С. О. Скворцова

Методична система навчання розв'язування сюжетних задач учнів початкових класів

Одеса
«Астропринт»
2006

ББК 74.262
С 427
УДК 373.3:51

У монографії викладено теоретико-методичні основи навчання учнів розв'язування сюжетних задач. Визначається зміст понять "загальне уміння розв'язувати задачі", "окреме уміння розв'язувати задачі". Виділяється операційний склад загального уміння розв'язувати прості та складені задачі. На основі визначених концептуальних теоретичних основ конструюється модель методичної системи навчання учнів розв'язування сюжетних задач в курсі математики початкової школи, що спрямована на формування загального уміння розв'язування задач та окремих умінь розв'язування задач певних видів. Методична система реалізується у 1—4-х класах загальноосвітньої школи, нею передбачено навчання молодших школярів розв'язування задач усіх математичних структур, що містяться у чинних підручниках.

Для науковців, аспірантів, студентів, вчителів і методистів.

Рецензенти: **М. І. Бурда,** доктор педагогічних наук, професор, чл.-кор. АПН України;

З. І. Слєпкань, доктор педагогічних наук, професор;

О. Я. Чебикін, доктор психологічних наук, професор, академік АПН України.

Рекомендовано до друку вченою радою Південноукраїнського державного педагогічного університету ім. К. Д. Ушинського
Протокол № 7 від 23 лютого 2006 року.

С $\frac{4306010500—104}{318—2006}$ Без оголош.

ISBN 966-318-567-8

ПЕРЕДМОВА

На сучасному етапі розвитку системи освіти України, у зв'язку з поширенням ідей особистісноорієнтованого навчання, все частіше звертаються до теми навчання через задачі. Сюжетні задачі, як жоден інший навчальний матеріал, здатні здійснити таке навчання на практиці, оскільки легко дозволяють створювати проблемні ситуації на уроках.

У навчанні математики молодших школярів сюжетні задачі, з одного боку, є засобом формування математичних понять, системи математичних знань, навичок і умінь (*навчальні функції задач*); а з іншого — засобом формування та розвитку науково-теоретичного, зокрема функціонального, стилю мислення, оволодіння учнями прийомами розумової діяльності (аналізом, синтезом, порівнянням, конкретизацією, узагальненням, абстрагуванням), засобом розвитку вміння висловлювати судження, робити висновки (*розвивальні функції задач*). Розв'язування задач спрямоване на формування в учнів наукового світогляду; задачі сприяють зв'язку навчання із життям, ознайомленню учнів з пізнавально важливими фактами; внутрішня краса самої математики, оригінальність прийомів розв'язування задач збуджують у дітей естетичні почуття (*виховні функції задач*). Також задачі виконують ще й *контролюючу функцію*, яка спрямована на встановлення рівнів навченості і научуваності, здатності до самостійного вивчення математики, рівня математичного розвитку учнів і сформованості пізнавальних процесів.

Особливу увагу розв'язуванню задач як засобу формування системи математичних понять, добору задач у підручниках для середньої школи приділяли О. М. Астряб, Г. П. Бевз, О. С. Дубинчук, Ю. М. Колягін, З. І. Слєпкань, А. А. Столяр, І. Ф. Тесленко, Л. М. Фрідман та інші. Стосовно початкової школи ці проблеми досліджували М. О. Бантова, Г. В. Бельтюкова, М. В. Богданович, Б. Г. Друзь, Г. В. Гап'юк, Н. Б. Істоміна, Д. М. Клименченко, М. М. Левшин, М. Г. Моро, Я. А. Король, Л. П. Кочина, Г. П. Лишенко, А. С. Пчолко, А. М. Пишкало, Л. М. Скаткін, П. М. Ерднієв та інші. Розв'язування задач як засіб розвитку мислення школярів досліджувалося у дисертаційних роботах В. П. Радченко [438], І. Н. Семенової [470], С. Л. Валитової [101], К. А. Загородних [183]. Систему задач як засіб формування евристичної діяльності учнів основної школи розробляла І. А. Горчакова [133], а формування дослідницьких умінь школярів у процесі розв'язування математичних задач з параметрами вивчала А. Ю. Карлащук [234]. С. М. Лук'яновою обґрунтовано доцільність використання сюжетних задач для розвитку інтелектуальних здібностей учнів, формування їх творчої особистості [303].

Отже, вчені звертаються до математичних задач, в тому числі й сюжетних, як до ефективного засобу навчання і розвитку школярів. Але, останніми роками, все частіше висловлюється думка про те, що основною функцією сюжетних задач має бути функція формування уміння розв'язувати задачі; при цьому процес навчання розв'язування сюжетних задач повинен бути організований так, щоб він здійснював ефективний вплив на розвиток мислення учнів.

