Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

Яковлєва О.М., Гаєвець Я.С., Каплун В.М. Розвиток числової лінії в курсі математики закладів загальної середньої освіти. Фізико-математична освіта. 2020. Випуск 1(23). С. 164-170.

Yakovlieva O., Haievets Ya., Kaplun V. Development of a numerical line in the course of mathematics of establishments of general secondary education. Physical and Mathematical Education. 2020. Issue 1(23). P. 164-170.

DOI 10.31110/2413-1571-2020-023-1-027
УДК 372.851

О.М. Яковлєва
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
olganik6505@gmail.com
ORCID: 0000-0003-0750-9769
Я.С. Гаєвець
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», Україна
gaevets@i.ua
ORCID: 0000-0003-4580-4080
В.М. Каплун
Одеська загальноосвітня школа № 68 І-ІІІ ступенів, Україна
viktoriyakaplun9@gmail.com

РОЗВИТОК ЧИСЛОВОЇ ЛІНІЇ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. *Числова лінія є однією з важливих змістових ліній у курсі математики ЗСО, її розвиток починається у 1 класі початкової школи і продовжується в курсі математики базової та старшої школи. Знання учнів про числа та уміння ними оперувати складає підґрунтя до формування математичної компетентності здобувачів загальної середньої освіти.*

Матеріали і методи. *У статті зроблено стислий огляд розвитку числової лінії у початковому курсі математики та у курсі математики базової середньої школи на основі теоретичного аналізу наукових джерел, чинних навчальних програм з математики початкової та базової середньої шкіл, підручників з математики (алгебри) для 1-8 класів. Отриману інформацію узагальнено для визначення рівня обґрунтування розширення поняття числа у підручниках. Досліджено особливості опрацювання числової лінії в початковій та базовій середній школі у зв'язку з оновленим нормативним забезпеченням математичної освіти.*

Результати. *Зазначено, що розвиток змістової лінії «Числа» в курсі математики відбувається в такій послідовності: натуральні числа, невід'ємні дробові числа, цілі числа, раціональні числа, дійсні числа, що відрізняється від шляху класичного розширення числових множин: натуральні числа, цілі числа, раціональні числа, дійсні числа. З'ясовано, що в підручниках методики введення натуральних, цілих та раціональних чисел співпадають, методики введення ірраціональних та дійсних чисел відрізняються.*

Висновки. *Введення нових числових множин в курсі математики базової середньої школи здійснюється на основі поняття розширення алгебраїчних систем. На думку авторів, чинна навчальна програма з математики базової середньої школи містить певні недоліки, необхідно ввести деякі корективи у подання змістової лінії «Числа» у програмі з математики, зокрема, дещо розвантажити числову лінію в 6-му класі, а у 8-му класі більше приділяти уваги властивостям ірраціональних та дійсних чисел.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *числові множини, алгебраїчні операції, алгебраїчні структури, розширення, курс шкільної математики.*

ВСТУП

Числова лінія є однією з основних змістових ліній у курсі математики ЗСО, вона є об'ємною за змістом пропонованого навчального матеріалу, що вимагає тривалого часу на її вивчення. Вивчення чисел та їх властивостей (зокрема, натуральних) починається з 1-го класу початкової школи і логічно продовжується в курсі математики базової середньої школи, поступово розширюючи і доповнюючи знання учнів про число від натуральних до дійсних, формуючи культуру усних, письмових, інструментальних обчислень (Програма, 2017). В старшій школі розширення множини дійсних чисел не вивчається, але учні вчаться оперувати дійсними числами, які є значеннями тригонометричних функцій числа, логарифмами числа тощо.

Метою даної статті є стислий, але системний огляд розвитку числової лінії у початковому курсі математики та у курсі математики базової середньої школи, а також аналіз низки підручників 5-8 класу для визначення рівня обґрунтування розширення поняття числа від натурального до дійсного. Актуальність розглянутого питання полягає у тому, що знання учнів про числа та уміння ними оперувати є підґрунтям до формування математичної компетентності здобувачів загальної середньої освіти. Крім того, числа та вміння оперувати з ними є також інструментом для вимірювання та обчислення основних геометричних величин (довжини відрізка, міри кута, площі фігури, об'єму тіла), що, в свою чергу, є складовою метричної геометрії та однією з важливих змістових ліній шкільного курсу геометрії.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

У початковому курсі математики системоутворювальною змістовою лінією є лінія «Числа, дії з числами», яка охоплює вивчення питань нумерації цілих невід'ємних чисел у межах мільйона; формування навичок виконання арифметичних дій додавання і віднімання, множення і ділення; ознайомлення на практичній основі зі звичайними дробами; вимірювання величин; оперування з величинами.

