

**Державний заклад «Південноукраїнський національний університет
імені К. Д. Ушинського»**

ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ

**Методичні рекомендації до самостійної роботи здобувачів вищої освіти
за першим (бакалаврським) рівнем денної форми навчання
зі спеціальності 014 Середня освіта (Математика)**

Рекомендовано до друку вченою радою Державного закладу
«Південноукраїнський національний університет імені К. Д. Ушинського»
(протокол № 6 від 30 січня 2020 року).

Рецензенти:

Урум Г. Д. – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»;

Задоріна О. М. – кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри методики викладання і змісту освіти КЗВО «Одеська академія неперервної освіти»

Тотожні перетворення тригонометричних виразів : методичні рекомендації до самостійної роботи здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем денної форми навчання зі спеціальності 014 Середня освіта (Математика) / Укладачі : А. С. Кушнірук, Н. А. Орлик. Одеса : ФОП Бондаренко М. О., 2020. 32 с.

Методичні рекомендації призначені для здобувачів вищої освіти за першим (бакалаврським) рівнем денної форми навчання зі спеціальності 014 Середня освіта (Математика). У них структуровано завдання для самостійної роботи за темою «Тотожні перетворення тригонометричних виразів». Рекомендовано студентам, викладачам, методистам, учителям.

ЗМІСТ

Передмова	4
1. Тотожні перетворення тригонометричних виразів	6
1.1. Тригонометричні формули.....	6
1.2. Обернені тригонометричні функції	9
2. Завдання для самостійної роботи	13
2.1. Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу	13
2.2. Формули додавання та їх наслідки.....	16
2.3. Завдання на застосування основних тригонометричних формул	21
2.4. Тотожні перетворення обернених тригонометричних виразів	25
2.5. Відповіді до завдань для самостійної роботи студентів.....	28
Література	30

ПЕРЕДМОВА

Методичні рекомендації призначені допомогти здобувачам першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 014 Середня освіта (Математика) в організації самостійної роботи за змістовим модулем «Тотожні перетворення тригонометричних виразів», що входить до навчальної дисципліни «Шкільний курс математики і методика його навчання».

Метою вивчення матеріалу шкільного курсу математики є підвищення загальної математичної культури студентів, навчання їх розв'язувати шкільні задачі з математики як на підвищеному, так і на поглибленому рівнях (рівень факультативних занять, класів і шкіл із поглибленим вивченням математики, конкурсних завдань, олімпіад юних математиків тощо). Шкільний курс математики є основою для вивчення студентами курсу методики навчання математики, а, отже, виступає складає фундаментом спеціальної підготовки майбутніх учителів математики до роботи в закладах загальної середньої освіти.

Виникнення тригонометрії зумовлене необхідністю обчислювальної практики, а саме необхідністю створення апарату для обчислення елементів різноманітних геометричних фігур за достатньою кількістю їх заданих елементів. Загалом тригонометрія формувалась і розвивалася під впливом астрономії.

Розвиток тригонометричних знань призвів до того, що накопичений матеріал почали систематизувати і вже через невеликий проміжок часу було виокремлено самостійний розділ математики – тригонометрію. Тригонометрія проникла і в інші науки – значна кількість відкриттів було зроблено саме завдяки їй. І вже сьогодні не має жодної галузі науки, яка змогла б обійтися без допомоги тригонометрії.

Традиційно вважається, що тригонометрія одна з найскладніших тем у старшій школі, тому і не дивно, що студенти педагогічних закладів

вищої освіти, стикаючись з цією темою, потрапляють у незручний стан. І це вже проблема не лише студентів, а й методичних аспектів викладання матеріалу в ЗВО.

Забезпечення заданого програмою обсягу і рівня оволодіння учнями знаннями й уміннями щодо тотожних перетворень тригонометричних виразів та засоби їх контролю повинно постійно перебувати в центрі уваги вчителя математики. Для того, щоб на належному рівні навчати учнів, у своїй професійній діяльності майбутнім учителям математики вкрай необхідно вільно володіти теоретичними знаннями і практичними вміннями й навичками щодо тотожних перетворень тригонометричних виразів.

1. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ

1.1. Тригонометричні формули

*Співвідношення між тригонометричними функціями
одного й того самого аргументу*

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Формули додавання

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{2}$$

Формули половинного аргументу

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Формули потрійного аргументу

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3\operatorname{ctg} \alpha}{3\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$$

Формули перетворення суми в добуток

$$\sin \alpha + \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -2 \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -2 \operatorname{ctg} 2\alpha$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha) = \sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha)$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha)$$

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi),$$

$$\text{де } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Формули перетворення добутку в суму

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

Формули зведення

Кут функція	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi \pm \alpha$
$\sin \beta$	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
$\cos \beta$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$

Значення тригонометричних функцій деяких кутів

Кут у градусах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Кут у радіанах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \beta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \beta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \beta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує	0
$\operatorname{ctg} \beta$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не існує	0	не існує

1.2. Обернені тригонометричні функції

Тригонометричні функції від одного й того самого аргументу виражаються алгебраїчно одна через одну, тому в результаті виконання будь-якої тригонометричної операції над будь-якою з аркфункцій отримаємо алгебраїчний вираз.

