МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад «ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ К. Д. УШИНСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації для самостійної роботи та виконання індивідуального навчального завдання з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика»

Частина І «Події та їхні ймовірності»

Одеса – 2021

Методичні рекомендації для самостійної роботи та виконання індивідуального навчального завдання з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика», частина І «Події та їхні ймовірності»

розглянуто на засідання кафедри вищої математики і статистики.

Протокол від 10 червня 2021 № 12

Розробник:

к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики і статистики М. Г. Волкова.

Рецензенти:

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології Одеського національного університету імені І. І. Мечникова Білозерова Марія Олександрівна;

кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» Г. Д. Урум.

Події та їхні ймовірності

План.

Вступ

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності в явищах та випробуваннях, результати яких не можуть бути заздалегідь передбачені.

Виникнення теорії ймовірностей як науки відносять до Середньовіччя, до романтичного часу королів та мушкетерів, прекрасних дам й благородних лицарів. Початковим поштовхом до розвитку теорії ймовірностей послужили задачі, що відносяться до азартних ігор таких, як орлянка, кості, карти, рулетка, коли в них почали застосовувати кількісні розрахунки та прогнозування шансів на успіх. В перекладі з французького «азарт» (le hazard) означає випадок. Такого роду задачі неодноразово ставились в середньовічній літературі, в тому числі, й художній, й розв'язувались іноді вірно, а іноді невірно. Потужним стимулом розвитку теорії ймовірностей являли собою запити страхової справи, яка зародилась ще в XIV столітті, а також, починаючи з XVII віку, демографії, або, як тоді говорили, політичної арифметики. Зародження теорії ймовірностей почалось з того, що придворнийий французького короля, шевальє (кавалер) де Мере (1607-1648), сам азартний гравець, звернувся до французького фізика, математика й філософа Блеза Паскаля (1607-1648) з питанням до задачі про очки. До нас дійшли два знаменитих питання де Мере до Паскаля: 1) скільки разів необхідно кинути дві гральні кістки, щоб випадків випадіння одразу двох шісток було більше половини від загального числа кидань; 2) як справедливо розділити поставленні на кін гроші, якщо гравці припинили гру передчасно? В 1654 г. Паскаль звернувся до математика П'єра Ферма (1601-1665) й листувався з ним з приводу цих задач. Вони удвох встановили деякі вихідні положення теорії ймовірностей, зокрема прийшли до поняттю математичного сподівання й теорем додавання та множення ймовірностей. Далі голландський вчений Х. Гюйгенс (1629-1695) у книзі «Про розрахунки при азартних іграх» (1657 г.) намагався дати власний розв'язок питань, що були порушені в цьому листуванні. Іншим поштовхом для розвитку теорії ймовірностей послужила страхова справа, а саме з кінця XVII століття на науковій основі стало здійснюватися страхування від нещасних випадків й стихійного лиха. У XVI-XVII століттях у всіх країнах Західної Європи набуло поширення страхування судів и страхування від пожежі. В XVIII столітті було створено багаточисельні страхові компанії та лотереї в Італії, Фландрії, Нідерландах. Потім

методи теорії ймовірностей почали широко застосовувати в демографії, наприклад, при веденні статистики народження й смерті. Важливу роль для розвитку математичної статистики зіграли роботи Э. Галлея з демографії. Відзначимо, що «за основною спеціальністю» цей вчений був астрономом, а його ім'ям названа відома комета. Почала зароджуватись нова наука, вимальовуватися її специфика й методологія: означення, теореми, методи. Становлення теорії ймовірностей пов'язано з ім'ям відомого швейцарського математика Якоба Бернуллі (1654-1705). В його трактаті «Мистецтво припущень» (1713), над яким він працював 20 років й який був виданий вже після смерті автора, вперше було введено й широко використовувалось класичне означення ймовірності, а також застосовувалась статистична концепція ймовірності. Наступний важливий етап у розвитку теорії ймовірностей пов'язаний з ім'ям Муавра (1667- 1754), Лапласа (1749-1827), Гаусса (1777-1855), Пуассона (1781-1840). Далі, у XIX столітті, велику роль зіграли представники Петербурзької математичної школи В.Я. Буняковський (1804-1889), П.Л. Чебышев (1821- 1894), А.А. Марков (1856-1922), А.А. Ляпунов (1857-1918). Великий внесок в наступний розвиток теорії ймовірностей й математичної статистики внесли радянські математики С.Н. Бернштейн, В.И. Романовський (1879-1954), А.Н. Колмогоров, А.Я. Хінчин (1894-1959), Ю.В. Леннік, Б.В. Гнеденко, Н.В. Смирнов та інші, а також вчені англо-американської школи Стьюдент (псевдонім В. Госсета), Р. Фішер, Э. Пірсон, Е. Нейман, А. Вальд та інші. Особливо слід відзначити неоцінений внесок академіка А.Н. Колмогорова в становленні теорії ймовірностей як математичної науки. Фундаментом сучасної будівлі теорії ймовірностей є аксіоматичний підхід, запропонований А.Н. Колмогоровим в книзі «Основні поняття теорії ймовірностей». В даний час аксіоматичний підхід є загальноприйнятим . Слід відзначити, що в інших розділах математики аксіоматичний підхід був прийнятий значно раніше, ніж в теорії ймовірностей. Теорія ймовірностей та математична статистика й в даний час розвиваються й застосовуються на практиці: при організації виробництва, аналізі економічних процесів, контролі якості продукції, маркетингових й соціологичних дослідженнях, страховій справі та інше.

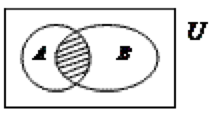
1. Елементи комбінаторики.

1.1. Основні поняття теорії множин. Операції над множинами**.**

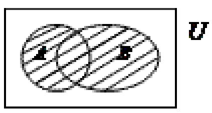
Розглянемо основні понятття та положення теорії множин, оскільки володіння цим матеріалом є необхідною умовою для подальшого викладення матеріалу.

Поняття множини – одне з основних, якщо не основне, поняття математики. Воно не має точного визначення, і його слід віднести до аксіоматичних понять. Такими аксіоматичними поняттями, наприклад, в елементарній геометрії є поняття точка, пряма, площина. Часто приймається формулювання інтуїтивного поняття множини Георга Кантора, основоположника цієї теорії: «Довільне зібрання певних предметів нашої інтуїції чи інтелекту, які можна відрізнити один від одного і які уявляються як єдине ціле, називається множиною. Предмети, які входять до складу множини, називаються її елементами».

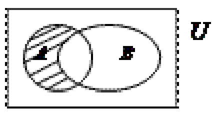
Розглянемо дві множини A та B і введемо кілька операції над ними. Для графічної ілюстрації будемо використовувати так звані діаграми Венна або кола Ейлера. Діаграма Венна являє собою схемне зображення множин у вигляді множин точок: універсум U зображується множиною точок деякого прямокутника, а його підмножини – у вигляді кіл або інших простих областей у цьому прямокутнику.



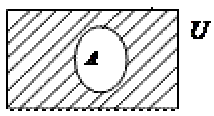
$A \cap B$



$A \cup B$



$A \setminus B$



$\bar{A}$

Означення. Об'єднання A і B ($A \cup B$) – множина, що складається з усіх елементів множин А, всіх елементів множини В і не містить ніяких інших елементів, тобто $A \cup B = \{x \mid x \in A$ або $x \in B\}$.

Наприклад, $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$.

Означення. Переріз (перетин) A і B ($A \cap B$) – множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать одночасно множині A та множині B, тобто $A \cap B = \{x \mid x \in A$ та $x \in B\}$.

Наприклад, $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$.

Означення. Різниця A і B або відносне доповнення B до A ($A–B$, $A\backslash B$) – множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині A та не належать множині B, тобто $A\backslash B = \{x \mid x \in A$ та $x \notin B\}$.

Наприклад, $\{1,2,3\}\backslash\{2,3,4\} = \{1\}$.

Означення. Різниця універсуму U і A ($\bar{A} = U – A = U \setminus A$) – множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які не належать множині A, тобто $\bar{A} = \{x \mid x \in U$ та $x \notin A\}$.

1.2. Правило суми та добутку.

Перше ніж сформулювати правило суми, розглянемо задачі, які підштовхнуть нас до цього правила.

Задача 1. На підносі лежать 5 яблук та 3 груші. Скількома способами можна вибрати фрукт з підносу?

Розв'язання. Яблуко можна вибрати п'ятьма способами, грушу – трьома способами. Отже, один з фруктів можна вибрати $5 + 3 = 8$ способами.

Задача 2. На полиці стоять 10 томів Пушкіна, 4 томи Лермонтова й 6 томів Гоголя. Скількома способами можна вибрати з полиці одну книгу.

Розв'язання. Очевидно, що $10 + 4 + 6 = 20$ способів.

Правило суми. Нехай об'єкт a можна вибрати m способами, а об'єкт b можна вибрати n способами, до того ж вибір одного об'єкту виключає одночасний вибір іншого об'єкту. Тоді вибір «або a , або b» можна здійснити $m + n$ способами.

Більш загальним чином, нехай об'єкт a_1 можна вибрати n_1способами, а об'єкт a_2 можна вибрати n_2 способами,…, об'єкт a_k можна вибрати n_kспособами, до того ж вибір одного об'єкту виключає одночасний вибір іншого об'єкту. Тоді вибір «або a_1 , або a_2, або a_k» можна здійснити $n_1 + n_2 +…+ n_k$ способами.

Правило суми ілюструє той очевидний факт, що число елементів в об'єднанні множин, що попарно не перетинаються, дорівнює сумі числа елементів в кожній множині. Так в першій задачі множина яблук (Я) складається з п'яти елементів, а множина груш (Г) складається з 3 елементів; ці множини не перетинаються , так що множина фруктів (Я∪Г) складається з 5+3=8 елементів . Аналогічно у другій задачі множина П∪Л∪Г (позначення очевидні) складається з $10 + 4 + 6 = 20$ елементів. Відповідно, маємо друге (еквівалентне) формулювання правила суми.

Правило суми в термінах множин. Нехай множина A складається з m елементів, а множина B складається з n елементів, до того ж множини A та B не перетинаються. Тоді множина $A \cup B$ складається з $m+n$ елементів.

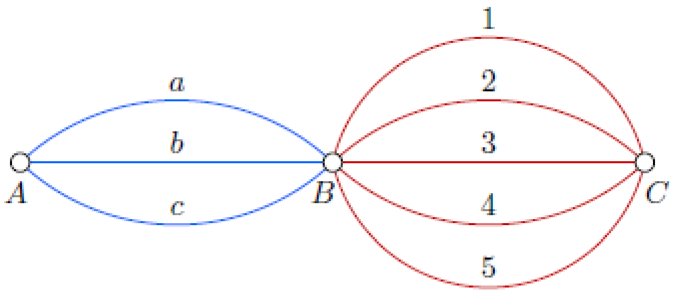
Більш загальним чином, нехай множина A_1 складається з n_1елементів, множина A_2 складається з n_2 елементів,…, множина A_k складається з n_kелементів, та множини A_1 , A_2, …,

A_k попарно не перетинаються. Тоді множина $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ складається з $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ елементів.

При розв'язання комбінаторних задач часто потрібно помножити число способів вибору одного об'єкту на число способів вибору іншого об'єкту. Розглянемо деякі приклади.

Задача 3. Маємо три міста: *A*, *B* та *C*. З міста А ведуть три дороги, з *B* в *C* – пять доріг. Скільки різних шляхів ведуть з *A* в *C*? Прямого шляху між *A* та *C* немає.

Розв'язання. Позначимо дороги буквами й цифрами. А саме, дороги з *A* до *B* назвемо a, b, с; дороги з *B* до *C* назвемо 1, 2, 3, 4, 5.



Тоді будь-який маршрут з *A* в *C* отримує унікальне ім'я у вигляді пари з букви та цифри. Наприклад, маршрут $b4$ означає, що з *A* до *B* ми пішли дорогою b, а з *B* до *C* – по дорозі 4. Напишемо всі такі пари у вигляді таблиці:

$$\begin{array}{ccccc} a1 & a2 & a3 & a4 & a5 \\ b1 & b2 & b3 & b4 & b5 \\ c1 & c2 & c3 & c4 & c5 \end{array}$$

Всього отримали $3 \cdot 5 = 15$ маршрутів. Як ми бачимо, число маршрутів дорівнює добутку кількості доріг з *A* до *B* на кількість доріг з *B* до *C*.

Задача 4. В магазині є 7 видів піджаків, 5 видів брюк та 4 види краваток. Скількома способами можна придбати комплект з піджака, брюк та краватки?

Розв'язання. Припустимо, що піджак вже відібраний (це можна зробити 7 способами). До піджака обираємо брюки 5 способами. Разом пару (піджак, брюки) можна обрати $7 \cdot 5 = 35$ способами. До цієї пари можна придбати краватку 4 способами. Отже, для придбання піджака, брюк та краватки маємо $7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$ способів.

На прикладі цих двох задач можна зрозуміти суть другого правила комбінаторики – правила добутку. Залишається навести його формулювання.

