

numeris datis» treatise by German mathematician Nemorarius, «Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber» by Italian mathematician Giambattista Benedetti, in «Treatise of Algebra» by Scottish mathematician Colin Maclaurin. The variability of methods for solving the same problem was considered by Arab mathematician Alhazen, Indian mathematician Bhaskara II («Crown of treatises»), Italian mathematician Leonardo Pisano («Liber Abaci», section XI), Arab mathematician Beha-Eddin («Essence of Arithmetic»).

At the conclusion, the suggested approach enables the creation of the bank of linear equations solving methods, the using of a creative approach to solving mathematical problems. Besides, the approach allows utilizing the educational and developmental potential of a history of mathematics.

Learning of linear equations solving methods is included in Linear Algebra Curriculum for pedagogical specializations at universities (elimination of variables, Cramer's rule, matrix solution) and in Mathematics Curriculum for schools (addition, substitution, variable replacement, graphing method). Therefore, it is important to continue the research on the variability of methods for linear equations systems solving in historical tasks in mathematical education.

Keywords: *mathematical problems, solving methods, systems of linear equations, historical tasks, authoring methods, modern methods, a bank of methods, creative skills, the system of historical tasks.*

УДК 37.09

DOI 10.5281/zenodo.2108242

О. М. Яковлєва

ORCID ID 0000-0003-0750-9769

«Південноукраїнський національний педагогічний
університет імені К. Д. Ушинського», м. Одеса

А. В. Пенкова

Виноградівський НВК «ЗОШ I – III ст. – ДНЗ»

С. О. Копач

ORCID ID 0000-0002-1957-5651

Одеська гімназія № 9 Одеської міської ради Одеської області

АНАЛІЗ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВОЇ СКЛАДОВОЇ В ЗАВДАННЯХ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ ДЛЯ УЧНІВ

Математична олімпіада – це змагання, метою якого є виявлення найбільш талановитих і обдарованих учнів у галузі математики, підвищення їх мотивації до вивчення математики та розвитку дослідницьких навичок. Для вчителя це можливість удосконалити методи навчання, поглибити власний досвід роботи. У статті розглянуто місце і роль математичних олімпіад у загальній середній освіті України; вивчено особливості проведення етапів Всеукраїнської олімпіади з математики та International Mathematical Olympiad. Зроблено аналіз завдань III і IV етапів Всеукраїнської олімпіади з математики за період 2015-2017 рр. з метою визначення кількості теоретико-числових завдань, виявлено найбільш уживані теоретико-числові факти та методи, які використовуються для розв'язання цих завдань. На підставі проведеного аналізу робиться висновок, що теоретико-числові задачі є необхідною складовою кожного туру математичної олімпіади, тому при підготовці до математичних олімпіад теоретико-числова підготовка учнів 7-11 класів є обов'язковою.

Ключові слова: *математичні олімпіади, Всеукраїнська олімпіада з математики, теоретико-числові задачі, підготовка учнів до участі в олімпіаді.*

Постановка проблеми. Предметні олімпіади школярів – значущий і ефективний засіб формування мотивації учнів до навчання, розвитку їх творчих здібностей та умінь, підвищення пізнавальної активності учнів, поглиблення і розширення знань школяра на уроках. Всеукраїнські учнівські олімпіади з базових предметів – це різновид інтелектуальних змагань на освітньому просторі України, покликаний заохотити учнівську молодь до вивчення окремих предметів [6]. Наразі Всеукраїнські учнівські олімпіади проводяться з 17 навчальних предметів.

Математична олімпіада – змагання, метою якого є виявлення найбільш талановитих та обдарованих учнів у галузі математики, підвищення їх мотивації до вивчення математики та розвитку дослідницьких навичок. Задачі математичної олімпіади є завданнями підвищеної складності, які оригінальні як за формулюванням, так і способом розв’язування. Математичні олімпіади мають на меті низку завдань: вони підвищують рівень якості знань учнів; розширюють математичний кругозір; прищеплюють інтерес до математики; навчають культурі самоосвіти та саморозвитку школярів; удосконалюють уміння та навички самостійної роботи учнів зі спеціальною літературою; сприяють виявленню найбільш обдарованих учнів та розвитку їх творчих здібностей.