Вже у 10 класі вводиться поняття оберненої функції: «Якщо функція $y = f(x)$ набуває кожного свого значення в єдиній точці її області визначення, то можна задати функцію $y = g(x)$, яка називається оберненою до функції $y = f(x)$: для кожного $a \in D(f)$, якщо $f(a) = b$, то $g(b) = a$ » [20, с. 140].

Саме через це означення вводяться обернені тригонометричні функції, або як інакше їх називають – аркфункції.

У силу означення аркфункцій,

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad \cos(\arccos x) = x \quad (1)$$

на інтервалі $-1 \leq x \leq 1$ й

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \quad (2)$$

на інтервалі $-\infty < x < +\infty$.

Рівність (1) не завжди є вірною. При $|x| > 1$ вираз $\arcsin x$, а тому й вираз $\sin(\arcsin x)$ втрачає сенс, а тому не можна говорити про виконання рівності (1) [3, 27].

Важливо, аби студенти вміли самостійно здійснювати доведення формул, які отримуються від виконання найпростіших тригонометричних операцій над аркфункціями.

Так, наприклад, припускаючи у формулі $\cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$ (вираження косинусу через синус), $\varphi = \arcsin x$ отримаємо:

$$\cos(\arcsin x) = \pm \sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2} = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Перед радикалом слід взяти знак $+$, оскільки дуга $\varphi = \arcsin x$ належить правому півколу $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, на якій косинус невід'ємний. Отже, маємо:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \quad [21].$$

Нижче наведено формули в таблиці.

$\sin(\arcsin)x = x$	$\cos(\arcsin)x = \sqrt{1 - x^2}$
$\sin(\arccos)x = \sqrt{1 - x^2}$	$\cos(\arccos)x = x$
$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$	$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$	$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$
$\operatorname{tg}(\arcsin)x = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\operatorname{ctg}(\arcsin)x = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$
$\operatorname{tg}(\arccos)x = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$	$\operatorname{ctg}(\arccos)x = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$

Обернені тригонометричні функції

від'ємного аргументу

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x;$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$

Обернені тригонометричні функції

від основних тригонометричних функцій

$$\arcsin(\sin x) = x, \quad |x| \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\arccos(\cos x) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad |x| \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \quad 0 < x < \pi.$$

Учням математичних класів і студентам фізико-математичних факультетів педагогічних закладів вищої освіти корисно використовувати таку схему доведення тригонометричних тотожностей, які містять обернені тригонометричні функції, що подана в навчальному посібнику М. І. Жалдак. Математика (тригонометрія, геометрія, елементи стохастики) з комп'ютерною підтримкою [7, с.76].

**Схема доведення тригонометричних тотожностей,
які містять обернені тригонометричні функції**

1. Визначити, чи до одного проміжку належать числа, які виражають значення лівої і правої частин рівності.

2. Якщо числа належать проміжку $(0; \pi)$, то від виразів лівої правої частин рівності знаходять значення косинусу, або котангенса (тих функцій, які монотонні на цьому проміжку; якщо вони належать проміжку $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то знаходять значення синуса і тангенса.

Якщо проміжки мають довжину одну чверть, тобто $\left(0; \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right); \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, то можна знаходити значення будь-якої тригонометричної функції.

3. Якщо одержані значення рівні, то задана тотожність істинна, у протилежному випадку – хибна.

Якщо ж значення виразів належать різним проміжкам (відмінним від наведених), то потрібно перерозподілити вирази, які входять до рівності (тотожності), істинність якої потрібно довести. Надалі потрібно діяти за наведеною схемою.

Приклад. Довести, що $\arctg 2 + \arctg 3 = \pi - \frac{\pi}{4}$.

Звірятимемо за наведеною схемою.

$$1. \frac{\pi}{4} < \arctg 2 < \frac{\pi}{2}, \text{ оскільки } 1 < 2 < \infty,$$

$$\frac{\pi}{4} < \arctg 3 < \frac{\pi}{2}, \text{ бо } 1 < 3 < \infty.$$

Додамо почленно нерівності

$$\frac{\pi}{2} < \arctg 2 + \arctg 3 < \pi;$$

$$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} < \pi.$$

2. Значення лівої, правої частин заданої рівності належить другій чверті, де монотонні всі основні тригонометричні функції. У цьому разі зручно обчислювати в цьому разі функцію тангенс:

$$\operatorname{tg}(\arctg 2 + \arctg 3) = \frac{\operatorname{tg}(\arctg 2) + \operatorname{tg}(\arctg 3)}{1 - \operatorname{tg}(\arctg 2)\operatorname{tg}(\arctg 3)} = \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} = -1,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1.$$

Висновок: задана рівність істинна.

2. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2.1. Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

ЗАВДАННЯ 1

Спростити:

1. $\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha)}$, якщо $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
2. $\sqrt{\cos^2 \beta (1 + \operatorname{tg} \beta) + \sin^2 \beta (1 + \operatorname{ctg} \beta)}$, якщо $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;
3. $\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$, якщо $3\pi < \alpha < 4\pi$;
4. $\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\beta}{4}} - \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\beta}{4}}$, якщо $4\pi < \beta < 5\pi$;
5. $\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{3}} + \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{3}}$, якщо $2\pi < \alpha < 3\pi$;
6. $\sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta (1 + \operatorname{ctg}^2 \beta) + \operatorname{ctg}^2 \beta (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)}$, якщо $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;
7. $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$;
8. $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$, якщо $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
9. $\frac{1 - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} + 2 \sin \alpha \cos \alpha$;
10. $\sin^3 \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha)$;
11. $1 + \frac{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$;
12. $\frac{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}$;

13. $\frac{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} + \operatorname{tg}^2 \alpha;$
14. $\left(\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \cos^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha;$
15. $\sqrt{\frac{8}{1 + \cos \alpha} + \frac{8}{1 - \cos \alpha}}, \text{ якщо } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
16. $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha};$
17. $\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha};$
18. $\frac{1 + \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg}^2 \gamma}{1 + \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg}^2 \gamma};$
19. $\frac{\operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg}^2 \gamma} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 \gamma - 1}{\operatorname{ctg} \gamma};$
20. $3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha).$

ЗАВДАННЯ 2

Спростити:

1. $\frac{\operatorname{ctg}^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \cos^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ctg}^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) - \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)};$
2. $\frac{\operatorname{ctg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \left(\sin \left(\alpha - \frac{3\pi}{2} \right) - \sin(\pi + \alpha) \right)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) (\cos(\alpha + 2\pi) + \sin(\alpha - 2\pi))};$
3. $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \cos(\pi + \alpha) + \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) + \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right);$
4. $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \cos(3\pi - \alpha) + \sin \left(\alpha + \frac{5\pi}{2} \right) \sin(3\pi + \alpha);$

5. $\frac{\sin(\pi-\beta)\cos(\pi+\beta)\operatorname{tg}(\pi-\beta)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)};$
6. $\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)\cos(2\pi-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)\right)^2+\frac{2\sin^2(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)};$
7. $\frac{\cos^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)-\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)};$
8. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right);$
9. $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)};$
10. $\frac{4\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{tg}^2\left(2\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)}-1;$
11. $\operatorname{ctg}^2(2\pi-\alpha)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{\cos\alpha};$
12. $\frac{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\pi-\alpha)}+\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\pi)\cos(\pi+\alpha)}{\sec\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)};$
13. $\cos^2(\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(\alpha-270^\circ)\sin^2(\alpha-90^\circ);$
14. $\left(\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4}+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2+\left(\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\right)^2;$
15. $\frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)};$

16. $\left(\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{4} + \operatorname{tg}(2\pi - \beta)\right)^2 + \left(\operatorname{tg} \frac{17\pi}{4} + \operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{2} - \beta\right)\right)^2$;
17. $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(3\pi - \alpha)} + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \sin(\pi - \alpha) + \cos(\pi + \alpha) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$;
18. $\frac{\sin^3\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) \cos(2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}^3\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cos^3\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}$;
19. $\left(\sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2 + (\cos(2\pi - \alpha))^2 + \left(\cos(2\pi - \alpha) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2$;
20. $\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2 - \left(\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2$

2.2. Формули додавання та їх наслідки

ЗАВДАННЯ 3

Спростити:

1. $\frac{\sin 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$;
2. $\frac{\sin(60^\circ + \alpha)}{4 \sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{4}\right) \sin\left(75^\circ - \frac{\alpha}{4}\right)}$;
3. $2\left(\sin^{-1} 4\alpha - \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2} + 4\alpha\right)\right) + \operatorname{tg}(5\pi + \alpha)$;
4. $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$;
5. $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$;
6. $(\cos 8\alpha \operatorname{tg} 4\alpha - \sin 8\alpha)(\cos 8\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha + \sin 8\alpha)$;
7. $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha}$;

8. $\frac{\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)};$
9. $\frac{\cos\left(4\alpha - \frac{9\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right) \left(1 - \cos\left(\frac{5\pi}{2} + 4\alpha\right)\right)};$
10. $\sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right);$
11. $\sqrt{(\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha)\cos 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
12. $\sqrt{(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)2\operatorname{ctg} 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 2$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$;
13. $\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}^2\alpha + 4\operatorname{ctg} 4\alpha;$
14. $\frac{\sin^2(\alpha - \pi) - 4\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) - 4 + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)};$
15. $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos 2\alpha}} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \cos 2\alpha}}$, де $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;
16. $2\cos 160^\circ \cos 140^\circ \cos 100^\circ;$
17. $\sqrt{0,5 - 0,5\sqrt{0,5 + 0,5\cos \alpha}}$, де $\pi < \alpha < 2\pi$;
18. $\left(\sqrt{\frac{1 + \cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}}\right) \operatorname{tg} 2\alpha + 2$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
19. $\left(\sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}}\right) \sin 2\alpha + 2$, якщо $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 8\pi$;
20. $\sqrt{\frac{2\sin \alpha + \sin 2\alpha}{2\sin \alpha - \sin 2\alpha}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 1$, якщо $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