В основі формування поняття натурального числа в початковій школі лежить лічба предметів. Лічба – це встановлення взаємно-однозначної відповідності між елементами заданої скінченної множини і скінченної підмножини $\{1, 2, 3, .., n\}$ натуральних чисел. Натуральне число виступає як результат лічби, тобто назване останнім при лічбі число характеризує кількість предметів поданої сукупності. Поняття «натуральне число» спирається на поняття «множина», «еквівалентність», «взаємно-однозначна відповідність», «потужність множини». Такий підхід до обґрунтування поняття натурального числа притаманний «наївній» теорії множин Георга Кантора. Вже в 1-му класі учні знайомляться з натуральним числом як незмінною загальною властивістю, що характеризує клас скінченних еквівалентних множин. Утворення кожного числа, порядкові і кількісні відношення пояснюються учням, розглядаючи одночасно кілька послідовних чисел. Тому, як зазначають С.О. Скворцова та О.В. Оноприєнко (Скворцова & Оноприєнко, 2019), числа розглядаються не обмежено, не окремо, а відрізками натурального ряду чисел, наприклад: 1, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4, 5; 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Розглядаючи перший етап «утворення числа як кількісної характеристики класу скінченних еквівалентних множин», слід відмітити, що нове число утворюється на підставі прилічування одиниці до попереднього числа. При цьому застосовується різноманітна наочність: набори геометричних фігур, предметів тощо. Дійсно, в основі методики вивчення нумерації натуральних чисел в початковому курсі математики лежить принцип прилічування одиниці, а саме: 1) лічбу починають з 1; 2) щоб одержати наступне при лічбі число, потрібно до даного числа додати 1; 3) щоб отримати попереднє число при лічбі, необхідно від даного числа відняти 1.

Ще одним важливим етапом під час вивчення чисел першого десятку є «означення місця числа в натуральному ряді». Читаючи числа за числовими сходами або числовим променем від меншого до більшого, в прямому та в зворотному порядку, учня з'ясовують, яке число найбільше (найменше), називають попереднє та наступне числа до певного числа в даному проміжку натурального ряду. Розглядаючи низку таких завдань, учні поступово знайомляться з властивостями натурального ряду чисел: у натуральному ряді всі числа розташовані в певному порядку – кожне наступне число більше за дане на 1, а кожне попереднє, навпаки, менше від даного на 1; найменше натуральне число 1 (Скворцова&Оноприєнко, 2019).

Під час вивчення нумерації чисел першого десятку Г. В. Бельтюкова (Бельтюкова, 1993) пропонує приділяти увагу формуванню узагальненого поняття про лічильну одиницю. При вивчення кожного числа, на думку автора, слід включати вправи на лічбу однакових груп предметів (вивчаючи число 2, рахують пари предметів, число 3 – трійки предметів, число 4 – четвірки предметів, число 5 – п'ятірки предметів і т. д.).

Необхідно наголосити, що, виконуючи такі вправи, учні вже помічають, що корисно застосовувати групування предметів при лічбі великої кількості предметів. Тому результат лічби залежить від обраної лічильної одиниці.

Так, вивчення нумерації натуральних чисел в початковій школі здійснюється по концентрах: 1 клас («Десяток», «Сотня»), 2 клас («Сотня»), 3 клас («Тисяча»), 4 клас («Мільйон»). При цьому слід сформувати в учнів знання про способи утворення назв чисел кожного концентру (усна нумерація) та способи запису натуральних чисел (письмова нумерація).

Традиційно нумерацію в межах 100 було поділено на два етапи: числа 11–20 та числа 21–100. Такий порядок вивчення обумовлений тим, що лише для чисел 11–19 порядок назви розрядних чисел, що їх складають, і порядок запису не збігаються: 12 (дванадцять) – спочатку називаємо одиниці, а потім десятки, а пишемо першим 1 десяток і лише потім 2 одиниці. 21 (двадцять один) – порядок читання і запису збігаються.

Між тим, нумерація двоцифрових чисел 11–20 та 21–100 принципово схожа. Усна і письмова нумерація цих чисел спирається на десяткове групування одиниць при лічбі і на позиційний принцип запису числа, десяткову систему числення. Тому в навчальній програмі з математики для 1-4 класів, починаючи з 2011 року, не виділяються ці два етапи, а вже в 1 класі пропонується вивчити нумерацію чисел у межах першої сотні. Однак, автори підручників з математики Нової української школи, враховуючи відмінність у порядку читання і запису чисел 11–19, спочатку пропонують розглядати числа 11–20, і лише після цього вводять числа 21–100 (Скворцова&Оноприєнко, 2019).

Відповідно до програми початкового курсу математики перші відомості про дроби з'являються у 3 класі (Програма, 2018). Однак, учням поки що не пропонують вживати термін «дріб», а лише – «частина». У 3 класі формують конкретні уявлення про процес утворення частин від цілого предмета або сукупності предметів. Учнів знайомлять із частинами, їх записом, правилами знаходження величини частини від даного числа та числа за величиною частини. Звичайно ці питання слід розглядати за допомогою наочності, практичних вправ, що пов'язані із кресленням, вимірюванням та ін.

В 4 класі на уроках математики продовжують формування уявлення про дроби. В цілому, в початковій школі процес формування поняття про дроби рекомендовано проводити за трьома етапами:

1. Спочатку учням пропонують засвоїти фактичне ділення (роздроблення) конкретних предметів на рівні частини, вчаться утворювати різні частини цих предметів, а із частин – дроби.

2. На наступному етапі учням пропонують засвоїти цей матеріал уже на кресленнях, малюнках та ін.

