Міністерство освіти і науки України
Державний заклад
«Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К.Д. Ушинського»

Кафедра вищої математики і статистики

Методичні рекомендації

«Теорія ймовірності та математична статистика»

(Частина 1)

уклад.: Г. Д. Урум, О. І. Олефір

Одеса 2021

Зміст

Розділ 1. Основні поняття та формули теорії ймовірності

1.1 **Поняття «випробування» та «подія». Класіфікація подій.**

Поняття «випробування» найпростіше описати, розглянувши викидання грального кубика, на гранях якого виставленні числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Кожне викидання при однакових умовах будемо називати випробуванням. Іншими прикладами випробування є підкидання монети, витягування карти з добре перемішаної колоди тощо. У загальному випадку під випробуванням будемо розуміти здійснення певного комплексу умов, які можна відновити довільне число разів. Нове випробування є повторенням попереднього за одних і тих же умов (хоча про повну тотожність всього комплексу умовно можна говорити лише наближено).

Наслідки випробування будемо називати подіями (випадання числа «5» на кубику, «решки» при підкиданні монети, витягування «туза бубнового» з колоді карт тощо).

У загальному випадку в результаті випробування залежно від випадкових обставин, що змінюються, із сукупністю можливих наслідків може з'явитися та чи інша подія (елементарна подія). Надалі події будемо позначати великими буквами А, Б, С, або А А,…

Усю сукупність таких подій називають простором елементарних подій, або полем подій чи повною групою подій.

Приклад 1. Підкидається вгору монета, яка падає на стіл лицевою(решка) або тильною (герб).

Тут випробування це – підкидання монети, а простір елементарних подій – множина, яка складається з двох подій А і В, де А – подія, що монета впаде на «решку», а не на «герб».

Усі події можна поділити на вірогідні, неможливі та випадкові.

Вірогідною (достовірною) будемо називати подію, яка завжди настає в результаті кожного випробування, неможливою, яка ніколи не відбувається. Випадкова подія – та, яка в одних випробуваннях здійснюється, в інших ні.

Вірогідні та неможливі події відрізняються від випадкових однозначністю їх появи. Так у прикладі з підкиданням монети маємо дві випадкові події: А – випадає «герб» і В випадає «решка». Поява кожної з них є однаково очікуваною.

1.2. Геометрична інтерпретація подій за допомогою діаграм Венна. Багато понять і формул теорії ймовірності та математичної статистики зручно ілюструвати геометрично. Ввведемо кілька понять.

Під множиною будемо розуміти кілька предметів (елементів). Кожен об'єкт множини називають елементом.

Прикладом множини можуть бути студенти академічної групи чи множина можна студентів які склали зимову екзаменаційну сесію на «відмінно».

Приклад 1. Множина А всіх непарних натуральних чисел, менших десяти, складається з 5 чисел:
А = 1; 3; 5; 7; 9
Множина всіх натуральних чисел, менших десяти, складається з 9 чисел: 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Кількість елементів множини S, якщо їх можна перелічити, позначимо через $n(S)$. Множину , яка складається з усіх можливих елементарних подій, називають універсальною і позначають буквами U або Ω. Підмножину, що складається з декількох елементарних подій, називають складною подією.

Щоб ототожновати підмножину А зі складною подією, достатньо надати останній такої інтерпретації: А – подія, що навмання вибрана точка з універсальної множини U належить підмножині А.

Зв’язки між підмножинами зручно демонструвати на *діаграмах Венна.*
діаграма Венна зображає універсальну множину U, усередині якої є підмножина А. Основне значення таких рисунків полягає в тому, що вони представляють зв’язки між підмножинами чи подіями. Всяка підмножина на діаграмі Венна повинна міститися всередині універсальної множини U .

1.3. **Операції над подіями.** Над підмножинами (подіями) можна виконувати певні операції.
Дві множини A і B називають рівними між собою (однаковими), якщо вони складаються з одних і тих же елементів.
Під об’єднанням (сумою) множин А і В (позначають $A \cup B$, або А + В) будемо розуміти сукупність всіх елементів, що складається зі спільних елементів обох множин (рис. 1 г).
Зауваження 1. Операція об’єднання (додавання) подій є «логічною сумою» подій. Символи «$\cup$» чи «+» можна замінити на сполучення «або». Для перетину (добутку) подій символи «$\cap$» чи «*» - на сполучник «і». Наприклад, множина Е = $\{1;2;3;4;5\}$є об’єднанням двох множин – А = $\{1;2;3\}$ і В = $\{3;4;5\}$.
На мові подій операцію об’єднання А$\cup$ В інтерпретється так: випадковим способом можна вибирати натуральне число не більше трьох, або 4 чи 5.
Зауваження 2. При обчисленні ймовірностей частіше потрібно виконувати зворотні операції – за допомогою об’єднань і перетинів розбирати складні події (що містять у собі більше, ніж одну елементарну подію) на прості.
Приклад 3. Розглянемо операції обєднання і перетину над числовими множинами:
$$A = \{1;3;5;7;9\}; B = \{1;2;3;4;5\}; C = \{2;4;6;8;10\}.$$

Тоді: a) $A \cup B = \{1;2;3;4;5;7;9\}$;

b) $A \cup B = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$;

c) $A \cap B \{1;3;5\}$;

d) $A \cap C = \otimes$

1.4. Елементи комбінаторики. При розв'язуванні задач часто використовують елементи комбінаторики. Це насамперед задачі, в яких доводиться перераховувати багато різних можливих варіантів, наприклад, при складанні розкладу занять чи розкладу руху автобусів, випуску продукції на однотипних станках і т. п. У таких випадках на допомогу приходять поняття комбінаторики, основними з яких є перестановки, розміщення і комбінації.

Приклад 4. Скількома способами можна посадити за одним столом студентів? На перший стілець можна посадити будь - кого з 5 студентів, на другий - будь - кого з 4, що залишилися. Усього 54=20 способів. На третій - будь - кого з 3, на четвертий будь - кого з двох, на п'ятий одного. Отже:

$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

Є 120 способів, якими можна розсадити 5 студентів.

а) Перестановкою з n різних елементів називається об'єкт, який складається з n цих елементів, і відрізняється від інших місцем розташування. Кількість перестановок позначають символ P_n і розраховують за формулою:

$$P_n = n! \qquad (1)$$

Якщо за столом потрібно розсадити 3 студентів з 5, то це можна зробити $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способами.

б) Розміщення з n елементів по k називають об'єкт, що складається з елементів, вибраних з n і розташованих у певному порядку. Два розміщення, що складаються з k однакових елементів, але відрізняються місцем їх розташуванням, вважаються різними.

Число розміщень з n елементів k по будемо позначати символом

$$A_n^k = n(n-1)...[(n-k+1)] \qquad (2)$$

Приклад 5. Обчислити число варіантів п'ятиденного розкладу занять студента по 3 пари щодня, якщо вивчається 15 різних дисциплін і протягом тижня кожна з них повинна вивчатися.

Розв'язок задачі зводиться до знаходження числа розміщень з 15 елементів по 3:

$A_{15}^3 = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730.$ Тобто існує 2730 варіантів розкладу.

в) Комбінацією з n елементів по k будемо називати такі розміщення з n елементів по k, які відрізняються хоча б одним елементом.

Наприклад з чотирьох елементів по одному можна скласти 4 комбінації, по 2 – 6. Якщо ці чотири елементи – цифри 1, 2, 3, 4, то комбінації по 2 матимуть вигляд: $\{1;2\};\{1;3\};\{1;4\};\{2;3\};\{2;4\};\{3;4\}$.
Зауважимо, що комбінації, які відрізняються лише місце розташування елементів, вважаються однаковими: $\{1;2\};\{2;1\}$.
Позначимо число комбінацій з n елементів по k символом C_n^k.
Для обчислення числа комбінацій використовується формула

$$C_n^k = A_n^k / P_k \text{ або } C_n^k = \frac{n(n+1)...(n-k+1)}{k!}. \tag{3}$$

Приклад 6. У лотереї 36 елементів, з яких виграшними є 5. Скільки існує всіх виграшних елементів («Спортлото 5 із 36»).
Для обчислення всіх можливих варіантів обчислимо число комбінацій з 36 елементів по 5:

$$C_{36}^5 = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 376992.$$

1.5**. Класичне означення ймовірності**. Для кількісного виміру появи випадкових подій вводиться поняття ймовірності подій. Існує кілька визначень поняття ймовірності, побудованих на різних припущеннях.

Розглянемо теоретичне означення, в основі якого лежить аналіз всіх можливих наслідків випробування та зв'язків між ними. Множину U будемо називати взаємовиключаючою, якщо існування будь – якого одного наслідку випробування робить неможливим існування іншого в тому ж випробуванні.
Будь – які два елементи E_i і E_j взаємовиключаючої множини U будемо називати несумісними, а всю сукупність елементів $E_i(i=1,...,n)$ множини U попарно несумісною.

Якщо множина U складається лише з елементів, які є несумісними, то їх будемо називати протилежними. На діаграмі Венна протилежними будуть підмножина A і її доповнення A(рис. 1б).
Протилежний елемент будемо позначати символом A.
Повернемося до прикладу 6 («Спортлото 5 із 36»). Розглянемо події: A_5 - вірно закреслено всі 5 виграшних числа; A_4- правильно закреслено рівно 4 виграшні числа; A_3 - 3 виграшні числа; B – не більше 2 виграшні числа. Тоді події A_5, A_4, A_3 і B утворюють множину взаємно викликаючих подій, будь – які дві з них є несумісні. Крім того, якщо через C ми позначимо подію, що вірно закреслено принаймні 3 з5 виграшних числа, то $C = A_5 \cup A_4 \cup A_3 i C = B.$

Приклад 7. Результати вступу на перший курс університету характеризується такими даними (табл. 1.1).

Як видно з таблиці, на перший курс університету поступило 1500 студентів, число осіб різних статей однакове (750).

Множину елементарних подій називають повною або повною групою подій, якщо їхня сукупність вичерпує всі можливі наслідки випробування.

Отже, повна група подій Ω з простору елементарних подій $A_1,..., A_n$ визначається співвідношенням : $\Omega = A_1 \cup ... \cup A_n$.

Таблиця 1.1.

стать	Економічний факультет	Гуманітарний факультет	Технічний факультет	Загальна кількість
Чоловіки	350	300	100	750
Жінки	250	450	50	750
Всього	600	750	150	1500

Так, у прикладі 7, якщо вибрати випадковим способом студента, отримаємо такі варіанти повних груп подій:

а) до університету (не важливо, на який факультет) поступила жінка (подія Ж) або чоловік (подія Ч);

б) студент поступив на економічний факультет (Е), гуманітарний (Г), технічний (Т);

в) про кожного студента можна сказати, що він належить до однієї з груп подій:

$$Ж \cap Е; Ж \cap Г; Ж \cap Т; \quad Ч \cap Е; Ч \cap Г; Ч \cap Т$$

У кожному пункті а, б, в множина елементарних подій є повна.

Елементарні події з множини U, в яких з’являється подія, що нас цікавить, називають сприятливими.

Наприклад, якщо нас цікавить, що в університет вступить особа чоловічої статі, то сприятливими будуть усі елементарні події, коли до університету вступить саме чоловік. Так, у п. а) їх буде 750.

Імовірністю події A називається число, яке обчислюється за формулою

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{4}$$

де n- число всіх можливих взаємовиключаючих рівноможливих елементарних подій, а $m-$ число подій сприятливих до появи події A.

Припустимо, що навмання вибирається першокурсник. Тоді ймовірність того, що вибраний першокурсник буде чоловіком (поява події Ч) дорівнює

$P(Ч)=\frac{m}{n}=\frac{750}{1500}=0.5$, де $m-$кількість чоловіків, n- загальна кількість первокурсників.