ЗАВДАННЯ 4

Спростити:

1. $\frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}};$
2. $\frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha};$
3. $\frac{1 + \cos 8\alpha}{1 - \cos 8\alpha} \operatorname{tg}^2 4\alpha - \cos^2 4\alpha;$
4. $\frac{\sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \alpha + \cos \frac{\alpha}{2}};$
5. $\frac{2 \cos^2 2\alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha \right)};$
6. $\frac{2 \sin^2 3\alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + 3\alpha \right) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - 3\alpha \right)};$
7. $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8};$
8. $\sin^2 \left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha \right) - \cos^2 \left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha \right);$
9. $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + \cos 2\alpha}} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos 2\alpha}},$ якщо $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$
10. $\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \varphi;$
11. $\frac{\operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha) - 1}{\operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha) + 1};$
12. $\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) (1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha};$

13. $\frac{\sin(45^\circ - \alpha)\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos(45^\circ - \alpha)\cos(45^\circ + \alpha)};$
14. $\frac{\cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha + \sin 4\alpha};$
15. $1 - \sin 4\alpha + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right)\cos 4\alpha;$
16. $\sin^2\left(\frac{7\pi}{8} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{9\pi}{8} - 2\alpha\right);$
17. $\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg} 2\alpha} - \cos 8\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha;$
18. $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos(2\alpha - 2\pi)\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right)} + \cos^2 \alpha;$
19. $\operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(135^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$
20. $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right)(1 + \sin 2\alpha)}{\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 2\alpha\right)}.$

ЗАВДАННЯ 5

Спростити:

1. $4\sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha);$
2. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta);$
3. $\sin^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right);$
4. $\sin \alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right);$
5. $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha + 2\sin \alpha \cos 2\alpha};$

6.
$$\frac{\left(\sin(\pi - 3\alpha) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) + \cos(\pi + \alpha)\right)}{1 + \cos(\pi - 2\alpha)};$$
7.
$$\frac{\left(\cos(2\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 5\alpha\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + 5\alpha)\right)}{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 6\alpha\right)};$$
8. $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \cos 10^\circ;$
9. $\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ;$
10.
$$\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1};$$
11.
$$\frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha} - 2(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha) - 1;$$
12.
$$\frac{1 + \cos(2\alpha + 630^\circ) + \sin(2\alpha + 810^\circ)}{1 - \cos(2\alpha - 630^\circ) + \sin(2\alpha + 630^\circ)};$$
13.
$$\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{\sin 6\alpha}\right) \cdot \frac{\cos 7\alpha - \cos 5\alpha}{\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha};$$
14.
$$\frac{2\cos^2 \alpha - 1}{2\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha};$$
15.
$$\frac{1 + \cos(2\alpha - 2\pi) + \cos(4\alpha + 2\pi) - \cos(6\alpha - \pi)}{\cos(2\pi - 2\alpha) + 2\cos^2(2\alpha + \pi) - 1};$$
16.
$$\frac{1 - \cos 2\alpha - \cos 6\alpha + \cos 8\alpha}{\cos 4\alpha - \cos \alpha \cos 3\alpha};$$
17.
$$\frac{1 + \cos 2\alpha - \cos 4\alpha - \cos 6\alpha}{\cos 3\alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha};$$
18.
$$\frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - \cos 6\alpha - \sin 6\alpha}{\sin 4\alpha + 2\sin^2 2\alpha - 1};$$
19.
$$\cos \frac{\pi}{20} \cos \frac{3\pi}{20} \cos \frac{7\pi}{20} \cos \frac{9\pi}{20};$$
20.
$$\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha};$$

2.3. Завдання на застосування основних тригонометричних формул

ЗАВДАННЯ 6

Знайти:

1. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, якщо $\cos \alpha = -0,6$ й $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;
2. $\sin \alpha$, якщо $\alpha = 112^\circ 30'$;
3. $\frac{\cos 6\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{3}$;
4. $\sin(\alpha + \beta) - 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)$, якщо $\alpha = \frac{2\pi}{9}$, $\beta = \frac{\pi}{18}$;
5. $\cos \alpha$, якщо $\alpha = 112^\circ 30'$;
6. значення виразу при $\alpha = \frac{\pi}{8}$,
$$\frac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\sin(3\pi - \alpha) + \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)\cos(2\pi - \alpha)}{2\cos^2 \alpha \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$
;
7. $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\alpha = 112^\circ 30'$;
8. $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} 2\alpha = 4$;
9. $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{(1 - \operatorname{tg} \alpha)^2 (1 + \operatorname{tg} \alpha)^2}$ при $\alpha = 67^\circ 30'$;
10. $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\alpha = 112^\circ 30'$;
11. $16\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2}$, якщо $\cos \alpha = \frac{3}{4}$;
12. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin \alpha - \cos \alpha = 14$;
13. $\sin(\alpha + \beta) - 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)$, при $\alpha = \frac{2\pi}{9}$, $\beta = \frac{\pi}{18}$;
14. $\operatorname{ctg} 2x$, якщо $\frac{4\sin x - 3\cos x}{3\sin x + 2\cos x} = 3$;
15. $\operatorname{ctg} x$, якщо $\frac{2\cos^2 x - \sin 2x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = 2$;

16. $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$;
17. $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2}$;
18. $\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$;
19. $\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$;
20. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin \alpha - \cos \alpha = 1,4$.

ЗАВДАННЯ 7

1 – 17. Спростити:

1. $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ$;
2. $\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$;
3. $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \operatorname{ctg}^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$;
4. $\operatorname{ctg}(4\alpha - \pi) \left(\cos^4\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \sin^4\left(\frac{9\pi}{4} - 2\alpha\right) \right)$;
5. $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}$;
6. $\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta$;
7. $\frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$;
8. $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$;
9. $\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) + \sin(\pi + 4\alpha) + \sin(3\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + 6\alpha\right) + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos(\alpha + 2\pi)}$;

$$10. \cos 10^\circ \sin 80^\circ + \sin^2 280^\circ \cos^2 100^\circ + \sin^2 170^\circ \sin^2 350^\circ;$$

$$11. \frac{\sin^2(3\alpha + 6\pi)}{\operatorname{tg}^2(2\pi + 3\alpha) + \operatorname{tg}(5\pi + 3\alpha) \operatorname{ctg}(3\alpha + \pi)};$$

$$12. \left(\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \cos^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha;$$

$$13. \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) \sin^3(\pi - 2\alpha) - \cos(6\alpha - \pi) \sin^3\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right);$$

$$14. \frac{\cos 64^\circ \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cos 19^\circ};$$

$$15. \frac{\operatorname{tg} 615^\circ - \operatorname{tg} 555^\circ}{\operatorname{tg} 795^\circ + \operatorname{tg} 735^\circ};$$

$$16. \frac{\cos\left(2\alpha + \frac{\alpha}{4}\right) - \sin\left(2\alpha + \frac{\alpha}{4}\right) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{8}}{\cos\left(\frac{7\alpha}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{4} - 3\pi\right) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{8}};$$

$$17. \sin 20^\circ \cos 70^\circ + \sin^2 110^\circ \cos^2 250^\circ + \sin^2 290^\circ \cos 340^\circ;$$

18 – 20. Доведіть, що значення функції не залежить від аргументу

$$18. \operatorname{tg} \alpha + 4 \sin \alpha;$$

$$19. 1 - \sin 4\alpha + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right) \cos 4\alpha;$$

$$20. \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \cos^{-1} \alpha) \cdot (\cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)}{(\cos \alpha - \operatorname{ctg} \alpha) \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \cos^{-1} \alpha)}$$

ЗАВДАННЯ 8

Спростити:

$$1. \frac{1 - \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha};$$

$$2. \operatorname{tg}^6 20^\circ - 33 \operatorname{tg}^4 20^\circ + 27 \operatorname{tg}^2 20^\circ;$$

$$3. \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma;$$

4. $\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} - \operatorname{tg}^4 \alpha;$
5. $\sin^2 \frac{\pi}{7} \sin^2 \frac{2\pi}{7} \sin^2 \frac{3\pi}{7};$
6. $\frac{\cos 4 \alpha \operatorname{tg} 2 \alpha - \sin 4 \alpha}{\cos 4 \alpha \operatorname{ctg} 2 \alpha + \sin 4 \alpha};$
7. $\frac{\sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)}{2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta} - \operatorname{tg}^2 \beta;$
8. $\sqrt{\frac{1}{1 + \cos \alpha} + \frac{1}{1 - \cos \alpha}} \cdot \sin \alpha; \text{ якщо } 0 < \alpha < \pi;$
9. $\frac{3 - 4 \cos 2 \alpha + \cos 4 \alpha}{3 + 4 \cos 2 \alpha + \cos 4 \alpha};$
10. $\operatorname{tg}^2 36^\circ \operatorname{tg}^2 72^\circ;$
11. $\operatorname{ctg}(270^\circ - 2 \alpha) + \operatorname{ctg}(210^\circ - 2 \alpha) + \operatorname{ctg}(150^\circ - 2 \alpha);$
12. $\frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \gamma)} + \frac{\cos \beta}{\sin(\beta - \alpha) \sin(\beta - \gamma)} + \frac{\cos \gamma}{\sin(\gamma - \alpha) \sin(\gamma - \beta)};$
13. $\sin^2 \alpha \cos 6 \alpha + \cos^3 2 \alpha \sin 6 \alpha;$
14. $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ;$
15. $3 \sin \alpha \cos 3 \alpha + 9 \sin \alpha \cos \alpha - \sin 3 \alpha \cos 3 \alpha - 3 \sin 3 \alpha \cos \alpha;$
16. $\sin^3 \alpha \cos 3 \alpha + \cos^3 \alpha \sin 3 \alpha;$
17. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2};$
18. $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ;$
19. $\frac{\cos^3 \alpha - \cos 3 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3 \alpha}{\sin \alpha};$
20. $\sin^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right);$