3. Далі учні вже мають оперувати уявленнями про дроби без будь-яких інших зовнішніх опор. На цьому етапі учням пропонують розв'язувати сюжетні задачі, що містять дроби.

Таким чином, відповідно до очікуваних результатів навчання здобувачів освіти Типової навчальної програми з математики, випускники початкової школи мають уміти відтворювати послідовність чисел у межах мільйона; читати і записувати дроби, розуміти спосіб одержання дробу (Програма, 2018).

В базовій середній школі змістова лінія «Числа» набуває продовження, знання про число розширюються і поглиблюються. Розвиток числової лінії починається у 5-му класі з вивчення системи натуральних чисел (в цій статті ми будемо розглядати тільки навчальну програму з математики для загальноосвітнього рівня навчання). В підручниках математики для 5-го класу дається описове означення натурального числа: натуральні числа – це числа, які ми використовуємо при лічбі предметів (Істер, 2018; Мерзляк, Полонський & Якір, 2018; Тарасенкова, Богатирьова, Бочко, Коломієць & Сердюк, 2018). Натуральні числа використовують також для визначення порядку розміщення предметів (Істер, 2018). П'ятикласники ознайомлюються з тим, що натуральні числа, записані так, що за кожним числом йде наступне (1, 2, 3, 4, 5, …), утворюють натуральний ряд чисел. З додаткових рубрик («Коли зроблено уроки» (Мерзляк, Полонський & Якір, 2018), «Дізнайтеся більше» (Тарасенкова, Богатирьова, Бочко, Коломієць & Сердюк, 2018)) учні отримують відомості про походження назви натуральних чисел і десяткової системи числення, про інші системи числення, числа-велетні тощо. Далі йде вивчення бінарних алгебраїчних операцій (дій) над натуральними числами та їх властивостей (комутативність і асоціативність додавання і множення, дистрибутивність множення відносно додавання і віднімання, властивість 1). Віднімання вводять як операцію, обернену до додавання, але так як в загальному випадку операція додавання не має оберненої, то операцію віднімання розглядають обмежено, тільки для випадків, коли різниця натуральних чисел є натуральним числом. Множення вводять через операцію додавання. На множині натуральних чисел операція множення не має оберненої, тому операцію ділення розглядають з обмеженням (ділення націло). Також розглядають операцію ділення з остачею. Як показує практика, найскладнішою для учнів виявляється дії ділення та ділення з остачею. Під час вивчення дій з натуральними числами треба обов'язково сформувати міцні навички їх виконання, бо саме ці дії є основою обчислювальних алгоритмів у роботі з іншими числами.

Далі у 5-му класі вводять додатні дробові числа як відношення натуральних: дробові числа записуємо за допомогою двох натуральних чисел і горизонтальної риски у вигляді $\frac{a}{b}$. Число b, записане під рискою, називають знаменником дробу і показує, на скільки рівних частин поділено одиницю (ціле). Число a, записане над рискою, називають чисельником дробу, і воно показує, скільки взято рівних частин одиниці (цілого) (Істер, 2018). При введені нових чисел учням пропонується розглядати частини різних предметів: половину яблука, третину смужки, чверть хлібини тощо й пояснюється необхідність введення чисел, якими можна рахувати в цих випадках. Вводяться поняття правильного та неправильного дробів, мішаного числа, дії додавання та віднімання дробів з однаковими знаменниками. З додаткових рубрик підручників учні дізнаються про виникнення дробових чисел з практичних потреб людства для можливості рахувати частини предметів, про появу запису дробів у сучасному вигляді: чисельник, знаменник й риска між ними.

При вивченні натурального ряду чисел у підручниках 5-го класу зазначено, що не всі числа, що відомі дітям, є натуральними. Наприклад, число 0 – не натуральне.

У 5-му класу починають вивчатись скінченні десяткові дроби як звичайні дроби, що мають знаменники 10, 100, 1000 тощо, та спосіб запису десяткового дробу. Вводяться дії додавання, віднімання, множення, ділення скінченних десяткових дробів, які виконуються у стовпчик. Якщо учнем добре засвоєний матеріал щодо дій з натуральними числами, то робота з десятковими дробами не викликає труднощів.

В 6-му класі продовжується знайомство зі звичайними дробами. Виконується порівняння дробів з різними знаменниками, а також дії додавання й віднімання з ними, що пов'язано з традиційно складним для учнів зведенням дробів до спільного знаменника. З'являються дії множення та ділення звичайних дробів.

Після цього розширюється поняття десяткового дробу: пояснюється, що не завжди звичайний дріб можна перетворити на скінченний десятковий, а тільки у випадку, якщо знаменник розкладається на прості множники, серед яких є тільки числа 2 та 5. Якщо містяться будь-які інші прості множники, то при діленні чисельника дробу на знаменник отримуємо нескінченні десяткові періодичні дроби, де період – «це число, яке в записі десяткового періодичного дробу повторюється нескінченно та може починатися відразу після десяткової коми, а може після деякого числа.» (Тарасенкова, Богатирьова, Коломієць & Сердюк, 2014). Шестикласники вчаться читати такі числа, перетворювати звичайні дроби в нескінченні періодичні, порівнювати їх, засвоюють поняття наближення із недостачею та надлишком.

