

Державний заклад
«Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К. Д. Ушинського»

Кафедра вищої математики і статистики

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ
РОБОТИ СТУДЕНТІВ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
«ЛІНІЙНА АЛГЕБРА»

для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем

першого року навчання

зі спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

УДК 512.64

Рекомендовано до друку Вченою радою Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського» (протокол ___ 2021 року)

Матеріал розраховано на студентів фізико-математичних спеціальностей закладів вищої освіти, у першу чергу педагогічних, учителів математики та учнів старших класів закладів загальної середньої освіти.

Розробник:
Драганюк С.В., кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

РЕЦЕНЗЕНТИ

Болдарєва О. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Варбанець П.Д., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики Одеського національного університету імені І. І. Мечникова

ЗМІСТ

1. Лінійна алгебра у системі підготовки фахівців	4
2. Розподіл годин самостійної роботи	7
3. Завдання для самостійної роботи студентів за змістовими модулями (1 семестр)	11
3.1. Питання для контролю	11
3.2. Варіанти контрольних робіт	14
4. Завдання для самостійної роботи студентів за змістовими модулями (2 семестр)	17
4.1. Питання для контролю	17
4.2. Варіанти контрольних робіт	23
5. Забезпечення навчання осіб з особливими освітніми потребами	25
6. Рекомендовані джерела інформації	26

1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА У СИСТЕМІ ПІДГОТОВКИ ФАХІВЦІВ

Мета вивчення навчальної дисципліни «Лінійна алгебра» передбачає:

- вивчення фундаментальних алгебраїчних структур, формування на їх основі поняття про основні математичні об'єкти, уявлення про зв'язки алгебри з іншими математичними та прикладними дисциплінами;
- формування у студентів наукового світогляду, уявлень про ідеї та методи алгебри, її роль у пізнанні дійсності;
- інтелектуальний розвиток студентів, передусім розвиток логічного та абстрактного мислення, пам'яті, уваги, інтуїції.

Основним завданням вивчення курсу «Лінійна алгебра» є вивчення властивостей таких математичних об'єктів як алгебри матриць, визначників, алгебраїчних структур (групи, кільця, поля), числові поля та поле комплексних чисел, системи лінійних рівнянь, векторний простір та його підпростори, векторні простори зі скалярним добутком, евклідові векторні простори, базиси векторних простори та зв'язки між базисами векторного простору та підпростору; зв'язки між двома та трьома базисами векторного простору, координати вектора та їх властивості, лінійні відображення та оператори, їх матриці, ядро та образ лінійного оператора, його ранг та дефект, власні вектори та власні значення лінійного оператора; квадратичні форми, їх канонічний вид. Виходячи з теоретико-множинних уявлень, особливу увагу в структурі курсу повинно бути приділено відображенням і найбільш важливим класам бінарних відношень: відношенням еквівалентності та відношенням порядку.

Передумови для вивчення дисципліни: для опанування курсу «Лінійної алгебри» необхідно, щоб студенти володіли на рівні, не нижче достатнього, навчальним матеріалом, визначеним програмою з математики для закладів загальної середньої освіти, елементами теорії множин, матеріалом дисципліни «Елементарна математика» .

Очікувані програмні результати навчання (ПР)

ПР 1. Демонструвати знання і розуміння основ математики.

ПР 8. Розв'язувати задачі різних рівнів складності курсів математики та інформатики.

Очікувані результати навчання дисципліни

Як результат опанування навчальної дисципліни здобувач освіти повинен **знати:**

- означення, властивості та основні приклади найважливіших алгебраїчних структур (групи, кільця, поля), властивості їх ізоморфізмів та гомоморфізмів;

- теорію підстановок, перестановок та їх парності;

- загальні відомості про системи лінійних рівнянь та методи їх розв'язання;

- матриці спеціального виду;

- означення та властивості визначників;

- критерії сумісності та визначеності системи лінійних рівнянь та умови існування ненульових розв'язків однорідної ;

- означення базису та розмірності системи векторів векторного простору та його підпросторів; координат вектора у даному базисі;

- зв'язки матриць переходу у різних базисах;

- координати образу, критерії оборотності лінійних операторів

- лінійні оператори, їх матриці у різних базисах;

- власні значення та власні вектори лінійних операторів;

- алгебраїчні структури лінійних операторів та їх ізоморфізм з відповідними структурами матриць;

вміти:

- розрізняти різні типи алгебраїчних структур, зокрема, вияснити чи є операція алгебраїчною, знаходити, при їх наявності , нейтральний та обернені до даних елементів, знаходити у даних структурах відповідні підструктури, встановлювати ізоморфізми та гомоморфізми алгебраїчних структур;

- перемножати підстановки, встановлювати парність перестановок, підстановок та їх добутку;

- визначати сумісність та визначеність систем лінійних рівнянь, володіти основними методами розв'язання систем лінійних рівнянь, зокрема,

метод Гауса, правило Крамера, матричний метод; знаходити загальний розв'язок СЛР ;

— виконувати операції над матрицями, зводити матриці до матриць спеціального виду (трикутної та трапецевидної), визначати ранг матриці;

— обчислювати визначник квадратної матриці різними методами, за допомогою використання їх властивостей, зведенням до трикутної форми, розкладанням по рядку та декількох рядках; розрізняти різні типи алгебраїчних структур, зокрема, з'ясовувати чи є операція алгебраїчною, знаходити, за їх наявності, нейтральний та обернені до даних елементів, знаходити у даних структурах відповідні підструктури, встановлювати ізоморфізми та гомоморфізми алгебраїчних структур;

— виконувати операції над комплексними числами у різних формах;

— знаходити базис та розмірність векторного простору, суми та перетину підпросторів векторного простору;

— будувати лінійну комбінацію векторів, з'ясовувати лінійну залежність та лінійну незалежність систем векторів, знаходити координати вектора у даному базисі, будувати матрицю переходу від одного базису до іншого та використовувати їх при розв'язанні різних задач лінійної алгебри, геометрії та інших математичних дисциплін; ортогоналізувати та ортонормувати системи векторів;

— знаходити образ вектору та матриці лінійного відображення та лінійного оператора, спектр та власні вектори лінійного оператора;

— вміти зводити квадратичні форми до канонічного виду, знаходити їх ранг.

Міждисциплінарні зв'язки: лінійна алгебра, математичний аналіз, теорія множин, математична логіка, дискретна математика.

2. РОЗПОДІЛ ГОДИН САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

№ з/п	Тема	Кількість годин		Форма контролю
		Денна форма	Заочна форма	
1 семестр				
1	Тема 1. Матриці та операції над ними. Матриці спеціального виду	8	10	Усне опитування під час практичного заняття, аудиторна контрольна робота 1, контрольна модульна робота, екзамен
2	Тема 2. Елементарні перетворення. Трапецевидна матриця	8	10	Усне опитування під час практичного заняття, аудиторна контрольна робота 1, контрольна модульна робота, екзамен
3	Тема 3. Системи лінійних рівнянь. Метод Гауса	8	12	Аудиторна контрольна робота 1, контрольна модульна робота 1, екзамен
4	Тема 4. Перестановки	8	10	Усне опитування під час практичного заняття, аудиторна контрольна робота 2, контрольна модульна робота, екзамен
5	Тема 5. Підстановки	8	10	Усне опитування під час практичного заняття, аудиторна

				контрольна робота 2, контрольна модульна робота 1, екзамен
6	Тема 6. Визначники n-го порядку	8	20	Усне опитування під час практичного заняття, аудиторна контрольна робота 2, контрольна модульна робота, екзамен
7	Тема 7. Обернена матриця. Матричний метод розв'язання	8	10	Усне опитування під час практичного заняття, аудиторна контрольна робота 2, контрольна модульна робота, екзамен
8	Тема 8. Бінарна алгебраїчна операція. Група	8	10	Контрольна модульна робота , екзамен
9	Тема 9. Кільця	8	10	Контрольна модульна робота, екзамен
10	Тема 10. Поля	8	10	Контрольна модульна робота, екзамен
Разом за перший семестр		80	112	
2 семестр				
1	Тема 1. Поле комплексних чисел	8	10	Усне опитування під час практичного заняття, аудиторна контрольна робота 1, контрольна модульна робота, екзамен