2.4. Тотожні перетворення обернених тригонометричних виразів

ЗАВДАННЯ 9

Спростити:

1. $\sin\left(\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arccctg} \frac{1}{2}\right);$
2. $\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{4}{5} - 2 \operatorname{arctg}(-2)\right);$
3. $\cos(2 \operatorname{arccctg} 7);$
4. $\sin\left(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right);$
5. $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{8}{15} - \arcsin \frac{8}{17}\right);$
6. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right);$
7. $\frac{1}{2} \sin^2(\operatorname{arccctg} 3);$
8. $2\sqrt{13} \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3}\right);$
9. $8 \operatorname{ctg}\left(\arcsin \frac{4}{5}\right);$
10. $\sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{arccctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right);$
11. $\sin^2\left(\operatorname{arccctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right);$
12. $\operatorname{tg}\left(2 \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} - \arcsin \frac{12}{13}\right);$
13. $\operatorname{ctg}(0,5 \arccos 0,6 - 2 \operatorname{arccctg}(-0,5));$
14. $\operatorname{tg}(0,5 \arccos 0,6 - 3 \operatorname{arccctg}(-2));$
15. $\cos(0,5 \arcsin 0,8 - 2 \operatorname{arccctg} 0,5);$

16. $\cos(0,5\arcsin 0,6 - 2\operatorname{arctg}(-2))$;
17. $\sin^2\left(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;
18. $\sin^2\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;
19. $\sin\left(2\operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin \frac{15}{17}\right)$;
20. $\cos(2\operatorname{arctg} 2) - \sin(4\operatorname{arctg} 3)$.

ЗАВДАННЯ 10

1 – 10. Спростити:

1. $\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{33}{65}$;
2. $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$;
3. $\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$;
4. $\operatorname{arctg} \frac{1}{9} + \operatorname{arctg} \frac{4}{5}$;
5. $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65}$;
6. $\operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$;
7. $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{\sqrt{6} + 1}{2\sqrt{3}}$;
8. $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$;
9. $\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13}$;
10. $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}$.

11 – 20. Перевірити рівність

$$11. \arcsin \frac{4}{5} - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2};$$

$$12. \arcsin \frac{7}{25} + \frac{1}{2} \arccos \frac{7}{25} = \arccos \frac{3}{5};$$

$$13. \arccos \frac{36}{85} - \arccos \frac{15}{17} + \arcsin \frac{4}{5} = \frac{\pi}{2};$$

$$14. \arcsin 0,6 - \arcsin 0,8 = -\arcsin 0,28;$$

$$15. \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arctg} (2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{4};$$

$$16. \arccos \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{7} = \arccos \left(-\frac{11}{14} \right);$$

$$17. \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{15}{17} = \arccos \left(-\frac{36}{85} \right);$$

$$18. \arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arctg} \frac{2}{11};$$

$$19. \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{2}{9} = \frac{\pi}{4};$$

$$20. \arccos \frac{1}{3} + \arccos \frac{3}{4} = \arccos \frac{3 - 2\sqrt{14}}{1}.$$

2.5. Відповіді до завдань для самостійної роботи студентів

Завдання 1.

1. $\cos \alpha - \sin \alpha$ 2. $-\sin \beta - \cos \beta$ 3. $\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}$ 4. $\sin \frac{\beta}{4} + \cos \frac{\beta}{4}$
5. $\sin \frac{\alpha}{3} - \cos \frac{\alpha}{3}$ 6. $-\frac{1}{\sin \beta \cos \beta}$ 7. $2\operatorname{tg}^2 \alpha$ 8. $-2\operatorname{tg} \alpha$ 9. 1 10. $\sin \alpha + \cos \alpha$.
11. $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ 12. $\frac{3}{2}$ 13. $2\operatorname{tg}^2 \alpha$ 14. 1 15. $-\frac{4}{\sin \alpha}$ 16. $\operatorname{tg}^4 \alpha$ 17. $-\operatorname{ctg}^6 \alpha$ 18. $\operatorname{tg}^2 \gamma$
19. 1 20. 1.

Завдання 2.