Правило добутку. Нехай об'єкт a можна вибрати m способами, після чого об'єкт b можна вибрати n способами. Тоді вибір $(a\ ,b)$ можна здійснити $m \cdot n$ способами; інакше кажучи, існує $m \cdot n$ різних впорядкованих пар $(a\ ,b)$.

Більш загальним чином, нехай об'єкт a_1 можна вибрати n_1способами, після чого об'єкт a_2 можна вибрати n_2 способами,…, після чого об'єкт a_k можна вибрати n_kспособами.

Тоді вибір ланцюга $(a_1\ , a_2, \ldots, a_k)$ можна здійснити $n_1\ \cdot\ n_2\ \cdot \ldots \cdot n_k$ способами; інакше кажучи, існує $n_1\ \cdot\ n_2\ \cdot \ldots \cdot n_k$ ланцюгів $(a_1\ , a_2, \ldots, a_k)$.

1.3. Розміщення, перестановки, комбінації.

А) Розміщення.

Розглянемо задачу.

Задача 5. У футбольній команді 11 чоловік. Скількома способами можна обрати: а) капітана та його асистента; б) капітана, першого асистента й другого асистента.

Розв'язання. а) Капітаном можна обрати будь-якого з 11 футболістів. Асистентом – будь-якого з 10 футболістів, що залишились. Тому капітана та асистента можна обрати $11 \cdot 10 = 110$ способами.

б) Капітана та першого асистента ми вже обрали $11 \cdot 10$ способами. Для вибору другого асистента залишається 9 способів. Тому капітана, першого асистента можна обрати $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ способами.

В цій задачі ми фактично знайшли число впорядкованих пар та впорядкованих трійок, які можна обрати з 11-елементної множини. Тепер розглянемо це питання в загальному вигляді.

Означення. Нехай є множина, що містить *n* елементів. Довільний впорядкований набір, складений з *k* елементів даної множини, називається **розміщенням з *n* елементів по *k* елементів** (або просто **розміщенням з *n* по *k***).

Число розміщень з *n* елементів по *k* елементів позначається через A_n^k (читається «а із ен по ка»). Це кількість впорядкованих наборів з *k* елементів (або число ланцюгів довжини *k*), що вибрані з *n*-елементної множини. Знайдемо, чому дорівнює це число.

Міркуємо наступним чином. Для вибору першого елемента ланцюга маємо *n* способів, для вибору другого елемента маємо $n-1$ способів, для вибору третього елемента маємо $n-2$ способи й так далі. Для вибору останнього, *k*-го елемента ланцюга маємо $n-k+1$ способів. Отже,

$$A_n^k = \ n \cdot (\ n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1). \qquad (1)$$

Дану формулу можна записати у більш компактному вигляді, якщо праву частину помножити та поділити на $(n-k)!$

$$A_n^k = \frac{n \cdot (\ n-1) \cdot (n-2)\ \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!},$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

(нагадаємо, що $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, й за означенням $0! = 1$).

Зауваження. Число розміщень з *n* елементів по *k* елементів $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ можна обчислити за допомогою статистичної функції ПЕРЕСТ(*n*; *k*).

Б) Перестановки.

Перестановка є звичайний частковий випадок розміщення, проте настільки важливий, що заслуговує на окремий розгляд.

Задача 6. Скільки п'ятизначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 при умові, що цифри не повинні повторюватись.

Розв'язання. Для вибору першої цифри маємо п'ять способів, для вибору другої - чотири, для вибору третьої – три, для вибору другої – два, й для вибору останньої цифри залишається всього один спосіб. Всього чисел отримуємо $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.

Означення.

Нехай маємо множину, що містить n елементів. Довільний ланцюг довжини n , що складається з з усіх елементів даної множини, називається перестановкою цієї множини, або **перестановкою n елементів**.

Інакше кажучи, перестановка n елементів – це розміщення з n елементів по n. Число перестановок n - елементної множини позначається через P_n; ми знайшли це число в останній задачі (про різнокольорові шари):

$$P_n = n!\,. \qquad (3)$$

Дана формула легко може бути отримана з формули (1) при $k = n$:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!\,.$$

Зауваження. Число перестановок з n елементів $P_n = n!$ можна обчислити за допомогою математичної функції ФАКТР(n), або застосовуючи статистичну функцію ПЕРЕСТ(n; n).

В) Сполуки.

Перейдемо до розгляду сполук. Повернемося до нашої футбольної команди, в якій ми обирали капітан та асистента.

Задача 7. У футбольній команді 11 гравців. Скількома способами можна обрати з них двох гравців для проходження допінг-контролю?

Розв'язання. на перший погляд може здатися, що ситуація аналогічна вибору капітана та асистента: першого обираємо 11 способами, другого – 10 способами, так що всього маємо $11 \cdot 10$ способів. Однак в даному випадку це не так.

Насправді, пара «капітан та асистент» є впорядкованою: обрати Петра капітаном, а Василя асистентом – це не теж саме, що обрати обрати Василя капітаном, а Петра асистентом. З іншого боку, пара гравців, відправлених на допінг-контроль, є невпорядкованою: відправити Петра та Василя на тест – це рівно теж саме, що й відправити Василя та Петра на тест. Відповідно, в даній задачі нас цікавить саме кількість невпорядкованих пар футболістів, що обираються з 11 гравців.

Давайте уявимо собі, що невпорядкована пара {Петро, Василь} ніби склеюється з двох впорядкованих пар {Петро, Василь} та {Василь, Петро}. Інакше кажучи, будь-які дві впорядковані пари, що відрізняються лише порядком слідування об'єктів, дають одну й ту ж саму невпорядковану пару. Отже, кількість невпорядкованих пар буде в два рази менше числа впорядкованих пар й буде дорівнювати

$$\frac{11 \cdot 10}{2} = 55.$$

Таким чином, двох футболістів можна обрати для допінг- контролю 55 способами.

Задача 8. Скількома способами можна обрати трьох футболістів з 11 для проходження допінг-контролю?

Розв’язання. Добуток $11 \cdot 10 \cdot 9$ (кількість способів вибору капітана, першого асистента й другого асистента) є кількість впорядкованих трійок футболістів. В даному випадку, як й у попередній задачі, порядок не є важливим, тому нам потрібно знайти кількість невпорядкованих трійок футболістів, що обираються з 11 гравців.

В одну невпорядковану пару склеюються ті й тільки ті впорядковані трійки, які відрізняються лише порядком слідування елементів. Кількість таких трійок дорівнює кількості перестановок трьох елементів, тобто $3! = 6$. Наприклад, в одну невпорядковану трійку

$$\{\text{Петро, Василь, Микола}\}$$

склеюються рівно шість впорядкованих трійок

$$\{\text{Василь, Микола, Петро}\},\ \ \{\text{Василь, Петро, Микола}\},\ \ \{\text{Микола, Василь, Петро}\},$$

$$\{\text{Микола, Петро, Василь}\},\ \ \{\text{Петро, Василь, Микола}\},\ \ \{\text{Петро, Микола, Василь}\}.$$

Отже, кількість невпорядкованих трійок в 3! Разі менша кількості впорядкованих трійок. Отже, маємо

$$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!} = 165$$

способів вибрати трьох гравців для допінг-контролю.

В останніх двох задачах про футболістів, що обираються для допінг контролю, ми знайшли кількість невпорядкованих пар та невпорядкованих трійок, що можна обрати з 11-елементної множини. Тепер можна розглянути дане питання в загальному вигляді.

Означення. Нехай маємо множину з n елементів. Довільний невпорядкований набір, що складається з k різних елементів даної множини, називається **комбінацією з n елементів по k елементів** (або просто **сполукою з n по k**).

Інакше кажучи, комбінація з n елементів по k елементів – це просто k-елементна підмножина n- елементної множини.

Кількість комбінацій з n елементів по k елементів позначається через C_n^k (читається «це з ен по ка»). Це кількість невпорядкованих наборів з k елементів, обраних з n- елементної множини (тобто кількість k-елементних підмножин n- елементної множини). Знайдемо чому дорівнює це число.

Кількість впорядкованих наборів з k елементів (тобто кількість ланцюгів довжини k) дорівнює кількості розміщень A_n^k . Ті й тільки ті ланцюги, що відрізняються лише порядком слідування елементів, склеюються в один невпорядкований набір. Кількість таких ланцюгів дорівнює числу перестановок k елементів, тобто $k!$. Отже, шукана кількість невпорядкованих наборів з k елементів буде в $k!$ разів менша кількості ланцюгів довжини k:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Згідно з формулою (1) маємо:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (\,n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,.$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad (4)$$

Тепер, коли ми вже знаємо, що таке кількість комбінацій , ми можемо одразу сказати, що двох футболістів з одинадцяти для допінг-теста можна обрати $C_{11}^2 = \frac{11!}{2!9!} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$ способами; аналогічно трьох футболістів з одинадцяти можна обрати $C_{11}^3 = \frac{11!}{3!8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165$ способами.

Зауваження. Кількість усіх можливих комбінацій, які можна скласти з n- елементної множини, дорівнює 2^n. Цей факт можна довести, наприклад, з формули біном Ньютона, якщо покласти $a = b = 1$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n,$$

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^k + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

Таким чином, кількість всіх можливих підмножин n- елементної множини дорівнює 2^n.

Зауваження. Число комбінацій з n елементів по k елементів $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ можна обчислити за допомогою функції ЧИСЛКОМБ(n, k), яка відноситься до математичних функцій.

Приклади розв'язання задач.

В наступних задачах потрібно не тільки знаходити кількість комбінацій, але й одночасно використовувати правила суми та добутку.

Задача 9. Скількома способами можна з семи людей обрати комісію з трьох людей на чолі з головою?

Розв'язання. Голову можна обрати 7 способами. Інших двох ми обираємо з шести людин $C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ способами. Тому кількість способів вибору комісії дорівнює $7 \cdot 15 = 105$.

Задача 10. Скількома способами можна зібрати бригаду з 3 малярів та 4 штукатурів, якщо є 6 малярів та 8 штукатурів.

Розв'язання. Малярів можна обрати C_6^3 способами. Штукатурів можна обрати C_8^4 способами. Отже, для формування бригади маємо $C_6^3 \cdot C_8^4 = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{8!}{4!4!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1400$ способів.

Задача 11. На деякій прямій довільним чином відзначено 10 точок, а на паралельній їй прямій – 12 точок. Скільки існує трикутників й скільки чотирикутників з вершинами в цих точках?

Розв'язання. Будемо для стислості називати 10 точок на першій прямій червоними, а 12 точок на другій прямій – синіми.

У трикутника може бути: 1) одна червона вершина та дві синіх; 2) одна синя вершина та дві червоні. В першому випадку ми обираємо червону вершину 10 способами , а дві сині - C_{12}^2=$\frac{12!}{2!10!}$=$\frac{11\cdot12}{2}=66$ способами. В другому випадку ми обираємо синю вершину 12 способами, а дві червоні - C_{10}^2=$\frac{10!}{2!8!}$=$\frac{9\cdot10}{2}=45$ способами. Всього трикутників отримуємо $10\cdot66+12\cdot45=1200$.

У чотирикутниках лише дві можливості: дві червоні та дві сині вершини. Кількість чотирикутників дорівнюватиме $C_{10}^2\cdot C_{12}^2=45\cdot66=2970$.

Зауваження. Часто приходиться розглядати $n!$ При великих значеннях n. В таких випадках корисною буває формула Стірлінга, згідно з якою

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}}=1.$$

Це означає, що за наближене значення $n!$ можна розглядати $\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}$. При цьому отримується відносна похибка δ_n така, що $\delta_n\to0$ $(n\to\infty)$. Доводиться навіть, що

$$1-e^{-\frac{1}{12n+1}}<\delta_n<e^{-\frac{1}{12n}}.$$

Формула $n!\approx\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}$ є ефективною навіть при малих n, про що свідчить таблиця, де $b_n=\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}$:

n	$n!$	b_n	$n!-b_n$	δ_n
2	2	1,9	0,1	0,05
4	24	23,5	0,5	0,02
6	720	710,1	9,9	0, 014
8	40320	39902,4	417,6	0, 01

З цієї таблиці видно, що вже при $n=6$ відносна похибка при наближенні $6!\approx b_6$ складає 1,5%. З таблиці також видно, що абсолютна похибка спадає зі збільшенням n, та різниця $n!-b_n$ є нескінченно малою послідовністю. Доведення формули Стірлінга можна знайти, наприклад, в книзі Феллєра «Введення в теорію ймовірностей», т.1, гл II §9.

Висновки

Формули комбінаторики можна доводити як аналітично так й на теоретико-множинній мові. Такий підхід є дуже важливим при вивчення комбінаторики, оскільки дозволяє уникнути формального використання формул, й формує математичну грамотність. Вивчення правил комбінаторики є важливим етапом підготовки для вивчення теорії ймовірностей. Тому цьому розділу слід приділити значну увагу. Також важливим є вміння використовувати додаток Excel для спрощення обчислень, що й було зроблено в даному розділі.

2. Події та їхні ймовірності.

2.1. Основні поняття та предмет вивчення теорії ймовірностей. Операції над подіями.

Випробуванням називається експеримент, який можна (хоча б принципово) проводити в однакових умовах будь-яку кількість разів. Найпростіший результат випробування називається елементарною подією або результатом й позначатимемо через ω . При випробуванні неминуче наступає який-небудь результат й до того ж тільки один. Результат – це первинне (яке формально не визначається) поняття.

