МІНІСТЕРСТВО НАУКИ І ОСВІТИ УКРАЇНИ

Державний заклад «ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені К. Д. УШИНСЬКОГО

Кафедра фізики

Тадеуш О. Х.

ФОРМУВАННЯ ГОТОВНОСТІ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН ПРИ НАВЧАНІ МЕХАНІКИ

(навчально-методичній посібник)

Одеса, 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

...Фізика - це наука про всі надзвичайно
могутні сили: про магнетизм, про
електрику, гравітацію, світло, звук,
космічні випромінювання...
Фізика розкриває тайниВсесвіту.
Як же можна її не любити?
Д. Френсіс

Обов'язковою умовою реалізації основної освітньої програми підготовки фахівця закладів вищої освіти є навчальне та науково-методичне забезпечення навчального процесу. Даний навчально-методичний посібник розроблений для повноцінного виконання студентами лабораторних робіт з фізики. Основною метою посібника є сприяння формуванню у студентів ключових навчальних і особистісних компетенцій, а також розвитку творчих компетентностей. Основне призначення методичних вказівок, представлених в посібнику - надати допомогу студентам у підготовці та виконанні лабораторних робіт, а також полегшити роботу викладача з організації та проведення лабораторних занять.

У вищому навчальному закладі практикум проводиться по системі окремих робіт і, як правило, частина з них виконується до ознайомлення на лекціях з теорією, що лежить в основі тієї чи іншої роботи. Тому досить важливими у цьому відношенні є вступні заняття, які закладають фундамент у подальшій дослідницькій діяльності студентів. На перших лабораторних заняттях студентам пропонуються репродуктивні лабораторні роботи, опис яких є у запропонованому викладачем робочому зошиті. Роль робіт репродуктивного характеру – адаптувати студентів-першокурсників до роботи в лабораторії, допомогти набути їм уміння виконувати експеримент, обробляти результати вимірювань, оформляти звіт лабораторної роботи, правильно розподіляти свій робочий час на занятті.

Посібник складається з чотирьох розділів. В них міститься необхідна інформація щодо підготовки, виконання та звітності лабораторних робіт.

Головною метою посібника є намір не тільки всебічно проілюструвати фізичні явища і закони, але й навчити студента їх спостерігати і перевіряти дослідним шляхом. Вони мають сприяти оволодінню технікою фізичного експерименту, отриманню навичок самостійної дослідницької роботи та виробленню вмінь застосовувати теоретичні знання для аналізу і розв’язання конкретних фізичних задач.

У посібнику представлені різні варіанти вимірювань однієї і тієї ж величини, завдяки чому студент отримує уявлення про розмаїття методів фізичних досліджень.

Наявність посібника надає змогу студентам не тільки ознайомитися з загальними основами фізичного практикуму, але й визначити основні етапи формування професійної компетентності, які необхідні для якісного та повноцінного проведення експерименту.

РОЗДІЛ 1
КОНЦЕПТУАЛЬНО МЕТОДИЧНІ ПИТАННЯ ФІЗИЧНОГО ПРАКТИКУМУ

Фізика – наука, яка вивчає найпростіші та, в той же час, найбільш загальні закономірності явищ природи, властивостей і будови матерії, закони її руху. Поняття фізики та її закони лежать в основі всього природознавства. Фізика відноситься до точних наук та вивчає закономірності явищ. Саме це враховує програма курсу загальної фізики.

Майбутній вчитель фізики повинен мати фундаментальну підготовку з фізики, вищої математики, основ радіоелектроніки, основ інформатики, психології, педагогіки та методики викладання, щоб забезпечити належний науковий і методичний рівень викладання фізики, виконувати дослідницьку роботу, вміти працювати на сучасному фізичному обладнанні, орієнтуватись в питаннях менеджменту фізичного обладнання, приладів та матеріалів, в питаннях охорони навколишнього середовища, проводити виховну роботу в учнівському колективі.

Державним освітнім стандартом вищої професійної освіти висувається вимога підготувати фахівця фізика до вирішення наступних завдань науково-дослідної (експериментальної, теоретичної і розрахункової) діяльності:

· наукових досліджень поставлених проблем;

· формулювання нових завдань під час наукових досліджень;

· розробка методів досліджень;

· вибір необхідних методів дослідження;

· обробка отриманих результатів наукових досліджень та його аналіз;

· роботу з наукової літературою за допомогою нових інформаційних технологій, стеження за науковою періодикою;

· написання наукових статей;

· складання звітів і доповідей в науково-дослідній роботі [1].

Рівень підготовленості фахівця до науково-дослідної діяльності залежить від того, як сформовані в ньому дослідницькі вміння. Без систематичного, безперервного формування дослідницьких умінь всіх студентів неможливо виконання вимог, заявлених Державним освітнім стандартом вищої професійної освіти.

Формування дослідницьких умінь починається ще в шкільному періоді, коли учні виконують нескладні лабораторні роботи, вирішують творчі завдання, виконують експериментальні домашні завдання дослідницького характеру, займаються проектною діяльністю, беруть участь у турнірах юних фізиків, в конференціях, цікавих вечорах, олімпіадах із фізики. Проте, як свідчить аналіз психолого-педагогічної й методичної літератури, повертаються до дослідницькій роботі ці школярі вже на старших курсах університету, коли вивчають дисципліни з обраної спеціалізації. Отже, виникає тимчасова прогалина у дослідницькій діяльності студентів. Разом із тим, загальний фізичний практикум 1-3 курсів має великі можливості у формуванні дослідницьких умінь. Як вважають О.Н.Бегинина, Б.С.Дмитриева, А.А. Князєва, Н.Б.Ковилова, Ю.І. Левіна, Ю.П.Шараєвский, що загальні основи фізичного експерименту для студентів – фізиків закладаються на молодших курсах, і вони тісно пов'язані з курсом загальної фізики та фізичним практикумом. Отримані на цьому етапі вміння і навички багато чому визначають успішність подальшого навчання, і сприяють формуванню висококласних фахівців [2].

Курс загальної фізики в педагогічній освіті майбутнього вчителя фізики є профілюючою дисципліною, оскільки формує у студентів уявлення про фізику як науку. Особливість вивчення фізики в педагогічному університеті полягає в тому, що студенти повинні оволодіти системою вмінь і навичок, які б давали можливість ефективно передавати знання учням, виховувати у них допитливість, інтерес до знань, любов до винахідництва.

Специфіка цієї дисципліни вимагає вивчення теорії фізичних явищ та законів, вміння математично їх описувати та застосовувати набуті знання при розв'язуванні задач. Невід’ємною органічною складовою курсу фізики є лабораторний практикум. Основною метою лабораторних робіт (фізичного практикуму) є сприяння більш глибокому засвоєнню теоретичних знань, їх закріпленню та формуванню навичок застосування. Важливу роль у системі підготовки спеціалістів-фізиків відіграє спеціальний фізичний практикум, поставлений на рівні сучасних наукових досліджень, та використовує базу науково-дослідних лабораторій.

Метою лабораторних робіт є поглиблення розуміння природи деяких фізичних законів та явищ, вивчення та використання законів, придбання навичок експериментального дослідження приладів та методів обробки результатів експериментальних досліджень. Лабораторні роботи - це форма учбових занять, які передбачують значну самостійність студентів.

Процес підготовки висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах все більше спирається на самостійну, близьку до дослідницької діяльності студентів. З цією метою кожний студент повинен оволодіти методами наукового пізнання, одержати навички необхідні для ефективної реалізації себе у відповідній галузі. Підготовка висококваліфікованого сучасного вчителя передбачає формування таких знань, умінь і навичок, які дозволяють забезпечувати ефективне навчання і плідну майбутню педагогічну діяльність його в умовах диференційованого навчання в школах різного типу, вивчення дисциплін за різними профільними програмами, запровадження різноманітних технологій навчання, в тому числі й інноваційних комп’ютерних технологій, реалізацію у навчальному процесі особистісного, діяльнісного підходів тощо. Такий багатоаспектний підхід до підготовки вчителя у педагогічному ВНЗ передбачає формування у фахівця високого рівня умінь науково-дослідної роботи.

Елементи наукових досліджень мають місце у всіх формах навчального процесу майбутніх учителів фізики і математики. Тому оволодіння навичками наукових досліджень є важливою умовою їхньої якісної професійної підготовки, що вимагає постійного пошуки і вдосконалення навчально-виховного процесу, реалізації здобутків науковців у галузі психолого-педагогічних досліджень та отримані власних позитивних результатів й апробовунні їх у своїй педагогічній діяльності.

Вищезазначене вимагає ознайомлення кожного випускника фізико-математичного факультету педагогічного ВНЗ з основними положеннями стосовно організації, виконання та узагальнення результатів наукового дослідження, а також з вивченням узагальненням та запровадженням передового педагогічного досвіду підготовки майбутніх учителів фізико-математичних дисциплін.

Аналіз наукової літератури, присвяченій організації фізичного практикуму показує, що до нинішнього моменту розроблено різні методики його проведення. Провідні вчені цієї галузі знань намагаються створити освітню технологію, що, на відміну від традиційних способів проведення лабораторних занять, дозволяє виключити формалізм у виконанні лабораторних робіт, сприяє більш повному розумінню теоретичного матеріалу та допомагає розвинути творчий потенціал студентів.

Сьогодні більшість студентів першого курсу вміють користуватися комп'ютером, працювати в Інтернеті, тому використання комп'ютера під час проведення практикуму не ускладнює, а істотно допомагає процесу навчання. Впровадження комп'ютера у процес навчання має враховувати деякі особливості практикуму. Необхідно, щоб робота студента загалом на фізичному практикумі завжди була невеликим дослідженням, за допомогою якого формуються як експериментальні, так й дослідницькі навички. З іншого боку, традиційна методика проведення фізичних практикумів має багато плюсів, тому відмова від неї не є раціональною. У цьому необхідно вміле поєднання її методів із застосуванням інформаційних технологій.

Відзначають, що загалом фізичний практикум виконує такі функції:

· інформаційну – він повинен містити найважливіші довідкові матеріали, детальний опис роботи, систему тестів для самоконтролю з можливістю моделювання конкретних завдань;

· обробки експериментальної інформації – математичний додаток, що дозволяє спростити обробку результатів;

· визначення багатофункціональності фізичного приладу.

Комп'ютер може бути як помічник викладача при контролі базових знань студента. Такий контроль може здійснюватися за допомогою нескладних тестових завдань.

Використання комп'ютера під час проведення лабораторного практикуму допомагає виховати фахівців, які мають високий рівень інформаційної культури, здатних використовувати інструментальні засоби, щоб забезпечити процес збору, збереження і передачі інформації, тобто оволодіти новими інформаційними технологіями.

РОЗДІЛ 2.
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

Практична корисність будь-якого вимірювання у фізиці визначається зазначенням його похибки, тобто кількісної характеристики відхилення результату вимірювання від істинного значення вимірюваної фізичної величини. Виникнення похибок вимірювань обумовлено впливом різноманітних за фізичною природою факторів, що супроводжують вимірювання. Традиційний аналітичний підхід до визначення похибок полягає в поділі їх на складові, кожна з яких зумовлена певними факторами. Це дозволяє досліджувати джерела складових похибки, проводити необхідні експерименти, в тому числі допоміжні вимірювання, і, як наслідок, визначити властивості похибки та з необхідною точністю оцінити її складові. Знаючи властивості й оцінки складових, можна правильно урахувати їх при оцінці повної похибки, а також при необхідності ввести поправку в результат вимірювання й (або) організувати вимірювальний експеримент так, щоб звести окремі складові, а з ними й повну похибку до допустимого значення. Для підвищення об'єктивності оцінки похибок вимірювань і визначення шляхів їх зменшення, з метою покращання якості вимірювань, необхідно знати джерела (причини) виникнення різних складових повної похибки вимірювань і закономірності їх змінювання.

Похибки вимірювань розрізняють за такими ознаками (рис.2.1):

1) за джерелом виникнення;
2) за способом вираження;
3) за залежністю від значення вимірюваної величини;
4) за режимом вимірювання;
5) за закономірністю або характером змінювання (в часі або за ансамблем);
6) за формою або способом відображення кількісних характеристик похибки вимірювань.

Зупинимося на класифікації похибок вимірювань за джерелом виникнення.

Цілком природно виділити складові похибки та їх джерела відповідно до основних структурних елементів процесу вимірювання. Виходячи з цього, як джерела похибок вимірювань слід розглядати метод вимірювання і засобів вимірювальної техніки (ЗВТ), а також оператора (суб'єкта). Згідно з цим виділяють методичну, інструментальну та суб'єктивну складові похибки вимірювань.

Методична складова похибки вимірювання у загальному випадку зумовлена недосконалістю методу вимірювання, вона не залежить від властивостей ЗВТ.

Конкретизуємо джерела методичних похибок для прямих і непрямих (опосередкованих, сукупних і сумісних) вимірювань.

До найбільш поширених методичних похибок прямих вимірювань належать:

1. Похибка, обумовлена неадекватністю фізичної моделі об'єкта вимірювання (ОВ) реальному об'єкту та задачі вимірювання. Експериментатор мусить чітко відрізняти фактично вимірювану величину за прийнятою фізичною моделлю ОВ від тієї фізичної величини, що реально відтворює досліджувану властивість ОВ і підлягає вимірюванню.

Наприклад, при електричних вимірюваннях на виході будь-якого ОВ змінної напруги її форма прийнята синусоїдною, у той час як реальний сигнал не є синусоїдним і містить вищі гармоніки. Тому якщо відповідно до прийнятої фізичної моделі ОВ для вимірювання амплітуди або змінної напруги на виході ОВ використати вольтметр, призначений для вимірювання синусоїдної напруги, то в результат вимірювання буде внесена методична похибка, обумовлена дією вищих гармонік, присутніх у реальному сигналі ОВ.

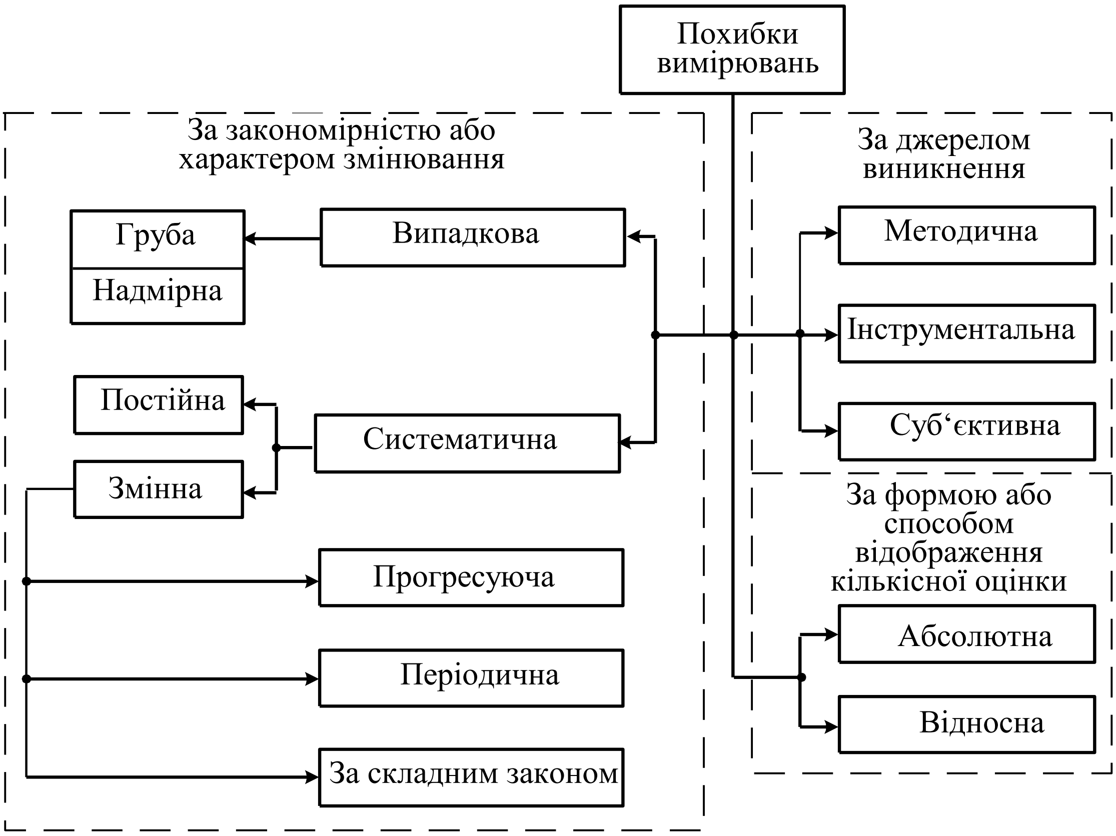

Рис.2.1 Класифікація похибок вимірювань

Невідповідність прийнятої фізичної моделі ОВ, що називають пороговою невідповідністю, викликає одну з принципово неусувних складових методичної похибки, яка обмежує досяжну точність вимірювання. Це спричиняється тим, що фізична модель ОВ визначає вимірювану величину, а звідси - вибір методу вимірювання і засобу (засобів) вимірювальної техніки.

2. Похибка, яка зумовлена зміною залежності між вимірюваною і проміжною величинами, якщо при вимірюваннях використовується проміжне перетворення ЗВТ.

3. Похибка передавання розміру вимірюваної величини від ОВ до ЗВТ, тобто фізичне з’єднання ЗВТ з ОВ не завжди здійснюється так, щоб розмір вимірюваної величини був однаковий на виході ОВ і на вході ЗВТ. Наприклад, таку похибку можуть вносити з’єднувальні проводи між ОВ і ЗВТ.

До характерних методичних похибок, які є специфічними для непрямих вимірювань, належать:

1. Похибка обчислювань, у тому числі похибка алгоритмів або програм обчислювань.

2. Похибка, обумовлена тим, що функції (функціонали) обчислюються, як безперервні, а реально вони є дискретними (вимірювання здійснюються при дискретних значеннях фізичної величини – аргументу).

Відмітною особливістю методичних похибок вимірювань є те, що вони, як правило, неконкретні і тому не можуть бути одержані будь-які узагальнені кількісні оцінки. Враховуючи це, методичні похибки звичайно не нормуються і не вказуються в технічній документації, а повинні оцінюватися експериментатором при реалізації вибраного методу вимірювань з урахуванням конкретних умов експлуатації ЗВТ. Така оцінка досить складна і часто потребує ґрунтовного експериментального дослідження прийнятого методу вимірювань. Якщо метод апробований протягом тривалого часу, то його похибки можуть бути встановлені і записані в паспорт методу. Складання подібних атестаційних паспортів похибок стандартних методів вимірювань є одним з важливих завдань сучасної метрології.

Інструментальна (приладова, апаратурна) складова похибки вимірювання обумовлена властивостями (або недосконалістю) ЗВТ, які використовуються при вимірюванні, що призводить до різних складових похибки.

Суб'єктивна (або особиста) складова похибки вимірювання залежить від індивідуальних властивостей експериментатора (суб'єкта), що виконує вимірювання, а точніше від його психофізіологічних якостей, зокрема, від недосконалості органів чуттів, які беруть участь у визначенні результату вимірювання (зору, слуху, швидкості реакції на сигнал), від здатності до концентрації уваги, від ступеня стомленості і т. ін. Велику роль відіграє кваліфікація експериментатора.

Суб'єктивна похибка вимірювання характерна тільки для аналогових вимірювальних приладів. Вона має два різновиди.

Першим різновидом суб'єктивної похибки вимірювань є похибка відліку, яка обумовлена округленням показів під час їх відліку оператором зі шкали аналогового вимірювального приладу. Вона проявляється в тому, що однаковий показ приладу, який, наприклад, дорівнює 84,3 поділки, один оператор зчитує правильно, другий – як 84,0, третій – як 84,5 і т.д.

Другим різновидом суб'єктивної похибки вимірювань є похибка паралакса, обумовлена взаємним розташуванням ока експериментатора, стрілки вказівника і шкали аналогового вимірювального приладу.

Вочевидь, такі похибки не можуть бути заздалегідь передбачені і вказані в технічній документації аналогових вимірювальних приладів. У цифрових вимірювальних приладах операція округлення виконується автоматично, а похибка округлення, що виникає при цьому, називається похибкою квантування, вона нормується і вказується в технічному описі приладу.

Зменшення або виключення суб'єктивної складової похибки вимірювання досягають застосуванням спеціальних типів шкал, наприклад дзеркальних, використанням цифрового відліку і автоматизацією одержання результату вимірювання.