Проблема навчання розв'язування математичних задач, в тому числі й сюжетних, висвітлюється в роботах О. М. Астряба, М. О. Бантової, М. В. Богдановича, Г. П. Бевза, В. Г. Бевз, М. І. Бурди, М. І. Зайкіна, О. С. Дубинчук, Н. Б. Істоміної, Ю. М. Колягіна, В. І. Крупіча, Є. І. Лященко, В. І. Мішина, Є. П. Неліна, В. Н. Осинської, Д. Пойа, Г. І. Саранцева, З. І. Слєпкань, Н. А. Терешина, Л. М. Фрідмана, Т. М. Хмари, С. Є. Царьової, П. М. Ерднієва та інших. Автори вивчають зміст поняття «задача», досліджують структуру задачі, виділяють етапи її розв'язування, описують використовувані при цьому методи і прийоми, будують різноманітні класифікації задач.

Усі вчені, що розробляли проблему навчання молодших школярів розв'язування сюжетних задач, одностайні в тому, що кінцевою метою такого навчання повинно бути формування загального уміння розв'язувати задачі, але окрему увагу слід приділяти й формуванню умінь розв'язування задач певних видів. Л. М. Фрідманом [561] та С. Є. Царьовою [573] визначено загальні напрямки роботи з формування умінь розв'язувати задачі (і загального, і окремих умінь розв'язувати задачі певних видів), але детальні методичні розробки в методичній літературі відсутні. У дисертаційних роботах [54; 294; 338; 357; 462; 545] також, здебільшого, пропонуються методики навчання розв'язування задач, сформульовані у загальному вигляді, які або проілюстровані на задачах певного виду, чи на задачному матеріалі 1-го — 2-го класів, або їх елементи ілюструються, взагалі, на окремих задачах, що вивчаються у початковому курсі математики.

Отже, у роботах наших попередників відсутня цілісна методична система, яка б передбачала формування загального уміння та окремих умінь розв'язувати задачі певних видів протягом

всього навчання у початковій школі. Залишилось осторонь питання про опрацювання окремих дій, що складають ці уміння, на матеріалі простих, складених і типових задач. Між тим, різноманіття видів задач початкового курсу математики, з одного боку, вимагає застосування цілісної системи навчання молодших школярів розв'язування сюжетних задач; а з іншого — надає можливість опрацювати кожну з складових дій загального уміння, спочатку при розв'язуванні простих задач, а потім й при розв'язуванні складених задач; а далі зосередити увагу на формуванні окремих умінь розв'язувати задачі певних видів — на матеріалі задач на знаходження четвертого пропорційного; пропорційне ділення; знаходження невідомих за двома різницями; знаходження середнього арифметичного, на спільну роботу та на рух.

Методичну систему навчання молодших школярів розв'язування сюжетних задач ми розглядаємо як таку, яка спрямована на формування загального уміння та окремих умінь розв'язування задач з 1-го по 4-й клас, що має складну ієрархічну будову. Визначенню психолого-дидактичних та методичних основ розробки такої системи та розкриттю її сутності присвячується дана монографія.

Розділ 1

СЮЖЕТНІ МАТЕМАТИЧНІ ЗАДАЧІ В КОНТЕКСТІ ПСИХОЛОГО-ДИДАКТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ЗАДАЧ

1.1. ПОНЯТТЯ «ЗАДАЧА» В ПСИХОЛОГІЇ ТА ДИДАКТИЦІ

1.1.1. Зміст поняття «задача»

Поняття «задача» є багатогранним. Його застосовують у кібернетиці, інформатиці, психології, загальній педагогіці, дидактиці, у часткових методиках, в тому числі, й у методиці математики.

Задача — це мета, яку прагнуть досягти; це — доручення, завдання, це — запитання, що вимагає розв'язання на основі певних знань та міркувань. У філософії задачу розглядають як системний об'єкт, основною характеристикою якого є цілісність. Сутність системного підходу до розкриття поняття «задача» дозволяє розглядати це поняття як об'єкт, знаряддя і результат пізнання. Зупинимося докладно на понятті «задача» в психології і часткових дидактиках.

Для психолога «задача» до першої половини XX сторіччя — це поняття психології мислення: мислення людини, головним чином, полягає у постановці та розв'язуванні задач. Але з розвитком теорії діяльності, діяльнісного підходу задача, поряд з потребами, діями і операціями, стає основним поняттям загальнопсихологічної теорії діяльності. Виходячи з уявлення про діяльність людини, як процес розв'язування різного роду задач, Н. А. Побірченко зазначає, що у психологічному плані під задачею розуміють будь-яку ситуацію, що вимагає від людини певної дії, або мету, поставлену перед нею в деяких умовах, при чому поняття «задача» може розглядатися лише в системі з людиною, яка розв'язує її [420]. За таким поданням, те, що складає задачу для одного суб'єкта, не є такою для іншого, без суб'єкта задачі нібито не існує.

