

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний заклад
**«Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського»**

С. В. Драганюк, О. О. Чепок

Елементи математичної логіки

Частина 1. Логіка висловлень

Практикум з розв'язання завдань

з навчальної дисципліни

«ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН І МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ»

для здобувачів вищої освіти першого року навчання

за ОПП Середня освіта (Математика)

Одеса – 2021

УДК 510.63

Елементи математичної логіки. Частина 1. Логіка висловлень. Практикум з розв'язання завдань з навчальної дисципліни «Елементи теорії множин і математичної логіки»/ С.В. Драганюк, О. О. Чепок

Рекомендовано до друку Вченою радою Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» (протокол _____ від _____ 2021 року)

Матеріал розраховано на студентів фізико-математичних спеціальностей закладів вищої освіти, у першу чергу педагогічних, учителів математики та учнів старших класів закладів загальної середньої освіти.

УКЛАДАЧІ:

Драганюк С. В., кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Чепок О. О., кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

РЕЦЕНЗЕНТИ

Варбанець П. Д., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова

Болдарєва О. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Навчально-тематичний план дисципліни.....	6
Розділ 1. Основні теоретичні відомості.....	8
1. 1. Основні поняття математичної логіки.....	8
1.2 Формальна мова в логіці висловлень.....	10
1.3. Семантика в логіці висловлень.....	11
1.4 Типи висловлень. Рівносильні висловлення.....	14
1.5. Таблиці істинності.....	15
1.6 Типи множин висловлень.....	18
1.7 Логічні наслідки множини висловлень.....	19
1.8. Контрольні запитання.....	20
Розділ 2. Практична частина.....	23
2.1. Приклади розв’язання основних типів завдань.....	23
2.2. Завдання та тести для самостійного розв’язання.....	31
Список використаної та рекомендованої літератури.....	35

ВСТУП

Мета та завдання навчальної дисципліни

Змістовий модуль «Елементи логіки висловлень. Алгебра висловлень» є частиною курсу «Елементи теорії множин і математичної логіки», який викладається для здобувачів освіти першого року навчання за першим (бакалаврським) рівнем за спеціальністю «Середня освіта (Математика)». Мета модуля полягає в тому, щоб сформувати у студентів усвідомлення зв'язку основних понять та методів математичної логіки не тільки з побудовою довільної математичної теорії, але і будь-якої іншої наукової теорії, а також зв'язку математичної логіки з логічним програмуванням, теорією алгоритмів, із багатьма іншими розділами інформатики та інженерної діяльності.

Завдання модуля можна:

- вивчення формальної мови логіки висловлень, принципи формалізації будь-якої наукової теорії, вивчення основних методів доведення та виводу істинних висловлень(формул) з множини висловлень(формул);
- формування у студентів поняття про висловлення та оперування над ними за допомогою логічних зв'язок, про істинність складних висловлень;
- вивчення методів логічного доведення та інтерпретацію висловлень;
- розвиток логічного, інтуїтивного та абстрактного мислення студентів.

Передумови для вивчення дисципліни: для опанування курсу «Елементи теорії множин та математичної логіки» необхідно, щоб студенти володіли на рівні, не нижче достатнього, навчальним матеріалом, визначеним програмою з математики для закладів загальної середньої освіти, елементами теорії множин, матеріалом дисципліни «Елементарна математика» .

Очікувані програмні результати навчання (ПР)

ПР 1. Демонструвати знання і розуміння основ математики, англійської мови і літератури.

ПР 8. Розв'язувати задачі різних рівнів складності курсів математики та інформатики.

Очікувані результати навчання

Як результат опанування модуля здобувач освіти повинен

знати:

- поняття про формальну мову логіки висловлень та її структурні елементи;
- функції на множині висловлень;
- види висловлень;
- основні повні множини логічних зв'язок;
- аксіоматику та правила виводу логіки висловлень;
- основні методи доведення: аксіоматичний, виведення з гіпотез, доведення за Бетом, метод резолюцій;
- основні характеристики методів доведення: повнота, коректність, незалежність, розв'язність системи аксіом та ін.;

вміти:

1. демонструвати та застосувати отримані знання, зокрема:

- перевіряти чи є вираз висловленням,
- визначати тип висловлення:
- виводити істинні висловлення з системи аксіом та множини висловлень аксіоматичним методом;
- будувати семантичні таблиці висловлень, по цих таблицях перевіряти чи є висловлення тавтологією, та здійснювати вивід з гіпотез за допомогою семантичних таблиць;
- будувати ДНФ та КНФ, рівносильні даному висловленню як за допомогою таблиць істинності так і за допомогою еквівалентних підформул;
- користуватись методом резолюцій для визначення типу множини та виводу диз'юнкту з множини диз'юнктивів;

2. використовувати відповідний математичний апарат для розв'язування задач різної складності, зокрема, підвищеної, зі шкільних програм з математики;

3. виокремлювати компоненти математичної задачі, пояснювати їх взаємозв'язки та розробляти, пропонувати різні підходи до розв'язування.

Міждисциплінарні зв'язки: лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз, теорія множин, математична логіка, дискретна математика, методика навчання шкільного курсу математики.

НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ДИСЦИПЛІНИ

(згідно робочої програми з дисципліни «Елементи теорії множин і математичної логіки»)

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин									
	Денна форма					Заочна форма				
	усього	л	п	лаб.	с.р.	усього	л	п	лаб	с.р.
Змістовий модуль II. Елементи логіки висловлень. Алгебра висловлень										
Тема 5. Формальна мова, алфавіт логіки висловлювань. Таблиці істинності.	16	2	4		10	16	2	1		13
Тема 6. Методи доведення у логіці висловлень	16	2	4		10	16	2	1		13
Тема 7. Метод резолюцій	16	2	4		10	16	2	1		13
Разом за змістовим модулем 2	48	6	12		30	48	6	3		39

Теми практичних занять

№	Назва теми	Кількість годин	
		Денна форма	Заочна форма
1	Формальна мова, алфавіт логіки висловлювань. Вирази висловлень у математичні логіці. Доведення за індукцією для висловлень. Правила опускання дужок. Означування та істинності означування. Їх існування та єдність. Двохелементна Булева алгебра.	1	1
2	Типи висловлювань, рівносильні висловлювання.	1	
3	Таблиці істинності. Використання таблиць істинності для визначення типів висловлень та їх рівносильності.		
4	Типи множин висловлювань. Їх визначення за допомогою таблиць істинності.	1	
5	Логічні наслідки з множин висловлень, інтерпретації, їх властивості. Алгоритм знаходження логічних наслідків.	1	
Усього		4	1

Розділ 1. Основні теоретичні відомості

1.1. Основні поняття математичної логіки

Ще в логіці Аристотеля *під висловленням розуміли будь-яке розповідне речення, твердження або елементарний умовивід*. В цій логіці висловлення бувають трьох видів: істинні, хибні та невизначені.

Наприклад висловлення «В театрі відбудеться вистава» є невизначеним, якщо не вказати час та назву театру, тобто неможливо перевірити істинність даного твердження.

У математичній логіці розглядають тільки істинні або хибні висловлення. Нові висловлення з вже існуючих отримують за допомогою логічних зв'язок. **Використовують, як правило, 5 логічних зв'язок:**

- 1) **Заперечення** формалізується за допомогою символу « $\neg$ », замість цієї зв'язки можна вживати частку «не».
- 2) **Кон'юнкція** формалізується за допомогою символу « $\wedge$ », українською її часто замінюють сполучником «і».
- 3) **Диз'юнкція** формалізується за допомогою символу « $\vee$ », замість цієї зв'язки часто вживають сполучник «або».
- 4) **Імплікація** формалізується за допомогою символу « $\rightarrow$ », звичайною мовою її часто виражають фразами «якщо ..., то ...» або «впливає» і таке інше.
- 5) **Еквіваленція** формалізується за допомогою символу « $\leftrightarrow$ », яка звичайною мовою часто виражається фразами «тоді і тільки тоді» або «еквівалентне».

Для пояснення вищезазначених зв'язок, введемо наступне означення:

Означення 1.1. Нехай X деякий об'єкт. Позначимо через α висловлення «об'єкт X володіє властивістю P », а через β - «об'єкт X володіє властивістю Q ».

1. Запереченням висловлення α є висловлення, яке позначається $\neg \alpha$ і формулюється у виді «об'єкт X не володіє властивістю P »

2.Кон'юнкцією висловлень α і β є висловлення, яке позначається $\alpha \wedge \beta$ і означає, що «об'єкт X володіє властивостями P і Q одночасно»

3.Диз'юнкцією висловлень α і β є висловлення, яке позначається $\alpha \vee \beta$ і означає, що «об'єкт X володіє хоча б однією з властивостей P або Q»

4.Еквіваленцією висловлень α і β є висловлення, яке позначається $\alpha \leftrightarrow \beta$ і означає, що «об'єкт X одночасно володіє властивостями P і Q або одночасно цими властивостями не володіє».

5.Імплікацією висловлень α і β є висловлення, яке позначається $\alpha \rightarrow \beta$ і стверджує, що «якщо X володіє властивістю P, то X володіє властивістю Q»

В математичній логіці логічні зв'язки є просто символами, які не несуть ніякого навантаження з точки зору їх сенсу.

Означення 1.2 Елементарним висловленням називається *таке висловлення, що будь-яка його частина вже не є висловленням.*

Зауваження 1.1

1.Висловлення $(\neg \alpha)$ істинне тоді і тільки тоді, коли висловлення (α) хибне і навпаки.

2.Кон'юнкція двох висловлень істинна тоді і тільки тоді, коли істинне кожне з цих висловлень. Кон'юнкція двох висловлень хибна тоді і тільки тоді, коли хибне хоча б одне з цих висловлень.

3.Диз'юнкція двох висловлень істинна тоді і тільки тоді, коли істинне хоча б одне з цих висловлень. Диз'юнкція двох висловлень хибна тоді і тільки тоді, коли хибне кожне з цих висловлень.

4.Еквіваленція двох висловлень істинна тоді і тільки тоді, коли ці висловлення одночасно істинні або одночасно хибні. Еквіваленція двох висловлень хибна тоді і тільки тоді коли одне з них істинне, а інше хибне.

5.Імплікація двох висловлень хибна тоді і тільки тоді, коли перше з цих висловлень істинне, а друге-хибне. В решті випадків імплікація двох висловлень істинна.

1.2 Формальна мова в логіці висловлень

Означення 1.3. Будь-яка формальна мова складається з трьох частин:

- 1) алфавіт;
- 2) синтаксис;
- 3) семантика.

Алфавіт логіки висловлень складається з усіх символів, які використовуються в цій теорії.

Означення 1.4 Алфавіт логіки висловлень складається з наступних груп символів:

- 1) пропозиційні символи;
- 2) логічні зв'язки: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$
- 3) «, ()»

Синтаксис в математичній логіці - це формальні правила, за якими з символів алфавіту будуються висловлення.

Означення 1.5. Виразом у математичній логіці називається довільна послідовність символів алфавіту формальної мови.

Означення 1.6.

1) Будь-який пропозиційний символ є висловленням, яке називається атомарним висловленням або атомом.

2) Якщо α і β висловлення, то висловленнями також є вирази:

$(\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\neg \alpha), (\neg \beta).$

3) Інших висловлень, крім описаних в перших двох пунктах не існує.

Пропозиційними символами позначаються елементарні висловлення. Щоб не вказувати кожний раз завжди будемо вважати, що великими латинськими літерами позначаються саме пропозиційні символи, а грецькими літерами позначаються не елементарні висловлення.