Означення. Множина усіх можливих результатів випробування називається простором елементарних подій та позначається Ω.

Приклад 1. На гранях шестигранного грального кубика нанесено цифри від 1 до 6. Експеримент полягає в підкиданні кубика і фіксації грані, якою кубик впаде догори. Множина Ω ={"1", "2", "3", "4", "5", "6"} є множиною можливих наслідків експерименту, тобто простором елементарних подій. Тут $\omega_i = i, i = \overline{1,6}$. Поява на верхній грані кубика однієї з цифр від 1 до 6 означає, що відбувається відповідна елементарна подія.

Приклад 2. Підкидається кубик, як і в прикладі 1, але фіксується лише парна чи непарна цифра на грані, якою кубик впаде догори. Тоді множина Ω ={«парна», «непарна»} є множиною двох можливих наслідків експерименту, тобто простором із двох елементарних подій. Тут $\omega_1 =$ «парна», $\omega_2 =$ «непарна».

У розглянутих прикладах простір елементарних подій був скінченним. Проте часто трапляються випадки, коли множина Ω нескінченна.

Приклад 3. В круглу мішень радіуса 1, яку можна вважати множиною точок (x, y) таких, що $x^2 + y^2 \leq 1$, виконується один постріл. При цьому попадання кулі за межі мішені неможливе. Множина елементарних подій $\Omega = \{(x, y),\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ характеризує можливі результати експерименту: точки $\omega = (x, y)$, в які може влучити куля, визначають відповідні елементарні події в даному експерименті. Тут вже результатів випробування нескінченно багато.

Означення. Випадковою подією (подією) називається будь-яка множина результатів, тобто підмножина простору Ω.

Результати, з яких складається подія A, називаються сприятливими для A ($\omega \in A$), або елементарними подіями, що сприяють події A. Подія A наступає при випробуванні тоді й тільки тоді, коли наступає результат, сприятливий для неї.

Означення. Множина Ω називається вірогідною подією. Порожня множина результатів ($\emptyset$) називається неможливою подією.

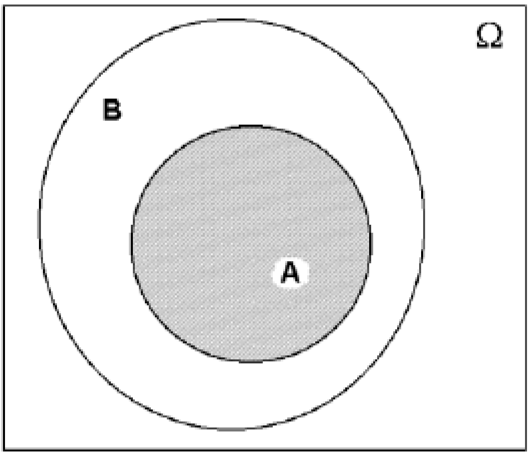
Інакше кажучи, вірогідна подія – така подія, яка при випробуванні обов'язково відбудеться (їй сприяють всі результати випробування), неможлива подія – така подія, яка при випробування заздалегідь не відбудеться (вона не має сприятливих результатів).

Означення. Дві випадкові події називаються несумісними, якщо в них немає спільних сприятливих результатів, тобто поява однієї події виключає появу іншої події при тому самому випробуванні.

Розглянемо операції, які можна виконувати над подіями.

Означення. Нехай підмножини A і B множини Ω є подіями. Говорять, що *подія A спричинює подію B* або *подія B спричинюється подією A*, коли з відбуванням події A відбувається і подія B . В такому разі кожен елемент множини A є в той же час і елементом множини B, тобто $A\subset B$.

На рисунку прямокутником зображено множину елементарних подій Ω , один з кругів – подія A, інший – подія B, до того ж $A\subset B$.



A ⊂ B

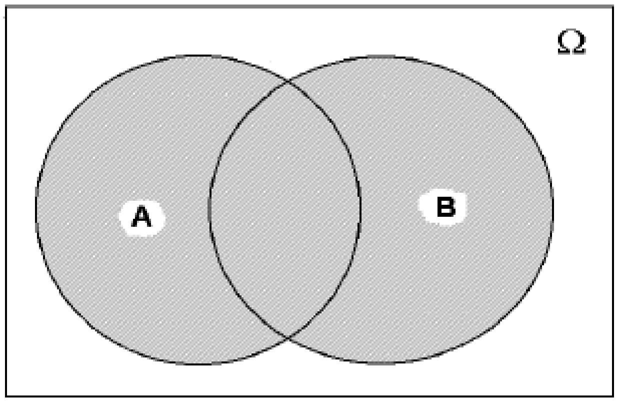
Означення. Події A і B називають рівними, або рівносильними, або еквівалентними, якщо $A\subset B$ і $B\subset A$, тобто кожна з них спричинює іншу і спричинюється іншою. Отже, події A і B рівні тоді і тільки тоді, коли вони одночасно або відбуваються, або не відбуваються. Рівність подій A і B записують у вигляді $A= B$.

Означення. Нехай $A\subset \Omega$ і $B\subset \Omega$ – деякі події. Сумою подій A і B називають таку подію C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій A або B. Суму C події A і B позначають $C =A \cup B$ або $C = A+ B$.

Інакше кажучи, для події $A+B$ сприяють ті й тільки ті результати випробування, які сприяють хоча б одній з подій A або B.

Аналогічно визначається сума довільної кількості подій $A_1, A_2, \dots, A_n$– це подія, яка відбувається тоді й тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій $A_k, k=\overline{1,n}$. Зокрема, $\bigcup_1^n A_k$ сума скінченної кількості n подій A_k, $\bigcup_1^\infty A_k$ – сума зчисленної кількості подій A_k (тут номер події набуває значень з множини **N** натуральних чисел). Суму скінченної або зчисленної кількості подій позначають $\bigcup_k A_k$, а також $\sum_k A_k$.

Геометричне тлумачення суми подій A і B подане на рисунку, де прямокутником зображено множину елементарних подій Ω , один з кругів – подія A, інший – подія B, заштрихована множина – подія $A+B= A\cup B$.



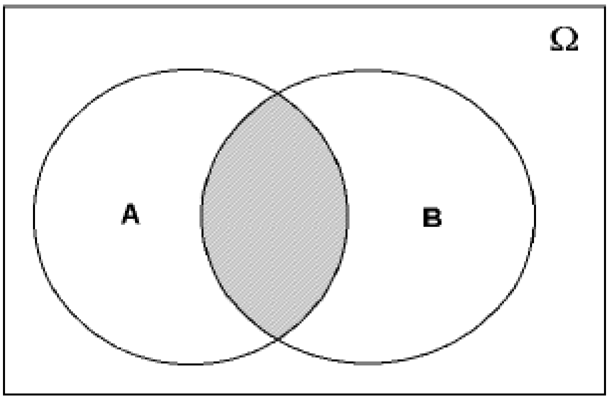
A ⋃ B

Означення. Добутком подій A і B називають таку подію C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються обидві події A і B. Позначають $C = A \cap B$ або $C = A \cdot B$.

Інакше кажучи, для події $A \cdot B$ сприяють ті й тільки ті результати випробування, які сприяють як події A так й події B.

Аналогічно визначається добуток довільної кількості подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, – це подія, яка відбувається тоді й тільки тоді, коли відбуваються всі події $A_k, k = \overline{1, n}$. Зокрема $\bigcap_1^n A_k$ – добуток скінченної кількості n подій, $\bigcap_1^\infty A_k$ – добуток зчисленної кількості подій. Добуток скінченної або зчисленної кількості подій позначають $\bigcap_k A_k$, а також $\prod_k A_k$.

Геометричне тлумачення добутку подій A і B подане на рисунку, де заштрихована множина точок – подія $A \cap B = A \cdot B$.



A ⋂ B

Приклад 4. Нехай Ω ={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”} – множина елементарних подій, що відповідає підкиданню шестигранного кубика один раз, A={“3”, “6”} – подія, що полягає у випаданні на верхній грані числа, кратного 3, а B={“2”, “4”, “6”} – подія, що полягає у випаданні парного числа. Тоді A+B={“2”, “3”, “4”, “6”} – подія, яка полягає в тому, що на верхній грані кубика випаде або число, кратне 2 (відбувається подія B), або число, кратне 3 (відбувається подія A). Подія $A \cdot B$ ={“6”} – подія, яка полягає в тому, що на верхній грані кубика випаде число, кратне 3 (відбувається подія A) і парне (відбувається подія B).

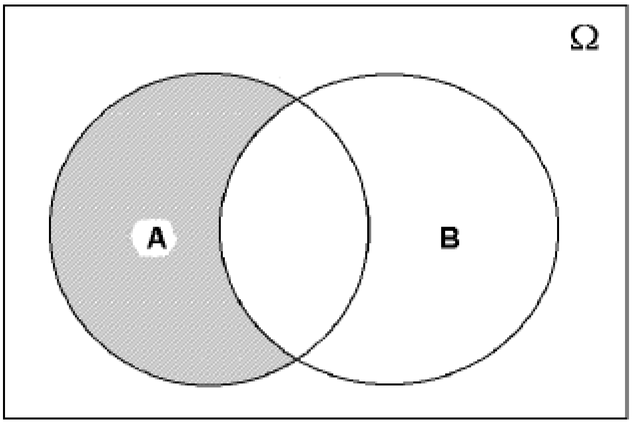
Тепер за допомогою операції добутку можна дати ще одне означення несумісних подій, еквіваленте попередньому.

Означення. Події і називають несумісними, якщо $A \cdot B = \emptyset$, тобто якщо вони не можуть відбутися обидві в одному і тому ж випробуванні.

Приклад 5. Якщо для Ω із попереднього прикладу C={”1”, “3”, “5”}, а D={”2”, “4”, “6”}, то C і D несумісні події, оскільки не існує елементарної події, яка належить як до множини C, так і до множини D.

Означення. Різницею подій A і B (A мінус B) називають таку подію, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія A і не відбувається подія B. Позначають $C = A\backslash B$ або $C = A - B$.

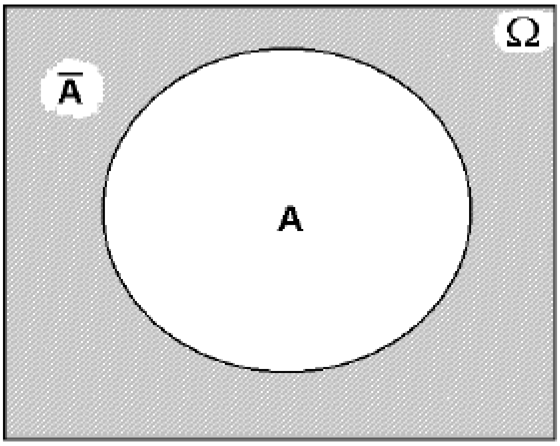
Геометричне тлумачення різниці подій $A\backslash B$ подано на рисунку, де заштрихована множина точок – подія $A\backslash B = A - B$.



A \ B

Означення. Подією, протилежною до події A, називають різницю $\Omega\backslash B$, яку позначають $\bar{A}$.

Геометричне тлумачення протилежної події $\bar{A}$ подано на рисунку, де заштрихована множина точок – подія $\bar{A}$, протилежна до події A.



$\bar{A}$

Приклад 6. Якщо A={“3”,”6”} і B={“2”,”4”,”6”} (див. приклад 4), то

- подія $A\backslash B$ ={“3”} – подія, що полягає у випаданні непарного числа, кратного 3,
- подія $B\backslash A$ ={“2”,”4”} полягає у випаданні парного числа, не кратного 3,
- подія $\Omega\backslash A$ ={“1”,”2”,”4”,”5”} – полягає у випаданні числа, не кратного 3,
- подія $\Omega\backslash B$ {“1”,”3”,”5”} – подія, що полягає у випаданні непарного числа.

Зауваження. Подія $\overline{\Omega} = \emptyset$, протилежна до вірогідної, є неможливою. Неможливій події відповідає порожня множина можливих наслідків випробування. Зрозуміло, що $\overline{\emptyset} = \Omega$.

Властивості операцій над подіями.

1. $A + B = B + A$.
2. $A \cdot B = B \cdot A$.
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
4. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

5. $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$.
6. $(A\cdot B) + C = (A+C)\cdot(B+C)$.
7. $\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A_k}$, $\overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \overline{A_k}$ - закони де Моргана.
8. $A \cup \emptyset = A,\ A \cap \emptyset = \emptyset$.
9. $A \cap \Omega = A,\ A \cup \Omega = \Omega$.

2.2. Частота випадкової події. Статистичне означення ймовірності. Класичне означення ймовірності. Геометричні ймовірності.

А) **Частота випадкової події. Статистичне означення ймовірності.**

Нехай проводиться серія випробувань, в кожному з яких можуть відбутися або не відбутися певна подія A. Позначимо через n число усіх проведених випробувань в цій серії, а через $n\ (A)$ – число тих випробувань, при яких відбулася подія A.

Означення. Відношення

$$r(A) = \frac{n\ (A)}{n} \qquad (5)$$

числа випробувань, при яких відбулася подія A, до числа усіх випробувань в проведеній серії називається відносною частотою події A.