1. 1 2. $\frac{1}{1 - \sin 2\alpha}$ 3. 0 4. 0 5. 0 6. 1 7. -1 8. $\operatorname{tg} \alpha$ 9. $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$
10. $-\cos^2 4\alpha$ 11. $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$ 12. $\cos^2 \alpha$ 13. $2\sin^2 \alpha$ 14. $\frac{2}{\sin^2 \alpha}$ 15. $\operatorname{tg}^2 \alpha$
16. $\frac{2}{\cos^2 \beta}$ 17. 0 18. $\cos \alpha$ 19. 4 20. 4.

Завдання 3.

1. $\operatorname{tg} \alpha$ 2. $\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$ або $\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$ 3. $\operatorname{ctg} \alpha$ 4. $\operatorname{tg} \alpha$ 5. 1 6. -1
7. $\sin 2\alpha$ 8. 1 9. $\operatorname{tg} 4\alpha$ 10. $-\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}$ 11. -2. 12. -- 13. $\operatorname{ctg} \alpha$ 14. 1 15. $\sqrt{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$
16. $-\frac{1}{4}$ 17. $\cos \frac{\alpha}{4}$ 8. 2 19. -- 20. --

Завдання 4.

1. $-\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$ 2. $\operatorname{ctg} \alpha$ 3. $\sin^2 4\alpha$ 4. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ 5. $-\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ 6. -1 7. $\frac{3}{2}$ 8. $-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4\alpha$
9. $\sqrt{2}$ 10. $\cos^2 \varphi$ 11. $\sin 2\alpha$ 12. $\operatorname{ctg} \alpha$ 13. 1 14. $-\operatorname{tg}^2 2\alpha$ 15. 0 16. $\frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}$
17. $\sin 8\alpha$ 18. $-\sin^2 \alpha$ 19. $2\operatorname{tg} \alpha$ 20. $\operatorname{ctg} 2\alpha$

Завдання 5.

1. $\sin 3\alpha$ 2. 1 3. $\frac{1}{4}$ 4. 0,5 5. $\operatorname{ctg} \alpha$ 6. $-\sin 4\alpha$ 7. $\sin 4\alpha$ 8. 0 9. 0 10. $2\cos \alpha$

11. 0 12. $\operatorname{ctg} \alpha$ 13. $4 \sin \alpha$ 14. $\frac{1}{\sin 2\alpha}$ 15. $2 \cos 2\alpha$ 16. $4 \cos 4\alpha$ 17. $4 \sin 3\alpha$
 18. $2 \sin 2\alpha$ 19. $\frac{1}{16}$ 20. $2 \sin \alpha$.

Завдання 6.

1. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 2. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ 3. $\frac{7}{3}$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ 6. 1 7. $-(1+\sqrt{2})$ 8. $\frac{1}{4}$ 9. $\frac{1}{4}$
 10. $1-\sqrt{2}$ 11. 5 12. 2 й 3 13. $\frac{1}{2}$ 14. $\frac{28}{45}$ 15. -1 16. 2 або $-\frac{1}{3}$ 17. $\frac{10}{21}$
 18. $\frac{1}{7}$ 19. $2\frac{1}{2}$ 20. 2 або 3.

Завдання 7.

1. $\cos 7^\circ$ 2. $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ 3. $\frac{1}{4} \sin^2 2\alpha$ 4. $\cos 4\alpha$ 5. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta$ 6. 1 7. $2 \operatorname{tg}^2 \alpha$
 8. $-\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ 9. $\operatorname{tg} \alpha$ 10. -- 11. $\frac{1}{4} \sin^2 6\alpha$ 12. $2 \sin \alpha$ 13. $\cos^3 4\alpha$ 14. -1 15. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 16. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}$ 17. -- 18. $\sqrt{3}$ 19. 0 20. 1.

Завдання 8.

1. $\operatorname{ctg} \alpha$ 2. 3 3. 1 4. $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$ 5. $\frac{7}{64}$ 6. $-\operatorname{tg}^2 2\alpha$ 7. $\operatorname{tg} \alpha$ 8. $\sqrt{2}$ 9. $\operatorname{tg}^4 \alpha$ 10. 5
 11. $3 \operatorname{tg} 6\alpha$ 12. 0 13. $\frac{3}{4} \sin 8\alpha$ 14. $\frac{1}{2}$ 15. $2 \sin^3 2\alpha$ 16. $\frac{3}{4} \sin 4\alpha$ 17. 1
 18. $8 \sin 40^\circ$ 19. 3 20. $\frac{1}{4}$.

Завдання 9.

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 3. $\frac{24}{25}$ 4. $\frac{4}{5}$ 5. 0 6. $\frac{7}{25}$ 7. $\frac{1}{20}$ 8. 6 9. $\frac{3}{2}$ 10. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 11. 0,98
 12. $-\frac{119}{120}$ 13. -2 14. $\frac{11}{2}$ 15. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 16. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 17. $\frac{1}{2}$ 18. $\frac{1}{2}$ 19. $\frac{7}{5}$ 20. 0,36.

Завдання 10.