Аналіз актуальних досліджень. Одним із найактуальніших питань сьогодення є виявлення обдарованих учнів, робота з ними та розвиток їхніх творчих компетенцій, зокрема підготовка до участі в інтелектуальних змаганнях з базових дисциплін. Виклики, які в сучасних умовах постають перед вітчизняною освітою, знайшли своє відображення у 10 ключових компетентностях особистості для життя Нової української школи, одна з яких – математична компетентність, що додатково засвідчує про важливість питань, які розглядаються у статті.

Мета статті. Ми розглянемо місце і роль математичних олімпіад у загальній середній освіті України; опишемо особливості проведення етапів Всеукраїнської олімпіади з математики та International Mathematical Olympiad. Зробимо аналіз завдань III і IV етапів Всеукраїнської олімпіади з математики за період 2015-2017 рр. з метою визначення кількості теоретико-числових завдань, виявимо найбільш уживані теоретико-числові факти та методи, які використовуються для розв’язання цих завдань, зі змістом шкільних навчальних програм з математики для загальноосвітнього та поглибленого рівнів навчання.

Виклад основного матеріалу. Згідно з положенням, затвердженим наказом Міністерства освіти і науки України [4, 6], Всеукраїнські олімпіади з навчальних предметів відбуваються у чотири етапи: шкільні (I), районні (II), обласні (III) олімпіади та фінальний, власне Всеукраїнський, IV етап.

I етап Всеукраїнської олімпіади з математики проводять у жовтні. У ньому беруть участь учні 5-11 класів. Головне в питаннях шкільної олімпіади – це творчий характер завдань, що допомагають школярам виявити навички пізнавальної самостійності.

II етап проводиться серед учнів 6-11 класів в листопаді-грудні під керівництвом районних (міських) управлінь (відділів) освіти за сприяння управлінь освіти і науки обласних державних адміністрацій. До участі в II етапі допускаються лише ті учасники, що визначені як переможці I етапу в своєму навчальному закладі.

III етап проводиться серед учнів 7-11 класів у січні-лютому. До участі в III етапі допускаються ті учасники, що включені до заявки за результатами II етапу в своєму районі, місті, районі міста. Переможці III етапу нагороджуються дипломами I, II та III ступенів. Переможцями можуть бути учасники, які набрали не менше третини загальної кількості балів за усі тури, причому їх кількість не повинна перевищувати 50% [4, 6] від кількості учасників відповідного заключного етапу. Між переможцями дипломи I, II та III ступенів розподіляються орієнтовно у відношенні 1:2:3.

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики є заключним і проводиться для учнів 8-11 класів щороку наприкінці березня. Цей етап проводиться у два тури. Переможці IV етапу нагороджуються дипломами I, II та III ступенів. Переможцями можуть бути учасники, які набрали не менше третини загальної кількості балів за всі тури, причому їх кількість не повинна перевищувати 50% [4, 6] від кількості учасників заключного етапу.

Між переможцями дипломи I, II та III ступенів розподіляються орієнтовно у відношенні 1:2:3.

Міжнародна математична олімпіада (International Mathematical Olympiad) – математичне змагання учнів найбільш високого рівня як за складністю запропонованих задач, так і за рівнем підготовки учасників. Учасники олімпіади – це представники країни, які беруть участь в ІМО. Правила їх відбору в кожній країні свої [2, с.2]. В Україні – це переможці змагання, яке має відповідну назву «Відбір команди на ІМО». У ньому беруть участь переможці останньої Всеукраїнської олімпіади, які змагалися в паралелях 11-х класів. Учасників від однієї країни ІМО повинно бути не більше 6, всі вони не повинні бути студентами вищих навчальних закладів та в день проведення другого туру їм не повинно виповнитися повних 20 років. Список учасників повинен бути сформованим до 1 червня поточного року і не може бути після цього зміненим. Учасники отримують ніки, з якими далі вони фігурують в усіх офіційних протоколах протягом олімпіади. Так виглядають ніки учасників з України: UKR1, UKR2, UKR3, UKR4, UKR5, UKR6. Основними мовами олімпіад, на які перекладаються всі завдання, є англійська, іспанська, німецька, французька та російська.

Олімпіада проводиться у два тури. Тривалість I і II турів складає по 4,5 години, за які треба встигнути розв'язати по 3 задачі (завдань на обидва тури усього 6: це задачі з алгебри, геометрії, теорії чисел та комбінаторики). Кожна задача оцінюється від 0 до 7 балів. Призові місця розподіляють таким чином: не більше 1/6 всіх учасників має складати кількість золотих медалей; 1/3 від кількості всіх учасників – золоті та срібні медалі разом; 50% усіх учасників – усі призери разом.