Відносна частота події – величина експеріментальна.

Вона підраховується лише тільки після проведеної серії випробувань. Так, наприклад, якщо робочий виробляє 100 деталей, з яких 3 виявилися бракованими, то відносна частота бракованої деталі у виробленій партії дорівнює $\frac{3}{100} = 0{,}03$. В іншій партії, виробленої тим самим робочим на тому ж самому верстаті, відносна частота бракованої деталі буде, взагалі кажучи, іншою. Однак, помічено, що в різних партіях з великою кількістю деталей, вироблених одним й тим самим робочим на одному й тому самому верстаті при налагодженій технології виробництва та нормальній роботі верстата й робочого відносна частота браковки деталі буде приблизно одна й та ж сама.

Взагалі у багатьох випадках відносна частота події має властивість стійкості. Вона полягає в тому, що при достатньо великій кількості випробувань n, проведених в однакових умовах, відносна частота $r(A)$ події A, як правило, мало відрізняється від певного числа $P(A)$. Число $P(A)$, що характеризує подію A в розглянутих умовах випробування й не залежить від проведеної серії випробувань, називається ймовірністю події A. Таке введення поняття ймовірності називається статистичним. Властивість стійкості відносної частоти є важливішою статистичною закономірністю, яка широко використовується в науці й техніці. Воно дозволяє передбачити надійність роботи автоматичного пристрою при його проектуванні, розробити правила стрільби, кодувати (шифрувати) й розкодувати тексти та багато іншого. Ще з давнини, заздалегідь до зародження теорії ймовірностей, було відомо, що частота народження хлопчика у різних країнах та містах у всі часи була приблизно ода й та ж сама, мало відрізняється від 0,51.

У властивості стійкості відносної частоти переконалися, проводячи спеціальні серії випробувань. В наступній таблиці наведені данні, отримані відомими спеціалістами з математичної статистики й теорії ймовірностей Бюффоном та Пірсоном при підкиданні правильної монети навмання. В ній подія A – випадіння герба.

Експериментатор	n	$n\ (A)$	$r(A)$
Бюффон	4040	2048	0,5080
Пірсон	12000	6019	0,5016
Пірсон	24000	12012	0,5005

Як бачимо, в трьох розглянутих серіях випробувань $r(A) \approx 0{,}5$. Число $P(A) \ \approx 0{,}5$ можна розглядати як ймовірність випадіння герба при підкиданні правильної монета навмання.

Враховуючи властивість стійкості відносної частоти, німецький математик й механік, що емігрував в роки фашизму у США, Р. Мізес запропонував визначити ймовірність події як границю

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} r_n(A). \qquad (6)$$

Цим статистичним означенням ймовірності й досі частіше за всього користуються у фізиці й техніці. Однак з філософської та математичної точок зору воно наштовхується на ряд труднощів: для яких послідовностей випробувань така границя існує? Нескінченну послідовність випробувань практично неможливо реалізувати й т.і. Спроба побудови теорії ймовірностей на основі означення Мізес продовжується й досі. Певну роботу в цьому напрямку продовжував разом зі своїми учнями видатний радянський математики, академік А. М. Колмогоров, з ім'ям якого пов'язано розвиток сучасної теорії ймовірностей. Однак шляхом, запропонованим Мізесом, формальна побудова теорії ймовірностей ще далека до досконалої. Зараз в математиці прийнято аксіоматична побудова теорії ймовірностей, запропонована А. М. Колмогоровим, де поняття ймовірності визначається системою аксіом. Перш ніж перейти до викладення такої теорії попередньо розглянемо ще одне означення ймовірності, яким користуються з самого початку розвитку теорії ймовірностей, - класичне. Дослідження властивостей ймовірностей, обчислених за класичним та статистичним означеннями, дозволили потім сформулювати основні аксіоми теорії ймовірностей.

Б) **Класичне означення ймовірності.**

Розглянемо загальну схему, до якої, зокрема, зводиться розв'язок задач, пов'язаних з азартними іграми. Нехай при випробування можливі N результатів,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$$

й всі ці результати мають рівні шанси для відбування, рівноможливі, знаходяться в однакових умовах при випробуванні. Тоді, очевидно, при великій кількості випробувань відносні частоти всіх елементарних подій будуть приблизно рівними, тобто статистичні ймовірності цих результатів повинні бути рівними по $\frac{1}{N}$. Якщо для події A маємо $N(A)$ сприятливих результатів, тобто

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_{N(A)}}\},$$

То відносна частота $r_n(A)$ буде сумою відносних частот сприятливих результатів та великій кількості випробувань вона буде, як правило, мало відрізнятися від числа $\frac{N(A)}{N}$. Це число й приймається у якості ймовірності події.

Означення. Ймовірність події A називається відношення

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} \qquad (7)$$

числа сприятливих результатів для події A до числа всіх результатів. До того ж припускається, що всі результати є рівноможливими.

Таке означення ймовірності є класичним, оскільки ним користувалися з самого початку зародження теорії ймовірності. Його часто застосовують й в наш час. Однак є практично важливі задачі, в яких неможливо визначити скінченну кількість рівноможливих результатів так, щоб результати випробування, які нас цікавлять, представлялися у вигляді множин таких результатів. Розглянемо декілька прикладів обчислення ймовірності за класичним означенням.

Приклад 1. Яка ймовірність випадіння герба при підкиданні правильної монети навмання?

Розв'язання. тут маємо $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $A = \{\omega_1\}$, де ω_1- випадіння герба, ω_2 – випадіння цифри. Обидва результати рівноможливі, оскільки монета є правильною й кидається навмання. Маємо $N = 2$, $N(A) = 1$, отже $P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Відзначимо, що такою ж є статистична ймовірність випадіння герба.

Зауваження. Спостереження показують, що взагалі кажучи, ймовірність, що обчислюється за класичним означенням, співпадає зі статистичною ймовірністю розглянутої події. Це дозволяє прогнозувати відносну частоту при великій кількості випробувань: як правило, повинно бути $r_n(A) \approx P(A)$, а $P(A)$ в деяких випадках ми вже вміємо обчислювати, користуючись класичним означенням ймовірності.

Приклад 2. Яка ймовірність випадіння двох гербів при підкиданні двох правильних монет навмання?

Розв'язання. Можуть з'явитися декілька розв'язків даної задачі, що дають різні відповіді. Справа в тому, що простір елементарних подій за випробуванням визначається неоднозначно. При розвязання задачі, користуючись класичним означенням ймовірності, його слід обрати так, щоб усі результати були рівноможливими. Але при цьому виборі ми змушені спиратися на інтуїцію, й результати, які ми вважаємо рівноможливими, можуть не бути такими. Правильність нашого вибору може бути перевірена практикою: при великій кількості випробувань рівноможливі результати повинні мати, як правило, приблизно однакову відносну частоту появи, тобто однаково часто відбуватися. Зазвичай в розглянутій задачі пропонується наступне розв'язання.

І розв'язання: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $A = \{\omega_1\}$, де ω_1- випадіння двох гербів, ω_2 – випадіння одного герба, ω_3 – випадіння двох цифр при підкиданні монети. Тут $N = 3$, $N(A) = 1$, отже $P(A) = \frac{1}{3}$.

II розв'язання: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $A = \{\omega_1\}$, де ω_1- випадіння двох гербів {ГГ},, ω_2 – випадіння одного герба на першій монеті й цифри на іншій {ГЦ}, ω_3 – випадіння цифри на першій монеті й герба на другій {ЦГ}, ω_4 – випадіння двох цифр на обох монетах {ЦЦ}. Як ми бачимо при цьому розв'язанні пропонується слідкувати не лише за тим, скільки випало гербів, але й який результат випадіння на кожній монеті. При цьому $N = 4$, $N(A) = 1$, отже $P(A) = \frac{1}{4}$.

З логічної точки зору обидва розв'язки є вірними. Й лише практика показує, що у якості правильного розв'язку ми повинні взяти другий розв'язок.

Складність розв'язку задачі на обчислення ймовірності за класичним означенням полягає в тому, що в умові задачі множина рівноможливих результатів не є заданою й вибір цієї множини повинен здійснювати той, хто розв'язує задачу. Це задача з неповною умовою й припускає різні методи розв'язання, яке одне відповідає реальності.

Приклад 3 (Задача Де Мере). Маємо гру, в якій навмання кидаються три гральні кубики. Якщо сума отриманих очок більша за 10, то виграє один гравець, якщо вона не більша за 10 – виграє інший. Де Мере, спостерігаючи за цією грою стежив, зокрема за двома подіями: подія A – «сума очок, що випала на трьох кубиках, дорівнює 11», подія B – «сума очок дорівнює 12». Де мере помітив, що при великій кількості підкидань, як правило, подія A відбувається частіше, ніж подія B, тобто $r_n(A) > r_n(B)$, $(n \geq 1)$. В той самий час розрахунок йому показав, що повинно бути $r_n(A) \approx r_n(B)$, оскільки $P(A) = P(B)$. Для A сприятливими є випадіння на трьох гральних кубиках числа очок

(6;4;1), (6;3;2), (5;5;1), (5;4;2), (5;3;3), (4;4;3),

так що $N(A) = 6$. Для події B сприятливими є результати

(6;5;1), (6;4;2), (6;3;3), (5;5;2), (5;4;3), (4;4;4)

так що $N(B) = 6$. Тому $P(A) = P(B) = \frac{6}{N}$.

Паскаль розв'язав парадокс Де Мере, помітивши, що результати, які розглядував Де Мере, не є рівноможливими. Такі, наприклад, результати, як (6;5;1) та (4;4;4) мають не однакові шанси для відбування, вони не однаково часто будуть відбуватися при великій кількості підкиданні кубиків. Для того, щоб мати справу з рівноможливими результатами слід звернути увагу не тільки на кількість очок, шо випала, але й на яких кубиках випали ці очки. Тобто результатом буде не лише комбінація (6;5;1), але й (6;1;5), (5;6;1), (5;1;6), (1;5;6), (1;6;5). При такому підході до розгляду результатів отримуємо, що:

$$N(A) = 3! + 3! + 3 + 3! + 3 + 3 = 27,$$

$$N(B) = 3! + 3! + 3 + 3 + 3! + 1 = 25,$$

Так що $N(A) > N(B)$, й отже, $P(A) > P(B)$, як й повинно бути. Легко бачити, що тут загальна кількість N усіх рівноможливих результатів буде $N = 6^3 = 216$, так що

$$P(A) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8} = 0{,}125,$$

$$P(B) = \frac{25}{216} \approx 0{,}116.$$

Як ми бачимо $P(A)$ відрізняється від $P(B)$ приблизно на 0, 01. Очевидно, що й відносні частоти $r_n(A)$ й $r_n(B)$ відрізнялися при спостереженнях Де Мере лише на 0, 01. Й таке навіть незначне розходження експериментальних даних з теоретичним розрахунком змусило Де Мере забити на сполох.

Схема розв'язування задач. Розгляд задач, пов'язаних з обчисленням ймовірностей за класичним означенням, зручно проводити за наступною схемою:

1) з'ясовуємо, в чому полягає випробування;
2) з'ясовуємо, в чому полягає результат випробування. Підбираємо простір Ω так, щоб він складався лише з рівноможливих результатів;
3) знаходимо кількість N усіх результатів, тобто кількість елементів множини Ω;
4) описуємо подію A, ймовірність якої потрібно знайти. З'ясовуємо, які результати з множини рівноможливих є сприятливими для нашої події A;
5) підраховуємо кількість N(A) усіх сприятливих результатів;
6) обчислюємо шукану ймовірність за формулою (7).

Далі ми покажемо як елементи комбінаторики використовуються при обчисленні ймовірності події за класичним означенням для визначення числа сприятливих результатів $N(A)$ й числа усіх можливих результатів N.

Приклад 4 (Гіпергеометричний розподіл ймовірностей). Нехай в множині, що містить n елементів, маємо m елементів $(m < n)$, які мають певну властивість S. Знайти ймовірність того, що серед k обраних навмання елементів з цієї множини точно l елементів, що мають властивість S.

Розв'язання. Задачу на обчислення ймовірності за класичним означенням будемо розв'язувати за зазначеною схемою:

1. *З'ясовуємо, в чому полягає випробування.*

В даній задачі воно полягає в тому, що беруться k елементів з множини, яка містить n елементів.

2. *З'ясовуємо, в чому полягає результат випробування. Підбираємо простір Ω так, щоб він складався лише з рівноможливих результатів.*

В цій задачі рівноможливими результатами є різні сполуки з n елементів по k елементів.

3. *Знаходимо кількість N усіх результатів, тобто кількість елементів множини Ω.*

$$N = C_n^k.$$

4. *Описуємо подію A, ймовірність якої потрібно знайти. З'ясовуємо, які результати з множини рівноможливих є сприятливими для нашої події A.*

В нашій задачі подія A полягає в тому, що серед взятих навмання k елементів маємо точно l елементів, що мають властивість S. Таким чином, сприятливим буде результат, при якому ми обрано l елементів з m елементів (що мають властивість S), при цьому необхідна решта $k-l$ обрана з решти $n-m$ елементів (що не мають властивість S).