Таким чином, суб'єктивні похибки вимірювань поки що не можуть бути оцінені кількісно, а тому вони не входять у математичну модель повної похибки вимірювань. Їх треба зменшувати або виключити, але про них слід завжди пам'ятати під час відліку оператором показів зі шкали аналогового вимірювального приладу.

2.2 Різновиди похибок вимірювань за закономірністю їх зміни

Похибки вимірювань відрізняються закономірністю або характером зміни при повторних вимірюваннях (у часі та за ансамблем реалізацій) і за цією ознакою їх поділяють на випадкові та систематичні. Ця кваліфікаційна ознака поділу похибок вимірювання на складові має дві мети.

Перша і визначальна мети: придатність тих або інших математичних методів підсумовування (об'єднання) складових похибки вимірювання для аналітичного розрахунку його повної похибки. Так, якщо складові похибки вимірювання залишаються постійними або закономірно змінюються, то для їх розрахунку і підсумовування придатні методи функціонального аналізу. Якщо ж складові похибки вимірювання змінюються стохастично (випадково), то для їх розрахунку та підсумовування використовуються методи теорії ймовірностей і математичної статистики.

При досягненні першої мети можна забезпечити і другу мету розподілу похибки вимірювання на систематичну і випадкову – визначення раціональних методів зменшення цих складових.

Випадкова похибка – це складова похибки вимірювання, що змінюється випадково (непередбачено за значенням і знаком) при повторних вимірюваннях того самого розміру фізичної величини.

Поява випадкових похибок зумовлена в основному дією на метрологічні характеристики ЗВТ великої кількості внутрішніх і зовнішніх факторів, що змінюються випадково, тобто випадкові похибки є, як правило, інструментальними. Крім того, випадкову похибку може вносити і недосвідчений оператор, який не володіє стійкими навичками відліку показів аналогових вимірювальних приладів.

У силу непередбаченості випадкова складова похибки не може бути виключена з результату вимірювання, але вона може бути зменшена при статистичній обробці багаторазових спостережень.

Окремий вид випадкових похибок складають **грубі похибки**. До них належать ті похибки, реальні значення яких істотно перебільшують очікувані значення, відповідні основним компонентам процесу вимірювання (застосованим методу і ЗВТ, а також умовам вимірювання). Причинами грубих похибок є помилки оператора, несправність і неправильне застосування ЗВТ, короткочасні і різкі змінювання умов вимірювання, наприклад, короткочасна втрата живлення в будь-якому електричному колі, збій від імпульсних завад, механічний удар та ін. Особливо великі за значенням грубі похибки називають надмірними. Вони викликаються, як правило, невірними діями оператора (порушенням правил експлуатації ЗВТ, помилками при відліку та записі результатів вимірювань). Грубі похибки доцільно виявляти і виключати з розгляду, для їх виявлення існують статистичні методи. Результат вимірювання, який одержаний з надмірними похибками, називають промахом (або аномальним результатом вимірювання). Промахи настільки очевидні, що є досить помітними для досвідченого оператора на етапі попереднього аналізу результатів вимірювань. Вони повинні бути обов’язково вилучені з подальшого розгляду.

Систематична похибка– це складова похибки вимірювання, яка при повторних вимірюваннях того самого розміру фізичної величини залишається постійною або змінюється за певним законом.

Систематичні похибки за причинами, що їх викликають, можуть бути методичними, інструментальними і суб’єктивними. Окремі інструментальні похибки ЗВТ, будучи систематичними для конкретного зразка ЗВТ, переходять у розряд випадкових для групи однакових ЗВТ, наприклад, неточність градуювання їх шкал. Це стосується і методичних похибок вимірювань.

За характером змінювання від вимірювання до вимірювання розрізняють постійні і змінні систематичні похибки вимірювань.

Постійні систематичні похибки вважаються незмінними за значенням у будь-який час вимірювань. До них належать методичні похибки, такі інструментальні похибки, як неточність міри, вхідного подільника напруги і градуювання приладу, а також суб’єктивні похибки досвідчених операторів зі стійкими навичками.

Постійні систематичні похибки є найбільш небезпечними, оскільки їх присутність у результатах вимірювань дуже важко виявити. Це пов’язано з тим, що така похибка, на відміну від випадкових та інших видів систематичних похибок, ніяк себе не проявляє при повторних вимірюваннях. Для її виявлення часто потрібно проводити спеціальні метрологічні дослідження, простим прикладом яких може бути звірення показів робочого ЗВТ з показами зразкового ЗВТ (повірка).

Основною відмінністю та особливістю постійних систематичних похибок є те, що вони можуть бути передбачені і завдяки цьому майже повністю усунені введенням відповідних поправок, знайдених один раз на весь термін служби або, принаймні, на міжповірочний інтервал даного ЗВТ.

Змінні систематичні похибки змінюються в процесі вимірювання за певним законом у функції часу (або від вимірювання до вимірювання), тобто детерміновано. За характером змінювання їх поділяють на прогресуючі, періодичні й змінювані за складним законом.

Прогресуючими (або дрейфовими) називають систематичні похибки, які монотонно збільшуються або зменшуються в часі. Вони, як правило, викликаються процесами старіння тих чи інших вузлів і елементів ЗВТ: розрядженням автономних джерел живлення, старінням резисторів і конденсаторів, деформацією механічних деталей, усадкою паперової стрічки в самописних приладах і т.д.

Першою особливістю прогресуючих похибок є те, що вони можуть бути скореговані введенням поправок у результати вимірювань лише в задані моменти часу. Це означає, що прогресуючі похибки потребують безперервної корекції і тим частіше, чим меншим повинно бути їх залишкове значення. Друга особливість прогресуючих похибок полягає в тому, що їх змінювання в часі являє собою, строго кажучи, нестаціонарний випадковий процес, і тому їх належність до систематичних похибок є досить умовною.

За складним законом систематична похибка змінюється в тому випадку, коли вона викликається декількома факторами, кожний з яких змінюється за певним законом, властивим цьому фактору.

Отже, особливою ознакою систематичних похибок є можливість передбачення їх значень і в ідеальному випадку повного вилучення з результатів вимірювань.

Окремі фахівці до систематичних похибок зараховують тільки постійні похибки, при цьому основною ознакою є постійність поправки до кожного результату вимірювання на весь термін служби ЗВТ. Нам більш правильним здається перший підхід, при якому систематичні похибки можуть бути враховані або скореговані незалежно від характеру їх змінювання. Якщо ж за якоюсь причиною систематичні похибки враховані бути не можуть (не вдається їх описати або визначити інструментально), тоді їх називають не вилученими систематичними похибками і відносять до випадкових похибок.

На противагу систематичній похибці випадкова похибка не може бути заздалегідь передбачена і вилучена з результату вимірювання, вона може бути тільки зменшена.

Таким чином, у загальному випадку повна похибка результату вимірювання складається з систематичної і випадкової складових, тому її слід розглядати в цілому як випадкову величину. Математичне сподівання повної похибки вимірювань являє собою її абсолютну систематичну складову Δ_c, центрована складова повної похибки вимірювань – її абсолютну випадкову складову $\overset{o}{\Delta}$. Тоді за будь-яким законом розподілу абсолютну повну похибку вимірювань можна подати у вигляді:

$$\Delta = \Delta_c + \overset{o}{\Delta}, \tag{2.1}$$

де $\Delta_c = M[\Delta]$; $\overset{o}{\Delta} = \Delta - M[\Delta] = \Delta - \Delta_c$;

M – знак математичного сподівання.

Якщо постійна систематична складова похибки вимірювання Δ_c відома, її вилучають з результату вимірювання X (або вводять поправку) і тим самим переходять до виправленого результату вимірювання

$$\tilde{X} = X - \Delta_c. \tag{2.2}$$

Виправленим називається результат вимірювання $\tilde{X}$, з якого введенням поправки вилучена систематична складова похибки вимірювання. У противному разі результат вимірювання X є невиправленим, але цей термін звичайно не вживають.

Числове значення будь-якої фізичної величини знаходять шляхом виміру, або розрахунку. Вимірювання це процес відшукання значення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів. Виміряти безпосередньо якусь фізичну величину цс означає порівняти її з деякою іншою однорідною з нею величиною, взятою за одиницю виміру. Отримане число показує, у скільки разів величина, що вимірюється, більше або менше обраної одиниці виміру. Отриманому числу приписується таке ж найменування, як і обраній одиниці.

Прямі виміри здійснюються або шляхом безпосереднього порівняння фізичної величини, що вимірюється, з одиницями міри, як це має місце при вимірах довжини лінійкою, штангенциркулем, мікрометром і т.п., або приладами, градуйованими у визначених одиницях, наприклад амперметрами, вольтметрами і т.п.

В багатьох випадках значення фізичної величини визначають за допомогою обчислень, використовуючи при цьому значення безпосередньо виміряних величин. Це трапляється тоді, коли відома функціональна залежність даної величини від безпосередньо виміряних величин. Наприклад, для визначення об'єму циліндра використовують функціональну залежність від діаметра d та висоти h:

$$V = \pi \cdot d^2 \cdot h / 4.$$

При *непрямих* вимірах, величину y знаходять по відомій функціональній залежності $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ від величин $x_1, x_2, \dots x_n$, значення котрих знаходять прямими вимірами.

Виміряне значення фізичної величини завжди відрізняється від істинного тому, що при вимірюваннях завжди виникають похибки. При вимірюваннях необхідно знайти не тільки наближене значення фізичної величини, але й обчислити відхилення цього значення від істинного. Цим питанням займається теорія похибок.

Всі вимірювання можуть бути виконані тільки з визначеним ступенем точності. Похибка вимірювань визначається як відхилення результату виміру від істинного значення величини.

Як показує теорія і практика, до істинного значення вимірюваної величини найближче підходить середнє арифметичне значення багатьох вимірювань. Якщо якусь величину x виміряли n раз і отримали ряд значень $x_1, x_2 \dots x_n$, то найбільш ймовірне значення виміряної величини x знаходять як середнє арифметичне результатів окремих вимірів:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad (2.3)$$

Похибки вимірів бувають систематичними, випадковими і промахами.

Систематична похибка – це складова частина похибки виміру, що залишається сталою, або такою, що закономірно змінюється при повторних вимірах однієї та тієї ж величини.

Випадкова похибка – це складова частина похибки вимірювань, що змінюється випадково при повторних вимірах однієї та тієї ж величини.

Промах – це такий результат виміру, значення якого набагато відрізняється від очікуваної похибки в даних умовах. Наприклад, ці похибки можуть бути отримані, якщо прилад несправний або якщо експериментатор неуважний.

Похибки вимірювань бувають абсолютними і відносними. *Абсолютною похибкою* вимірювання називається похибка, виражена в одиницях величини, що вимірюється, вона визначається формулою

$$\Delta x = x - X \,, \tag{2.4}$$

де *x* – значення, здобуте при вимірюванні; *X* – справжнє значення величини, що вимірюється (найбільш ймовірне).

Середня арифметична абсолютна похибка n вимірювань дорівнює

$$\langle \Delta x \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\Delta x| \Big/ n \,. \tag{2.5}$$

Величина $\langle \Delta x \rangle$ визначає інтервал, у межах якого з певною ймовірністю знаходиться істинне значення вимірюваної величини. За визначенням

$$x - \Delta x \le x \le x + \Delta x \,., \tag{2.6}$$

де Δx – абсолютна похибка вимірювань x. Чим більша ширина інтервалу 2Δx, тим більшою буде ймовірність того, що точне значення вимірюваної величини належить цьому інтервалу.

Відносною похибкою вимірювання називається відношення абсолютної похибки вимірювання до справжнього значення величини що вимірюється

$$E = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \,, \tag{2.7}$$

як правило, визначається у відсотках

$$E = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\% \,. \tag{2.8}$$

Знайти істинне значення фізичної величини *x* неможливо. Можна тільки вказати інтервал (x_{min}, x_{max}), в якому з ймовірністю αзнаходиться значення досліджуваної величини.

Приклад: поглядом вимірюють зріст студента в сантиметрах. Ми можемо припустити, що зріст студента може бути визначений між 1,5 м і 2,0 м з ймовірністю 0,9. Тоді ми можемо стверджувати, що зріст студента може бути визначений між 1,6 м і 1,8 м з меншою ймовірністю 0,6 і так далі. Цей інтервал називають *довірчим інтервалом*. На рис.2.2 зображено довірчий інтервал досліджуваної величини *x*, де $\bar{x}$ – найбільш ймовірне значення виміряної величини; Δx – півширина довірчого інтервалу для заданого α. Тому, істинне значення вимірюваної величини може бути визначене як

$$\mathrm{x} = \overline{\mathrm{x}} \pm \Delta\mathrm{x}, \tag{2.9}$$

з ймовірністю α, або

$$x - \Delta x \le x \le x + \Delta x. \tag{2.10}$$

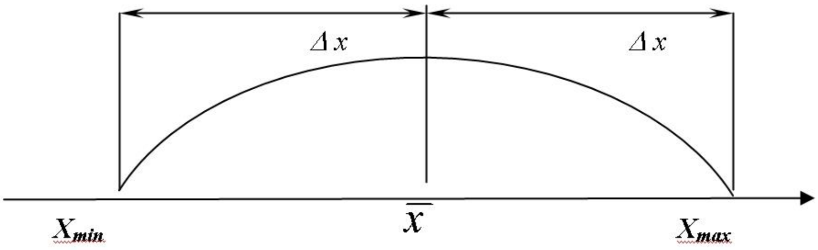

Рис. 2.2 Довірчий інтервал

Ймовірність знаходження істинного значення вимірюваної величини в інтервалі $\pm\Delta x$ залежить від кількості вимірювань *n*. Якщо $n \to \infty$, то ймовірність наближається до 1. Якщо ж n дорівнює кільком одиницям, то ймовірність не досягає й 0,6. Тому для малої кількості вимірювань згаданий інтервал розширюють, збільшуючи *Δx*. Для цього знаходять середньоквадратичну похибку середнього арифметичного

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}, \tag{2.11}$$

і збільшують її в *t* разів (*t* – так званий коефіцієнт Ст`юдента. Цей коефіцієнт було введено в 1908 році англійським математиком та хіміком В.С. Госсетом). Величину

$$\Delta \mathrm{x}_\mathrm{i} = \overline{\mathrm{x}} - \mathrm{x}_\mathrm{i}, \tag{2.12}$$

називають *випадковим відхиленням*. Середнє квадратичне похибка результату серії вимірювань, викликана випадковими відхиленнями Δx_i, визначається як

$$\Delta x_{ср.кв.} = \sqrt{\frac{\sum_{s=1}^{n} (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}. \tag{2.13}$$

Множимо знайдене значення коефіцієнта Стьюдента *t* (коефіцієнт Стьюдента, залежить від α і кількості вимірів *n*) на середню квадратичну похибку середнього значення, знаходимо випадкову похибку $\Delta x_{вип}$ результатів прямих вимірювань

$$\Delta x_{вип.} = t \cdot \sqrt{\frac{\sum_{s=1}^{n} (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}. \tag{2.14}$$

Таблиця 2.1

n\α	*0,4*	*0,5*	*0,6*	*0,7*	*0,8*	*0,9*
2	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3
3	0,62	0,82	1,06	1,4	1,9	2,9
4	0,58	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4
5	0,57	0,74	0,99	1,2	1,5	2,1
6	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0
7	0,55	0,72	0,91	1,1	1,4	1,9
8	0,55	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9
9	0,54	0,71	0,89	1,1	1,4	1,9
10	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8
20	0,58	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7
∞	0,52	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6

2.3 Похибки засобів вимірювання

До засобів вимірювань належать вимірювальні прилади та установки. Кожен прилад дає похибку, так як його неможливо зробити ідеальним. Похибка засобів вимірювання не перевищує деякої величини. Цю величину називають *межею основної допустимої похибки вимірювального приладу* (МОДП). МОДП на засоби вимірювання встановлюється державними стандартами і визначається у вигляді абсолютних, відносних та приведених похибок.

Абсолютна похибка приладу δ – це є різниця

$$\delta = a - X \,, \qquad (2.15)$$

де *a* – показання приладу, *X* – справжнє значення вимірюваної величини. Взагалі δ дорівнює ціні найменшої поділки інструмента. Наприклад: для лінійки δ=1 мм. Відносна похибка вимірів – це відношення

$$\varepsilon = \frac{\delta}{X} \,. \qquad (2.16)$$

Як правило, вона визначається у відсотках

$$\varepsilon = \frac{\delta}{X} \cdot 100\,\% \,. \qquad (2.17)$$

Приведена похибка вимірювання або клас точності визначається відношенням

$$\gamma = \frac{\delta}{D} \cdot 100\%, \qquad (2.18)$$

і визначається у відсотках. D – максимальне значення шкали інструмента. Наприклад: сила струму вимірюється амперметром з діапазоном 0 ÷ 1 А, клас точності 0,5. Це означає, що $X_н$ = 1 А; γ = 0,5 % і

$$\delta = \frac{\delta \cdot D}{100} = \frac{0,5 \cdot 1A}{100} = 5 \cdot 10^{-3} A.$$

Якщо амперметр показує 0,3 А , тоді

$$\varepsilon = \frac{5 \cdot 10^{-3} A}{0,3A} \cdot 100\% = 1,7\%.$$

2.4 Похибки табличних величин

1. Похибка табличної величини визначається за формулою

$$\Delta x_{табл} = \alpha \cdot v, \qquad (2.19)$$

де α - довірча ймовірність; v - половина ціни розряду останньої залишеної цифри табличної величини. Наприклад: величина π дорівнює 3,14. В цьому випадку v = 0,005 і

$$\Delta x_{табл} = \alpha \cdot 0,005.$$

Якщо величина π дорівнює 3,141 і ν= 0,0005,то

$$\Delta x_{табл} = \alpha \cdot 0,0005.$$

2. При користуванні вимірювальними приладами виникають похибки відліку. Типово, похибка відліку дорівнює половині ціни поділки шкали приладу. Наприклад: лінійка має похибку відліку ν = 0,5 мм.

2.5 Правила округлення і виконання наближених обчислень

Точність обчислень завжди повинна відповідати точності вимірів. Зайва арифметична точність обчислень не позитивна якість, а недолік в роботі. Наприклад, якщо середнє арифметичне значення товщини пластинки після розрахунку було взято рівним 2,2543 мм при абсолютній похибці вимірів 0,03 мм, то при цьому показане лише невміння виконувати арифметичні дії з наближеними числами. Щоб не витрачати даремно часу для одержання сумнівної арифметичної точності, необхідно всі отримані величини перед підстановкою в формули округляти, залишаючи в них на одну значущу цифру більше, ніжу самої з наближених величин (з найменшим числом знаків). При округленні наближеного числа необхідно відкидати останні цифри, якщо перша з цифр, що відкидаються, менша 5, і додавати одиницю до попередньої цифри, якщо перша з цифр, що відкидаються, 5 або більше.

За написаним числом, що виражає результат виміру або обчислення, можна говорити про ступінь точності.

Значущі цифри – це усі цифри, крім нулів, що стоять перед числом, і нулів, поставлених наприкінці записаного результату замість відкинутих цифр при округленні.

Десяткові таки числа – це усі цифри, розміщені праворуч від коми. Наприклад, число 25,002 має п'ять значущих цифр, а десяткових знаків три; число 0,0034 має дві значущі цифри, але чотири десяткових знаки.

Якщо обчислення за наближеними даними проводяться у декілька дій, то в проміжних діях треба зберігати на одну значущу цифру більше в порівнянні з точністю визначуваних величин у даному досліді (тобто дві сумнівні цифри). У всіх арифметичних діях над наближеними числами в остаточному результаті треба уберігати стільки десяткових знаків, скільки їх мають наближені дані з найменшим числом десяткових знаків .

Округлення чисел у процесі обчислення призводить до систематичної похибки. Відносна похибка, яку знаходять в результаті обчислень, має бути приблизно на порядок (тобто у 10 разів) менша за похибку результату непрямих вимірювань.

У записі результату вимірювань залишають одну (максимум дві) сумнівні цифри. Похибку вимірювань округляють до однієї значущої цифри, якщо ця цифра не «1». Якщо ж ця цифра «1», то у похибці залишають дві значущі цифри, в записі результату вимірювань – дві сумнівні цифри. Сумнівними називаються значущі цифри в записі результату вимірювань, десяткові розряди яких збігаються з десятковими розрядами значущих цифр у записі похибки цього результату.