Отже, поняття задачі в психології характеризує спрямованість і мету діяльності людини, досягнення результату якої здійснюється певними засобами. Особливе поширення в 60-ті роки дане поняття дістало із становленням і розвитком концепції проблемного

навчання. Але в цей час здійснюються дослідження поняття задачі незалежно від діяльності суб'єкта, дослідження власне задач, що дозволило глибше проникнути у змістовну сутність задачі, визначити склад її будови і так далі.

Зміст поняття «задача» в психолого-дидактичній науці розкрито Г. О. Баллом, Л. Л. Гуровою, В. В. Давидовим, М. О. Даниловим, Ю. М. Колягіним, Є. І. Лященко, І. Я. Лернером, О. М. Матюшкиним, М. І. Махмутовим, Ю. І. Машбицем, В. А. Онищук, Н. А. Побірченко, Я. О. Пономарьовим, Л. М. Фрідманом, С. О. Шатуновським, А. Ф. Есауловим та іншими.

О. В. Брушлинський, О. М. Матюшкін, Л. М. Фрідман розглядають генезис задачі, як моделювання проблемної ситуації, в якій опиняється суб'єкт в процесі власної діяльності, а саму задачу — як знакову модель проблемної ситуації.

У деяких дослідженнях (Л. Л. Гурова) задача розглядається як об'єкт розумової діяльності. Задача — об'єкт мислительної діяльності, що містить вимогу деякого практичного перетворення або відповіді на теоретичне запитання за допомогою пошуку умов, що дозволяють розкрити зв'язки (відношення) між відомими і невідомими елементами [143].

Англійський вчений У. Рейтман зазначає, що для з'ясування поняття «задача» треба мати уявлення про її структуру. В окремих дидактиках оперують різноманітними означеннями задачі. Найбільш часто зустрічається означення задачі через структуру предмету, що вивчається. Математики визначають задачу через її структурні елементи (В. М. Брадіс, В. В. Реп'єв, А. А. Столяр, Л. М. Фрідман). Наприклад А. А. Столяр під задачею (у широкому значенні) розуміє вимогу відшукання області істинності [524]. Ю. М. Колягін під задачею розуміє систему «суб'єкт — задачна ситуація» [241]. В. В. Реп'єв вказує на необхідність функціональної залежності між її шуканими і даними величинами [444]. В. М. Брадіс визначає задачу через математичне запитання, не називаючи при цьому її ознак [91]. Л. М. Фрідман виділяє структурні елементи задачі: умову і вимогу, числові дані і шукане [554; 555; 561].

В методиці навчання хімії означення задачі йде шляхом розмежування понять «задача» і «вправа». Ю. В. Ходаков зазначає, що задача не являє собою просту суму вправ, при розв'язуванні задач перед учнем стоїть проблема визначення змісту і послідовності дій [567]. С. Є. Каменецький та В. П. Орєхов під фізичною задачею розуміють проблему, яка у загальному випадку розв'язується за допомогою логічних умовиводів, математичних дій і експерименту на основі законів і методів фізики [233].

Як бачимо, поняття «задача» є складним, багатогранним поняттям, яке має різноманітні означення в психології та в окремих методиках. Тому на рубежі 60—70-х років виникла необхідність створення загальної теорії задач — проблемології. Об'єктом проблемології є задачі і процеси їх розв'язання, а предметом — загальна теорія задач та механізми (способи) їх розв'язування людиною і системою людина — машина [559]. Спроби складання системних теорій задач були зроблені Г. О. Баллом, О. М. Довгялло та Л. М. Фрідманом. Вчені розглядають трактування поняття «задача», структуру задач, характеризують їх типи, аналізують процес розв'язування задач, з'ясовують можливості застосування теорії задач для побудови ефективного процесу навчання школярів розв'язування задач.

Спроби систематизувати існуючі підходи до трактування поняття «задача» було зроблено Г. О. Баллом [46; 48] та Л. М. Фрідманом [554; 555; 559]. У статті [46] Г. О. Балл вказує, що термін «задача» застосовується у психологічній літературі для позначення об'єктів, що відносяться до трьох різних категорій: 1) до категорії мети дії суб'єкта, вимоги, що поставлена перед суб'єктом; 2) до категорії ситуації, яка включає поряд з метою умови, в яких вона повинна бути досягнута; 3) до категорії словесного формулювання цієї ситуації. Найбільш поширеним у психологічній літературі є вживання терміна «задача» для об'єктів другої категорії.