Означення 1.7. Висловлення β називається підформулою висловлення α , якщо β є частиною висловлення α .

Означення 1.8. *Висловлення a називається складеним, якщо воно володіє під формулами.*

На відміну від складених висловлень, елементарні висловлення підформули не мають.

З означення 1.5 випливає, що будь-яке складене висловлення отримується з уже існуючих висловлень за допомогою логічних зв'язок.

Означення 1.9. *Логічною довжиною висловлення називається кількість логічних зв'язок, які в ньому використовуються.*

Частіше цю величину називають просто довжиною висловлення.

З метою зменшення кількості дужок в арифметичних виразах існує узгодження почерговості виконання арифметичних операцій. З цією ж метою використовують аналогічне узгодження для висловлення.

Зауваження 1.2

1. У будь-якому висловленні зовнішні дужки випускають.

2. Без дужок почерговість виконання логічних зв'язок наступна:

1) заперечення;

2) кон'юнкція з диз'юнкцією;

3) еквівалентність;

4) імплікація

3. Зв'язки одного і того ж рівня виконуються відповідно їх запису у висловленні зліва направо.

1.3. Семантика в логіці висловлень

У попередньому пункті ми встановили, що в математичній логіці висловленням вважається абстрактний ланцюжок символів її алфавіту, побудований за формальними правилами викладеними в означенні 1.6. Інтерпретація будь-якого висловлення слугує для визначення його істинності. Для цього використовують відображення певної множини висловлень у множину так званих істинносних значень.

Означення 1.10 *Множиною істинносних значень називається двоелементна множина $\{t, f\}$.*

Елементом t , f загалом ніякого сенсового навантаження не надається. Хоча, для кращого розуміння слід зауважити, що t -це початкова літера англійського слова «true» (істина), а f -початкова літера слова «false» (хибність).

Означення 1.11. Означуванням називається довільна функція F , яка відображає множину атомів формальної мови у множину істинних значень (t, f) . Отже, означення-це функція, яка присвоює одне з істинних значень кожному атому тієї множини, на якій вона задана.

Для того, щоб встановити істинність будь-якого висловлення, нам потрібно розширити область визначення цієї функції на множину всіх висловлювань.

Означення 1.12. Нехай A підмножина множини B і на множині A задана функція F . Функція V задана на множині B називається розширенням функції F на множину B , якщо для будь-якого елемента x множини A виконується $V(x)=F(x)$, тобто коли на підмножині A ці функції співпадають.

Оскільки над висловленнями можна виконувати певні дії за допомогою логічних зв'язок, то і над літерами t і f потрібно задавати операції з відповідними обмеженнями. Задамо на множині істинних значень алгебраїчні операції за допомогою так званих таблиць Келі (Таблиці 1.1.).

Таблиці 1.1

	$\sim$
t	f
f	t

Π	t	f
t	t	t
f	t	f

Π	t	f
T	T	f
F	F	f

$\sim >$	t	f
t	t	f
f	t	t

$< \sim >$	t	f
t	t	f
f	f	t

Означення 1.13. Множина $\{t, f\}$ з заданими на ній алгебраїчними операціями

$$\sim, \Pi, \text{П}, \sim >, < \sim >$$

називається двоелементною булевою алгеброю¹, а операції у таблиці 1.1 називають булевими.

Використовуючи зауваження 1.1 легко переконатись, що булеві операції з точки зору істинності відповідають діям відповідних логічних зв'язок на висловлювання.

Означення 1.14. Істинносним означуванням називається функція V , яка відображає множину висловлень у множину істинносних значень $\{t, f\}$ і задовольняє наступні умови:

1.2 $V(A) = F(A)$, де A -довільний атом, а F -деяке означування;

1.3 $V(\neg \alpha) = \sim V(\alpha)$;

1.4 $V(\alpha \vee \beta) = V(\alpha) \Pi V(\beta)$;

1.5 $V(\alpha \wedge \beta) = V(\alpha) \text{П} V(\beta)$;

1.6 $V(\alpha \leftrightarrow \beta) = V(\alpha) < \sim > V(\beta)$;

1.7 $V(\alpha \rightarrow \beta) = V(\alpha) \sim > V(\beta)$;

Де α і β будь-які висловлення з області визначення V .

Теорема 1.1. Для будь-якого означування F існує єдине істинносне означення V , яке є його розширенням.

¹ Видатний англійський математик Джордж Буль 1815-1864 рр., досліджував алгебраїчні структури, тобто множини з заданими на них алгебраїчними операціями з певними обмеженнями. На його честь ці структури названі-булевими алгебрами.

Зрозуміло, що будь-яке істинносне означування є розширенням якогось означування заданого на певній множині атомів.

Зауваження 1.3. На множині висловлень, яка містить n атомів можна задати скінченну кількість, а саме 2^n різних означувань, а тому стільки ж й істинносних означувань.

1.4. Типи висловлень. Рівносильні висловлення

В математичній логіці розглядають три типи висловлень: **тавтологія**, **виконуване** та **суперечливе висловлення**.

Означення 1.15 Висловлення α називається логічно-істинним або тавтологією, якщо для будь-якого істинносного означування V виконується $V(\alpha)=t$.

Означення 1.16. Висловлення α називається виконуваним (підтверджуваним, несуперечливим), якщо існує істинносне означування V , таке що $V(\alpha)=t$.

Означення 1.16 Висловлення α називається хибним(невиконуваним, несуперечливим), якщо для будь-якого істинносного означування V виконується $V(\alpha)=f$.

Означення 1.17. Висловлення α і β називаються рівносильними, пишуть $\alpha \Leftrightarrow \beta$, якщо для будь-якого істинносного означування V виконується $V(\alpha)=V(\beta)$.

Зауваження 1.4.