Розряди останніх цифр Δx і x мусять співпадати. Для цього округляють x або приписують до нього невистачаючі нулі справа. E округляють по тим же правилам, що і Δx. Спочатку округляють Δx, $\Delta x = 0{,}3$ мм. Розряд останньої цифри Δx - десяті долі, а $\overline{x}$ – соті долі. Округляємо $\overline{x}$ до десятих долів. Маємо $\overline{x} = 73{,}6$ мм.

Знаходимо E:

$$E = \frac{\Delta X}{X} \times 100\% = \frac{0,3}{73,6} \times 100\% = 0,393\% = 0,4\%$$

Кінцевий результат x = 173,6 ± 0,3 мм , α = 0,7 , E = 0,4 %

2.6 Похибки прямих вимірювань

Похибки прямих вимірювань визначаються за формулою

$$\Delta x = \sqrt{(t_\infty \cdot \frac{\delta}{3})^2 + (\alpha \cdot v)^2}, \ n = 1, \qquad (2.20)$$

якщо деяку величину виміряти один раз.

Якщо вимірювання виконувались *n* раз , то

$$\Delta x = \sqrt{(t_\infty \cdot \frac{\delta}{3})^2 + (\Delta x_{вип.})^2}, \ n > 1. \qquad (2.21)$$

В цих рівняннях t_∞- коефіцієнт Стьюдента для заданого α при необмеженому числі вимірів; δ- похибка приладу; v- похибка відліку, $v = \delta / 2$.

Наприклад: довжина тіла була виміряна 3 рази:

n	x, мм	Δx_i, мм	$(\Delta x_i)^2$
1	12,8	0,446	0,217
2	13.6	0,334	0,111
3	13,4	0,134	0,018
$\bar{x}$ =13,2		$\sum(\Delta x_i)^2$=0,3	

$$\Delta X = \sqrt{(t_\infty \cdot \frac{\delta}{3})^2 + (\Delta X_{вип})^2} = \sqrt{(1 \cdot \frac{1}{3})^2 + 1,4^2 \cdot \frac{0,346}{3 \cdot 2}} = 0,473 \text{ мм.}$$

Відносна похибка дорівнює

$$E = \frac{0,473}{13,266} \cdot 100\% = 3,56\%.$$

Кінцевий результат: x = (13,3 ± 0,3) мм ; α = 0,7 ; E = 3,6 %.

2.7 Похибки непрямих вимірювань

Якщо у - величина, що вимірюється посередньо, її розраховують за відомою залежністю $y=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ від змінних $x_1,x_2,,\ldots x_n$, які вимірюють безпосередньо.

1. Похибки непрямих вимірів визначаються за формулою:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i\right)^2}, \qquad (2.22)$$

якщо функціональна залежність досліджуваної величини є багаточлен.

2. Похибки непрямих вимірів можна визначати

$$E = \frac{\Delta y}{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i\right)^2}, \qquad (2.23)$$

$$\Delta \Pi = \sqrt{[(\frac{V^2}{2} + g \cdot h) \cdot \Delta m]^2 + (m \cdot V \cdot \Delta V)^2 + (m \cdot h \cdot \Delta g)^2 + (m \cdot g \cdot \Delta h)^2}.$$

якщо функціональна залежність досліджуваної величини є одночлен і потім знаходимо Δy як: $\Delta y = E \cdot \bar{y}$.

Наприклад:

1. Якщо залежність функції $\Pi = \frac{m \cdot V^2}{2} + m \cdot g \cdot h = f(m, V, g, h)$, тоді

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{m \cdot V^2}{2} + m \cdot g \cdot h\right) = \frac{V^2}{2} + g \cdot h,$$

$$\frac{\partial f}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{m \cdot V^2}{2} + m \cdot g \cdot h\right) = m \cdot V,$$

$$\frac{\partial f}{\partial g} = \frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{m \cdot V^2}{2} + m \cdot g \cdot h\right) = m \cdot h,$$

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{m \cdot V^2}{2} + m \cdot g \cdot h\right) = m \cdot g$$

Тоді

$$\Delta \Pi = \sqrt{[(\frac{V^2}{2} + g \cdot h) \cdot \Delta m]^2 + (m \cdot V \cdot \Delta V)^2 + (m \cdot h \cdot \Delta g)^2 + (m \cdot g \cdot \Delta h)^2}.$$

2. Якщо залежність функції: $\Pi = m \cdot g \cdot h = f(m, g, h)$,

$$\ln \Pi = \ln m + \ln g + \ln h$$

$$\frac{\partial \ln \Pi}{\partial m} = \frac{1}{m}$$

$$\frac{\partial \ln \Pi}{\partial g} = \frac{1}{g}$$

$$\frac{\partial \ln \Pi}{\partial h} = \frac{1}{h}$$

Тоді

$$E = \frac{\Delta \Pi}{\Pi} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2},$$

$$\Delta \Pi = E \cdot \overline{\Pi}.$$

У результаті отримуємо

$$\Pi = \Pi \pm \Delta \Pi, \alpha, E.$$

2.8 Графічне відображення експериментальних результатів

Графік будується на міліметровому папері. На рисунках 2.3 і 2.4 можна побачити приклади графіків.

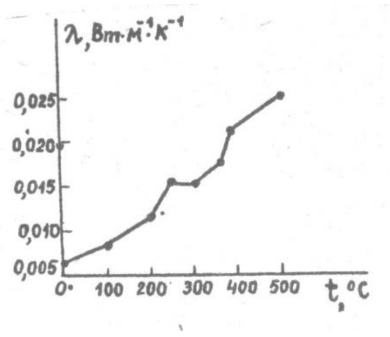

Рис. 2.3 невірно

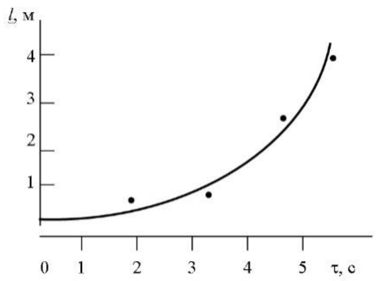

Рис. 2.4 вірно

Експериментальна крива проходить крізь експериментальні точки.

2.9 Показники якості вимірювань

Для кількісної оцінки впливу повної похибки, а також її систематичної і випадкової складових на результат вимірювання, використовують показники якості вимірювань: точність, правильність, збіжність, відтворюваність.

Точність вимірювань звичайно характеризується відносною похибкою вимірювань: чим менша відносна похибка, тим вища точність вимірювань.

Правильність вимірювань– це показник якості вимірювань, що відбиває близькість до нуля систематичних похибок у результатах вимірювань. Тобто правильність характеризує вплив систематичної похибки на результат вимірювання.

Збіжність вимірювань– це показник якості вимірювань, що відбиває близькість між собою результатів вимірювань того самого розміру фізичної величини, які виконуються повторно тими самими методами вимірювань і засобами вимірювальної техніки в однакових умовах.

Таким чином, збіжність результатів вимірювань відображає близькість до нуля випадкової похибки.

Відтворюваність (або повторюваність у встановлених границях похибки) вимірювань визначається близькістю між собою результатів вимірювань того самого розміру фізичної величини, які отримують у різних містах і в різний час виконання експерименту, різними методами вимірювань і засобами вимірювальної техніки, але приводять до однакових умов виконання вимірювань (температури, тиску, вологості та інших впливних величин).

Збіжність і відтворюваність можуть бути оцінені кількісно дисперсією результатів вимірювань.

2.10 Невизначеність вимірювань

У вітчизняних нормативних документах для оцінювання точності вимірювань зберігається традиційний підхід, що ґрунтується на понятті "похибка вимірювань". Новий підхід рекомендується МКМВ, МОЗМ, Міжнародною електротехнічною комісією (МЕК) та іншими міжнародними організаціями. Цей підхід ґрунтується на оцінюванні точності вимірювань за допомогою поняття "невизначеність вимірювань" (або просто "невизначеність).

У відомій літературі з метрології та в будь-яких міжнародних документах нема досить переконливих обґрунтувань щодо відмови від терміна "похибка" і заміни його новим терміном "невизначеність". Більш того рекомендовані оцінки для відображення кількісних характеристик невизначеності мають або той самий, або дещо модифікований вигляд, як і для похибок, зберігаючи в основному фізичний зміст. Тому заміна вказаних термінів обумовлена не принципово якісними, фундаментальними обґрунтуваннями, а асоціативністю їх розуміння. Так, термін "похибка" асоціюється з визначеною величиною, а термін "невизначеність" – з сумнівом, невпевненістю, що нібито більше відображає фізичний зміст результату вимірювання.

Невизначеність вимірювань – це параметр, зв’язаний з результатами вимірювань, який характеризує розсіяння значень, що можуть бути обґрунтовано приписані вимірюваній величині.

Отже, невизначеність вимірювань означає сумнів відносно вірогідності результатів вимірювань.

Для кількісного представлення пропонується три її види: стандартна невизначеність (типи А і В), сумарна стандартна невизначеність і розширена невизначеність.

Стандартна невизначеність – це невизначеність результату прямих вимірювань, яка виражена через середнє квадратичне відхилення.

За способом обчислення і представлення розрізняють два типи стандартної невизначеності: тип А і тип В.

Стандартна невизначеність типу А – це невизначеність, яка обчислюється статистичними методами обробки результатів багаторазових вимірювань (спостережень).

Стандартна невизначеність типу В – це невизначеність, яка обчислюється за деякою апріорною інформацією: даними попередніх вимірювань величин, що входять в рівняння; даними вимірювань, що ґрунтуються на досвіді експериментатора або загальних знаннях про поведінку відповідних об’єктів і засобів вимірювальної техніки, даними їх повірки, атестування і калібрування; невизначеності констант і довідкових даних тощо. Невизначеність усіх цих даних звичайно відображають границями відхилення результату вимірювання фізичної величини від оцінки її істинного значення. Тому невизначеність вимірювань типу В залежить від закону розподілу можливих значень вимірюваної величини.

Сумарна стандартна невизначеність – це стандартна невизначеність результату непрямих вимірювань. Вона має фізичний зміст дисперсії результату непрямих вимірювань і обчислюється через дисперсії (квадрати стандартних невизначеностей) інших фізичних величин (аргументів), через які визначається шукана фізична величина .

Розширена невизначеність – це величина, що визначає інтервал, у границях якого знаходиться більша частина результатів непрямих вимірювань, які з достатньою підставою можуть бути приписані вимірюваній величині. Розширена невизначеність вимірювань обчислюється через сумарну стандартну невизначеність.

2.11 Поняття й області використання ймовірнісних та статистичних характеристик похибок вимірювань

Наявність випадкових похибок призводить до того, що при повторних вимірюваннях того самого розміру фізичної величини, як би старанно і на якому б науковому рівні вони не виконувались, результати цих вимірювань будуть відрізнятися, а їх розсіяння (розкид) мати випадковий характер. При кожному окремому вимірюванні його випадкова похибка викликається численними причинами і урахувати їх всі при вимірюваннях неможливо. Оскільки за результатами вимірювань завжди приймаються конкретні рішення або робляться певні практичні висновки, то для підвищення їх обґрунтування виключно важливо вміти оцінювати випадкові похибки вимірювань.

Для оцінки випадкових похибок вимірювань, як випадкових процесів чи величин, використовується апарат або теорії ймовірностей, або математичної статистики. Тим самим вводиться відмінність між цими групами характеристик похибок вимірювань: імовірнісними і статистичними.

Імовірнісні характеристики похибки вимірювань – це параметри функції розподілу ймовірностей похибки вимірювань, які відображають властивості генеральної сукупності похибок усіх результатів вимірювань, одержаних за даною методикою виконання вимірювань у відомих умовах. Вони є детермінованими величинами. Область використання ймовірнісних характеристик похибок вимірювань – технічні вимірювання.

Статистичні характеристики похибки вимірювань – випадкові величини, які являють собою оцінки ймовірнісних характеристик параметрів розподілу ймовірностей похибки вимірювань. Їх визначають експериментально по деякій скінченій кількості (серії, виборці) результатів вимірювань (а не з генеральної сукупності), і вони є предметом вивчення математичної статистики.

Статистичні характеристики лише наближаються до характеристик генеральної сукупності похибки вимірювань. Чим більше об’єм вибірки, тобто чим більша кількість вимірювань (спостережень) у серії, тим ближче обчислені статистичні характеристики до детермінованих імовірнісних характеристик генеральної сукупності, випадковими оцінками яких вони є. При нескінченній кількості вимірювань (спостережень) у серії, статистичні характеристики стають такими, що дорівнюють імовірнісним характеристикам, тобто детермінованими, а не випадковими величинами.

Отже, статистичні характеристики похибки вимірювань відображають ступінь близькості до істинного значення вимірюваної величини тільки того єдиного результату вимірювання, який обчислено за даними конкретної серії вимірювань. Область використання статистичних характеристик похибки вимірювань – лабораторні (експериментальні) вимірювання.

Таким чином, імовірнісні характеристики похибки вимірювань справедливі для будь-якого результату вимірювання, а статистичні характеристики властиві конкретному результату вимірювання, одержаному для конкретного досліджуваного об'єкта за даних конкретних умов.

2.12 Систематична похибка опосередкованих вимірювань при нелінійній залежності

Підкреслимо одну важливу особливість результатів опосередкованих вимірювань при нелінійній залежності у порівнянні з результатами прямих багаторазових вимірювань. Якщо в результатах одноразових спостережень систематичні похибки вилучені, то математичне сподівання середнього арифметичного ряду прямих рівнорозсіяних спостережень дорівнює істинному значенню вимірюваної величини, тобто результати прямих виправлених спостережень вільні від систематичних похибок. На відміну від цього, математичне сподівання похибки результату опосередкованих вимірювань при нелінійній залежності, яка визначається певною формулою, не дорівнює нулю, тобто похибка результату такого опосередкованого вимірювання, поряд з випадковою складовою, має і систематичну складову. А це означає, що математичне сподівання результату опосередкованих вимірювань при нелінійній залежності не дорівнює істинному значенню вимірюваної величини, або інакше, що оцінка є зміщеною, якщо хоча будь-яка одна серед других похідних в не дорівнює нулю. Покажемо це.

Обчислимо математичне сподівання абсолютної похибки опосередкованих вимірювань $\overset{o}{\Delta} Y$ з урахуванням:

$$M[\overset{o}{\Delta} Y] = M\left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial X_j} \overset{o}{\Delta} X_j + \frac{1}{2} \sum_{j,q=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial X_j \partial X_q} \overset{o}{\Delta} X_j \overset{o}{\Delta} X_q \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial X_j} M[\overset{o}{\Delta} X_j] + \frac{1}{2} \sum_{j,q=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial X_j \partial X_q} M[\overset{o}{\Delta} X_j \overset{o}{\Delta} X_q].$$

У цьому виразі перша сума дорівнює нулю, оскільки $M[\overset{o}{\Delta} X_j] = 0$ за умовою проведення експерименту, а друга сума визначає систематичну похибку. Отже, якщо вимірювані величини корельовані між собою, то, враховуючи рівність

$$M[\overset{o}{\Delta} X_j \overset{o}{\Delta} X_q] = \hat{\sigma}_{\hat{X}_j} \hat{\sigma}_{\hat{X}_q} \hat{r}_{jq},$$

для систематичної похибки результату опосередкованих вимірювань дістаємо

$$\theta = \frac{1}{2} \sum_{j,q=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial X_j \partial X_q} M[\overset{o}{\Delta} X_j \overset{o}{\Delta} X_q] = \frac{1}{2} \sum_{j,q=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial X_j \partial X_q} \hat{\sigma}_{\hat{X}_j} \hat{\sigma}_{\hat{X}_q} \hat{r}_{jq}.$$

Оцінку коефіцієнта кореляції $\hat{r}_{jq}$ або визначають за експериментальними даними, або задають функціональною залежністю чи у вигляді матриці.

За умови, що вимірювані величини не корельовані, маємо

$$M[\overset{o}{\Delta} X_j \overset{o}{\Delta} X_q] = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq q; \\ \hat{\sigma}^2_{\hat{X}_j} = \hat{\sigma}^2_{\hat{X}_q} & \text{при } j = q. \end{cases}$$

Тоді систематична похибка результату опосередкованих вимірювань

$$\theta = M[\overset{o}{\Delta} Y] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 F}{\partial X_j^2} \hat{\sigma}^2_{\hat{X}_j}.$$

Отже, опосередковані вимірювання при нелінійній залежності мають специфічну систематичну похибку, яка обумовлена ненульовими частинними похідними $\partial^2 F / \partial X_j^2$.

Щоб вилучити цю систематичну похибку, треба в результат опосередкованих вимірювань, обчислений за формулою, ввести поправку П, яка дорівнює систематичній похибці за значенням і обернена їй за знаком, тобто $\Pi = -\theta$.

Опосередковані вимірювання при лінійній залежності вказаної вище специфічної систематичної похибки не мають, тому що для них $\partial^2 F / \partial X_j^2 = \partial^2 Y / \partial X_j^2 = 0$.

2.13 Оцінка результатів і похибок сумісних та сукупних вимірювань

Загальною ознакою сумісних і сукупних вимірювань, відповідно до їх визначення є те, що значення шуканих величин визначають, розв'язуючи систему рівнянь, які зв'язують шукані величини з деякими іншими величинами, вимірюваними прямими або опосередкованими методами, причому вимірюють декілька комбінацій значень цих величин. Вимірювання, проведені для кожної комбінації, дозволяють одержати одне рівняння, а сукупність цих рівнянь для всіх комбінацій являє собою систему рівнянь, в яку входять також усі значення шуканих величин. Цю систему рівнянь, запишемо для стислості записів у вигляді

$$F_q\left(Y_1, Y_2, \ldots, Y_j, \ldots, Y_m; X_1^{(q)}, \ldots, X_r^{(q)}, \ldots, X_k^{(q)}\right) = 0,$$

де Y_j – значення шуканих величин,;

$X_r^{(q)}$ – значення величин, вимірюваних прямими або опосередкованими методами в q-му досліді,;

n – число дослідів;

k – число величин, які вимірюються в кожному досліді;

m – число шуканих величин.

Рівняння, як і рівняння, за формою однакові для сумісних і сукупних вимірювань. Їх відмінністю є тільки фізична суть шуканих величин.

Якщо Y_j є значеннями тієї самої фізичної величини (наприклад, масами гир певного набору або довжинами лінійних мір), то вимірювання сукупні. Якщо ж Y_j – значення різних фізичних величин (наприклад, опору і температури), то вимірювання сумісні. Ще раз підкреслимо, що такий поділ вимірювань дуже умовний, але він традиційно існує.

Після проведення n дослідів одержують n комбінацій значень вимірюваних величин $X_r^{(q)}$. Підставляючи $X_r^{(q)}$ у початкову систему і проводячи необхідні перетворення, одержимо систему рівнянь

$$F_q\left(Y_1, Y_2, \ldots, Y_j, \ldots, Y_m; a_{qj}\right) = 0; \; j = \overline{1, m}; \; q = \overline{1, n}$$

Рівняння містять у собі шукані величини Y_j і числові коефіцієнти a_{qj}. Для визначення m невідомих значень шуканих величин необхідно мати m рівнянь. Тоді результати вимірювань величин Y_j і довірчі границі їх похибок можна знайти за методиками обробки результатів опосередкованих вимірювань. Проте, з метою зменшення похибок результатів вимірювань, дослідів проводять дещо більше, ніж число m невідомих величин Y_j/

Оскільки точність вимірювання величин $X_r^{(q)}$ обмежена, то умовні рівняння одночасно не перетворюються в тотожності при жодних значеннях шуканих величин Y_j, а отже, не виникає можливості визначення їх істинних значень. Тому задача зводиться до знаходження оцінок шуканих величин Y_j, найбільш наближених до істинних значень. Позначимо такі оцінки $\hat{Y}_j$. Якщо значення $\hat{Y}_j$ підставити в умовні рівняння, то їх ліві частини, в загальному випадку, будуть відрізнятися від правих частин. Такі рівняння і названі умовними. Для одержання тотожності введемо в праві частини умовних рівнянь деякі величини, які називають залишковими похибками умовних рівнянь або відхилами. Звідси маємо

$$F_q\left(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \ldots, \hat{Y}_j, \ldots, \hat{Y}_m; a_{qj}\right) + \upsilon_q = 0;\ j = \overline{1, m};\ q = \overline{1, n}.$$

Для розв'язання системи умовних рівнянь застосовується метод найменших квадратів (МНК), згідно з яким оцінки $\hat{Y}_j$ вибирають так, щоб мінімізувати суму квадратів відхилів

$$s = \sum_{q=1}^{n} \upsilon_q^2.$$

З рівнянь випливає, що точність сукупних і сумісних вимірювань залежить від співвідношення числа шуканих величин m і числа умовних рівнянь n. Чим значніша умова, тим точніше результати обробки. Якщо m і n близькі, то результати обробки визначаються з грубими похибками.

