія як основна складова сучасних курсів геометрії для закладів загальної середньої освіти та закладів передвищої освіти.
2. Загальний огляд аксіоматик О. В. Погорєлова евклідової геометрії.
3. Загальний огляд аксіоматики евклідової геометрії Л. С. Атанасяна, Е. Г. Позняка та співавторів.

Починаючи з часів Евкліда, тобто, з третього століття до нашої ери, кожний систематичний навчальний курс евклідової геометрії, традиційно, будується у вигляді дедуктивної теорії, а саме, у вигляді явним чи неявним чином представленої аксіоматичної теорії. Теоретично, різних аксіоматик і відповідних аксіоматичних теорій евклідової геометрії може існувати безліч. Практично, зрозуміло, розроблено лише скінченну кількість з них. На підставі незначної кількості останніх побудовано навчальні курси евклідової геометрії для закладів середньої освіти. В Україні загальновідомими є навчальні курси евклідової геометрії, теоретичне підґрунтя яких утворюють а) аксіоматика Евкліда у відповідності до його «Початків» [16], неозначуваними множинами якої є множини точок, прямих і площин; б) аксіоматика Д. Гільберта [8], неозначуваними множинами якої також є множини точок, прямих і площин; в) аксіоматика Г. Вейля [3], неозначуваними множинами якої є множина точок і множина векторів; г) аксіоматика А. М. Колмогорова [5], неозначуваними множинами якої є множини точок, прямих і площин, допоміжна неозначувана множина – множина додатних скалярних величин, які називаються відстанями; д) аксіоматика О. Д. Александрова, О. Л. Вернера та В. І. Рижика [1; 3, с.303], неозначуваними множинами якої є множина точок і множина відрізків; е) аксіоматика О. В. Погорєлова [18], неозначуваними множинами якої є множина точок, множина прямих, множина площин та допоміжна неозначувана множина – множина додатних дійсних чисел; є) аксіоматика Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Е. Г. Позняка [3, с. 304–305; 4], неозначуваними множинами якої є множина точок, множина прямих, множина площин, допоміжна неозначувана множина – множина додатних дійсних чисел.

Сучасні навчальні програми з евклідової геометрії для закладів базової середньої освіти (5–9 класи) [14] взагалі не передбачають формування в учнів понять про аксіоми та аксіоматичну теорію, одночасно підкреслюючи доцільність проведення учнями переважно дидактичних міркувань. Такі вимоги важко зрозуміти з точки зору здорового глузду. (Що ж повинно бути прийнятим у якості першооснови подібних дидактичних міркувань? Чому поняття про аксіому, з точки зору його сприйняття, варто вважати складнішим, ніж поняття про теорему, зокрема, про обернену теорему…? Може, для того, щоб для шкільного підручника зайвою стала історія п’ятого постулату Евкліда? Але тоді – це вже не математика, це суперечить історії світового розвитку геометрії як науки. Будемо вважати, що в усьому цьому винна недолугість авторів останнього варіанту відповідних навчальних програм [14] …)

Отже, якщо курс евклідової геометрії будувати на підставі проведення доказових міркувань, як того й вимагають навіть сучасні програми з геометрії для закладів загальної середньої освіти [14], у основу такого курсу, у повному, чи не у повному обсязі, у спрощеній, чи не у спрощеній формі, цілісно, чи фрагментарно, треба покласти певну аксіоматику евклідової геометрії. Виникає питання, яку саме? З математичної й методичної точок зору це питання є дуже складним. За низки об'єктивних обставин, перед науковою спільнотою України питання про створення нової аксіоматики евклідової геометрії, найбільш доцільної з сучасної точки зору для використання у курсах геометрії закладів загальної середньої освіти України, зараз не стоїть. Виходячи з наявності для випускників закладів загальної середньої освіти єдиних державних випробувань з математики (державної підсумкової атестації та зовнішнього незалежного оцінювання) бажано було би зупинитися на визначеному навчальною програмою певному одному варіанті аксіоматики і відповідної аксіоматичної теорії. (Як було показано вище, знайомі освітянам України аксіоматики евклідової геометрії можуть відрізнятися між собою навіть складом назв своїх неозначуваних множин…)

На жаль, авторам відповідних навчальних програм не є притаманною подібна точка зору [14]. Не використовуючи слова «аксіоматика» взагалі, у якості єдиної вимоги до неї вони висувають вимогу того, щоб до складу її неозначуваних понять входили такі поняття як точка, пряма, площина, належати (чого до чого?), лежати між (чого між чим?, де необхідна типізація?). Це означає, що, якщо не вигадувати чогось нового, у основу курсів геометрії закладів загальної середньої освіти можуть бути покладені аксіоматики евклідової геометрії або Д. Гільберта [8], або О. В. Погорєлова [18], або Л. С. Атанасяна та співавторів [3]. Але тут є певні ньюанси.

Аксіоматику Д. Гільберта евклідової геометрії, у неповному обсязі, було покладено в основу відомого шкільного підручника з геометрії А. П. Кісельова [12]. За підручниками А. П. Кісельова опановували основи евклідової геометрії учні реальних шкіл та гімназій царської Росії. Свого часу підручник було перекладено на європейські мови, за ним, відбувалося викладання евклідової геометрії у певній кількості шкіл Європи та Америки. За радянських часів, учні середніх шкіл Радянського Союзу вивчали геометрію за підручниками А. П. Кісельова та за деякими їх спрощеними модифікаціями з 1937 року до часів проведення реформи шкільної математичної освіти під керівництвом А. М. Колмогорова. У 50-ті роки XX століття підручник було доповнено розділами, присвяченими поняттю про вектор, елементам векторної алгебри, поняттю про прямокутну декартову систему координат, сутності метода координат дослідження фігур евклідової геометрії, які було написано Н. О. Глаголєвим. (Одночасно з підручниками А. П. Кісельова, у певних школах навчання відбувалося і за підручниками інших авторів, зокрема, за підручниками Н. О. Глаголєва [9], але кількість подібних шкіл була дуже незначною). На даний час, підручник А. П. Кісельова визнано класичним, здається, освітянами усіх рівнів. У той же час, мабуть, фахівці усіх рівнів є единими в тому, що натепер цей підручник, навіть з додатками Н. О. Глаголєва, не задовольняє всі вимоги сьогодення. (Неспростовним аргументом при цьому, традиційно, є той факт, що підручник А. П. Кісельова не відповідає сучасним навчальним програмам з геометрії.) Варто відзначити також, що, безпосередньо, у підручнику А. П. Кісельова (на відміну від аксіоматичної теорії Д. Гільберта), поняття «лежати між» для трьох точок однієї прямої не розглядалося як одне з основних неозначуваних понять, всі міркування, пов’язані з цим поняттям, проводилися виключно на підставі наочності. Одночасно, у підручнику А. П. Кісельова рівність геометричних фігур означувалась за допомогою так званого «накладання», яке, фактично, у побудованому курсі геометрії грало роль одного з основних неозначуваних понять (знову-таки, на відміну від аксіоматичної теорії Д. Гільберта евклідової геометрії).

У передостанні десятиліття найбільш поширеною в школах України була аксіоматика евклідової геометрії О. В. Погорєлова [18; 19]. Аксіоматика евклідової геометрії Л. С. Атанасяна та співавторів зараз, здається, є найбільш поширеним підгрунтям курсів геометрії закладів середньої освіти Росії. На відміну від аксіоматик Д. Гільберта та О. В. Погорєлова, поняття «накладання» входить до сукупності її неозначуваних понять.

Зараз учні сьомих класів закладів базової загальної середньої освіти України починають опановувати систематичний курс основ евклідової планіметрії за одним з восьми підручників, укладених різними авторами або різними авторськими колективами [2; 6; 7; 10; 11; 15; 20; 21]. Старша середня освіта України є профільною, різні профілі навчання передбачають й різні рівні заглиблення у зміст відповідних курсів математики. Отже, кількість різних підручників зі стереометрії для учнів старшої середньої школи та закладів передвищої освіти є ще більшою.

Зрозуміло, що зміни навчальних програм вимагають і певних змін у змісті відповідних підручників. Реалії, насправді, є такими, що програми змінюються, або, можна сказати, вдосконалюються, значно швидше, ніж підручники. Найчастіше, викладання відбувається за підручниками, які, у певному сенсі, можна вважати вже застарілими. Але все це суттєвим чином не впливає на загальну концепцію навчання.

Лише у незначній кількості вищевказаних підручників (по відношенню до планіметрії – лише у підручнику А. П. Єршової та інших [10], по відношенню до стереометрії, наприклад, у підручнику Є. П. Неліна [17] та ще у декількох інших) безпосередньо вказано на те, що теоретичним підґрунтям представленого навчального матеріалу є аксіоматика і аксіоматична теорія евклідової геометрії О. В. Погорєлова. Інші автори чи авторські колективи, фактично, використовують те ж саме підґрунтя без жодних посилань. Але, насправді, у всіх підручниках з планіметрії і у більшості підручників зі стереометрії, при визначенні їх теоретичного підґрунтя, відбувається еклектичне поєднання аксіоматики О. В. Погорєлова з аксіоматикою Л. С. Атанасяна та співавторів. Про цей факт, насамперед, свідчить означення рівності геометричних фігур за допомогою не зовсім зрозумілого «накладання». За різних, як об’єктивних, так і суб’єктивних обставин, появи в Україні підручників інших колективів авторів, у найближчі роки, очікувати не варто…

Як було визначено й обґрунтовано на попередній лекції, переважну частину курсів геометрії закладів загальної середньої та передвищої освіти складає елементарна геометрія як конструктивна складова тієї аксіоматичної теорії евклідової геометрії, яку, явним чи не явним чином, покладено в основу цих курсів. При цьому конструктивна складова суттєвим чином залежить від характеристик тієї аксіоматики, що утворює базу відповідної аксіоматичної теорії.

Все вищевказане вказує на те, що, для кращого усвідомлення логічної структури як двох курсів геометрії закладів загальної середньої освіти (курсів планіметрії і стереометрії), так і їх окремих складових, викладач повинен вміти самостійно аналізувати відповідне теоретичне підґрунтя. А за умови сьогодення, необхідні передумови для цього може створити лише ретельне опанування як аксіоматики евклідової геометрії О. В. Погорєлова і відповідної аксіоматичної теорії, так і аксіоматики евклідової геометрії і відповідної аксіоматичної теорії Л. С. Атанасяна та співавторів.

Зупинимося спочатку на аналізі аксіоматики та аксіоматичної теорії евклідової геометрії О. В. Погорєлова. Точніше, мова йде, фактично, про два варіанта аксіоматик і про побудовані на їх основі аксіоматичні теорії. (Зрозуміло, що будь-які дві аксіоматики одного й того ж математичного об’єкту є еквівалентними між собою, їх аксіоматичні теорії є однаковими за своїм змістом, можуть відрізнятися лише способами обґрунтування справедливості однакових тверджень та шляхами введення однакових за своїм змістом понять).

Перший варіант своєї аксіоматики евклідової геометрії О. В. Погорєлов створив як варіант наукового характеру, з метою суттєвого спрощення міркувань відповідної аксіоматичної теорії у порівнянні з міркуваннями аксіоматичної теорії Д. Гільберта у першу чергу щодо введення понять про довжину відрізка та міру кута. Другий варіант аксіоматики було спрямовано на побудову цілісних систематичних навчальних курсів евклідової планіметрії і евклідової стереометрії для закладів загальної середньої та передвищої освіти [18; 19].

Зупинимося спочатку на оглядовій характеристиці аксіоматики першого варіанту.

Основна частина неозначуваних множин тут має традиційні назви, такі саме, як і у аксіоматичній теорії Д. Гільберта евклідової геометрії:

M – множина точок;

L – множина прямих;

Π – множина площин.

Але, на відміну від аксіоматики Д. Гільберта, додатково тут вказано і назву допоміжної неозначуваної множини – множини R^+ всіх додатних дійсних чисел.

Неозначувані відношення даної аксіоматики, разом з їх типізацією, мають вигляд:

$p_1 -$ інцидентність (приналежність) точок і прямих, $p_1 \subset (M \times L)$;

$p_2 -$ інцидентність (приналежність) точок і площин, $p_2 \subset (M \times \Pi)$;

$p_3 -$«лежати між» (для трьох точок однієї прямої), $p_3 \subset M^3$;

$p_4 -$ «числове значення довжини відрізка у даному масштабі», $p_4 \subset B^2 \times R^+$, де B– множина всіх відрізків, складова шкали, побудованої над множинами M, L і Π

$p_5 -$ «числове значення міри кута у даному масштабі»,

$p_5 \subset K^2 \times R^+$, де K – множина всіх кутів-каркасів, складова шкали, побудованої над множинами M, L і Π.

Наведені назви і типізація відношень p_4 і p_5 вже вказують на те, що, при подальшому формулюванні відповідних аксіом, буде враховано не лише першоджерело [18, с. 172-180], а й певні корективи до нього, на доцільність яких свого часу вказував О. Д. Александров [1, с. 163-166]. Справа в тому, що О. В. Погорєлов у своїй аксіоматиці явним чином розглядав довжину відрізка як число, міру кута – лише як його градусну міру. О. Д. Александров підкреслював, що у евклідовій геометрії «...відрізкам безпосередньо не відповідають жодні числові значення довжин, так само, як парі точок – не відповідає жодне числові значення відстані: такі значення з'являються лише у результаті обрання одиниці вимірювання. Немає їх і у реальному просторі. Тому, якщо формулюють як аксіому планіметрії: «будь-яким двом точкам поставлено у відповідність невід'ємне число»… [13], то утворюється аксіоматика не самої планіметрії, а планіметрії з фіксованим одиничним відрізком – з фіксованою одиницею довжини. Числові значення не належать самій геометрії, вони – лише її допоміжні засоби. Так само, у кутів, безпосередньо, не існує жодної градусної або іншої подібного типу міри. Ділення прямого кута на 90, а, скажімо, не на 100 градусів, є чистою умовністю. Але формулюють як аксіому: «Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут складає 180 градусів» [18,19]. Тому, якщо точно розуміти те, що проголошено як аксіому геометрії, то треба вважати, що, зіставляючи до розгорнутого кута не число 180, а, скажімо, число 200, ми отримуємо вже іншу геометрію».

Отже, з урахуванням наведених вище зауважень, відповідна аксіоматика містить чотирнадцять аксіом, розподілених на сім груп:

1. Аксіоми приналежності

α_1. Для будь-яких двох різних точок існує пряма, що їх містить, та лише одна.

α_2. Кожна пряма містить принаймні дві різні точки. Існують такі три точки, що разом не належать до жодної прямої.

α_3. Для кожної площини існує принаймні одна точка, що цій площині належить, і принаймні одна точка, що цій площині не належить.

Згідно означення, пряма належить площині або площина містить пряму, якщо кожна точка цієї прямої належить цій площині.

α_4. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то сукупність всіх їх спільних точок утворює їх спільну пряму.

α_5. Для кожної прямої і кожної точки, що цій прямій не належить, існує, і, до того ж, єдина, площина, що містить цю точку і цю пряму.

2. Аксіоми порядку

α_6. Якщо одна точка лежить між двома іншими, то всі три точки є різними і належать одній прямій. Із трьох різних точок прямої одна і лише одна лежить між двома іншими.

Відрізок означують як множину тих точок, що лежать між двома різними заданими точками. Задані точки називають кінцями даного відрізка.

α_7. Пряма, що належить площині, розбиває множину всіх точок даної площини, які цій прямій не належать, на дві підмножини (півплощини) так, що відрізок, обидва кінця якого належать одній півплощині, не перетинає дану пряму, а відрізок, кінці якого належать різним півплощинам, навпаки, перетинає.

3. **Аксіоми міри для відрізків і кутів**

α_8. Якщо обрано одиничний відрізок e, тобто, такий відрізок, якому, у якості числового значення довжини, поставлено у відповідність число 1, то кожному відрізку a однозначно ставиться у відповідність певне додатне дійсне число $l|_e(a)$ – числове значення довжини цього відрізка у масштабі e. Якщо обрано інший одиничний відрізок e_1, то рівність числових значень довжин відрізків зберігається. Тобто,

$$\text{якщо}\quad l\,|_e\,(a) = l\,|_e\,(b),\ \text{ то } l\,|_{e_1}\,(a) = l\,|_{e_1}\,(b).$$

Аксіома α_8 дозволяє означити рівність відрізків через рівність числових значень їх довжин: відрізки a і b називають рівними, якщо рівними є числові значення їх довжин у певному масштабі e.

α_9. Якщо точка C належить відрізку AB, то, при будь-якому масштабі, числове значення довжини відрізка AB дорівнює сумі числових значень довжин відрізків AC і BC.

Промінь OA з початком у точці O, де точки O і A є різними, означують як сукупність таких точок M прямої, яка проходить через точки O і A, що точка O не лежить між точками A і M. (Той факт, що кожна точка прямої розбиває цю пряму на два променя, доводиться на підставі раніше сформульованих аксіом). Кутом-каркасом з вершиною у точці O називають сукупність точок, яка складається з точки O і двох різних променів з початком у цій точці. Якщо при цьому ці промені належать одній прямій, то кут-каркас називають розгорнутим.

α_{10}. Якщо обрано кут-каркас γ, якому, у якості числового значення міри кута, поставлено у відповідність число 1, то кожному куту-каркасу α однозначно ставиться у відповідність певне додатне число $\varphi\big|_\gamma(\alpha)$ – числове значення міри кута α у масштабі γ. Якщо обрано інший «одиничний» кут γ_1, то рівність числових значень мір кутів зберігається, тобто,

$$\text{якщо}\ \varphi\big|_\gamma(\alpha) = \varphi\big|_\gamma(\beta),\ \text{ то } \varphi\big|_{\gamma_1}(\alpha) = \varphi\big|_{\gamma_1}(\beta).$$

Аксіома α_7 дозволяє означити рівність кутів за рівністю числових значень їх мір відносно певного «одиничного» кута так само, як це означено для відрізків.

Згідно прийнятого означення, вважають, що промінь проходить між сторонами нерозгорнутого кута-каркаса, якщо його початок співпадає з вершиною даного кута, і він перетинає який-небудь відрізок з кінцями на сторонах цього кута. (Сторонами кута-каркаса називають промені, які його утворюють). Якщо кут-каркас є розгорнутим, то будь-який промінь з початком у вершині цього кута, який не співпадає з жодною із сторін даного кута, вважають за такий, що проходить між сторонами даного кута.

α_{11}. Якщо промінь c проходить між сторонами a і b певного кута-каркаса, то, незалежно від того, який саме кут-каркас обрано за одиничний, числове значення міри кута, утвореного променями a і b, дорівнює сумі числових значень мір кутів, утворених променями a і c та b і c.

4. **Аксіома існування трикутника, що дорівнює даному**

Зрозуміло, що формулюванню такої аксіоми передують відповідні необхідні означення.

Трикутником (точніше, трикутником-каркасом) називають геометричну фігуру (сукупність точок), утворену трьома точками, які не належать одній прямій, і трьома відрізками з кінцями у цих точках. Точки називають вершинами даного трикутника, відрізки – його сторонами. Якщо вершинами трикутника є точки A, B і C, то трикутник називають трикутником ABC і позначають як ΔABC. Кутом A трикутника ABC називають кут-каркас, утворений променями AB і AC; кути B і C трикутника ABC визначають аналогічно.