З 13 по 23 липня 2017 року в Ріо-де Жанейро (Бразилія) проходила 58-ма Міжнародна математична олімпіада (ІМО).

У Олімпіаді брали участь 615 учасників із 111 країн. Золоту медаль отримали 48 учасників (число балів ≥ 25), срібну – 90 (число балів ≥ 19), бронзову – 153 (число балів ≥ 16), похвальну грамоту – 222 учасника. За результатами офіційного сайту ІМО перше місце в олімпіаді посіла Республіка Корея, яка набрала 170 балів і виборола 6 золотих медалей. Наша країна посіла 14 загальнокомандне місце, набравши 122 бали. Ось результати наших учасників з офіційного сайту ІМО (таблиця 1) [5]:

Таблиця 1.

Результати команди України

Учасник	31	32	33	34	35	36	Результат	Нагорода
Anton Trygub	7	7	0	7	7	1	29	Золота медаль
Nhok Tkhai Shon Nho	7	6	0	7	0	3	23	Срібна медаль
Oleh Rudenko	7	3	0	7	2	0	19	Срібна медаль
Roman Sarapin	7	3	0	7	1	0	18	Бронзова медаль
Heorhii Ivanchuk	7	4	0	7	0	0	18	Бронзова медаль
Ilyya Koval	7	7	0	1	0	0	15	Похвальна грамота

Теоретико-числова задача в шорт-листах знаходилась під номером 6. Правильно розв'язали цю задачу всього 14 учасників із 625. Найкраще із нею впоралась команда Китайської Народної Республіки – команда набрала 31 бал із 42 можливих. Результати команди України по цій задачі можна побачити у таблиці 1.

Виходячи з того, що задача з теорії чисел є обов'язковим компонентом завдань ІМО, ми проаналізуємо складову теоретико-числових задач у завданнях Всеукраїнської олімпіади з математики. Для аналізу ми обрали завдання III і IV етапів Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2015-2017 рр. для 7-11 класів. Аналіз виявив таке:

III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, 2017 рік:

Було проаналізовано 24 завдання, з них 6 є теоретико-числовими, що становить 25% від загальної кількості завдань.

III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, 2016 рік:

Було проаналізовано 24 завдання, з них 5 є теоретико-числовими, що становить 21% від загальної кількості завдань.

III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, 2015 рік:

Було проаналізовано 24 завдання, з яких 3 є теоретико-числовими, що становлять 13% від загальної кількості завдань.

IV етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2017 рік:

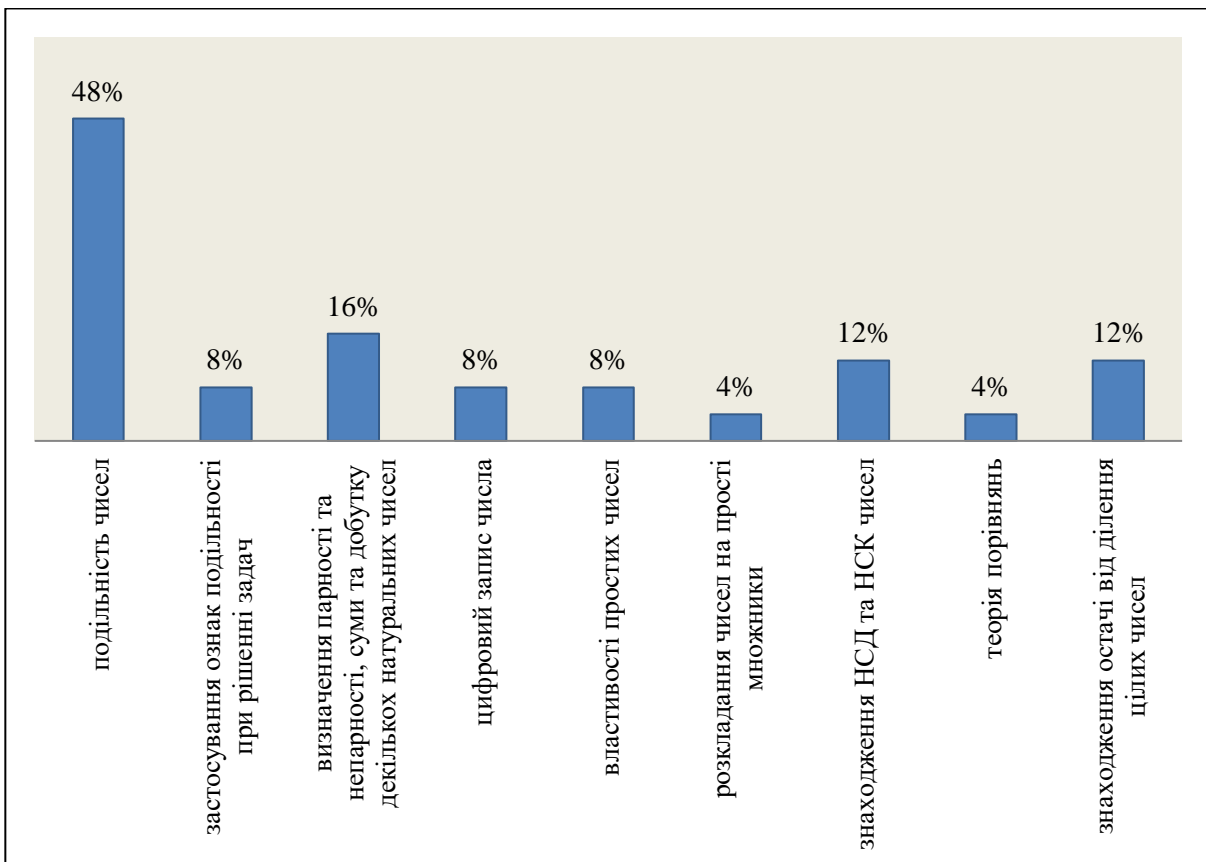
Було проаналізовано 32 завдання, з них 5 є теоретико-числовими. Їх відсоткове відношення до загальної кількості завдань становить 16%.