- 1) Висловлення α є тавтологією тоді і тільки тоді, коли його заперечення суперечливе і навпаки.
- 2) Будь-яка тавтологія є виконуваним висловленням.
- 3) Висловлення α і β рівносильні тоді і тільки тоді, коли висловлення $\alpha \leftrightarrow \beta$ є тавтологією.
- 4) Висловлення α і β рівносильні тоді і тільки тоді, коли рівносильні заперечення цих висловлень.

1.5. Таблиці істинності

На множині, яка складається з одного атома A можна задати два означування $F_1(A)=t$, $F_2(A)=f$. Коротко це можна записати у вигляді стовбця, що складається з самого атома та його значень:

A
t
f

На множині двох атомів A і B можна задати чотири означування:

$$F_1(A)=t, F_1(B)=t;$$

$$F_2(A)=f, F_2(B)=t;$$

$$F_3(A)=t, F_3(B)=f;$$

$$F_4(A)=f, F_4(B)=f;$$

Коротко це можна записати у вигляді двох стовбців:

A	B
t	t
f	t
t	f
f	f

Аналогічно стовбцю атома та його значень за допомогою рівностей 1.3-1.7 означення 1.14 та таблиць 1.1 можна записати стовбець будь-якого висловлення та його істинносних значень.

Так якщо стовбець має вид :

A
t
f

То стовпець висловлення $\neg A$ має вид:

$\neg A$
f
t

Для його написання використовується рівність 1.3 та перша таблиця з 1.1 .

Аналогічно отримаємо й таблиці для $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$, $\neg A$.

Таблиці 1.2.

A	B	$A \rightarrow B$
t	t	t
f	t	t
t	f	f
f	f	t

A	$\neg A$
T	f
F	t

A	B	$A \leftrightarrow B$
T	t	t
f	t	f
t	f	f
f	f	t

A	B	$A \vee B$
t	T	t
f	T	t
t	F	t
f	F	f

A	B	$A \wedge B$
t	t	t
f	t	f
t	f	f
f	f	f

Використання таблиць істинності – це один з основних методів розв’язання задач у математичній логіці.

Означення 1.18. Скороченою таблицею істинності висловлення називається таблиця істинності, в якій викреслюються всі проміжні

стовбці, тобто таблиця, яка складається тільки з стовбців значень атомів та самого висловлення.

Зауваження 1.5.

- 1) Скорочена таблиця істинності висловлення залежного від n атомів складається з 2^n рядків та $n+1$ стовбців. Кожний рядок цієї таблиці відповідає одному з означувань заданих на множині цих атомів².
- 2) Диз'юнкція двох висловлень хибна тільки на буквах f, f , в інших рядках таблиці істинності вона істинна.
- 3) Кон'юнкція двох висловлень істинна тільки на буквах t, t , в інших рядках таблиці істинності вона хибна.
- 4) Імплікація двох висловлень хибна тільки на буквах t, f , в інших рядках таблиці істинності вона істинна.
- 5) Еквіваленція двох висловлень істинна на однакових буквах і хибна на різних буквах рядків таблиці істинності.
- 6) У таблиці істинності стовбці висловлень співпадають тоді і тільки тоді, коли ці висловлення рівносильні (тобто, тоді і тільки тоді, коли висловлення мають однакові скорочені таблиці істинності).
- 7) Висловлення α є тавтологією тоді і тільки тоді, коли останній стовпець його таблиці істинності складається тільки з букв t .
- 8) Висловлення α виконуване тоді і тільки тоді, коли останній стовпець його таблиці істинності містить хоча б одну літеру t .
- 9) Висловлення α суперечливе тоді і тільки тоді, коли останній стовпець складається тільки з літери f .

За допомогою таблиць істинності самостійно доведіть наступну теорему.

Теорема 1.2.

Список основних тавтологій:

- 1) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ - закон де Моргана
- 2) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ - закон де Моргана
- 3) $\neg(\neg A) \leftrightarrow A$ - закон подвійного заперечення

² Рядок позначень атомів та підформул висловлювання не враховується.

- 4) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ - закон контрапозиції
- 5) $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ - перший закон силогістики
- 6) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ - другий закон силогістики
- 7) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$ -закон транспозиції
- 8) $A \vee \neg A$ - закон виключеного третього
- 9) $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$ - асоціативність кон'юнкції
- 10) $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$ - асоціативність диз'юнкції
- 11) $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$ - комутативність кон'юнкції
- 12) $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$ - комутативність диз'юнкції
- 13) $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ - дистрибутивність кон'юнкції відносно диз'юнкції
- 14) $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ - дистрибутивність диз'юнкції відносно кон'юнкції
- 15) $A \vee A \leftrightarrow A$
- 16) $A \wedge A \leftrightarrow A$
- 17) $A \wedge (B \vee \neg B) \leftrightarrow A$
- 18) $A \vee (B \wedge \neg B) \leftrightarrow A$
- 19) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$
- 20) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

1.6 Типи множин висловлень

Означення 1.19. Кажуть що істинносне означування V підтверджує множині висловлень N якщо для будь-якого висловлення α з множини S виконується $V(\alpha)=t$.

Означення 1.20. Істинносне означування V , яке підтверджує множині висловлень S називається інтерпретацією множини висловлень S . Множина всіх інтерпретацій множини висловлень S позначається $Int(S)$.

Означення 1.21. Множина висловлень S називається виконуваною(несуперечливою, підтверджуваною), якщо існує істинносне означування V таке, що для будь-якого висловлення α з множини S виконується рівність $V(\alpha)=t$.

Це ж означення можна сформулювати наступним чином.

Означення 1.22. Множина висловлень S називається виконуваною (несуперечливою, підтверджуваною), якщо існує істинносне означування V , яке підтверджує цю множину висловлень.

Означення 1.23 Множина висловлень S називається суперечливою (невиконуваною, непідтверджуваною), якщо не існує істинного означування, яке підтверджує цю множину висловлення.