Наслідок 1. Якщо події Aі B протилежні, то

$$P(B)=1-P(A), \text{ або } P(\bar{A})=1-P(A) \quad (5)$$

Наслідок 2. Якщо події E_1 і E_2 є несумісними, то

$$P(E_! \cup E_2)=P(E_1)+P(E_2) \quad (6)$$

Формула (6) може бути узагальнена на довільне число взаємовиключаючих одна одну подій $E_1,..., E_k$:

Приклад 8. Набираючи номер телефону, абонент забув одну цифру і набрав її навмання. Знайти ймовірність того, що набрана цифра – правильна.

Випробування в даній задачі полягає в тому, що ми навмання набираємо одну цифру з 10. Позначимо через A подію набору потрібної цифри і використаємо формулу (4).

Множина елементарних подій Ωскладається з події, що набрано цифри 0,1, …, 9, $n(\Omega)=10,\ m=1$(потрібна цифра лише одна).

$P(A)=0{,}1$

Приклад 9. Президент фірми хоче створити команду дизайнерів для розробки нової моделі товару у складі трьох інженерів і двох спеціалістів з дослідження ринку. Яка ймовірність, що команда такого складу буде створена, якщо з групи 10 інженерів і 5 спеціалістів з проблем ринку вибирати навмання п’ять осіб?

Випробування полягає в тому, що президент вибирає п’ять чоловік. Позначимо через A подію, що навмання відібрана команда з 5 осіб складається з трьох інженерів і двох спеціалістів з проблем ринку.

Шукану ймовірність будемо обчислювати за формулою (4). У нашому випадку число всіх елементарних подій збігається з числом комбінацій по 5 елементів з 15.

$$n=C_{15}^{3}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=7\cdot 13\cdot 3\cdot 11=3003$$

Визначимо число сприятливих подій. Трьох інженерів можна взяти довільним способом із наявних десяти. Число таких підгруп у групі з 5 чоловік буде збігатися з числом комбінацій з 10 елементів по 3. Останні дві особи повинні бути спеціалістами з ринку. Їх можна взяти C_5^2 способами.

Вибір інженерів і спеціалістів по ринку здійснюється незалежно:

$$m=C_{10}^{3}\cdot C_5^2=1200$$

$$P(A)=\frac{C_{10}^{3}\cdot C_5^2}{C_{10}^{5}}=\frac{1200}{3003}=0{,}4$$

Приклад 10. *Задача вибору.* Інвестиційна компанія АВС має k пакетів акцій, серед яких є пакети цукрових заводів. Визначити ймовірність того, що серед навмання вибраних m пакетів акцій є рівно l пакетів цукрових заводів.

Оскільки випробування полягає в тому, що ми з k пакетів акцій навмання вибираємо m, то це можна зробити C_k^m способами. Сприятлива подія (серед навмання взятих m пакетів акцій є l пакетів цукрових заводів) може бути реалізована $C_r^l \cdot C_{k-r}^{m-l}$ способами. Дійсно, з r пакетів акцій цукрових заводів вибирається рівно l, способів буде C_r^l. Інші пакети, а їх буде $m-l$ будуть вибиратися з $k-r$, тобто їх буде C_{k-r}^{m-l}. Звідси

$$P = C_r^l \cdot C_{k-r}^{m-l} : C_k^m \tag{7}$$

1.6. Геометрична ймовірність. Поряд з формулою (4) для обчислення ймовірності випадкової події $A,\ A \subset U$ використовують формулу *геометричної ймовірності* – ймовірності попадання точки в задану область (відрізок, частину площини, тощо), яка має вигляд:

$$P(A) = S(A)/S(U) \tag{8}$$

де $S(U)$ - площа універсальної множини U, а $S(A)$- площа підмножини A. Обчислена за формулою (8) ймовірність називається геометричною.

Приклад 11. Дана множина $U = \{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$. Яка ймовірність, того, що навмання взята точка з координатами (x, y), буде знаходитися в області A, обмеженої кривими $y = x^2$ *і* $y = x$?

Обчислимо площу фігури $S(A) = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|$

1.7. **Відносна частота та статистичне означення ймовірності**. Подібним за змістом до ймовірності появи події є відносна частота появи події, яка розраховується за даними спостережень.

Відносною частотою події називають відношення числа випробовувань, в яких подія з'явилась, до загального числа проведених випробувань.

Формулою це записується так:

$$w(A) = \frac{m}{n}, \tag{9}$$

де m - число випробувань, в яких подія A спостерігалася, n - загальне число випробувань, m також називають частотою появи події A.

Роль універсальної множини U в (9) відіграє генеральна сукупність – множина всіх випробувань. Для зменшення обчислень з генеральної сукупності відбирають частину елементів, яку називають вибірковою сукупностю або скорочено – вибіркою.

Приклад 12. Вивчається ситуація з ризиком повернення кредиту великого банку. За попередні роки було обстежено 10000 фізичних і юридичних осіб. Дані високого, середнього та низького ризику згруповані у вигляді таблиці 1.2.

Таблиця 1.2.

Ризик				
Тип кредиту	низький	середній	високий	
Фізичні особи Юридичні особи	2250 750	4000 1200	1200 600	7450 2550
Загальна кількість	3000	5200	1800	10000

Позначимо через Н подію, яка характеризує низький ризик повернення кредиту, С – середній, В- високий. Тоді

Порівнюючи означення ймовірності і відносної частоти, можемо зробити висновок: означення ймовірності не потребує, щоб випробування проводилися в дійсності – це можна зробити теоретично, а означення відносної частоти вимагає, щоб випробування фактично були здійснені. Ймовірність можна обчислити без проведення випробувань, відносну частоту – тільки після них.

Якщо спостереження проходять в однакових умовах і у кожному з них число випробувань достатньо велике, то відносна частота є стійкою величиною.

*Статистичною ймовірністю*_події А називають відносну частоту появи події А або число, достатньо близьке до неї.

1.8. **Залежні та незалежні події. Умовна ймовірність.** Дві події А і В називають незалежними, якщо ймовірність появи однієї з них не залежить від появи чи не появи іншої. У протилежному випадку вони називаються залежними.

Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називають ймовірність події В, обчислену за умови того, що подія А вже наступила.

Розглянемо приклад 12 і обчислимо ймовірності низького ризику повернення кредиту для фізичних (Ф) та юридичних (Ю) осіб. Згідно з формулою (4):

$$P_ф(H) = 2250 : 7450 = 0{,}302, \qquad P_ю(H) = 750 : 2250 = 0{,}333$$

Отже, події Н, Ф та Н, Ю залежні.

Ці ж результати можна одержати за допомогою формули

$$P_A(B) = P(A \cap B) / P(A) \tag{10}$$

У першому випадку за формулою класичного означення (3):

Ймовірність ризику для фізичних осіб

$$P(Ф) = 7450 : 10000 = 0{,}745;$$

А низького ризику для фізичних осіб – 2250:10000=0,225.

Отже: $P_Ф(H) = 0{,}225 : 0{,}745 = 0{,}302$

Згідно з (11) отримаємо для ймовірності добутку залежних подій:

$P(A \cap ИB) = P(A)P_A(B)$ (12)

Якщо події A і B незалежні, то умовна ймовірність стає «безумовною»:

$$P_B(A) = P(A)$$

У випадку, коли події A і B незалежні, то $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Приклад 13. В урні є 3 білі і 3 чорні кульки. З неї два рази виймають навмання по одній кульці, не повертаючи їх назад. Знайти ймовірність витягування спочатку білої, а потім чорної кульок.

Позначимо через A подію, що буде витягнута біла кулька, а B – чорна. Оскільки витягування спочатку білої, а потім чорної кульок є перетин $C = A \cap B$, то за формулою (13)

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$ За класичним означенням ймовірність $P(A) = 0{,}5$. Після першого випробування в урні залишилось 5 кульок, з них, згідно з умовою задачі, 2 білі і 3 чорні. Тому за формулою (4) $P_B(A) = 3/5$. Звідси $P(A \cap B) = 0{,}3$.

1.9. Ймовірність появи події принаймні один раз при *n* незалежних випробуваннях. На практиці, зазвичай, здійснюють серію випробувань. Найпростіші різновиди випробувань – незалежні випробування.

Випробування називаються незалежними, якщо їхні наслідки незалежні в сукупності.

Розглянемо випробування, у результаті якого можуть з'явиться події A_i з ймовірністю p_i, незалежними в сукупності, а події $\bar{A}_i$ з ймовірністю $P(\bar{A}_i) = q_i = 1 - p_i$. Обчислимо ймовірність появи принаймні однієї з подій A_i. Названа подія (позначимо через C) виключає випадок, коли подія не з'явиться жодного разу, тобто виключається подія $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap ... \cap \bar{A}_n$. Отже, $\bar{C} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i$ і $C \cup \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A} = \Omega$. Це значить, що $P(C \cup \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}) = P(\Omega) = 1$ або

$$P(C) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n \qquad (11)$$

Приклад 14. Ймовірність появи деякої випадкової події у першому випробуванні дорівнює 0,9 у другому – 0,8, у третьому – 0,7. Яка ймовірність того, що при трьох випробуваннях подія з'явиться принаймні один раз?

Позначимо появу події в $i-$му випробуванні A_i. За умовою задачі $P(A_i) = p_1 = 0{,}9;\quad P(A_2) = p_2 = 0{,}8;\quad P(A_3) = p_3 = 0{,}7$

$$P(C) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$$

1.10. Обчислення ймовірностей настання складних подій.

Розглянемо складнішу ситуацію обчислення ймовірностей, ніж у задачі про настання хоча б однієї події. Обмежимося двома незалежними випробуваннями. Ненехай перше з них має простір, що складається з елементарних подій $E_1, E_2, ..., E_s$, друге відповідно - $D_{1,}, D_2, ...D_k$

Сукупність двох випробувань можна розглядати як деяке складне випробування, елементарними подіями якого будуть всі можливі комбінації s результатів першого випробування, з k - другого, тобто події вигляду:

$$E_i \cap D_i \tag{12}$$

Події (12) будуть елементарними і в силу незалежності випробувань їх загальне число дорівнює $n = s \cdot k$. Будь – яка подія, яка може бути побудована за допомогою елементарних подій E_i i $D_л$, зображається деякою сумою доданків типу (12).

Ймовірності подій у просторі елементарних подій, отриманому за допомогою композиції випробувань, будуть обчислені за допомогою теорем додавання, якщо будуть відомі ймовірності $P(E_i \cap D_k)$.

Приклад 15. Об'єднення складається з двох підприємств. Ймовірність появи бракованої продукції на першому підприємстві 0,1, на другому – 0, 2. Яка ймовірність того, що продукцію без браку випустить тільки одне підприємство?

Введемо події:

A_1 - перше підприємство випустило продукцію без браку: $P(A_1) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$; $A_2 -$ друге підприємство випустило продукцію без браку: $P(A_2) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$; $B -$»тільки одне» підприємство випустило продукцію без браку. $P(B) - ?$

Подія B буде складною і може бути побудована за допомогою перших двох. Перше випробування допускає дві події: A_1 i $\bar{A}_1$, аналогічно друге - A_2 i $\bar{A}_2$. Подія, що перше підприємство виробляє стандартну продукцію (а друге ні), запишеться у вигляді перетину подій $A_1 \cap \bar{A}_2$, аналогічно – «тільки друге» - $\bar{A}_1 \cap A_2$. Звідси подія В є об'єднанням цих двох, побудованих подій, тому

$$B = (A_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2),$$

Події $C_1 = A_1 \cap \bar{A}_2$ і $C_2 = \bar{A}_1 \cap A_2$ є несумісними через наявність у них протилежних події, тому за формулою (6):

$$P(B) = P(C_1) + P(C_2)$$

Через незалежність подій A_1 і A_2 незалежними будуть і події A_1, $\bar{A}_2$ та - $\bar{A}_1$, A_2. Отже,

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2) = 0{,}9\cdot 0{,}2 + 0{,}1\cdot 0{,}8 = 0{,}26$$

Приклад 16. Для контролю за проростанням насіння вибрана випадковим способом партія із 100 насінин. Умовою непридатності всієї партії є наявність принаймні однієї насінини, що не проросте, з 5, які перевіряються послідовно. Яка для даної партії ймовірність бути забракованою, якщо за статистичними даними не проростає 5% насінин?