У цій статті автор розглядає трактування поняття «задача» в межах другої категорії у трьох варіантах. По-перше (за О. Н. Леонтьєвим), як мети діяльності [288]; по-друге (за Г. С. Костюком), як ситуації, що вимагає від суб'єкта деякої дії, яка спрямована на знаходження невідомого на основі його зв'язків з відомим [255]; по-третє (за А. Ньюеллом), як ситуації, що вимагає від суб'єкта деякої дії, яка спрямована на знаходження невідомого на основі його зв'язків з відомим в умовах, коли суб'єкт не володіє способом цієї дії [381]. Такий багатоаспектний підхід до задачі надає можливість виділити три поняття «задача»: *задача, мислительна задача, проблемна задача*. Ці поняття є супідрядними, в них враховується мета діяльності, досвід суб'єкта і його володіння способом розв'язування задачі.

Отже, аналізуючи різні трактування поняття задачі, Г. О. Балл дає таку послідовність означень задачі у другому значенні цього слова:

1) задача є ситуація, що вимагає від суб'єкта деякої дії;
2) мислительна задача — ситуація, що вимагає від суб'єкта деякої дії, що спрямована на знаходження невідомого на основі використання його зв'язків з відомим;

3) проблемна задача, або проблема, ситуація, що вимагає від суб'єкта деякої дії, що спрямована на знаходження невідомого на основі використання його зв'язків з відомим, коли суб'єкт не має способу (алгоритму) цієї дії [46].

Пізніше Г. О. Балл [48] дає більш загальне трактування поняття задачі, як системи, обов'язковими компонентами якої є: а) предмет задачі, що знаходиться у вихідному стані (або вихідний предмет задачі); б) модель стану предмета задачі, що вимагається (ця модель ототожнюється з вимогою задачі). Зазначимо, що під предметом задачі автор розуміє будь-який предмет, для якого можуть бути вказані вихідний і той, що вимагається стан, які не співпадають один з одним. Графічно ця схема відтворена на рисунку 1.1.

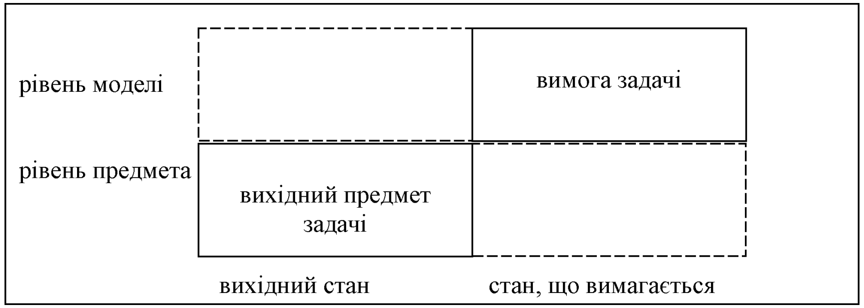


Рис. 1.1. Графічна модель задачної системи за Г. О. Баллом

Г. О. Балл звертає увагу на те, що в даному означенні вказані обов'язкові компоненти задачі (задачної системи), тому не виключається наявність інших компонентів.

Аналіз різних підходів до поняття «задача» здійснив також і Л. М. Фрідман. Він визначає родові поняття при логічному та психологічному аналізі поняття «задача»:

1) при логічному аналізі задачі родовим поняттям для неї є поняття запитання або вимоги;
2) при психологічному — вихідним поняттям є проблемна ситуація.

Крім того, Л. М. Фрідман виділяє ще дві спільні тенденції різних підходів:

— задача завжди пов'язана з мовою, на якій вона викладена, яка з точки зору навчання розв'язування задач являється дуже важливою;

— слід розрізняти задачі-проблеми, спосіб розв'язування яких невідомий людини, що їх розв'язує, і задачі, спосіб розв'язування яких відомий і тому не вимагає від учня великих розумових зусиль для здійснення розв'язання [554].

Аналогічних висновків дістав І. Б. Бекбоєв, вивчаючи наукові основи розробки і навчання розв'язування задач у системі безперервної математичної освіти [57].

В новій роботі «Основи проблемології» Л. М. Фрідман обґрунтовує положення, що генезис задачі, з одного боку, можна розглядати як моделювання проблемної ситуації, в якій опиняється суб'єкт в процесі власної діяльності, а саму задачу — як знакову модель проблемної ситуації, що подана за допомогою знаків природної та/або штучної мови; а з іншого — задачі можуть виникати і в процесі пізнавальної діяльності людини, тому задачею називається вимога визначити (довести наявність, встановити, знайти тощо) якісь характеристики деякого об'єкта, якщо відомі інші його характеристики [559].