Це ж означення можна записати так:

Означення 1.24 Множина висловлень S називається суперечливою (невиконуваною, непідтверджуваною), якщо для будь-якого висловлення α з множини S існує істинносне означування V таке, що $V(\alpha)=f$.

Зауваження 1.6. Для перевірки чи є множина висловлень S суперечливою слід побудувати одну таблицю істинності для всіх висловлень з множини S . При цьому якщо чергове висловлення виявляється хибним, то відповідний рядок таблиці істинності викреслюється і при подальшій її побудові не використовується. Множина висловлень S суперечлива, якщо викреслюються всі рядки таблиці істинності. У протилежному випадку вона несуперечлива.

1.7 Логічні наслідки множини висловлень

Означення 1.25. Висловлення σ називається логічним наслідком множини висловлень S і позначається так $S \models \sigma$, якщо для будь-якого істинного означування V такого, що для будь-якого висловлення α з множини S виконується $V(\alpha)=t$, виконується також і $V(\sigma)=t$.

Простіше це означення можна сформулювати так:

Означення 1.26. Висловлення σ називається логічним наслідком множини висловлень S і позначається так $S \models \sigma$, якщо будь-яке істинносне означування яке підтверджує множину висловлень S підтверджує і висловлення σ . Множина всіх логічних наслідків множини висловлень S позначається $\text{Con}(S)$.

Зауваження 1.7. Для того, щоб перевірити чи є висловлення σ логічним наслідком множини висловлень S потрібно:

1. Побудувати одну таблицю істинності всіх висловлень множини S , викреслюючи в ній ті рядки в яких хоча б одне з висловлень множини S хибне.
2. Якщо висловлення σ істинне в усіх невикреслених рядках цієї таблиці істинності, то воно є логічним наслідком множини висловлень S .
3. Якщо хоч в одному рядку цієї таблиці висловлення σ хибне, то воно не буде логічним наслідком множини S .

Теорема 1.3. Властивості логічних наслідків множини висловлень :

Нехай S і S' довільні множини висловлень, а T -множина всіх тавтологій. Тоді:

- 1) $\text{Con}(\emptyset) = T$
- 2) якщо $S \subset S'$, то $\text{Con}(S) \subset \text{Con}(S')$
- 3) $S \subset \text{Con}(S)$
- 4) $T \subset \text{Con}(S)$
- 5) $\text{Con}(S) = \text{Con}(\text{Con}(S))$

1.8. Контрольні запитання

1. Навіть всі логічні зв'язки. Дайте їх визначення. Якими символами вони позначаються? Якими українськими фразами замінюють ці зв'язки?
2. Яке висловлення називають елементарним? Скільки підформул може мати елементарне висловлення?
3. З яких символів складається алфавіт логіки висловлень?
4. Назвіть складові частини будь-якої формальної мови?

- 5.Що називають виразом в математичній логіці?
- 6.Наведіть приклади висловлень та виразів, що не є висловленнями.
- 7.Яке висловлення називається підформулою? Наведіть приклади висловлення та знайдіть всі його підформули.
- 8.Чим відрізняються складені висловлення від елементарних?
- 9.Що називають логічною множиною висловлення? Наведіть приклад висловлення та порахуйте його довжину.
- 10.Назвіть почерговість виконання логічних зв'язок у висловленні. З якою метою узгоджують почерговість виконання арифметичних операцій?
- 11.Що називають множиною істинносних значень, які операції вводяться над ними? Що таке двоелементна булева алгебра?
- 12.Що називається означуванням?
- 13.Що називають істинносним означуванням? Випишіть всі умови, які на нього накладаються.
- 14.Скільки існує істинносних означувань, які є розширеннями певного істинносного означування?
- 15.Назвіть всі типи висловлень у математичній логіці. Дайте їх означення. Наведіть приклади кожного з них.
- 16.Які висловлення називаються рівносильними? Як рівносильність висловлень пов'язана з тавтологіями?
- 17.Самостійно випишіть таблиці істинності для всіх логічних зв'язок.
- 18.Як зробити скорочену таблицю істинності? Скільки рядків і стовбців має скорочена таблиця істинності для n атомів?
- 19.Як по таблиці істинності визначити:
 - а) тип висловлень;
 - б) рівносильність висловлень;
 - в) суперечливість множини висловлень;
 - г) чи є дане висловлення логічним наслідком множини висловлень ?
- 20.Випишіть по пам'яті всі відомі вам тавтології.
- 21.Наведіть закони:
 - а)де Моргана;

- б) подвійного заперечення;
- в) виключеного третього;
- г) асоціативність диз'юнкту;
- д) комутативність кон'юнкції .

22. За якої умови кажуть, що істинносне означування V підтверджує множину висловлень N ? Що таке інтерпретація множини висловлень?

23. Назвіть типи множин висловлень. Дайте їх означення. Наведіть приклад множини висловлень та визначіть її тип.

34. Дайте означення логічного наслідку множини висловлень. Як позначається множина всіх логічних наслідків множини висловлень? Наведіть властивості логічних наслідків множини висловлень та доведіть їх.

Розділ 2. Практична частина

2.1. Приклади розв'язання основних типів завдань

Приклад 1. Нехай задані елементарні висловлення

$$\alpha : x < 5$$

$$\beta : x > -5$$

$$\gamma : x \in (-5, 5)$$

$$\delta : x \text{ ділиться на } 4$$

$$\varepsilon : x \text{ ділиться на } 2$$

Чи є істинними наступні висловлення

А) $\alpha \wedge \beta$;

Б) $\neg \delta \wedge \delta$

В) $\delta \rightarrow \varepsilon$?

Розв'язання.

А) Складене висловлення $\alpha \wedge \beta$ означає подвійну нерівність $-5 < x < 5$. Зрозуміло, що цю нерівність задовольняють всі дійсні числа з інтервалу $(-5, 5)$, та тільки вони. Таким чином, висловлення $(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \gamma$ є істинним.