Випробування полягає в тому, що ми з партії 100 насінин послідовно перевіряємо на схожість п'ять.

Використаємо протилежну подію А, яка полягає в тому, що партія насінин буде прийнята. Введемо позначення $A_i - \ i$- та насінина проросте $(i = 1,\ldots,5)$.

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$$

$$P(A) = \frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\cdot\frac{92}{97}\cdot\frac{91}{96} = 0{,}77$$

Шукана ймовірність $P(\bar{A})$ того, що вся партія непридатна:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}77 = 0{,}23$$

1.11. **Формула повної ймовірності.** На практиці трапляються типові ситуації, для яких виведені спеціальні формули.

Розглянемо ситуацію, коли випадкова подія А може відбутися тільки разом із однією з подій B_i $(i = 1,\ldots, n)$, які попарно несумісні і утворюють повну групу. Тоді ймовірність події А обчислюється за формулою

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P_{B_i}(A) \tag{13}$$

Яка називається формулою повної ймовірності. Випадкові події $B_1 B_2,\ldots, B_n$ називаються *гіпотезами.*

Приклад 17. Вивчаються результати екзамену з математики у двох групах. У першій групі є 28 студентів, з них 10 отримали відмінну оцінку, а в другій відповідно – 22 і 7. Яка ймовірність, що навмання вибраний студент отримав на екзамені відмінну оцінку?

Випробування полягає в тому, що навмання вибраний студент на екзамені з математики отримав відмінну оцінку. Це може статися, коли студента вибрано з першої групи (відбулася подія B_1) або – другої (B_2). За статистичним означенням ймовірності

$$P(B_1) = 28/50; \quad P(B_2) = 22/50.$$

Використаємо формулу повної ймовірності

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A)$$

За умовою задачі $P_{B_1}(A) = \dfrac{10}{28}$, $P_{B_2}(A) = \dfrac{7}{22}$

Звідси $P(A) = \dfrac{28}{50}\cdot\dfrac{10}{28} + \dfrac{22}{50}\cdot\dfrac{7}{22} = \dfrac{17}{50}$

1.12.Формула Байєса. Ненехай виконуються ті ж умови, що й для формули (19). Для переоцінки ймовірностей гіпотез B_i за умови, що подія A з'явилася, тобто для обчислення ймовірностей $P_A(B_i)$ користуються формулою Байєса:

$$P_A(B_i) = \frac{p(B_i)\,p_{B_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p(B_i)\,p_{B_i}(A)} \tag{14}$$

Приклад 18. У першому ящику маємо 8 стандартних і 2 браковані деталі, а у другому – 5 стандартних і 5 бракованих. Ящики мають однаковий зовнішній вигляд. З навмання вибраного ящика взято (також навмання) дві деталі. Які виявилися стандартними. Яка ймовірність того. Що їх взяли з другого ящика?

Позначимо через А подію, що вибрано дві стандартні деталі, через B_1 - що навмання взяті дві деталі були взяті з першого ящика, B_2 - з другого ящика. Обчислимо ймовірність цих подій до проведення спроби:

$P(B_1) = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $P_{B_1}(A) = \dfrac{C_8^2}{C_{10}^2} = \dfrac{28}{45}$

$P(B_2) = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $P_{B_2}(A) = \dfrac{C_5^2}{C_{10}^2} = \dfrac{10}{45}$

Для переоцінки ймовірностей гіпотеза B_2 використаємо формулу Байєса

$$P_{B_2}(A) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{45}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{28}{45} + \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{45}} = \frac{5}{19}$$

Розділ 2. Схема повторних незалежних випробувань Бернуллі.

2.1 Формула Бернуллі. Розглянемо найпростіший випадок незалежних випробувань, коли вони повторюються і в кожному з них можливі лише два наслідки: поява деякої події А і її не поява $\bar{A}$, так що $A \cup \bar{A} = U$. Ймовірність появи для кожного випробування стала і дорівнює $P(A) = p$. Для події $\bar{A}$ будемо мати: $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p = q$. Нехай проведено n незалежних випробувань, які ми будемо розглядати як одне складне випробування. Поставимо перед собою задачу: обчислити ймовірність того, що подія А з'явится рівно k разів і як наслідок не з'явится $n-k$ разів.

Ймовірність, що протягом n випробувань будемо спостерігати подію А рівно k разів - $P_n(k)$ обчислювати за формулою

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{1}$$

Приклад 1. Митний пост дає статистичну оцінку того, що 20% усіх осіб, що повертаються за кордону, не декларує весь товар, на який накладається податок. Якщо випадково відібрати 5 осіб, то яка ймовірність того, що 3 з них не декларували весь товар?

Позначимо через А подію, що навмання вибрана особа не задекларувала весь товар, $P(A) = 0{,}2$. Задача задовольняє умовам формули Бернуллі: $n = 5, k = 3, p = 0{,}2$:

$$P_5^3(A) = C_5^3 0{,}2^3 0{,}8^2 = 0{,}0512$$

Приклад 2. Бізнесмен, вивчивши попит ринку на нові спортивні автомобілі, вирішив продати пробну партію з дев'яти таких автомашин. Ймовірність отримати високий прибуток за рахунок кожної машини оцінена в 0,8 і вважається успіхом, якщо за день їх буде продано не менше семи. Яка ймовірність успіху, якщо протягом дня продаж машин відбувається незалежно?

Продаж кожної автомашин є випробуванням. Позначимо через А подію, що за рахунок продажу автомобіля бізнесменом отримано високий прибуток: $p = P(A) = 0{,}8$, тоді $q = P(\bar{A}) = 0{,}2$ успіхом для бізнесмена буде той випадок, коли число $\boldsymbol{k}$ проданих за день автомобілів буде задовольняти нерівності: $7 \le k \le 9$. Для кожного $\boldsymbol{k}$ ймовірність обчислюємо за формулою Бернуллі:

$P_9(7) = C_9^7 0{,}8^7 0{,}2^2 = 0{,}302$

$$P_9(7 \le k \le 9) = P_9(7) + P_9(8) + P_9(9) = 0{,}302 + 0{,}302 + 0{,}1342 = 0{,}7382$$

2.2. **Найбільш імовірне число настання подій**. У формулі Бернуллі (1) параметр $\boldsymbol{k}$ може змінюватись від 0 до n, тобто подія А може появитися в n

випробуваннях від 0 до n з різними ймовірностями, підрахованими за формулою (1).

Обчислимо ці ймовірності в прикладі 1 попереднього пункту.

$$P_5^0(A) = C_5^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}32768; \quad P_5^3(A) = C_5^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0512;$$
$$P_5^1(A) = C_5^1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096; \quad P_5^4(A) = C_5^4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8 = 0{,}0064;$$
$$P_5^2 = C_5^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}2048; \quad P_5^5(A) = C_5^5 \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^0 = 0{,}00032.$$

Найбільша з ймовірностей, підрахованих за формулою Бернуллі, досягається при $k = 1$.

Число k *для якого ймовірність* $P_n(k)$ *є найбільшою називають найімовірнішим числом настання подій (найбільшою частотою, модою).*

Отже, в прикладі 1 з попереднього пункту найбільш ймовірно, що при повернені з за кордону групи з 5 чоловік одна особа не декларує весь товар.

Найімовірніше число настання подій k_0 задовольняє нерівностям

$$np - q \le k_0 \le np + p \tag{2}$$

Приклад 3. Встановлено, що 90% висіяних у грунт зерен насіння огірків проростає. Визначити найімовірніше число зернин, що проростуть, якщо в пакеті 70 зернин.

Використаємо нерівність (2)

$$70 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le k_0 \le 70 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \quad \textit{або} \quad 62{,}9 \le k_0 \le 63{,}9$$

Оскільки k_0 є цілим числом, то на інтервалі $(62{,}9; 63{,}9)$ є тільки одне таке число – 63. Отже, k_0=63.

2.3. **Наближені формули обчислення ймовірностей.** При великих n і k обчислювати ймовірність $P_n(k)$ за формулою (1) важко через громіздкість обчислень. З іншого боку при великих n з достатньою точністю формулу (1) можна замінити наближеними, а саме: формулою Пуассона, локальною та інтегральною формулами Муавра - Лапласа.

2.3.1. **Формула Пуассона**. Якщо $n \to \infty$ і $p \to 0$ так, що $np \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то

$$\lim_{n \leftarrow \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np \tag{3}$$

для довільного $k \in [0;1;\ldots,n]$.

Отже, при малих p (починаючи з $p < 0{,}1$) точну формулу (1) можна замінити наближеною формулою Пуассона:

$$\lim_{n \leftarrow \infty} P_n(k) \cong \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np$$

Приклад 4. у таблиці випадкових чисел цифри згруповані по дві (від 00 до 99). Обчислити ймовірність того, що серед 100 довільно вибраних пар пара 00 зустрінеться не більше двох раз.

Позначимо через А подію, при якій трапляється пара цифр 00, тоді $p = P(A) = 1/100 = 0{,}01$.

Оскільки ймовірність p досить мала, а $\lambda = np = 100 \cdot 0{,}01 = 1,$ то використаємо формулу Пуассона.

Для того, щоб обчислити ймовірність появи події « не більше двох раз», потрібно обчислити $P_{100}(k)$ при $k = 0, 1, 2$

$$P_{100}(0) = \frac{1^0}{0!} e^{-1}, \quad P_{100}(1) = \frac{1}{1!} e^{-1}, \quad P_{100}(2) = \frac{1^2}{2} e^{-1}.$$

Звідси

$$P_{100}(k \le 2) = e^{-1} + e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{5}{2e} = \frac{5}{2 \cdot 2.7} \approx 0{,}9259.$$

2.3.2. **Локальна формула Муавра – Лапласа.** Нехай $0 < p < 1,$ тоді для $|x| < C, \quad C - const$

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \; x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \; \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{4}$$

Є таблиці, в яких подані значення функції $\varphi(x)$ при невід’ємних значеннях аргументу x в межах від 0 до 4. Якщо $x > 4$, то вважають, що $\varphi(x) = 0$. Функція $\varphi(x)$ є парною, тому $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Функцію $\varphi(x)$ називають функцією Гауса, і вона є частковим випадком нормальної кривої, коли її максимум знаходиться в точці $x = 0$ (рис. 5).

Приклад 5. Знайти ймовірність, що подія А наступить 10 разів у 100 незалежних випробуваннях, якщо подія А появляється в кожному випробуванні з ймовірністю 0,2.

Використаємо локальну формулу Мавра – Лапласа.

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{10 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -\frac{10}{4} = -2{,}5.$$

За таблицею Функції Гаусса $\varphi(-2{,}5) = \varphi(2{,}50 = 0{,}0175$. Звідси

$$P_{100}(10) = \frac{1}{4} \cdot 0{,}0175 = 0{,}0044$$

2.3.3. Інтегральна формула Муавра – Лапласа. Нерідко потрібно обчислити ймовірності того, що подія А з’явиться від k_1 до k_2 разів, як це було у прикладі 2. Тоді потрібно обчислити ймовірності $P_n(k)$ для $k_1 \le k \le k_2$ і просумувати їх, тобто

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) \tag{5}$$

Якщо n велике, то ймовірності $P_n(k)$ будуть розраховуватись за наближеними формулами. Для наведених n можна використати рекурентне співвідношення, що зв'язує дві послідовні ймовірностей

$$P_n(k+1) = P_n(k) \cdot \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} \qquad (6)$$

Для обчислення ймовірності того, що подія А появиться від k_1 до k_2 разів використовують наближену інтегральну формулу Мавра – Лапласа.

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),\ x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}} \quad (i = 1,2) \qquad (8)$$

де функція $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ є протабульована. У силу властивостей означення інтегралу функція $\Phi(x)$ є непарною.