Два трикутника називають рівними, якщо їх вершини, відповідно, можна позначити як A, B, C і A_1, B_1, C_1 так, що $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

α_{12}. Нехай задано трикутник ABC, промінь a, вказано півплощину відносно прямої, що цей промінь містить. Існує трикутник $A_1B_1C_1$, який дорівнює трикутнику ABC, у якому вершина A_1 співпадає з початком променя a, вершина B_1 належить променю a, а вершина C_1 належить вказаній півплощині.

5. Аксіома існування відрізка заданої довжини

α_{13}. Можна так обрати одиничний відрізок e, що для будь-якого додатного дійсного числа d існує відрізок, числове значення довжини якого у масштабі e дорівнює d.

нНа підставі аксіоми α_8, звідси випливає, що, в силу прийняття аксіоми α_{13}, аналогічне твердження буде вірним і за умови обрання довільного відрізка у якості одиничного.

6. Аксіома паралельних

α_{14}. Нехай a – довільна пряма, A довільна точка, що цій прямій не належить. У площині, яка містить пряму a і точку A, через точку A проходить не більше ніж одна пряма, що не перетинає пряму a.

Отже, перший варіант аксіоматики О. В. Погорєлова евклідової геометрії має структуру наступного виду

$$\Sigma_{\Pi_1}\left(M, L, \Pi, R^+; p_i, i=\overline{1,5}; \alpha_j, j=\overline{1,14}\right).$$

Складові другого варіанту аксіоматики евклідової геометрії, розробленого О. В. Погорєловим у якості теоретичного підгрунтя систематичних курсів геометрії закладів загальної середньої та передвищої освіти, можна охарактеризувати наступним чином.

1. Назви основних неозначуваних множин обох варіантів аксіоматик співпадають.

2. Назви основних неозначуваних відношень, типізація основних неозначуваних відношень, співпадають також.

І також доцільними залишаються ті коментарі, які наведено по відношенню до неозначуваних відношень p_4 і p_5. Сутність цих коментарів не враховано, на жаль, ані у підручниках з геометрії для закладів загальної середньої освіти, автором яких безпосередньо є О. В. Погорєлов, ані у сучасних підручниках з геометрії для закладів загальної середньої та передвищої освіти, які бездумно повторюють формулювання, наведені О. В. Погорєловим.

Другий варіант аксіоматики містить дванадцять аксіом. Назви груп аксіом не наводяться. Розділяються між собою лише так звані планіметричні і стереометричні аксіоми. Планіметричні аксіоми – це аксіоми евклідової планіметрії, їх дев'ять. До складу аксіом евклідової стереометрії, тобто, всієї евклідової геометрії тривимірного евклідового простору, у О. В. Погорєлова входять ті ж самі дев'ять «планіметричних» аксіом, формулювання чотирьох з яких, з урахуванням існування у евклідовому просторі безлічі площин, дещо змінені, та три аксіоми так званої групи C, тобто, стереометричні аксіоми, які, за своїм змістом, є просторовими аксіомами приналежності. У результаті, у другому варіанті аксіоматики О. В. Погорєлова евклідової геометрії, система аксіом має наступний вигляд [19, с. 5-18, 232]. (У даному випадку наведемо всі формулювання, майже у «чистому» вигляді без урахування тих зауважень, які визнані доцільними для тверджень, пов'язаних з відношеннями p_4 і p_5. Саме у такому вигляді, дослівно, зараз вони є присутніми у сучасних підручниках з геометрії для закладів загальної середньої освіти різних авторів, не викликаючи, чомусь, у самих авторів жодних запитань)

$\breve{\alpha}_1$. Для кожної прямої існують точки, що їй належать і точки, що їй не належать. Через будь-які дві точки проходить (у оригіналі – «можна провести») пряма і лише одна.

$\breve{\alpha}_2$. Серед трьох точок прямої одна і лише одна лежить між двома іншими.

Відрізком називають частину прямої, яка складається зі всіх точок цієї прямої, що лежать між двома даними її точками.

$\breve{\alpha}_3$. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається своєю довільною точкою.

$\breve{\alpha}_4$. Пряма, що належить площині, розбиває цю площину на дві півплощини.

Півпрямою або променем називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать по одну сторону від заданої її точки. Точку при цьому називають початковою точкою або початком даного променя.

Кутом називають геометричну фігуру, яка складається з точки – вершини кута – і двох різних півпрямих з початком у цій точці – сторін кута. (Зрозуміло, що це означення кута-каркаса).

Різні півпрямі однієї прямої, що мають спільний початок, називають доповняльними. Якщо сторони кута є доповняльними півпрямими однієї прямої, то кут називають розгорнутим.

Згідно означення, вважають, що промінь проходить між сторонами даного нерозгорнутого кута, якщо він виходить з його вершини та перетинає який-небудь відрізок на сторонах цього кута. У випадку розгорнутого кута вважають, що довільний промінь, який виходить з його вершини і є відмінним від його сторін, проходить між його сторонами.

$\breve{\alpha}_5$. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює $180°$. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається довільним променем, що проходить між його сторонами.

$\breve{\alpha}_6$. На кожній півпрямій, від її початкової точки, можна відкласти відрізок заданої довжини і лише один.

$\breve{\alpha}_7$. Від будь-якої півпрямої, на площині, що цю півпряму містить, у задану півплощину, можна відкласти кут заданої градусної міри, меншої за $180°$, і лише один.

Трикутником називають геометричну фігуру, що складається з трьох точок, які не належать одній прямій, і трьох відрізків, що попарно сполучають ці точки. Точки називають вершинами трикутника, відрізки – його сторонами. Два відрізка називають рівними, якщо вони мають однакові довжини. Два кута називають рівними, якщо вони мають однакові градусні міри. Два трикутника називають рівними, якщо рівними є їх відповідні сторони і кути.

$\breve{\alpha}_8$. Яким би не був трикутник, існує трикутник, що йому дорівнює, у заданій площині, у заданому розташуванні відносно заданої півпрямої цієї площини.

Дві прямі називають паралельними, якщо вони належать одній площині і не перетинаються.

$\breve{\alpha}_9$. На площині, через задану точку, яка не належить заданій прямій, можна провести не більш ніж одну пряму, паралельну до заданої.

C_1: Якою би не була площина, існують точки, що цій площині належать, і точки, що цій площині не належать.

C_2: Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.

C_3: Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину і лише одну.

Другий варіант аксіоматики О. В. Погорєлова евклідової геометрії, в силу всього вищенаведеного, має структуру наступного виду:

$$\sum_{\Pi_2}\left(M, L, \Pi, R^+; p_i, i=\overline{1,5}; \alpha_j, j=\overline{1,9}, C_1, C_2, C_3\right).$$

Якщо спробувати ретельно проаналізувати безпосередньо зміст аксіом аксіоматики $\sum_{\Pi_2}$, то, мабуть, можна дійти до висновку, що при цьому виникає дуже багато питань. Всі питання у даному випадку знімаються тим, що попередньо розглянуто аксіоматику $\sum_{\Pi_1}$, формулювання аксіом якої, разом з попередньо наведеними необхідними означеннями, мають цілком точний, однозначно визначений характер. Але для учнів закладів загальної середньої освіти аксіоматика $\sum_{\Pi_1}$ є невідомою …

Контент даної лекції дозволяє нам розуміти зміст тверджень аксіоматики $\sum_{\Pi_2}$. Аксіоматичні теорії $\mathrm{T}\left(\sum_{\Pi_1}\right)$ і $\mathrm{T}\left(\sum_{\Pi_2}\right)$ співпадають. Спробуємо, спираючись, у першу чергу, на першоджерело [18], визначити основні відміни аксіоматики $\sum_{\Pi_2}$ від аксіоматики $\sum_{\Pi_1}$.

1. У аксіоматиці $\sum_{\Pi_2}$ твердження аксіом α_1 і α_2 аксіоматики $\sum_{\Pi_1}$ замінені твердженнями однієї аксіоми $\breve{\alpha}_1$. Із справедливості твердження аксіоми $\breve{\alpha}_1$ випливає справедливість тверджень аксіом α_1 і α_2. Із справедливості тверджень аксіом α_1 і α_2 аксіоматики $\sum_{\Pi_1}$ справедливість тверджень аксіоми $\breve{\alpha}_1$ випливає лише у разі використання інших аксіом аксіоматики $\sum_{\Pi_1}$. Заміна аксіом α_1 і α_2 аксіомою $\breve{\alpha}_1$ пояснюється тими поглядами О. В. Погорєлова методичного характеру [18], що наочне уявлення учня про пряму передбачає існування безлічі точок і на самій прямій, і поза нею. Як і будь-які погляди методичного характеру, такі погляди важко визнати беззаперечними. Але беззаперечним є той факт, що наявність аксіоми $\breve{\alpha}_1$ суттєво спрощує характер і збільшує кількість

конструктивних міркувань у межах евклідової геометрії, представленої у вигляді аксіоматичної теорії $\mathrm{T}\left(\sum_{\Pi_2}\right)$.

2. Аксіоми $\breve{\alpha}_1$, C_1, C_2, C_3 аксіоматики $\sum_{\Pi_2}$ характеризують відношення приналежності p_1 і p_2. За своїм змістом, це твердження існування певних геометричних фігур у межах евклідової геометрії, а не твердження про можливість їх «побудов» у тому чи іншому сенсі, зрозуміло, у випадку їх існування. Отже, формулювання тверджень цих аксіом повинні бути скориговані у відповідності до наведених формулювань аксіом $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$. Спроба, на підставі міркувань методичного характеру, ототожнити для учнів поняття «можна провести» і «існує» призводить до хибного розуміння сучасної сутності евклідової геометрії як науки. (Мова не йде, зрозуміло, про до-грецький та ранньогрецький періоди її розвитку). Усвідомленню характеру, ролі і місця різних «побудов», у першу чергу, конструктивного характеру, у курсі евклідової геометрії буде присвячено наші подальші заняття.

3. Аксіома $\breve{\alpha}_3$, як було обґрунтовано раніше, з точки зору сутності евклідової геометрії як науки, вимагає уточнення у вигляді аксіом α_8 і α_9. Аксіоми α_8, α_9 характеризують відношення p_4, яке «включає» до евклідової геометрії допоміжну неозначувану множину R^+ невід'ємних дійсних чисел. Це дозволяє замінювати значну кількість суто геометричних міркувань не конструктивного характеру безпосередніми посиланнями на відповідні властивості множини R^+ додатних дійсних чисел. Такі посилання, у випадку їх скінченної кількості, утворюють міркування вже конструктивного характеру.

4. Міркування, аналогічні до попередніх, є справедливими і до аксіоми $\breve{\alpha}_5$ та аксіом α_{10} і α_{11}.

5. Аксіома $\breve{\alpha}_6$ аксіоматики $\sum_{\Pi_2}$ замінює слабшу аксіому α_{13} аксіоматики $\sum_{\Pi_1}$. Це обумовлено вже, мабуть, беззаперечними міркуваннями методичного характеру. Зокрема, невідомим є, здається, конструктивне доведення твердження аксіоми $\breve{\alpha}_6$ на підставі твердження аксіоми α_{13} та тверджень інших аксіом аксіоматики $\sum_{\Pi_1}$.

6. Твердження аксіоми $\breve{\alpha}_7$ є наслідком тверджень всіх інших аксіом аксіоматики $\sum_{\Pi_2}$ (аксіоматика $\sum_{\Pi_2}$ не є незалежною). Воно визначено, як аксіома, виходячи із, мабуть, беззаперечних міркувань методичного характеру – відповідне доведення для учнів закладів загальної середньої освіти є занадто складним.

На завершення, відзначимо той факт, що аксіоматика О. В. Погорєлова евклідової геометрії, історично, не є тією першою досконалою аксіоматикою евклідової геометрії, до неозначуваних множин якої входить допоміжна неозначувана множина R^+ додатних дійсних чисел. Вперше, подібну аксіоматику було запропоновано В. Ф. Каганом у 1904 році в Одесі, у Новоросійському університеті [1].

Стисло розглянемо тепер аксіоматику евклідової геометрії Л. С. Атанасяна та співавторів [3]. Як вже було вказано раніше, ця аксіоматика цікавить нас у першу чергу з приводу того, що серед переліку своїх неозначуваних понять вона містить не лише допоміжну неозначувану множину R^+ додатних дійсних чисел, а й поняття про «накладання». Вперше, аксіоматику «накладання» було запропоновано у 1904 році німецьким математиком Ф. Шуром [1]. За допомогою «накладання» означувалася рівність геометричних фігур у підручнику з елементарної евклідової геометрії А. П. Кісельова [12].

На даний час, по відношенню до введення поняття про «накладання» саме підходи Л. С. Атанасяна та його співавторів є найбільш співзвучними до відповідних підходів освітян України. (Точніше, навпаки, в Україні сучасні підходи авторів шкільних підручників з геометрії до введення поняття «накладання» у суттєвому сенсі є співзвучними до відповідних підходів Л. С. Атанасяна та співавторів).

Неозначуваними множинами даної аксіоматики є так звані

M – множина точок,

L – множина прямих,

Π – множина площин,

F – множина накладань,

R^+ – допоміжна неозначувана множина, множина всіх додатних дійсних чисел.

Назви неозначуваних відношень даної аксіоматики, разом з їх типізацією, мають вигляд

p_1 – інцидентність (приналежність) точок і прямих, $p_1 \subset \left(M \times L\right)$;

p_2 – інцидентність (приналежність) точок і площин, $p_2 \subset \left(M \times \Pi\right)$;

p_3 – «лежати між» для трьох точок (однієї прямої), $p_3 \subset M^3$;

p_4 – довжина відрізка відносно обраного одиничного відрізка $p_4 \subset \left(B^2 \times R^+\right)$; де B – множина всіх відрізків, елемент шкали, побудованої над множинами M, L, Π.

Так само, як і для аксіоматики О. В. Погорєлова евклідової геометрії, для аксіоматики евклідової геометрії Л. С. Атанасяна та співавторів, існують два варіанта, варіант наукового характеру та варіант, визначений у якості теоретичного підґрунтя для курсів геометрії закладів загальної середньої освіти та закладів передвищої освіти [3;4]. Виходячи з мети нашого курсу, обмежимося стислим аналізом аксіоматики лише другого варіанту.

Отже, та аксіоматика $\sum_A$ евклідової геометрії Л. С. Атанасяна та співавторів, яка розглядається як теоретичне підгрунтя сучасних курсів геометрії закладів загальної середньої та передвищої освіти, містить двадцять дві аксіоми, поділені на п’ять груп [4, с. 225-228].

1. Аксіоми приналежності

α_1. Для будь-яких двох різних точок існує пряма, що їх містить, і, до того ж, лише одна.

α_2. Кожна пряма містить принаймні дві різні точки. Кожна площина містить принаймні три точки, які разом не належать до жодної однієї прямої.

α_3. Існують принаймні три точки, що разом не належать до жодної прямої. Існують принаймні чотири точки, що разом не належать до жодної площини.

α_4. Для будь-яких трьох точок, що разом не належать до жодної прямої, існує площина, що їх містить, і, до того ж, лише одна.

α_5. Якщо дві різні точки певної прямої належать певній площині, то всі точки даної прямої належать цій площині.

Якщо кожна точка прямої належить певній площині, то говорять, що пряма належить цій площині.

α_6. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то сукупність всіх їх спільних точок утворює їх спільну пряму.

2. Аксіоми порядку

α_7. Якщо точка B лежить між точкою A і точкою C, то A, B і C – три різні точки однієї прямої і точка B лежить також між точкою C і точкою A.

α_8. Із трьох різних точок однієї прямої одна і лише одна лежить між двома іншими.

Замість слів «точка B лежить між точками A і C» говорять також, що точки A і C лежать на прямій по різні сторони від точки B, або, що точки A і B лежать по одну сторону від точки C (аналогічно, точки B і C лежать по одну сторону від точки A).

α_9. Кожна точка O прямої розділяє цю пряму на дві частини – два променя – так, що дві довільні точки одного й того ж променя лежать по одну сторону від точки O, а дві довільні точки різних променів лежать по різні сторони від точки O. При цьому точка O не належить жодному зі вказаних променів.

Відрізком AB називають геометричну фігуру, що містить точки A, B і всі точки прямої AB, що лежать між точками A і B. При цьому точки A і B називають кінцями відрізка AB, а всі інші його точки – внутрішніми точками відрізка AB. Якщо відрізок AB і пряма a належать одній площині і не мають спільних точок, то говорять, що точки A і B на цій площині лежать по одну сторону відносно прямої a, якщо ж відрізок AB перетинає пряму a у певній точці, що лежить між точками A і B, то говорять, що точки A і B на цій площині лежать по різні сторони відносно прямої a.

α_{10}: Кожна пряма a, що належить площині, розділяє цю площину на дві частини (дві півплощини) так, що будь-які дві різні точки однієї й тієї ж півплощини лежать по одну сторону відносно прямої a, а будь-які дві точки різних півплощин лежать по різні сторону відносно прямої a. При цьому точки прямої a не належать жодній з цих двох півплощин. Пряму a називають межею кожної з двох таких півплощин.

Якщо відрізок не має спільних точок з певною площиною, то говорять, що кінці цього відрізка лежать по одну сторону відносно даної площини; якщо ж відрізок перетинає площину у певній своїй внутрішній точці, то говорять, що кінці відрізка лежать по різні сторони відносно даної площини.

α_{11}. Кожна площина розділяє простір на дві частини (два півпростори) так, що будь-які дві різні точки одного й того ж півпростору лежать по одну сторону відносно даної площини, а будь-які дві точки різних півпросторів лежать по різні сторони відносно даної площини. При цьому точки самої площини не належать жодному з цих двох півпросторів.

Площину α називають межею кожного з двох таких півпросторів.

3. Аксіоми накладання

α_{12}. Накладання є відображенням множини всіх точок евклідового простору у себе.

Фігури Φ і Φ_1 евклідового простору називають рівними (конгруентними), якщо існує таке накладання f евклідового простору, що $f(\Phi)=\Phi_1$, кожна точка фігури Φ_1 при накладанні f має прообраз, який належить фігурі Φ.

α_{13}. Кожна фігура Φ евклідового простору дорівнює сама собі.

α_{14}. Якщо фігура Φ дорівнює фігурі Φ_1, то фігура Φ_1 дорівнює фігурі Φ.

α_{15}. Якщо фігура Φ_1 дорівнює фігурі Φ_2, а фігура Φ_2 дорівнює фігурі Φ_3, то фігура Φ_1 дорівнює фігурі Φ_3.

α_{16}. Якщо при накладанні кінці відрізка AB відображаються у кінці відрізка A_1B_1, то при цьому накладанні відрізок AB відображаються у відрізок A_1B_1.

α_{17}. Для кожного відрізка AB на кожному промені h з початком у точці A_1 існує, і, до того ж лише одна, така точка B_1, що відрізок AB дорівнює A_1B_1.

Кутом (кутом-каркасом) називають геометричну фігуру, утворену точкою і двома різними променями з початком у цій точці. Точку називають вершиною кута, а промені – його сторонами. Кут-каркас називають розгорнутим, якщо його сторони належать одній прямій.