5. *Підраховуємо кількість $N(A)$ усіх сприятливих результатів.*

$$N(A) = C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}.$$

6. *Обчислюємо шукану ймовірність за формулою (7):*

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k} \qquad (8)$$

дає нам відповідь на поставлену задачу. Отже, задачу розв'язано.

При фіксованих n, m й k число l залежить від випадка. Воно може приймати будь-які цілі значення такі, що $0 \le l \le m, 0 \le k-l \le n-m$. Для можливих значень l відповідні ймовірності обчислюються за формулою

$$P_{n,m,k}(l\,) = \frac{C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k}. \qquad (9)$$

Ця послідовність ймовірностей (як функція від l) називається **гіпергеометричним розподілом ймовірностей.** Такий розподіл часто використовується у додатках.

Приклад 5. Колода в 36 карт навмання ділиться на дві рівні частини. Яка ймовірність того, що в кожній частині опиниться однакові кількість червоних та чорних карт.

Розв'язання. тут можна слідкувати за складом лише однієї половини колоди. Маємо справу з задачею розглянутого в прикладі 4 типу: властивість S – карта червона, $n = 36$, $m = 18$, $k = 18$, $l = 9$. Шукана ймовірність:

$$P = \frac{C_{18}^9 \cdot C_{18}^9}{C_{36}^{18}} = \frac{\left(\frac{18!}{9! \cdot 9!}\right)^2}{\frac{36!}{18! \cdot 18!}} = \frac{(18!)^4}{(9!)^4 \cdot 36!}.$$

Відповідь, якщо залишити її в такому вигляді, не є цінною, оскільки хотілось би знати ймовірність P хоча б з точністю до 0,1. Скористаємось формулою Стірлінга. При цьому будемо мати відносну похибку, меншу за $4 \cdot 0{,}009 + 4 \cdot 0{,}009 + 0{,}008 = 0{,}08$. Отримуємо

$$P \approx \frac{\left(\sqrt{2\pi 18} \cdot 18^{18} \cdot e^{-18}\right)^4}{\left(\sqrt{2\pi 9} \cdot 9^9 \cdot e^{-9}\right)^4 \sqrt{2\pi 36} \cdot 36^{36} \cdot e^{-36}} = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}27.$$

Оскільки відносна похибка менша за 0,08, то абсолютна похибка менша за $0{,}08 \cdot\ 0{,}27 = 0{,}02$, так що $P = 0{,}27 \pm 0{,}02$, $0{,}25 < P < 0{,}29$.

B) Геометрична ймовірність.

Класичне означення ймовірності передбачає, що множина усіх можливих результатів є скінченною й всі результати є рівноможливими. Однак у багатьох практично важливих задачах мова йде про випробування та події, пов'язані з нескінченної множиною результатів (можливих й сприятливих $N = \infty,\ N(A) = \infty$). В таких випадках часто користуються замість класичного означення ймовірності так звану геометричну ймовірність відповідно на прямій, на площині, в тривимірному просторі й, взагалі, у n −вимірному просторі.

1. Геометрична ймовірність на прямій.

Так називається ймовірність того, що взята навмання точка з (можливого) відрізка довжини l належить до (сприятливого) відрізка x, що міститься у можливому відрізку l. Вона обчислюється за формулою

$$P(A) = \frac{x}{l}, \qquad (10)$$

тобто вона дорівнює відношенню довжини x сприятливого відрізка до довжини l всього можливого відрізку.

В такій задачі корисно вважати, що $\Omega = [a; b),\ A = [\alpha; \beta),\ b - a = l,\ \beta - \alpha = x.$

Тут можливими результатами є точки з $[a; b)$, а сприятливими - точки з $[\alpha; \beta)$. Множини Ω та A є нескінченними й $N = \infty,\ N(A) = \infty$.

2. Геометрична ймовірність на площині й в просторі. Задача Бюффона. Задача про зустріч.

Ймовірність $P(A)$ того, що навмання взята точка з (можливої) області S належить сприятливій області $S(A)$, що міститься у можливій області, обчислюється за формулою

$$P(A) = \frac{S(A)}{S}. \qquad (11)$$

В тривимірному просторі аналогічна ймовірність обчислюється за формулою

$$P(A) = \frac{V(A)}{V}, \qquad (12)$$

де $V(A)$, V – об'єми сприятливої та можливої областей відповідно. За тією ж самою формулою обчислюються геометрична ймовірність в просторі R^n.

2.3. Алгебра подій. Аксіоми теорії ймовірностей.

А. **Найпростіші властивості ймовірностей.**

З прийнятих означень понятття ймовірності (класичного, геометричного, статистичного) випливає низка властивостей. Серед них, зокрема є властивості, в яких ймовірності одних подій виражаються через ймовірності інших подій (ймовірність суми подій виражається через ймовірності подій доданків, ймовірність протилежної подій – через ймовірність вихідної події й т. і.). При знаходженні шуканих ймовірностей часто крім означення ймовірності використовують властивості ймовірностей. Наведемо деякі з цих властивостей.

1. Ймовірність будь-якої події є величина невід'ємна: $P(A) \geq 0$.

При доведенні цієї та інших властивостей будемо виходити з класичного означення ймовірності. Аналогічно, вони доводяться, якщо виходити з геометричного або статистичного означення.

Оскільки $P(A) = \frac{N(A)}{N}$, де $N(A)$ – ціле невід'ємне число, N- натуральне, то $P(A) \geq 0$.

2. Ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці: $P(\Omega) = 1$.

Дійсно, оскільки для вірогідної події усі результати є сприятливими, то $N(\Omega) = N$, тому $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N} = \frac{N}{N} = 1$.

3. Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

або

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Дійсно, для несумісних подій $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$, тому

$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N} = \frac{N(A) + N(B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} = P(A) + P(B).$$

4. Ймовірність протилежної події дорівнює одиниці без ймовірності вихідної події:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Дійсно, оскільки сприятливими результатами для $\bar{A}$ є ті й тільки ті результати, які не є сприятливими для A, то $N(\bar{A}) = N - N(A)$ й тому

$$P(\bar{A}) = \frac{N(\bar{A})}{N} = \frac{N - N(A)}{N} = \frac{N}{N} - \frac{N(A)}{N} = 1 - \ P(\bar{A}).$$

5. Ймовірність будь-якої події не більш за 1: $P(A) \leq 1$.

Це дійсно так , оскільки $N(A) \leq N,$ то $P(A) = \frac{N(A)}{N} \leq 1$.

6. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю: $P(\emptyset) = 0$.

Дійсно, для неможливої події $N(\emptyset) = 0$, тому $P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N} = \frac{0}{N} = 0$.

7. Якщо подія A міститься в події B, то $P(A) \leq P(B)$.

Дійсно, включення $A \subset B$ означає, що кожний результат, сприятливий для A, є сприятливим й для B. Тому $N(A) \leq N(B)$ й, отже,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} \leq \frac{N(B)}{N} = P(B).$$

8. Ймовірність суми будь-яких двох подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їхнього добутку:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Дійсно, для події $A+B$ сприятливими будуть ті результати, які є сприятливими для A або для B. За умови події A та B можуть бути сумісними, то кількість сприятливих результатів для $A+B$ дорівнює $N(A+B) = N(A) + N(B) - N(A \cdot B)$, оскільки в $N(A+B)$ можуть бути результати, які рахуються двічі й в $N(A)$, й в $N(B)$. Отже,

$$P(A+B) = \frac{N(A+B)}{N} = \frac{N(A) + N(B) - N(A \cdot B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} - \frac{N(A \cdot B)}{N} =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Розглянуті властивості 4)- 8) та багато інших властивостей ймовірностей є логічними наслідками властивостей 1)- 3); при їх доведенні можна було не користуватися класичним означенням ймовірності (або геометричним, статистичним), вони випливають з властивостей 1)- 3). В силу цього при аксіоматичній побудові теорії ймовірностей властивості 1)- 3) приймаються у якості аксіом, що визначають поняття ймовірності.

Б. **Алгебра подій. σ- алгебра.**

Ймовірність $P(A)$ залежить від розглянутої події A, тобто є функцією від A. Областю визначення цієї функції є певна сукупність S подій. Ця сукупність S не повинна складатися з усіх можливих подій A, що містяться в просторі Ω елементарних подій. Зазвичай це не так, якщо Ω не є скінченною, а й тим паче, незліченна множина. Так, наприклад, при розгляді геометричної ймовірності на площині, коли Ω – можлива область (квадрована), у якості S розглядають сукупність усіх квадрованих областей A ($\subset \Omega$). Для того, щоб при будь-яких A та B, взятих з області визначення S, можна було розглядати ймовірності $P(\bar{A}), P(A \cdot B)$, $P(A+B)$ на сукупність S накладають низку вимог: потрібно, щоб $\bar{A} \in S$, $A \cup B \in S$, $A \cdot B \in S$.

Означення. Непорожня сукупність подій S називається алгеброю подій, якщо виконуються наступні умови:

1) Якщо $A \in S$, то $\bar{A} \in S$;
2) Якщо $A \in S, B \in S$, то $A \cup B \in S$.

З цих властивостей вже випливають наступні властивості алгебри подій:

3) Якщо $A \in S, B \in S$, то $A \cdot B \in S$.

Дійсно, нехай $A \in S, B \in S$, тоді $\bar{A} \in S, \bar{B} \in S$ (за 1-ю умовою) та $\bar{A} \cup \bar{B}$ (вже за 2-ю умовою), а $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \in S$ (знову за 1-ю умовою). Але за законами подвійного заперечення та Де Моргана маємо: $A \cdot B = \overline{(\overline{A \cdot B})} = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \in S$.

4) $\Omega \in S$;

Нехай $A \in S$, тоді за 1-ю умовою $\bar{A} \in S$, а й отже, за 2-ю умовою їхня сума $A \cup \bar{A} = \Omega \in S$.

5) $\emptyset \in S$;

З 1-ї та 3-ї умов випливає що $\emptyset = A \cdot \bar{A} \in S$.

6) Якщо $A_k \in S, (1 \le k \le n)$, то $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in S, \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in S$.

Ця властивість доводиться за допомогою 2-ї та 3-ї умов та метода математичної індукції.

Приклади алгебр подій:

1. Тривіальна алгебра $S_0 = \{\emptyset, \ \Omega\}$.
2. Простіша алгебра $S_A = \{\emptyset, \ \Omega, \ A, \ \bar{A}\}$, $(A \neq \emptyset, A \neq \Omega)$. Це найменша алгебра, що

містить A, тобто S_A міститься в будь-якій іншій алгебрі, куди входить A.

3. Максимальна алгебра S_{max}, яка складається з усіх подій, що містяться в Ω. Якщо Ω

складається з Nелементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, то S_{max} складається з 2^N подій: $\emptyset$, $\{\omega_1\}$, $\{\omega_1, \omega_2\}$, …, Ω. Для нескінченної множини Ω виникає необхідність розгляду суми та добутку зліченої множини подій A_1, A_2, …, A_n,…В цьому випадку замість умови 2) вимагається більш жорстка умова 2σ): якщо $A_k \in S$ $(k = 1, 2, \dots)$, то $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in S$. Сукупність S, що задовольняє умови 1) та 2σ) називається **σ- алгеброю** та позначається S_σ .

З цих умов випливають властивості 4), 5) й властивість 3σ):

3σ. Якщо $A_k \in S_\sigma$ $(k = 1, 2, \dots)$, то $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in S_\sigma$.

Приклад. $\Omega = [0; 1]$, S- сукупність множин $A \subset [0; 1]$ (що вимірюються за Лебегом). Згідно з відомою властивістю вимірних множин сукупність S є σ −алгебра.

В. **Аксіоми теорії ймовірностей.**

Як вже визначалося, при конкретних означеннях поняття ймовірності (статистичному, класичному, геометричному) $P(A)$ має низку властивостей. Усі вони є логічним наслідком перших трьох властивостей. У зв'язку з цим три перші властивості приймаються за аксіоми теорії ймовірностей.

Означення. Говорять, що на алгебрі подій S задано розподіл ймовірностей, якщо кожній події $A \in S$ однозначно поставлено у відповідність число $P(A)$, яке називається ймовірністю події A, так, що виконуються наступні умови – аксіоми теорії ймовірностей:

I. *Аксіома невід'ємності.* Ймовірність кожної події є число невід'ємне: $P(A) \ge 0$ $(A \in S)$.

II. *Аксіома нормировки.* Ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці: $P(\Omega) = 1$.

III. *Аксіома адитивності.* Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ $(A \in S, B \in S)$.

При означенні розподілу ймовірностей на σ −алгебрі замість аксіоми III розглядається більш жорстка вимога.

III σ. *Аксіома повної (зліченної) адитивності.*

Ймовірність суми зліченної множини попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $A_i \cdot A_k = \emptyset, i \neq k \Rightarrow P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \quad (A_k \in S)$.

Тут в правій частині рівності стоїть сума числового ряду. В аксіомі стверджується, що цей ряд збігається та його сума дорівнює $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$.

Означення. Сукупність трьох об'єктів $\langle \Omega, S_\sigma, P(A) \rangle$, в якій S_σ є σ −алгеброю подій, а функція $P(A)$ задовольняє всі аксіоми теорії ймовірності, називається ймовірнісним простором.