Формула (8) дає добре наближення, коли n достатньо велике, а $npq > 20$ є

Приклад 6. за допомогою статистичних даних підраховано, що ймовірність захворіти грипом під час епідемії для кожної людини дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що з 400 перевірених осіб хворими виявляться:

а) рівно 80 осіб;

б) від 70 до 100 осіб?

а) За умовою задачі ми маємо $n = 400,\quad k = 80,\ p = 0{,}2,\ q = 0{,}8$ Оскільки n число велике, то використаємо наближену локальну формулу Муавра – Лапласа

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \quad P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \varphi(x) = \frac{1}{8} \varphi(x)$$

Обчислимо значення аргументу x

$$x = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 0$$

За таблицями знаходимо, що $\varphi(0) = 0{,}3989$. Ймовірність $P_{400}(80) = 0{,}3989 / 8 = 0{,}04797$.

б) Використаємо наближену інтегральну формулу Мавра – Лапласа

$P_{400}(70 \le k \le 100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

$$x_2 = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = \frac{20}{8} = 2{,}5; \quad x_1 = \frac{70 - 80}{8} = -1{,}25.$$

За таблицями функції $\Phi(2{,}5) = 0{,}4939$, а $\Phi(-1{,}25) = -0{,}3944$

$$P_{400}(70 \le k \le 100) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882$$

2.4. Формула обчислення ймовірності відхилення відносної частоти від заданої ймовірності в незалежних випробуваннях. За допомогою інтегральної формули Мавра – Лапласа можна обчислити, наскільки близькими за ймовірності є відносна частота m/n появи події А і ймовірність p в n незалежних випробуваннях тобто ймовірність події

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$$

Справедлива формула

$$P\left\{\left[\frac{m}{n}-p\right[<\varepsilon\right\}=2\Phi\left\{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}$$

На практиці часто виникає обернена задача до задачі, розглянутої вище, а саме, скільки потрібно провести випробувань, щоб відносна частота m/n відрізнялася від ймовірності p не більше ніж на ε із заданою наперед ймовірністю P.

Використаємо формулу (16). За таблицею функції Лапласа $\Phi(x)$ з формули $\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=\frac{P}{2}$ знайдемо $x=\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right)$ Звідси

$$n=x^2pq/\varepsilon^2$$

Вибираємо за n найменше ціле число, більше за вираз x^2pq/ε^2.

Приклад 7. Менеджер встановив, що ймовірність бути нереалізованою для кожної одиниці продукції, яка швидко псується, дорівнює 0,1. скільки потрібно реалізувати одиниць продукції, щоб з ймовірністю 0,9544 можна було стверджувати, що відносна частота одиниці нереалізованої продукції відхилиться від постійної ймовірності p за абсолютною величиною не більше ніж на $\varepsilon=0.03$.

За умовою задачі $p=0{,}1,\ q=0{,}9,\ \varepsilon=0{,}03,\quad P\{|m/n-p|\le\varepsilon\}=0{,}9544.$

Потрібно обчислити n

Використаємо формулу (16), тоді за умовою задачі

$$2\Phi(0{,}03\sqrt{n/0{,}1\cdot0{,}9})\cong2\Phi(0{,}1\sqrt{n})=0{,}9544.$$

За таблицями значень функції $\Phi(x)=0{,}4772$ знаходимо $x=2$, тобто $0{,}1\sqrt{n}=2.\ \Rightarrow n=400.$

За умовами задачі для заданого відхилення відносної частоти від теоретичної ймовірності p необхідно реалізувати не менше ніж 400 одиниць продукції, що швидко псується.

Даному результату можна дати таке імовірнісне тлумачення: якщо буде реалізовано достатньо велику кількість партій продукції в кількостях , не менших за 400 одиниць, то в 95,44% цих партій відносна частота появи одиниці нереалізованої відхилятиметься від теоретичної ймовірності $p=0{,}1$ за абсолютною величиною не більше ніж на 0,03 в межах від 0,1-0,03=0,07 до

0,1+0,03 =0,13. Іншими словами, число одиниць нереалізованої продукції в 95,44% партій буде знаходитися між 28 (7%від 400) і 52 (13%від 400).

Якщо взяти лише одну партію із 400 одиниць продукції, то з великою долею впевненості можна очікувати, що в ній число одиниць нереалізованої продукції буде не менше за 28 і не більше 52.

Розділ 3. Випадкові величини

3.1. Класифікація випадкових величин. У цьому розділі розглянемо випадкові величини, які складаються з випадкових подій. Так, наприклад, підкидаючи гральний кубик, ми наперед не можемо визначити скільки очок випадає -1,2,3,4,5 чи 6. Тому ці числа можна інтерпретувати як випадкові події або можливі значення величини, яку дальше ми будемо називати випадковою.

Випадковою *називають величину, яка в результаті випробування приймає певні випадкові значення.*

Випадкові величини можна поділити на дискретні і неперервні, залежно від значень, які вони можуть набувати.

Дискретною називають *випадкову величину, яка може приймати зчисленну скінченну чи нескінченну множину значень з певними ймовірностями.*

3.2.Закони розподілу дискретних випадкових величин.

Задають дискретні випадкові величини за допомогою *закону розподілу*, коли задаються ймовірності їх можливих випадкових значень.

Дискретний розподіл вважається заданим, якщо відомі всі можливі значення $x_1, x_2, ..., x_k$, що приймаються випадковою величиною X і ймовірності $p(x_i)$ для кожної події $X = x_i$

При табличному заданні розподілу можливі значення випадкової величини ї їхні ймовірності записуються у вигляді таблиці:

Таблиця 3.1

X	x_1	x_2		$x_л$
P	p_1	p_2	$\dots$	$p_л$

Таблиці значень випадкової величини і відповідних їм ймовірностей називають табличним розподілом.

Випробуванні X приймає тільки однє із можливих значень x_i маємо, що події утворюють повну групу, тобто

$$\bigcup_{i=1}^{k} \{X = x_i\} = \Omega \qquad (1)$$

3.3. Приклади дискретних випадкових величин. Залежно від того, якою формулою будуть обчислюватися ймовірності p_i, ці закони будуть мати свою назву.

3.3.1. Біноміальним називають закон розподілу випадкової величини x,заданий таблицею 3.1, у якій ймовірності p_k

Розраховуються за формулою Бернуллі (2.1)

Таблиця 3.2

	0	1	2	…	n
	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	p^n

Постійні n і p, за допомогою яких проводяться розрахунки в таблиці 3.2, називають пераметрами біноміального розподілу.

Прилад 1. Розглянемо приклад 1 з попереднього розділу. Позначимо через X кількість осіб, що декларують не весь товар, привезений із – за кордону.

За даними задачі біноміальний розподіл має такий вигляд:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,32768	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,00032

3.3.2. Як вже згадувалося в попередньому розділі, у випадку, коли p є мале число, а $np \to \lambda$ при $n \to \infty$, то замість формули Бернуллі потрібно використати формулу Пуассона (2.4). відповідний дискретний розподіл називають розподілом Пуассона, і він має такий вигляд:

Таблиця 3.4.

X	0	1	2	…	n
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$		$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Приклад 2. Завод відправив споживачу 5000 стандартних виробів. Ймовірність пошкодження виробу в дорозі оцінюється як 0,0002. Записати закон розподілу чотирьох пошкоджених у дорозі виробів.

За формулою Пуассона обчислимо ймовірності $P_n(k)$ для $k = 0,1,2,3,4$. В Використаємо для цього таблиці з додатку 3 при $\lambda = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$

$P_{5000}^0 = 0{,}36788$; $P_{5000}^1 = 0{,}36788$; $P_{5000}^2 = 0{,}18394$; $P_{5000}^3 = 0{,}06131$; $P_{50000}^4 = 0{,}01533$

Таблиця 3.5

X	0	1	2	3	4

P	0,36788	0,36788	0,18394	0,06131	0,01533

3.4. **Фукнції розподілу неперервних випадкових величин та їх властивості.** Неперервною називають випадкову величину, яка приймає всі значення з деякого скінченого чи нескінченного проміжку.

До неперервних випадкових величин можна віднести помилки обчислень, температура тіла людини, ріст і тощо.

Оскільки неперервна випадкова величина приймає всі значення з деякого інтервалу, то за допомогою таблиць, як це було зроблено для дискретних величин, її задати не можна. Задають неперервні випадкові величини аналітично за допомогою функцій розподілу: інтегральної та диференціальної. Можна задати також неперервні випадкові величини графічно.

3.4.1. **Інтеральна функція розподілу.** Ймовірність події, яка полягає в тому, що X приймає значення менше x, тобто $P(X < x)$, називають інтегральною функцією розподілу. Позначають інтегральну функцію символом $F(x)$.

Інтегральна функція розподілу задається формулою:

$$F(x) = P(X < x) \qquad (3)$$

Інтегральна функція володіє такими властивостями:

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. $F(x) -$ неспадна функція

З властивості 2 маємо важливий

Наслідок 1. Ймовірність того, що випадкова величина X приймає значення з інтервалу (a, b) обчислюється за формулою

$$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a)$$

Приклад 3. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0; \\ x^2, & \text{якщо} \quad 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 1 \end{cases}$$

Знайти ймовірність, що в результаті випробування X приймає значення з інтервалу $(-2; 0{,}5)$, та побудувати графік функції $F(x)$.

Використаємо формулу (4). Точка 0,5 належить інтервалу $(0;1)$, тому $F(0{,}5) = 0{,}5^2 = 0{,}25,$ а $-2 \in (-\infty; 0)$, на якому $F(x) = 0,$ зокрема $F(-2) = 0$. Звідси

$$P\{-2 < X < 0{,}5\} = F(0{,}5) - F(-2) = 0{,}25 - 0 = 0{,}25$$

Для побудови графіка функції F(x) скористаємося тим фактом, що на трьох інтервалах вона задана порізному.

Для побудова графіка функції $F(x)$ скористаємося тим фактрм, що на трьох інтервалах вона задана по різному. На півосі $(-\infty;0)$ графік нашої кривої співпадає з віссю абсцис. На інтервалі $(0;1)$ графіком є частина параболи $F=x^2$, а на $(1;\infty)$ пряма паралельна осі абсцисс- $F=1$.

3.4.2. **Емпірична функція розподілу**. За формулою, подібно до (3), задається емпірична функція, що використовується у математичній статистиці. За означенням емпічна функція $F^*(x)$ задається формулою

$$F^*(x)=n_x/n, \qquad (5)$$

Де n - обсяг вибірки, а n_x - число варіант, менших х.

Як і для неперервної випадкової величини, функція $F^*(x)$ визначае для кожного значення відносну частоту події $\{X,x\}$.

Графік емпіричної функції має вигляд сходинок.

Приклад 4. Побудувати емпічну функцію для вибірки, заданної статистичним законом розподілу

Таблиця 3.8

x_i	1	3	5
n_i	3	5	2

За формулою (5) функція $F(x)$ буде змінювати своє значення при переході через точки $x=x_i$. Обчислимо значення функцій (5) при $n=10$.

$$F^*(x)=\begin{cases}0; & якщо \quad x<1\\ 0{,}3; & якщо \quad 1\le x<3\\ 0{,}8; & якщо \quad 3\le x<5\\ 1; & якщо \quad x\ge 5\end{cases}$$

Графік функцій $F^*(x)$ зображено на рис. 9.

3.4.3. **Диференціальна функція розподілу.** Неперервну випадкову величину задають також за допомогою диференціальної функції розподілу.

Диференціальної функції розподілу називають першу похідну від інтегральної функції розподілу.

Позначають диференціальну функцію розподілу так: $f(x)$

$$F(x)=F'(x) \qquad (6)$$

У літературі замість терміна диференціальна функція розподілу вживається такаож терміни цілісність або густина розподілу.