2	Тема 2. Векторні простори. Арифметичний векторний простір	8	10	Усне опитування під час практичного заняття, аудиторна контрольна робота 1, контрольна модульна робота, екзамен
3	Тема 3. Еквівалентні системи векторів. Базис та ранг системи векторів Векторний простір розв'язків системи лінійних рівнянь	8	12	Аудиторна контрольна робота 1, контрольна модульна робота 1, екзамен
4	Тема 4. Векторні підпростори. Базис векторного простору та підпростору.	8	12	Усне опитування під час практичного заняття, аудиторна контрольна робота 1, контрольна модульна робота, екзамен
5	Тема 5. Координати вектора.	8	12	Усне опитування під час практичного заняття, аудиторна контрольна робота 1, контрольна модульна робота 1, екзамен
6	Тема 6. Скалярне множення векторів. Евклідові векторні простори	8	18	Усне опитування під час практичного заняття, аудиторна контрольна робота 2, контрольна модульна робота, екзамен

7	Тема 7. Унітарні векторні простори	8	10	Усне опитування під час практичного заняття, аудиторна контрольна робота 2, контрольна модульна робота, екзамен
8	Тема 8. Введення лінійних відображень	8	8	Контрольна модульна робота , екзамен
9	Тема 9. Ядро та образ лінійного оператора	8	10	Контрольна модульна робота, екзамен
10	Тема 10. Власні значення та характеристичне рівняння лінійного оператора. Квадратичні форми	8	10	Контрольна модульна робота, екзамен
Разом за другий семестр		80	112	

3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ЗА ЗМІСТОВИМИ МОДУЛЯМИ

1 семестр

3.1. Питання для контролю

Змістовий модуль I. Алгебра матриць. Системи лінійних рівнянь

Тема 1. Матриці та операції над ними. Матриці спеціального виду

1. Лінійне алгебраїчне рівняння. Приклади систем лінійних рівнянь та зв'язок цих систем з матрицями.
2. Будова та основні структурні елементи матриці. Квадратні матриці та їх структурні елементи. Рівність матриць.
3. Операції над матрицями: додавання матриць, віднімання матриць, множення матриці на число, транспонування матриці, множення матриць. Властивості цих операцій.
4. Одинична матриця. Степінь матриці. Скалярні матриці.

Тема 2. Елементарні перетворення. Трапецевидна матриця

1. Лінійна комбінація рядків матриці.
2. Елементарні перетворення матриці.
3. Зведення матриці до трапецевидної форми.

Тема 3. Системи лінійних рівнянь. Метод Гауса

1. Загальні відомості про системи лінійних рівнянь (СЛР). Перетворення систем та рівносильність систем лінійних рівнянь.
2. Метод виключення невідомих розв'язання систем лінійних рівнянь, його обґрунтування. Загальний розв'язок систем лінійних рівнянь.
3. Матрична форма запису СЛР. Розв'язання матричних рівнянь.

Змістовий модуль II. Визначники

Тема 4. Перестановки

1. Кількість перестановок. Парність перестановок.
2. Транспозиція. Вплив транспозиції на зміну парності перестановки.
3. Кількість парних та непарних перестановок з n елементів.

Тема 5. Підстановки

1. Підстановки та різні форми їх запису. Парність підстановки. Кількість підстановок та кількість парних підстановок.
2. Операція множення підстановок. Одиначна та обернена підстановки. Парність добутку підстановок.
3. Цикли, розкладання підстановки в добуток незалежних циклів.
4. Декримент підстановки. Зв'язок декримента з парністю підстановки.

Тема 6. Визначники n-го порядку

1. Означення визначника та члена визначника.
2. Визначник трикутної матриці.
3. Визначники другого та третього порядків.
4. Властивості визначників.
5. Мінори та додаткові мінори. Теорема Лапласа.
6. Розкладання визначника за рядком. Теорема про чужі доповнення. Приклади обчислення визначників різними методами.
7. Блочно-трикутна та блочно-діагональна матриці, їх визначники.
8. Правило Крамера.
9. Визначник добутку матриць. Вироджені та не вироджені матриці. Визначники спеціального виду.

Тема 7. Обернена матриця. Матричний метод розв'язання

1. Введення оберненої та взаємної матриці. Властивості взаємної матриці.
2. Умови існування, побудова, єдиність та властивості оберненої матриці.
3. Матричні рівняння. Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь.

Змістовий модуль III. Основні алгебраїчні структури

Тема 8. Бінарна алгебраїчна операція. Група

1. Бінарна алгебраїчна операція. Основні алгебраїчні закони.
2. Групи. Простіші властивості групи. Приклади числових та нечислових груп.
3. Степені та кратні елемента групи.