IV етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2016 рік:

Було проаналізовано 32 завдання, з них 4 є теоретико-числовими. Їх відсоткове відношення до загальної кількості завдань становить 13%.

Зроблений аналіз показав, що в кожному турі для 7-11 класів на III - IV етапах Всеукраїнської олімпіади обов'язково присутня хоча б одна теоретико-числова задача.

Далі ми проаналізували, які факти теорії чисел застосовуються при розв'язанні олімпіадних теоретико-числових завдань (результати аналізу відображено на діаграмі 1). Було проаналізовано рішення 25 теоретико-числових завдань III та IV етапів Всеукраїнської олімпіади з математики 2015-2017 років. Якщо знайти суму відсоткових відношень всіх теоретико-числових питань, то вона дорівнюватиме 120%, а не 100%. Це пов'язано з тим, що розв'язання однієї й тієї ж задачі може зводитися до декількох питань одночасно.



Діаграма 1. Найбільш уживані питання теорії чисел

Проаналізувавши навчальні програми з математики для учнів 5 – 9 класів загальноосвітнього та поглибленого рівнів навчання [1, 3, 7] та порівнявши елементи теорії чисел в цих програмах, ми отримали результати, наведені нижче в таблиці 2.

Таблиця 2.

Теоретико-числова складова в навчальних програмах з математики

5 кл.	6 кл.	7 кл.	8 кл.
Загальноосвітній рівень			
	<p>Тема 1. Подільність натуральних чисел (10 год., тема повністю присвячена теорії чисел). Дільники та кратні натурального числа. Ознаки подільності на 2, 3, 5, 9, 10. Прості та складені числа. Розкладання чисел на прості множники. Найбільший спільний дільник. Найменше спільне кратне.</p>		
Поглиблений рівень			
<p>Тема 1. Натуральні числа і дії з ними (58 год., з яких на теорію чисел відводиться приблизно 20 год). Ділення з остачею. Ознаки подільності на 2, 3, 5, 10. Дільники та кратні натурального числа. Прості і складені числа. Розкладання числа на множники. Розкладання числа на прості множники. НСД і НСК.</p>	<p>Тема 1. Подільність натуральних чисел (12 год., тема повністю присвячена теорії чисел). Дільники та кратні натурального числа. Ознаки подільності. Ознаки подільності на 4, 6, 9, 11, 25. Ознаки подільності на складені числа. Властивості подільності. Прості та складені числа. «Решето» Ератосфена. Розкладання чисел на прості множники. Найбільший спільний дільник. Найменше спільне кратне. Властивості НСД і НСК. Різні способи знаходження НСД і НСК. Алгоритм Евкліда. Взаємно прості числа.</p>	<p>Тема 3. Функції (25 год., з яких на теорію чисел відводиться приблизно 4-5 год.). Ціла і дробова частина числа. Функції $y=[x]$, $y=\{x\}$.</p>	<p>Тема 4. Основи теорії подільності (20 год., тема повністю присвячена теорії чисел). Подільність цілих чисел. Основні властивості подільності. Ділення з остачею. Конгруенції за модулем. Ознаки подільності на 3, 9, 11, 2^n, 5^n, $n \in \mathbb{N}$. Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне. Взаємно прості числа. Алгоритм Евкліда. Прості й складені числа. Основна теорема арифметики. Числа-близнюки. Доскональні числа. Прості числа Мерсенна і Ферма. Мала теорема Ферма.</p>