За означенням функції $f(x)$ ймовірность того, що неперервна випадкова величина X прийме значення з інтервалу $(a;b)$обчислюється за формулою

$$P(a < X, b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (7)$$

Користуючись геометричним тлумаченням означеного інтервалу, формулі (7) можна дати таку інтерпрітацію: ймовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме значення з інтервалу $(a;b)$ дорівнює площі криволенійної трапеції, обмеженої віссю абсцис, ординатами $x=a$ і $x=b$ та функцією $f(x)$ (рис. 10).

Диференціальна функція $f(x)$ аналочічно з інтегральною має дві основні властивості.

Властивість 1. Диференціальна функція – невід'ємна $f(x) \geq 0$

Властивість 2. Невласний інтеграл від диференціальної функції по всій числовій осі дорівнює одиниці

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Геометрично друга властивість для функції $f(x)$ означає, що вся площа криволінійної трапеції. Обмеженої віссю абсцис та кривою розподілу, дорівнює одиниці.

У частинному випадку, коли можливі значення випадкової величини належить інтервалу $(a;b)$, то

Ми визначили диференціальну функцію розподілу $f(x)$ за допомогою інтегральної – $F(x)$. Обернена задача також вирішується однозначно, а саме, якщо подію $\{X < x\}$переписати в вигляді $\{-\infty < X < x\}$ і використати формулу (7), то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \qquad (8)$$

Другу властивість диференціальної функції розподілу $f(x)$ часто використовують для того, щоб задати випадкову величину.

3.5. **Приклади непервних випадкових величин.** Розглянемо приклади неперервних випадкових величин, що найчастіше використовуються у дослідженнях: рівномірний, показниковий та нормальний розподіли.

3.5.1. Рівномірний розподіл. Приклад 5. ненехай випадкова величина має постійну щільність розподілу і задається так:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<a;\\ C, & \text{якщо } a\le x\le b;\\ 0, & \text{якщо } b<x\end{cases}$$

Визначити постійну C.

Використаємо властивість 2 щільності розподілу і той факт, що можливі значення випадкової величини зосереджені на інтервалі $(a;b)$. Тоді

$$\int_a^b f(x)dx=1=\int_a^b Cdx=C(b-a) \quad \text{і} \quad C=\frac{1}{b-a}$$

Випадкова величина, що має постійну щільність розподілу задається так:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<a;\\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } a\le x\le b;\\ 0, & \text{якщо } b<x\end{cases} \tag{9}$$

Випадкова величина, що має постійну щільність розподілу, називається рівномірно розподіленою.

Графік щільністі розподілу для рівномірно розподіленої випадкової величини має такий вигляд (рис.11).

Інтегральну функцію розподілу для рівномірно розподіленої випадкової величини обчислимо за формулою (8).

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{якщо } a\le x\le b;\\ 1, & \text{якщо } b<x\end{cases} \tag{9'}$$

Функція $F(x)$ на графіку зображається такою кривою:

З рисунку 12 бачимо, що крива інтегральної функції рівномірного розподілу є неперервною і складається з трьох частин: двох напівпрямих $F=0$ для $x\in(-\infty;a)$ і $F=1$ для $x\in(b;+\infty)$ та відрізка прямої лінії $F=(x-a)/(b-a)$ на інтервалі $(a;b)$.

3.5.2. Показниковий розподіл. Приклад 6. Експоненціальний (показниковий) розподіл. Випадкова величина, щільність розподілу якої задається формулою

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x\ge 0\end{cases} \tag{10}$$

називається експоненціальною (показниковою).

Параметром експоненціального розподілу є λ. Графік функції (10) показано на рис. 13а.

Інтегральну функцію експоненціального розподілу $F(x)$ знайдемо за формулою (8). Для цього обчислимо інтеграл $\int\limits_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$. Звідси

$$F(x) = \begin{cases} 0, & якщо \quad x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & якщо \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{10'}$$

Графік функції (10') показано на рис. 13б. З (10') отримуємо формулу для обчислення ймовірності попадання X в інтервал $(a; b)$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Приклад 7. неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & якщо \quad x < 0; \\ e^{-x}, & якщо \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, что в результаті випробування випадкова приймає значення з інтервалу (1; 3).

Скористаємося останньою формулою.

$$P(1 < X < 3) = e^{-1} - e^{-3} = 0{,}379(1 - 0{,}1353) = 0{,}3181$$

Значення e^{-1} і e^{-2} можуть бути знайдені за таблицями функції

3**.5.3. Нормальний закон розподілу** Приклад 8. Неперервна випадкова величина розподілена нормально, якщо її диференціальна функція розподілу має вигляд

$$f(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} \tag{11}$$

для любого значення x з інтервалу $(-\infty; +\infty)$, і довільних чисел a і σ.

Числа a і σ називают параметрами розподілу і вони мають певний ймовірністий зміст.

Графіком функції (11) є крива, яку називають кривою Гауса або нормальною кривою (рис.14).

Якщо у формулі (11) покласти $a = 0$, $\sigma = 1$, то ми отримаємо нормовану функцію Гауса, яка вже траплялася в розділі 2 у схемі повторних незалежних випробувань Бернуллі під назвою мала функція Лапласа.
Інтегральна функція має вигляд:

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \tag{12}$$

Графік функції (12) має вигляд.

Як наслідок з формули (12)отримуємо ймовірності попадання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, в інтеграл $(\alpha;\beta)$ - $P(\alpha < X < \beta)$ і відхилення її від свого математичного сподівання а на наперед задану величину $\delta - \mathrm{P}(|X-\alpha| < \delta)$

У першому випадку

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \tag{13}$$

Для обчислення ймовірності відхилення нормально розподіленої випадкової величини від свого математичного сподівання а на наперед задану величину отримаємо формулу

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \tag{14}$$

3.6. Операції над випадковими величинами. Над випадковими величинами можна проводити такі ж само операції, як і над випадковими подіями. Проілюструємо їх на прикладі дискретних випадкових величин. Ненехай задано випадкові величини Х і У своїми законами розподілу.

Таблиці 3.9

X	x_1	x_2
p	p_1	p_2

У	y_1	y_2
Q	q_1	Q_2

Об'єднанням випадкових величин X і Y розумітимо випадкову величину $Z = X \cup Y$, можливі значення якрі дорівнюють скмам всіх можливих доданків $x_i + y_j$, а ймовірності $X \cup Y$ для незалежних величин X і Y - добутку ймовірностей $p_i \cdot q_j$; для залежних величин – добуткам ймовірностей однієї з них на умовну ймовірність другої.

Перетином незалежних випадкових величин X і Y розуміємо випадкову величину $Z = X \cap Y$, можливі значення якої дорівнюють добуткам всіх можливих значень X і Y - $x_i \cdot y_j$, ймовірності яких також перемножуються $p_i \cdot q_j$

Таблиця 3.10

$X \cup Y$	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	$x_2 + y_1$	$x_2 + y_2$
P	$p_1 \cdot q_1$	$p_1 \cdot q_2$	$p_2 \cdot q_1$	$p_2 \cdot q_2$

Таблиця 3.11

$X \cap Y$	$x_1 \cdot y_1$	$x_1 \cdot y_2$	$x_2 \cdot y_1$	$x_2 \cdot y_2$
P	$p_1 \cdot q_1$	$p_1 \cdot q_2$	$p_2 \cdot q_1$	$p_2 \cdot q_2$

Приклад 9. Випадкові величини Хі У задані такими розподілами.

X	-1	2
P	0,4	0,6

У	0	5
Q	0,5	0,5

Записати закони розподілів об'єднанням та перетину Х і У.

$X \cup Y$	-1+0	-1+5	2+0	2+5
P	$0{,}4 \cdot 0{,}5$	$0{,}4 \cdot 0{,}5$	$0{,}6 \cdot 0{,}5$	$0{,}6 \cdot 0{,}5$

Аналогично для перетину $X \cap Y$:

$X \cap Y$	$-1 \cdot 0$	$-1 \cdot 5$	$2 \cdot 0$	$2 \cdot 5$
P	$0{,}4 \cdot 0{,}5$	$0{,}4 \cdot 0{,}5$	$0{,}6 \cdot 0{,}5$	$0{,}6 \cdot 0{,}5$

Крім операції об'єднанням та перетину, вводится для випадкових величин поняття функції одного випадкового аргументу.

Якщо кожному можливому значенню величини Х відповідає одне можливе значення випадкової величини У, то У називають функцією випадкового аргументу Х і записують у вигляді

$$Y = \varphi(X)$$

Приклад 10. Дискретна випадкова величина Х задана законом розподілу:

X	-1	1	5
P	0,3	0,4	0,3

Знайти розподіл функції У=Х^2.

Піднесемо можліви значення х до квадрату. Тоді, оскільки значення

Збігаються, рівні 1 і зустрічаються дварази, то запишемо їх один раз з ймовірніст. 0,3+0,4=0,7. Шуканий розподіл має вигляд:

X	1	25
P	0,7	0,3

Розглянемо інший випадок, коли аргумент X – неперервна випадкова величина. У цьому випадку доводиться, що якщо $y=\varphi(x)$-диференційована строго монотонно зростаюча або строго монотонно спадаюча функція, яка має обернену функцію $x=\psi(y)$, щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини У знаходиться за допомогою рівності.

$$g(y)= f[\psi(y)]\cdot\psi^{'}(y) \tag{15}$$

де $f(x)$ - щільність розподілу аргументу X.

Приклад 11. Випадкова величина X має нормаваний нормальний закон розподілу. Знайти розподіл функції $y=x^2$.

Використаємо формулу (15). Обернена функція

$$x=\psi(y)=y^{1/2},\ \psi^{'}(y)=1/2y^{-1/2}$$

Нормована нормальна випадкова величина X задається диференціальною функцією.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},$$

Тому

$$f[\psi(y)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left[y^{-1/2}\right]^2/2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}.$$

За формулою (15) шукана щільність розподілу для функції $У=X^2$ така:

$$g(y)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}.$$

Розділ 4. Числові характеристики випадкових величин та їх властивості.

4.1. Математичне сподівання. Випадкові величини характеризуються своїми числовими характеристиками. Ненехай дискретна випадкова величина задана законом розподілу (10 у вигляді таблиці 3.1.

Математичним сподіванням M(X) випадкової величини X називають число, яке обчислюється за формулою

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_k \cdot p_k \qquad (1)$$

Приклад 1. На основі статистичних досліджень встановлено, що ймовірність повернення банківського кредиту залежить від його величини (табл.4.1).

Таблиця 4.1

X (тис. грн.)	3	5	2
P	0,5	0,2	0,3

Обчислити середнє значення повернутих кредитів.

Оскільки таблиця 4.1 утворює дискретну випадкову величину, то середнє значення повернутих кредитів збігається з математичним сподіванням. Звідси

$$M(X) = 3 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 = 3{,}1 \text{ тис. грн.}$$

Для статистичного розподілу аналогічна характеристика положення центру розсіювання дається у вигляді середньої, визначається за частотами або відносними частотами значень величини. Так наприклад, для статистичного розподілу заданого в таблиці 4.2

Таблиця 4.2

x_i	0	1	2	Сума
n_i	55	12	3	n=70
w_i	0,786	0,171	0,043	1

така середня арифметична буде дорівнювати

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 0{,}55 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 3}{55 + 12 + 3} = 0{,}257$$

Загальна формула для обчислення середньої арифметичної статистичного розподілу випадкової величини X (табл. 4.3)

Таблиця 4.3

x_i	x_1	x_2	…	x_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

буде

$$\bar{x} = \sum x_i \cdot w(x_i) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i \qquad (3)$$

Приклад 2. Знайти математичне сподівання числа появи події А одному випробуванні, якщо ймовірність події А дорівнює р.

Випадкова величина Х- число появи події в одному випробуванні – може приймати тільки два значення: $x_1 = 1$ (подія А наступила) з ймовірністю р і $x_2 = 0$ (подія А не наступила) з ймовірністю $q = 1 - p$. У вигляді таблиці цей розподіл запишеться так (табл.4.4):

Таблиця 4.4.

X	0	1
P	q	p

Шукане математичне сподівання:

$M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$

Наслідок 1. Математичне сподівання числа появи в одному випробуванні рівне ймовірності цієї події.