Треба відмітити істотну відмінність між задачею як моделлю та власне проблемною ситуацією — центральним елементом проблемної ситуації є суб'єкт, і тому її не можна «передавати» нікому іншому — це ситуація даного суб'єкта і більш нікого, між тим, як задача — це знаковий об'єкт, який можна передавати іншим суб'єктам, можна її змінювати, переробляти, можна, навіть, придумувати. У випадку, коли суб'єкт отримує задачу ззовні, від іншого суб'єкту, в готовому, сформульованому вигляді, процес мислення починається з етапу «прийняття» суб'єктом задачі. Суб'єкт по мірі ознайомлення з задачею або приймає її, або відмовляється від її розв'язання.

Психологи здебільшого розглядають поняття задачі, пов'язуючи його з суб'єктом. Наприклад, Н. А. Побірченко виходить з неможливості розгляду задачі ізольовано від людини, яка її розв'язує. Автор вважає, що ізольована від людини задача — це лише задачна ситуація, створена її автором. І тільки тоді, коли її запропоновано людині, вона стає для цієї людини задачею (якщо раніше їй не було відоме розв'язання) [420]. Між тим, Г. О. Балл, У. Рейтман, Л. М. Фрідман наголошують на необхідності вивчення задачі ізольовано від людини.

Цю відмінність у підходах ми пояснюємо тим, що Н. А. Побірченко виходить з трактування поняття задачі з точки зору загальнопсихологічної теорії діяльності. Автор користується терміном «навчальна (учбова) задача», який є категорією теорії навчальної діяльності. Саме з постановки навчальної задачі починає

розгортатися навчальна діяльність. Навчальна задача, за означенням Д. Б. Ельконіна, — це система завдань, в результаті розв'язування якої відкриваються і засвоюються найбільш загальні способи розв'язання відносно широкого кола питань в даній науковій галузі [608]. Аналогічно, але більш детально визначають навчальну задачу В. В. Давидов та Ф. Г. Боданський, як таку ситуацію (систему ситуацій), котра вимагає від учнів відкриття і засвоєння загального способу розв'язування досить широкого класу проблем, як ситуацію пошуку виходу із реального протиріччя (конфлікту), яке виникло у зв'язку з недостатністю відомих понять і способів [151]. Якщо результат розв'язання задачі передбачається отримати (або він вже отриманий) як навчальний факт, що виражається у досягненні учнями конкретної навчальної мети (засвоєння поняття, способу діяльності й тощо), то, як вважає Є. І. Лященко, задача називається навчальною [311].

Між тим, навчальна задача і проблемна ситуація — це явища різного порядку. Проблемна ситуація — це ситуація, в якій опиняється діючий суб'єкт, який виявив недостатність засобів, які він має для досягнення мети. Виходи з цієї ситуації, зазначає В. В. Репкін, можуть бути різні: суб'єкт може відмовитися від розв'язування задачі, і в цьому випадку його діяльність припиняється. Або він, усвідомивши, що опинився у проблемній ситуації, вирішує подолати перешкоду і досягти поставленої мети, в результаті аналізу суб'єкт виділяє усі складові компоненти проблемної ситуації, зв'язки і відношення між ними, характер і особливості перешкоди, і результати цього аналізу він виражає певною мовою, отримуючи при цьому опис проблемної ситуації — її знакову модель — за Л. М. Фрідманом, задачу. За думкою В. В. Репкіна, в цьому випадку перед суб'єктом виникає допоміжна задача по відношенню до вихідної («Як це зробити?»); і нарешті він може спробувати з'ясувати, чому ті засоби, що він має, не придатні для розв'язування задачі («Чому не виходить?»), і лише в цьому випадку перед ним виникає принципово нова, власне навчальна задача, лише зовнішньо пов'язана з тією, під час розв'язання якої виникла проблемна ситуація [443]. Отже, навчальна задача може розглядатися лише в системі з людиною, яка розв'язує її (Н. А. Побірченко), а, власне, задача — це знаковий об'єкт, який можна передавати іншим суб'єктам (Л. М. Фрідман).

Таким чином, ми спробували з'ясувати відмінність між поняттями «задача» та «навчальна задача», виходячи з трактування поняття задачі як знакової моделі проблемної ситуації. Щоб відрізнити навчальні задачі від звичайних задач, в теорії навчальної діяльності останні називають конкретно-практичними задачами. Отже, істотною характеристикою навчальної задачі є оволодіння школярами змістовно (теоретично) узагальненим способом розв'язання деякого класу конкретно-практичних задач [145].