1. $\frac{\pi}{2}$ 2. $\frac{\pi}{4}$ 3. $\frac{\pi}{4}$ 4. $\frac{3\pi}{4}$ 5. $\frac{\pi}{2}$ 6. $\frac{5\pi}{4}$ 7. $\frac{\pi}{6}$ 8. π 9. $\frac{\pi}{2}$ 10. $\frac{\pi}{4}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. К. Алгебра і початки аналізу. 10 клас : Пробний підручник. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2004. 456 с.
2. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти Київ : Видавничий дім «Освіта», 2018. 336 с.
3. Бескин Н.М. Задачник-практикум по тригонометрии. Москва : Просвещение, 1966. – 178 с.
4. Бурда М. І., Біляніна О. Я., Вашуленко О. П., Прокопенко Н. С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 11 клас. Київ : Центр навч.-метод. літ.-ри, 2012. 112 с.
5. Бурда М. І., Колесник Т. В., Мальований Ю. І., Тарасенкова Н. А. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Київ : УОВЦ «Оріон», 2018. 288 с.
6. Гельфанд И. М., Львовский С. М., Тоом А. Л. Тригонометрия. 10 класс. Москва : МЦНМО, 2002. 199 с.
7. Жалдак М. І., Грохольська А. В., Жильцов О. Б. Математика (тригонометрія, геометрія, елементи стохастики) з комп'ютерною підтримкою : навчальний посібник для вступ. до вищ. навч. закл. Київ : МАУП, 2004. 456 с.
8. Захарійченко Ю. О., Школьний О. В., Захарійченко Л. І., Школьна О. В. Повний курс математики в тестах. Харків : Вид-во «Ранок», 2015. 496 с.
9. Істер О.С., Єргіна О. В. Алгебра і початки аналізу : (профіль. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2018. 448 с.
10. Крамор В.С. Алгебра и начала анализа (система проведения занятий на подготовительных отделениях вузов): учеб. пособие для подготовительных отделений вузов. Москва : Высш. школа, 1981. 336 с.
11. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия : учеб. пособ. для студентов физ.-мат. спец. ин-тов. Москва : Просвещение, 1991. 352 с.
12. Литвиненко Г. М., Федченко Л. Я., Швець В. О. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Харків : ББН, 1999. 172 с.
13. Ляпин С. Е., Баранова И. В., Борчугова З. Г. Сборник задач по элементарной алгебре : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Москва : Просвещение, 1973. 351 с.
14. Математика: завдання та тести (частина 1). Посібник-довідник для вступників до вищих навчальних закладів. Київ : Генеза, 1993. 288 с.

15. Математика: збірник тестових завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання / уклад. А. Капіносів, Г. Гап'юк, О. Мартинюк, С. Мартинюк. Тернопіль : Підручники і посібники, 2017. 336 с.
16. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018. 400 с.
17. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Е. М., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу. 10 клас : збірник задач і контрольних робіт. Харків : Гімназія, 2016. 144 с.
18. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Збірник завдань державної підсумкової атестації з математики : 11 кл. / за ред. М. І. Бурди. Київ: Центр навч.-метод. літ-ри, 2014. 224 с.
19. Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 10 – 11 кл. : Учеб. для общеобразоват. учреждений. Москва : Мнемозина, 2001. 335 с.
20. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Вид-во «Ранок», 2018. 272 с.
21. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : Дворівневий підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Світ дитинства, 2007. 448 с.
22. Новоселов С.И. Специальный курс тригонометрии. Москва : Высшая школа, 1967. 536 с.
23. Практикум з розв'язування задач з математики / За ред. В. І. Михайловського. Київ : Вища школа, 1989. 423 с.
24. Потапов М. И. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции: Учеб. пособие / под ред. В. А. Садовниченко. Москва : Высш. шк., 2001. 735 с.
25. Сборник задач для поступающих во втузы : учеб. пособие / В. К. Егоров и др.; под ред. М. И. Сканава. Москва : «ОНИКС 21 век», «Мир и Образование», «Альянс-В», 2003. 608 с.
26. Тотожні перетворення алгебраїчних виразів : навчально-методичний посібник / укл. А. С. Кушнірук. Одеса : Принт-студія «Абрикос» СПД Бровкин, 2006. 64 с.
27. Тригонометрия : учебное пособие / Ю. Ю. Громов и др. Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. 104 с.
28. Шкіль Н. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу : Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Київ : Зодіак-Еко, 2006. 272 с.
29. Яремчук Ф. П., Рудченко П. А. Алгебра и элементарные функции. Справочник. Київ : Наукова думка, 1987. 648 с.

Підписано до друку 19.02.2020.
Обсяг 2,0 друк. арк. Формат 60х88/16 Зам. № 8124.
Наклад 50 прим.

Надруковано у ФОП Бондаренко М.О.
м. Одеса, вул. В. Арнаутська, 60.
т. +38 0482 35 79 76
info@aprel.od.ua

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців ДК № 4684 від 13.02.2014 р.