4. Симетрична та знакозмінна групи підстановок та їх властивості.
5. Спеціальні групи матриць.
6. Підгрупи. Приклади. Критерій підгрупи. Власні підгрупи.
7. Перетин підгруп.
8. Гомоморфізми та ізоморфізми груп. Властивості гомоморфізмів груп

Тема 9. Введення різних типів кілець

1. Приклади числових та нечислових кілець.
2. Властивості кілець.
3. Дільники нуля у довільному кільці.
4. Підкільця, критерій підкільця. Перетин підкільця.
5. Гомоморфізми та ізоморфізми кілець. Властивості гомоморфізмів кілець.

Тема 10. Поля

1. Означення полів, їх властивості та приклади.
2. Властивості дробів.
3. Підполя. Гомоморфізми та ізоморфізми полів.

3.2. Варіанти контрольних робіт

Аудиторна контрольна робота 1 Варіант 1

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -2, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_4 = 3 \end{cases}$$

2. Дано матриці A і B . Знайти матриці $A+B$, $A-B$, $A*B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 & 15 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 2

1. Розв'язати СЛР методом Гауса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_4 = 1 \end{cases}$$

2. Дані матриці A і B . Знайти матриці $A+B$, $A-B$, $A*B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Варіант 3

1. Розв'язати СЛР методом Гауса

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -5. \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = -14 \end{cases}$$

2. Дані матриці A і B . Знайти матриці $A+B$, $A-B$, $A*B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 & 15 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 & 7 & 12 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Аудиторна контрольна робота 2

Варіант 1

1. Дано підстановки A і B .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 9 & 2 & 6 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 3 & 2 & 6 & 4 & 7 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти подстановку $A^{-1}B$, визначити парність множників та результату

2. Знайти визначник матриці

а) за правилом трикутника;

б) Методом Саррюса;

в) за допомогою розкладання за першим рядком;

г) приведенням до трикутного виду

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Дана матриця A . Розрахувати визначник матриці. Розкласти визначник матриці за 2-ю та 3-ю строками.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Дана матриця B . Знайти обернену матрицю за допомогою алгебраїчних доповнень, якщо така існує:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

6. Чи утворює групу за додавання множина чисел сегмента $[0,1]$?

Варіант 2

1. Дано підстановки A і B .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 8 & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти подстановку AB^2 , визначити парність множників та результату

2. Знайти визначник матриці

а) за правилом трикутника;

б) Методом Саррюса;

в) за допомогою розкладання за першим рядком;

г) приведенням до трикутного виду

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Дана матриця A . Розрахувати визначник матриці. Розкласти визначник матриці за 2-ю та 3-ю строками.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -6 & 15 \end{pmatrix}$$

4. Дана матриця B . Знайти обернену матрицю за допомогою алгебраїчних доповнень, якщо така існує:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

6. Чи утворює групу за множенням множина всіх матриць виду

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } a, b, c \in R.$$

4. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ЗА ЗМІСТОВИМИ МОДУЛЯМИ

2 семестр

4.1. Питання для контролю

Змістовий модуль I. Векторні простори

Тема 1. Поле комплексних чисел

1. Поле комплексних чисел як розширення поля дійсних чисел.
2. Алгебраїчна форма запису комплексного числа. Його дійсна та уявна частини. Єдиність алгебраїчної форми.
3. Властивості комплексно спряжених чисел.
4. Зображення комплексних чисел. Комплексна площина. Модуль та аргумент комплексного числа. Властивості модуля.
5. Тригонометрична форма комплексного числа.
6. Перехід від алгебраїчної до тригонометричної форми та навпаки.
7. Множення та ділення комплексних чисел у тригонометричній формі.
8. Степінь комплексного числа. Формула Муавра.
9. Вилучення коренів з комплексного числа.

Тема 2. Векторні простори. Арифметичний векторний простір

1. Введення векторних просторів. Різниця між операціями додавання векторів та множення вектора на скаляр з точки зору їх алгебраїчних властивостей. Приклади векторних просторів з алгебри, геометрії, мат. аналізу та ін. Властивості векторних просторів.
2. Введення векторів як впорядкованих наборів n дійсних чисел. Рівність векторів та операції над ними.
3. Доведення просторових властивостей відносно даних операцій.
4. Арифметичний векторний простір над довільним полем.
5. Лінійна комбінація системи векторів. Лінійна оболонка системи векторів. Властивості лінійної оболонки. Лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів.
6. Приклади ЛНЗ та ЛЗ систем векторів у довільному просторі. Приклади ЛНЗ та ЛЗ систем векторів у арифметичному просторі.