Як видно з таблиці 2, в загальноосвітньому рівні навчання математики елементи теорії чисел вивчаються лише в 6 класі в темі «Подільність натуральних чисел», на них відводиться 10 учбових годин. А ось у поглибленому рівні навчання математики елементи теорії чисел вивчають у 5, 6, 7 та у 8 класах, на них виділяється приблизно 56 учбових годин. Робимо висновок, що вчителю, який працює з учнями загальноосвітнього рівня

навчання математики, набагато складніше якісно підготувати їх до участі в олімпіаді, ніж вчителю, який працює з дітьми, що вивчають математику поглиблено.

Олімпіадні задачі з математики є специфічними, вони помітно відрізняються від стандартних задач шкільного курсу математики, спрямованих на відпрацювання виконання алгоритмів (наприклад, розкладення числа на прості множники, розв'язування квадратних рівнянь тощо). Пошук рішення олімпіадної задачі з математики вимагає від учня демонстрації креативного та критичного мислення, потребує математичної винахідливості, досконалого знання предмету та володіння не стандартними підходами до розв'язання завдань. Розв'язання теоретико-числових завдань завжди викликає певні труднощі в учнів, оскільки рішення теоретико-числових задач не є стандартними, вони не мають єдиного алгоритму розв'язання, а потребують власних оригінальних методів.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Підготовка учнів до участі в олімпіадах вимагає від учителя високої професійної майстерності та досконалого знання предмету, змушує постійно займатися саморозвитком і самоосвітою, великих витрат власного часу на систематичну роботу з обдарованими учнями. Підготовка учня до олімпіади передбачає оволодіння ним знаннями та методами, що виходять за межі шкільної програми та Державного стандарту; вміння працювати з додатковою та спеціальною літературою, засобами інформаційно-комунікаційних технологій; формування здатності до критичного та креативного мислення. Така підготовка повинна бути цілеспрямованою і систематичною.

На практиці, для підготовки учнів до олімпіад, вживаються такі заходи:

- диференційований підхід під час проведення основних занять з предмету (але годин математики не вистачає, окрім того, вчитель зобов'язаний працювати з великою кількістю учнів та виконувати Державний стандарт);

- у рамках позаурочної діяльності шляхом організації групових та індивідуальних консультацій (але цей додатковий робочий час вчителя не оплачується);

- використовуються години варіативної частини (але таких годин на кожному паралелі класів дуже мало, і на більшість з них є рекомендації відповідних органів щодо їх розподілу);

- можна використовувати години гурткової роботи (але в сучасних типових штатних розкладах це складає: 0,5 ставки – при 5-15 класах в закладі освіти; 1 ставка – при 16-30 класах в закладі освіти; 1,5 ставки – при кількості класів більше ніж 31, крім того, ці години передбачаються і для функціонування різноманітних творчих та спортивних секцій тощо).

Таким чином, вся цілеспрямована і систематична робота з підготовки учнів до участі в олімпіадах з базових дисциплін залишається лише на відповідальності та ентузіазмі вчителя. Але в усіх розвинених країнах світу будь-який вид діяльності робочого часу працівника оплачується і не виконується на альтруїстських засадах та ентузіазмі, тому в цьому питанні необхідна підтримка та інша політика держави й Міністерстві освіти і науки України. Якісну підготовку учнів до олімпіади можна впевнено віднести до сфери державних інтересів: це виховання майбутнього інтелекту нації, це внесок в розвиток науки, техніки та технологій, це престиж України під час проведення Міжнародних досліджень оцінки якості системи освіти, зокрема, участі в Міжнародних олімпіадах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бурда М. І., Кудренко Б. В., Біляніна О. Я. та ін. (2017). Математика 5-9 класи «Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів». Режим доступу: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/onovlennya-12-2017/5-programa-z-matematiki.docx> (Burda M. I., Kudrenko B. V., Bilyanina O. Ya. and others (2017). Mathematics for 5-9 classes "Educational program for general educational institutions". Retrieved from: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/onovlennya-12-2017/5-programa-z-matematiki.docx/>)