Далі в 6-му класі переходять до вивчення від'ємних чисел: і цілих, і дробових. Для кращого засвоєння теми учнями в підручниках представлено задачі практичного змісту, наприклад, задачі про термометри та гори (Істер, 2014; Мерзляк, Полонський & Якір, 2014), задачі на розташування об'єктів ліворуч та праворуч від даного (Тарасенкова, Богатирьова, Коломієць & Сердюк, 2014). Використання від'ємних чисел на температурній шкалі відомо учням, тому їх поява в курсі математики сприймається природно. «Натуральні й дробові числа, які ви вивчали раніше, тепер будемо називати додатними» (Істер, 2014; Тарасенкова, Богатирьова, Коломієць & Сердюк, 2014). Від'ємні числа вводяться як числа, перед якими стоїть знак мінус. В додаткових рубриках («А ще раніше» (Істер, 2014), «Дізнайся більше» (Тарасенкова, Богатирьова, Коломієць & Сердюк, 2014)) розповідається про історію появи від'ємних чисел в математиці («хибні числа») та уявлення про них як «борг-майно». Число 0 особливе: його не відносять ні до додатних, ні до від'ємних чисел.

Вводиться поняття протилежного числа: «Два числа, що мають рівні модулі, але протилежні знаки, називаються протилежними числами. Число 0 протилежне до самого себе» (Тарасенкова, Богатирьова, Коломієць & Сердюк, 2014). З його допомогою дається означення поняття цілого числа: «Натуральні числа, їм протилежні і число 0 називаються цілими числами» (Істер, 2014). Або: «Натуральні числа, протилежні їм числа і число нуль утворюють множину цілих чисел» (Тарасенкова, Богатирьова, Коломієць & Сердюк, 2014).

Після вивчення цілих чисел вводиться поняття раціонального числа. Означення раціонального числа виглядає так: додатні числа (цілі і дробові), від'ємні числа (цілі і дробові) і число 0 складають множину раціональних чисел

(Тарасенкова, Богатирьова, Коломієць & Сердюк, 2014). За допомогою координатної прямої пояснюється, що при додаванні додатного числа до координати точки, вона збільшується і точка зміщується праворуч, а при додаванні від'ємного – координата точки зменшується і точка зміщується ліворуч. Порядок виконання дій множення й ділення чисел з однаковими чи різними знаками подається у вигляді правил. Вводяться позначення множин натуральних, цілих та раціональних чисел: *N*, *Z*, *Q*. За допомогою кругів Ейлера-Вена показано співвідношення між ними.

Згідно з навчальною програмою (Програма, 2017), курс математики 5-6 класів передбачає розвиток, збагачення і поглиблення знань учнів про числа і дії над ними, відбувається поступове розширення множини натуральних чисел до множини раціональних чисел шляхом послідовного введення дробів (звичайних і десяткових), а також від'ємних чисел разом із формуванням культури усних, письмових, інструментальних обчислень.

Розвиток числової лінії в курсі шкільної математики з точки зору розширення алгебраїчних систем завершується у 8 класі. В 8 класі переходять до формування поняття дійсних чисел. Більшість підручників вводить раціональні числа як числа, які можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне число (Кравчук, Підручна & Янченко, 2016; Прокопенко, Захарійченко & Кінащук, 2016). Означення ірраціонального числа вводять у 3-тій чверті 8-го класу з появою в курсі алгебри квадратних коренів. Числа, які не можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне число, називають ірраціональними числами (Кравчук, Підручна & Янченко, 2016; Прокопенко, Захарійченко & Кінащук, 2016). В підручниках з алгебри 8 класу необхідність розширення множини раціональних чисел обґрунтовується по різному: через неможливість виконання операції добування квадратного кореня в межах множини раціональних чисел, через існування чисел, що не є раціональними, через представлення чисел нескінченними десятковими дробами, через існування несумірних величин. Раціональні числа разом з ірраціональними числами утворюють множину дійсних чисел, яку позначають буквою *R* (Кравчук, Підручна & Янченко, 2016; Прокопенко, Захарійченко & Кінащук, 2016).

Розглянемо, як вводиться та формується поняття дійсного числа у 8 класі у шкільному підручнику «Алгебра. 8 клас» (Мерзляк, Полонський & Якір, 2016).

Перед введенням множини дійсних чисел учні вивчають операцію добування квадратного кореня. Автори підручника задаються питанням: чи завжди квадратний корінь з невід'ємного раціонального числа є раціональним числом? Іншими словами, чи може дія добування квадратного кореня з раціонального числа вивести результат за межі множини Q? Для цього розглядається рівняння $x^2 = 2$. Оскільки 2 > 0, то це рівняння має два корені: $\sqrt{2}$ і -$\sqrt{2}$. Проте не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2, тобто числа $\sqrt{2}$ і -$\sqrt{2}$ не є раціональними. Ці числа є прикладами ірраціональних чисел. Дане рівняння не має раціональних розв'язків, але якщо розв'язати рівняння графічно, можемо переконатися, що розв'язки є. Ці числа ми називаємо ірраціональними. Отже, дія добування кореня з раціонального числа може вивести результат за межі множини Q. Автори наголошують, що з будь-якого невід'ємного дійсного числа можна добути квадратний корінь, і в результаті цієї дії отримати дійсне число. Тому дія добування квадратного кореня з невід'ємного дійсного числа не виводить результат за межі множини дійсних чисел. В підручнику наведено інформацію для додаткового читання про відкриття ірраціональних чисел. Тут доводиться ірраціональність числа $\sqrt{2}$. Автори показують існування ірраціонального числа $\sqrt{2}$ графічно, тобто, що існують відрізки, довжини яких не можна виразити раціональними числами. Це означає, що для вимірювання довжин відрізків раціональних чисел недостатньо. Також розповідається про сумірні та несумірні величини, вводиться поняття спільної міри відрізків.