7.Критерії ЛНЗ системи одного та двох векторів. Властивості ЛЗ та ЛНЗ систем векторів

Тема 3. Еквівалентні системи векторів. Базис та ранг системи векторів

Векторний простір розв'язків системи лінійних рівнянь

- 1.Означення та критерій еквівалентних систем векторів. Еквівалентні скінчені ЛНЗ системи векторів. Елементарні перетворення системи векторів. Еквівалентність систем, отриманих елементарними перетвореннями.
- 2.Введення базису скінченої системи векторів. Існування та спосіб отримання базису системи векторів.
3. Введення рангу системи векторів. Властивості рангу системи векторів довільного простору. Властивості рангу системи векторів арифметичного векторного простору.
- 4.Рядковий та стовбцевий ранги матриці. Теорема про ранг матриці. Властивості рангу матриці. Способи обчислення рангу матриці.
- 5.Теорема Кронекера-Капеллі. Критерій визначеності систем лінійних рівнянь. Ненульові розв'язки системи лінійних рівнянь. Векторний простір розв'язків системи лінійних рівнянь. Побудова ФСР для СЛР.

Тема 4. Векторні підпростори. Базис векторного простору та підпростору.

- 1.Введення векторів підпросторів. Їх критерій. Приклади векторних підпросторів.
- 2.Перетин векторних підпросторів. Сума векторних підпросторів.
- 3.Пряма Сума векторних підпросторів та її критерії. Базис векторного простору та підпростору. Скінченнопороджені векторні підпростори.
- 4.Доповнення базису векторного підпростору до базису векторного простору. Зв'язок між розмірністю простору та його підпросторів.
- 5.Базиси та розмірність арифметичного векторного простору та його підпростору. Властивості розмірності векторного простору. Теорема Грасмана.

Тема 5. Координати вектора.

Матриця переходу від одного базису до іншого

- 1.** Введення координат вектора у даному базисі. Єдиність координат вектора. Координати лінійних комбінації системи векторів. Координати суми векторів. Координати добутку вектора на скаляр. Приклади знаходження координат вектора
- 2.** Введення матриці переходу між двома базисами. Невиродженість матриці переходу. Зв'язок координат вектора у двох базисах. Лінійні перетворення координат вектора. Зв'язок матриць переходу між трьома базисами
- 3.** Введення гомоморфізму та ізоморфізму векторних просторів. Різниця властивостей цих понять
- 4.** Ізоморфізм довільного векторного простору та арифметичного векторного простору над тим же полем. Ізоморфізм векторних просторів як відношення еквівалентності.
- 5.** Властивості гомоморфізмів векторних просторів. Зв'язок між базисами ізоморфних векторних просторів. Критерії ізоморфізму векторних просторів.

Змістовий модуль II. Унітарні та евклідові векторні простори

Тема 6. Скалярне множення векторів. Евклідові векторні простори

- 1.** Введення операції скалярного множення векторів. Приклади векторних просторів зі скалярним множенням. Властивості операції скалярного множення векторів.
- 2.** Ортогональні вектори. Ортогональні системи векторів. Ортогональне доповнення векторного підпростору. Приклади. Властивості ортогонального доповнення. Розкладання векторного простору у пряму суму векторних підпросторів.
- 3.** Введення евклідового векторного простору. Приклади евклідових просторів. Стандартний евклідов простір. Ортогональні системи та ортогональний базис евклідового векторного простору.

4. Норма векторна у евклідовому просторі. Властивості норми вектора. Нормування вектора. Ортонормований базис евклідового векторного простору. Властивості та застосування скалярного множення у евклідовому векторного простору.
5. Введення гомоморфізму та ізоморфізму евклідових векторних просторів.
6. Ізоморфізм довільного евклідового векторного простору та стандартного евклідового векторного простору над тим же полем. Ізоморфізм евклідових векторних просторів як відношення еквівалентності.
7. Зв'язок між базисами ізоморфних евклідових векторних просторів. Критерії ізоморфізму евклідових векторних просторів.

Тема 7. Унітарні векторні простори

1. Введення та приклади унітарних просторів.
2. Ортонормований базис унітарного простору.
3. Ізоморфізм унітарних векторних просторів.
4. Ортогональне доповнення підпросторів унітарного простору.