Математичне сподівання неперевної величини визначається аналогічно, тільки замість простого сумування «зважених» по ймовірності значень величини тут доводіться застосувати інтегрування. Враховуючи ймовірнісний зміст щільності розподілу для неперервних випадкових величин математичне сповідання буде розраховуватися за формулою:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \qquad (4)$$

Приклад 3. Обчислити математичне сподівання рівномірного закону розподілу.

В силу визначення рівномірного закону розподілу

$$M(X) = \int_a^b \frac{xdx}{b-a} = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

Отже, для рівномірного закону розподілу математичне сподівання співпадає з серединою інтервалу.

Прриклад 4. обчислити математичне сподівання показникового закону розподілу.

$$M(X) = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = -\left. xe^{-\lambda x}\right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Отже для показникового закону математичне сподівання дорівнює величині оберненій до параметру λ.

Із означення математичного сподівання випливають його властивості.

1. математичне сподівання постійної величини С дорівнює масій цій постійній:

M (C)=C

2. Математичне сподівання перетину постійної величини з випадковою величиною дорівнює добутку постійної на математичне сподівання цієї випадкової величини:

$$M(C \cap X) = C \cdot M(X)$$

3. Для випадкових величин X і У справедливі співвідношення.

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$$

4. Математичне сподівання перетину двох незалежних випадкових величин дорівнює їх математичних сподівань.

$$M(X \cap Y) = M(X) \cdot M(Y)$$

Наслідок 2. Математичне сподівання М(Ч) числа появи події А в n незалежних випробуваннях дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи події в кожному випробуванні:

$$M(X) = n \cdot p$$

Приклад 5. За статистичними даними протягом року збанкрутувало п’яте підприємство з 1000. Яке середнє число збанкрутілих підприємств, якщо їх є 5000?

Позначимо через А подію, що навмання взяте підприємство збанкрутувало, тоді p(A)=0,005. Згідно з ймовірнісним змістом середнє значення випадкової величини приблизно рівне її математичному сподіванню За наслідком 2

$$M(X) = 5000 \cdot 0{,}05 = 25.$$

4.2. Моменти та інші числові характеристики випадкових величин. Поряд з випадковою величиною X розглянемо її цілі степені: X^2, X^3,...

Математичне сподівання випадкової величини X^k називають початковим моментом k-го порядку випадкової величини X і позначають символами $M(X^k)$ чи $\nu_k(X)$

Таким чином, згідно означення

$$\nu_k(X) = M(X_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i^k p_i$$

Момент нулоьового порядку буде: $\nu_0 = M(X_0) = M(1) = 1$, а момент першого порядку $-\nu_1 = M(X)$ В якості характеристик положень центру групування розподілупоряд з числом $M(X)$ чи $\bar{x}$ інколи використовують ще дві характеристики: моду і медіану.

Модою дискретної випадкової величини назівають найбільш ймовірне її значення (позначають символм).У пункті 2.2 модою було найбільш ймовірне число настання подій.

У статистичному розподілу під модою розуміють значення, що має найбільшу частоту.

Під медіаною розуміють значення   таблиці, що ділить її навпіл.

4.3. Дисперсія. Важливу інформацію про випадкову величину дає ступень чи масштаб розсіювання її можливих значень навколо її центру, яким зазвичай є математичне сподівання.

Наведема приклади таких випадкових величин, які мають однакове математичне сподівання, але різний масштаб розсіювання по відношенню до нього. Для цього, наприклад, розглянемо випадкові величини задані такими законами розподілу:

X	-0,01	0,01
P	0,5	0,5

У	-100	0	5
P	0,01	0,79	0,2

Обчислимо математичні сподівання цих випадкових величин:

$$M(X) = -0.01 \cdot 0{,}5 + 0{,}01 \cdot 0{,}5 = 0, \quad M(Y) = -100 \cdot 0{,}01 + 0 \cdot 0{,}79 + 5 \cdot 0{,}2 = 0$$

Маємо однакове математичне сподівання – 0 для обох випадкових величин, хоча ступені їх розсіювання різні. Для випадкової величини X можливі значення є близькими до 0, а для У- далекими і асиметричними відносно 0.

Ненехай X - випадкова величина, а $M(X)$) – її математичне сподівання. *Випадкову величину* $X - M(X)$ *називають відхиленням*.

Для того, щоб записати закон розподілу відхилення, пригадаємо, що його можливі значення приймають значення $x_i - M(X)$, а ймовірності залишаються тими ж самими. Отже, відхилення буде задаватися таким табличним законом розподілу (табл.4.7):

Таблиця 4.7

Наслідок 3. Математимчне сподівання відхилення дорівнює нулю:

Приклад 6. Для дискретної випадкової величини X, яка задана таблицею

X	-0,5	2
P	0,4	0,6

Записати закон відхилення і перевірити наслідок 3.

Обчислимо математичне сподівання X:

$$M(X) = -0{,}5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}6 = 1$$

Запишемо закон розподілу відхилення

X-M(X)	-1,5	1
P	0,4	0,6

Звідси

$$M[X - M(X)] = -1{,}5 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}6 = 0$$

Отже, математичне сподівання відхилення дорівнює нулю.

Зауваження 1. Поряд з поняттям відхилення використовують поняття «відцентрована величина». З тієї причини числові характеристики

$$M\left\{\left[X - M(X)\right]^k\right\}$$

Називають центральними моментами k-го порядку.

Дисперсією випадкової величини називають математичне сподівання квадрату відхилення:

$$D(X) = M\left\{\left[X - M(X)\right]^2\right\} \tag{7}$$

Закон розподілу квадрату відхилення (табл 4.8)

Таблиця 4.8

За формулою (7)

$$D(X) = \sum_{i=1}^{k}\left[x - M(X)\right]^2 p_i \tag{7*}$$

З формули (7*) випливає, що дисперсія є завжди невід'ємним числом. Як і в випадку з математичним сподіванням, дисперсія дискретної випадкової величини є невипадкова величина.

Дисперсії неперервної випадкової величини задається формулою:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[x - M(X)\right]^2 \cdot f(x)dx \tag{8}$$

Дисперсія має такі властивості:

1. *Дисперсия постийної величини* C *дорівнює нулю:*

$$D(C) = 0$$

2. *Постійний множник виноситься за знак дисперсії в квадраті*

$$D(C \cap X) = C^2 D(X)$$

3. *Дисперсія об'єднання (різниці) двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:*

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

Приклад 7. Знайти дисперсію випадкової величини X, яка задана таким законом розподілу

X	2	4	5
P	0,5	0,3	0,2

Спочатку обчислимо математичне сподывання

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}2 = 3{,}2$$

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}5 + 16 \cdot 0{,}3 + 25 \cdot 0{,}2 = 11{,}8$$

$$D(X) = 11{,}8 - 10{,}24 = 1{,}56$$

Для обчислення дисперсії в схемі повторних незалежних випробувань Бернуллі є справедливим.

Наслідок 4. дисперсія числа появи події A в n незалежних випробуваннях дорівнює добутку числа випробувань на ймовірності появи і непояви події A в одному випробуванні:

$$D(X) = npq$$

Приклад 8. Проводиться 10 незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює 0,8. Знайти дисперсію випадкової величини X – числа появи події в цих випробуваннях.

За умовою задачі $n = 10, \quad p = 0{,}8, \quad q = 0{,}2$

$$D(X) = 10 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$$

Приклад 9. Обчислити дисперсію рівномірного закону розподілу.

Використаємо розрахункову формулу (9).

$$M(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = (a^2 + ab + b^2)/3$$

$$D(X) = \left(a^2 + ab + b^2\right)/3 - (a^2 + 2ab + b^2)/4 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Приклад 10. Обчислити дисперсію показникового закону розподілу.

Скористаємося розрахунковою формулою(9). При обчисленні моменту два рази використаємо формулу інтегрування по частинах, тоді

$$M(X^2) = \int x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}. \ D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}$$

4.4. Стандартне середньоквадратичне відхилення. Для оцінки розсіювання значень випадкової величини X навколо її середнього значення поряд з дисперсією використовують і інші числові характерстики. Однією з них є середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Приклад 11. Заробітна плата за день за даними трьох підрозділів фірми задається таблицею 4.8

Таблиця 4.8

Заробітна плата (в грн.)	10	20	25
Кількість працівників	30	50	20

Обчислити середнє квадратичне відхилення заробітної плати фірми.

Позначимо через X- величину зарплати і запишемо закон розподілу X через відносні частоти

	10	20	25
	0,3	0,5	0,2

$$M(X)=10\cdot 0{,}3+20\cdot 0{,}5+25\cdot 0{,}2=18$$

$$M(X^2)=100\cdot 0{,}3+400\cdot 0{,}5+625\cdot 0{,}2=355$$

$$D(X)=355-18^2=31; \qquad \sigma(X)=\sqrt{31}=5{,}57 \text{ грн.}$$

Отже, середнє квадратичне відхилення заробітної плати фірми від середньої в 18 грн. Становить 5,57 грн.

В якості відносної характеристики міри розсіювання використовують коефіцієнт варіації, який визначається тза формулою

$$\nu(X)=\frac{\sigma(X)}{M(X)}\cdot 100\%$$

Коефіцієнт варіації показує величину розсіювання випадкової величини у відсотках порівняно з її середнім значенням.

Приклад 12. обчислити середнє квадратичне відхилення рівномірного закону розподілу.

У попередньому пункті для даного закону була обчислена дисперсія. Оскільки

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}, \text{ то } \sigma(X)=\frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}$$

Приклад 13. Обчислити середнє квадратичне відхилення показникового закону розподілу.

У попередньому пункті для даного закону була обчислена дисперсія. Оскільки

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}, \text{ то } \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$$

Показниковий закон розподілу виділяється серед інших ще й тим, що єдиний параметр λ є одночасно його математичним сподіванням і середньо квадратичним відхиленнням.

4.5. Нормальний закон розподілу та його характеристики.

Приклад 15. Обчислити числові характеристики нормального закону розподілу.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]dx=a;$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]dx=\sigma^2+a^2 .$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\sigma^2+a^2-a^2}=\sigma$$

Отже a – математичне сподівання X, а σ - середнє квадратичне відхилення.

Приклад 15. Статистичні дані доходу на душу населення показали, що річний дохід працівників банку має нормальний розподіл з середнім значенням 9800грн. І середньо-квадратичним відхиленням – 1600 грн. якщо вибрано певну особу навмання, то яка ймовірність того, що їїрічний дохід є:

а)більшим ніж 5000грн.;

б)більшим ніж 12200грн.;

в) між 8520 та 12200грн.

Використаємо формулу (3.13) і обчислимо значення

$$\alpha=\frac{5000-9800}{1600}=-\frac{4800}{1600}=-3$$

Тоді для обчислення ймовірності $P(X>5000)$, яка за формулою (3.13) рівносильна ймовірності $P(-3<t)$, де $t=\dfrac{x-a}{\sigma}$. Якщо β є достатньо велике число (оскільки значення необмежене зверху). У такому випадку покладемо $\Phi(t)=0{,}5$.

$$P(-3<t)=\Phi(\infty)-\Phi(-3)=\Phi(\infty)+\Phi(3)=0{,}5+0{,}49865=0{,}99865$$

б) У даному випадку потрібно обчислити ймовірність $P(X>12200)$

$$\alpha=\frac{12200-9800}{1600}=1{,}5$$

$$P(t>1{,}5)=0{,}5-\Phi(1{,}5)=0{,}5-0{,}4332=0{,}0668$$

в) знову використаємо формулу (3.13).

$$\beta=\frac{12200-9800}{1600}=1{,}5; \quad \alpha=\frac{8520-9800}{1600}=-0{,}8$$

$$P(8520<X<12200)=\Phi(1{,}5)-\Phi(-0{,}8)=0{,}4332+0{,}2881=0{,}7213$$

У трьохсігмову смугу $(|X-a|)<3\sigma$ трапляє вже 99,73% всіх значень X, оскільки , а $P(|X|<3\sigma)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973$.