Довірчі інтервали для істинних значень усіх вимірюваних величин одержують за розподілом Стьюдента при числі степенів вільності.

Якщо при сукупних і сумісних вимірюваннях умовні рівняння нелінійні, то застосовують їх лінеаризацію.

Таким чином, методика обробки результатів сукупних і сумісних вимірювань така:

1. Записують систему умовних рівнянь при $\upsilon_q = 0$ підстановкою експериментальних даних у рівняння початкової залежності.

2. Систему умовних рівнянь приводять до нормального вигляду.

3.Визначають оцінки шуканих величин $\hat{Y}_j$, розв'язуючи систему нормальних рівнянь, для чого використовують один із методів:

а) метод, який ґрунтується на послідовному виключенні невідомих (метод Гаусса);

б) метод із застосуванням визначника.

4. Перевіряють правильність визначення оцінок шуканих величин за рівняннями.

5. Знаходять оцінку СКВ результатів вимірювань шуканих величин $\hat{\sigma}^2_{\hat{Y}_j}$ за певними формулами.

6. Визначають довірчі інтервали для всіх вимірюваних величин на підставі розподілу Стьюдента при числі степенів вільності їх вимірювань.

РОЗДІЛ 3.
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЗАКОНИ МЕХАНІКИ

3.1 Кінематика механічного руху

Введемо ряд основних понять механіки.

Матеріальна точка – це тіло, розмірами і формою якого в даній задачі можна знехтувати.

Система відліку – це система координат з годинником, яка зв'язана з абсолютно твердим тілом, по відношенню до якого визначається положення інших тіл в різні моменти часу.

Якщо в деякій системі відліку тіло не може вважатись матеріальною точкою, то його можна подумки розбити на ряд дрібних частин, що взаємодіють між собою, кожна з яких може вважатись матеріальною точкою.

Поступальний рух – це такий рух, при якому будь-яка пряма, що проведена через дві довільні точки тіла, залишається паралельною сама до себе. При поступальному русі траєкторії всіх точок тіла однакові.

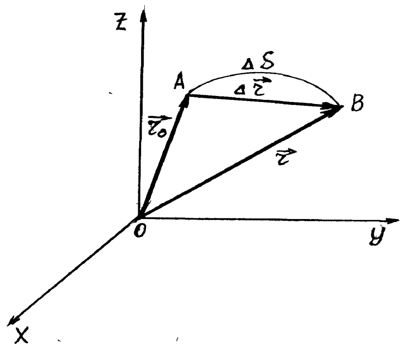

Рис.3.1

Обертовий рух – це такий рух, при якому всі точки рухаються по колах, центри яких перебувають на осі обертання. У загальному випадку довільний механічний рух можна представити як поєднання поступального та обертового рухів. Положення матеріальної точки в системі відліку XOYZ можна задати через радіус-вектор цієї точки, тобто вектор, що з'єднує початок координат з точкою простору, де перебуває матеріальна точка в даний момент часу.

Якщо відомий закон зміни радіуса-вектора з часом, то можна записати кінематичне рівняння руху матеріальної точки в даній системі відліку у векторній формі.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{3.1}$$

Спроектувавши кінець радіуса-вектора на координатні вісі, векторне рівняння (3.1) можна представити у вигляді трьох скалярних рівнянь руху

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t)\ , \\ z = z(t). \end{cases} \tag{3.2}$$

3.2 Швидкість і прискорення

Скалярну величину, яка рівна довжині траєкторії ΔS називають шляхом. Вектор, що з'єднує початкове положення матеріальної точки з її положенням в даний момент часу називають вектором *переміщення* $\Delta\vec{r}$.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0. \tag{3.3}$$

При прямолінійному русі вектор переміщення співпадає з відповідною ділянкою траєкторії, тобто його модуль рівний пройденому шляху. У випадку криволінійного руху вектор переміщення є січною, що проходить через дві точки траєкторії, які відповідають двом різним моментам часу.

Швидкість – це векторна величина, яка характеризує зміну радіуса-вектора рухомої точки з часом. Вектор середньої швидкості рівний відношенню приросту радіуса-вектора $\Delta\vec{r}$ рухомої точки до часу Δt, за який він відбувся

$$<\vec{\upsilon}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{3.4}$$

Якщо перейти до границі при $\Delta t \to 0$, то отримаємо вираз для миттєвої швидкості

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{3.5}$$

Таким чином, миттєва швидкість – це швидкість в даний момент часу або в даній точці траєкторії. Вектор миттєвої швидкості дорівнює першій похідній радіуса-вектора рухомої точки по часу і напрямлений вздовж дотичної до траєкторії в будь-якій її точці. Врахувавши, що при $\Delta t \to 0$ $|d\vec{r}| = ds$, отримаємо:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt}. \tag{3.6}$$

В загальному випадку з (3.6) випливає, що шлях може бути обчислений за формулою

$$S = \int \upsilon(t)dt. \tag{3.7}$$

Швидкість можна представити через її проекції на координатні вісі,

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k} \tag{3.8}$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}, \tag{3.9}$$

де $\upsilon_x = \frac{dx}{dt}$, $\upsilon_y = \frac{dy}{dt}$, $\upsilon_z = \frac{dz}{dt}$. (3.10)

Швидкість може змінюватись як за модулем так і за напрямком. Для характеристики зміни швидкості вводять вектор прискорення, який описує зміну швидкості з часом. Середнє прискорення рівне відношенню зміни швидкості до проміжку часу, за який вона відбулася

$$<\vec{a}> = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{t_2 - t_1}. \tag{3.11}$$

Миттєве прискорення – це прискорення в даний момент часу і воно визначається як границя до якої прямує середнє значення прискорення, якщо проміжок часу прямує до нуля

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{3.12}$$

Таким чином, миттєве прискорення дорівнює першій похідній швидкості по часу або другій похідній радіуса-вектора по часу.

В проекціях на координатні вісі

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \tag{3.13}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{3.14}$$

де $a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$, $a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$. (3.15)

Коли матеріальна точка рухається по криволінійній траєкторії (рис.3.2), і вектор її швидкості змінюється як за напрямком $\Delta\vec{\upsilon}_n$ так і за модулем $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$, то

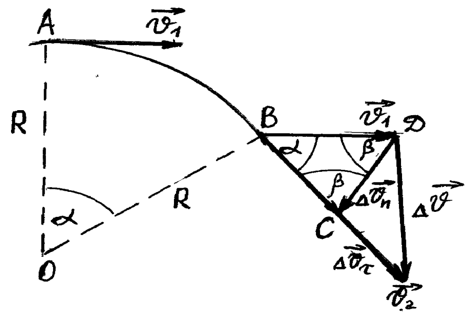

Рис.3.2

$\Delta\vec{\upsilon} = \Delta\vec{\upsilon}_n + \Delta\vec{\upsilon}_\tau$. (3.16)

Знайдемо миттєве прискорення матеріальної точки, скориставшись формулами (3.12) та (3.16)

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}_n + \Delta\vec{\upsilon}_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}_\tau}{\Delta t} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \quad (3.17)$$

Отже, повне прискорення рівне сумі нормального $\vec{a}_n$ і тангенціального $\vec{a}_\tau$ прискорень. Нормальне прискорення характеризує зміну швидкості за напрямком і напрямлене вздовж радіуса до центра кривизни траєкторії. Тангенціальне прискорення характеризує зміну швидкості за модулем і напрямлене вздовж дотичної до траєкторії. Числові значення цих прискорень рівні

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} \quad (3.18)$$

та $$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\upsilon_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{AB \cdot \upsilon}{\Delta t \cdot R} = \frac{\upsilon}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{AB}{\Delta t} = \frac{\upsilon^2}{R}.$$

(3.19) $$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2}$$

(3.20)

та $$\mathrm{tg}\varphi = \frac{a_n}{a_\tau}. \quad (3.21)$$

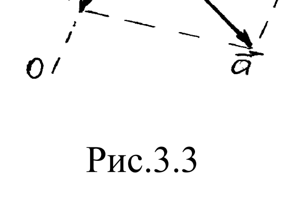

Рис.3.3

3.3 Кінематика обертового руху матеріальної точки

Нехай матеріальна точка рухається по коловій траєкторії радіусом R з центром в т.0. За час Δt радіус-вектор точки повернеться на деякий кут $\Delta\varphi$.Кутовою швидкістю називають величину, яка є першою похідною кута повороту радіуса-вектора по часу

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \tag{3.22}$$

Кутова швидкість – це вектор, напрям якого визначається за правилом свердлика.

Крім кутової швидкості, рух тіла по колу ще описують лінійною швидкістю, яка рівна відношенню довжини дуги, що її описує кінець радіуса-вектора, до часу, за який вона пройдена.

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \tag{3.23}$$

Лінійна швидкість напрямлена по дотичній д дуги кола в кожній її точці. При рівномірному русі по колу використовують поняття періода T та частоти ν. Період – це час одного повного оберту, а частота – кількість обертів за одиницю часу. Кутову та лінійну швидкості можна виразити через період або частоту

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \tag{3.24}$$

$$V = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi\nu R. \tag{3.25}$$

Звідси $V = \omega \cdot R$ або $\omega = \dfrac{V}{R}$. (3.26)

У векторній формі $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$ (3.27)

Кутове прискорення ε рівне першій похідній кутової швидкості по часу.

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{3.28}$$

Вектор кутового прискорення напрямлений вздовж вісі обертання і співпадає з напрямком $\vec{\omega}$, якщо кутова швидкість зростає, і протилежний до напрямку $\vec{\omega}$, якщо кутова швидкість зменшується Продиференціювавши вираз (3.27) по t і пам’ятаючи, що матеріальна точка рухається по колу (рис.3.4), тобто

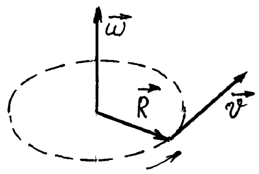

Рис.3.4

R=cost,
отримаємо

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{R}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{R} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\varepsilon}\times\vec{R}$$

Оскільки $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}_\tau$ то $\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon}\times\vec{R}$. (3.29)

3.4 Закони динаміки. Поняття маси, сили, імпульсу, імпульсу сили. Інерціальні системи відліку

Динаміка – це розділ механіки, в якому вивчають механічний рух з врахуванням діючих сил. В основі динаміки лежать закони Ньютона, які є результатом багатовікового досвіду.

Перший закон Ньютона: існують такі системи відліку в яких матеріальна точка (тіло) перебуває в стані спокою або рухається рівномірно і прямолінійно доти, поки дія з боку інших тіл не змусить її змінити цей стан.

Перший закон Ньютона називають законом інерції, а системи відліку, відносно яких виконується даний закон – інерціальними системами відліку. Якщо відома хоча б одна інерціальна система відліку, то всі інші системи відліку, які перебувають відносно неї в спокої або рухаються рівномірно і прямолінійно теж будуть інерціальними. Дослідним шляхом встановлено, що інерціальною системою відліку можна вважати систему відліку зв’язану з Сонцем.

Властивість тіла зберігати стан спокою або рівномірного прямолінійного руху без дії на нього інших тіл називають інертністю. Фізичну величину, яка є мірою інертності тіла, називають інертною масою. Разом з тим маса тіла характеризує здатність його взаємодіяти з іншими тілами згідно з законом всесвітнього тяжіння. в цьому випадку маса є мірою гравітаційної взаємодії і її називають гравітаційною масою. В сучасній фізиці з високою точністю встановлено, що інертна та гравітаційні маси рівні між собою для швидкостей значно менших від швидкості світла. Отже, маса – це міра інертних і гравітаційних властивостей тіла.

Сила – це векторна величина, яка є мірою взаємодії між тілами внаслідок чого тіла отримують прискорення або змінюють свою форму та розміри.

Другий закон Ньютона: прискорення, що його набуває матеріальна точка (тіло), прямо пропорційне рівнодійній всіх діючих сил, співпадає з нею за напрямком і обернено пропорційне масі матеріальної точки (тіла)

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{3.30}$$

При розв'язуванні задач часто використовують таку форму запису:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}. \tag{3.31}$$

Добуток маси матеріальної точки на її швидкість називають імпульсом матеріальної точки

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon}. \tag{3.32}$$

Підставивши (3.32) в (3.31), отримаємо більш загальний вираз для другого закону Ньютона

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{3.33}$$

Останнє співвідношення можна сформулювати так: швидкість зміни імпульсу матеріальної точки рівна діючій на неї силі.

Добуток сили на час її дії називають імпульсом сили. Переписавши (3.33) у вигляді

$$\vec{F}dt = d\vec{P}, \tag{3.34}$$

Отримаємо: зміна імпульсу тіла рівна імпульсу сили.

Третій закон Ньютона: сили, з якими взаємодіють дві матеріальні точки, рівні за модулем і протилежні за напрямком, діючи вздовж прямої, що з'єднує ці матеріальні точки

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}. \tag{3.35}$$

де $\vec{F}_{1,2}$ - сила, що діє на перше тіло з боку другого , а $\vec{F}_{2,1}$- сила, що діє на друге тіло з боку першого.

Ці сили прикладені до різних тіл, тому не врівноважують один одну. Третій закон динаміки справедливий лише в випадку контактних взаємодій, тобто при безпосередньому дотику та при взаємодії на відстані між нерухомими тілами.

3.5 Імпульс системи. Закон збереження імпульсу

Розглянемо деяку сукупність матеріальних точок, яку називають механічною системою. Сили, з якими окремі елементи системи взаємодіють між собою, називають внутрішніми силами, а сили, з якими на елементи системи діють зовнішні тіла, називають зовнішніми.

Запишемо другий закон Ньютона у вигляді (3.33) для кожного з n елементів (матеріальних точок) системи

$$\begin{aligned} &\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{1,2} + \vec{f}_{1,3} + \vec{f}_{1,4} + \ldots + \vec{f}_{1,n} + \vec{F}_1, \\ &\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{2,1} + \vec{f}_{2,3} + \vec{f}_{2,4} + \ldots + \vec{f}_{2,n} + \vec{F}_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{f}_{n,1} + \vec{f}_{n,2} + \vec{f}_{n,3} + \ldots + \vec{f}_{n,n-1} + \vec{F}_n, \end{aligned} \qquad (3.36)$$

де $\vec{f}_{ik}$ – внутрішня сила взаємодії i-ої та k-ої точок системи, $\vec{F}_i$ – сумарна зовнішня сила, що діє на i-ту точку системи.

Знайдемо суму лівих і правих частин рівностей (3.36), врахувавши, що $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad \text{або} \qquad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,. \qquad (3.37)$$

Якщо система буде замкнутою, тобто матеріальні точки (елементи) системи взаємодіють тільки між собою, то $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{P}_i = 0$, а це означає, що

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \ldots + \vec{P}_n = \text{const}\,. \qquad (3.38)$$

Отже, в замкнутій системі сума імпульсів всіх матеріальних точок (елементів) системи є величина стала – *закон збереження імпульсу*.

Отримати замкнуту систему важко, але можна досягнути рівності нулю суми проекцій зовнішніх сил на деякий напрям або осі.

Закон збереження імпульсу справедливий не тільки в класичній механіці, але і для замкнутої системи мікрочастинок. Тому він є фундаментальним законом природи. Він є наслідком властивості симетрії простору – його однорідності.

3.6 Центр мас (інерції) системи. Закон руху центра мас

При розгляді руху тіл інколи використовують поняття центра мас. Центром мас називають таку уявну точку, радіус-вектор якої визначається як

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\,. \qquad (3.39)$$

Переписавши останній вираз у вигляді $M\vec{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$, продиференціюємо його по часу

$$M\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\,, \qquad \text{або} \qquad M\vec{V}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}i$$

Отриманий результат продиференціюємо ще раз

$$M\vec{a}_c = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \vec{P}i = \vec{F}. \qquad (3.40)$$

Отже, центр мас системи рухається так, як матеріальна точка, в якій зосереджена вся маса системи, і на яку діє рівнодійна всіх зовнішніх сил. В замкнутій системі центр мас буде рухатись рівномірно і прямолінійно або перебувати в стані спокою. Це означає, що внутрішні сили не можуть змінити положення центра мас.

У випадку однорідного гравітаційного поля центр мас системи співпадає з центром тяжіння.

3.7 Межі застосування класичного опису частинок

В класичній механіці стан матеріальної точки в будь-який момент часу характеризується її розташуванням (координатами) та швидкістю. Замість швидкості можна використовувати імпульс. Образом матеріальної точки є геометрична точна, яка описує з часом неперервну траєкторію. В квантовій механіці такий спосіб опису руху має принципові межі застосування. Там не можна стан частинки в кожний момент часу характеризувати точним значенням координати та імпульсу. Якщо в деякий момент часу координата визначається з невизначеністю δx, а імпульс з невизначеністю δp, то обидві величини одночасно не можуть бути визначені так, щоб їх невизначеності бути як завгодно малими, так як вони пов'язані між собою співвідношенням

$$\delta x \cdot \delta p_x \geq h, \tag{3.41}$$

де h стала Планка. Цей вираз називають співвідношенням невизначеності Гейзенберга. Воно визначає межу точності одночасного вимірювання координати та імпульсу, яка не може бути перевершена ніяким вдосконаленням приладів і методів спостереження.

Класична картина руху по неперервних траєкторіях лише приблизно відображає закони природи. Межі застосування визначаються співвідношеннями невизначеностей. Для макроскопічних тіл застосування класичного способу опису руху не викликає сумніву. Зовсім по іншому ведуть себе мікрочастинки. Отже, класична механіка – це механіка великих мас та малих швидкостей.

3.8 Основний закон динаміки поступального руху твердого тіла

Твердим тілом називають таке тіло, віддалі між будь-якими двома його точками залишаються незмінними.

Тверде тіло – це система з шістьма ступенями вільності і для опису його руху потрібно шість незалежних рівнянь які можна замінити двома незалежними векторними рівняннями одне з яких стосується поступального руху а інше – обертового. Будь-який рух твердого тіла може бути представлений як накладання двох рухів: поступального та обертового.

Подумки розділимо тіло на велике число частин, кожну з яких можна вважати матеріальною точкою і для кожної з них запишемо другий закон Ньютона

$$m_i \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}_i + \vec{f}_i \tag{3.42}$$

де $\vec{F}_i$ – зовнішня сила, $\vec{f}_i$ – внутрішня сила що діє на і-ту матеріальну точку, υ - швидкість поступального руху тіла.

Знайдемо суму всіх рівнянь для всіх точок тіла, врахувавши, що сума всіх внутрішніх сил $\vec{f}_i$ рівна нулю

$$\sum m_i \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \sum \vec{F}_i\,. \tag{3.43}$$

Останнє рівняння – це рівняння руху центра мас

$$m\frac{d\vec{\upsilon}^2}{dt} = \vec{F}_{\text{зовн.}}, \qquad (3.44)$$

де m –маса тіла, $F_{зовн}$ – рівнодійна всіх зовнішніх сил.

Отже, при поступальному русі центр мас твердого тіла рухається так, як би рухалась матеріальна точка масою, рівною масі тіла, під дією всіх прикладених до тіла сил. Рівняння (3.44) є основним рівнянням динаміки поступального руху твердого тіла.