Розглянемо тепер, як вводяться та обґрунтовуються дійсні числа у підручнику «Алгебра. 8 клас» (Тарасенкова, Богатирьова, Коломієць & Сердюк, 2016).

Перед введенням дійсних чисел згадується, що у 5-му класі вивчалися числа, які використовують для лічби, – натуральні числа. У 6-му класі вивчалися й інші числові множини – множина цілих чисел і множина раціональних чисел. Цілі числа та дробові числа утворюють множину раціональних чисел. Автори підручника звертають увагу: кожне раціональне число можна подати як нескінченний періодичний десятковий дріб. І навпаки, кожний нескінченний періодичний десятковий дріб є раціональним числом. Ірраціональні числа визначаються як числа, які не можна подати як нескінченні періодичні десяткові дроби. Наводяться приклади ірраціональних чисел. Найбільш відомим ірраціональним числом є число π: π = 3,1415926535 8979323846 2643383279 502… Прикладами ірраціональних чисел також є числа: $\sqrt{2}$ = 1,4142135…; $\sqrt{3}$ = 1,732050…, тощо. Множина дійсних чисел визначається як множина чисел, яку утворюють разом множина раціональних чисел і множина ірраціональних чисел. Автори звертають увагу: кожне дійсне число є або раціональним числом, або ірраціональним числом. У рубриці «Дізнайтеся більше», пишеться, що терміни «раціональне число» та «ірраціональне число» походять від латинського слова ratio – розум (буквальний переклад: «раціональне число – розумне число», «ірраціональне число – нерозумне число»).

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для визначення рівня обґрунтування розширення поняття числа в курсі математики ЗСО ми застосували наступні методи дослідження: аналіз та синтез наукових педагогічних та методологічних джерел з метою виявлення стану розробленості проблеми; аналіз чинних навчальних програм з математики початкової й основної шкіл стосовно розвитку числової лінії; аналіз підручників 5-8 класів для порівняння методики введення нових числових систем; узагальнення власного педагогічного досвіду з методики навчання математики у закладах загальної середньої, передвищої та вищої освіти. Отриману інформацію узагальнено, зроблено певні висновки.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Аналіз сучасних методичних підходів до формування поняття про число у початковій школі дозволив визначити певну систему завдань. Так, методисти М. Бантова, С. Скворцова, О. Онопрієнко, М. Богданович, М. Козак, Я. Король, П. Кочина, Н. Листопад та ін. пропонують процес формування поняття про кожне натуральне число у 1-му класі вибудовувати за таким планом: утворення нового числа з переднього, уже вивченого; введення числа як кількісної характеристики класу скінченних еквівалентних множин; написання цифри, яка позначає на письмі дане число;

співвіднесення цифри з групою предметів, і навпаки; визначення місця числа в натуральному ряді; лічба в прямому і зворотному порядках у межах даного числа; порівняння чисел різними способами в межах числа, що вивчається; вивчення складу числа.

Узагальнення різних методичних підходів свідчить, що вивчення нумерації чисел у будь-якому концентрі ділиться на два етапи: усна та письмова нумерації. При вивченні нумерації чисел першого десятка усна і письмова нумерація вивчаються паралельно. При вивченні нумерації чисел 11–100 усна і письмова нумерація розглядаються окремо. Між тим, успішне засвоєння учнями письмової нумерації вимагає розуміння принципу позиції цифр в числі, вміння визначати розряди, класи. На перших етапах особливості десяткової системи числення розкриваються в процесі формування навичок лічби на підставах правил лічби, зокрема: лічбу предметів можна починати з будь-кого предмету; лічбу можна продовжити у будь-якому напрямку; не можна пропустити жодного предмета; не можна жоден предмет рахувати двічі.

Підґрунтям введення нових числових множин в курсі математики базової середньої школи є поняття розширення числових алгебраїчних систем – від напівкільця натуральних чисел з 0 до кільця цілих чисел, а потім до поля раціональних чисел та поля дійсних чисел. Сума й добуток натуральних чисел завжди є натуральним числом, а різниця натуральних чисел не завжди є натуральним числом, тому натуральні числа потребують розширення. Цілі числа є розширенням множини натуральних чисел. Сума, різниця й добуток цілих чисел завжди є цілим числом, цілі числа утворюють комутативне кільце, а ділення цілих чисел не завжди можливо. Тому цілі числа теж потребували розширення. Раціональні числа є розширенням множини цілих чисел. Сума, різниця, добуток і частка (крім ділення на 0) раціональних чисел завжди є раціональним числом, раціональні числа утворюють поле, але квадратний корінь із невід’ємного раціонального числа не завжди є раціональним числом (неповнота множити раціональних чисел). Тому раціональні числа також потребували розширення. Вводяться ірраціональні числа. Дійсні числа розглядають як об’єднання раціональних та ірраціональних чисел, вони є розширенням множини раціональних чисел. Розглянуті числові множини упорядковують.