1.1.2. Структура задачі

Повернемося до вивчення генезису поняття задачі. Кожне з двох трактувань генезису задачі дозволяє Л. М. Фрідману дещо інакше розглянути ***структуру задач***. Структура — це відношення, розглядуване як усталене, в абстракції від зміни, ніби з виключеним часом. Відповідно, структурний підхід є дослідженням об'єкта перш за все з точки зору зв'язку, збереження, як усталеного результату [456]. Енциклопедичне тлумачення поняття «структура» полягає у певному взаємозв'язку, взаєморозташуванні складових частин, що характеризують будову, обладнання чого-небудь [42].

За визначенням А. М. Сохора «...під структурою задачі треба розуміти характер внутрішніх відношень (зв'язків, залежностей) між даними і шуканими величинами. Для визначення структури задачі треба розглянути не її умову як таку, а розв'язання, саме про структуру розв'язання повинна насамперед йти мова» [514, с. 132]. Схожої позиції дотримується В. І. Крупич, який досліджує зовнішню (що визначає проблемність задачі) та внутрішню (що визначає стратегію розв'язування задачі та її сутність) структуру задачі [262]. Але якщо говорити на рівні логіко-психологічного узагальнення уявлень про задачу, то існують і інші аспекти опису можливих структур задачі.

Л. М. Фрідман, виходячи з того, що задача — це знакова модель проблемної ситуації, визначив наступну структуру задачі.

Першою складовою частиною задачі є її предметна область. *Предметна область* — це множина фіксованих (названих, позначених) і явно не названих предметів (об'єктів), але передбачених, що розглядаються в задачі. Другою складовою задачі є *відношення*, якими задані об'єкти предметної області. Перші дві складові задачі утворюють її умову. Третьою — є *вимога або запитання задачі*. У вимозі вказується мета розв'язання задачі: що повинно бути знайдено або встановлено, що необхідно довести або пояснити. Вимога задач може бути сформульована у формі наказового або питального речення. Елементи предметної області і відношення між ними, що задані явно або неявно, можуть бути сталими або змінними (сталими є ті елементи і відношення, які цілком визначені умовами задачі; змінними є ті елементи і відношення, які можуть приймати будь-які значення з деякої області означення кожної змінної). Елементи предметної області і відношення між ними можуть бути, крім того, відомими (дані), якщо в умові задачі точно вказані їх значення, і невідомими. Невідомі елементи та відношення діляться на три види: **шукані** (які вимагається встановити, які явно вказані у вимозі або запитанні задачі); проміжні або допоміжні невідомі (які в процесі розв'язування можна і треба знайти, але вони не є шуканими); невизначені невідомі (це такі, значення котрих і не вимагається знайти, і неможливо знайти за умовою задачі, однак без них розв'язати задачу неможливо). Останньою складовою задачі є *оператор задачі*. Під оператором задачі розуміють сукупність тих дій і операцій, які треба виконати над умовами задачі і проміжними результатами, щоб виконати її вимогу. Оператор задачі, на відміну від інших складових частин задачі, звичайно не вказується в умові задачі, він задається непрямо вимогою та всім формулюванням задачі [84; 559].

Розуміння задачі, як вимоги визначити (довести наявність, встановити, знайти тощо) якісь характеристики деякого об'єкта, якщо відомі його інші характеристики, дозволяє дещо інакше розглянути її структуру. Виходячи з цього, складовими частинами задачі є *об'єкти, формулювання, твердження і вимоги*. Аналізуючи структуру задачі, Л. М. Фрідман дістав такі висновки:

1. В будь-якій задачі розглядається один або кілька об'єктів (предметів, явищ, процесів).
2. Формулювання задачі містить одну або кілька умов (тверджень, що приймаються за істинні) та одну або кілька вимог, які можуть бути сформульовані у вигляді запитання.
3. В умовах задачі наводяться (вказуються) характеристики і відношення між об'єктами.
4. Крім умов, що задані явно, часто при розв'язуванні задачі приходиться використовувати і умови, що задані неявно, які виявляються при глибокому аналізі задачі [559].

Під умовою задачі розуміється кожне твердження, що явно або неявно задано у формулюванні задачі. Вимога задачі полягає у необхідності знаходження невідомої (шуканої) характеристики одного або кількох об'єктів, що розглядаються в задачі. Аналіз задачі полягає у розчленуванні її на умови і вимоги, виділення в них об'єктів та їх характеристик або відношень між ними.

Вивчаючи будову умов і вимог задач, Л. М. Фрідман робить висновки:

1. В будь-якій задачі задається (явно або неявно) одна чи кілька умов у формі тверджень, які приймаються за істинні. Кожна умова містить один або кілька об'єктів.

Якщо умова містить один об'єкт, то в ній вказується якась його характеристика, значення якої може бути відомим (заданим) або невідомим.