3.9 Динаміка обертового руху твердого тіла відносно осі. Поняття моменту інерції, моменту сили та моменту імпульсу твердого тіла

Для опису обертового руху потрібно задати положення осі обертання та кутову швидкість обертання точок тіла в кожний момент часу. При поступальному русі мірою інертних властивостей матеріальної точки (тіла) є маса, а при обертовому русі її аналогом буде момент інерції, який рівний добутку маси матеріальної точки на квадрат віддалі до центра або осі обертання

$$I_i = m_i r_i^2. \qquad (3.45)$$

У випадку системи матеріальних точок або твердого тіла, що обертається навколо деякої осі OZ**,** момент інерції буде рівний сумі моментів інерції всіх матеріальних точок, з яких складається дана система

$$I_z = \sum I_{iz} = \sum m_i r_{iz}^2. \qquad (3.46)$$

де r_{iz} – віддаль і-ої матеріальної точки від осі обертання OZ. Коли ж маса рівномірно розподілена по всьому об'єму тіла, то від суми можна перейти до інтеграла

$$I_z = \int r_z^2 dm. \qquad (3.47)$$

Шляхом інтегрування можна визначити момент інерції тіл правильної геометричної форми відносно осі, що проходить через центр мас (інерції) даних тіл

Таблиця 3.1

Тіло	Положення осі обертання	Момент інерції
Пустотілий тонкостінний	Вісь симетрії	mR^2

циліндр радіусом R		
Суцільний циліндр радіусом R	Вісь симетрії	$1/2mR^2$
Куля радіусом R	Вісь симетрії проходить через центр мас	$2/5mR^2$
Прямий тонкий стержень довжиною l	Вісь перпендикулярна до стержня і проходить через його середину	$1/12ml^2$
Прямий тонкий стержень довжиною l	Вісь перпендикулярна до стержня і проходить через один з його кінців	$1/3ml^2$

У випадку, коли вісь обертання OZ не проходить через центр інерції C, а віддалена від неї на деяку відстань a, то для визначення моменту інерції тіла I відносно довільної осі OZ використовують теорему Штейнера: момент інерції тіла I відносно довільної осі OZ рівний моменту його інерції I_0 маси тіла m на квадрат віддалі a між осями

$$I = I_0 + ma^2. \tag{3.48}$$

Обертаюча дія сили визначається деякою векторною величиною, яку називають моментом сили. Момент сили $\vec{M}$ відносно центра обертання O рівний векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного від центра обертання до точки прикладання сили, на силу $\vec{F}$.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{3.49}$$

Напрям вектора моменту сили $\vec{M}$ визначається за правилом правого гвинта, обертаючи вектор $\vec{r}$ по найкоротшому шляху до суміщення з вектором $\vec{F}$. Вектор $\vec{M}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{r}$ та $\vec{F}$, а його модуль рівний

$$M = r \cdot F \cdot \sin\alpha. \tag{3.50}$$

Як видно добуток $r \cdot \sin\alpha = d$ – це найкоротша віддаль від напрямку дії сили $\vec{F}$ до центра обертання O, яку називають плечем сили d. Моментом сили відносно нерухомої осі OZ на дану вісь.

Нехай точка O є центром обертання деякого тіла. Вона може бути як в самому тілі, так і поза його межами. Запишемо другий закон Ньютона для i-ої точки даного тіла

$$\frac{d(m_i\vec{\upsilon}_i)}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\vec{f}_{ik} + \vec{F}_i\,, \tag{3.51}$$

де $m_i\vec{\upsilon}_i$ – імпульс і-ої точки, $\vec{F}_i$ – рівнодійна всіх зовнішніх сил, які діють на і-ту точку тіла, $\sum\vec{f}_{ik}$ – сума всіх внутрішніх сил, які діють на і-ту точку тіла з боку всіх інших його точок.

Після певних перетворень отримаємо

$$\frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times m_i\vec{\upsilon}_i) = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{F}_i\,, \tag{3.52}$$

Введемо головний момент зовнішніх сил твердого тіла відносно точки

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{F}_i\,, \tag{3.53}$$

а також момент імпульсу твердого тіла відносно точки

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times m_i\vec{\upsilon}_i\,. \tag{3.54}$$

Тепер маємо
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\,. \tag{3.55}$$

Рівняння (3.55) - *основний закон динаміки обертового руху тіла* відносно центра О: швидкість зміни моменту імпульсу тіла рівна головному моменту всіх зовнішніх сил відносно центра обертання.

Коли тверде тіло обертається навколо деякої нерухомої осі OZ, що закріплена в двох точках, то основне рівняння динаміки обертового руху твердого тіла запишеться у вигляді

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z\,, \tag{3.56}$$

де L_z - момент імпульсу твердого тіла відносно осі M_z - головний момент сил твердого тіла відносно осі (компоненти M_x=M_y=0)

При обертанні твердого тіла відносно осі обертання лінійні швидкості υ_i всіх його точок пов’язані з кутовою швидкістю ω співвідношенням

$$\upsilon_i = r_i \cdot \omega. \tag{3.57}$$

Тому момент імпульсу можна записати як

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} r_{iz} \cdot m_i\upsilon_i = \omega\sum_{i=1}^{n} m_i r_{iz}^2 = I_z\omega. \tag{3.58}$$

Тоді основний закон динаміки обертового руху відносно осі OZ запишеться у вигляді

$$\frac{d(I_z\omega)}{dt} = M_z \qquad \text{або} \qquad I_z \cdot \varepsilon = M_z\,, \tag{3.59}$$

де ε – кутове прискорення при обертовому русі тіла відносно осі OZ.

Таким чином, головний момент зовнішніх сил твердого тіла відносно осі дорівнює добутку моменту інерції твердого тіла на його кутове прискорення.

3.10 Закон збереження моменту імпульсу твердого тіла відносно осі

В замкнутій системі головний момент зовнішніх сил відносно осі M_z рівний нулю і тому (3.59) матиме вигляд $\frac{dL_z}{dt} = O$, звідси слідує, що

$L_z = const$, тобто $I_z \cdot \omega = const$ (3.60)

Маємо вираз *закону збереження моменту імпульсу* твердого тіла відносно осі: якщо головний момент зовнішніх сил M_z відносно осі рівний нулю, то момент імпульсу твердого тіла відносно тієї ж осі зберігається.

Закон збереження моменту імпульсу є фундаментальним законом природи. Він пов'язаний з властивістю симетрії простору – його ізотропністю, тобто інваріантністю законів природи відносно вибору напрямку осей координат системи відліку.

3.11 Поняття енергії і роботи. Робота сили. Потужність

Невід'ємною властивістю матерії є рух. Рухи матерії відрізняються один від одного за формою (якістю). Наприклад, механічний, тепловий, електромагнітний та інші рухи за своєю формою різні.

У явищах природи здійснюються перетворення одних форм руху в інші. Дуже важливо, що в усіх перетвореннях руху змінюється лише якість руху, а кількість руху залишається незмінною. Отже, можна говорити про спільну для усіх форм руху кількісну міру.

Універсальною кількісною мірою усіх форм руху і взаємодій матерії є енергія. З різними формами руху матерії зв'язують різні форми енергії: механічну, теплову, електромагнітну, ядерну і інші.

При взаємодії тіл їхня енергія змінюється. Процес зміни енергії називається роботою, а робота як величина є мірою зміни енергії.

Для характеристики механічної взаємодії тіл була введена така величина як сила. Дія сили є причиною зміни енергії, або виконання роботи.

Отже, для кількісної характеристики процесу зміни енергії можна використати таку фізичну величину як робота сили.

Елементарною роботою δA сили $\vec{F}$ називається величина, що дорівнює скалярному добутку вектора сили $\vec{F}$ на вектор елементарного переміщення $d\vec{r}$.

$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}\vec{\upsilon}dt = F \cdot \cos\alpha \cdot ds$,

де α – кут між векторами $\vec{F}$ і $d\vec{r}$, ds – елементарний шлях.

Роботу сили на ділянці траєкторії від точки 1 до точки 2 можна знайти за допомогою криволінійного інтеграла

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 F\cos\alpha \cdot ds = \int_1^2 F_s ds,$$

(3.61) F_s – проекція сили на напрямок переміщення.

Якщо, наприклад, тіло рухається прямолінійно, сила $F = const$ і $\alpha = const$, то дістаємо

$$A = F\cos\alpha \int_1^2 ds = Fs\cos\alpha, \qquad (3.62)$$

де s – пройдений тілом шлях.

Для прикладу, знайдемо роботу сили тертя. Величина сили тертя визначається формулою $F_{тр} = \mu mg$, де μ – коефіцієнт тертя. За формулою (3.62) маємо

$$A_{тр} = \mu mgs\cos 180^0 = -\mu mgs. \qquad (3.63)$$

Отже, робота сил тертя від'ємна (до цієї формули ми ще повернемось).

Нехай залежність F_s від шляху s представлена графічно.

Тоді робота A дорівнює площі заштрихованої площадки.

Одиниця вимірювання роботи – джоуль (Дж): 1 Дж – робота, яку виконує сила в 1Н на шляху в 1м. (1Дж = 1Н·м).

Для характеристики швидкості виконання роботи, введена така фізична величина як потужність (P). Її визначають формулою

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}dr}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon} = F\upsilon\cos\alpha,$$

де α – кут між векторами $\vec{F}$ і $d\vec{r}$.

Одиниця вимірювання потужності – ват (Вт): 1Вт – потужність, при якій за час 1с. виконується робота в 1Дж.

3.12 Кінетична енергія. Теорема про зміну кінетичної енергії

Розглянемо матеріальну точку масою m, на яку з боку інших тіл діє сила $\vec{F}$. За другим законом Ньютона

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}.$$

Знайдемо роботу сили $\vec{F}$

$$A=\int_1^2\vec{F}d\vec{r}=\int_1^2 m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r}=\int_1^2 m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}=\frac{1}{2}m\int_1^2 d(\vec{\upsilon}\vec{\upsilon})==\frac{1}{2}m\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2}d\upsilon^2=\frac{1}{2}m\upsilon^2\Big|_{\upsilon_1}^{\upsilon_2}=\frac{m\upsilon_2^2}{2}-\frac{m\upsilon_1^2}{2}$$

(при виведенні враховувалось, що $\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}=\frac{1}{2}d(\vec{\upsilon}\vec{\upsilon})=\frac{1}{2}d\upsilon^2$).

Вже згадувалось, що виконувана над тілом робота є мірою зміни його енергії

$$A=E_2-E_1.$$

Прирівняємо праві частини останніх рівностей

$$E_2-E_1=\frac{m\upsilon_2^2}{2}-\frac{m\upsilon_1^2}{2}.$$

Легко переконатись способом підстановки, що дане рівняння задовольняє функція

$$E=\frac{m\upsilon^2}{2}+C,$$

де C – довільна стала величина.

Сталу C виберемо такою, щоб при швидкості $\upsilon=0$ енергія E була рівною нулю. За такою умовою маємо $0=0+C$. Звідки $C=0$. Тоді

$$E=\frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (3.64)$$

Таким чином, всяке рухоме тіло має енергію, що виражається формулою (3.64). Таку енергію, тобто енергію механічного руху називають кінетичною

$$E_к=\frac{m\upsilon^2}{2}.$$

При переході до системи з n взаємодіючих між собою матеріальних точок маємо виділити роботи як зовнішніх, так і внутрішніх сил. Тоді для якоїсь i – тої матеріальної точки будемо мати

$$\frac{m_i\upsilon_{i2}^2}{2}-\frac{m_i\upsilon_{i1}^2}{2}=A_i+A_i',$$

де A_i і A_i' – відповідно роботи зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на i – ту матеріальну точку.

Провівши в цьому рівнянні сумування по індексу і від 1 до n, дістанемо

$$E_{к2} - E_{к1} = A + A', \quad (3.65)$$

де $E_{к2} = \sum_{i=1}^{h} \frac{m_i \upsilon_{i2}^2}{2}$, $E_{к1} = \sum_{i=1}^{h} \frac{m_i \upsilon_{i1}^2}{2}$, $A = \sum_{i=1}^{h} A_i$, $A' = \sum_{i=1}^{h} A_i'$.

Рівняння (3.65) виражає зміст теореми про зміну кінетичної енергії системи: зміна кінетичної енергії системи дорівнює роботі всіх (як зовнішніх, так і внутрішніх) сил прикладених до системи.

3.13 Потенціальні і непотенціальні сили

Знайдемо роботу сил тяжіння зокрема сили тяжіння Землі, при переміщенні матеріальної точки масою m вздовж деякої траєкторії, наприклад з точки 1 в точку 2 (рис.3.5).

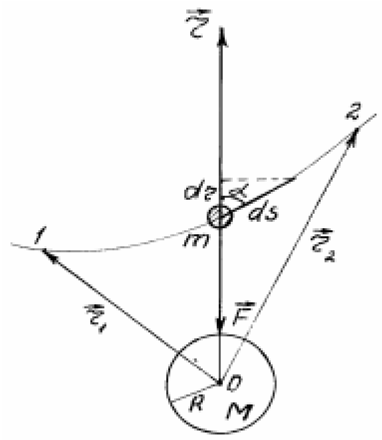

Рис. 3.5

За законом всесвітнього тяжіння

$$F = G\frac{mM}{r^2}.$$

Згідно (3.61) маємо

$$A = -\int_1^2 G\frac{mM}{r^2}\cos\alpha \cdot ds.$$

Знак мінус беремо тому, що сила тяжіння і переміщення мають проти- лежні напрямки. Бачимо, що $ds\cos\alpha = dr$.

Тоді $A = -\int_{r_1}^{r_2} G\frac{mM}{r^2}dr = \left.\frac{GmM}{r}\right|_{r_1}^{r_2}$.

Підставивши границі інтегрування, приходимо до формули

$$A = m\left(\frac{GM}{r_2} - \frac{GM}{r_1}\right). \qquad (1.66)$$

Тепер, звернувшись до формули (3.63), проведемо порівняння виразів робіт сили тертя і сили тяжіння. Бачимо, що робота сили тертя залежить від довжини шляху, а робота сили тяжіння не залежить, тобто робота сил тяжіння не залежить від форми траєкторії. Це значить, що для різних форм траєкторій вирази робіт сили тяжіння будуть ідентичними. Сили, робота яких не залежить від форми траєкторії, а залежить тільки від координат початкової і кінцевої точок траєкторії називаються *потенціальними*.

Крім сили тяжіння, прикладами потенціальних сил можуть бути сили пружності і сили електростатичної взаємодії.

Сили, робота яких залежить від форми траєкторії називають непотенціальними. Характерним прикладом непотенціальних сил є сила тертя.

3.14 Потенціальна енергія та її зв'язок з потенціальними силами

Нехай деяке тіло рівномірно піднімається над Землею. Рівномірне піднімання тіла можливе за рахунок дії зовнішньої сили, що зрівноважує силу тяжіння.

Кінетична енергія тіла не змінюється, бо піднімання тіла здійснюється при сталій швидкості. Виконувана зовнішньою силою робота тратиться на збільшення енергії взаємодії в системі тіло – Земля. Таку частину механічної енергії називають потенціальною (E_n).

Робота A сили тяжіння дорівнює роботі зовнішньої сили взятій зі знаком мінус. Отже, можна написати, що

$$A = -\left(E_{n2} - E_{n1}\right) = E_{п1} - E_{п2}. \qquad (3.67)$$

Зміст цієї рівності полягає в тому, що робота консервативних сил дорівнює зменшенню потенціальної енергії. Вона позволяє за відомим виразом консервативної сили знайти вираз потенціальної енергії з точністю до деякої довільної сталої. Зауважимо, що універсальної формули для вираження потенціальної енергії не має; її вираз залежить від характеру взаємодії.

Елементарна робота потенціальних сил дорівнює елементарному зменшенню потенціальної енергії

$$\delta A = -dE_n \text{ або } \vec{F}d\vec{r} = -dE_n.$$

Для переміщення матеріальної точки вздовж осі Ox маємо

$$F_x dx = -dE_n.$$

Звідки $F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x}$ ($y = const$, $z = const$).

Для компоненти сил по осях y і z отримуються аналогічні вирази. Отже,

$$F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x};\ F_y = -\frac{\partial E_n}{\partial y};\ F_z = -\frac{\partial E_n}{\partial z},$$

або

$$\vec{i}F_x = -\vec{i}\frac{\partial E_n}{\partial x};\ \vec{j}F_y = -\vec{j}\frac{\partial E_n}{\partial y};\ \vec{k}F_z = -\vec{k}\frac{\partial E_n}{\partial z},$$

($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орти координатних осей).

Додавши почленно ліві і праві частини цих рівностей, отримуємо

$$\vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z = -\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)E_n.$$

Вектор $\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)E_n$ називається градієнтом потенціальної енергії і позначається $grad\ E_n$.

Таким чином,

$$\vec{F} = -\mathbf{grad}\ E_n.$$

За отриманою формулою розв'язують обернену задачу, тобто за відомою потенціальною енергією знаходять потенціальну силу.

3.15 Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії

Повертаючись до формул (3.66), (3.67) прирівняємо їх праві частини

$$E_{n1} - E_{n2} = -m\left(\frac{GM}{r_2} - \frac{GM}{r_1}\right).$$

Це рівняння перетворює в тотожність функція

$$E_n = -m\frac{GM}{r} + C. \tag{3.68}$$

Довільну сталу C у виразі (3.68) виберемо такою, щоб при $r = \infty$ енергія E_n була рівною нулю. За такої умови $0 = 0 + C$. Звідки $C = 0$. Отже, потенціальна енергія гравітаційної взаємодії має вираження

$$E_n = -m\frac{GM}{r}. \qquad (3.69)$$

Формулу (3.69) застосовують у механіці космічних польотів. В задачах про рух тіл біля Землі користуються наближеним виразом потенціальної енергії.

Для його виведення запишемо (3.68) в дещо іншому вигляді

$$E_n = -m\frac{GM}{r} + C = -m\frac{GMR^2}{(R+h)R^2} + C \approx -mg\frac{R}{1+\frac{h}{R}} + C,$$

де R і h – відповідно радіус Землі і висота піднімання тіла, також бралось до уваги, що прискорення вільного падіння біля поверхні Землі $g = \frac{GM}{R^2}$.

Біля поверхні Землі $(R >> h)$

$$\frac{1}{1+\frac{h}{R}} \approx 1 - \frac{h}{R}.$$

Тоді

$$E_n = -mgR\left(1 - \frac{h}{R}\right) + C = -mgR + mgh + C.$$

Довільну сталу C виберемо такою, щоб при $h = 0$ енергія $E_n = 0$. За такої умови $0 = -mgR + C$. Звідки $C = mgR$. Отже, для потенціальної енергії тіла біля поверхні Землі, тобто в однорідному полі сил тяжіння можна користуватись формулою

$$E_n = mgh.$$

3.16 Потенціальна енергія пружної взаємодії

У разі повздовжнього розтягу або стиску тіла (наприклад, пружини вздовж осі Ox) сила пружності

$$\vec{F} = -kx\vec{i},$$

де k – коефіцієнт пружності, $x\vec{i}$ – вектор деформації ($\vec{i}$ орт осі Ox).

Робота сили пружності

$$A = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = -\frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right).$$

За формулою (3.67) маємо

$$-\frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right) = -\left(E_{п2} - E_{п1}\right).$$

Розв’язком цього рівняння є функція $E_п = \frac{1}{2}kx^2 + C$, де C – довільна стала. Її вибирають такою, щоб енергія недеформованого $(x = 0)$ тіла була рівною нулю. Така умова дає, що $C = 0$.

Отже, потенціальна енергія пружної взаємодії виражається формулою

$$E_п = \frac{1}{2}kx^2.$$

3.17 Повна механічна енергія. Закон збереження повної механічної енергії

Звернемось до теореми про зміну кінетичної енергії системи, формула (3.65)

$$E_{к2} - E_{к1} = A + A'.$$

Нагадаємо, що A' робота внутрішніх сил.

Припустимо, що внутрішні і частина зовнішніх сил є потенціальними. Згідно (3.67) робота таких сил дорівнює зменшенню потенціальної енергії системи

$$A' + A_1 = -\left(E_{п2} - E_{п1}\right),$$

де A_1 – робота зовнішніх потенціальних сил.

Тоді вихідну формулу можна записати у вигляді

$$E_{к2} - E_{к1} = A^* - \left(E_{п2} - E_{п1}\right)$$

або

$$\left(E_{к2} + E_{п2}\right) - \left(E_{к1} + E_{п1}\right) = A^*, \tag{3.70}$$

де A^* – робота зовнішніх непотенціальних сил.

Енергію E, що дорівнює сумі кінетичної і потенціальної $\left(E_к + E_п\right)$ називають повною механічною енергією.

Із (3.70) слідує, що

$$E_2 - E_1 = A^* \text{ або } \Delta E = A^*.$$

Отже, зміна повної механічної енергії системи дорівнює роботі зовнішніх непотенціальних сил.

Якщо зовнішні непотенціальні сили відсутні, то

$$\Delta E = 0 \text{ або } E = \left(E_к + E_п\right) = \text{const}. \tag{3.71}$$

Рівність (3.71) виражає закон збереження повної механічної енергії: в системі тіл, між якими діють лише потенціальні сили, повна механічна енергія зберігається, тобто не змінюється з часом.

Механічні системи, на тіла яких діють лише потенціальні сили, називаються консервативними.

Існує ще один вид систем – дисипативні системи, в яких діють непотенціальні сили. Характерним прикладом дисипативних систем є системи, в яких діють сили тертя. Робота сил тертя від'ємна $\left(A^* < 0\right)$. Тоді $\Delta E < 0$, тобто повна механічна енергія системи, в якій діють сили тертя, зменшується – механічна енергія перетворюється в теплову.