Розвиток лінії «Числа» в курсі математики базової середньої школи йде наступним шляхом: натуральні числа, невід’ємні дробові числа, цілі числа, раціональні числа, дійсні числа, що відрізняється від шляху класичного розширення числових множин: натуральні числа, цілі числа, раціональні числа, дійсні числа. До появлення в програмі дійсних чисел методика введення цілих і раціональних чисел в підручниках майже співпадає. Методика введення множини ірраціональних та множини дійсних чисел у підручниках алгебри 8-го класу, як бачимо, різна. Одні автори визначають множину дійсних чисел як об’єднання множини раціональних чисел і множини ірраціональних чисел, що відповідає теорії дійсного числа Ріхарда Дедекінда, інші автори розглядають множину раціональних чисел як множину нескінченних періодичних десяткових дробів, ірраціональних – нескінченних неперіодичних десяткових, тобто спираються на теорію дійсного числа Карла Вейерштрасса. Однак, в більшості підручників практично не приділяють уваги на незамкненість множини ірраціональних чисел відносно операцій додавання та множення, чим ця множина істотно відрізняється від числових множин, які вивчалися попередньо, та властивостям множини дійсних чисел.

ОБГОВОРЕННЯ

На нашу думку, чинна навчальна програма з математики базової середньої школи містить певні недоліки.

Навчальна програма 6-го класу перевантажена вивченням нових числових множин та їх властивостей: за навчальний рік діти мають опанувати множину додатних дробових чисел та дії над ними, множину цілих чисел та дії над ними, множину раціональних чисел та дії над ними, представлення раціональних чисел десятковими дробами та дії над ними. В результаті учні плутаються й не засвоюють міцно та надійно жодну з цих тем. Вважаємо доцільним повернути вивчення нескінченних десяткових дробів як представлення раціональних чисел у 7 клас, щоб дещо розвантажити числову лінію 6-го класу.

Звернемо увагу на недоліки чинної навчальної програми з математики для 8-го класу. На вивчення натуральних чисел та їх властивостей в курсі математики 5-го класу відводиться приблизно 40 годин, на вивчення цілих чисел та їх властивостей в курсі математики 6-го класу – приблизно 40 годин, на вивчення раціональних чисел та їх властивостей у 6-му та 8-му класах – приблизно 50 годин, а на вивчення ірраціональних та дійсних чисел та їх властивостей у курсі алгебри 8-го класу в програмі відводиться не більше 1 години у темі 2 «Квадратні корені. Дійсні числа» (10 годин). Тут не йдеться про вивчення властивостей квадратних коренів, тому що квадратні корені, які не є раціональними числами, не вичерпують множину ірраціональних чисел. Безумовно, на дії з квадратними коренями у 8-му класі і з коренями *n*-го ступеня, значеннями тригонометричних функцій, логарифмічних функцій, показникових функцій у 10-11 класі відведено достатню кількість годин, однак, такі числа теж є тільки прикладами дійсних чисел. Якщо поняття про натуральні, цілі та раціональні числа формуються в учнів у 5-8 класах протягом довгого часу, то поняття дійсного числа не зможе сформуватись у 8 класі за 1 годину. Очевидно, що при розв’язанні задач, прикладів і розрахунках в основній та старшій школах учні використовують як раціональні, так і ірраціональні числа, однак у більшості випадків це виконується механічно. У школярів виникають певні труднощі: вони можуть оперувати дійсними числами, але не можуть дати означення, що таке дійсне число, не розуміють відмінність між раціональними та ірраціональними числами, ставлять знак рівності між ірраціональними числами та їх раціональними наближеннями при розв’язанні рівнянь, погано розуміють зв'язок між звичайними дробами і десятковими дробами, не знають, якими десятковими дробами представляються раціональні числа та ірраціональні числа тощо. Тому часто можна спостерігати за тим, що учні мають уявлення про те, що таке натуральне число, ціле число, раціональне число, однак, не розуміють, що таке дійсне число. Наприклад, питання «Скільки раціональних коренів має рівняння? А скільки дійсних?» часто ставить учнів в глухий кут.

Переглянувши підручники з алгебри 8-11 класів для загальноосвітнього рівня та рівня стандарт, ми дійшли до висновку, що вони містять достатньо однотипні формулювання та завдання щодо задач вищевказаного змісту. У підручниках завдання на доведення ірраціональності числа досить одноманітні, сформульовані вони майже однаково, кількість задач невелика, тому їх зовсім недостатньо для опанування учнями поняття дійсного числа, ірраціонального числа. Крім того, лінія десяткових дробів чітко не виділена. Десяткові дроби застосовуються для обчислень, в учнів не формується уявлення про те, які класи десяткових дробів виражають раціональні числа, а які – ірраціональні. Стороною проходить питання перетворення нескінченних періодичних десяткових дробів в звичайні.