α_{18}. Для кожного нерозгорнутого кута, сторонами якого є промені h і k, кожного променя k_1 з початком у точці O, у кожній півплощині, межею якої є пряма, що містить промінь k_1, існує, і, до того ж, єдиний, такий промінь h_1 з початком у точці O, що кут, утворений променями h_1 і k_1, дорівнює куту, утвореному променями h і k (існує таке накладання f, що $f(h)=h_1$, $f(k)=k_1$),

α_{19}. Якщо нерозгорнуті кути, відповідно, утворені променями h, k і h_1, k_1, є рівними, належать площинам, що, відповідно, є межевими площинами для півпросторів W і W_1, то існує таке накладання f, при якому $f(k)=k_1$, $f(h)=h_1$, $f(W)=W_1$ і таке накладання f_1, при якому $f_1(h)=k_1$, $f_1(k)=h_1$, $f_1(W)=W_1$.

Використовуючи твердження аксіом перших трьох груп, можна обґрунтувати, наступне.

1. При кожному накладанні евклідового простору образами різних точок є різні точки.

2. При кожному накладанні кожні три точки, що не належать одній прямій, переходять у три точки, які також не належать одній прямій.

3. Якщо при певному накладанні, точки A і B переходять, відповідно, у точки A_1 і B_1, то при цьому накладанні промінь AB переходить у промінь A_1B_1, пряма AB – у пряму A_1B_1.

4. Якщо при певному накладанні точки A, B, C, що не належать одній прямій, відповідно, переходять у точки A_1, B_1, C_1, то при цьому накладанні площина ABC переходить у площину $A_1B_1C_1$.

5. При кожному накладанні площина переходить у площину, а півплощина – у півплощину, при цьому межа цієї півплощини переходить у межу півплощини-образа.

6. При кожному накладанні чотири точки, які не належать одній площині, переходять, відповідно, у чотири точки, які також не належать одній площині.

7. При кожному накладанні півпростір з межею α переходить у певний півпростір з межею α' так, що при цьому площина α переходить у площину α'.

8. Кожне накладання є взаємно однозначним відображенням евклідового простору на себе (перетворенням евклідового простору).

4. **Аксіоми вимірювання відрізків**

α_{20}. Якщо довільний відрізок обрати у якості одиничного відрізка, то кожному відрізку, за допомогою спеціальним чином визначеного процесу вимірювання (процес описується, він співпадає з тим природним процесом вимірювання відрізків, який учні закладів загальної середньої освіти опановують, починаючи з першого року навчання), однозначно ставиться у відповідність певне додатне дійсне число – його довжина відносно обраного одиничного відрізка.

α_{21}. Для кожного додатного дійсного числа d, за умови довільного відрізка, обраного у якості одиничного, існує відрізок, довжина якого відносно даного одиничного відрізка дорівнює d.

На підставі аксіом усіх чотирьох груп можна довести адитивність визначеного поняття про числове значення довжини відрізка та побудувати традиційну для евклідової геометрії теорію вимірювання кутів.

5. **Аксіома паралельних**

Традиційно, дві прямі називають паралельними, якщо вони належать одній площині і не мають жодної спільної точки.

α_{22}. У кожній площині, через точку, що не належить до даної прямої цієї площини, проходить не більш ніж одна пряма, паралельна до даної.

Як і кожна, мабуть, система аксіом евклідової геометрії, розрахована на використання у курсах математики закладів загальної середньої освіти та закладів передвищої освіти, вищевказана система аксіом не є незалежною.

Так, наприклад, теоремами, насправді, є твердження аксіом α_5, α_9 та α_{11}. До переліку аксіом їх включено у зв'язку зі значною складністю доведення, виходячи з міркувань суто методичного характеру [4].

Отже, підсумовуючи, можна зробити висновок про те, що аксіоматика Л. С. Атанасяна та співавторів має структуру наступного виду

$$\sum\nolimits_A \left(M, L, П, F, R^{+}; p_i, i = \overline{1,4}; \alpha_j, j = \overline{1,22} \right).$$

Список використаних і рекомендованих джерел інформації

1. Александров А. Д. Основания геометрии: учебное пособие для вузов. Москва: Наука, 1987. 288 с.
2. Апостолова Г. В. Геометрія: Підручник для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2004. 216 с.
3. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. В 2-х ч. Ч. 2 : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Москва: Просвещение, 1987. 352 с.
4. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Киселева Л. С., Позняк Э. Г. Геометрия. 10–11 кл. : учеб. для общеобразоват. учереждений: базовый и профил. уровни. Москва: Просвещение, 2009. 255 с.
5. Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия. Том 2. Москва: Просвещение, 1975. 368 с.
6. Бевз Г. П., Бевз В. Г. , Владімірова Н. Г. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2015. 192 с.
7. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія: підручник для 7-х класів. Київ.: Зодіак-ЕКО, 2007. 208 с.
8. Гильберт Д. Основания геометрии. Москва-Ленинград: ОГИЗ, Государствен-ное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 491 с.

9. Глаголев Н. А. , Глаголев А. А. Геометрия. Часть 1. Планиметрия. Учебник для 6–9 классов средней школы. Москва: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1958. 239 с.

10. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф. Геометрія. Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Харків: Ранок, 2016. 224 с.

11. Істер О. С. Геометрія: Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Освіта, 2007. 224 с.

12. Киселёв А. П. Элементарная геометрия. Москва: Просвещение, 1980. 287 с.

13. Колмогоров А. Н., Семенович А. С., Черкасов Р. С. Геометрия 6-8. Москва: Просвещение, 1982. 336 с.

9. Математика 5-9 класи. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів// Затверджена Наказом Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017 № 804 URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas (15.06.2019).

10. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія. Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Харків: Гімназія, 2015. 224 с.

11. Начала Евклида. Книги I-VI. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1948. 448 с.

12. Нєлін Є. П. Геометрія (профільний рівень): підручн. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків: Ранок, 2018. 240 с.

13. Погорелов А. В. Геометрия: учебное пособие для вузов, Москва: Наука, 1984. 288 с.

14. Погорелов А. В. Геометрия: учебник для 7–11 классов средних школ, Москва: Просвещение, 1990. 384 с.

15. Роганін О. М., Капіносов А. М. Геометрія 7. Тернопіль: Підручники і посібники, 2015. – 240 с.
16. Тадеєв В. О. Геометрія. Основні фігури: Базовий курс. Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Тернопіль.: Навчальна книга-Богдан, 2007. 272 с.

Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 3

1. У якому вигляді, починаючи з часів Евкліда, явним чи неявним чином будується кожний систематичний курс евклідової геометрії?
2. Скільки може існувати і реально існує різних аксіоматик і аксіоматичних теорій евклідової геометрії?
3. Які аксіоматики евклідової геометріх, покладені у основу курсів геометрії закладів загальної середньої освіти, є на даний час загальновідомими в Україні?
4. Які вимоги до дидактичних знань, умінь та навичок учнів висуваються сучасними навчальними програмами з геометрії для закладів базової середньої освіти?
5. Які аксіоматики евклідової геометрії, з урахуванням реальних об'єктивних і суб'єктивних обставин, на даний час, в Україні, можуть бути покладені у основу курсів геометрії закладів загальної середньої освіти?
6. Яку аксіоматику евклідової геометрії покладено у основу відомого шкільного підручника з геометрії А. П. Кісельова? Які теоретичні підходи А. П. Кісельова до визначення контенту курсів геометрії закладів загальної середньої освіти варто визнати актуальними для сьогодення?

7. На основі якої аксіоматики евклідової геометрії в Україні було побудовано курси геометрії закладів загальної середньої освіти в передостанні десятиліття?
8. Яка аксіоматика евклідової геометрії зараз є найбільш поширеним підгрунтям курсів геометрії в закладах середньої освіти Росії?
9. Як можна охарактеризувати ситуацію з теоретичним підгрунтям у вигляді певної аксіоматики для діючих на даний час в Україні навчальних програм і відповідних підручників з геометрії?
10. Скільки існує різних варіантів аксіоматик О. В. Погорєлова евклідової геомнтрії?
11. Надайте загальну характеристику наукового варіанта аксіоматики О. В. Погорєлова евклідової геометрії.
12. Які корективи до аксіоматики О. В. Погорєлова було запропоновано О. Д. Александровим? Які міркування було покладено у основу запропонованих корекрив?
13. Надайте загальну характеристику «шкільного» варіанта аксіоматики О. В. Погорєлова евклідової геометрії.
14. Охарактеризуйте основні відміни обох варіантів аксіоматик О. В. Погорєлова евклідової геометрії та причини методичного характеру їх виникнення.
15. Надайте стислу характеристику аксіоматики евклідової геометрії Л. С. Атанасяна та співавторів.

Лекція 4. (2 години)

***Тема*. Аксіоматика теорії «побудов» на евклідовій площині «за допомогою циркуля і лінійки» як канонічне продовження аксіоматики евклідової планіметрії**

***Мета лекції*:** домогтися усвідомлення студентами магістратури характеру, ролі і місця задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» як конструктивних елементів аксіоматичної теорії спеціального канонічного продовження аксіоматики евклідової планіметрії, усвідомити точку зору на конструктивні аспекти евклідової планіметрії лише як на теорію геометричних «побудов за допомогою циркуля і лінійки» та її спростування.

План:

1. Порівняльна характеристика змісту поняття про «побудову на площині за допомогою циркуля і лінійки» у кресленні та у евклідовій планіметрії як аксіоматичній теорії.
2. Поняття про канонічне продовження аксіоматики. Необхідність розробки спеціального канонічного продовження аксіоматики евклідової планіметрії для створення математичної теорії «побудов» на евклідовій площині «за допомогою циркуля і лінійки».
3. Існування різних, еквівалентних між собою, аксіоматик «циркуля і лінійки». Традиційна загальна схема розв’язання планіметричної задачі на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» як задачі конструктивного характеру.
4. Планіметричні задачі на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» першого рівня складності.
5. Метод трикутників розв’язання планіметричних задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки».

Загальновідомим є той факт, що значна кількість різних інформаційних джерел безпосередньо ототожнює поняття про конструктивну геометрію з теорією геометричних «побудов» на площині за допомогою різних «інструментів», у першу чергу, за допомогою «циркуля і лінійки». Зрозуміло, що циркуль і лінійка, традиційно, є основними інструментами такого виду професійної діяльності людей, як креслення, креслення на плоских поверхнях. Процес креслення, як і будь-який інший вид діяльності людей є процесом дискретним і, більш за це, фінітним. Послідовну реалізацію необхідних етапів процесу креслення можна розглядати як процес конструювання підсумкового зображення. Кожний етап такого конструювання, як правило, передбачає появу певних елементів підсумкового зображення, природними математичними абстракціями яких є певні фігури евклідової планіметрії. Саме це стало передумовою виникнення доцільних форм математичного моделювання подібного процесу креслення у межах аксіоматичної теорії евклідової планіметрії.

Точніше, на перших етапах формування евклідової геометрії як науки, тоді, коли вона виступала лише як «фізична» геометрія, вчення про властивості просторових форм довкілля, циркуль і лінійка безпосередньо розглядалися як внутрішні інструменти самої геометрії, факт існування у геометрії відповідної геометричної фігури ототожнювався з реальною можливістю побудови фізичної моделі такої фігури за допомогою реальних циркуля і лінійки. У подальшому, в процесі формування евклідової геометрії як дедуктивної теорії, в процесі її організації у вигляді аксіоматичної теорії, природною стала необхідність чіткого визначення поняття про те, що треба мати на увазі під «побудовами за допомогою циркуля і лінійки» у межах саме аксіоматичної теорії евклідової планіметрії, необхідність чіткого розмежування змісту поняття про можливість «побудови» геометричної фігури і поняття про її існування. (Перші питання такого типу виникли у звязку з відомими задачами про трисекцію кута і про подвоєння кубу).

Сучасні дослідження з підстав геометрії переконливо свідчать про те, що, як аксіоматична теорія всієї евклідової геометрії, так і аксіоматична теорія її складової – евклідової планіметрії, – є повними. Цей факт не залежить від покладених у основу цих теорій аксіоматик, бо всі аксіоматики як евклідової геометрії у цілому, так і евклідової планіметрії, є еквівалентними між собою. (Інакше, вони, просто не були би аксіоматиками саме евклідової геометрії (евклідової планіметрії)). Згадаємо, що повнота аксіоматичної теорії означає, що до цієї теорії не можна додати незалежне від аксіом її аксіоматики твердження про поняття цієї теорії так, щоб у результаті не отримати суперечність. З іншого боку, на відміну від креслення, формування геометричної теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки», явно вимагає певної математичної формалізації характеристичних рис таких побудов у вигляді відповідних аксіом. В силу повноти, незалежно від обраної аксіоматики останнє не є можливим у межах аксіоматичної теорії евклідової планіметрії. Треба будувати продовження відповідної аксіоматики, принаймні канонічне. Одночасно, очевидно, можна вести розмову і про відповідне канонічне продовження відповідної аксіоматики усієї евклідової геометрії. Як результат утворюється нова аксіоматика, для якої аксіоматика евклідової геометрії є власною складовою.

Існують різні варіанти аксіоматики теорії «побудов на евклідовій площині за допомогою циркуля і лінійки» як канонічного продовження аксіоматики евклідової планіметрії. Розглянемо, наприклад, один з них.

Для визначеності, у якості «базової» аксіоматики евклідової планіметрії будемо розглядати ту аксіоматику $\sum_{пл.}$ евклідової планіметрії, яка є складовою аксіоматики $\sum_{П_2}$ евклідової геометрії О. В. Погорєлова. (Проаналізуйте, будь ласка, ще раз аксіоматику $\sum_{П_2}$, яку було охарактеризовано на лекції 3. Уточніть всі планіметричні складові цієї аксіоматики).

Для створення аксіоматики $\sum'$ теорії «побудов на евклідовій площині за допомогою циркуля і лінійки» до аксіоматики $\sum_{пл.}$ додамо наступні назви двох неозначуваних понять: неозначувана множина H – сукупність побудованих геометричних фігур, і неозначуване відношення q – операція побудови геометричної фігури, перетворення її з не побудованої – у побудовану, $q \subset F^2$, де F – множина всіх фігур аксіоматики $\sum_{пл.}$, елемент шкали, визначеної над неозначуваними множинами аксіоматики $\sum_{пл.}$.

До переліку аксіом аксіоматики $\sum_{пл.}$ додамо наступні твердження.

β_1 . На евклідовій площині існують принаймні дві різні побудовані точки.

β_2 . Кожна фігура евклідової площини, задана умовою задачі на побудову, є побудованою.

β_3 . Якщо на евклідовій площині побудовано фігури F_1 і F_2, то побудовано і фігуру $F_1 \cup F_2$.

β_4 . Якщо фігури F_1 і F_2 евклідової площини є побудованими, то можна визначити, чи є їх перетин $F_1 \cap F_2$ порожньою множиною, чи ні. Якщо $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$, то фігура $F_1 \cap F_2$ є побудованою.

β_5 . Якщо фігури F_1 і F_2 евклідової площини є побудованими, фігура F_1 є підмножиною фігури F_2 ($F_1 \subset F_2$), $F_1 \neq F_2$, то фігура $F_2 \setminus F_1$ є побудованою.

β_6 . Кожна побудована фігура містить евклідової площини принаймні одну побудовану точку.

β_7 . Для кожної побудованої фігури, відмінної від усієї евклідової площини, на евклідовій площині існує принаймні одна побудована точка, яка цій фігурі не належить.

$\beta_л$. Якщо побудовано точки A і B ($A \not\equiv B$), то можна побудувати (можна вважати побудованим) промінь $\left[AB\right)$.

$\beta_ц$. Якщо побудовано точку O і відрізок $\left[AB\right]$, то можна побудувати (можна вважати побудованим) коло з центром у точці O радіусу $\left[AB\right]$ (коло (O, AB)).

Отже, представлена аксіоматика $\sum'$ має наступну структуру

$$\Sigma'\left(M, L, \mathbb{R}^{+}, H; p_1, p_2, p_3, p_4, q; \alpha_i, i=\overline{1,9}; \beta_j, j=\overline{1,7}; \beta_л, \beta_ц\right).$$

Зрозуміло, що це аксіоматика конструктивного характеру, $\sum_{пл.} \subset \sum'$, $\mathrm{T}(\Sigma) \subset \mathrm{T}(\Sigma')$.

Аксіоми $\beta_1 - \beta_7$ називають загальними аксіомами теорії «побудов» на евклідовій площині. Аксіому $\beta_л$, зрозуміло, називають аксіомою лінійки, а аксіому $\beta_ц$ – аксіомою циркуля. Аксіоми $\beta_л$ і $\beta_ц$, очевидно, представляють собою математичні абстракції тих конкретних дій, які можна виконувати під час креслення за допомогою таких реальних інструментів як лінійка і циркуль.

Зауважимо, що, на відміну від загального поняття про аксіоматичну теорію евклідової геометрії, стандартний курс геометрії закладів загальної середньої освіти, як правило, не містить жодної тези щодо аксіоматики теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки». У той же час, на початку введення поняття про «побудови» за допомогою циркуля і лінійки, у кожному відповідному підручнику вміщено твердження типу «Давайте домовимося, що за допомогою лінійки ми можемо…, за допомогою циркуля ми можемо… Жодних інших дій за допомогою цих інструментів ми виконувати не можемо…». По суті, це – аналоги аксіом $\beta_л$ і $\beta_ц$. Отже, поняття про аксіоматику «циркуля і лінійки» у курсах геометрії закладів загальної середньої освіти присутнє, хоча і у неявному вигляді.

Традиційно, у теорії аксіоматики $\sum'$ під загальною задачею на «побудову» геометричної фігури евклідової площини «за допомогою циркуля і лінійки» розуміють задачу наступного виду.

1. На евклідовій площині задано скінченну кількість геометричних фігур $F_1, F_2, ..., F_k, k \in N$, або не задано жодної геометричної фігури. Згідно твердження аксіоми β_2 , задані фігури вважаються побудованими.
2. Вказано властивості певної не побудованої геометричної фігури F, яку визначено як мету розв'язання даної задачі на побудову.
3. Застосовуючи аксіоми $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_7, \beta_Л, \beta_Ц$ у будь-якій послідовності, у необхідній кількості, але лише скінченну кількість разів, треба перетворити не побудовану геометричну фігуру F у побудовану.

У відповідності до загального поняття про конструктивізм у математиці (див. матеріал лекції 1), цілком очевидним є конструктивний, навіть, фінітний, характер умови сформульованої загальної задачі. Цілком зрозумілим зараз стає той факт, що теорію розв'язання подібних задач беззаперечно віднесено до конструктивних аспектів евклідової планіметрії.

Найважливішим і, мабуть, першим, твердженням теорії аксіоматики $\sum'$ є твердження про те, що кожна фігура, «побудована» на евклідовій площині «за допомогою циркуля і лінійки» у теорії аксіоматики $\sum'$, існує на евклідовій площині з точки зору теорії аксіоматики $\sum_{пл.}$ (при цьому зрозуміло, що, з точки зору теорії аксіоматики $\sum'$, також).