При зменшенні повної механічної енергії завжди виникає еквівалентна кількість енергії іншого виду. Енергія ніколи не зникає і появляється знову, вона лише перетворюється із одного виду в інший. В цьому і полягає фізична суть закону збереження і перетворення енергії.

3.18 Графічне представлення енергії

В багатьох практичних задачах береться, що потенціальна енергія є функцією лиш однієї змінної (наприклад, координати x), тобто $E_n = E_n(x)$Якщо система консервативна, то для неї справедливий закон збереження повної механічної енергії $E = E_к + E_n$.

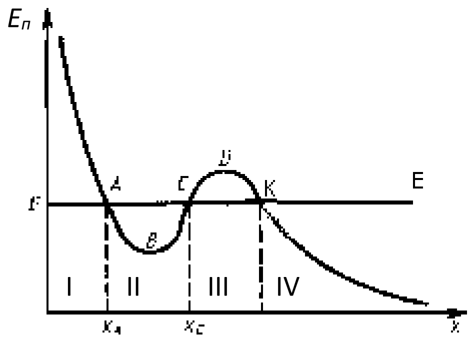

Рис.3.6

Графік залежності E_n від x називається потенціальною кривою.

Повна механічна енергія визначається прямою EE паралельною до осі абсцис. Потенціальна енергія $E_г$ ви-значається відрізком вертикалі між точкою на осі абсцис і графіком $E_n(x)$. Кінетична енергія $E_к$ визначається відрізком вертикалі між графіком $E_n(x)$ і прямою EE.

Аналіз потенціальних кривих позволяє визначити характер руху тіла. Якщо E – задана повна механічна енергія, то тіло може рухатися тільки там, де $E_n(x) \le E$, тобто в областях II і IV. В області I і III тіло проникнути не може, так як потенціальна енергія не може стати більшою за повну (бо кінетична енергія не може бути від'ємною). Область II називають потенціальною ямою. Область III називають потенціальним бар'єром, через який тіло не може проникнути, маючи даний запас повної енергії. Рухаючись в області IV тіло може віддалитися на нескінченність. Такий рух називають інфінітним. Рухаючись в області потенціальної ями, тіло не може віддалитись на нескінченність; такий рух називають *фінітним*.

Повернемось до формули $\vec{F} = -\mathrm{grad} E_n$, яка виражає зв'язок між консервативною силою і потенціальною енергією. В одновимірному русі вона приймає вигляд $\vec{i} F_x = -\vec{i}\,\dfrac{\partial E_n}{\partial x}$.

Якщо $\dfrac{\partial E_n}{\partial x} = 0$, то $F_x = 0$, що дає умову рівноваги тіла. Рівновага може бути стійкою або нестійкою. Рівновага буде стійкою, коли потенціальна енергія мінімальна (наприклад, точка В) і нестійкою, коли потенціальна енергія максимальна (наприклад, точка Д).

3.19 Перетворення координат Галілея

Закони Ньютона були встановлені у системах відліку, які вважались нерухомими. Сам Ньютон допускав, що існує абсолютно нерухома система відліку.

У свій час було поставлено питання про справедливість законів Ньютона в рухомих системах відліку. Поставлене питання важливе і для науки і для практики. Часто в практичних задачах зручно користуватись рухомими системами відліку і характер їх руху може бути різним.

Розглянемо дві системи відліку K і K'. Будемо вважати, що система відліку K нерухома, а система K' рухається відносно першої прямолінійно і рівномірно із швидкістю $\vec{u}$ і $\vec{r}_0 = \vec{u}t$. Відлік часу почнемо з моменту, коли початки координат обох систем збігаються.

Знайдемо зв'язок між координатами довільної точки А в обох системах відліку. З рис.3.7 видно, що $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r} - \vec{u}t$, або в проекціях на координатні осі:

$$x' = x - u_x t;\ y' = y - u_y t;\ z' = z - u_z t;\ t' = t. \tag{3.72}$$

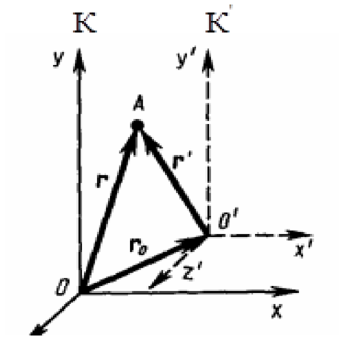

Рис.3.7

Для вимірювання моментів часу, коли рухома точка займає те чи інше положення, в системах відліку встановлюють годинники. У класичній механіці передбачається, що хід часу не залежить від відносного руху систем відліку і тому $t' = t$.

Співвідношення (3.72) називають перетвореннями координат Галілея. Вони зв'язують координати однієї і тієї ж точки в системах відліку, що рухаються одна відносно одної прямолінійно і рівномірно.

Зауважимо, що записані вище співвідношення мають місце лише в класичній механіці ($u << c$).

3.20 Інерціальні системи відліку. Механічний принцип відносності

Інерціальними називаються системи відліку, відносно яких виконується перший закон Ньютона. Дослідження показують, що інерціальною є система відліку зв'язана з центром Сонця (геліоцентрична система). Система відліку зв'язана з центром мас замкнутої системи тіл (за законом збереження імпульсу) також інерціальна. Всі інші системи відліку, які рухаються відносно них прямолінійно і рівномірно будуть інерціальними. Розглянемо питання про справедливість законів Ньютона в інерціальних системах відліку.

Очевидно, що перший закон Ньютона в інерціальних системах відліку. виконується, бо саме формулювання першого закону Ньютона розглядають як означення інерціальної системи відліку.

Повернемося до векторної рівності $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$. Візьмемо похідну по часу від обох частин цієї рівності, враховуючи, що $\vec{u} = \text{const}$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{u}.$$

Звідки

$\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{u}$. (3.73)

Зауважимо, що формулу (3.73) називають правилом додавання швидкостей в класичній механіці. Із (3.73) бачимо, що швидкість $\vec{\upsilon}'$ залежить від швидкості $\vec{u}$, тобто швидкість тіла в різних інерціальних системах відліку різна; швидкість відносна.

Візьмемо похідну по часу від обох частин рівності (3.73)

$$\frac{d\vec{\upsilon}'}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}.$$

Звідки

$\vec{a}' = \vec{a}$. (3.74)

Отже, прискорення тіла в різних інерціальних системах відліку однакове; прискорення абсолютне.

Сили взаємодії між тілами залежать від взаємного розміщення тіл і від їх відносної швидкості. Із того, що $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$ і $\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{u}$ маємо

$$\vec{r}_2' - \vec{r}_1' = \vec{r}_2 - \vec{u}t - (\vec{r}_1 - \vec{u}t) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$
$$\vec{\upsilon}_2' - \vec{\upsilon}_1' = \vec{\upsilon}_2 - \vec{u} - (\vec{\upsilon}_1 - \vec{u}) = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1 .$$

Бачимо, що взаємне розміщення тіл і їх відносна швидкість в обох системах відліку однакові. Отже, сили взаємодії між тілами в різних інерціальних системах відліку однакові, тобто

$\vec{F}' = \vec{F}$. (3.75)

Із (3.74) і (3.75) слідує, що рівняння другого і третього законів Ньютона у системі відліку K' матимуть вигляд

$$m'\vec{a}' = \vec{F}'; \vec{F}_{12}' = -\vec{F}_{21}'.$$

Маса також однакова в усіх інерціальних системах відліку.

Таким чином, вигляд рівнянь законів Ньютона не змінюється при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої, тобто є інваріантними відносно перетворень координат Галілея.

Із інваріантності законів Ньютона і інших законів (таких як закон збереження імпульсу, закон збереження енергії) можна зробити такий важливий висновок: у всіх інерціальних системах відліку всі механічні явища при одних і тих же умовах протікають однаково. Це твердження носить назву механічного принципу відносності.

На практиці механічний принцип відносності проявляється, наприклад, в тому, що пасажир у вагоні із закритими вікнами не зможе встановити чи вагон знаходиться в стані спокою, чи в стані прямолінійного і рівномірного руху.

3.21 Неінерціальні системи відліку. Сили інерції

Неінерціальними називаються системи відліку, які рухаються з деяким прискоренням відносно інерціальних. Наприклад, в задачах про рух тіл на поверхні Землі користуються системами відліку пов'язаними з поверхнею Землі. Такі системи відліку неінерціальні, бо Земля здійснює добове обертання.

З'ясуємо питання про справедливість законів Ньютона в неінерціальних системах відліку. Для цього розглянемо дві системи відліку: інерціальну (K) і неінерціальну (K').

Повернемось до векторної рівності $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$. Взявши від цієї рівності другу похідну по часу, отримуємо

$$\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}.$$

Звідки

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{w},$$

де $\vec{w}$ – прискорення неінерціальної системи відліку.

Нехай на тіло з боку інших тіл діє сила $\vec{F}$. За другим законом Ньютона прискорення тіла в інерціальній системі відліку

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Тоді

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}}{m} - \vec{w}, \text{ або } m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{w}. \quad (3.76)$$

Проведемо аналіз рівняння (3.76). Бачимо, що при $\vec{F} = 0$ прискорення $\vec{a}' \neq 0$. Отже, в неінерціальних системах відліку перший закон Ньютона не виконується.

Із рівняння (3.76) бачимо також, що $\vec{a}' \neq \frac{\vec{F}}{m}$, а другий закон Ньютона вимагає, щоб прискорення тіла було рівним $\frac{\vec{F}}{m}$. Отже, в неінерціальних системах відліку другий закон Ньютона не виконується.

При $\vec{F} = 0$ тіло рухається так ніби на нього діє сила, що дорівнює $-m\vec{w}$. Силу $\vec{F}_{ін} = -m\vec{w}$ називають силою інерції. Сили інерції не можна ставити в один ряд з силами тяжіння, силами пружності, або силами тертя. Останні є результатом взаємодії тіл. Сила інерції – це не результат взаємодії тіл, а властивість системи відліку. Для сили інерції не існує протидіючої сили. Отже, і третій закон Ньютона в неінерціальних системах відліку не виконується.

Ввівши поняття сили інерції, рівняння (3.76) можна записати у вигляді

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ін}. \qquad (3.77)$$

Воно є основним рівнянням динаміки в неінерціальних системах відліку.

Що стосується законів збереження імпульсу, енергії і момента імпульсу, то в неінерціальних системах відліку вони не виконуються, бо в неінерціальних системах відліку не існує замкнутих систем – для будь-якої системи тіл сила інерції є зовнішньою.

Приклади сил інерції

1. Сили інерції при прискореному поступальному русі систем відліку.

На дні кабіни ліфту знаходиться деяке тіло.

Нехай ліфт опускається вниз з прискоренням $\vec{a}$. Система відліку K зв'язану з поверхнею Землі, нехтуючи її добовим обертанням, будемо вважати інерціальною. За другим законом Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}. \qquad (3.78)$$

Система відліку K' зв'язану з ліфтом є неінерціальною. В системі K' тіло перебуває в стані спокою, тобто $\vec{a}' = 0$. Згідно (3.77)

$$0 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{ін}. \qquad (3.79)$$

Із порівняння (3.78) і (3.79) маємо, що $\vec{F}_{ін} = -m\vec{a}$.

В проекції на вісь Oy рівняння дає $0 = -mg + N + F_{ін}$ Вага тіла P чисельно дорівнює N. Тоді

$$P = mg - F_{ін}.$$

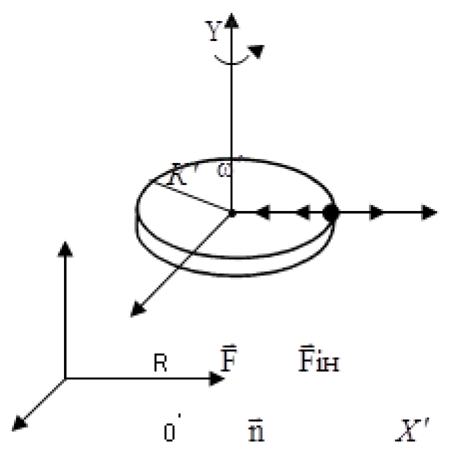

Рис. 3.8

Якщо ліфт нерухомий, то $F_{ін} = 0$ і вага тіла $P = mg$. У ліфті, що прискорено опускається вниз, вага тіла частково компенсується силою інерції.

При $a = g$ сила інерції $F_{ін} = mg$ і повністю компенсує вагу тіла $(P = 0)$. Такий стан називається станом “невагомості”.

1. Відцентрова сила інерції.

Диск рівномірно обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю ω .

На виділену на ободі диску матеріальну точку з боку інших матеріальних точок діє сила пружності, нехай $\vec{F}$. Система відліку K нерухома (інерціальна). За другим законом Ньютона

$$m\omega^2 R\vec{n} = \vec{F}. \tag{3.80}$$

Система відліку K' обертається разом з диском (неінерціальна). Тоді згідно (3.77)

$$0 = \vec{F} + \vec{F}_{ін}. \tag{3.81}$$

Порівнюючи (3.80) і (3.81), отримуємо $\vec{F}_{ін} = -m\omega^2 R\vec{n}$ ($\vec{n}$ – одиничний вектор). Таку силу інерції називають відцентровою.

2. Коріолісова сила інерції.

На тіло, що рухається з швидкістю υ в обертальній системі відліку, крім відцентрової сили інерції діє ще і коріолісова сила інерції $\vec{F}_к = -2m\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$ або $\vec{F}_к = 2m\vec{\upsilon} \times \vec{\omega}$.

Коріолісова сила інерції проявляє себе при русі тіл на поверхні Землі (наприклад, при русі тіла вздовж меридіану).

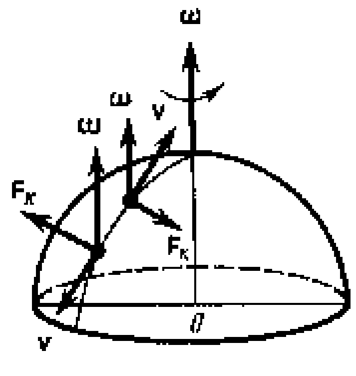

Рис.3.9

Із рис. 3.9 видно, що незалежно від напряму руху тіла (на Пн. або на Пд.), у північній півкулі коріолісова сила інерції напрямлена вправо відносно напряму руху тіла, а у південній півкулі – вліво (напрям $\vec{F}_к$ знаходиться за правилом правого гвинта).

Дія коріолісової сила інерції приводить до того, що в ріках

північної півкулі більше руйнується правий берег, а в ріках південної півкулі – лівий. Для прикладу можна сказати, що ріка Волга з часів Івана Грозного (XVI ст.) змістилася на 8 км.

3.22 Властивості простору і часу у класичній механіці

Як вже згадувалось, класична механіка описує рухи, швидкості яких значно менші за швидкість світла у вакуумі $(\upsilon << c)$. Для опису рухів, швидкості яких близькі до швидкості світла, Ейнштейн створив релятивістську механіку. Релятивістською називають механіку, яка враховує вимоги спеціальної теорії відносності.

Основними поняттями теорії простору і часу є довжина відрізка і проміжок часу між двома подіями.

Поставимо питання про те, як змінюються довжина відрізка і проміжок часу при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої. У класичній фізиці відповідь на це питання дають перетворення координат Галілея

$$x' = x - ut\,;\; y' = y\,;\; z' = z\,;\; t' = t$$

(співвідношення записані для випадку, коли осі Ox і $O'x'$ співпадають).

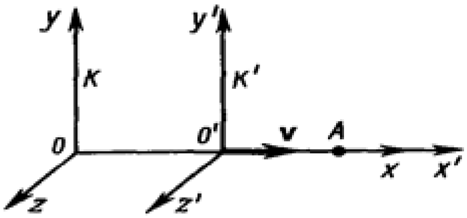

Рис. 3.10

Із першого рівняння маємо, що

$x_2' - x_1' = x_2 - x_1$, тобто довжина відрізка в обох системах відліку однакова.

Із четвертого рівняння маємо, що $\Delta t' = \Delta t$, тобто проміжок часу в обох системах відліку однаковий.

Отже, простір і час незалежні один від одного, простір і час не залежать від швидкості руху систем відліку, простір і час абсолютні.

3.23 Постулати спеціальної теорії відносності (СТВ). Перетворення Лоренца

1. Швидкість світла і правило додавання швидкостей.

До середини XIX ст. швидкість світла була виміряна вже досить точно. Її значення у вакуумі складає $3\cdot 10^8$ м/с. Виникло питання про те, до якої інерціальної системи відноситься це значення швидкості. І виникло воно тому, що згідно з правилом додавання швидкостей у класичній фізиці

$$\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{u}. \tag{3.82}$$

Швидкість руху, в тому числі і швидкість руху світла, в різних інерціональних системах відліку різна.

Експериментальні дослідження в цьому напрямі показали, що швидкість руху світла в різних інерціональних системах відліку однакова, що суперечить (3.82). Отже, перетворення Галілея, з яких слідує правило (3.82), мають обмежену область застосування; вони застосовні, коли $u \ll c$.

І так виникла необхідність переглянути ті основні положення, які лежать в основі перетворень Галілея, зокрема положення про абсолютність простору і часу. Цю задачу в 1905 році розв'язав Ейнштейн.

2. Постулати СТВ.

За основу своєї теорії Ейнштейн вибрав два положення, які називають постулатами спеціальної теорії відносності:

1). В усіх інерціональних системах відліку всі фізичні явища (механічні, електричні, магнітні, оптичні) при одних і тих же умовах протікають однаково (принцип відносності).

2). Швидкість світла у вакуумі однакова в усіх інерціональних системах відліку і не залежить від руху джерела світла (принцип інваріантності швидкості світла).

3. Перетворення Лоренца.

Виходячи з цих положень, Ейнштейн показав, що зв'язок між координатами і часом у двох інерціональних системах відліку (K і K') виражається не перетвореннями Галілея, а перетвореннями Лоренца.

У випадку, коли координатні осі Ox і $O'x'$ систем відліку (K і K') співпадають, перетворення Лоренца мають вигляд:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-\beta^2}}; \; y' = y; \; z' = z; t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

де $\beta = \frac{u}{c}$ (u – відносна швидкість систем відліку; c швидкість світла у вакуумі).

Звернемо увагу на першу і останню формули. Вони наочно вказують на те, що не тільки координата залежить від часу, але й час залежить від координати, тобто між простором і часом є взаємозв'язок. Координата і час залежать також від швидкості системи відліку, тобто властивості простору і часу залежать від характеру руху матеріальних об'єктів – простір і час є якостями існування матерії.

Дуже істотно, що при $\beta \ll 1$ формули Лоренца переходять у формули перетворень Галілея, де маємо:

$$x' = x - ut\,;\; y' = y\,;\; z' = z\,;\; t' = t\,.$$

3.24 Властивості простору і часу в релятивістській механіці (наслідки із перетворень Лоренца)

1. <u>Поняття одночасності подій.</u> Нехай у системі K в точках з координатами x_1 і x_2 в моменти часу t_1 і t_2 відбуваються дві події. В системі K', яка рухається відносно K з швидкістю $\vec{u}$, вздовж осі Ox, цим подіям відповідають координати x_1' і x_2' в моменти часу t_1' і t_2'.

Якщо події в системі K відбуваються в одній точці ($x_1 = x_2$) і є одночасними ($t_1 = t_2$), то згідно з перетвореннями Лоренца

$$x_1' = x_2' \text{ і } t_1' = t_2',$$

тобто ці події є одночасними і такими, що просторово збігаються для довільної інерціональної системи відліку.

Якщо події в системі K просторово рознесені ($x_1 \neq x_2$), але одночасні ($t_1 = t_2$), то в системі K'

$$x_1' = \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}}\,;\, x_2' = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

$$t_1' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,;\, t_2' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Бачимо, що

$$x_1' \neq x_2' \text{ і } t_1' \neq t_2'.$$

Отже, в системі K' ці події, залишаючись просторово рознесеними, виявляються неодночасними. Знак різниці $t_2' - t$ визначається знаком виразу $u(x_1 - x_2)$, тому в різних точках системи K' різниця $t_2' - t_1'$ буде неоднаковою за величиною і за знаком.

2. <u>Відносність довжини.</u> Нехай деяке тіло (наприклад, стержень), розміщене вздовж осі $O'x'$, рухається разом з системою відліку K' і має в цій системі довжину $\Delta x_0 = x_2' - x_1'$, де x_1' і x_2' – координати початку і кінця стержня.