На нашу думку, потрібно розширювати кількість завдань за лінією дійсних чисел, робити їх різноманітними, включати більше завдань на представлення дійсних чисел десятковими дробами, задачі на наближення. І такі завдання повинні зустрічатися не тільки в курсі алгебри 8 класу, а й в алгебрі 9-11 класів. Хотілося б, щоб учні не тільки виконували дії з числами механічно, а й розуміли, що вони роблять і число з якої множини отримують у відповіді. Крім того, цій темі можна приділяти увагу на уроках геометрії, розв'язуючи задачі з відповідних тем, наприклад, «Розв'язування трикутників», «Розв'язування прямокутних трикутників», «Многокутники. Площі многокутників», «Правильні многокутники. Довжина кола. Площа круга».

Отже, під час введення кожної нової числової множини, виходячи з історичного розвитку математики та враховуючи вікові особливості учнів основної школи, вчителю необхідно виконувати певний ряд дій:

- на прикладі спеціально підібраних задач встановити неможливість їх розв'язання у відомій числовій множині;
- ввести нові числа, дати їм назву та означення, знайти їх місце на координатній прямій; корисно надати історичні відомості про появу цих чисел;
- об'єднати нові числа з вже відомими, показати, що попередня множина чисел є підмножиною нової;
- визначити правила порівняння нових чисел, дії над ними та їх властивості;
- організувати розв'язання завдань, в тому числі практичного змісту, з новими числами.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Введення нових числових систем в курсі математики базової середньої школи здійснюється на основі поняття розширення алгебраїчних систем. На нашу думку, чинна навчальна програма з математики базової середньої школи містить певні недоліки, необхідно ввести деякі корективи у подання змістової лінії «Числа» у програмі з математики, зокрема, дещо розвантажити числову лінію в 6-му класі, а у 8-му класі більше приділяти уваги властивостям ірраціональних та дійсних чисел. Перспективу подальшого дослідження вбачаємо в більш детальному системному аналізі змісту числової лінії в чинних підручниках алгебри стосовно методики введення множин раціональних, ірраціональних та дійсних чисел та їх властивостей.

Список використаних джерел

1. Бельтюкова Г. В. Первый концентр – числа от 0 до 20. Начальная школа. № 1, 1993. С. 38-40.
2. Істер О. С. Математика: підручник для 6 класу загальноосвітніх навчальних закладів. К.: Генеза, 2014. 296 с.
3. Істер. О. С Математика. 5 кл.: підручник для закладів загальної середньої освіти. 2-ге вид. Київ: Генеза, 2018. 288 с.
4. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра: підручник для 8 кл. загальноосвітніх навчальних закладів. Тернопіль: Підручники і посібники, 2016. 256 с.
5. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: підручник для 8 кл. загальноосвітніх навчальних закладів. Х.: Гімназія, 2016. 240 с.
6. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика: підручник для 6 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Х.: Гімназія, 2014. 400 с.
7. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика. 5 кл.: підручник для закладів загальної середньої освіти. 2-ге вид. Х.: Гімназія, 2018. 272 с.
8. Навчальні програми для загальноосвітніх навчальних закладів України, опис ключових змін. 5-9 класи. К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. 56 с.
9. Прокопенко Н. С., Захарійченко Ю. О., Кінащук Н. Л. Алгебра: підручник для 8 кл. загальноосвітніх навчальних закладів. Х.: Вид-во «Ранок», 2016. 288 с.
10. Скворцова С. О., Оноприєнко О. В. Нова українська школа: методика навчання математики у 1–2 класах закладів загальної середньої освіти на засадах інтегративного і компетентнісного підходів: навч.-метод. посіб. Харків: Вид-во «Ранок», 2019. 352 с.
11. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Бочко О. П., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Математика. 5 кл.: підручник для закладів загальної середньої освіти. 2-ге вид. К.: Видавничий дім «Освіта», 2018. 240 с.
12. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Алгебра: підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів. К.: УОВЦ «Оріон», 2016. 336 с.
13. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Математика: підручник для 6 класу загальноосвітніх навчальних закладів. К.: Видавничий дім «Освіта», 2014. 304 с.
14. Типова освітня програма для 3-4 класів закладів загальної середньої освіти: наказ Міністерства освіти і науки України від 08.10.2019 №1273. URL: https://mon.gov.ua/ua/npa/pro-zatverdzhennya-tipovih-osvitnih-program-dlya-3-4-klasiv-zakladiv-zagalnoyi-serednoyi-osviti-1273 (Дата звернення - 01.03.2020 р.).

References

1. Bel'tjukova G. V. (1993). Pervyj koncentr – chisla ot 0 do 20 [The first concentrate is numbers from 0 to 20]. Nachal'naja shkola,1, 38–40 [in Russian].
2. Ister O. S. (2014). Matematyka: pidruchnyk dlia 6 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Maths. 6 class]. Kyiv: Heneza [in Ukrainian].
3. Ister. O. S. (2018). Matematyka. 5 kl.: pidruchnyk dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity. [Maths. 5 class]. Kyiv: Heneza [in Ukrainian].
4. Kravchuk V., Pidruchna M. & Yanchenko H. (2016). Alhebra: pidruchnyk dlia 8 kl. zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Algebra. 8th grade]. Ternopil: Pidruchnyky i posibnyky [in Ukrainian].