2. Международная математическая олимпиада: взгляд изнутри (2013). Математическое образование, 4, 24. (International Mathematical Olympiad: Inside Look (2013). Mathematical Education, 4, 24.)
3. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів (2016). Режим доступу: http://old.mon.gov.ua/ua/activity/education/56/692/educational_programs/1384763942/. (The curriculum for in-depth mathematics study in grades 8-9 of secondary schools (2016). Retrieved from: http://old.mon.gov.ua/ua/activity/education/56/692/educational_programs/1384763942/)
4. Наказ МОН «Про затвердження змін до положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності» (Order of the Ministry of Education and Science of Ukraine «On approval of changes to the provisions of the All-Ukrainian student Olympiads, tournaments, competitions on educational subjects, contests-defense of research works, competitions on special disciplines and professional skill competitions») (2011). Retrieved from: zakon.rada.gov.ua/go/z0568-12.
5. Офіційний сайт Міжнародної математичної олімпіади. Режим доступу: <https://www.imo-official.org>. (The International Mathematical Olympiad Official site. Retrieved from: <https://www.imo-official.org>).
6. Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності (Regulations on All-Ukrainian Student Olympiads, tournaments, contests on educational subjects, contests-defense of research works, competitions on special disciplines and professional skill competitions) (2011). Retrieved from: zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1318-11.
7. Яценко С. Є. (2014). Математика для 5-7 класів загальноосвітніх навчальних закладів математичного, економічного та інформаційно-технологічного профілю. Режим доступу: yakistosviti.com.ua/userfiles/file/doc_predmet/mat.docx. (Yatsenko S. E. (2014). Mathematics for 5-7 general educational institutions forms of mathematical, economic and informational-technological profile. Retrieved from: yakistosviti.com.ua/userfiles/file/doc_predmet/mat.docx).

Яковлева О. Н., Пенкова А. В., Копач С. А. Анализ теоретико-числовой линии в заданиях Всеукраинской математической олимпиады.

Математическая олимпиада – это соревнования, целью которого является выявление наиболее талантливых и одаренных учеников в области математики, повышение их мотивации к изучению математики и развитие исследовательских навыков. Для учителя это возможность оценить продуктивность методов обучения, собственного опыта работы. В статье рассмотрены место и роль математических олимпиад в общем среднем образовании Украины; изучены особенности проведения этапов Всеукраинской олимпиады по математике и International Mathematical Olympiad. Сделан анализ заданий III и IV этапов Всеукраинской олимпиады по математике за период 2015 – 2017 гг. с целью определения количества теоретико-числовых заданий, выявлены наиболее употребляемые теоретико-числовые факты и методы, которые используются для решения этих заданий.

На основании проведенного анализа подводим итог: теоретико-числовые задачи являются необходимой составляющей каждого тура математической олимпиады, поэтому при подготовке к математическим олимпиадам теоретико-числовая подготовка учеников 7-11 классов является обязательной.

Ключевые слова: математические олимпиады, Всеукраинская олимпиада по математике, теоретико-числовые задачи, подготовка учеников к участию в олимпиаде.

Iakovlieva O. N., Pienkova A. V., Kopach S. O. The Analysis of the Theoretical and Numerical Aspects in Tasks of All-Ukrainian Mathematical Olympiads.

A Mathematical Olympiad is a competition aimed at discovery of gifted students with a remarkable talent for mathematics, increasing their motivation for studying mathematics and developing their research skills. This event enables the teacher to improve their teaching methods and gain more working experience. The article deals with the importance of Mathematical Olympiads for the Ukrainian system of secondary education and highlights peculiarities of conducting all-Ukrainian and International Mathematical Olympiads in stages. The work analyses tasks of the 3rd and 4th stages of all-Ukrainian Mathematical Olympiads between 2015 and 2017 in order to identify the number of theoretical and numerical tasks as well as the most often used theoretical and numerical facts and methods to perform them. Based on this analysis, a conclusion is drawn that theoretical and numerical problems represent a necessary component of each stage of Olympiads, so training 7 to 11 Year students in theoretical and numerical problems is compulsory during students' preparation for Mathematical Olympiads.

Key words: *Mathematical Olympiads, all-Ukrainian Mathematical Olympiad, theoretical and numerical tasks, students' preparation for Olympiads.*