Дійсно, згідно твердження аксіоми β_2, геометричні фігури, які задано умовою задачі на побудову, вже є фігурами евклідової площини, тобто, існують у аксіоматичній теорії $\mathrm{T}\left(\sum_{пл.}\right)$ аксіоматики $\sum_{пл.}$. У $\mathrm{T}\left(\sum_{пл.}\right)$ існують і геометричні фігури, утворені з існуючих геометричних фігур за допомогою таких теоретико-множинних операцій над множинами як взяття підмножини, об'єднання, перетин та знаходження різниці. Кожна точка евклідової площини і кожна точка довільної непорожньої підмножини евклідової площини, існують, як точки у $\mathrm{T}\left(\sum_{пл.}\right)$, у $\mathrm{T}\left(\sum_{пл.}\right)$, для будь-яких різних точок A, B, існує промінь $\left[AB\right)$, для кожної точки O і кожного відрізка $\left[AB\right]$ існує коло з центром у точці O радіусу $\left[AB\right]$. Отже, в силу вищевказаного характеру створення аксіоматики $\sum'$ як канонічного продовження аксіоматики $\sum_{пл.}$, «побудови» геометричних фігур «за допомогою циркуля і лінійки» у теорії аксіоматики $\sum'$, одночасно, є конструктивного характеру доведеннями фактів існування цих фігур у теорії аксіоматики $\sum_{пл.}$.

У той же час, обернене твердження не є вірним. Як вже було вказано, ще з давньогрецьких часів відомими є задачі на «побудову», які не можна розв'язати за допомогою «циркуля і лінійки». В силу своєї структури, $\mathrm{T}\left(\sum_{пл.}\right)$ містить такі конструктивного характеру обґрунтування фактів існування певних геометричних фігур, які, по відношенню до $\mathrm{T}\left(\sum'\right)$, не є фактами «побудови» цих фігур «за допомогою циркуля і лінійки». Натепер у $\mathrm{T}\left(\sum'\right)$ розроблено критерії можливості реалізації тих чи інших «побудов».

Одночасно, у $\mathrm{T}\left(\sum'\right)$ сформовано загальне усвідомлення про розв'язок задачі на «побудову за допомогою циркуля і лінійки», яке, фактично, перетворює кожну задачу такого типу на геометричну задачу з геометричними параметрами. У якості геометричних параметрів при цьому виступають задані умовою задачі фігури $F_1, F_2, .., F_k$.

Визначеною і визнаною є загальна схема знаходження такого розв'язку. Схема є конструктивною. Вона передбачає послідовну реалізацію чотирьох етапів розв'язання, які мають назви аналіз, побудова, доведення і дослідження.

Етап аналізу спрямовано на пошук і знаходження шляхів розв'язання поставленої задачі. Його метою є усвідомлення тих зв`язків, що існують між заданими умовою задачі фігурами і тією фігурою, яку треба «побудувати», зв'язків, відтворення яких є можливим як результат скінченної кількості разів послідовного використання аксіом $\beta_i, i=\overline{1,7}; \beta_л, \beta_ц$ теорії «побудов», підсумком відтворення яких повинно стати перетворення відповідної «не побудованої» фігури F у «побудовану».

Для проведення аналізу, як правило, припускають, що шукану фігуру F вже побудовано. З технічної точки зору, при проведенні аналізу, зазвичай, використовують схематичні зображення і заданих планіметричних фігур і шуканої.

При розв'язанні задач на «побудову» етап аналізу не є обов'язковим. У ньому немає жодного сенсу, якщо доцільна послідовність необхідних для розв'язання кроків-«побудов» є цілком зрозумілою безпосередньо із умови поставленої задачі. Але так трапляється далеко не завжди.

Традиційними для математики є теореми, згідно умов яких треба обґрунтувати існування і єдиність певного математичного об'єкта, виходячи з проголошених характеристичними умов. Доведення, зрозуміло, складається з двох частин: доведення факту існування і доведення факту єдиності. Перед початком доведення виникає природне питання: з чого починати. При цьому природною здається та відповідь, що спочатку варто довести факт існування. (Тоді єдиність, у разі її справедливості, можна обґрунтувати за допомогою міркувань «від супротивного»). Ну, а що робити у випадках, коли інтуїтивно, буцімто, здається, що факт існування має місце, а от як цей факт обґрунтувати – одразу не зрозуміло. У переважній більшості подібних ситуацій намагаються спочатку обґрунтувати факт єдиності, а вже потім – факт існування. Але що означає факт єдиності без факту існування? Це означає доведення факту єдиності у припущенні факту існування. Зі зразками умовиводів подібного типу ви неодноразово зустрічалися у різних розділах вищої математики, у тому числі, наприклад, у алгебрі, при доведенні існування і однозначної визначеності оберненої алгебраїчної операції для групової операції довільної алгебраїчної групи, або у диференціальній геометрії, при доведенні існування і єдиності дотичної прямої чи співдотичної площини до регулярної елементарної кривої у заданій на ній точці. Міркування «за припущенням існування» призводять або до суперечності (тоді твердження, яке підлягало доведенню, взагалі не є вірним), або, найчастіше, до однозначного визначення конкретних форм шуканого об’єкта. Результатом проведених міркувань стає твердження про те, що, якщо шуканий математичний об’єкт існує, то він може мати лише визначену, найчастіше, саме конструктивним чином, форму. Для закінчення доведення теореми достатньо показати, що, за умови даної теореми, об’єкт визначеної форми дійсно існує і задовольняє всі необхідні умови.

Реалізація етапу аналізу при розв’язанні геометричної задачі на «побудову за допомогою циркуля і лінійки», передбачає проведення міркувань вищевказаного типу.

Отже, мається на увазі, що до проведення вищевказаного типу міркувань учні закладів загальної середньої освіти починають звикати з другої половини сьомого року навчання. З точки зору формування в них необхідної системи логічного мислення, цей факт важко переоцінити.

Етап побудови передбачає встановлення доцільної скінченної послідовності застосувань аксіом $\beta_i, i=\overline{1,7}; \beta_л, \beta_ц$, так званих кроків побудов, з метою перетворення визначеної умовою задачі не побудованої геометричної фігури F у побудовану, на підставі заданих умовою задачі геометричних фігур $F_1, F_2, .., F_k$. Оскільки аксіоми «циркуля і лінійки» є математичними абстракціями тих основних дій, які, за допомогою реальних фізичних інструментів – саме циркуля і лінійки – можуть бути виконані у реальному фізичному просторі, на папері, на дошці або на екрані монітора, при викладанні евклідової геометрії у закладах загальної середньої освіти за необхідне вважають і реальне графічне виконання відповідних побудов. Проблеми при цьому можуть виникнути лише по відношенню до заданих фігур $F_1, F_2, .., F_k$. Згідно твердження аксіоми β_2, ці геометричні фігури, за умови сформульованої задачі вважаються побудованими. Але це зовсім не означає, що безпосередньо вони, як фігури евклідової геометрії, у теорії аксіоматики $\sum'$ можуть бути «побудовані за допомогою циркуля і лінійки», серед фігур $F_i, i = \overline{1,k}$ можуть опинитися, наприклад, еліпс чи парабола... З цього приводу варто зауважити, що, по-перше, наявність подібних фігур серед фігур $F_i, i = \overline{1,k}$, аж ніяк не заважає реалізації етапу побудови у теоретичному плані, по-друге, у курсах геометрії закладів загальної середньої освіти умови задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» подібних фігур не містять, по-третє, будь-який процес моделювання теоретичних «побудов» за допомогою реальних фізичних дій є процесом не точним, наближеним, отже, сутність процесу ілюстрування розв'язання задачі на «побудову» не зміниться, якщо у ньому замість моделі еліпсу використати модель овалу, безпосередньо, овал обрати у якості моделі еліпса і т. п. (Тобто, якщо при виконанні «фізичних» побудов замінити «незручну» задану геометричну фігуру фігурою, яка у певному сенсі є її наближенням і вже допускає побудову за допомогою циркуля і лінійки).

Етап доведення передбачає обґрунтування того факту, що, як результат реалізації перелічених на етапі побудови кроків побудов, «побудовано» фігуру, яка задовольняє всі умови розглянутої задачі. Всі міркування цього етапу, зрозуміло, є міркуваннями конструктивного характеру.

Реалізація етапу дослідження передбачає

1) визначення, у відповідності до умови задачі, скінченної кількості можливих варіантів щодо відмін у характеристиках вихідних даних;

2) знаходження для кожного з визначених варіантів обґрунтованих відповідей на питання чи існують у даному випадку розв'язки задачі, чи ні; якщо розв'язки існують, то скільки, які саме.

Постановка останнього питання вимагає певних уточнень. Справа в тому, що умови деяких задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» містять вимоги певних спеціальних варіантів розташувань «побудованої» фігури відносно вихідних даних. За домовленістю, якщо умови задачі на «побудову» подібних вимог не містять, то всі рівні (конгруентні) між собою «побудовані» фігури приймають за один розв'язок. Якщо ж, умови задачі на «побудову» містять вимоги щодо розташування «побудованої» фігури відносно вихідних даних, то, рівні (конгруентні) між собою «побудовані фігури» приймають за різні розв'язки, якщо ці фігури по різному розташовані відносно вихідних даних.

Пошуки відповідей на питання дослідження, як правило, починається з аналізу процесу «побудови» з точки зору усвідомлення того, чи при будь-якому варіанті обрання вихідних даних задачу можна розв'язати тим способом, який було використано у процесі «побудови». При варіанті «так», подальші дослідження зводяться до з'ясування питання про кількість розв'язків. При варіанті «ні», треба визначити, при якому виборі вихідних даних задачу не можна розв'язати обраним способом, продовжити дослідження з приводу того, чи не існує у подібному випадку інших підходів до її розв'язання.

(Варто зауважити, що серед задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» курсів геометрії закладів загальної середньої освіти, час від часу зустрічаються задачі, які при різних варіантах задання вихідних даних вимагають різних підходів до свого розв'язання. Спробуйте знайти приклади подібних задач самостійно).

На початку даної лекції, як найважливіший факт теорії аксіоматики $\sum'$, було обґрунтовано твердження про те, що кожна фігура, «побудована» на евклідовій площині «за допомогою циркуля і лінійки» у теорії аксіоматики

$\sum'$, існує на евклідовій площині з точки зору теорії аксіоматики $\sum_{пл.}$ Звідси випливає, що, якщо фігури не існує на евклідовій площині з точки зору теорії аксіоматики $\sum_{пл.}$, то її «побудова за допомогою циркуля і лінійки» у теорії аксіоматики $\sum'$ є неможливою. Для переважної більшості задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» курсів геометрії закладів загальної середньої освіти саме на підставі цього міркування обґрунтовують відсутність розв'язків при певному виборі вихідних даних. Зауважимо також, що не для кожної задачі на «побудову» на етапі дослідження всі міркування носять виключно конструктивний характер.

Задачами на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» першого рівня складності вважають певні задачі, метою розв'язання яких є «побудова» таких базових фігур евклідової планіметрії, як точки, прямі, відрізки, кути, трикутники та кола. Розроблено доцільний традиційний перелік подібних задач.

З точки зору методики викладання геометрії у закладах загальної середньої освіти, розв'язання перших задач з цього переліку, які серед всіх задач першого рівня складності вважаються найпростішими (насамперед, за своєю умовою, а не за способом розв'язання), фактично, має інтуїтивний характер, не обґрунтовується. Оскільки аксіоми «побудов за допомогою циркуля і лінійки» у шкільних підручниках представлено у неявному вигляді, то там можна вважати, що розв'язки таких задач у неявному вигляді включено до складу самих аксіом.

Одночасно, для тих курсів математики закладів вищої освіти, у яких склад аксіом аксіоматики $\sum'$ наведено у явному вигляді, перелік подібних задач суттєво залежить саме від характеру тверджень, визначених у якості аксіом теорії «побудов».

Так, у аксіоматичній теорії наведеної аксіоматики $\sum'$ «найпростішими» вважають задачі, умови яких формулюють наступним чином:

1. Задано точки A і B ($A \neq B$). Побудувати пряму AB.

2. На евклідовій площині побудувати яку-небудь пряму.
3. Задано точки A і B ($A \neq B$). Побудувати відрізок $[AB]$.
4. На евклідовій площині побудувати який-небудь відрізок.
5. На заданій прямій побудувати принаймні дві точки.
6. Для заданих точок A і B ($A \neq B$) побудувати таку точку C, що $A - B - C$.
7. На заданому колі побудувати принаймні дві точки.
8. На евклідовій площині побудувати яке-небудь коло.

Наведемо розв'язки деяких із сформульованих задач 1 — 8. (Розв'язки інших задач даної сукупності є аналогічними). Під час розв'язання для кожної із задач 1 — 8 реалізацію етапу аналізу, виходячи з міркувань очевидності, не вважають за потрібне.

Задача 1.

Дано: точки A і B евклідової площини ($A \neq B$) (рис.1).

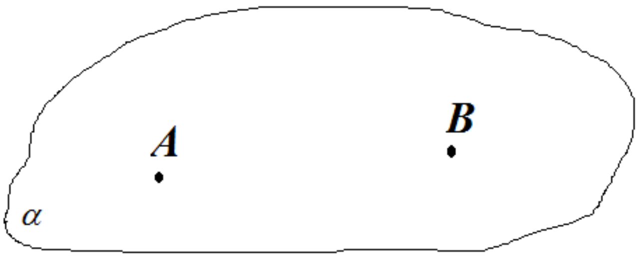

Рис. 1

Побудувати: пряму AB.

Побудова. 1. Згідно аксіоми β_2 точки A і B ($A \neq B$) є побудованими (рис.1).

2. Згідно аксіоми $\beta_л$, побудованим є промінь $[AB)$ (рис.2).

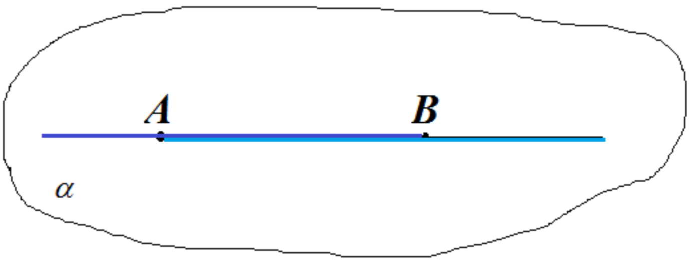

Рис. 2

3.Згідно тієї ж аксіоми $\beta_л$, побудованим є промінь $[BA)$ (рис.2).

4. Згідно аксіоми β_3, побудовано множину

$[BA)\cup[AB)$, яка співпадає з прямою AB , що й треба було побудувати.

Доведення. Переконаємося у тому, що остання теза останнього (четвертого) кроку побудови, дійсно, є справедливою. Насправді, у евклідовій геометрії (у $\mathrm{T}(\sum)$) точки A і B належать променю $[AB)$, об'єднанням променів $[AB)$ і $[BA)$ є пряма AB . Згідно означення об'єднання множин, промінь $[AB)$ є підмножиною прямої AB . Отже, $A\in[AB),\ B\in[AB),\ [AB)\subset AB$, і тому $A\in AB,\ \ B\in AB$, пряма AB є тією прямою, яку й треба було побудувати.

Дослідження. Проведення аналізу етапу побудови вказує на те, що при будь-якому виборі вихідних даних – таких точок A і B, що $A\not\equiv B$ – задачу можна розв'язати тим способом, який ми обрали. У $\mathrm{T}(\sum)$ через будь-які дві різні точки проходить єдина пряма. Отже, при будь-якому виборі вихідних даних, задача має єдиний розв'язок, який можна знайти тим способом, який ми обрали.

Задача 2. На евклідовій площині побудувати принаймні одну пряму.

Дано: Нічого не дано у сформульованій задачі. Оскільки всі міркування відбуваються у межах евклідової площини, то можна вважати, що задано евклідову площину α як цілісний геометричний об'єкт, але не окремі точки на ній.

Побудувати: яку-небудь пряму l, що належить площині α.

Побудова: 1. Згідно аксіоми β_1, на площині α існують принаймні дві різні побудовані точки. Позначимо ці точки через A і B $(A\not\equiv B)$.

2. Згідно аксіоми $\beta_л$, тоді, побудованим є промінь $[AB)$ (рис. 3).

3. Згідно аксіоми $\beta_л$, побудованим є і промінь $[BA)$.

4. Згідно аксіоми β_3, побудовано

множину $[AB)\cup[BA)$.

Доведення: У евклідовій геометрії $\left(y\ \mathrm{T}(\Sigma),\ \mathrm{T}(\Sigma)\subset\mathrm{T}(\Sigma')\right)$ об'єднання $[AB)\cup[BA)$ променів $[AB)$ і $[BA)$ утворює пряму AB, якщо дві

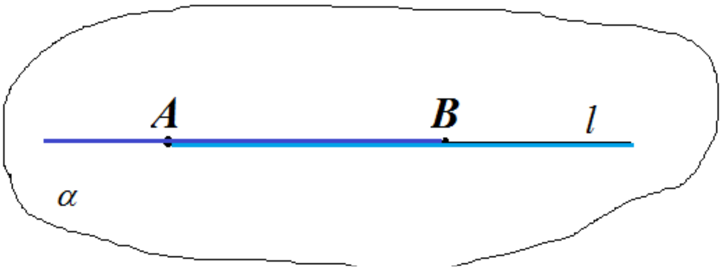

Рис. 3

точки прямої належать певній площині, то і вся пряма належить цій площині. Отже, четвертий крок побудов означає, що побудовано певну пряму l евклідової площини α, що й треба було побудувати.

Дослідження. У відповідності до аксіоматики Σ' всі чотири кроки побудов завжди є здійсненними. Отже, задача завжди має розв'язок. Питання про те, скільки різних розв'язків вона має, можна переформулювати на питання про те, скільки різних прямих можна «побудувати» на евклідовій площині «за допомогою циркуля і лінійки», та пов'язане з ним питання про те, чи будь-яку пряму евклідової площини можна «побудувати за допомогою циркуля і лінійки». Пошуки відповідей на такі питання виходять за межі даної лекції, вони є достатньо складними і, у певному сенсі, не носять конструктивного характеру.

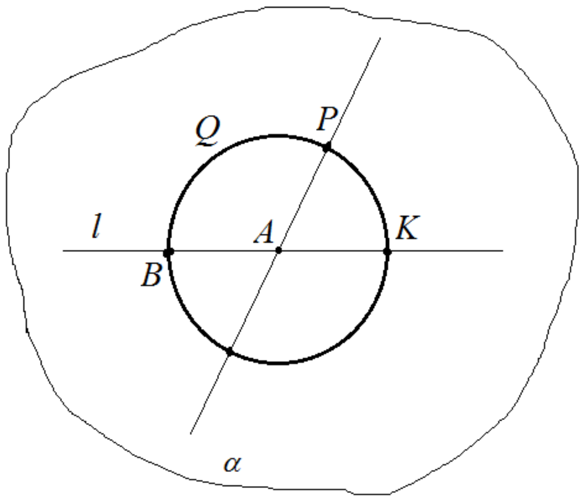

Рис. 4

Задача 5. На заданій прямій побудувати дві різні точки.

Дано: пряму l.

Побудувати: точки $A,B\in l, A\neq B$

Побудова: 1. Згідно аксіоми β_2, пряма l евклідової площини α є побудованою.