Г. **Простіші теореми.**

Теорема 1. Ймовірність протилежної події дорівнює одиниці без ймовірності вихідної події:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \qquad (13)$$

Доведення. Маємо $A \cup \bar{A} = \Omega$, $A \cap B = \emptyset$. Тому

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Теорема 2. Ймовірність будь-якої події не перевищує одиницю:

$$P(A) \leq 1 \; (A \in S). \qquad (14)$$

Доведення. Маємо з I аксіоми та 1-ї теореми $0 \leq P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, отже $P(A) \leq 1$.

Теорема 3. Ймовірність неможливої події дорівнює нулеві:

$$P(\emptyset) = 0. \qquad (15)$$

Доведення. Маємо $A \cup \emptyset = A$. Тому $P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$, тобто

$$P(A) = P(A) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0.$$

Теорема 4. (властивість монотонності) Якщо $A \subset B$, то

$$P(A) \leq P(B). \qquad (16)$$

Доведення. Нехай $A \subset B$, тоді $A \cdot B = A$ й тому

$$B = \Omega \cdot B = (A \cup \bar{A}) \cdot B = A \cdot B \cup \bar{A}B = A \cup \bar{A} \cdot B.$$

Доданки в правій частині рівності несумісні, оскільки

$$A \cap \bar{A} \cdot B = (A \cap \bar{A}) \cdot B = \emptyset \cdot B = \emptyset.$$

Враховуючи це, отримуємо

$$P(B) = P(A \cup \bar{A} \cdot B) = P(A) + P(\bar{A} \cdot B) \geq P(A) \Rightarrow P(B) \geq P(A),$$

й теорему доведено.

Вправа. Доведемо, що $A \cup B = A \cup \bar{A} \cdot B$.

Дійсно,

$$A \cup B = A \cup (B \cdot \Omega) = A \cup B \cdot (A \cup \bar{A}) = A \cup (B \cdot A \cup B \cdot \bar{A}) = A \cup B \cdot A \cup B \cdot \bar{A} =$$

$$= (A \cup B \cdot A) \cup B \cdot \bar{A} = A \cup \bar{A} \cdot B.$$

Теорема 5. Для будь-яких подій A та B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \qquad (17)$$

Доведення. Скористаємося тим, що події A та $\bar{A} \cdot B$ несумісні та попередньою вправою). Отримуємо:

$$P(A \cup B) = P(A \cup \bar{A} \cdot B) = P(A) + P(\bar{A} \cdot B), \qquad (*)$$

з іншого боку, $B = \Omega \cdot B = (A \cup \bar{A}) \cdot B = A \cdot B \cup \bar{A} \cdot B$ й доданки в правій частині несумісні, так що

$$P(B) = P(A \cdot B \cup \bar{A} \cdot B\ ) = P(A \cdot B) + P(\bar{A} \cdot B),$$

$$P(\bar{A} \cdot B) = P(B) - P(A \cdot B). \qquad (**)$$

Таким чином, підставляючи (*) у (**), отримуємо

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Теорему доведено.

Теорема 6. Ймовірність суми скінченного числа попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$, якщо $A_i \cdot A_k = \emptyset,\ i \neq k$.

Доведення проводиться за допомогою метода математичної індукції.

2.4.Складні події. Умовна ймовірність. Незалежні події. Повна ймовірність. Формула Байеса.

А. Поняття умовної ймовірності. Ймовірність добутку подій.

При розв’язуванні задач складні події, ймовірності яких потрібно знайти, намагаються подати у вигляді комбінації інших, більш простих подій, до того ж, ймовірності останніх або відомі, або підраховуються безпосередньо.

Характеристикою залежності події A від події B, що має додатну ймовірність, є умовна ймовірність $P_B(A)$ події A при умові, що подія B відбулася, яка визначається наступним чином.

Означення. Умовною ймовірністю події A за умові виконання події B називається відношення ймовірності добутку подій A та B до ймовірності події B, що розглядається у якості умови.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}. \qquad (18)$$

При цьому припускається, що $P(B) \neq 0$ (тобто $P(B) > 0$).

З формули (18) випливає $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A)$. Оскільки $A \cdot B = B \cdot A$, то не має значення яка подія в добутку розглядається першим множником, а яка – другим. Тому маємо

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B). \qquad (19)$$

Отже, маємо наступне твердження.

Теорема (про добуток). Ймовірність добутку двох подій дорівнює дорівнює добутку ймовірності першого з них на умовну ймовірність другого за умови виконання першого, тобто

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B), \qquad P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Для будь-якої скінченної кількості події методом повної математичної індукції доводиться наступне узагальнення теореми про добуток.

Теорема (узагальнена про добуток).

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}(A_n). \qquad (20)$$

Б. Незалежні події. Незалежність у сукупності.

Означення. Події A та B називаються незалежними, якщо умовна ймовірність одного з них за умови виконання іншої дорівнює безумовній ймовірності першої події; або якщо ймовірність однієї з цих подій дорівнює 0:

$$P_B(A) = P(A) \quad \text{або } P(B) = 0, \qquad (21а)$$

$$(P_A(B) = P(B) \quad \text{або } P(A) = 0). \qquad (21б)$$

До того ж, не має значення, яка з подій A та B розглядаються першою, а яка другою, тобто якщо $P_B(A) = P(A)$ то $P_A(B) = P(B)$ або $P(A) = 0$. Дійсно, нехай $P_B(A) = P(A)$, тоді за теоремою про добуток $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A)$, так що у випадку коли $P(A) \neq 0$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)} = \frac{P(B)P_B(A)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Теорема (Критерій незалежності). Для того щоб дві події A та B були незалежними необхідно й достатньо, щоб ймовірність добутку цих подій дорівнювала добутку їх ймовірностей, тобто, щоб

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (22)$$

Доведення. Необхідність. Нехай A та B незалежні, тобто $P_B(A) = P(A)$ або $P(B) = 0$. В першому випадку рівність (22) отримуємо, користуючись теоремою про добуток

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A) = P(B) \cdot P(A) = P(A) \cdot P(B).$$

В другому випадку рівність (22) будемо мати, оскільки при цьому права та ліва частини цієї рівності дорівнюють 0. Дійсно, оскільки $P(B)=0$, то за властивістю монотонності ймовірності ($AB\subset B$) маємо $0\leq P(A\cdot B)\leq P(B)=0$, й тому $P(A\cdot B)=0$.

Достатність. Нехай тепер маємо (22) та $P(B)\neq 0$. Тоді

$$P_B(A)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)}=P(A),$$

тобто події A та B незалежні. Якщо ж $P(B)=0$, то A та B незалежні за прийнятим означенням незалежності подій.

Зауваження. В конкретних задачах про незалежність подій часто керуються не означенням, а спираючись на інтуїцію, аналізуючи ситуацію. Виходячи з незалежності двох подій, ймовірність їхнього добутку знаходять як добуток ймовірностей цих подій.

При розгляданні більш ніж двох поді й важливим є наступне означення:

Означення. Події A_1, A_2, …, A_n називаються незалежними у сукупності, якщо кожне з них не залежить від добутку будь-якої групи інших подїі з цієї системи.

Теорема. Якщо A_1, A_2, …, A_n – події. Що незалежні у сукупності, то ймовірність добутку цих подій дорівнює добутку їхніх ймовірностей, тобто

$$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot\ldots\cdot P(A_n). \qquad (23)$$

Ця теорема безпосередньо випливає з узагальненої теореми про добуток та означення незалежності подій у сукупності.

Зауваження. З попарної незалежності подій не випливає їхня незалежність у сукупності. Дійсно, нехай навмання кидаються дві правильні монети й A_1 випадіння герба на першій монеті, A_2 – випадіння монети на другій монеті, A_3- випадіння двох монет однією стороною. Події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні; незалежність A_1 та A_2 очевидна, $P(A_3)=\frac{2}{4}==\frac{1}{2}$, $P_{A_1}(A_3)=\frac{1}{2}$ так що A_1 та A_3 незалежні; аналогічно A_2 та A_3 незалежні. Водночас $P_{A_1A_2}(A_3)=1\neq P(A_3)$, отже події A_1, A_2 та A_3 не є незалежними у сукупності.

Схема розв'язування задач. Розв'язання задач на цю тему зручно здійснювати за наступною схемою:

1) з'ясувати, в чому полягає випробування;
2) ввести позначення для подій, що вивчаються;
3) за допомогою цих позначень виразити подію, ймовірність виконання якої слід знайти;
4) якщо шукана подія представляється у вигляді суми подій, то визначити чи сумісні або несумісні складові події; якщо шукана подія представляється у вигляді добутку подій, то визначити чи залежні вони, чи незалежні складові події;
5) підібрати відповідні формули та здійснити обчислення.

В. Повна ймовірність. Формула Байеса.

Означення. Говорять, що події H_1, H_2, …, H_n утворюють повну групу подій, якщо виконуються наступні дві умови:

1) події H_1, H_2, …, H_n попарно несумісні, тобто $H_i \cdot H_k = \emptyset,\ i \neq k.$
2) події H_1, H_2, …, H_n єдино можливі, що означає $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$,

тобто при випробуванні обов'язково виконується одна з цих подій H_k.

Нижче події H_k будемо називати гіпотезами. Припускається, що визначені їхні ймовірності ($H_k \in S$).

Нехай подія A може виконатися тільки з однією з гіпотез з певною умовною ймовірністю $P_{H_i}(A)$. Тоді має місце наступна теорема.

Теорема. Ймовірність будь-якої події A ($\in S$) дорівнює сумі добутків ймовірності гіпотези на умовну ймовірність події за умови виконання відповідної гіпотези, тобто

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \cdots + P(H_n)P_{H_n}(A). \qquad (24)$$

Формула (23) називається формулою повної ймовірності. Формула (23) у більш компактній формі

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P_{H_k}(A).$$

Доведення. З 2-ї умови означення гіпотез маємо:

$$A = \Omega \cdot A = (H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n) \cdot A = H_1 A \cup H_2 A \cup \ldots \cup H_n A.$$

З 1-ї умови означення гіпотез випливає, що події $H_k A$ ($1 \leq k \leq n$) є попарно несумісні, оскільки $(H_i A) \cdot (H_j A) = \left(H_i \cdot H_j\right) \cdot A = \emptyset \cdot A = \emptyset.$ Тому

$$P(A) = P(H_1 A \cup H_2 A \cup \ldots \cup H_n A) = P(H_1 A) + P(H_2 A) + \cdots P(H_n A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k A\ ).$$

За теоремою про ймовірність добутку $P(H_k A\ ) = P(H_k)P_{H_k}(A)$, й остання формула приймає вигляд: $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k A\ ) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P_{H_k}(A)$. Отже, теорему доведено.

Теорема. Нехай виконані усі попередні умови та стало відомим, що подія A відбулася. Тоді для знаходження умовних ймовірностей $P_A(H_i)$ має місце формула Байеса:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P_{H_k}(A)}. \qquad (25)$$

Доведення. Маємо за означенням умовної ймовірності, за теоремою про добуток, та формулою повної ймовірності:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i \cdot A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P_{H_k}(A)}.$$

Зупинимося на змістовному аспекті застосування формул (24), (25). Нехай подія A виконується при різних умовах, з приводу яких можна висловити гіпотези H_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Припустимо, що відомі ймовірності $P(H_i)$ (вони називаються *апріорними*, тобто перед досвідними) й ймовірності $P_{H_i}(A)$. При вказаних припущеннях за формулою (24) $P(A)$ знаходиться у тому випадку, якщо невідомо, яка з гіпотез дійсно виконалася.

Нехай тепер подія A видбулася. Тоді ймовірності гіпотез $P(H_i)$ можна переоцінити, тобто обчислити умовні ймовірності $P_A(H_i)$, спираючись на формулу (25). Ці уточнені ймовірності називають *апостеріорними* (після дослідними).

Схема розв'язування задач. Розв'язуючи задачі на цю тему, слід:

1) з'ясувати в чому полягає випробування;
2) подію, ймовірність якої потрібно знайти, позначити, наприклад буквою A;
3) скласти множину попарно несумісних гіпотез H_i ($i = 1, 2, \dots, n$);
4) обчислити ймовірності $P(H_i)$ та $P_{H_i}(A)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).
5) за формулою (24) знайти $P(A)$. Якщо ж відомо, що подія A вже відбулася, то за формулою (25) визначаємо $P_A(H_i)$.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад «ПІВДЕННОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ К. Д. УШИНСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації для самостійної роботи

та виконання індивідуального навчального завдання

з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика»,

частина ІІ «Схема Бернуллі. Статистичні задачі, що розв’язуються за допомогою граничних теорем для схеми Бернуллі»

Одеса – 2021

Методичні рекомендації для самостійної роботи та виконання індивідуального навчального завдання з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика», частина II «Схема Бернуллі. Статистичні задачі, що розв'язуються за допомогою граничних теорем для схеми Бернуллі».

розглянуто на засідання кафедри вищої математики і статистики.

Протокол від 10 червня 2021 № 12

Розробник:

к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики і статистики М. Г. Волкова.

Рецензенти:

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь, геометрії та топології Одеського національного університету імені І. І. Мечникова Білозерова Марія Олександрівна;

кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» Г. Д. Урум.

Зміст

Вступ

1. Повторення випробувань. Схема Бернуллі.

Означення схеми Бернуллі.