Змістовий модуль III. Лінійні відображення та квадратичні форми

Тема 8. Введення лінійних відображень

1. Означення та приклади лінійних відображень та лінійних операторів з алгебри, геометрії та математичного аналізу.
2. лінійного відображення. Обчислення координат образу за допомогою матриці лінійного відображення.
3. Зв'язок матриць лінійного оператора у різних базисах.
4. Лінійні оператори на евклідовому та унітарному просторах.
5. Спряжений лінійний оператор. Самоспряжені та унітарні лінійні оператори.
6. Введення та приклади подібних матриць. Відношення подібності як еквівалентність на множині матриць. Визначники подібних матриць. Зв'язок подібних матриць з лінійним оператором.

Тема 9. Ядро та образ лінійного оператора

1. Означення та приклади ядра лінійного оператора. Ядро лінійного оператора як векторний підпростір простору, на якому він заданий. Дефект лінійного оператора.
2. Образ лінійного оператора як підпростір простору, на якому він заданий. Ранг лінійного оператора.
3. Критерій взаємно однозначності лінійного оператора. Зв'язок рангу матриці лінійного оператора з його рангом.
4. Ранги подібних матриць. Зв'язок рангу і дефекту лінійного оператора з розмірністю векторного простору, над яким він заданий.
5. Додавання лінійних відображень. Множення лінійного відображення на скаляр. Множення лінійних операторів. Властивості операцій над лінійними відображеннями та лінійними операторами.
6. Векторний простір лінійних відображень. Кільце лінійних операторів. Оборотно лінійні оператори. Критерії оборотності лінійних операторів. Мультиплікативна група оборотних лінійних операторів.
7. Ізоморфізм векторних просторів лінійних відображень та матриць m на n . Ізоморфізм кілець лінійних операторів та матриць порядку n . Ізоморфізм груп оборотних лінійних операторів та не вироджених матриць .

Тема 10. Власні значення та характеристичне рівняння лінійного оператора. Квадратичні форми

1. Означення та приклади власних векторів лінійного оператора. Лінійна незалежність системи власних векторів, які відповідають різним власним значенням лінійного оператора.
2. Характеристичне рівняння та характеристичні корені лінійного оператора та його матриць . Характеристичне рівняння подібних матриць.
3. Критерій власного значення лінійного оператора. Обчислення власних значень лінійного оператора.

4. Векторний простір власних векторів, що відповідають одному власному значенню лінійного оператора. Знаходження власних векторів лінійного оператора.
5. Введення та приклади лінійних операторів з простим спектром. Базис власних векторів лінійних операторів з простим спектром. Інваріантні підпростори лінійного оператора.
6. Власні вектори та власні вектори матриці. Зведення матриці до діагонального виду.
7. Введення та приклади квадратичних форм. Матриця квадратичної форми. Канонічний вид квадратичної форми. Зведення квадратичної форми до канонічного виду методом Лагранжа
8. Зведення квадратичної форми до канонічного виду методом Якобі. Дійсні квадратичні форми. Додатньо визначені квадратичні форми. Критерій Сильвестра. Закон інерції. Ранг квадратичної форми.

4.2. Варіанти контрольних робіт

Аудиторна контрольна робота 1 Варіант 1

1. Розв'язати систему за правилом Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1 + i, \\ x_1 - (1 - i)x_2 = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + ix_2 = -2, \\ (2 - i)x_1 - x_2 = 1; \end{cases}$$

2. Зобразити на комплексній множині

а) $2 \leq |z + 5| < 5;$

б) $2 \leq \text{Im}(z + 5) < 5;$

в) $-\frac{\pi}{3} \leq \arg(z + 5) < \pi.$

3. Знайти всі значення кореня:

$$\sqrt[5]{\frac{(\sqrt{3} + i^{11})^3}{1 + \sqrt{3}i}}.$$

4. З'ясувати і обґрунтувати, чи є лінійно незалежною система векторів:

$$a = (2; 1; -4),$$

$$b = (-1; 5; 3),$$

$$c = (4; -3; -2).$$

5. Знайти базис і ранг системи векторів. Знайти розкладання по векторах даного базису залишилися векторів системи.

$$a = (2; 1; -4),$$

$$b = (-1; 5; 3),$$

$$c = (4; -3; -2),$$

$$d = (-1; 0; 2).$$

6. Знайти ФСР однорідної системи:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