2. Згідно аксіоми β_6, на прямій l існує принаймні одна побудована точка. Позначимо цю точку через A.

3. Згідно аксіоми β_7, на евклідовій площині α, що містить пряму l, існує принаймні одна побудована точка, яка не належить прямій l. Позначимо цю точку через P (рис. 4)

4. Згідно аксіоми $\beta_л$, на площині α побудовано промінь $[AP)$.

5. Згідно тієї ж аксіоми $\beta_л$, на площині α побудовано промінь $[PA)$

6. Згідно аксіоми β_4, на площині α побудовано множину $[AP)\cap[PA)$, яка у евклідовій геометрії співпадає з відрізком $[AP]$

7. Згідно аксіоми $\beta_ц$, побудованим є коло Q з центром у точці A і радіусом $[AP]$.

8. Згідно аксіоми β_4, побудовано множину $l \cap$ Q. Множина $l \cap$ Q складається з двох точок, припустимо B і K, які належать прямій l.

Доведення. Точка $A \in l$ є побудованою згідно другого кроку процесу побудов. Згідно третього кроку процесу побудов, точка P є побудованою і не співпадає з точкою A в силу того, що $A \in l$, $P \notin l$. У евклідовій геометрії $\mathrm{T}(\Sigma)$ перетин променів $[AP)$ і $[PA)$ не є порожнім. Отже, шостий крок побудов є здійсненним, відрізок $[AP]$ побудовано. У евклідовій геометрії $\mathrm{T}(\Sigma)$ пряма, що проходить через центр кола, перетинає коло у двох діаметрально протилежних точках. Отже, точки B і K на прямій l існують і є побудованими у відповідності до восьмого кроку побудов. Точки B і K є різними точками прямої l, жодна з них не співпадає з точкою A, бо точки B і K є діаметрально протилежними точками кола Q, центром якого є точка A.

Як підсумок, на прямій l побудовано три попарно різні точки, три пари попарно різних точок, задачу розв'язано.

Дослідження: Аналіз процесу доведення свідчить про те, що задачу при будь-якому виборі вихідних даних (прямої l), можна розв'язати тим способом, який ми обрали. Як результат розв'язання було отримано три розв'язки. Зрозуміло, що, за допомогою послідовної побудови кіл, радіуси яких дорівнюють відрізку $[AP]$, з центрами у попередньо побудованих точках, на прямій l можна побудувати n попарно різних точок для будь-якого натурального числа n.

Умови наступної серії задач першого рівня складності традиційно формулюються наступним чином.

1. На заданому промені, від його початку, відкласти відрізок, що дорівнює заданому.
2. Від заданого променя, у задану півплощину, відкласти кут, що дорівнює заданому.
3. Побудувати серединний перпендикуляр до заданого відрізка.
4. Побудувати середину заданого відрізка.
5. Побудувати бісектрису заданого кута.
6. Через задану на заданій прямій точку провести пряму, перпендикулярну до заданої.
7. Через задану точку, що не належить заданій прямій, провести пряму, перпендикулярну до заданої.
8. Через задану точку, що не належить заданій прямій, провести пряму, паралельну до заданої.
9. Побудувати трикутник за двома сторонами і кутом між ними.
10. Побудувати трикутник за трьома сторонами.
11. Побудувати трикутник за стороною і прилеглими до неї кутами.
12. Побудувати прямокутний трикутник за двома катетами.
13. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою.

14. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і прилеглим гострим кутом.
15. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і гострим кутом.
16. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і протилежним гострим кутом.
17. Через задану точку, що знаходиться у зовнішній відносно заданого кола області, провести до заданого кола дотичну.
18. Поділити заданий відрізок, припустимо, на п’ять однакових частин.

На відміну від вищезазначених найпростіших задач на «побудову», вміння розв’язувати «за допомогою циркуля і лінійки» задачі на «побудову» даної серії для учнів закладів загальної середньої освіти є обов’язковою вимогою процесу навчання.

Обов’язковою також є вимога виконання відповідних реальних графічних побудов за допомогою циркуля і лінійки. При цьому зрозуміло, що реалізація того чи іншого теоретичного кроку побудови згідно умов однієї з аксіом β_i, $i=\overline{1,7}$, з практичної точки зору передбачає усвідомлення певного результату побудов, виконаних раніше; реалізація теоретичного кроку побудови згідно аксіоми $\beta_л$ чи $\beta_ц$ – з практичної точки зору вимагає виконання певної конкретної однокрокової практичної дії, відповідно, за допомогою лінійки або циркуля. Отже, представлення теоретичного процесу «побудови за допомогою циркуля і лінійки» певної геометричної фігури у вигляді скінченної послідовності застосувань аксіом теорії «побудов» виступає як необхідна передумова вдалого відтворення його графічної ілюстрації.

З методичної точки зору, при розв’язанні задач 1–18 суперечливим залишається питання про доцільність визнання обов’язковою реалізацію етапу аналізу.

З одного боку, на відміну від задач із серії «найпростіших», шукані шляхи розв’язання задач 1–18, у своїй переважній більшості, не є очевидними. З іншого боку, саме через це, реалізація процесу пошуку таких шляхів вимагає певних спеціальних навичок, якими, на першому році опанування систематичного курсу геометрії, здобувачі загальної середньої освіти ще не володіють. В силу цього, значна кількість методистів вважає, що треба просто ознайомити учнів з розв'язками переважної більшості задач серії 1–18, це створить підґрунтя для знаходження у подальшому, саме під час реалізації етапу аналізу, шляхів розв'язання більш складних задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки». На відміну від позиції авторів шкільного підручника [7], для учнів сьомого року навчання методично вірною будемо вважати останню точку зору. У той же час треба зауважити, що, з наведеного переліку задач, принаймні, для задачі 8 і задач 12–18, традиційними є різні шляхи розв'язання. Отже, для вчителя, при обранні найоптимальнішого з них, попереднє проведення аналізу варто визнати доцільним.

Розглянемо, наприклад, задачу 16: «Побудувати прямокутний трикутник за катетом і протилежним гострим кутом».

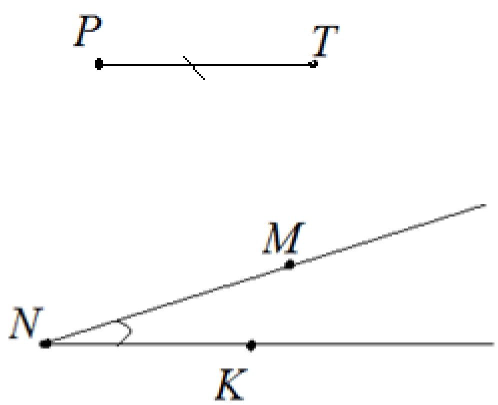

Рис. 5

Дано: відрізок $\left[PT\right]$; гострий кут MNK (рис. 5).

Побудувати: трикутник ABC, у якого $\angle ACB = 90°$, катет $\left[CB\right]$ дорівнює заданому відрізку $\left[PT\right]$, протилежний до цього катета $\angle BAC$ дорівнює заданому куту MNK.

Аналіз: припустимо, що шуканий прямокутний трикутник ABC побудовано: $\angle BCA = 90°$; $BC = PT$; $\angle BAC = \angle MNK$ (рис. 6). Проведемо у цьому трикутнику висоту CH ($CH \perp AB$). Розглянемо прямокутні трикутники $\triangle BHC$ і $\triangle BAC$. Вони мають спільний гострий кут $\angle ABC$. Оскільки сума гострих кутів прямокутного трикутника складає $90°$, звідси випливає, що $\angle BCH = \angle BAC$, тобто, кут $\angle BCH$ такого трикутника дорівнює заданому куту $\angle MNK$. Отже, вершину N заданого кута $\angle MNK$ можна перейменувати на C, на утвореному промені $[CK)$ можна відкласти відрізок $[CB]$, який дорівнює заданому відрізку $[PT]$. Точка A є точкою перетину прямої, що проходить через точку C перпендикулярно до прямої BC, з променем, який проходить через точку B перпендикулярно до променя $[CM)$ (рис. 6).

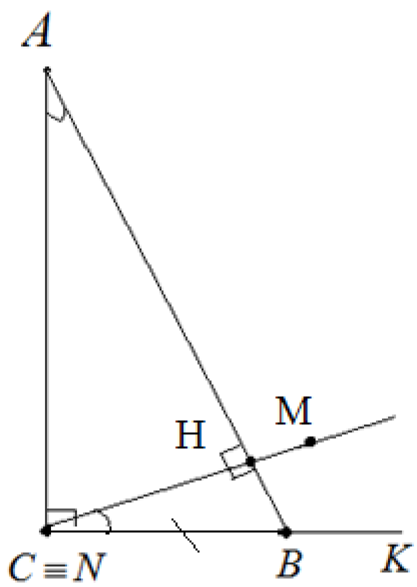

Рис. 6

Побудова: 1. Розглянемо заданий кут $\angle MNK$. Згідно аксіоми β_2, він є побудованим, тобто, побудованими є промені $[NM)$ і $[NK)$. Перейменуємо точку N на точку C. ($N \equiv C$).

2. Згідно аксіоми β_2, заданий умовою задачі відрізок $[PT]$ також є побудованим.
3. Згідно аксіоми $\beta_ц$, побудуємо коло Q_1 з центром у точці C радіусу PT.
4. Згідно аксіоми β_4, побудованою є точка перетину кола Q_1 з променем $[CK)$.
5. Згідно аксіоми $\beta_л$, побудованим є промінь $[BC)$.
6. Згідно аксіоми β_4, побудованою є точка перетину кола Q_1 з променем $[BC)$. Позначило її через B_1.
7. Згідно аксіоми $\beta_л$, побудованим є промінь $[B_1B)$.
8. Згідно аксіоми β_4, побудованим є відрізок $[B_1B]$: $[B_1B] = [BC) \cap [B_1B)$.

9. Згідно аксіоми $\beta_ц$, побудованим є коло Q_2 з центром у точці B радіусу $[BB_1]$.

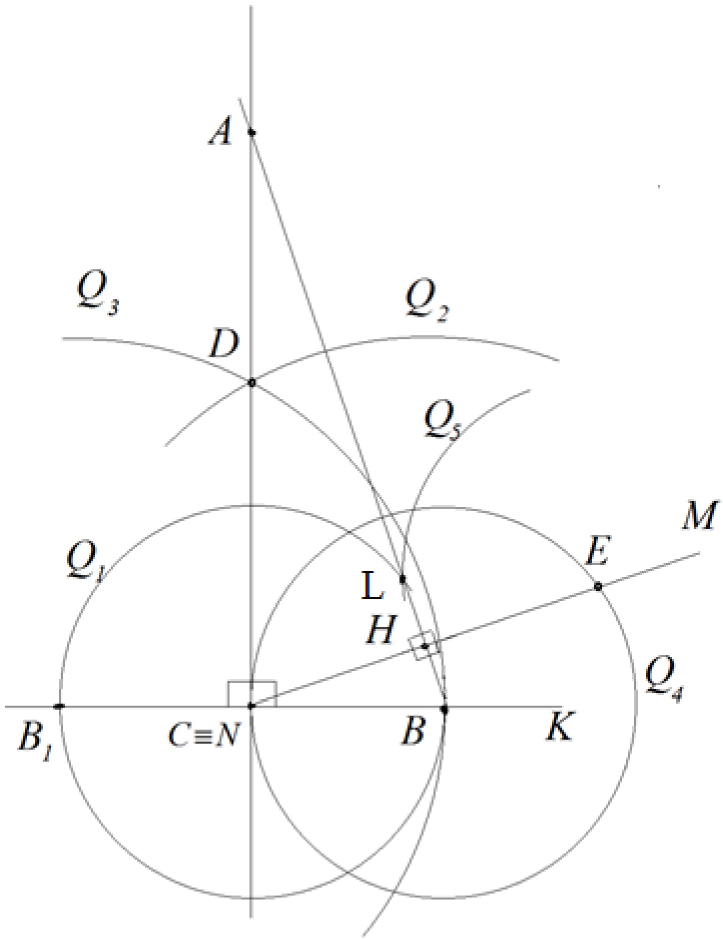

Рис. 7

10. Згідно аксіоми $\beta_ц$, побудованим є коло Q_3 з центром у точці B_1 радіусу $[BB_1]$.

11. Згідно аксіоми β_4, побудованою є точка D, одна з двох точок перетину кіл Q_2 і Q_3.

12. Згідно аксіоми $\beta_л$, побудованим є промінь $[CD)$.

13. Згідно аксіоми $\beta_л$, побудованим є промінь $[DC)$.

14. Згідно аксіоми β_3, побудованою є пряма CD.

15. Згідно аксіоми β_4, побудованим є відрізок $[CB]$, $[CB]=[CK)\cap[BC)$.

16. Згідно аксіоми $\beta_ц$, побудованим є коло Q_4 з центром в точці B радіусу $[CB]$.

17. Згідно аксіоми β_4, побудованими є обидві точки перетину кола Q_4 з променем $[CM)$. Однією з таких точок є точка C, позначимо іншу точку через E.

18. Згідно аксіоми $\beta_ц$, побудованим є коло Q_5 з центром в точці E радіусу BC.
19. Згідно аксіоми β_4, побудованими є обидві точки перетину кола Q_5 з колом Q_1. Однією з таких точок є точка B, позначимо іншу точку через L.
20. Згідно аксіоми $\beta_л$, побудованим є промінь $[BL)$.
21. Згідно аксіоми β_4, побудованою є точка A перетину прямої CD з променем $[BL)$.
22. Згідно аксіоми $\beta_л$, побудованим є промінь $[AC)$.
23. Згідно аксіоми β_4, побудованим є відрізок $[AC]$: $[AC]=[CD)\cap[AC)$.
24. Згідно аксіоми $\beta_л$, побудованим є промінь $[AB)$.
25. Згідно аксіоми β_4, побудованим є відрізок $[AB]$, $[AB]=[BL)\cap[AB)$.
26. Згідно аксіоми β_3, побудованим є трикутник ABC $\triangle ABC=[BC]\cup[AC]\cup[AB]$.

Доведення. Як результат реальних графічних побудов, що супроводжували теоретичне розв’язання даної задачі, побудовано трикутник $\triangle ABC$. Перевіримо, що реалізація представлених двадцяти шести кроків побудов з теоретичної точки зору гарантує той факт, що $\triangle ABC$ «побудовано» і у $\mathrm{T}(\Sigma')$.

Із двадцяти шести кроків побудов, використаних для розв’язання даної задачі, нездійсненними за своїм змістом можуть виявитися лише ті кроки, реалізація яких передбачає посилання на аксіому β_4. Отже, перевіримо, що, у даному випадку, для геометричних фігур, перетин яких будується, цей перетин не є порожньою множиною теорії $\mathrm{T}\left(\sum_{\Pi_2}\right)$.

1. На четвертому кроці побудови мова йде про перетин кола Q_1 і променя з початком у центрі даного кола. У евклідовій геометрії такі фігури завжди мають єдину спільну точку.

2. На шостому кроці побудови розглядається перетин кола Q_1 з таким променем, початок якого належить даному колу, який містить діаметр даного кола. Зрозуміло, що у $\mathrm{T}\left(\sum_{\Pi_2}\right)$ і початок променя, і діаметрально протилежна до нього точка, є спільними точками даного променя і даного кола.

3. На восьмому, п'ятнадцятому і двадцять п'ятому кроках побудов мова йде про перетин двох променів, які містять спільний відрізок . Зрозуміло, що такий перетин не є порожнім.

4. Кола Q_2 і Q_3 одинадцятого кроку побудов мають непорожній перетин тому, що мають однакові радіуси і центр кожного з них є точкою іншого.

5. На сімнадцятому кроці побудов мова йде про наявність двох спільних точок у кола Q_4 і променя $[CM)$. Центром кола Q_4 є точка B, яка належить променю $[CK)$. За умови задачі заданий кут MCK є гострим. Нехай $BH \perp CM$. Трикутник CHB є прямокутним. Оскільки прямокутний трикутник не може мати тупого кута, точка H належить променю CM, справджується нерівність $BH < BC$. Останнє означає, що точка H лежить всередині кола Q_4, пряма CM є прямою, що проходить через внутрішню точку кола Q_4. Отже, вона перетинає коло Q_4 у двох точках, однією з яких є точка C. Інша точка є внутрішньою точкою променя $[CH)$, який співпадає з променем $[CM)$. Отже, точка E, як друга точка перетину променя $[CM)$ з колом Q_4, існує у $\mathrm{T}\left(\sum_{\Pi_2}\right)$.

6. На дев'ятнадцятому кроці побудов мова йде про існування двох точок перетину кіл Q_1 і Q_5. Кола Q_1 і Q_5 мають однаковий радіус $\left[BC\right]$, відстань між їх центрами є меншою за їх подвоєний радіус, бо відрізок CE є хордою кола Q_4, яка не є його діаметром. Отже, у $\mathrm{T}\left(\sum_{\Pi_2}\right)$ дві точки перетину цих кіл існують.

7. На двадцять першому кроці побудов мова йде про точку перетину прямої CD і променя $\left[BL\right)$, (який співпадає з променем $\left[BH\right)$). Розглянемо $\triangle B_1DB$. Згідно третього, четвертого і шостого кроків побудов, $B_1C = CB$. Згідно дев'ятого, десятого і одинадцятого кроків побудов, $B_1D = DB$. Отже, $\triangle B_1DB$ є рівнобедреним з основою B_1B, відрізок $\left[DC\right]$ є медіаною цього трикутника, проведеною до його основи. Але тоді, за властивістю рівнобедреного трикутника, відрізок $\left[DC\right]$ є й висотою цього трикутника, проведеною до його основи, пряма DC є перпендикулярною до прямої BC. Як вже було обґрунтовано, $\triangle BCH$ є прямокутним з прямим кутом при вершині H . Отже, його кут CBH є гострим, промені $\left[CD\right)$ і $\left[BH\right)$ належать одній півплощині відносно прямої BC, у сумі їх градусні міри складають менше, ніж $180°$. Згідно п'ятого постулату Евкліда, який є еквівалентним до аксіоми паралельності теорії $\mathrm{T}\left(\sum_{\Pi_2}\right)$, промені $\left[CD\right)$ і $\left[BH\right)$ перетинаються, точка A існує.

Але тоді існує і трикутник $\triangle ABC$, він є побудованим тому, що, згідно п'ятнадцятого, двадцять третього і двадцять п'ятого кроків побудов є побудованими його сторони, він є прямокутним за доведеним ($AC \perp CB$). Прямокутні трикутники ABC і HBC мають спільний гострий кут $\angle HBC$. Отже, їх інші гострі кути є рівними: $\angle CAB = \angle HCB$. Але $\angle HCB$ співпадає з кутом $\angle MCK$, який є заданим. Тому $\angle CAB = \angle MCK$. Згідно третього і четвертого кроків побудов, $BC = PT$. Все це означає, що $\triangle ABC$ є шуканим, що й треба було довести.