Практично всі значення нормально розподіленої випадкової величини знаходяться у смузі

4.6. Використання випадкових величин при обчисленні характеристик ризику.

Числові характеристики часто використовуються для прийняття рішень в умвах ризику, коли всі можливі варіанти, що можуть виникнути в даній проблемі (у моделях ризику їх називають природними станами), є відомі і той, хто приймає рішення, має достатньо інформації, щоб вказати їх ймовірність.

Ці можливості можуть коливатись від суб'єктивних знань, які грунтуються на інтуіції і досвіді тих, хто приймає рішення до об'єктивних знань, які грунтуються на зібраних та роаналізованих багаточисельних даних, які відносяться до станів можливих варіантів.

Хоча існують різні критерії для оцінкі цих типів рішень, найбільш популярним є використання очікуваної вартості.

Приклад 16. Роздрібний торговець продає певний товар. Він купує його за ціною 5 грн за одиницю, а продає за 8 грн. Товар псується швидко. Якщо його не продати відразу, то він продажу не підлягає. Якщо це трапляється, то торговець повинен покрити витрати 5 грн. За одиницю продукції за рахунок власних коштів.

Статистичними дослідженнями за 200 днів встановлено, що денний попит на товар має 4 різні варіанти (табл. 4. 9).

Таблиця 4.9

Денний попит (x)	Кількість днів спостереження	p(x)
21	20	0,1
22	60	0,3
23	100	0,5
24	20	0,1
Усього	200	1

Торговець намагається виришити, який щоденний запас товару потрібно мати, щоб отримати максимальний прибуток.

Торговець вирішив, що вгадувати скільки товару йому потрібно щоденно, використати одну з простих моделей ризику. Для цього складемо таблицю доходів у залежності від попиту (x).

Таблиця 4. 10

Запаси	Кількість товару			
	21 (йм. =0,1)	22 (йм. =0,3)	23 (йм. =0,5)	24 (йм. =0,1)
21	63	63	63	63
22	58	66	66	66
23	53	61	69	69
24	48	56	64	72

Табл. 4.10 показує ймовірність доходів від попиту на товар. Її називають умовноютаблицею доходів. Ця таблиця показує щоденний дохід, який він матиме, якщо вибрати певний запас товару, враховуючи рівень попиту. Рішення щодо запасів – це різні стратегії торгівця.

Умовні дохідні вартості визначаються шляхом підраховування загального доходу від проданого товару за мінусом втрат через надлишок запасів. Наприклад: рішення зробити запас 21 одиниць завжди дає результат 63 грн. Від продажу 21 одиниці з доходом за одиницю

8грн. – 5грн. = 3 грн.

Розглянемо рушення з 22одиницями. Якщо єпопит на 21 одиниці, то буде продана 21 одиниця , при цьому дохід буде становити 63 грн. Проте оскільки торговець у роздріб зробив запас на 1 одиницю більше, то вартість цієї одиниці, що залишилась, потрібно покрити, зменшуючи умовний прибуток 63-5=58грн. Якщо у вас є в запасі 22 одиниці і попит становитиме 22одиниці, то умовний дохід становитиме 66 грн. Якщо потрібно більше як 22 одиниці, то ті 22 одиниці будуть продані з тим самим результатом 66 грн.

При цій стратегії торговець у середньому буде заробляти

$$53 \cdot 0{,}1 + 66 \cdot 0{,}3 + 66 \cdot 0{,}5 + 66 \cdot 0{,}1 = 65{,}2 \text{ грн.}$$

Умовні прибутки при рішенні зробити запас 23 або 24 одиниці вираховується аналогічно.

Для запасів у 23 одиниці отримаємо прибуток:

$$53 \cdot 0{,}1 + 61 \cdot 0{,}3 + 69 \cdot 0{,}5 + 69 \cdot 0{,}1 = 65 \text{ грн.}$$

Для запасів у 24 одиниці –

$$48 \cdot 0{,}1 + 56 \cdot 0{,}3 + 64 \cdot 0{,}5 + 72 \cdot 0{,}1 = 60{,}8 \text{ грн.}$$

На основі очікуваного щоденного доходу найкраще рішення буде таким, коли запаси щоденно становлять 22 одиниці. При цьому очікуваний середній дохід буде 65,2 грн.

Приклад 17. Фірма виробляє товар і хоче розширити виробництво. Є два варіанти: збільшувати виробничі потужності на діючому підприємстві чи будувати нове. Характеристики долі ринку збуту, річного прибутку від характеру розширення задається так:

Таблиця 4.11

Доля ринку фірми, в %	Оцінка ймовірності	Річний прибуток (млн. грн.)	
		Збільшення потужностей	Будівництво
30	0,125	90	50
35	0,5	100	100
40	0,375	130	150

Розглянемо випадкові величини - річний прибуток, якщо вибрано варіант збільшення потужностей;   - річний прибуток фірми за рахунок будівництва нового підприємства. Запишемо табличні розподіли випадкових величин (табл. 4.12_1 і 4.12_2)

Таблиця 4.12_1

X_1	90	100	130
P	0,125	0,5	0,375

Очікуваний середний річний прибуток фірми за рахунок приросту потужностей на діючих підприємствах становитиме:

$$M(X_1) = 90 \cdot 0{,}125 + 100 \cdot 0{,}5 + 130 \cdot 0{,}375 = 110 \text{ млн.грн.}$$

Анологічно для другого варіанту:

Таблиця 4.12_2

X_2	50	100	15
P	0,125	0,5	0,375

Звідси очікуваний середній річний прибуток фірми за рахунок будівництва нового підприємства становитиме:

$$M(X_2) = 50 \cdot 0{,}125 + 100 \cdot 0{,}5 + 150 \cdot 0{,}375 = 112{,}5 \text{ млн.грн.}$$

Отже, слід відати первагу другому варіанту,тобто побудувати нове підпрємство.

У даному прикладі ми за критерій ефективномті вибраної стратегії взяли середній очікуваний прибуток (математичне сподівання випадкової величини). Проте в задачах з невизначеністю, які належить до класу задач стохастичного програмування, доводиться рахуватисяя і з моментами не тільки першого, але й вищих порядків.

Якщо врахувати ризик, то вибираємо варіант, у якого оцінка має найменшу дисперсію. Для обчислення значень $D(X_i)$ використаємо формулу (9). Запишем розподіл X_1^2

X_1^2	810	1000	1690
P	1/8	1/2	3/8

$$M(X_1^2) = 8100 \cdot 0{,}125 + 10000 \cdot 0{,}5 + 16900 \cdot 0{,}375 = 12350;$$

$$D(X_1) = M(X_1^2) - M(X_1)^2 = 12350 - 110^2 = 250.$$

Аналогычно обчислимо дисперсыю випадковоъ величини X_2

X_1	2500	10000	22500
P	1/8	S	3/8

Отже, ефективніша оцінка для першого варіанту.

$$M(X_2^2) = 2500 \cdot 0{,}125 + 10000 \cdot 0{,}5 + 22500 \cdot 0{,}375 = 13750;$$

$$D(X_2) = M(X_2^2) - M(X_2)^2 = 13750 - 112{,}5^2 = 1093{,}75$$

У деяких моделях ризику критерій стратегії визначається формулою

$$\max_i \left[M(X_i) - k\sigma(X_i) \right],$$

де число k трактується як степінь ризику. Для нашого прикладу за цим критерієм при $k=1$ кращим буде перший варіант.

$$ma[\{110-15{,}8; 112{,}5-33{,}72\} = 94{,}2$$

Приклад 3. Вибірковий контроль. Підприємство випускає продукцію партіями. Через збої у виробничому процесі можливий випуск партій з певним відсотком браку. У придатний партії брак продукції становить 4%, у непридатний – 15%. Статистичні дані за попередні періоди дають відносну частоту появи придатної партії в 0,8, а непридатної – в 0,2.

Менеджер перед відправкою партії вирішує організувати вибірковий контроль і випадковим способом відбирає два вироби для контролю. Прийняте рішення буде грунтуватися на результатах перевірки та додаткових умовах договорів зі споживачами. Які можливі ймовірності резултату контролю?

Введемо позначення:

θ_1 - подія що вибрвна партія продукції, ;

θ_2 - подія що вибрвна непридатна партія продукйії, ;

ξ_1 - обидва вибори, відіврані випадковим способом, є придатні;

ξ_2 - тільки обин вибір, відібраний випадковим способом, є прпидатний;

ξ_3 - обидва вибори, віддібраний випадковим способом, є непридатні.

Ймовірності подій ξ_i $(i=1,2,3)$ обчислюемо за формулою повної ймовірності

$$.\,P(\xi_i) = P(\theta_1)P_{\theta_1}(\xi_i) + P(\theta_2)P_{\theta_2}(\xi_i) \quad (i=1,2,3)$$

Умовні ймовірності $P_{\theta_j}(\xi_i)$ обчислимо за формулою Бернуллі.

$$P_{\theta_1}(\xi_1) = C_2^2 (0{,}96)^2 (0{,}04)^0 = 0{,}9216;$$

$$P_{\theta_1}(\xi_2) = C_2^1 (0{,}96)^1 (0{,}04)^1 = 0{,}0768;$$

$$P_{\theta_1}(\xi_3) = C_2^0 (0{,}96)^0 (0{,}04)^2 = 0{,}0016;$$

$$P_{\theta_2}(\xi_1) = C_2^2 (0{,}85)^2 (0{,}15)^0 = 0{,}7225;$$

$$P_{\theta_2}(\xi_2) = C_2^1 (0{,}85)^1 (0{,}15)^1 = 0{,}255;$$

$$P_{\theta_2}(\xi_3) = C_2^0 (0{,}85)^0 (0{,}15)^2 = 0{,}0225.$$

Звідси за формулою повної ймовірності

$P(\xi_1) = 0{,}9216 \cdot 0{,}8 + 0{,}7225 \cdot 0{,}2 = 0{,}88178;$

$P(\xi_2) = 0{,}0768 \cdot 0{,}8 + 0{,}255 \cdot 0{,}2 = 0{,}11244;$

$P(\xi_3) = 0{,}0016 \cdot 0{,}8 = 0{,}0225 \cdot 0{,}22 = 0{,}00578$

За формулами Бейєса

$P_{\xi_i}(\theta_1) = 0{,}73728 / 0{,}88178 = 0{,}83613;$ $P_{\xi_i}(\theta_2) = 0{,}1445 / 0{,}88178 = 0{,}16387$;

$P_{\xi_2}(\theta_1) = 0{,}06144 / 0{,}11244 = 0{,}54642;$ $P_{\xi_2}(\theta_2) = 0{,}051 / 0{,}11244 = 0{,}45358;$

$P_{\xi_3}(\theta_1) = 0{,}00128 / 0{,}00578 = 0{,}22145;$ $P_{\xi_3}(\theta_2) = 0{,}0045 / 0{,}00578 = 0{,}77855.$

Правильність обчисленень перевіряється за допомогою співвідношення $P_{\xi_i}(\theta_1) + P_{\xi_i}(\theta_2) = 1.$

Запишемо результати обчисленнь у вигляді таблиці.

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
θ_1	0,83613	0,54642	0,22145
θ_2	0,16387	0,45358	0,77855

Ці ймовірності використаємодля прийняття рішення, виходячи з таких додаткових умов.

Підприемство вілправляє партіі товарів двом споживачам A та B. Контрактом обумовленно, що відсоток бракованних виробів, які відправляються споживачам A і B, не повинен перевишуватити 5% та 8%, відповідно. За один відсоток перевищених меж передбачається штраф 1000 грн. З іншого боку виробництво партії виробів більш високої якостізбільшуе затрати підприємства на 800 грн. за кожен відсоток.

Є два варіанти прийняття рішень (альтернативи): A_1 – відправити партію товарів споживачеві A і A_2 – відправити партію товарів тому споживачеві B. Менеджер відправить партію товарів тому споживачеві, щоб ймовірність втрати підприємста були меншими.