Б) Висловлення $\neg \delta$ має вид: x не ділиться на 4, причому очевидно, що якщо висловлення δ хибне, то $\neg \delta$ - істинне і навпаки. Отже, висловлення $(\neg \delta \wedge \delta)$ є хибним.

В) Висловлення $\delta \rightarrow \varepsilon$ означає, що якщо число ділиться на 4, то воно ділиться і на 2. Отже, дане висловлення істинне.

Зауваження: Дещо важче зрозуміти, що істинним є кожне з висловлень «якщо 20 ділиться на 4, то 20 ділиться на 2; якщо 30 ділиться на 4, то 30 ділиться на 2». З хибного висловлення може випливати яке завгодно висловлення, як істинне так і хибне.

Приклад 2. Чи є заданий вираз висловленням

А) $\rightarrow A \wedge B$;

Б) $((\neg A) \rightarrow (B \wedge C))$?

Розв'язання.

А) Вираз $(\rightarrow A \wedge B)$ не є висловленням, оскільки за означенням 1.6 імплікація має знаходитись між двома висловленнями на які вона діє, а в цьому прикладі зліва від імплікації висловлення немає.

Б) Вираз $((\neg A) \rightarrow (B \wedge C))$ - висловлення.

Дійсно:

- 1) A, B, C -це атоми, тому за 1 пунктом означення 1 вони є висловленнями.
- 2) Далі за пунктом 2 цього означення висловленнями є $\neg A, B \wedge C$, оскільки вони отримані з висловлень 1) за допомогою логічних зв'язок.
- 3) $((\neg A) \rightarrow (B \wedge C))$ - теж висловлення, тому що воно отримане з висловлення 2) за допомогою імплікації. Логічна довжина цього висловлення дорівнює трьом.

Приклад 3. Запишіть висловлення $((\neg A) \rightarrow (B \wedge C))$ без використання дужок

Розв'язання. Згідно з зауваженням 1.2 висловлення $((\neg A) \rightarrow (B \wedge C))$ можна записати зовсім без дужок $\neg A \rightarrow B \wedge C$, оскільки, спочатку виконується кон'юнкція та заперечення, потім імплікація, а зовнішні дужки можна прибрати взагалі.

Приклад 4. Запишіть всі означування для відповідної кількості атомів у висловленні $(A \leftrightarrow (\neg B \rightarrow C))$.

Розв'язання. Скільки означувань можна задати на множині Q , яка складається з трьох атомів, $Q = \{A, B, C\}$? Згідно зауваження 1.2. можна задати $2^3 = 8$ означувань. Перелічимо їх.

$F_1(A) = t, F_1(B) = t, F_1(C) = t;$

$F_2(A) = f, F_2(B) = t, F_2(C) = t;$

$F_3(A) = t, F_3(B) = f, F_3(C) = t;$

$F_4(A) = f, F_4(B) = f, F_4(C) = t;$

$F_5(A) = t, F_5(B) = t, F_5(C) = f;$

$F_6(A) = f, F_6(B) = t, F_6(C) = f;$

$F_7(A) = t, F_7(B) = f, F_7(C) = f;$

$F_8(A) = f, F_8(B) = f, F_8(C) = f.$

Приклад 5. Довести за допомогою істинносних означувань, що висловлення $A \vee \neg A$ є тавтологією.

Розв'язання.

I. Висловлення, яке розглядається за умовою, містить тільки один пропозиційний символ (атом). Скільки означувань можна задати на множині Q , яка складається з одного атома, $Q=\{A\}$? Ясно, що атом A може бути істинним, або хибним. Отже на множині Q можна задати тільки два означування $F_1(A)=t, F_2(A)=f$.

II. Нехай V_1 і V_2 істинносні означування, які є розширеннями означувань F_1 і F_2 відповідно. За рівністю 1.2 буде $V_1(A)=F_1(A)=t, V_2(A)=F_2(A)=f$.

III. Знайдемо значення функції $V_1(A \vee \neg A)$.

1) За рівністю 1.3 маємо $V_1(\neg A) = \sim V_1(A) = \sim F_1(A) = \sim t = f$, за таблицею 1.1 для булевого заперечення.

2) За рівністю 1.4, використовуючи результат пункту 1) отримаємо:

$V_1(A \vee \neg A) = V_1(A) \sim V_1(A) = t \vee f = t$, що видно таблиць 1.1.

IV. Аналогічно пункту III доводиться, що $V_2(A \vee \neg A) = t$.

Оскільки інших означувань на множині Q задати не можна, то ми довели, що висловлення $A \vee \neg A$ завжди істинне, тобто, тавтологія. ■

Приклад 6. Довести, що висловлення $A \vee \neg A$ - суперечливе

Розв'язання. Інтуїтивно в цьому легко переконатись за допомогою зауваження 1.1. Ясно, що одне з висловлень A або $\neg A$ – хибне, а кон'юнкція двох висловлень одне з яких хибне є також хибним висловленням. ■

Приклад 7. Довести, що висловлення $A \wedge B$ виконуване.

Розв'язання. Для встановлення цього факту введемо два істинносних означування:

$V_1(A) = V_1(B) = t, V_2(A) = V_2(B) = f$. З рівності 1.4 отримаємо $V_1(A \wedge B) = t$,

$V_2(A \vee B) = f$. Таким чином, висловлювання $A \vee B$ може бути як істинним, так і хибним. Зрозуміло, що це висловлення не може бути ні суперечливим, ні тавтологією. ■

Приклад 8. За допомогою таблиць істинності довести, що висловлення $(\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ є тавтологією.