Дослідження. Проведений під час реалізації етапу доведення ретельний аналіз всіх виконаних кроків побудов, дозволяє стверджувати, що задача 16 завжди має розв’язок, її завжди можна розв’язати тим способом, який ми обрали. У евклідовій геометрії всі прямокутні трикутники, що мають однакові катети і однакові, протилежні до цих катетів, гострі кути, є рівними між собою. Умови задачі не містять жодних вимог щодо певного спеціального розташування шуканого трикутника ABC на евклідовій площині. Отже, можна зробити той висновок, що дана задача, при будь-якому виборі вихідних даних, має єдиний розв’язок.

Наведений приклад переконливо демонструє той факт, що математики просто не могли не розробити для опису розв’язання задачі на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» певний скорочений алгоритм. За загальною домовленістю, при проведенні опису необхідних кроків «побудов», можна перелічувати не лише необхідні аксіоми, а й будь-які з вищенаведених задач на «побудову» першого рівня складності. Аналогічні посилання є допустимими і для етапів доведення та дослідження. Одночасно зрозуміло, що виконання тих реальних графічних побудов, які мають ілюструвати «побудови» теоретичні, відбувається виключно у вигляді скінченної послідовності тих кроків практичних дій, що відповідають саме окремим аксіомам, а не певним їх сукупностям.

Основними методами розв’язання задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» вищих рівнів складності вважають 1) метод трикутників; 2) метод геометричних місць точок; 3) метод перетворень, зокрема, для курсів геометрії закладів загальної середньої освіти та закладів передвищої освіти, а) метод рухів; б) метод перетворень подібності; 4) алгебраїчний метод.

Для розв’язання однієї й тієї ж задачі можуть бути обрані різні методи. Обрання того чи іншого методу розв’язання відбувається під час проведення аналізу. Специфіка обраного методу, зрозуміло, безпосередньо проявляє себе під час проведення «побудови». Доведення, зрозуміло, спирається на те, яким чином проведено «побудову».

Значну частину задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» першого рівня складності утворюють задачі на побудову трикутника (прямокутного трикутника) за відповідними наборами його основних елементів. Набори основних елементів при цьому є такими самими, як і у традиційних ознаках рівності трикутників евклідової геометрії. Цим, здається, і можна пояснити той факт, що саме метод трикутників розглядають у якості першого і, найчастіше, основного, метода розв’язання задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» у закладах загальної середньої освіти.

Сутність методу трикутників полягає у тому, що, під час реалізації етапу аналізу, процес розв’язання запропонованої задачі зводиться до побудови певного трикутника або скінченої кількості трикутників, «побудова» яких є можливою за відповідними вихідними даними.

Класичним прикладом задачі, яку доцільно розв’язувати методом трикутників є наступна:

Задача: Побудувати трикутник за двома сторонами та медіаною, проведеною до однієї з них.

Дано: відрізки P_1D_1, P_2D_2, P_3D_3 (рис. 8).

Побудувати: $\triangle ABC$, у якого $BC = P_1D_1$, $AC = P_2D_2$, відрізок AA_1 є медіаною, проведеною до сторони BC, $AA_1 = P_3D_3$.

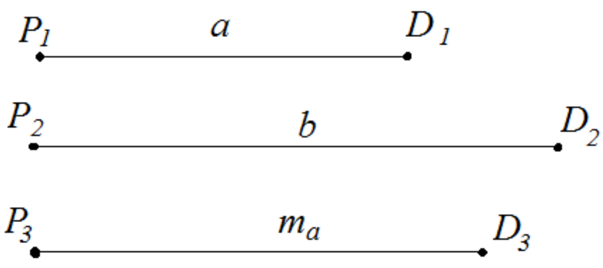

Рис. 8

Аналіз: Припустимо, побудовано $\triangle ABC$, у якого $BC = P_1D_1$, $AC = P_2D_2$, відрізок AA_1 є медіаною, проведеною до сторони BC, $AA_1 = P_3D_3$ (рис. 9). Згідно означення медіани, $CA_1 = A_1B$.

Заданий відрізок P_1D_1 можна перейменувати на відрізок CB. Точку A_1, як середину відрізка BC, можна побудувати згідно класичної задачі 4. Трикутник AA_1C можна побудувати за трьома сторонами (класична задача 10). Визначеним тоді буде кут AA_1C і доповняльний до нього кут AA_1B. Трикутник AA_1B тоді, фактично, вже буде побудованим за двома сторонами і кутом між ними, $\triangle ABC$ буде шуканим.

Побудова. 1. Заданий відрізок P_1D_1 перейменовуємо у відрізок CB.

2. Будуємо середину A_1 відрізка CB.

3. Будуємо трикутник CAA_1, у якому $CA = P_2D_2$, $A_1A = P_3D_3$.

4. Сполучаючи точки A і B, отримуємо $\triangle ABC$.

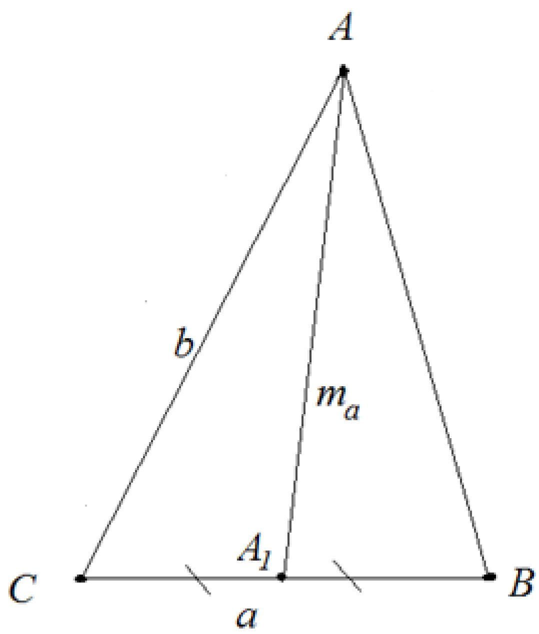

Рис. 9

Доведення: Розглянемо $\triangle ABC$. Згідно першого етапу побудови, його сторона CB співпадає з заданим відрізком P_1D_1. Згідно другого етапу побудови, точка A_1 є серединою відрізка CB. Отже, відрізок AA_1 є медіаною побудованого трикутника ABC. Згідно третього етапу побудови, $CA = P_2D_2$, $A_1A = P_3D_3$. Отже, $\triangle ABC$ є шуканим.

Дослідження. Проаналізуємо проведену побудову з точки зору можливості реалізації її кроків відповідно до вибору вихідних даних. Згідно класичної задачі 4, перші два кроки побудови можна виконати при будь-якому наборі вихідних даних. Згідно класичної задачі 10, трикутник AA_1C можна побудувати тоді та тільки тоді, коли

$$|AC - AA_1| < A_1C < AC + AA_1. \qquad (1)$$

Якщо буде побудовано трикутник AA_1C, то буде побудовано і $\triangle ABC$, задачу буде розв'язано. З іншого боку, якщо задачу можна розв'язати, то трикутник AA_1C існує і, зрозуміло, умову (1) виконано.

Отже, задачу можна розв'язати, і саме тим способом, який ми обрали, тоді та тільки тоді, коли справедливою є подвійна нерівність (1), або «у термінах вихідних даних» подвійна нерівність

$$\left|P_2D_2 - P_3D_3\right| < \frac{P_1D_1}{2} < P_2D_2 + P_3D_3.$$

Якщо задача має розв'язок, то цей розв'язок є єдиним, тому що у евклідовій геометрії справджується ознака рівності трикутників за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них (перевірте цей факт самостійно), умова задачі не містить жодних обмежень щодо розташування шуканої фігури відносно вихідних даних.

Сутність застосування для розв'язання задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» інших зазначених вище методів ми розглянемо на наступних практичних заняттях.

Список використаних і рекомендованих джерел інформації

1. Александров А. Д. Основания геометрии: учебное пособие для вузов. Москва: Наука, 1987. 288 с.
2. Апостолова Г. В. Геометрія: Підручник для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2004. 216 с.
3. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. В 2-х ч. Ч. 2 : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Москва: Просвещение, 1987. 352 с.
4. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Киселева Л. С., Позняк Э. Г. Геометрия. 10–11 кл. : учеб. для общеобразоват. учереждений: базовый и профил. уровни. Москва: Просвещение, 2009. 255 с.

5. Базылев В.Т., Дуничев К. И. Геометрия. Том 2. Москва: Просвещение, 1975. 368 с.
6. *Бевз Г. П., Бевз* В. *Г.* , Владімірова *Н. Г. Геометрія: підруч.* для 7 *кл.* загальноосвіт. *навч. закл.* Київ: *Генеза,* 2015. 192 с.
7. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія: підручник для 7-х класів. Київ.: Зодіак-ЕКО, 2007. 208 с.
8. Гильберт Д. Основания геометрии. Москва-Ленинград: ОГИЗ, Государствен-ное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 491 с.
9. Погорелов А. В. Геометрия: учебное пособие для вузов, Москва: Наука, 1984. 288 с.
10. Погорелов А. В. Геометрия: учебник для 7–11 классов средних школ. Москва: Просвещение, 1990. 384 с.
11. *Теплінський Ю.* В. *Елементи конструктивної геометрії*: Навч. посіб. Кам'янець-Поділ. держ. ун-т. Кам'янець-Подільський, 2005. 152 с.
12. Martin G. E. The Ruler and Compass. In: Geometric Constructions. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, NY, 1998. PP. 29-51
13. Sutton A. Ruler and Compass: Practical Geometric Constructions (Wooden Books) Bloomsbury USA, 2009. 64p.
14. «Construction» in Geometry
URl: https://www.mathsisfun.com/geometry/constructions.html

Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 4

1. З чим у значній кількості інформаційних джерел ототожнюють поняття про конструктивну геометрію?
2. Що і коли стало передумовою виникнення форм математичного моделювання певних етапів процесу креслення у межах аксіоматичної теорії евклідової геометрії?

3. Яку аксіоматичну теорію називають повною?
4. Чи є будь-яка аксіоматична теорія евклідової планіметрії повною Чому геометрична формалізація теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки» вимагає створення відповідного канонічного продовження аксіоматики евклідової планіметрії?
5. Наведіть зразок аксіоматики теорії «побудов за допомогою циркуля и лінійки» як певного канонічного продовження певної аксіоматики евклідової планіметрії.
6. У якому вигляді поняття про аксіоми теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки» присутнє у підручниках з геометрії для закладів базової середньої освіти?
7. Як у відповідній аксіоматичній теорії, традиційно, формулюють умову задачі на «побудову за допомогою циркуля і лінійки»?
8. Яке твердження є першим і найважливішим у теорії задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки»?
9. У якому розумінні кожна задача на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» є геометричною задачею з геометричними параметрами?
10. З реалізації яких чотирьох етапів, традиційно, складається розвязання задачі на «побудову за допомогою ціркуля і лінійки»?
11. У чому полягає сутність реалізації етапу аналізу?
12. У чому полягає сутність реалізації етапу побудови?
13. У чому полягає сутність реалізації етапу доведення?
14. У чому полягає сутність реалізації етапу дослідження?
15. Що представляють собою найпростіші задачі першого рівня складності? Наведіть приклади умов подібних задач та зразки їх розв’язків.
16. Сформулюйте умови задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» першого рівня складності, вміння розв’язувати які для

учнів закладів загальної середньої освіти є обов'язковою вимогою процесу навчання.

17. Які у методиці навчання математики існують точки зору з приводу доцільності реалізації етапу аналіза при розв'язанні задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» першого рівня складності?
18. Які вимоги до опису сутності реалізації етапу «побудови» при розв'язанні задачі на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» висуваються у методиці навчання математики до задач першого і вищих рівнів складності?
19. Перелічте основні методи розв'язання задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» вищих рівнів складності.
20. На якому етапі розв'язання задачі на «побудову за допомогою циркуля і лінійки відбувається обрання доцільного методу розв'язання?
21. У чому полягая сутність методу трикутників розв'язання задач на «побудову за допомогою циркуля і лінійки»?
22. Наведіть приклад розв'язання задачі на «побудову за допомогою циркуля і лінійки» за методом трикутників.

Лекція 5. (2 години)

***Тема*. Поняття про «побудови» у тривимірному евклідовому просторі та їх відображення у навчальних курсах стереометрії закладів загальної середньої освіти та закладів передвищої освіти**

***Мета лекції*:** домогтися усвідомлення студентами магістратури існування різних підходів до поняття про «побудови» у тривимірному евклідовому просторі, ступеня і характеру їх відтворення у сучасних підручниках з геометрії для закладів загальної середньої освіти та закладів передвищої освіти.

План:

1. «Побудови» у геометрії тривимірного евклідового простору як конструктивного характеру теореми існування відповідних геометричних фігур.
2. «Побудови» у геометрії тривимірного евклідового простору, які вимагають створення канонічного продовження відповідної аксіоматики.
3. «Побудови» у геометрії тривимірного евклідового простору як «побудови» зображень геометричних фігур згідно обраного методу зображень та «побудови» на зображеннях, «побудови» за зображеннями

Як вже було підкреслено на попередніх лекціях даного курсу, до першої половини дев'ятнадцятого століття, сформована у вигляді, нехай, і не у повній мірі досконалої аксіоматичної теорії, геометрія тривимірного евклідового простору (про інший простір та інші геометрії не було й думки) безпосередньо сприймалася як наука про властивості просторових форм оточуючого людину середовища, тобто, виключно як «фізична» геометрія. Зрозуміло, що при цьому питання про можливість існування у ній таких фігур, які не мають аналогів серед довкілля, не виникало взагалі.

Просторові форми довкілля підлягають змінам. Як результат, утворюються нові форми, суттєвим чином і завдяки практичній діяльності людей. Подібні зміни, найчастіше, носять покроковий, тобто, конструктивний, характер або їх зручно такими уявляти. Звідси випливає, що для «фізичної» геометрії цілком природним є ототожнення поняття про існування геометричної фігури з поняттями про можливість її конструктивної побудови.

Коли ми розглядаємо геометрію тривимірного евклідового простору як аксіоматичну теорію, ми виокремлюємо у межах цієї теорії елементарну геометрію, як її конструктивну складову. Згідно наведених раніше означень, змістове наповнення поняття про елементарну геометрію складається з відповідної аксіоматики разом з конструктивного характеру умовиводами її теорії, тобто, такими твердженнями теорії цієї аксіоматики, справедливість яких у даній теорії можна обґрунтувати за допомогою міркувань конструктивного характеру, та такими поняттями її теорії, означення яких можна надати за допомогою міркувань конструктивного характеру, існування яких у межах даної теорії можна обґрунтувати за допомогою міркувань конструктивного характеру.

Знову-таки, як було обговорено раніше, змістове наповнення курсів геометрії закладів загальної середньої та передвищої освіти носить двоїстий характер, взаємопроникливим чином поєднуючи у собі «фізичну» геометрію з геометрією у вигляді аксіоматичної теорії. При цьому основну частину останньої утворює саме елементарна геометрія як її конструктивна складова.

Всім вищевказаним і можна пояснити той факт, що у переважній більшості підручників з геометрії для закладів загальної середньої освіти та передвищої освіти, при формуванні більшості тверджень щодо існування тих чи інших геометричних фігур, замість слова «існує» вживаються словосполучення «можна провести» та «можна відкласти», які, за своїм змістом, є рівносильними до словосполучення «можна побудувати». Як правило, все починається, навіть, з формулювань відповідних аксіом.

На третій лекції ми розглядали аксіоматики О. В. Погорєлова евклідової геометрії, тобто, геометрії тривимірного евклідового простору, $\sum_{\Pi_1}$ і $\sum_{\Pi_2}$. Аксіоми аксіоматики $\sum_{\Pi_2}$ було наведено, безпосередньо, у редакції першоджерела [5, с. 5-16, 232]. У контексті вищевказаного, звертають увагу на себе формулювання наступних аксіом.

$\breve{\alpha}_1$. Для кожної прямої існують точки, що їй належать і точки, що їй не належать. Через будь-які дві точки можна провести пряму і лише одну.

$\breve{\alpha}_6$. На кожній півпрямій, від її початкової точки, можна відкласти відрізок заданої довжини і лише один.

$\breve{\alpha}_7$. Від будь-якої півпрямої, на площині, що цю півпряму мітить, у задану півплощину, можна відкласти кут заданої градусної міри, меншої за 180^0, і лише один.

$\breve{\alpha}_9$. На площині, через задану точку, яка не належить до заданої прямої, можна провести не більше ніж одну пряму, паралельну до заданої.

C_3. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину і лише одну.

Наступні теореми і задачі, які, за своїм змістом, є твердженнями існування відповідних геометричних фігур, мають аналогічну «вільність» формулювань. Наприклад,

Теорема 15.1. [5, с. 233]. Через пряму і точку, що їй не належить, можна провести площину, і, до того ж, лише одну.

Задача (7) [5, с. 233]. Доведіть, що через пряму можна провести дві різні площини.

Теорема 15.3. [5, с. 235]. Через три точки, що не належать одній прямій, можна провести площину, і, до того ж, лише одну.

Задача (13) [5, с. 235]. Чи можна провести площину через три точки, якщо вони належать одній прямій? Відповідь обґрунтуйте.

Теорема 16.1. [5, с. 239]. Через точку зовні даної прямої можна провести пряму, паралельну до даної прямої і, до того ж, лише одну.

І подалі, і подалі…

При цьому треба відзначити той факт, що всі наведені відповідні доведення мають конструктивний характер, і, одночасно, що згідно оточуючого контенту варто визнати цілком природним, використовують ту ж саму «вільність» формулювань.

Сучасні підручники з геометрії для закладів загальної середньої освіти та передвищої освіти, по відношенню до визначеного питання, найчастіше, не відрізняються від своїх попередників.

Розглянемо, наприклад, підручник Є. П. Неліна «Геометрія-10» [4]. По відношенню до ступеня зануреності у предмет навчання, цей підручник визначено як дворівневий. По відношенню до висвітлення сутності поняття про аксіоматику тривимірного евклідового простору, його можна визнати, навіть, чотирирівневим.

По-перше, на с. 35 розташовано таблицю з формулюваннями чотирьох (п’яти?) аксіом евклідової стереометрії та двох тверджень, які проголошено наслідками з них, разом з певними ілюстраціями до наведених формулювань.

По-друге, на с. 39 повторно наведено формулювання тепер вже точно п’яти аксіом, які «виражають інтуїтивно зрозумілі властивості площин та їх зв'язок з … точками і прямими», та розміщено тезу про те, що «у стереометрії ми будемо також вважати, що для будь-якої площини в просторі мають місце всі основні означення, теореми і аксіоми планіметрії». Цю тезу аксіомою не названо, незрозумілими залишаються питання про те, які означення, теореми і аксіоми планіметрії (або, лише означення?) варто вважати основними, і що можна стверджувати по відношенню до інших, не основних?