Якщо ж в умові міститься два і більше об'єктів, то в умові вказується їх відношення, яким пов'язані ці об'єкти. Це відношення може бути відомим або невідомим.

2. Вимоги задач можуть бути таких основних видів:
— знайти невідому характеристику об'єкта або невідоме відношення між об'єктами;
— довести істинність заданого (сформульованого) в умові твердження;
— пояснити на основі деякої теорії вказане в умові явище;
— перетворити заданий об'єкт у інший вид;
— скласти деякий об'єкт із заданими властивостями.

Автор зазначає, що можуть бути й інші види вимог задач [559].

У нашому дослідженні ми визначаємо задачу через її структуру. Тому, погоджуючись з Л. М. Фрідманом, ***під задачею будемо розуміти об'єкт розумової діяльності, в якому у єдності подані його складові — умова (умови) і вимога (вимоги), і отримання пізнавального результату можливо засобом розкриття відношень між відомими і невідомими елементами задачі.***

1.1.3. Класифікація задач

Спроби класифікації задач були зроблені Л. Л. Гуровою [143], А. Ф. Есауловим [614], Н. Н. Тулькібаєвою [540] та іншими. Загальним недоліком цих класифікацій є те, що вони складені умоглядно, без аналізу параметрів, на основі яких можна зробити ту чи іншу класифікацію. Розглянемо можливі ***класифікації задач***, запропоновані Г. О. Баллом [48] та Л. М. Фрідманом [559].

Задачі, що моделюють одну й ту саму проблемну ситуацію або ситуації, що однакові за своїм змістом та структурою, можна поділити за рівнем узагальненості. Л. М. Фрідман вважає, що небагато задач є безпосередніми моделями певних, конкретних проблемних ситуацій, більшість задач є узагальненими моделями цілої групи проблемних ситуацій. Ці задачі — вже моделі групи задач і тим самим — задачі більш високого рівня узагальненості.

Схожу класифікацію задач ми знаходимо у Г. О. Балла, який розглядає ***індивідуальні задачі і родові***, кожній з яких відповідає деякий клас індивідуальних задач. Про родові задачі кажуть у двох випадках: 1) коли може бути запропонований алгоритм, який забезпечує розв'язування будь-якої задачі даного класу; 2) коли може бути визначений загальний принцип розв'язування усіх задач даного класу.

В залежності від мови задачі і мови тих засобів, якими вона може бути розв'язана, Л. М. Фрідман поділив усі задачі на ***справжні задачі та задачі-описи***. При цьому під справжніми задачами розуміються задачі, що викладені на мові, яка відповідає засобам її розв'язування. Такий розподіл задач показує основний шлях розв'язування проблемної ситуації: від проблемної ситуації до справжньої задачі, через ряд проміжних задач-описів.

У свою чергу Г. О. Балл поділяє задачі на типи, що визначаються характером предмета задачі, — ***матеріально спрямовані та інформаційні***. В матеріально спрямованих задачах предмет задачі матеріальний і до того ж не виступає у функції моделі. В інформаційних — предметом задачі є деяка модель системи, що моделюється.

Л. М. Фрідман, так само, як і Г. О. Балл, класифікує задачі в залежності від характеру предметної області:

1) ***предметні, елементами предметної області яких є якісь матеріальні предмети;***
2) ***наочно-графічні, елементами предметної області яких є наочно-графічні знаки (малюнки, креслення, схеми тощо);***
3) знаково-символічні, елементами предметної області яких є знаки або символи якоїсь мови.

Врахування відношень, що існують між предметом та вимогою задачі, дозволяє Г. О. Баллу підрозділити задачі на ***принципово невирішувані задачі та принципово вирішувані***. Задача є принципово невирішуваною, якщо у відповідності із закономірностями тієї галузі дійсності, якої вона стосується, її розв'язання неможливо, тобто або неможливий стан предмета, що вимагається, або він в принципі можливий, але неможливий перехід до нього з вихідного стану цього предмета. Родова задача може бути принципово вирішуваною при одних значеннях параметру або параметрів або принципово невирішуваною при інших значеннях. Тому серед індивідуальних задач, що входять до класу задач, що відповідає цій родовій задачі, є як принципово вирішувані, так і принципово невирішувані.

Щоб визначити, чи є задача принципово вирішуваною або невирішуваною, її передусім слід правильно сформулювати. Так, Л. М. Фрідман в залежності від виконання особливих вимог до логічної правильності постановки усі задачі поділив ***на правильні та неправильні***. Задача вважається логічно правильно поставленою, якщо вона задовольняє вимогам:

1. Усі вказані в задачі елементи предметної області повинні існувати.
2. Усі вказані в задачі відношення і предикати повинні бути дійсно визначені для тих елементів предметної області, для яких ці відношення задані в умові задачі.
3. Область значень кожної з заданих в задачі змінних повинна бути не порожньою.
4. Усі твердження, що задані в умові задачі, повинні бути істинними.
5. Для виконання вимоги в задачі повинні бути якісь достатні основи.
6. Задача повинна являти собою зв'язну систему умов і вимог.