Розв'язання. Висловлення містить два атоми, отже відповідна таблиця істинності містить 4 рядки

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \rightarrow B$	$(\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$
t	t	f	t	t	t
f	t	t	t	t	t
t	f	f	f	f	t
f	f	t	t	t	t

З останнього стовбця цієї таблиці видно, що висловлення $(\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ завжди істинне, тобто тавтологія. ■

Зауваження. За допомогою такої таблиці істинності можна також довести, що висловлення $\neg A \vee B$ і $A \rightarrow B$ рівносильні.

Приклад 9. Задане висловлення $\alpha: (A \leftrightarrow \neg B) \vee (C \rightarrow \neg B)$. За допомогою таблиць істинності визначте тип висловлення.

Розв'язання.

Побудуємо таблицю істинності, яка складається з 8 рядків (оскільки висловлення містить 3 атоми).

A	B	C	$\neg B$	$A \leftrightarrow \neg B$	$C \rightarrow \neg B$	$(A \leftrightarrow \neg B) \vee (C \rightarrow \neg B)$
t	t	t	f	f	f	f
f	t	t	f	t	f	t
t	f	t	t	t	t	t
f	f	t	t	f	t	t
t	t	f	f	f	t	t
f	t	f	f	t	t	t
t	f	f	t	t	t	t
f	f	f	t	f	t	t

Оскільки у останньому стовбчику присутня буква «f», то висловлення α не є тавтологією, оскільки присутня буква «t», то висловлення α є виконуваним.

Відповідь: висловлення α є виконуваним.

Приклад 10. Для заданої множини висловлень

$S = \{B \rightarrow (A \wedge C); C \rightarrow A\}$ перевірити, чи є вона суперечною?

Розв'язання.

A	B	C	$A \wedge C$	$B \rightarrow (A \wedge C)$	$C \rightarrow A$
t	t	t	t	t	f
f	t	t	f	f	
t	f	t	t	t	t
f	f	t	f	t	t
t	t	f	f	f	
f	t	f	f	f	
t	f	f	f	t	t
f	f	f	f	t	t

Оскільки, існує рядок таблиці, у якому кожне висловлення з множини S є істинним, то існує істинносте означування, яке підтверджує множину висловлень, отже множина висловлень S не є суперечною.

Приклад 11. За допомогою таблиць істинності перевірте, чи є висловлення $\sigma: A \leftrightarrow B$ логічним наслідком множини висловлень $S = \{B \rightarrow (A \wedge C); C \rightarrow A\}$

A	B	C	$A \wedge C$	$B \rightarrow (A \wedge C)$	$C \rightarrow A$	$A \leftrightarrow B$
t	t	t	t	t	f	
f	t	t	f	f		
t	f	t	t	t	t	f
f	f	t	f	t	t	t
t	t	f	f	f		
f	t	f	f	f		
t	f	f	f	t	t	f
f	f	f	f	t	t	t

Оскільки, існують рядки, у яких всі висловлення з множини S є істинними, але висловлення σ є хибним, то висловлення σ не є логічним наслідком з множини S .

Приклад 12. За допомогою таблиць істинності перевірте, чи є висловлення $\sigma: A \leftrightarrow B$ логічним наслідком множини висловлень $S = \{B \rightarrow (A \wedge C); C \rightarrow A; B \vee (C \wedge \neg A)\}$

A	B	C	$A \wedge C$	$B \rightarrow (A \wedge C)$	$C \rightarrow A$	$C \wedge \neg A$	$B \vee (C \wedge \neg A)$	$A \leftrightarrow B$
t	t	t	t	t	f	f	t	
f	t	t	f	f				
t	f	t	t	t	t	f	f	
f	f	t	f	t	t	t	t	t
t	t	f	f	f				
f	t	f	f	f				
t	f	f	f	t	t	f		
f	f	f	f	t	t	f		

Оскільки таблиця містить єдиний рядок, у якому висловлення з множини та висловлення σ є істинні, то висловлення σ є логічним наслідком з множини S .

2.2. Завдання та тести для самостійного розв'язання.

Тестові завдання

1. Нехай дані висловлення α : об'єкт X володіє властивістю P і β -об'єкт X володіє властивістю Q . Як формулюється висловлення $\alpha \rightarrow \beta$?

- а) якщо X володіє властивістю P , то X володіє властивістю Q ;
- б) об'єкт X володіє хоча б однією з властивостей P або Q ;
- в) об'єкт X володіє властивостями P і Q одночасно;
- г) об'єкт X не володіє властивістю P ?

2. Який з виразів є висловленням

- а) Кожне дійсне число задовольняє нерівність $x^2 \geq 0$;
- б) Хай живе математика!;
- в) Розкрийте підручник на сторінці 11;
- г) Розв'язати рівняння $x^2 + 7x + 1 = 0$?

3. Яку довжину має висловлення $\neg A \rightarrow (\neg B \leftrightarrow (C \wedge A))$:

- а) 6;
- б) 4;
- в) 5;
- г) 3?

4. Яке з висловлювань є тавтологією

- а) $\alpha \wedge \neg \alpha$
- б) $\alpha \vee \neg \alpha$
- в) $\alpha \leftrightarrow \neg \alpha$
- г) $\alpha \rightarrow \neg \alpha$

5. Вкажіть хибне висловлення:

- а) якщо α тавтологія, то і $\neg \alpha$ тавтологія;
- б) висловлення α є тавтологією тоді і тільки тоді, коли його заперечення суперечливе;
- в) будь-яка тавтологія є виконуваним висловленням;

г) висловлення α і β рівносильні тоді і тільки тоді, коли висловлення $\alpha \leftrightarrow \beta$?

Завдання 1. Для кожної з логічних зв'язок назвіть умови при яких є істинним або хибним наступні висловлення:

а) $\neg \alpha$;

б) $\alpha \vee \beta$;

в) $\alpha \wedge \beta$;

г) $\alpha \leftrightarrow \beta$;

д) $\alpha \rightarrow \beta$.

Завдання 2. Наведіть означування задані на n атомах, якщо:

а) $n=1$;

б) $n=2$;

в) $n=3$;

г) $n=4$.