Першу половину п’ятого параграфу підручника присвячено загальній характеристиці поняття про аксіоматичний метод у геометрії. Виходячи з тематики даної лекції, з приводу цього підкреслимо лише той факт, що, з математичної точки зору, наведену інформацію важно назвати точною, а обумовлена віковими особливостями учнів доцільна адаптація відповідного навчального матеріалу не повинна відбуватися за рахунок послаблення його математичної строгості, появи двозначних або безглуздих міркувань. Наприкінці першої половини п’ятого параграфу (с. 57) стверджується, що у даному курсі «система аксіом.. не є повною…». Так тут, у стереометрії, взагалі не вказано жодної цілісної системи аксіом, і тому цілком не зрозуміло, що автор має на увазі… Як приклад, проголошується, що із наведеної (?) системи аксіом « не випливає, що між двома даними точками прямої обов’язково лежить ще точка цієї прямої». Потім мова йде про відсутність у даній аксіоматиці (у якій, даній?) аксіом неперервності… У той же час, аксіоматична теорія Д. Гільберта евклідової геометрії дозволяє конструктивним чином обґрунтувати справедливість вищезазначеного твердження на підставі лише аксіом приналежності та порядку. І аксіоми неперервності, які до аксіоматики Д. Гільберта явним чином входять, тут ні до чого… Аксіоматика О. В. Погорєлова евклідової планіметрії, «шкільний» варіант якої автор наводить у першому параграфі даного підручника (с. 10-13), в силу наявності у своєму складі множини додатних дійсних чисел у якості допоміжної неозначуваної множини, взагалі не містить виокремлених аксіом неперервності, навіть, факт наявності «неперервної» прямої у теорії цієї аксіоматики обґрунтовується конструктивним чином. І що це тоді, взагалі, за аксіоматична теорія евклідової геометрії, у якій для довільного відрізка не можна обґрунтувати наявність його середини? Тоді і наявність у трикутника медіан обґрунтувати неможливо, і, наявність серединного перпендикуляра до відрізка…, і як же тоді, взагалі, опановувати евклідову планіметрію…? Отже, здається, що у першому абзаці на с. 57 даного підручника мова йде не зовсім зрозуміло про що…

Наприкінці п’ятого параграфа підручника [4], с. 59-60, наведено аксіоматику евклідової геометрії, яку названо «сучасною». Наведено без жодних посилань на автора, чи авторів, чи на якісь відповідні джерела інформації… Так хто ж із «сучасників» створив саме таку аксіоматику? (Є. П. Нелін? Сумнівно…) Хто і де проводив дослідження з приводу того, що представлена аксіоматика дійсно є аксіоматикою евклідової геометрії (тобто, є еквівалентною або до відповідної аксіоматики Д. Гільберта, або до відповідної аксіоматики Г. Вейля і т.п.)? І це цілком різні вимоги – бути найбільш сучасною, і бути найбільш доцільною для курсів геометрії закладів загальної середньої освіти та передвищої освіти України на даному етапі її розвитку. Здається, сучасними у першу чергу варто визнавати вимоги щодо достовірності та точності наведеної інформації та наявності необхідних посилань…

Безпосередньо, щодо предмету дослідження, можна стверджувати наступне.

1. У таблиці на с. 35 другу аксіому стереометрії сформульовано наступним чином.

   Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

   У тій самій таблиці найпростіші наслідки зі стереометричних аксіом формулюються так:

   1) через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну;
   2) через дві прямі, які не перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

2. Серед переліку аксіом стереометрії на с. 39 другу аксіому сформульовано тільки-но вказаним чином. На с. 40 вищевказані наслідки зі стереометричних аксіом наведено і конструктивним чином доведено як теореми за того же самого формулювання умов.

Умова задачі 2* на с. 42 формулюється як «Доведіть, що через будь-які дві різні точки простору можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

На с. 53, під час уточнення формулювань деяких аксіом планіметрії, стверджується наступне:

1) від півпрямої, на площині, яка її містить, у дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою за 180^0, і тільки один;
2) на півплощині, через дану точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більш як одну пряму, паралельну даній.

На с. 59, 60 формулюється повна, з точки зору автора підручника, аксіоматика евклідової геометрії, серед аксіом якої містяться такі, як

I_1. Через кожні дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

I_3. Через кожні три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і причому тільки одну.

V_1. Через дану точку поза даною прямою можна провести на площині не більш як одну пряму, паралельну даній (формулювання автора)

Отже, у запропонованому курсі стереометрії, не зважаючи на той чи інший ступінь зануреності у предмет навчання, Є. П. Нелін ототожнює можливість «побудови» у тривимірному евклідовому просторі відповідної стереометричної фігури з існуванням цієї фігури у межах відповідної аксіоматичної теорії. При цьому, свідомо чи не свідомо, термінологія «побудов» використовується, насамперед, тоді, коли обґрунтування відповідного існування проводиться за допомогою конструктивного характеру міркувань.

Одночасно, у даному підручнику рубрика «Пояснення й обґрунтування» на с. 47 містить наступні тези: « У планіметрії задачі на побудову найчастіше розв’язували з використанням циркуля і лінійки. За їх допомогою можна будувати відповідні фігури площини… Але не існують креслярські інструменти, які дозволяли б у просторі будувати неплоскі фігури. Із цієї причини завдання на побудову в стереометрії за своїм змістом суттєво відрізняються від конструктивних завдань планіметрії. Стереометричні побудови виконують у першу чергу, у думках…». Подібні тези є класичним зразком плутанини між «фізичною» геометрією і евклідовою геометрією, представленою у вигляді аксіоматичної теорії. Якщо мова йде про «фізичну» геометрію, то для реальних побудов «планіметричних» фігур там, мабуть найчастіше, використовують такі креслярські інструменти, як циркуль і лінійка (але не лише такі інструменти, ще й багато інших, про деякі з яких мова йшла при опануванні попередньої теми). А для реальних побудов у просторі існують інші інструменти, ну, зрозуміло, що не креслярські. Виокремлені у результаті абстрагування, певні властивості певних таких інструментів реальних просторових побудов, так само, як властивості циркуля і лінійки, можна сформувати у вигляді відповідного канонічного продовження аксіоматичної теорії геометрії тривимірного евклідового простору (евклідової стереометрії). У результаті буде створено один з можливих варіантів аксіоматики і відповідної аксіоматичної теорії «побудов» у тривимірному евклідовому просторі. Зрозуміло, що у межах такої теорії всі «побудови» будуть виконуватися лише «у думках». А теорія виявиться тим більш вагомою з усіх точок зору, чим більше у діяльності людей знайдеться таких реальних «фізичних» побудов, для яких вона стане теоретичним підґрунтям.

У математиці розроблено певну кількість відповідних канонічних продовжень аксіоматик тривимірного евклідового простору. «Побудови» у межах таких канонічних продовжень мають характер міркувань виключно конструктивного характеру. Отже, за аналогією до планіметрії, під конструктивною геометрією тривимірного евклідового простору можна розуміти саме теорію задач на «побудову» у межах аксіоматичної теорії деякого канонічного продовження певної аксіоматики тривимірного евклідового простору.

Загальновідомими є два варіанта вищевказаних конструкцій. Перший варіант наведено у навчальному посібнику з геометрії для учнів 10-11 класів шкіл і класів з поглибленим вивченням математики [1, с. 45].

При ознайомленні з цим варіантом майбутніх викладачів математики закладів загальної середньої освіти та передвищої освіти, дозволимо собі певні уточнення.

Для зручності, у якості «базової» аксіоматики тривимірного евклідового простору будемо розглядати аксіоматику О. В. Погорєлова $\sum_{П_2}$, яку було охарактеризовано на лекції 3, під час опанування третьої теми.

Для створення аксіоматики $\sum^{пр}$ теорії «побудов» у тривимірному евклідовому просторі, до аксіоматики $\sum_{П_2}$ додамо назви двох неозначуваних понять: неозначувана множина H – сукупність побудованих геометричних фігур – і неозначуване відношення q – операція побудови геометричної фігури, переведення її з категорії не побудованих – у категорію побудованих, $q \subset F^2$, де F – множина всіх фігур аксіоматичної теорії $\mathrm{T}\left(\sum_{П_2}\right)$, елемент шкали, побудованої над неозначуваними множинами аксіоматики $\sum_{П_2}$.

До переліку аксіом аксіоматики $\sum_{П_2}$ додамо наступні твердження.

γ_1. Для кожної площини справджуються твердження всіх планіметричних аксіом теорії «побудов за допомогою циркуля і лінійки», тобто, твердження аксіом β_i, $i = \overline{1,7}$, $\beta_л$, $\beta_ц$ аксіоматики $\sum'$, яку ми розглядали на лекції 4.

γ_2. Кожна фігура евклідового простору, задана умовою задачі на побудову, є побудованою.

γ_3. Кожна побудована фігура містить принаймні одну побудовану точку. Для кожної побудованої фігури, відмінної від усього евклідового простру, у евклідовому просторі існує принаймні одна побудована точка, яка цій фігурі не належить.

γ_4. Якщо фігури F_1 і F_2 евклідового простору є побудованими, то можна визначити, чи є їх перетин $F_1 \cap F_2$ порожньою множиною, чи ні. Якщо $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$, то фігура $F_1 \cap F_2$ завжди є побудованою. Побудованою є і фігура $F_1 \cup F$.

γ_5. Якщо побудовано дві різні точки A і B, то побудовано пряму AB.

γ_6. Якщо побудовано три точки, то можна побудувати площину, яка ці точки містить. Так само, якщо побудовано пряму і точку, яка їй не належить, то можна побудувати площину, що містить цю пряму і цю точку. Якщо побудовано дві прямі, що перетинаються, або дві паралельні прямі, то можна побудувати площину, що ці прямі містить.

γ_7. У евклідовому просторі існує принаймні одна побудована площина.

Як результат утворено аксіоматику $\sum^{пр}$ теорії «побудов» у тривимірному евклідовому просторі, яка має вигляд

$$\sum^{пр}\left(M, L, \Pi, \mathbb{R}^+, H;\ p_i, i=\overline{1,5}, q; \breve{\alpha}_j, j=\overline{1,9}, C_1, C_2, C_3, \beta_k, k=\overline{1,7}, \beta_л, \beta_ц, \gamma_m, m=\overline{1,7}\right).$$

Зрозуміло, що це аксіоматика конструктивного характеру, $\sum_{\Pi_2} \subset \sum^{пр}, \mathrm{T}\left(\sum_{\Pi_2}\right) \subset \mathrm{T}\left(\sum^{пр}\right)$. Зрозуміло, також, що, так само, як $\sum_{пл} \subset \sum_{\Pi_2}$,справедливими є включення $\sum' \subset \sum^{пр}, \mathrm{T}\left(\sum'\right) \subset \mathrm{T}\left(\sum^{пр}\right)$.

У теорії аксіоматики $\sum^{пр}$, загальну задачу на «побудову» геометричної фігури евклідового простру, аналогічно до того, як і в теорії аксіоматики $\sum'$, розглядають як задачу наступного виду.

1. У евклідовому просторі задано скінченну кількість геометричних фігур $F_1, F_2, ..., F_k, k \in N$, або не задано жодної геометричної фігури. Згідно твердження аксіоми γ_2, задані фігури вважають побудованими.
2. Вказано властивості певної геометричної фігури F, яку визнано за результат розв'язання даної задачі на побудову.
3. Застосовуючи аксіоми $\beta_k, k=\overline{1,7}, \beta_л, \beta_ц, \gamma_m, m=\overline{1,7}$, у будь-якій послідовності, у необхідній кількості, але лише скінченну кількість разів, треба перетворити не побудовану геометричну фігуру F у побудовану.

Як і для теорії аксіоматики $\sum'$, найважливішим твердженням теорії аксіоматики $\sum^{пр}$ є твердження про те, що кожна фігура, «побудована» у теорії аксіоматики $\sum^{пр}$, існує у евклідовому просторі з точки зору теорії аксіоматики $\sum_{П_2}$, «побудови» геометричних фігур у теорії аксіоматики $\sum^{пр}$, одночасно, є конструктивного характеру обґрунтуваннями фактів існування цих фігур у теорії аксіоматики $\sum_{П_2}$.

Обернене твердження, зрозуміло, не є вірним. У $\mathrm{T}\left(\sum_{П_2}\right)$, а, отже, тому і у $\mathrm{T}\left(\sum^{пр}\right)$, існують фігури, про які доведено, що їх неможливо «побудувати» у $\mathrm{T}\left(\sum^{пр}\right)$. Серед них є й фігури, існування яких може бути обґрунтовано у $\mathrm{T}\left(\sum_{П_2}\right)$ за допомогою міркувань конструктивного характеру.

У $\mathrm{T}\left(\sum^{пр}\right)$ загальна схема розв'язання задач на «побудову», за аналогією до $\mathrm{T}\left(\sum'\right)$, складається з чотирьох, традиційних, етапів: аналіз, побудова, доведення та дослідження. Реалізація етапу дослідження, як і у випадку планіметрії, переважно, по суті, представляє собою розв'язання геометричної задачі з геометричними параметрами. (У ролі параметрів, при цьому, зрозуміло, виступають вихідні дані задачі).

У теоретичній частині навчального посібника [1, с. 46, 47], згідно теорії $\mathrm{T}\left(\sum^{пр}\right)$ за виключенням етапу аналізу, наведено розв'язки двох задач: 1) побудувати яку-небудь піраміду, якщо задано многокутник її основи; 2) побудувати яку-небудь призму (у загальному випадку, похилу призму), якщо задано многокутник її основи.

Обговоримо характерні етапи запропонованого варіанту розв'язання першої задачі. Спочатку, при цьому, треба уточнити, що тут мається на увазі під пірамідою. У евклідовій геометрії можна вести розмову про піраміду-каркас, про піраміду-оболонку (до складу якої, очевидно, входить відповідна піраміда-каркас) та про піраміду-тіло (до складу якої, у залежність від наведеного означення, відповідна піраміда-оболонка може як входити, так і не входити). Зрозуміло, що будь-яка піраміда одного з вищевказаних трьох видів однозначно визначає відповідні піраміди двох інших видів. Точніше, існування будь-якої піраміди одного з вищевказаних трьох видів обґрунтовує існування відповідних пірамід двох інших видів. У той же час зрозуміло, що, як геометричні фігури, піраміди різних видів є суттєво різними: піраміда-каркас не має ані площі поверхні, ані об’єму, піраміда-оболонка має площу поверхні, але не має об’єму.

У $\mathrm{T}\left(\sum'\right)$, коли мова йде про «побудову» трикутника, мається на увазі трикутник-каркас. Для того, щоб мати можливість говорити про побудову плоского трикутника, до аксіом аксіоматики $\sum'$ «циркуля і лінійки», здається, треба додати аксіому про можливість «побудови» півплощини. Очевидно, що утворена таким чином аксіоматика буде вимагати вже іншої назви. (У кресленні за допомогою «фізичних» циркуля і лінійки, побудувати півплощину неможливо). Аналогічним чином, аксіоматика $\sum^{пр}$, здається, дозволяє «побудувати» лише піраміду-каркас. Як вже підкреслювалося, така «побудова» у $\mathrm{T}\left(\sum^{пр}\right)$ є конструктивного характеру обґрунтуванням існування піраміди-каркаса у $\mathrm{T}\left(\sum_{П_2}\right)$. Виходячи з цього, за допомогою міркувань конструктивного характеру, у $\mathrm{T}\left(\sum_{П_2}\right)$, вже легко доводиться існування як піраміди-оболонки, так і піраміди-тіла. Для того, щоб можна було вести розмову про «побудову» піраміди-оболонки, до запропонованої аксіоматики $\sum^{пр}$, здається, треба додати ще або аксіому про можливість «побудови» півплощини або, більш загальну, аксіому про «побудову елементів розбиття» площини, тобто, про те, що, якщо «побудована» на площині геометрична фігура розділяє множину точок цієї площини на дві підмножини, то обидві підмножини вважаються «побудованими». У навчальному посібнику [1, с. 46] для обґрунтування факту «побудови» піраміди-оболонки автори, у неявному вигляді, використовують у якості аксіоми справедливість останнього твердження. Якщо ж до аксіоматики $\sum^{пр}$

буде додано аксіому про можливість «побудови» півпростору або, більш загальну, аксіому про «побудованість елементів розбиття» евклідового простору (у такому випадку раніше запропонований додаток, очевидно, виявиться зайвим), можна буде стверджувати і те, що у результаті «побудовано» піраміду-тіло.

Згідно аксіоматичної теорії аксіоматики $\sum^{np}$, процес побудови довільної піраміди із заданим плоским многокутником F основи виглядає наступним чином.

1. Згідно аксіоми γ_2 , многокутник F є побудованим. Нехай, для визначеності, це п'ятикутник $ABCDE$.
2. Згідно аксіоми γ_6 , побудовано і площину σ , якій належить заданий п'ятикутник $ABCDE$.
3. Згідно аксіоми γ_3, у евклідовому просторі існує побудована точка Q, яка не належить площині σ.
4. Згідно аксіоми γ_6, побудовано площину σ_1, якій належать точки Q, A і B; площину σ_2, якій належать точки Q, B і C; площину σ_3, якій належать точки Q, C і D; площину σ_4, якій належать точки Q, D і E; площину σ_5, якій належать точки Q, E і A.
5. Згідно аксіоми $\beta_л$, побудовано промені $[AQ)$ і $[QA)$, $[BQ)$ і $[QB)$, $[CQ)$ і $[QC)$, $[DQ)$ і $[QD)$, $[EQ)$ і $[QE)$.
6. Згідно аксіоми β_4, побудовано відрізки $[AQ]$, $[BQ]$, $[CQ]$, $[DQ]$, $[EQ]$.
7. За аксіомою γ_4 побудовано каркас $QABCDE$, який, згідно відповідного означення, є пірамідою-каркасом з основою $ABCDE$.

По відношенню до побудови піраміди-оболонки $QABCDE$ та піраміди-тіла $QABCDE$ ми вже навели відповідні коментарі. Звернемо увагу лише на наступне. Згідно означення, пірамідою-каркасом $QABCDE$ називають геометричну фігуру, утворену п’ятикутником-каркасом $ABCDE$, всі вершини якого належать одній площині, точкою Q , яка не належить цій площині і відрізками $[QA], [QB], [QC], [QD]$ і $[QE]$. Пірамідою-оболонкою $QABCDE$ називають геометричну фігуру, утворену плоским п’ятикутником $ABCDE$, точкою Q , яка не належить площині даного п’ятикутника, та всіма відрізками, що сполучають точку Q з точками на сторонах даного п’ятикутника. Згідно аксіоми γ_2 , плоский п’ятикутник $ABCDE$ ми можемо вважати побудованим тому, що його задано умовою задачі. Відрізок, що сполучає будь-яку внутрішню точку будь-якої сторони п’ятикутника $ABCDE$ з точкою Q , ми можемо побудувати так само, як будували бічні ребра піраміди-каркаса $QABCDE$. А ось всі такі відрізки ми побудувати не можемо, бо для цього довелося би використовувати вищевказані аксіоми теорії побудов безліч разів. Саме в силу цього, питання про «побудову» бічних граней піраміди-оболонки $QABCDE$ вимагає наведених вище інших підходів.

Серед переліку задач, запропонованих у навчальному посібнику [1] для самостійного розв’язання відповідно до теорії «побудов» у тривимірному евклідовому просторі, варто виділити, наприклад, наступні.

1. [1, с. 48] Задано дві мимобіжні прямі і точку, яка їм не належить. Побудуйте: а) площину, що проходить через задану точку і перетинає обидві задані прямі; б) пряму, що проходить через задану точку і перетинає обидві задані прямі.
2. [1, с. 49] Побудуйте площину, яка а) на проходить через задану точку; б) проходить лише через одну з двох заданих точок; в) не проходить через жодну з двох заданих точок.
3. [1, с. 49] Задано три попарно мимобіжні прямі. Побудуйте площину, яка перетинає: а) кожну із заданих прямих; б) точно дві з трьох заданих прямих.