7. З'ясувати, чи утворює векторний підпростір система векторів виду

$$(1, \beta, 1, \beta, 1), \quad \beta \in \mathbb{P}.$$

8. Чи є дана множина матриць векторним підпростором простора квадратних матриць другого порядку над полем дійсних чисел :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

9. Порахувати ранг матриці методом Гаусса і методом облямівки мінорів

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Варіант 2

1. Розв'язати систему за правилом Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - i, \\ x_1 - ix_2 = 1 + i; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2, \\ 3x_1 - x_2 = i; \end{cases}$$

2. Зобразити на комплексній множині

а) $1 \leq |z + 2i| < 3;$

б) $1 \leq \text{Im}(z + 2i) < 3;$

в) $\arg(z + 2i) < \frac{\pi}{4}.$

3. Знайти всі значення кореня:

$$\sqrt[4]{\frac{(1-i)^3}{1+i^{41}}}.$$

4. З'ясувати і обґрунтувати, чи є лінійно незалежною система векторів:

$$a = (1; 3; -2),$$

$$b = (0; 5; 7),$$

$$c = (1; -3; -2).$$

5. Знайти базис і ранг системи векторів. Знайти розкладання по векторах даного базису залишилися векторів системи.

$$a = (0; 1; -5),$$

$$b = (-1; 0; 1),$$

$$c = (1; -1; 2)$$

$$d = (1; 2; 3).$$

6. Знайти ФСР однорідної системи:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 = 0. \\ 3x_1 + 3x_2 - x_5 = 0 \end{cases}$$

7. Чиє дана множина матриць векторним підпростором простора квадратних матриць другого порядку над полем дійсних чисел :

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, a, b \in R \right\}.$$

8. Сформулюйте означення ортогонального доповнення K підпростору L евклідового простіру E . Визначить вид L^1 та його розмірність, якщо $L = \{ \bar{a}, \bar{a} \in R^3, \bar{a} \neq \bar{\theta} \}$. З'ясуйте геометричний зміст цієї задачі.

9. Порахувати ранг матриці методом Гаусса і методом облямівки мінорів

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ -8 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Забезпечення навчання осіб з особливими освітніми потребами

Передбачено забезпечення рівного доступу до якісної освіти особам з особливими освітніми потребами шляхом організації їхнього навчання на основі застосування особистісно-орієнтованих методів навчання з урахуванням їхніх індивідуальних особливостей.

6. Рекомендовані джерела інформації

Базова література

- 1 Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1967. 576 с.
- 2 Драганюк С.В. Матриці, визначники, системи лінійних рівнянь. Навчальний посібник для самостійної роботи студентів перших курсів фізико-математичних спеціальностей педагогічних інститутів та університетів. Одеса: ПДПУ ім. К. Д. Ушинського, 2010.
- 3 Драганюк С.В. Матриці та визначники. Навчальний посібник для самостійної роботи студентів перших курсів фізико-математичних спеціальностей педагогічних інститутів та університетів. Одеса: ПНПУ ім. К. Д. Ушинського, 2012.
- 4 Завало С. Т., Костарчук В. Н., Хацет Б. И. Алгебра и теория чисел, часть 1. Київ: Вища школа, 1977.
- 5 Завало С. Т., Левіщенко С. С. Алгебра і теорія чисел, практикум, часть 1. Київ: Вища школа, 1986.
- 6 Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. Москва: Наука, 1967.
- 7 Ильин А. В., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. Москва: Наука, 1980.
- 8 Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. Москва: Высшая школа, 1979.
- 9 Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Москва: Наука, 1971.
- 10 Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. Москва: Наука, 1970.

Додаткова література

- 1 Бородін О. І., Сліпенко А. К., Потьомкін Л. В. Основні поняття сучасної алгебри. Київ: Рад. Школа, 1983.
- 2 Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. Т. 1. Москва: Из-

во иностранной литературы, 1963.

- 3 Каргаполов М. И. Основы теории групп. Москва: Наука, 1982.
- 4 Кострикин А. И. Введение в алгебру. Москва: Наука, 1977.

Інформаційні ресурси

1. [Бібліотека Університету Ушинського.](http://library.pdpu.edu.ua/) – URL:<http://library.pdpu.edu.ua/>
2. Сайт Міністерства освіти і науки України: www.mon.gov.ua
3. Освітньо-інформаційні ресурси. – URL:
http://nh.at.ua/dir/osvitnyo_informaciyni_resursy/19
4. Потрал Phet.Colorado. URL: <https://phet.colorado.edu>