За першою формулою перетворень Лоренца маємо

$$\Delta x_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Різниця $\Delta x = x_2 - x_1$ – дає довжину стержня в системі K.

Тоді $\Delta x_0 = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$ або $\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1-\beta^2}$.

Оскільки $\sqrt{1-\beta^2} < 1$, то $\Delta x < \Delta x_0$.

Отже, довжина стержня, яка виміряна в системі, відносно якої він рухається, є меншою від довжини, виміряної в системі, відносно якої стержень знаходиться у стані спокою. Лінійні розміри стержня в системі відліку, відносно якої він не рухається, є найбільшими. Ці найбільші розміри називають власними розмірами.

Зауважимо, що твердження про скорочення лінійних розмірів тіл у напрямі руху не означає якогось фізичного процесу в стержні, подібного деформації системи; мова йде про значення вимірювання стержня в різних системах відліку.

3. <u>Відносність проміжку часу.</u> Нехай у деякій точці, яка нерухома в системі K', відбувається подія, тривалість якої $\Delta t_0 = t_2' - t_1'$.

За четвертою формулою перетворень Лоренца маємо

$$\Delta t_0 = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1 - \frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} =$$

$$= \frac{t_2 - t_1 - \frac{u}{c^2}\cdot(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Різниця $\Delta t = t_2 - t_1$ – дає тривалість події в системі K. Різниця $x_2 - x_1 = u\Delta t$ - дає зміщення точки, де відбувається подія, в системі відліку K. Тоді $\Delta t_0 = \Delta t \cdot \sqrt{1-\beta^2}$ або $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$. (3.83)

Оскільки $\sqrt{1-\beta^2} < 1$, то $\Delta t > \Delta t_0$.

Отже, проміжок часу між двома подіями в різних інерціальних системах відліку різний; проміжок часу відносний. Він найменший в тій системі відліку, відносно якої точка, де відбувається подія, нерухома. Цей найменший проміжок часу називається власним часом.

Формула (3.83) знайшла своє експериментальне підтвердження. В космічних променях є такі елементарні частинки як μ – мезони. Ці частинки нестабільні – вони розпадаються на інші елементарні частинки. Час життя μ – мезонів, коли вони знаходяться у стані спокою, складає $2 \cdot 10^{-6}$с. За такий час, навіть рухаючись зі швидкістю світла, μ – мезони могли би пролетіти шлях 600 м. В той же час дослідження показують, що мезони утворюються на висоті 20-30 км. і встигають долетіти до Землі. Пояснюється це тим, що час $2 \cdot 10^{-6}$с. це власний час життя мезонів, тобто час виміряний по годиннику, який рухається разом з частинкою. Час виміряний по годиннику в системі відліку, зв'язаною із Землею більший і частинка встигає пролетіти більшу відстань.

4. Поняття інтервалу між двома подіями. З назви теорії і її попередніх результатів може скластися хибна думка про те, що "все в світі відносне". Насправді, теорія відносності точніше, ніж класична фізика, відображує поняття абсолютного і відносного в розвитку матеріального світу та його пізнанні.

З приводу СТВ Планк у свій час писав: "Її привабливість для мене полягає в тому, що я прагнув з усіх її положень вивести те абсолютне, інваріантне, що лежить в її основі". І такі абсолютні, інваріантні величини були знайдені.

Взаємозв'язок між простором і часом показує, що для математичного відображення будь-якої події слід користуватися чотиривимірною системою відліку, де роль четвертої координати відіграє час. Точку в такій системі відліку, яка визначає певну подію, називають світовою точкою.

Розглянемо дві події. Нехай в системі відліку одна з них визначається координатами (x_1, y_1, z_1, t_1), а друга – координатами (x_2, y_2, z_2, t_2).

Величину $S_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$ називають інтервалом між двома подіями.

Неважко показати, що інтервал є інваріантом відносно перетворень Лоренца. Квадрат інтервалу в системі K можна записати у вигляді

$$\Delta S^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2,$$

а відповідний квадрат інтервалу між двома подіями в системі K'

$$\Delta S'^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2. \qquad (3.84)$$

Використавши формули

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}};\ \Delta y' = \Delta y;\ \Delta z' = \Delta z;\ \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

та підставивши їх у вираз (1.84), дістанемо $\Delta S^2 = \Delta S'^2$.

Інтервал між подіями можна виразити через такі дві компоненти: квадрат просторової відстані

$l_{12}^2 = (x_2 - x_1')^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ та квадрат проміжку часу $t_{12}^2 = (t_2 - t_1)^2$.

Тоді $$S_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}. \qquad (1.85)$$

З виразу (3.84) видно, що хоч обидві компоненти мають відносний характер, інтервал, як і швидкість світла, інваріантні відносно перетворень Лоренца. Останні в теорії відносності належать до абсолютних величин.

3.25 Правила додавання швидкостей в релятивістській механіці

Спираючись на перетворення Лоренца, знайдемо зв'язок між швидкостями тіла в двох інерціальних системах відліку (K і K'). Розглянемо простий випадок, коли тіло рухається паралельно до осі Ox (або

$O'x'$). Тоді $\upsilon_x = \upsilon$; $\upsilon_y = 0$; $\upsilon_z = 0$, відповідно $\upsilon'\upsilon_x = \upsilon'$; $\upsilon_y' = 0$; $\upsilon_z' = 0$.

За означенням швидкості $\upsilon_x = \frac{dx}{dt}$, $\upsilon_x' = \frac{dx'}{dt'}$.

Продиференціюємо перше і четверте рівняння перетворень Лоренца

$$dx' = \frac{dx - udt}{\sqrt{1-\beta^2}};\ dt' = \frac{dt - \frac{u}{c^2}dx}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Поділимо почленно ліві і праві частини отриманих рівнянь

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - udt}{dt - \frac{u}{c^2}dx} = \frac{dt\left(\frac{dx}{dt} - u\right)}{dt\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}}.$$

Замінивши похідні відповідними компонентами швидкості, дістанемо

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x}.$$

Отже, $\upsilon' = \dfrac{\upsilon - u}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon}$ або $\upsilon = \dfrac{\upsilon' + u}{1 + \frac{u}{c^2}\upsilon'}$.

Отримані формули виражають правило додавання швидкостей в релятивістській механіці.

Нехай $\upsilon' = c$ і $u = c$. Тоді

$$\upsilon = \frac{c + c}{1 + \frac{c}{c^2}c} = \frac{2c}{2} = c.$$

Бачимо, що результуюча швидкість υ не перевищує швидкості світла у вакуумі. Отже, швидкість світла у вакуумі є граничною швидкістю. І ніякі дослідні факти в сучасній фізиці не заперечують висновку про те, що швидкість світла у вакуумі є межею можливих швидкостей в природі.

3.26 Маса, імпульс і основний закон динаміки в релятивістській механіці

Ейнштейн показав, що маса одного і того ж тіла в двох інерціальних системах відліку неоднакова. Зв’язано це з тим, що маса тіла залежить від швидкості його руху. Ця залежність виражається формулою

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

де $\beta = \dfrac{\upsilon}{c}$.

При $\upsilon = 0$ маса $m = m_0$, масу m_0 називають масою спокою тіла; вона вимірюються в системі відліку, відносно якої тіло не рухається. Масу *m* називають релятивістською.

Звернемось до основного рівняння динаміки матеріальної точки

$$\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}=\vec{F}. \qquad (3.86)$$

У класичній фізиці приймається, що маса тіла є сталою величиною. Тоді $m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}$ або $m\vec{a}=\vec{F}$. (1.87)

Принцип відносності Ейнштейна вимагає, щоб рівняння, які виражають фізичні закони, були інваріантними відносно перетворень Лоренца. Рівняння (3.87) не задовольняє цій вимозі.

Підставимо у рівняння (3.86) вираз релятивістської маси

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=\vec{F} \text{ або } \frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}, \qquad (3.88)$$

де $\vec{p}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{\upsilon}$ – релятивістський імпульс.

Можна переконатись, що рівняння (3.88) інваріантне відносно перетворень Лоренца. Його називають основним рівнянням динаміки в релятивістській механіці.

3.27 Закон взаємозв'язку між масою і енергією

Помножимо основне рівняння динаміки (3.86) скалярно на вектор елементарного переміщення $d\vec{r}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{\vartheta}\right)\vec{\upsilon}dt=\vec{F}d\vec{r},$$

(в лівій частині рівняння враховано, що $d\vec{r}=\vec{\upsilon}dt$).

Проведемо інтегрування цього рівняння вздовж траєкторії, наприклад, від точки 1 до точки 2

$$\int_1^2\vec{\upsilon}d\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=\int_1^2\vec{F}d\vec{r}.$$

Зауважимо, що інтеграл справа дає роботу $\left(A=\int_1^2\vec{F}d\vec{r}\right)$ і перетворимо підінтегральний вираз зліва до іншого вигляду

$$\vec{\upsilon}d\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=\vec{\upsilon}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}d\vec{\upsilon}+\frac{m_0\upsilon d\upsilon}{c^2\sqrt{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^3}}\vec{\upsilon}\right)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}+$$

$$+\frac{m_0\upsilon d\upsilon}{c\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^3}}\vec{\upsilon}\vec{\upsilon}=\frac{m_0\upsilon d\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\left(1+\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)=\frac{m_0\upsilon d\upsilon}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^3}} \qquad (3.89)$$

(в ході перетворень бралось до уваги, що $\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}=\upsilon d\upsilon$; $\vec{\upsilon}\vec{\upsilon}=\upsilon^2$).

Тепер продиференціюємо вираз для маси

$$dm=d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=\frac{m_0\upsilon d\upsilon}{c^2\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^3}}$$

або $$c^2dm=\frac{m_0\upsilon d\upsilon}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^3}}. \qquad (3.90)$$

Порівнюючи формули (1.89) і (1.90), бачимо, що підінтегральний вираз зліва дорівнює c^2dm.

Отже,

$$\int_1^2 c^2dm=A.$$

Звідки $$\left(m_2-m_1\right)c^2=A.$$

За загальним законом збереження і перетворення енергії

$$A=E_2-E_1.$$

Тоді

$$\left(m_2-m_1\right)c^2=E_2-E_1.$$

Легко переконатись способом підстановки, що останнє рівняння перетворюється в тотожність при

$E=mc^2+C$, де C – довільна стала величина.

Покладемо тимчасово, що $C=0$ і перетворимо формулу $E=mc^2$ до іншого вигляду:

$$E^2=m^2c^4=\frac{m_0^2c^4}{1-\beta^2}=\frac{m_0^2c^4\left(1-\beta^2\right)}{1-\beta^2}+\frac{m_0^2\upsilon^2c^2}{1-\beta^2}=m_0^2c^4+$$

$$+\frac{m_0^2\upsilon^2c^2}{1-\beta^2}=m_0^2c^4+m^2\upsilon^2c^2.$$

Зауваживши, що величина $m\upsilon$ дає релятивістський імпульс p, маємо

$$E = m_0{}^2c^4 + p^2c^2 \text{ або } E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}$$

(отримані формули виражають зв'язок між енергією E і імпульсом p в релятивістській механіці).

Тепер запишемо першу формулу дещо по-іншому

$$E - p^2c^2 = m_0{}^2c^4.$$

Права частина цього виразу є інваріантною величиною, тобто однаковою в усіх інерціальних системах відліку. Отже, і ліва частина має бути інваріантною. Експериментальні дослідження над швидкими частинками підтвердили інваріантність згаданого виразу. І тому відповідно до досліду константу інтегрування C мусимо брати рівною нулю.

Таким чином,

$$E = mc^2 \text{ або } E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.91}$$

Якщо тіло нерухоме $(\upsilon = 0)$, то $E_0 = m_0c^2$. Бачимо, що енергія E не зводиться до кінетичної і тому її називають повною або релятивістською енергією. Енергію E_0 називають енергією спокою тіла; вона є внутрішньою енергією тіла.

Рівняння (3.91) виражає один із фундаментальних законів природи – закон взаємозв'язку маси і енергії: повна енергія тіла дорівнює добутку релятивістської маси тіла на квадрат швидкості світла у вакуумі.

Зауважимо, що експериментальні підтвердження закону взаємозв'язку маси і енергії дають ядерні реакції. Характерним наслідком їх є так званий дефект маси Δm (див. розділ "Ядерна фізика").

Кінетичну енергію $(E_к)$ в релятивістській механіці визначають як різницю E і E_0

$$E_к = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right).$$

У випадку малих швидкостей $(\upsilon << c)$ цю формулу можна перетворити таким чином:

$$E_к \approx m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1\right) = \frac{1}{2}m_0c^2\beta^2 = \frac{1}{2}m_0c^2\frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{1}{2}m_0\upsilon^2,$$

тобто ми приходимо до класичного виразу кінетичної енергії.

3.28 Про єдиний закон збереження маси, імпульсу і енергії

За виразом $E_i = \sqrt{m_0^2 c^4 - p_i^2 c^2}$ знайдемо власну масу якоїсь $i-$той частинки

$$m_0 = \frac{1}{c}\sqrt{\left(\frac{E_i^2}{c}\right)^2 - p_i^2} . \qquad (3.92)$$

Поширимо цей вираз на ізольовану систему невзаємодіючих частинок. Енергія і імпульс системи дорівнюють відповідно

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i ;\ \vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i ,$$

де n – кількість частинок у системі.

Підставивши ці величини у вираз (1.92), знайдемо власну масу системи

$$M = \frac{1}{c}\sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - P^2} .$$

Для ізольованої системи справджується закон збереження імпульсу та закон збереження енергії

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = const_1 ;\ E = \sum_{i=1}^{n} E_i = const_2 ,$$

то відповідно буде зберігатись також власна маса системи

$$M = \frac{1}{c}\sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - P^2} = const . \qquad (3.93)$$

У релятивістській механіці рівняння (3.93) виражає зміст закон збереження маси, імпульсу і енергії. У класичній механіці, як відомо, розглядаються три окремі закони збереження маси, імпульсу і енергії.

На закінчення повернемось до сил інерції, які діють в неінерціальних системах відліку. Характерною властивістю сил інерції є те, що вони пропорційні масам тіл $\left(\vec{F}_{ін} = -m\vec{a}\right)$. Тому в полі сил інерції усі тіла рухаються з одним і тим же прискоренням. Таку ж властивість мають і сили тяжіння $\left(\vec{F} = m\vec{g}\right)$.

Із аналізу явищ в неінерціальних системах відліку Ейнштейн вивів положення, яке отримало назву принципу еквівалентності сил інерції і сил тяжіння.

Слід зауважити, що це положення не відносить сили тяжіння до розряду фіктивних. Згадаємо, що сили інерції є фіктивними. Тут мова йде лише про те, що властивості простору і часу і в полі сил інерції і в полі сил тяжіння однакові.

Принцип еквівалентності сил інерції і сил тяжіння позволив перейти до розгляду неінерціальних систем відліку, тобто до створення загальної теорії відносності або точніше релятивістської теорії тяжіння.

3.29 Гідростатика нестисливої рідини. Закон Паскаля. Гідростатичний тиск. Закон Архімеда

Розділ фізики, в якому вивчають закони рівноваги та руху рідких та газоподібних тіл та їх взаємодію з твердими тілами називають гідроаеромеханікою. Рідини і гази розглядаються як суцільне середовище, що рівномірно заповнює деякий об’єм. Нестисливою рідиною називають таку рідину, густина якої не залежить від зовнішнього тиску.

Взаємодія окремих шарів газу або рідини між собою або з твердим тілом визначається тиском. Тиск – це скалярна величина, яка рівна нормальній складовій сили, яка діє на одиницю площі

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \qquad (3.94)$$

Тиск вимірюється в паскалях (Па). Один паскаль – це тиск, який створюється силою в 1Н, що діє нормально до площадки 1м^2.

У випадку рівноваги тиск рідин та газів підлягає закону Паскаля: тиск у всіх частинах об’єму рідини або газу однаковий і без змін передається у всі точки об’єму.

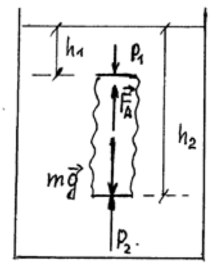

Рис. 3.11

Якщо рідина густиною ρ перебуває в полі сили тяжіння, то на деякій глибині h тиск буде рівний сумі деякого зовнішнього тиску P_0 та *гідростатичного* $-\rho gh$.

$$P = P_0 + \rho gh. \qquad (3.95)$$

Завдяки різниці тисків на верхню та нижню поверхні тіла, що занурене в рідину або газ, виникає сила Архімеда, яка напрямлена вертикально вгору, прикладена в центрі тяжіння витисненої рідини або газу і чисельно рівна вазі витисненої рідини або газу

$$F_A = \rho_p g V_p, \qquad (3.96)$$

де $\rho_р$ – густина рідини або газу, V_p – об'єм витисненої рідини або газу.

3.30 Рух ідеальної рідини. Рівняння нерозривності. Рівняння Бернуллі

Щоб описати рух частинок рідини або газу можна для кожної точки простору задати вектор швидкості як функцію часу. Сукупність векторів υ, заданих для всіх точок простору, утворює поле вектора швидкості. Якщо провести лінії, дотичні до яких співпадають з напрямком вектора швидкості в кожній точці, то ми отримаємо лінії течії. Поверхню, утворену лініями течії, що проведені через усі точки малого замкнутого контура, називають трубкою течії.

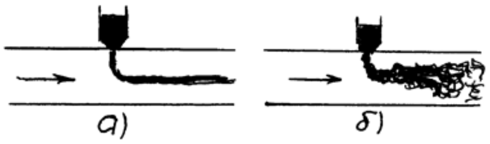

Рис. 3.12

Розрізняють ломінарну або шарувату течію та турбулентну. Ломінарною називають течію, в якій окремі шари при своєму русі не перемішуються. в турбулентній течії відбувається перемішування окремих шарів, утворення завихрень в результаті виникнення нормальної (поперечної) складової швидкості.

В реальних рідинах між окремими шарами рідини виникають сили в'язкого (внутрішнього) тертя. В окремих випадках вплив внутрішнього тертя невеликий і ним можна знехтувати. Абсолютно нестисливу і нев'язку рідину називають – ідеальною.

Розглянемо трубку течії, настільки тонку, що в кожному її перерізі швидкість можна вважати однаковою у всіх точках перерізу. Можна показати, що

$$S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2$$

або $$S\upsilon = const. \qquad (3.97)$$

Рівняння (3.97) називають рівнянням нерозривності, з якого слідує, що чим більша площа перерізу трубки течії, тим менша швидкість течії і навпаки.

Коли рідина рухається по трубі змінного перерізу і різної висоти, то для деякого її об’єму змінюється як кінетична так і потенціальна енергії об’єму рідини. Ця зміна обумовлена дією деяких зовнішніх сил, робота яких рівна зміні потенціальної і кінетичної енергії рідини $A = \Delta W к + \Delta W п$.

Після підстановок і перетворень в лівій та правій частинах останнього співвідношення отримаємо вираз

$$\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 \qquad (3.98)$$

або для довільного перерізу

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}, \qquad (3.99)$$

де $\frac{\rho\upsilon^2}{2}$ – динамічний тиск, $\rho g h$ – гідростатичний тиск, p – статичний тиск.

Рівняння (3.99) вивів Бернуллі і воно носить його ім’я. Це рівняння виражає закон збереження енергії при стаціонарній течії ідеальної рідини. Для горизонтальної трубки течії $h_1 = h_2$ і рівняння Бернуллі приймає вигляд

$$p + \frac{\rho\upsilon^2}{2} = \text{const}. \qquad (3.100)$$

Звідси випливає, що в тих місцях труби, де більша швидкість течії, тиск буде меншим і навпаки.