4. Задано три попарно мимобіжні прямі. Побудуйте пряму, яка перетинає кожну з них.
5. [1, с. 60] Задано пряму a і точку A на ній. Побудуйте площину, яка проходить через точку A перпендикулярно до прямої a.
6. [1, с. 61] Задано пряму a і точку A, яка цій прямій не належить. Побудуйте площину, яка проходить через точку A перпендикулярно до прямої a.

Спробуйте розв’язати ці задачі самостійно, за повною схемою, у межах аксіоматичною теорії $\mathrm{T}\left(\sum^{np}\right)$.

З другим варіантом канонічного продовження аксіоматики тривимірного евклідового простору для створення відповідної аксіоматики теорії «побудов» можна ознайомитися, наприклад, за [6, с. 74]. Як і у випадку першого варіанту, вказане першоджерело носить навчальний, а не науковий характер. Саме цим, здається, пояснюється факт не повної чіткості його представлення.

Як і у першому варіанті, до обраної аксіоматики тривимірного евклідового простору тут додаються назви двох неозначуваних понять: неозначуваної множини H – сукупності побудованих геометричних фігур – і неозначуваного відношення q – операції «побудови» геометричної фігури, перетворення її з не побудованої у побудовану, з типізацією $q \subset F^2$, де F – множина всіх фігур аксіоматичної теорії даної аксіоматики тривимірного евклідового простору.

Далі наводиться відповідний перелік аксіом. При цьому, навіть одночасно з вказівкою на циркуль і лінійку, як «фізичні» інструменти, функціональні характеристики яких є прототипами стандартних «побудов» на евклідовій площині, мова йде про деяку «пластинку», яка проголошується тим «фізичним» інструментом, функціональні характеристики якого виступають як прототип можливості «побудови» у евклідовому просторі площини за трьома її не колінеарними побудованими точками.

Взагалі, перелік аксіом другого варіанту є ширшим за перший. Додатково, він містить аксіоми щодо можливостей «побудови» сферичної, циліндричної та конічній поверхонь. У підсумку, у [6, с. 74] в якості аксіом теорії «побудов» у тривимірному евклідовому просторі, сформульовано наступні твердження.

$\tilde{\gamma}_1$. Якщо побудовано три не колінеарні точки, то можна побудувати площину, що їх містить.

$\tilde{\gamma}_2$. Якщо побудовано дві не паралельні площини, то можна побудувати пряму їх перетину.

$\tilde{\gamma}_3$. Якщо площину побудовано, то на цій площині можна виконати всі побудови, передбачені аксіоматичною теорією «побудов» на евклідовій площині «за допомогою циркуля і лінійки».

$\tilde{\gamma}_4$. Точки, прямі, кола і півплощини, задані умовою задачі на побудову, є побудованими.

(Тут, мабуть, краще було би обрати той варіант даної аксіоми, при якому стверджується, що всі геометричні фігури, задані умовою задачі на побудову, вважаються побудованими).

$\tilde{\gamma}_5$. Існує принаймні чотири побудовані точки, які не є компланарними (тобто, не належать до жодної однієї площини).

$\tilde{\gamma}_6$. Якщо побудовано точку O і відрізок $[AB]$, то можна побудувати сферу з центром у точці O радіусу $[AB]$.

$\tilde{\gamma}_7$. Якщо побудовано пряму l і відрізок $[AB]$, то можна побудувати пряму кругову циліндричну поверхню з віссю l і радіусом $[AB]$.

$\tilde{\gamma}_8$. Якщо побудовано точку O, пряму l і кут φ, $0<\varphi<90^0$, то можна побудувати таку пряму кругову конічну поверхню, вершина якої знаходиться у точці O, вісь якої є паралельною до прямої l, кут нахилу до осі твірних даної конічної поверхні дорівнює φ.

Якщо, так само, як і при першому варіанті побудови канонічного продовження, у якості «базової» аксіоматики тривимірного евклідового простору обрати аксіоматику О. В. Погорєлова $\sum_{П_2}$, то можна, у якості підсумку, стверджувати, що, згідно другого варіанту побудови канонічного продовження, аксіоматика $\tilde{\sum}^{пр}$ теорії побудов у тривимірному евклідовому просторі має структуру

$$\tilde{\sum}^{пр}\left(M, L, П, \mathbb{R}^{+}, H; P_i, i=\overline{1{,}5}, q; \breve{\alpha}_j, j=\overline{1{,}9}, C_1, C_2, C_3, \beta_k, k=\overline{1{,}7}, \beta_л, \beta_ц, \tilde{\gamma}_m, m=\overline{1{,}8}\right).$$

Зрозуміло, що, завдяки наявності аксіом $\tilde{\gamma}_6$, $\tilde{\gamma}_7$ і $\tilde{\gamma}_8$, ця аксіоматика є сильнішою за аксіоматику $\sum^{пр}$, аксіоматика $\tilde{\sum}^{пр}$, фактично, є канонічним продовженням вже аксіоматики $\sum^{пр}$, існують геометричні фігури, які можна побудувати у $\mathrm{T}\left(\tilde{\sum}^{пр}\right)$, але не можна побудувати у $\mathrm{T}\left(\sum^{пр}\right)$, еліпс, гіпербола, парабола, як канонічні перерізи, наприклад. Серед запропонованих для самостійного розв’язання відповідних задач збірника [6] багато задач на побудову саме таких фігур [6, с. 76-80].

Подібна ситуація в геометрії тривимірного евклідового простору цілком точно відтворює аналогічну ситуацію у реальному «фізичному» просторі. Якщо певного об’єкта у природі не існує, то й побудувати, виробити, знайти його неможливо. Якщо об’єкт існує, то певних інструментів для його побудови може не вистачати, якщо додати інші інструменти, то подібний поширений набір інструментів для побудови даного об’єкта вже може виявитися достатнім.

Традиційно, точніше, навіть, насамперед, до конструктивних аспектів геометрії тривимірного евклідового простору відносять теорію «побудов зображень» геометричних фігур.

У загальному випадку, під зображенням геометричної фігури розуміють окремий спосіб її відображення, відображення на певну поверхню тривимірного евклідового простору. Ще з найдавніших часів людина почала зображати предмети оточуючого середовища на інших предметах цього середовища. Зображення наносили на скелі, стіни, посуд, зброю, одяг та інші поверхні, які тільки здавалися придатними для цього. Оскільки саме теорія тривимірного евклідового простору найкращим чином моделює просторові форми безпосередньо оточуючого людину середовища, той факт, що теорія зображень геометричних фігур, як математична теорія, у своєму першому, класичному варіанті сформувалася всередині теорії тривимірного евклідового простору, представляється більш ніж природним.

Основу поняття про зображення геометричної фігури на певній поверхні тривимірного евклідового простору складає поняття про проєкцію даної фігури на дану поверхню. Процес проєктування фігури F – це процес побудови проєкцій всіх її точок. Процес проєктування точки M – це встановлення відповідності між точкою M та деякою підмножиною T точок поверхні проєкцій. При цьому підмножину T називають проєкцією точки M . Проєкція фігури F – це сукупність Ф проєкцій всіх її точок. Фігуру F для проєкції Ф називають оригіналом. Конкретний спосіб реалізації процесу побудови проєкцій фігур називають методом проєктування. Кожний метод проєктування характеризується своїми апаратом та законом відображення. Апарат методу проєктування – це ті геометричні фігури, які визначають процес проєктування, картинну поверхню включно. Закон відображення – це спосіб побудови для точки M її проєкції T , тобто, спосіб реалізації для точки M процесу проєктування.

Використання того чи іншого методу залежить від мети проєктування. Можна стверджувати, що існує безліч різних методів проєктування. Це пояснюється тим, що існує безліч способів задання як апарату проєктування, так і закону відображення. Теоретично розроблено, головним чином, саме ті методи, які виявилися корисними для певних практичних застосувань. Найпоширенішими з них є ті, картинна поверхня апарату яких є площиною (картинною площиною) (див., наприклад, [8, с. 23-32, 41-48]).

Зображенням фігури F евклідового простору називають будь-яку фігуру F' , подібну до проєкції Ф цієї фігури. Зрозуміло, що кожна геометрична фігура є подібною до себе. Отже, у будь-якому випадку, проєкція фігури є її зображенням. Але не тільки. Відповідно до того чи іншого методу проєктування геометричних фігур, говорять про той чи інший метод їх зображення.

У випадку розміщення зображення F' фігури F евклідового простору на картинній площині α, для значної кількості фігур F можна вести мову про «побудову» на площині α їх зображень F' «за допомогою циркуля і лінійки», для суттєвої більшості фігур F можна вести мову про «побудову» на площині α « за допомогою циркуля і лінійки» фігур F'', з довільною, наперед заданою, точністю наближених до відповідних фігур F'(можливість «побудов за допомогою циркуля і лінійки» для будь-якого дійсного числа $\varepsilon > 0$ таких фігур $F'' \subset \alpha$, відстань від яких до зображень F' відповідних фігур F є меншою за ε). Для певної кількості фігур F можна вести мову про «побудову» їх зображень F' «за допомогою інших інструментів» (про які, зокрема, йшла мова на лекції 4). Отже, у всіх подібних випадках, для геометричної фігури F тривимірного евклідового простору задача на «побудову» її зображення F' (або його наближення F'') у вищевказаному розумінні є конструктивною задачею евклідової планіметрії [8].

«Між фігурами евклідового простору виділяють чотири великі групи основних відношень: проєктивні, афінні, відношення подібності та метричні.

Проєктивні відношення – це відношення, які зберігаються при довільних проєктивних відображеннях із евклідового простору у себе. В першу чергу, проєктивні відношення включають у себе відношення приналежності, які «на мові теорії множин» означають «бути підмножиною».

Афінні відношення – це відношення, які зберігаються при довільних

афінних перетвореннях евклідового простору. Афінними є всі проєктивні відношення, а також, наприклад, паралельність прямих і відношення довжин відрізків, що належать одній прямій або паралельним прямим.

Відношення подібності – це відношення, які зберігаються при всіх перетвореннях подібності евклідового простору. До них, зокрема, відносяться всі афінні відношення, величини кутів, відношення довжин довільних відрізків.

Метричні відношення – це відношення, які зберігаються при всіх рухах евклідового простору. У першу чергу, це всі відношення подібності та довжини відрізків.

Позиційною задачею теорії зображень геометричних фігур евклідового простору називають задачу встановлення за зображеннями геометричних фігур проєктивних відношень між їх елементами, або між елементами геометричних фігур, які визначаються через зображені фігури за допомогою проєктивних відношень. Аналогічним чином вводять поняття про афінну задачу, евклідову задачу (задачу подібності), метричну задачу теорії зображень геометричних фігур.

Зображення фігури евклідового простору називають повним або позиційно повним, якщо за цим зображенням можна однозначно встановити всі проєктивні відношення між будь-якими елементами даної фігури та між фігурами, які визначаються на підставі даної за допомогою проєктивних відношень. Аналогічним чином вводять поняття про афінно повні, подібно повні, метрично повні зображення. Подібно повні зображення називають також евклідово повними. Для позиційно повного зображення кожна позиційна задача теорії зображень має єдиний розв’язок. До позиційно повних зображень не можна довільним чином додавати зображення геометричних фігур, які за допомогою проективних відношень однозначно визначаються через фігури, зображені раніше. Для афінно повного зображення кожна афінна задача теорії зображень має єдиний розв’язок. До афінно повних зображень не можна довільним чином додавати зображення геометричних фігур, які за допомогою афінних відношень однозначно визначаються через фігури, зображені раніше. Аналогічні твердження є справедливими для подібно повних і для метрично повних зображень [8, с. 15-17].

Значну кількість позиційних, афінних, евклідових та метричних задач теорії зображень просторових геометричних фігур на картинній площині у випадках відповідної повноти зображень можна розв’язати як результат покрокових побудов на картинній площині «за допомогою циркуля і лінійки» (див., наприклад, [7, 8, 9]).

Конструктивний характер при цьому носять як «побудови» безпосередньо на картинній площині (міркування у межах, наприклад, аксіоматичної теорії $\mathrm{T}\left(\sum'\right)$), так і просторові обгрунтування існування відповідних фігур стереометрії (міркування у межах, припустимо, аксіоматичної теорії $\mathrm{T}\left(\Sigma_{\Pi_2}\right)$) або стереометричні «побудови» (наприклад, міркування у межах аксіоматичної теорії $\mathrm{T}\left(\sum^{np}\right)$), які, в силу відповідної повноти зображення, «побудовами» на картинній площині є визначеними однозначно. У результаті, ми одночасно, можемо мати як «побудови» на зображенні, так і «побудови» за зображенням. Задачі вищевказаного типу також входять до конструктивної складової геометрії тривимірного евклідового простору.

На сучасному етапі розвитку науково-технічного прогресу, у якості яскравого «фізичного» прототипу конструктивних побудов «за зображеннями» виступає 3d-прінтінг. Спеціальний апарат – 3d-прінтер – послідовно, крок за кроком, рівень за рівнем, із спеціального матеріалу, яким його заправлено, будує реальні просторові фігури, фактично, довільного рівня складності. Зрозуміло, що у відповідності до закладеного у цей прінтер програмного забезпечення. А математичним підґрунтям подібного забезпечення є метод Монжа зображення просторових фігур на площині, з основами якого ви знайомилися у курсі «Зображення просторових фігур на площині при викладанні евклідової геометрії» (див, наприклад, [8, с. 23–25]). Апарат проєктування за методом Монжа складається з трьох попарно перпендикулярних площин. (Буква d у математиці є стандартним позначенням міри прямого кута. Звідси і назва – 3d. Насправді, з математичної, але, мабуть, не з технічної, точки зору, достатньо і 2d). Згідно методу Монжа, проєкцією точки є сукупність трьох точок, трьох ортогональних проєкцій даної точки на попарно перпендикулярні площини апарату. Проєкція фігури складається з проєкцій всіх її точок. За проекцією, утвореною згідно методу Монжа, фігура у просторі відновлюється однозначно, з точністю до руху як твердого тіла. Ось саме таке відновлення і реалізує 3d-прінтер. Для цього йому потрібна відповідна проєкція шуканої фігури, тобто, три ортогональні проєкції на попарно ортогональні площини апарату, правда, виконані не за допомогою циркуля і лінійки, а у цифровому форматі. Теоретично, можна спочатку виконати необхідні побудови за допомогою циркуля і лінійки, а потім, за допомогою сканера, провести «відцифрування» (Усвідомте самостійно, що це означає з математичної точки зору). За умови фактичної наявності фігури, відповідні проєктування, одразу у цифровому форматі, можна виконати за допомогою 3d-сканера. Потім, за допомогою 3d-прінтера, можна побудувати скільки завгодно копій даної фігури.

Як «побудови» у тривимірному евклідовому просторі розглядають також операції утворення тривимірних геометричних фігур з їх двовимірних розгорток. При цьому, зрозуміло, варто розрізняти задачі на обгрунтування існування певних стереометричних фігур на підставі існування їх певних розгорток, задачі «побудови» самих розгорток «за допомогою циркуля і лінійки» у межах відповідного канонічного продовження евкклідової планіметрії, задачі «побудови» стереометричних фігур за їх розгортками у межах відповідного канонічного продовження евклідової стереометрії. Конструктивні аспекти теорії розгорток утворюють її елементарну складову. Теоретичним підґрунтям теорії розгорток є поняття про топологічний простір, підпростір топологічного простору, фактор-простір топологічного простору, операцію склеювання топологічних просторів, букет. З елементами теорії розгорток ви можете ознайомитися самостійно, наприклад, за [2, 3, 10].

Список використаних і рекомендованих джерел інформації

1. Александров А. Д. , Вернер А. Л., Рыжик В. И., Геометрия для 10-11 классов: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. Москва: Просвещение, 1992. 464с.
2. Веннинджер М. Модели многогранников. Москва: Мир, 1974. 236 с.
3. Кутузов Б. В. Геометрия. Пособие для учительских и педагогических институтов. Москва: Учпедгиз, 1950. 284с.
4. Нєлін Є. П. Геометрія (профільний рівень): підручн. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків: Ранок, 2018. 240 с.
5. Погорелов А. В. Геометрия: учебник для 7–11 классов средних школ. Москва: Просвещение, 1990. 384 с.
6. Сборник задач по геометрии. Часть 2. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. /Под ред. Л. С. Атанасяна. Москва: Просвещение, 1975. 176 с.
7. Четверухін М. Ф. Рисунки просторових фігур у курсі геометрії. Київ: Радянська школа, 1953. 188 с.
8. Синюкова О. М., Ладиненко Л. П.. Зображення просторових фігур на площині при викладанні евклідової геометрії. Навчальний посібник. Частина I. Одеса, Фенікс, 2019 , 486 с.
9. Теплінський Ю. В. Елементи конструктивної геометрії: Навч. посіб. Кам'янець-Поділ. держ. ун-т. — Кам'янець-Подільський, 2005. 152 с.
10. Demaine, Erik D. & O'Rourke, Joseph Chapter 22. Edge Unfolding of Polyhedra, Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra, Cambridge University Press, 2007, с. 306–338

Питання та завдання для самоконтролю за змістом лекції 5

1. Як наука якого характеру сприймалася евклідова геометрія до першої половини дев'ятнадцятого століття?
2. Як можна пояснити той факт, що для «фізичної» геометрії цілком природним є ототожнення поняття про існування геометричної фігури з поняттям про можливість її конструктивної побудови?
3. У чому полягає сутність двоїстого характеру змістового наповнення курсів геометрії закладів загальної середньої освіти
4. Чим можна пояснити той факт, що у переважній більшості підручників з геометрії для закладів загальної середньої освіти, при формулюванні більшості тверджень щодо існування геометричних фігур, замість слова «існує» вживаються словосполучення «можна провести» або «можна відкласти»? Наведіть приклади подібних випадків.
5. Вкажіть відомі Вам аксіоматики теорій «побудов» у стереометрії. Поясніть, чому не існує і не може існувати принципової різниці між «побудовами» у планіметрії і «побудовами» у стереометрії.
6. Наведіть зразки розв'язання стереометричних задач на «побудову» у межах певного відповідного канонічного продовження певної аксіоматики евклідової стереометрії.
7. Чи вимагає задача визначення зображення просторової геометричної фігури на площині за методом паралельного проєктування використання певного канонічного продовження евклідової стереометрії, побудованого як аксіоматика теорії стереометричних «побудов»? Відповідь обгрунтуйте.
8. Розглядання якого канонічного продовження аксіоматики евклідової стереометрії вимагає задача «побудови» зображення просторової геометричної фігури на площині за методом паралельного проєктування

9. У якому розумінні по відношенню до фігур евклідової стереометрії можна вести мову про «побудови» на зображеннях і «побудови» за зображеннями
10. Вкажіть математичне підгрунтя функціювання 3d-прінтера.
11. Що називають розгорткою стереометричної фігури?
12. У якому розумінні по відношенню до фігур евклідової стереометрії можна вести мову про їх «побудови» за розгортками?
13. Які розділи математики представляють собою теоретичне підгрунтя теорії розгорток?