Раніше неодноразово відзначалось, що теорія ймовірностей застосовується при вивченні явищ, що мають масовий характер. У зв'язку з цим представляє інтерес розгляд не одне випробування, а ціла серія великої кількості випробувань. Найпростішою математичною моделлю послідовності випробувань є схема Бернуллі. Так називається нескінченна послідовність випробувань, що задовольняє наступні три умови:

1) кожне випробування має два результати: виконання певної події A (успіх) та його невиконання, тобто виконання події $\bar{A}$ (невдача). Отже, простір елементарних при кожному випробуванні складається з двох результатів та не залежить від номера випробування.
2) ймовірність успіху не залежить від номера випробування.

Якщо $A^{(i)}$- подія, яка полягає у виникненні успіху при i-му випробуванні, то згідно з 2-ї умови ймовірність $P(A^{(i)})$ не залежить від номеру випробування i. Ця ймовірність позначається через $P(A)$або просто p й називається ймовірністю успіху при одному випробуванні. З умови 2 випливає, що ймовірність невдачі також не належить від номера випробування, оскільки $P\left(\bar{A}^{(i)}\right) = 1 - P\left(A^{(i)}\right) = 1 - P(A) = 1 - p$. Ця ймовірність позначається через $P(\bar{A})$ або через q й називається ймовірності невдачі при одному випробуванні. Отже, для ймовірності успіху p та ймовірності невдачі q маємо

$$p \geq 0,\ q\ \geq 0,\ p +\ q = 1.$$

3) для будь-якої кількості випробувань результати різних випробувань незалежні у сукупності. Ця вимога рівносильна вимозі, що результат кожного випробування, починаючи з другого випробування, не залежить від результатів усіх попередніх випробувань.

Вперше послідовність випробувань, що задовольняє умови 1)-3) була досліджена Яковом Бернуллі (1654-1705), на честь якого вона й названа послідовністю Бернуллі.

Часто представляє інтерес наступна задача.

Задача Бернуллі: яка ймовірність $P_n(m)$ того, що в схемі Бернуллі при n випробуваннях успіх здійсниться рівно m разів, якщо відомо, що ймовірність успіху при одному випробуванні дорівнює p. Відповідь на це запитання дає формула:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \qquad (26)$$

Зауваження. Формула Бернуллі представляється функцією

БИНОМРАСП(*k*, *n*, *p*, ЛОЖЬ), –

де k - кількість появ події, n – число незалежних випробувань; p – ймовірність появи події; "ЛОЖЬ" – вказівка на те, що визначається ймовірність появи рівно k подій.
У випадку, коли останній аргумент функції дорівнює «ИСТИНА», функція повертає ймовірність того, що в n випробуваннях подія здійсниться не менш ніж k разів.

Зауваження. Нехай $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ означає ймовірність того, що в n випробуваннях схеми Бернуллі успіх наступає не менш ніж m_1 й не більш ніж m_2 разів ($0 \le m_1 \le m \le m_2 \le n$). Тоді має місце формула

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m),$$

або з урахуванням (26)

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \qquad (27)$$

Ця формула випливає з теореми про додавання несумісних подій.

Ймовірність $P_n(1 \le m \le n)$ того, що в результаті n випробувань успіх виникне хоча б один раз, визначається формулою:

$$P_n(1 \le m \le n) = 1 - q^n. \qquad (28)$$

Зауваження. Відзначимо, що ймовірності $P_n(m)$ при фіксованому n спочатку зростають при збільшенні числа m від 0 до певного значення m_0, а потім спадають при зміненні числа m від m_0 до n.

Означення. Число успіхів m_0, якому при заданому n відповідає максимальна біноміальна ймовірність $P_n(m_0)$, називається **найймовірнішим числом успіхів**.

Знайдемо це число з системи:

$$\begin{cases} P_n(m_0) \ge P_n(m_0-1); \\ P_n(m_0) \ge P_n(m_0+1); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_n^{m_0} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \ge C_n^{m_0-1} \cdot p^{m_0-1} \cdot q^{n-m_0+1}; \\ C_n^{m_0} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \ge C_n^{m_0+1} \cdot p^{m_0+1} \cdot q^{n-m_0-1}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_n^{m_0} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \ge C_n^{m_0-1} \cdot p^{m_0-1} \cdot q^{n-m_0+1}; \\ C_n^{m_0} \cdot p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \ge C_n^{m_0+1} \cdot p^{m_0+1} \cdot q^{n-m_0-1}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_n^{m_0} \cdot p \ge C_n^{m_0-1} \cdot q \ ; \\ C_n^{m_0} \cdot q \ge C_n^{m_0+1} \cdot p; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{n!}{m_0!\,(n-m_0)!} \cdot p \ge \dfrac{n!}{m_0!\,(n-m_0+1)!} \cdot q \ ; \\ \dfrac{n!}{m_0!\,(n-m_0)!} \cdot q \ge \dfrac{n!}{(m_{0+1})!\,(n-m_0-1)!} \cdot p; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n-m_0+1) \cdot p \ge m_0 \cdot q \ ; \\ (m_0+1) \cdot q \ge (n-m_0) \cdot p; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} np + p \ge m_0 \cdot q + m_0 \cdot p; \\ m_0 q + m_0 p \ge np - q; \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} np + p \ge m_0 \\ m_0 \ge np - q; \end{cases} \Rightarrow np + p \le m_0 \le np - q.$$

Отже, **найймовірніше число успіхів** знаходиться з нерівності

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Остання нерівність може мати один розв'язок, якщо $np - q$ неціле числа, та два розв'язки, якщо $np - q$ ціле.

Також з останньої нерівності при достатньо великих n маємо

$$p \approx \frac{m_0}{n},$$

тобто найймовірніша частота успіхів близька до ймовірності успіху в одному випробуванні. Згадуючи, що природньонаукове уявлення про ймовірність потребує близькості до неї відносних частот при довгих серіях випробувань, приходимо до висновку, що схема Бернуллі має цю властивість.

Пояснимо, що ймовірнісна схема Бернуллі – математична модель реального явища (всі її вимоги ніколи не виконуються), й тільки на практиці можна перевірити її придатність до застосування того чи іншого процесу.

Для застосування схеми Бернуллі до розв'язування задач необхідно, щоб:

1) випробування, що проводяться, були незалежними;
2) кожне випробування мало тільки два результати;
3) ймовірність появи події, що нас цікавить, в кожному випробуванні була одна й та ж.

Задача. Для даного баскетболіста ймовірність закинути м'яч у корзину дорівнює 0,6. Виконано 8 кидків. Знайти: а) ймовірність того, що при цьому буде рівно два попадання; б) найймовірніше число попадань та відповідну ймовірність.

Розв'язання. Проводиться серія з восьми випробувань з двома результатами в кожному. Будемо вважати ці випробування незалежними. Ймовірність попадання м'яча в корзину при кожному випробуванні одна й та ж. Отже, у якості моделі можна використати схему Бернуллі. За формулою (26) маємо:

$$P_8(2) = C_8^2 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^6 \approx 0{,}041.$$

Для найймовірнішого числа попадань m_0 маємо нерівності (29), з яких при $n = 8$, $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$ випливає

$$8 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le m_0 \le 8 \cdot 0{,}6 + 0{,}6, \ \Rightarrow 4{,}4 \le m_0 \le 5{,}4 \ \Rightarrow \quad m_0 = 5.$$

Відповідна ймовірність

$$P_8(5) = C_8^5 \cdot (0{,}6)^5 \cdot (0{,}4)^3 \approx 0{,}28.$$

Відповідь. 0,28.

Задача. Ймовірність того, що покупцю, що зайшов у спеціалізований магазин, знадобиться костюм 60-го розміру, складає 0,25. Яке мінімальне число покупців повинно відвідати магазин, щоб з ймовірністю 0,95 стверджувати, що хоча б один з них придбатиме костюм вказаного розміру.

Розв'язання. Очевидно, знаходимось в умовах застосування схеми Бернуллі. Потрібно, щоб ймовірність виконання успіху (придбання костюму 60-го розміру) хоча б один раз в серії з n випробувань була не менш ніж 0,95. Враховуючи, що тут $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$, на основі формули (28) маємо нерівність

$$1 - (0{,}75)^n \geq 0{,}95$$

або

$$n \geq \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}75}.$$

Отже, мінімальне число покупців, що відвідали магазин,

$$n_0 = \left[\frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}75}\right] + 1 = 11.$$

Відповідь. 11.

2. Граничні теореми для схеми Бернуллі. Статистичні задачи, що розвязуються за допомогою інтегральної теореми Муавра- Лапласа.

Граничні теореми для схеми Бернуллі.

I. Теорема Пуассона.

В ряді застосувань виникає необхідність розглянути ймовірність $P_n(m)$ при великій кількості випробувань n й настільки малій ймовірності p успіху при одному випробуванні, що np не є великим. В таких випадках обчислення $P_n(m)$ за формулою (26) важко й застосовується наступна

Гранична теорема Пуассона. Нехай розглядається послідовність схем Бернуллі така, що ймовірності p_n успіху при одному випробуванні в n-й схемі задовольняє умову

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = a \qquad (0 \leq a < +\infty).$$

Тоді, якщо $P_n(m)$- ймовірність того, що в в n-й схемі при n випробуваннях здійсниться рівно m успіхів, то для будь-якого фіксованого m

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}.$$

Доведення. За формулою (26) маємо: $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$. За умовою $n \cdot p_n = a + \varepsilon_n$,

$$p_n = \frac{a + \varepsilon_n}{n},$$

де ε_n – нескінченно мала ($n \to \infty$). Отримуємо

$$P_n(m) = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}\cdot\left(\frac{a+\varepsilon_n}{n}\right)^m\cdot\left(1-\frac{a+\varepsilon_n}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{1}{m!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-m+1}{n}\cdot(a+\varepsilon_n)^m\cdot\frac{\left(1-\frac{a+\varepsilon_n}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{a+\varepsilon_n}{n}\right)^m}\to\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}$$

Теорему доведено.

Якщо в схемі Бернуллі p мале й розглядається $P_n(m)$ при великому n, то можна вважати, що $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$, $np = a$ та обчислювати $P_n(m)$на основі теореми Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a}\,. \qquad (30)$$

Є таблиці значень величин $P(m;a) = \frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a}$ при різних a та m. Відзначимо, що $\sum_{m=0}^{\infty} P(m;a)$=1 (цей факт можна легко довести, користуючись розкладанням показникової функції в ряд Тейлора).

Зауваження. Має місце формула

$$P_n(m \geq 1) = 1 - P_n(0) \approx 1 - e^{-a}. \qquad (31)$$

Зауваження. Значення величини $\frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a}$ обчислюється за допомогою функції

ПУАССОН(*m*; *a*; ЛОЖЬ).

Зауваження. Значення величини $\sum_{m=0}^{k}\frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a}$ обчислюється за допомогою функції

ПУАССОН(*k*; *a*; ИСТИНА).

ІІ. Локальна теорема Муавра- Лапласа.

Для застосувань представляють інтерес ймовірності $P_n(m)$ при великих m та n-m. В цих випадках застосовується наступна теорема.

Теорема Муавра-Лапласа. Нехай в схемі Бернуллі $0 < p < 1$ та через $t_{m,n}$ позначено число

$$t_{m,n} = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}, \qquad (32)$$

що називається рівномірним ухиленням числа успіхів. Тоді при виконанні умови

$$|t_{m,n}| \leq C$$

рівномірно за m, має місце граничне співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{npq}\cdot P_n(m)}{\varphi(t_{m,n})} = 1, \qquad (33)$$

де $\varphi(t_{m,n})$ – функція, що визначається формулою

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Перш за все пояснимо, як застосовується ця теорема для обчислення $P_n(m)$. Згідно з (33) :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N_\varepsilon \mid \forall n > N_\varepsilon, \forall m \; |t_{m,n}| \le C : \; \left| \frac{\sqrt{npq} \cdot P_n(m)}{\varphi(t_{m,n})} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Позначимо різницю, що стоїть під знаком модуля через $\delta_{m,n}$, будемо мати:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(t_{m,n})(1 + \delta_{m,n}), \quad |\delta_{m,n}| < \varepsilon.$$

Це означає, що можна вважати , що

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(t_{m,n}), \qquad (34)$$

до цього ж відносна похибка буде малою.

Записана формула (34) для приблизного обчислення $P_n(m)$ застосовується у випадку, коли np та nq великі, m та $n - m$ також великі як й np та nq. Обчислення $P_n(m)$ проводиться у наступному порядку:

1) спочатку обчислюється $\sqrt{npq}$ та $t_{m,n}$ за формулою (32);
2) потім за таблицею значень функції $\varphi(x)$ знаходимо $\varphi(t_{m,n})$;
3) далі знаходиться приблизне значення $P_n(m)$ за формулою (34).

Слід відзначити властивості функції $\varphi(x)$:

1) $\varphi(x)$ – парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$,
2) $\varphi(x)$ спадає при $x > 0$,
3) $\varphi(x) = 0{,}0000\ldots$ при $x \ge 4$,
4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1.$

За умов 1) та 3) таблиця значень $\varphi(x)$ звичайно дається на проміжку $[0; 4]$.

Задача. Знайти ймовірність того, що при киданні 100 разів правильної монети навмання точно 50 разів випаде герб.