Завдання 3. Для яких істинносних значеннях істинним є висловлення ? Для яких є хибним?

а) $\neg \alpha$;

б) $\alpha \vee \beta$;

в) $\alpha \wedge \beta$;

г) $\alpha \leftrightarrow \beta$;

д) $\alpha \rightarrow \beta$?

Завдання 3. Запишіть всі означування для відповідної кількості атомів та вкажіть істинностне означування, яке підтверджує задане висловлення.

а) $(A \wedge \neg B) \leftrightarrow A$;

б) $(A \wedge \neg B) \leftrightarrow (C \rightarrow \neg A)$;

в) $(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow (C \vee \neg A)$;

г) $(\neg A \wedge \neg B) \vee (B \rightarrow D)$;

д) $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg C \rightarrow \neg A)$.

Завдання 4. Запишіть всі означування для відповідної кількості атомів та вкажіть істинностне означування, яке спростовує задане висловлення.

- а) $(C \wedge \neg B) \leftrightarrow A$;
- б) $(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow \neg(C \rightarrow \neg A)$;
- в) $(\neg A \wedge B) \wedge ((C \vee \neg A) \rightarrow B)$;
- г) $(A \leftrightarrow B) \vee \neg((C \rightarrow \neg D) \rightarrow B)$;
- д) $\neg(A \rightarrow B) \wedge (\neg C \rightarrow \neg A)$.

Завдання 5. За допомогою таблиць істинності визначте тип висловлення

- а) $(C \wedge \neg B) \leftrightarrow A$;
- б) $(A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow \neg(C \rightarrow \neg A)$;
- в) $(\neg A \wedge B) \wedge ((C \vee \neg A) \rightarrow B)$;
- г) $(A \leftrightarrow B) \vee \neg((C \rightarrow \neg D) \rightarrow B)$;
- д) $\neg(A \rightarrow B) \wedge (\neg C \rightarrow \neg A)$.

Завдання 5. За допомогою таблиць істинності доведіть, що висловлення є тавтологією

- а) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ - закон де Моргана
- б) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ - закон де Моргана
- в) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$
- г) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Завдання 6. За допомогою таблиць істинності визначте, чи є задані висловлення рівносильними

- а) $(A \wedge \neg B)$ та $\neg(\neg A \rightarrow (B \leftrightarrow A))$;
- б) $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$ та $((A \wedge B) \rightarrow C)$;
- в) $A \vee (B \wedge C)$ та $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Завдання 7. За допомогою таблиць істинності перевірте, чи є суперечною множини висловлень S .

- а) $S = \{D \wedge \neg B \wedge C; A \rightarrow C; A \leftrightarrow D\}$;
- б) $S = \{A \vee C; B \vee (A \rightarrow C); A \leftrightarrow B\}$;

$$\text{в) } S = \{D \wedge (\neg B \vee A); B \rightarrow \neg C; A \leftrightarrow D\};$$

$$\text{г) } S = \{D \wedge \neg B \wedge C; D \rightarrow C; A \leftrightarrow D\};$$

$$\text{д) } S = \{B \leftrightarrow (A \wedge C); A \rightarrow \neg C; \neg A \rightarrow (B \wedge C)\}.$$

Завдання 8. За допомогою таблиць істинності перевірте, чи є висловлення σ логічним наслідком множини висловлень S .

$$\text{а) } \sigma: A \wedge C; \quad S = \{\neg A \wedge B; A \rightarrow C; B \leftrightarrow C\};$$

$$\text{б) } \sigma: A \rightarrow C; \quad S = \{A \leftrightarrow B; \neg A \rightarrow C; \neg B \vee C\};$$

$$\text{в) } \sigma: A \vee B; \quad S = \{A \rightarrow (\neg B \rightarrow C); B \rightarrow \neg C; A \vee C\};$$

$$\text{г) } \sigma: B \wedge C; \quad S = \{\neg A \wedge B; A \rightarrow \neg(B \vee C); A \leftrightarrow C; B\};$$

$$\text{д) } \sigma: A \leftrightarrow B; \quad S = \{\neg A \vee B; A \rightarrow C; B \leftrightarrow (A \vee C)\}.$$

Список використаної та рекомендованої літератури

Базова

- 1 Гиндикин С. Г. Алгебра и логика в задачах. Москва: Наука, 1972. 288 с.
- 2 Клини С. К. Математическая логика. Москва: И. Л., 1975. 480 с.
- 3 Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Введение в математическую логику. Москва: Издательство Московского университета, 1982. 120 с.
- 4 Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. Москва.: Наука, 1975. 256 с.
- 5 Мендельсон Э. Введение в математическую логику. Москва: Наука, 1971. 320 с.
- 6 Метакидис Г., Нероуд А. Принципы логики и логического программирования. Москва: Факториал, 1998. 288 с.
- 7 Новиков П. С. Элементы математической логики. Москва: Наука, 1973. 399 с.
- 8 Шенфилд Дж. Математическая логика. Москва: Наука, 1975. 529 с.

Додаткова

- 1 Гудстейн Р. Л. Математическая логика. Москва: И. Л., 1973. 162 с.
- 2 Kleene's S. C., "Introduction to Metamathematics. Seattle", Ishi Press, 2009, pp. 1-550
- 3 Кутасов А. Д. Элементы математической логики. Москва: Просвещение, 1977. 63 с.
- 4 Лавров И. А. Логика и алгоритмы. Новосибирск: изд. Новосибирского

гос. ун-та, 1970.

- 5 Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. Москва: Наука, 1970. 394 с.
- 6 Столл Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. Москва: Просвещение, 1968. 231 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

1. Бібліотека Університету Ушинського. – URL: <http://library.pdpu.edu.ua/>
2. Сайт Міністерства освіти і науки України: www.mon.gov.ua
3. Освітньо-інформаційні ресурси. – URL:
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/logic.htm>