Розглянемо альтернаитиву A_1.Оскільки споживач A приймає партію, якщо брак не перевищує 5%, то якщо відправленна придатна партія втрати не несе підприємство за рахунок того, що затраченні додаткові ресурши на якість продукції

(15-4) 800 = 800 грн.

Інакше, коли відправленна не придатна партія виробів, підприємство сплачує штраф у розмірі

(15-5) 1000 = 10000 грн.

Аналогічно з альтернативою A_2. Власні витирати (відправленна придатна партія) становлять (8-4) 800 = 3200 грн., штраф за вілправленну непридатну партію – (15-8) 1000 = 7000 грн.

Обчисленні витрати записуемо у вигляді матриці

$$\begin{pmatrix} 800 & 10000 \\ 3200 & 7000 \end{pmatrix}$$

Менеджер прийме рішення, кому відправити партію продукйії, виходячи з мінімуму середніх витрат (математичного сподівання).

Випадок 1. Для альтернативи A_1.

$M_{\xi_1}(A_1) = 800 \cdot 0{,}83613 + 10000 \cdot 0{,}16387 = 2307{,}6$ грн.,

для альтернативи A_2

$M_{\xi_1}(A_2) = 3200 \cdot 0{,}83613 + 7000 \cdot 0{,}16387 = 3822{,}71$ грн.

Оскільки $M_{\xi_1}(A_2) > M_{\xi_1}(A_1)$, то в данному випадку, коли при перевірці двох виробів виявилося, що обидва є придатними, менеджер прийме рішення вибрати альтернативу A_1, оскільки витрати при цьому будуть меншими.

Випадок 2. Урезультаті випробування відбулася подія ξ_2, тоді

$M_{\xi_2}(A_1) = 800 \cdot 0{,}54642 + 10000 \cdot 0{,}45358 = 4972{,}97$ грн.,

$M_{\xi_2}(A_2) = 3200 \cdot 0{,}54642 + 7000 \cdot 0{,}45358 = 4923{,}6$ грн.

У цьому випадку прицмається рішення про відправку партії виробів споживачеві В, оскільки .

Випадок 3. За аналогію з попередніми випадками:

$M_{\xi_3}(A_1) = 800 \cdot 0{,}22145 + 10000 \cdot 0{,}77855 = 7962{,}66$ грн.,

$M_{\xi_3}(A_2) = 3200 \cdot 0{,}22145 + 7000 \cdot 0{,}77855 = 6158{,}49$ грн.

Приймається альтернативи A .

Процес прийняття рішень, описаний вище, називають бейєсівським підходом.

В основі данного підходу лежить формула Бейєса (1. 20.), яка є основою для прийняття рішень залежно від настання реальних подій і служить для корерції рішень.

Крім згаданної вище задачі, бейєссівский підхід застосовується в задачах розподілу капітальних вкладень управління запасами тощо.

4.7. **Двовимірні випадкові величини.** Ми розглядали одновимірні випадкові величини, значення яких визначалося одним числом. Крім них, трапляються випадкові величини, значення яких визначають двома, трьома, ..., n числами. Їх відповідно називають двовимірними, тривимірними, ..., n – вимірними.

Розглянемо двовимірну дискретну випадкову величину. Під законом розподілу такої величини розуміем перелік можливих значень цієї величини, тобто пар чисел $(x_i; y_j)$ і їх ймовірностей $p(x_i; y_j)$.

Знаючи закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини, можна знайти закони розподілу окремихїїскладових. Події $\{X = x_1, Y = y_1\}$, $\{X = x_1, Y = y_2\}$, ..., $\{X = x_1, Y = y_m\}$несумісні, тому ймовірність події$\{X = x_1\}$ за теоремою додавання несумісних подій така:

$$P(x_1) = p(x_1, y_1) + \ldots + p(x_1, y_m).$$

Ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення x_j, дорівнює сумі ймовірностей «стовчика x_j». Ці ймовірності записані в останньому стовпчику цієї ж таблиці записані ймовірності можливих значення Y.

Крім того,

$$\sum_{i,j} p(x_i, y_j) = 1$$

Умовна ймовірність події $\{Y = y_j\}$, якщо спостерігалася подія $\{X = x_i\}$, розраховується за формулою

$$P_{\{X=x_i\}}\{Y = y_j\} = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)} \qquad (15)$$

4.8. **Числові характеристики двовимірних вличин.** Для характеристики умовних законів розподілу можемо використати числові характеристики, що вже використовувалися раніше для одномірних випадкових величин.

Найбільш важливою з них є *умовне математичне сподівання*, яке позначают символом $M(Y/x)$, величини Y при фіксованому значенні $X = x$.

Умовне математичне сподівання буде розраховуватися за формулою

$$M(Y/x) = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p(x_j, x) \qquad (16)$$

4.9.**Коефіцієнти варіації та кореляції**. Для характеристики зв’язку між випадковими величинами X та Y служить математичне сподівання перетинів відхилень X та Y від їх центрів, яке називають коваріацією і обчислюють за формулою

$$\operatorname{cov}(X,Y) = M(X \cap Y) - M(X) \cdot M(Y)$$

Якщо врахувати ймовірнісний зміст математичного сподівання, то значення, обчислене за формулою (16), можна тлумачити як середнє значення можливих значень Y при фіксованому x. Тоді формулу (16) можна записати так:

$$\bar{y}(x) = M(Y/x) = \sum_j y_j\, p(x, y_j) / \sum_j p(x, y_j) \qquad (17)$$

Функцію $\bar{y}(x)$ називають регресією по X.

Приклад 18. Розглянемо дві різні умовні акції X і Y. Для кожної з них за допомогою ствтистичних досліджень були розраховані відносні частоти очікуваних прибутків залежно від п’ти станів економічного середовища: значне піднесення (ЗП), незначне піднесення (НЗП), стагнація (С), незначний спад (НЗП), значний зпад (ЗС). Ці дані занесені відповідно в останній стовпчик таблиці 4.14. Залежно від економічного середовища прогнозовані норми очікуваних прибутків у відсотках задані відповідно у першому рядку та першому стовпчику таблицы 4.14. У клытинках на перетины X і Y проставлены ймовырносты появи норм выдсоткыв значень (x, y).

Таблиця 4.14.

Необхідно кількісно проаналізувати ризик для кожного з двох видів акцій. Обчислимо очікуванунорму прибутку по кодній з акцій. Для цього запишемо одновимірні розподіли

X	10	5	2	1	-5
P(X)	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

і

Y	20	10	2	-2	-10
P(Y)	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

За формулою (3.2):

$$M(X) = 10 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 - 5 \cdot 0{,}1 = 2{,}7\%;$$

$$M(Y) = 20 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 - 2 \cdot 0{,}3 - 10 \cdot 0{,}1 = 3{,}8\%.$$

Отже, очікувана середня норма прибутку від першої акції буде 2,7%, другої -3,8%, тому друга є більш прибутковою. Оцінимо степінь ризику обох акцій за допомогою середньоквадратичного відхилення. Обчислимо дисперсію за допомогою розрахункової формули. Для цього обчислимо початкові моменти X і Y другого порядку.

$$M(X^2) = 100 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 255 \cdot 0{,}1 = 21{,}1$$

$$D(X) = 21{,}1 - 2{,}7^2 = 13{,}81. \text{ Звідси } \sigma(X) = \sqrt{13{,}81} = 3{,}716\%$$

$$M(Y^2) = 400 \cdot 0{,}1 + 100 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 100 \cdot 0{,}1 = 82;$$

$$D(Y) = 82 - 3{,}82^2 = 67{,}56. \text{ Звідси } \sigma(Y) = \sqrt{67{,}56} = 8{,}219\%$$

З розрахунків бачимо, что ступень ризику, пов'язаний з акцією Y, незважаючи на те, что вона має більший очікуваний прибуток в порівняння з акцією X, є значно більшим.

Проаналізуємо наявність зв'язку між акціями X та Y за допомогою коефіцієнта коваріації, розрахованого за формулою $\operatorname{cov}(X,Y) = M(X \cap Y) - M(X) \cdot M(Y)$.

$$M(X \cap Y) = 114{,}08$$

Коефіцієнт кореляції

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{3{,}82}{3{,}716 \cdot 8{,}219} = 0{,}125.$$

Мале значення коефіцієнта кореляції вказує на те, що зв'язку між очікуваними прибутками акцій X та Y майже немає.

4.10. **Функції розподілу двовимірних випадкових величин**. Розглянемо двовимірну випадкову величину (X,Y) і пару дійсних чисел (x,y). Ймовірність події, що X приймає значення, менше ніж x і при цьому Y прийме значення, менше ніж y, позначають через $F(x,y)$.

Функцію розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y) *називають ймовірність*

$$F(x,y)=P(X<x,Y<y) \qquad (18)$$

Щільністю сумісного розподілу ймовірностей $f(x,y)$ *двовимірної випадкової величини* (X,Y) *називають другу змішану похідну від функції розподілу* $F(x,y)$

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

Геометрично функцію $f(x,y)$ тлумачать як поверхню розподілу.

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy \qquad (19)$$

$$P\{(X<Y)\subset D\}\cong\iint_{D} f(x,y)dxdy \qquad (20)$$

Приклад 19. Випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x,y)=xy$, якщо $(x,y)\in D=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ і $f(x,y)=0$ у протилежному випадку. Обчислити ймовірність попадания випадкової величини X у квадрат $D_1=\{0\le x\le 1/2, 0\le y\le 1/2\}$.

За формулою (20)

$$P\{(X,Y)\subset D\}=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy=\int_0^{1/2}\left[y\int_0^{1/2} xdx\right]dy=1/64.$$

Для того, щоб випадковы величини X і Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб функція розподілу системи (X,Y) була дорівнює добутку функцій розподілу X і Y:

$$F(x,y)=F(x)\cdot F(y) \text{ або } f(x,y)=f(x)\cdot f(y) \qquad (21)$$

Дві впадкові величини називаються незалежними, якщо функція розподілу системи цих величин дорівнює добутку функцій розподілу складових. Якщо випадкові величини X і Y *незалежні, то*

$$\text{cov}(X,Y)=0$$

Для системи двох величин вводять числову характеристику – коефіцієнт кореляції за формулою:

$$r_{xy}=\text{cov}(X,Y)/\sigma_x\sigma_y \qquad (22)$$

$$|r_{xy}| \le 1 \qquad (23)$$

Нерівність (23) має важливий ймовірний зміст, а саме, чим коефіцієнт кореляції ближчий по модулю до 1, тим залежність між випадковими величинами сильніша. Близькість до нуля коефіцієнта кореляції вказує на слабкий зв'язок між ними.

Дві випадкові величини X і Y *називаються корельованими, якщо їх коваріація відмінна від нуля і некорельованими, якщо їх коваріація дорівнює нулю.*

Список рекомендованої літератури

1. Шефтель З.Г., Теорія ймовірностей, - К.: Вища школа, 1977.
2. Гнеденко Б.В., Курс терии вероятностей, - М.: Наука, 1965.
3. Аров Д.З., Методические разработки по теории вероятностей для самостоятельной работі студентов, ч. І.
4. Адриенко В.А., Квитко А.Н., Стрігина Н.З., Методические разработки по теории вероятностей для самостоятельной работі студентов, ч. ІІ.
5. Ландкоф Н С., Введение в теорию вероятностей. – Харьков, 1968.
6. Боровков А.А. математическая статистика. – М.: Наука, 1984.
7. Феллер В., Введение в теорію вероятностей и ее приложения . – Т. 1,2. – М.: Мир, 1984.
8. Жалдак М.Н., Квитко А.Н., Теорія вероятностей с єлементами інформатики. – К.: Вища школа, - 1989.
9. А.И. Иванова Математическая статистика , М.: Наука, 1979.
10. Андрухаев Х. М. Сборник задач по теории вероятностей, М. : «Просвещение 1985. -160 с.