5. Merzliak A. H., Polonskyi V. B. & Yakir M. S. (2016). Alhebra: pidruchnyk dlia 8 kl. zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Algebra. 8th grade]. Kharkiv: Himnaziia [in Ukrainian].
6. Merzliak A. H., Polonskyi V. B. & Yakir M. S. (2014). Matematyka: pidruchnyk dlia 6 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Maths. 6 class]. Kharkiv: Himnaziia [in Ukrainian].
7. Merzliak A. H., Polonskyi V. B. & Yakir M. S.(2018). Matematyka. 5 kl.: pidruchnyk dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Maths. 5 class]. Kharkiv: Himnaziia [in Ukrainian].
8. Navchalni prohramy dlia zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv Ukrainy,opys kliuchovykh zmin. 5-9 klasy (2017) [Curricula for Ukrainian secondary schools, description of key changes. 5-9 classes]. Kyiv: Osvita [in Ukrainian].
9. Prokopenko N. S., Zakhariichenko Yu.O. & Kinashchuk N. L. (2016). Alhebra: pidruchnyk dlia 8 kl. zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Algebra. 8th grade]. Kharkiv: Ranok [in Ukrainian].
10. Skvortsova S. O. & Onopriienko O. V. (2019). Nova ukrainska shkola: metodyka navchannia matematyky u 1–2 klasakh zakladiv zahalnoi serednoi osvity na zasadakh intehratyvnoho i kompetentnisnoho pidkhodiv [New Ukrainian School: Methods of Teaching Mathematics in Grades 1-2 of General Secondary Education Institutions Based on Integrative and Competent Approaches]. Kharkiv: Ranok [in Ukrainian].
11. Tarasenkova N. A., Bohatyrova I. M., Bochko O. P., Kolomiiets O. M. & Serdiuk Z. O. (2018). Matematyka. 5 kl.: pidruchnyk dlia zakladiv zahalnoi serednoi osvity [Maths. 5 class]. Kyiv: Osvita [in Ukrainian].
12. Tarasenkova N. A., Bohatyrova I. M., Kolomiiets O. M. & Serdiuk Z. O. (2016). Alhebra: pidruchnyk dlia 8 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Algebra. 8th grade]. Kyiv: Orion [in Ukrainian].
13. Tarasenkova N. A., Bohatyrova I. M., Kolomiiets O. M. & Serdiuk Z. O. (2014). Matematyka: pidruchnyk dlia 6 klasu zahalnoosvitnikh navchalnykh zakladiv [Maths. 6 class]. Kyiv:Osvita [in Ukrainian].
14. Typova osvitnia prohrama dlia 3-4 klasiv zakladiv zahalnoi serednoi osvity (2019) [Typical educational program for 3-4 classes of general secondary education institutions]. Retrieved from: https://mon.gov.ua/ua/npa/pro-zatverdzhennya-tipovih-osvitnih-program-dlya-3-4-klasiv-zakladiv-zagalnoyi-serednoyi-osviti-1273 [in Ukrainian].

DEVELOPMENT OF A NUMERICAL LINE IN THE COURSE OF MATHEMATICS OF ESTABLISHMENTS OF GENERAL SECONDARY EDUCATION

Olga Yakovlieva, Yana Haievets

South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky

Viktoriia Kaplun

School of general education №68, Odessa

Abstract.

Formulation of the problem. *The number line is one of the important content lines in the course of mathematics of general secondary education, its development begins in the first grade of elementary school and continues throughout the course of mathematics in basic and secondary school. Students' knowledge of numbers and their ability to operate is the basis for the mathematical competence of general secondary education students.*

Materials and methods. *The article provides a brief overview of the development of numerical lines in elementary mathematics and secondary school mathematics based on the theoretical analysis of scientific sources, current curricula for mathematics of elementary and secondary schools, mathematics textbooks for grades 5-8. The information obtained is generalized to determine the justification for expanding the notion of numbers in textbooks. The peculiarities of numerical processing in a primary and secondary schools in connection with the updated normative provision of mathematical education are investigated.*

Results. *It is noted that the development of the content line "Numbers" in the course of mathematics occurs in the following sequence: positive integers, integral fractional numbers, integers, rational numbers, real numbers, which is different from the path of classical expansion of numerical sets: natural numbers, integers, rational numbers, real numbers. It is found that in the textbooks the methods of entering the natural, integer and rational numbers coincide, the method of entering the irrational and real numbers is different.*

Conclusions. *The introduction of new number sets in the high school mathematics course is based on the notion of an extension of algebraic systems. According to the authors, the current high school math curriculum has some drawbacks, some adjustments are needed to represent the content line "Numbers" in the math program: unload the numeric line in 6th grade, and pay more attention to the properties of the irrational and real numbers in 8th grade.*

Keywords: *numbers, extension of number sets, algebraic operations, algebraic structures, extensions school mathematics course.*