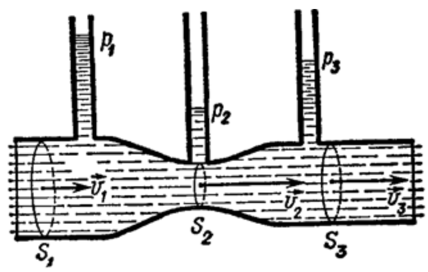

Рис. 3.13

Якщо рідину налити в посудину площею перерізу S_1, в бічній поверхні якої є отвір площею S_2, то швидкість витікання рідини через отвір S_2 визначається за формулою Торічеллі

$$\upsilon = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}. \qquad (3.101)$$

Струмінь води, що витікає з бічного отвору посудини створює реактивну тягу, і якщо посудину поставити на візок, то останній почне рухатись разом з посудиною під дією цієї сили

$$F_{\text{реакт.}} = 2\rho gh \cdot S_2. \qquad (3.102)$$

3.31 Гідродинаміка в’язкої рідини. Сила Стокса

Для всіх реальних рідин в тій чи іншій мірі властиве внутрішнє тертя або в’язкість, що проявляється в протидії при переміщенні одного шару рідини (газу) відносно іншого. Змінюючи швидкість υ руху верхньої пластини(Рис. 3.14), можна експериментально встановити співвідношення

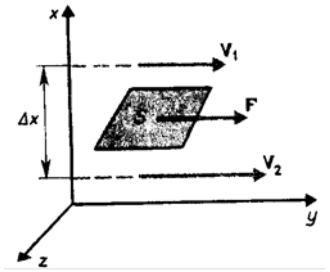

Рис. 3.14

$$F = \eta\left|\frac{d\upsilon}{dz}\right|S, \qquad (3.103)$$

де η – коефіцієнт в’язкості (динамічна в’язкість) рівний силі в’язкого тертя, яке виникає при градієнті швидкості $1\frac{м}{с}$ на 1м, на поверхні $1м^2$ $([\eta] = Па \cdot с)$,

$\frac{d\upsilon}{dz}$ - градієнт швидкості, S - площа шару рідини

Коефіцієнт в’язкості залежить від температури, причому для рідин він зменшується з підвищенням температури, а для газів - збільшується, що вказує на різний механізм внутрішнього тертя в рідинах і газах.

При русі у в’язкому середовищі тіл кулястої форми сила в’язкого тертя визначається за формулою Стокса

$$F = 6\pi r\eta\upsilon, \qquad (3.104)$$

де r – радіус тіла, η – коефіцієнт в’язкого тертя, υ – швидкість руху тіла кулястої форми у в’язкому середовищі.

РОЗДІЛ 4. ПРИЗНАЧЕННЯ І СТРУКТУРА РОБОЧОГО ЗОШИТУ З ФІЗИЧНОГО ПРАКТИКУМУ

4.1 Рекомендації щодо підготовки та виконання лабораторних робіт

Успіх у проведенні тої чи іншої лабораторної або практичної роботи багато в чому залежить від її підготовки. Ця підготовка включає в себе:

— глибоке вивчення студентами теоретичного матеріалу, на основі якого проводиться робота;

— підготовку необхідної навчально-матеріальної бази і документації.

Між лабораторною (практичною) роботою, лекціями і самостійним вивченням літератури студентами існує безпосередній зв'язок. Без засвоєння теоретичного матеріалу, який вивчається на лекціях, і подальшого його вивчення за підручниками і посібниками, студент не може успішно справитися з тою чи іншою роботою. Тому кожен студент зобов'язаний глибоко засвоїти той матеріал, який подається викладачем на лекції, осмислити його і знайти в ньому ті елементи, які потім можна буде використати при виконанні лабораторної чи практичної роботи. Але на лекції студент може не все зрозуміти, якісь деталі питання, що вивчається, він не з'ясував. Тому він звертається до підручника чи посібника для з'ясування цих деталей, для осмислення тих теоретичних положень, які необхідні для виконання лабораторних робіт.

Таким чином, лабораторні і практичні роботи виконуються для успішного вивчення і закріплення теоретичних положень, здобуття нових знань, практичних умінь і навичок. Лабораторні роботи, лекційний курс і самостійна робота студентів взаємопов'язані між собою, вони доповнюють одне одного. Теоретичний курс засвоюється більш міцно, а лабораторні і практичні роботи стають більш зрозумілими.

Мета лабораторної буде досягнута тільки при відповідній організації підготовки до студентів. При цьому слідвих одити з того, що будь-яка робота може бути умовно розбита на ряд етапів: попередня підготовка, початок роботи (допуск), виконання її, складання звіту і оцінка роботи (залік).

Попередня підготовка до роботи в лабораторії здійснюється за рахунок часу, відведеного для самостійної роботи студента. Готуючись до лабораторної роботи, студент перш за все повинен усвідомити її мету. Чітке формулювання і знання мети роботи в лабораторії має велике значення. Ступінь зацікавленості студента у виконанні тої чи іншої роботи прямо пропорційна ступеню його впевненості, відповідності роботи її меті.

Готуючись до занять, студент перш за все повинен засвої титеоретичний матеріал, домогтися чіткого уявлення про фізичні та інші процеси, які покладені в основу роботи тих чи інших приладів та установок.

Отримані під час заняття результати вимірювань використовуються для остаточного оформлення звіту з лабораторної роботи. Структура звіту відповідає структурі методичних вказівок до лабораторної роботи. Звіт повинен містити короткі теоретичні відомості щодо досліджуваного явища, опис лабораторної установки, методику розрахунків, інструкції щодо виконання вимірювань та обробки отриманих даних, а також таблиці з отриманими в результаті вимірювань та розрахунків чисельними даними. У звіті необхідно представити не лише результати розрахунків, але й усі детально розписані математичні дії (підстановка чисельних значень у формули та результати обчислень). Результати вимірювань та розрахунків занести до таблиць звіту та використати для побудови графіків, якщо це передбачено інструкцією. Всі розрахунки спочатку виконати на чорновику і лише потім перенести їх до звіту. У кінці звіту написати остаточний результат дослідження та сформулювати висновок їз даної роботи.

Звіт оформлюється в спеціально розробленому робочому зошиті. В ньому до кожної роботи надруковані теоретична та інструктивна частини звіту. Для остаточного оформлення після проведення заняття необхідно написати всі розрахунки, внести в таблиці результати, отримані під час вимірювань та розрахунків, побудувати графіки, написати результат і висновок із роботи.

Після оформлення звіту студент повинен представити його для захисту викладачеві під час найближчого заняття. Під час захисту необхідно продемонструвати достатні теоретичні знання досліджуваного у лабораторній роботі явища та пов`язаних із ним фізичних законів та рівнянь, вміння використовувати їх для аналізу та розрахунків. Необхідно також добре розуміти принцип дії лабораторної установки та методику дослідження в даній роботі. Для швидкого самоконтролю рівня теоретичної підготовки призначені контрольні питання, наведені в кінці методичних вказівок до кожної роботи.

4.2 Загальні правила виконання і захисту лабораторних робіт

1. Лабораторні роботи виконуються тільки відповідно до графіка лабораторних робіт. Студент, що пропустив лабораторне заняття, виконує не пропущену роботу, а ту, яка передбачена для нього графіком на даному занятті. Пропущена робота виконується на додатковому занятті.

2. Для оформлення робочих записів і звітів з лабораторних робіт кожен студент повинен мати спеціальний загальний зошит – журнал експериментальної роботи. Зошит має бути підписаний з вказуванням прізвища з ініціалами, факультету, курсу і групи.

3. Оформлення кожної лабораторної роботи починається з нової сторінки.

Звіт з лабораторної роботи складається при підготовці студента до виконання роботи і в процесі її виконання. Звіт повинен включати :

1) повну назву лабораторної роботи та її номер;

2) дату виконання;

3) формулювання мети роботи;

4) стисло викладену теорію (закони, формули, їх виведення тощо), яка стосується роботи;

5) принципову схему дослідної установки;

6) основні відомості про вимірювальні прилади;

7) найбільш істотні проміжні, всі кінцеві результати і звітну таблицю (таблиці);

8) графіки (якщо потрібно);

9) обчислення шуканої величини і похибок експерименту.

Звіт оформлюється акуратно, без помарок і виправлень. Помарки і виправлення допускаються лише в експериментальній частині роботи, яку студент виділяє окремим розділом і де записує всі результати вимірювань і розрахунки у тій послідовності, в якій вони проводилися. Кожна лабораторна робота – це невеликий самостійний фізичний експеримент. Найцінніше, що може дати лабораторний практикум − це вміння застосовувати теоретичні знання на практиці і осмислювати результати проведених дослідів. Недоцільно приступати до лабораторної роботи, не засвоївши теоретичних знань і не маючи ясного уявлення про процес її виконання та його найбільш істотні деталі. Тому допуск до виконання лабораторної роботи отримують ті студенти, які підготували теорію, що стосується роботи, знають в основних рисах принцип роботи приладів, які використовуються в ній, схеми установок, порядок виконання роботи і підготували вихідні матеріали протоколу лабораторної роботи. Студенти, допущені викладачем до виконання роботи, отримують необхідні прилади у лаборанта.Після виконання роботи студент показує експериментальні дані викладачеві і, переконавшись у правильності результатів, завершує оформлення роботи.

Після виконання роботи потрібно навести порядок на робочому місці, а отримані прилади здати лаборанту. По кожній з виконаних робіт студент складає залік (захищає лабораторну роботу) на одному з наступних занять.

На заліку до студента ставляться такі вимоги:

- глибоке знання програмних питань курсу фізики, зв'язаних з лабораторною роботою;
- знання методу вимірювання і дослідження, який застосовується в даній роботі, його точності, переваги та недоліки;
- знання принципу дії і точності вимірювальних приладів, що використовуються у роботі, і вміння ними користуватися;
- володіння навичками оцінки похибок і точності експерименту.

При цьому **знання відповідей на контрольні запитання до лабораторної роботи є обов'язковим.**

4.3 Інструкція з техніки безпеки під час роботи в лабораторії фізики

До початку роботи

1. Чітко з'ясуйте порядок і правила безпечного проведення експерименту.

2. Звільніть робоче місце від усіх непотрібних для роботи предметів. Перевірте наявність приладів та матеріалів, необхідних для виконання завдання.

3. Не приступайте до виконання роботи без дозволу викладача.

4. Розміщуйте обладнання і прилади на робочому місці так, щоб уникнути їх падіння під час виконання роботи.

4.3.1 Робота зі склом (скляним посудом)

1. Користуйтеся скляними трубками, які мають оплавлені краї.

2. Використовуйте скляний посуд без тріщин.

3. Не допускайте різких змін температури і механічних ударів виробів зі скла.

4. Опускайте тверді тіла в мензурку на міцній нитці, щоб не розбити мензурки.

5. Будьте обережні зі скляними пластинками, щоб не поранити руки.

6. Використовуйте скляні пластинки тільки з зашліфованими краями.

4.3.2 Правила зважування

1. Користуючись терезами, не допускайте механічних ударів тягарців на шальки терезів.

2. Не кладіть на шальки терезів мокрі, брудні, жирні, гарячі тіла, не насипайте сипучі речовини.

3. Дрібні гирі беріть тільки пінцетом.

4. Зважуване тіло і важки опускайте на шальки обережно.

4.3.3 Правила роботи з динамометром

1. Користуючись динамометром, не розтягуйте пружину руками.

2. Не перевантажуйте пружину динамометра навантаженням, більшим за допустиме.

3. Не допускайте розгойдування важків, зупиняйте їх коливання рукою.

4. Не допускайте падіння тіл (брусків) і важків під час їх зважування динамометром.

4.3.4 Правила роботи з важелем

1. Обережно зрівноважте важіль за допомогою гайок, що містяться на його кінцях.

2. Підвішуйте тягарці до плечей важеля так, щоб він не обертався навколо осі і не вдарив вас.

3. Динамометр підвішуйте до важеля обережно, щоб важки не зірвалися з плеча важеля.

4.3.5 Правила роботи з рідинами

1. Під час виконання робіт на встановлення теплового балансу воду треба і нагрівати не вище 70 °C.

2. З метою попередження опіку забороняється брати прилади та посудину з гарячою рідиною незахищеними руками.

3. Не пробуйте на смак рідин, які використовуються в дослідах, не допускайте їх розливання на робочий стіл.

4.3.6 Правила роботи при проведенні робіт з магнетизму

1. Обережно поводьтеся з постійними магнітами, не допускайте їх падіння, не вдаряйте по них сторонніми предметами, бо це приводить до їх розмагнічення.

2. Не торкайтесь магнітної стрілки постійними магнітами, бо це може призвести до її перемагнічення.

4.3.7 Правила роботи при проведенні окремих робіт фізпрактикуму

1. Студентам не дозволяється користуватися приладами з написами на їх панелях (корпусі): "Тільки для проведення дослідів учителем".

2. Не доторкайтесь до корпусів стаціонарного обладнання, до затискачів відімкнутих конденсаторів.

3. Під час експлуатації осцилографів необхідно обережно поводитися з електронно-променевою трубкою. Неприпустимі удари по трубці.

4. Не дозволяється експлуатувати лазер без захисного заземлення, обмеження екраном поширення променя вздовж стола. Не дозволяється пряме попадання в очі світла від лазера.

Після закінчення роботи

1. Приберіть своє робоче місце з дозволу викладача.

2. Складіть обладнання так, як воно було складено до початку роботи.

3. При потребі витріть стіл чистою ганчіркою.

Вимоги безпеки в екстремальних ситуаціях

У разі травмування (поранення, опіки тощо) або поганого самопочуття повідомте викладача.

ВИСНОВКИ

Навчально-методичний посібник є засобом забезпечення практично-діяльнісної складової навчання фізики, спрямований на надання допомоги студентам і викладачам при підготовці та виконанні фронтальних лабораторних робіт, відіграє важливу роль в умовах обмеженості часу і забезпечують системний підхід до здійснення продуктивних способів пізнання у процесі експериментаторської діяльності.

Метою навчально-методичного посібника є спрощення процесу підготовки до виконання лабораторних робіт і забезпечення студенту можливісті щодо ефективного та оптимального використання часу, відведеного на самостійну підготовку. Структура посібника така, що велика кількість матеріалу, який підлягає для запам’ятовування, подана у повному вигляді. При цьому студент має можливість опрацьовувати той матеріал, який він має не лише розуміти, але й знати – це основні положення, закони, закономірності, формули та їх виведення, означення.

Розроблений посібник містить: 1) вступ, де окреслено предмет вивчення; 2)концептуально методичні питання фізичного практикуму; 3) основи теорії похибок; 4) основний текст, де визначено фізичні явища, наведено ілюстративний матеріал, 5) у кінці подаються загальні відомості про робочий зошит, його призначення, структуру й правила користування; 6)висновок; 7) додаток, що містить довідковий матеріал.

Вважаємо, що навчально-методичний посібник буде корисним для студентів і викладачів педагогічних університетів, так як надасть їм допомогу в організації самостійної роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Про вищу освіту: Закон України від 17 січня 2002 р. № 2984 – ІІІ // Офіц. вісн. України. – 2002. - № 8. – С. 1-43.;235
2. Бегинин, О.Н. Університетський фізичний практикум – новий підхід [Текст] / О.Н.Бегинин,Б.С. Дмитрієв [та інших.] // Фізика у системі сучасної математичної освіти (>ФССО-03): Праці сьомий Міжнародної конференції:сб. ст., Санкт-Петербург, 14-18 жовтня 2003 р. / Ред. кіл. С.В.Бубликов [та інших.]. – СПб.:РГПУ їм. А.І. Герцена, 2003. –Т.1. –199с. – ISBN 5-8064-0712-8.
3. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. –К, 1999.–532 с.
4. Матвеєв О.М. Механіка і теорія відносності. –К., 1993.–288 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Густина деяких речовин у твердому стані

Речовина	р, кг/м^3	р, г/см^3	Речовина	р, кг/м^3	р, г/см^3
Осмій	22 500	22,5	Мармур	2700	2,7
Іридій	22 400	22,4	Граніт	2600	2,6
Платина	21500	21,5	Скло	2500	2,5
Золото	19 300	19,3	Порцеляна	2300	2,3
Свинець	11300	11,3	Бетон	2200	2,2
Срібло	10 500	10,5	Оргскло	1200	1,2
Мідь	8900	9,9	Капрон	1140	ІД
Латунь	8500	8,5	Поліетилен	940	0,9
Сталь, залізо	7800	7,8	Парафін	900	0,9
Олово	7300	7,3	Лід	900	0,9
Цинк	7100	7,1	Дуб сухий	800	0,8
Чавун	7000	7,0	Сосна суха	440	0,4
Алюміній	2700	2,7	Пробка	240	0,2

Додаток Б

Густина деяких речовин у рідкому стані

Речовина	р, кг/м^3	р, г/см^3	Речовина	р, кг/м^3	р, г/см^3
Ртуть	13600	13,60	Бензол	880	0,88
Рідке олово (за t = 409 °С)	6830	6,83	Рідке повітря (за t = -194 °С)	860	0,86
Сульфатна кислота	1800	1,80	Нафта	800	0,80
Мед	1420	1,42	Гас	800	0,80
Вода морська	1030	1,03	Спирт	800	0,80
Вода чиста	1000	1,00	Ацетон	790	0,79
Олія	900	0,90	Ефір	710	0,71
Машинне мастило	900	0,90	Бензин	710	0.71

Додаток В

Густина деяких речовин у газоподібному стані

Речовина	р,кг/м^3	р, г/см^3	Речовина	р,кг/м^3	р, г/см^3
Хлор	3,210	0,00321	Азот	1,250	0,00125
Вуглекислий газ	1,980	0,00198	Чадний газ	1,250	0,00125
Кисень	1,430	0,00143	Гелій	0,180	0,00018
Повітря	1,290	0,00129	Водень	0,090	0,00009

Додаток Г

Значення модуля Юнга (модуля пружності) для деяких матеріалів

Матеріал	Модуль Юнга E, ГПа
Алмаз	1220
Алюміній	70
Бронза	75-125
Вольфрам	350
Гума (при малих деформаціях)	0.01-0.1
Дюралюміній	74
Карбід вольфраму	450-650
Кобальт	210
Кремній	109
Латунь	95
Лід	3
Мідь	110
Нікель	210
Олово	35
Поліетилен високого тиску	0,8
Поліетилен низького тиску	0,2
Поліпропілен	1,5-2
Свинець	18
Срібло	80
Сірий чавун	110
Сталь	210
Скло	50-90
Фарфор	59
Цинк	120
Хром	300

Додаток Д

Деякі фізичні величини (в тому числі астрономічні)

Прискорення вільного падіння (нормальне)	9,80665 м/с^2
Середній радіус Землі	6371,110 · 10^3 м
Поверхня Землі	5,09950714 · 10^8 км^2
Об’єм Землі	1,082841 · 10^{12} км^3
Середня густина Землі	5,517 · 10^3 кг/м^3
Маса Землі	5,975 · 10^{24} кг
Швидкість обертання точки земної поверхні навколо осі на екваторі	464 м/с
Швидкість руху Землі навколо Сонця	30 км/с
Розміри земної орбіти (шляху навколо Сонця)	9,34 · 10^8 км
Радіус Сонця	6,95 · 10^8 м
Середня густина Сонця	1400 кг/м^3
Маса Сонця	1,97 · 10^{30} кг
Середня відстань від Землі до Сонця	1,49 · 10^{11} м
Радіус Місяця	1,7379 · 10^6 м
Середня відстань від Землі до Місяця	3,84 · 10^8 м
Період обертання Місяця навколо Землі	27 діб 7 год 43 хв
Кутова швидкість обертання Землі навколо своєї осі	7,292115 · 10^{-5} рад/с
Один світловий рік	9,4605 · 10^{15} м
Температура поверхні Сонця	5800 К
Сила світла Сонця	3,07 · 10^{27} кд

Додаток Ж

Фундаментальні фізичні сталі

Гравітаційна стала	$G = 6,6720 \cdot 10^{-11} H \cdot$ м^2/кг^2
Швидкість світла у вакуумі	$c = 2,99792458 \cdot 10^8$ м/с
Магнітна стала	$\mu_0 = 12,5663706144 \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Електрична стала	$\varepsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Стала Планка	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с
Маса спокою електрона	$m_e = 9,109534 \cdot 10^{-31}$ кг
Маса спокою протона	$m_p = 1,6726485 \cdot 10^{-27}$ кг
Маса спокою нейтрона	$m_n = 1,6749543 \cdot 10^{-27}$ кг
Відношення маси протона до маси електрона	$m_p / m_e = 1836,15152$
Елементарний заряд	$e = 1,6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл
Відношення заряду електрона до його маси	$e / m_e = 1,7588047 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Атомна одиниця маси	$1\,а.е.м. = 1,6605655 \cdot 10^{-27}$ кг
Стала Авогадро	$N_A = 6,022045 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Стала Фарадея	$F = 96,48456 \cdot 10^3$ Кл/моль
Молярна газова стала	$R = 8,31441$ Дж/(моль $\cdot$ К)
Молярний об’єм ідеального газу при нормальних умовах	$V_0 = 22,41383 \cdot 10^{-3}$ м^3/ммол
Стала Больцмана	$k = 1,380662 \cdot 10^{-23}$ Дж/К