Розв'язання. Маємо $n = 100, m = 50, p = q = 0{,}5$. Знаходимо

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 5,$$

$$t_{m,n} = \frac{50 - 100 \cdot 0{,}5}{5} = 0,$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx \frac{1}{2,5} = 0,4,$$

$$P_{100}(50) \approx \frac{1}{5} \cdot 0,4 = 0,08.$$

Відзначимо, що 50 це є найймовірніше число випадінь герба при 100 підкиданнях, оскільки

$np + p = 100 \cdot 0,5 + 0,5 = 50,5$, $np - q = 100 \cdot 0,5 - 0,5 = 49,5$, отже, $m_0 = 50$.

Тому $P_{100}(50) > P_{100}(m)$, при $m \neq 50$. Наприклад, при $m = 40$ маємо:

$t_{m,n} = \frac{40-100\cdot 0,5}{5} = -2$, $\varphi(-2) = -\varphi(2) \approx 0,06$; $P_{100}(40) \approx \frac{1}{5} \cdot 0,06 = 0,012 < P_{100}(50)$.

Зауваження. Для обчислення значень $t_{m,n} = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ можна використовувати функцію НОРМАЛИЗАЦИЯ, а саме

$$t_{m,n} = \text{НОРМАЛИЗАЦИЯ}(m; \mu; \sigma),$$

де $\mu = np, \sigma = \sqrt{npq}$.

Зауваження. Для обчислення значення функції $\varphi(x)$ застосовується функція НОРМРАСП з параметрами 0 та 1:

$$\varphi(x) = \text{НОРМРАСП}(x; 0; 1; \text{ЛОЖЬ})$$

III. Інтегральна теорема Муавра - Лапласа.

Обчислення $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ при великих m_1 та m_2 також викликає труднощі. Тому застосовується наступна теорема.

Інтегральна теорема Муавра- Лапласа. При будь-яких a, b $(a < b)$ має місце граничне співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(a \leq \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) = \int_a^b \varphi(t)dt. \qquad (35)$$

За допомогою співвідношення (35) можна довести, що

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \int_a^b \varphi(t)\, dt,$$

де $a = \frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}, b = \frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Визначений інтеграл можна знайти, користуючись однією з первісних функції $\varphi(x)$. Є табличні значення первісних $\Phi(x)$ та $\Phi_0(x)$:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \qquad (36)$$

$$\Phi_0(x) = \int_{0}^{x} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \qquad (37)$$

Функція $\Phi(x)$ називається функцією Лапласа, а $\Phi_0(x)$ називається нормованою функцією Лапласа.

При $x > 0$ має місце рівність: $\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x)$.

Корисно знати деякі властивості функції $\Phi(x)$:

1) $\Phi(x)$ зростає;
2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
3) $\Phi(x) = 0{,}9999 \ldots$ при $x \geq 4$;
4) $\Phi(0) = 0{,}5$;
5) $\Phi(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1$.

Таким чином, достатньо мати таблицю значень для проміжка $[0; 4]$.

Отже, ймовірності $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$, що представляють інтерес при великих n, можна обчислити, користуючись таблицею значень функції

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

за формулою

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

або

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi_0\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (38)$$

в силу того, що $\Phi(x) = 0{,}5 + \Phi_0(x)$ (значення $a = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$ та $b = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$ обчислюються заздалегідь).

Зауваження. Функція Лапласа в її стандартному представленні для заданого значення аргументу може бути обчислена за допомогою функції НОРМСТРАСП:

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \text{НОРМСТРАСП}(x).$$

3. Статистичні задачи, що розв'язуються за допомогою інтегральної теореми Муавра- Лапласа.

Теорема Бернуллі. Для схеми Бернуллі при будь-якому $\varepsilon > 0$ має місце граничне співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1, \qquad (39)$$

тобто практично вірогідно, що при достатньо великому числі випробувань n в схемі Бернуллі відносна частота успіху $\frac{m}{n}$ відрізняється від ймовірності успіху p при одному випробуванні за абсолютною величиною менш ніж на ε.

Статистичне означення ймовірності базується на на властивості стійкості відносної частоти. Теорема Бернуллі стверджує, що в математичній моделі така властивість частоти має місце.

Величина $\left|\frac{m}{n}-p\right|$ називається відхиленням відносної частоти від теоретичної ймовірності, а число ε з формули (39) допустимою похибкою відхилення. Число

$$\beta = P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right), \qquad (40)$$

що називається довірчою ймовірністю, показує ту долю випробувань, в яких відхилення експериментальної величини $\frac{m}{n}$ від теоретичної p не перевищує заданої похибки.

Частіше за всього розглядають довірчі ймовірності, що дорівнюють 0, 95, 0, 997, 0, 9999.

Теорема Бернуллі встановлює залежність між числами n, ε та β. З цією метою застосовують інтегральну теорему Муавра- Лапласа, з якої випливає, що при достатньо великих n

$$\beta = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (41)$$

Співвідношення (41) можна розглядати як рівняння для визначення одного з чисел n, ε та β, коли два інших відомі. Розглянемо основні типи задач на цю тему.

1) Знайти β, якщо задані n та ε.

Підставляємо спочатку в співвідношення (41) ε та n, а потім за таблицею значень знаходимо Φ_0.

2) Знайти ε, якщо задані n та β.

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо корінь x_β рівняння

$$\Phi_0(x) = \frac{\beta}{2}, \qquad (42)$$

звідки

$$\varepsilon \approx x_\beta\sqrt{\frac{pq}{n}}. \qquad (43)$$

3) Знайти n, якщо задані ε та β.

З рівняння (42) знаходимо x_β, а потім, враховуючи, що $x_\beta \approx \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, отримуємо

$$n \approx \left(\frac{x_\beta}{\varepsilon}\right)^2 \cdot pq. \qquad (44)$$

В прикладних задачах типу 1) -3) число p часто є невідомим, в цьому випадку використовують очевидну нерівність $pq \le \frac{1}{4}$, що є вірним для будь-яких $p \ge 0$, $q \ge 0$ та $p + q = 1$.

Нехай числа ε, β та n задані. При цьому припущенні можна можна довести, що з ймовірністю не меншою ніж β невідоме число p міститься в проміжку

$$\left(\frac{m}{n} - \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}; \frac{m}{n} + \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right), \qquad (45)$$

який називається довірчим інтервалом для ймовірності успіху в одному віпробуванні, а його кінці – довірчими границями. Отже, замінюючи невідому ймовірність p знайденою дослідним шляхом частотою, ми здійснюємо похибку, що не перевищує $\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}$.

Задача. Ймовірність того, що навмання відібрана деталь містить дефект, дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що при випадковому огляді 600 деталей цієї партії відносна частота появи нестандартної деталі відрізняється від відповідної ймовірності за абсолютною величиною не більш ніж на 0,05?

Розв'язання. Випробування, що розглядається, очевидно, задовольняє схему Бернуллі. Довірчу ймовірність β знайдемо за формулою (41), враховуючи, що тут $n = 600$, $p = 0{,}2$ ($q = 1 - p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$), $\varepsilon = 0{,}05$. Маємо

1) $\frac{n}{pq} = \frac{600}{0{,}2 \cdot 0{,}8}$; 2) $\sqrt{\frac{n}{pq}} \approx 61{,}2$; 3) $x_\beta = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \approx 0{,}05 \cdot 61{,}2 \approx 3{,}06$; 4) $\Phi_0(3{,}06) \approx 0{,}4989$.

Отже,

$$\beta = P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}2\right| \le 0{,}05\right) = 2\Phi_0(x_\beta) = 2 \cdot 0{,}4989 = 0{,}9978.$$

Відповідь: 0,9978.

Задача. Проведено навмання медичне обстеження 625 співробітників деякого підприємства та виявлено, що 40 людей страждають певним видом професійного захворювання. З довірчою ймовірністю 0,997 визначити границі, в яких міститься відсоток професійно хворих всього підприємства.

Розв'язання. Маємо $n = 625, m = 40$, $\beta = 0{,}997$, потрібно визначити границі довірчого інтервалу $\left(\frac{m}{n} - \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}; \frac{m}{n} + \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right)$. Обчислюємо: 1) $\frac{m}{n} = \frac{40}{625} = 0{,}064$; 2) за таблицею значень функції Лапласа знаходимо розвязок рівняння $\Phi_0(x) = \frac{\beta}{2}$, тобто таке значення x_β, при якому

$\Phi_0(x_\beta) = \frac{0{,}997}{2} = 0{,}4985$. Маємо $x_\beta = 2{,}97$; 3) знаходимо $\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}} = \frac{2{,}97}{2\sqrt{625}} = 0{,}0594$; визначаємо довірчі границі $\frac{m}{n} \pm \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}} = 0{,}064 \pm 0{,}0594$. Остаточно знаходимо

$$\left(\frac{m}{n} - \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right) \cdot 100\% = (0{,}064 - 0{,}0594) \cdot 100\% = 0,0046 \cdot 100\% = 0{,}46\%,$$

$$\left(\frac{m}{n} + \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right) \cdot 100\% = (0{,}064 + 0{,}0594) \cdot 100\% = 0{,}1234 \cdot 100\% = 12{,}34,$$

Тобто відсоток професійно хворих вього підприємства міститься в границях від 0,5% до 12,3%.

Відповідь: 0,5% < p <12,3%.

Висновки

В цьому розділі ми ознайомились з таким важливими поняттями, як подія та ймовірність події. Розглянуто дії над подіями та різні означення ймовірності: статистичне, класичне, геометричне, аксіоматичне. При застосування класичного означення ймовірності події переконались у важливості вивчення формул комбінаторики. При знаходженні ймовірності більш складних подій важливим є застосовування теореми додавання або множення, які дозволяють виразити шукану ймовірність через ймовірності більш простих подій. Також важливим поняттям є апріорна та апостеріорна ймовірності подій, які фігурують у формулі повної ймовірності й у формулі Байеса. Багато уваги приділено схемі Бурнуллі та граничним теоремам для схеми Бернуллі, а також використанню Excel при розв'язанні задач на дану тему. Розглянуто статистичні задачі, що розв'язуються на основі граничних теорем. Цей розділ підготовлює нас до вивчення наступної теми «Випадкові величини».

Література

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. — 10-е изд., стер.. — М.: Академия, 2005. — 576 с.

2. Волковец А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические указания по типовому расчету. — Минск БГУИР, 2009. — 65 с.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. — 12-е изд., перераб. — М.: Высшее образование, 2006. — 479 с.
4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие. — 11-е изд., перераб. — М.: Высшее образование, 2006. — 404 с.
5. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. — 1970.
6. Гнєденко Б. В. Нарис з історії теорії ймовірностей // Курс теорії ймовірностей. — К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. — 464с. С. 351—428.
7. Гнєденко Б. В. Курс теорії ймовірностей. — К.: ВПЦ Київський університет, 2010. — 464 с.
8. Дороговцев А.Я Збірник задач з теорії ймовірностей. — К.: Вища школа, 1976. — 384 с.
9. *Донченко В. С., Сидоров М. В.-С., Шарапов М. М.* Теорія ймовірностей та математична статистика. — Альма-матер. — Київ : «Академія», 2009. — 288 с.
10. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математичниа статистика. У 2 ч. — Ч. І. Теорія ймовірностей. — К.: КНЕУ, 2000. — 304 с.
11. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математичниа статистика. У 2 ч. — Ч. ІІ. Математична статистика. — К.: КНЕУ, 2001. — 336 с.
12. Жалдак М.І. , Кузьміна Н. М. та Михалін Г. О.Теорія ймовірностей і математична статистика. Підручник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. (Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів фізико-математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів. — Полтава. «Довкілля-К». 2009 р. — 500 с.
13. Жалдак М.І. , Кузьміна Н. М. та Михалін Г. О. Збірник задач і вправ з теорії ймовірностей і математичної статистики. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. 2009 р. — 610 с.
14. Жалдак М. І. , Кузьміна Н. М. , Берлінська С. Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології. — Київ. Вища школа. 1996. — 352 с.
15. Жалдак М.И., Квітко А. Н.Теория вероятностей с элементами информатики: Практикум. - Київ. Вища школа. 1989. 264 с.

16. Ефимов А. В., Поспелов А. Е. и др. 4 часть // Сборник задач по математике для втузов. — 3-е изд., перераб. и дополн.. М.:Физматлит, 2003. — Т. 4. — 432 с.
17. Колмогоров, А. Н. «Основные понятия теории вероятностей», М.: Наука, 1974.
18. Каленюк П. І. та ін. Теорія ймовірностей і математична статистика. — Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2005. — 240 с.
19. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розвязання задач. — К.: Центр учбової літератури, 2007. — 576 с.
20. Колемаев В. А. и др. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1991.
21. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для ВУЗов. — 2- изд., перераб. и доп.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. — 573 с.
22. Лихолетов И. И., Мацкевич И. Е. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. — Мн.: Выш. шк., 1976.
23. Лихолетов И. И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. — Мн.: Выш. шк., 1976.
24. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. 3-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2008. — 288 с.
25. Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М. Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Наука, 1986.
26. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. — М., 1982.
27. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. — Изд. 3-е. — М.: Наука, 1984. — 285 с.
28. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. — 752 с.