Треба зазначити, що Г. О. Балл також розглядає поняття «задачне формулювання» та «псевдозадачне формулювання». Псевдозадачним формулюванням автор називає текст, який зовні нагадує формулювання задачі, але в дійсності не є нею, оскільки не описує ніякої задачної системи. Термінам Г. О. Балла «задачне формулювання» та «псевдозадачне формулювання» відповідають терміни Л. М. Фрідмана «правильно поставлена задача» та «неправильно поставлена задача».

У свою чергу ***неправильно поставлені задачі*** Л. М. Фрідман розділив на види в залежності від характеру неправильності, тобто від того, яка з вимог до логічної правильності порушена:

1) задачі, у яких задані елементи предметної області, що не існують або не визначені у відповідній науці;
2) задачі, у яких вказані предикати, не визначені на предметній області задачі;
3) задачі, в яких задані змінні (предметні або предикативні) з пустою областю змінення.
4) задачі, у яких є хибні твердження (вислови);
5) задачі, вимоги яких логічно і семантично не зв'язані з умовою задачі.

Елементи предметної області задачі і предикати можуть бути визначеними і нестрого визначеними. Л. М. Фрідман, посилаючись на М. Мінського, за ступенем визначеності задач та їх елементів класифікує задачі на ***строго визначені та нестрого визначені***. Автор називає строго визначеною задачу, якщо існує ефективний метод, за допомогою якого можна встановити, чи здійснима вимога задачі або ні відносно кожного з розв'язків, що передбачаються. Якщо ж такий ефективний метод невідомий або його не можна побудувати, то в цьому випадку вважається, що задача нестрого визначена або недостатньо визначена. Нестрого визначеними задачами є евристики, які спрямовують процес розв'язування будь-яких задач.

За ступенем повноти наявності у їх формулюванні усієї необхідної специфічної і теоретичної інформації, яка потрібна для розв'язання, що явно задана в її умові, Л. М. Фрідман класифікує задачі на ***повно поставлені*** (якщо в задачі задані усі необхідні умови і теорія, на основі котрої можна розв'язати ці задачі) ***та неповно поставлені задачі або згорнені задачі*** (для яких не дана теорія, на основі якої може бути розв'язана ця задача, і не завжди явно задані усі необхідні умови). Автор зазначає, що неповно поставлені задачі ще відрізняються і за ступенем неповноти наявності усіх необхідних умов (специфічної інформації).

Остання класифікація має певний зв'язок з класифікацією за повнотою умов П. Я. Гальперіна, який поділив усі завдання (задачі) на наступні групи:

1) з повним набором тільки необхідних умов;
2) з недостачею деяких з них;
3) з наявністю усіх необхідних і додачею надлишкових, зайвих умов;
4) з недостачею деяких необхідних умов, з одного боку, і з надлишком непотрібних «зайвих» — з іншого [115].

Класифікацію П. Я. Гальперіна уточнює Л. М. Фрідман, зазначаючи, що ця класифікація неповно поставлених (згорнених) задач, причому тут під «умовою» задачі розуміється завдання елемента предметної області або предиката. За такого розуміння «умови задачі», усі ***згорнені задачі*** автор поділяє на такі ***групи***:

1) задачі, що містять усі необхідні і не мають зайвих умов для розв'язання задачі;
2) задачі з недостатньою кількістю потрібних для розв'язання умов:
   а) задачі, що не містять непотрібних (зайвих) умов;
   б) задачі, що містять зайві умови;
3) задачі, що містять усі необхідні умови і крім того непотрібні (зайві) умови:
   а) задачі, у яких зайві умови не суперечать необхідним умовам;

б) задачі, в яких зайві умови суперечать необхідним умовам.

В залежності від характеру вимоги задачі Л. М. Фрідман поділяє задачі на класи:

1) задачі на знаходження шуканого, при цьому шуканим може бути значення (характеристика) об'єкту предметної області задачі, а може бути — шукане відношення між об'єктами;
2) задачі на перетворення заданого об'єкту;
3) задачі на побудову деякого об'єкту;
4) задачі на доведення;
5) задачі на пояснення деякого твердження, явища, процесу.

Автор зазначає, що можливі задачі із іншими вимогами.

Ми розглянули класифікації невіднесених задач (термін Г. О. Балла), задач, що розглядаються у абстрагуванні від вирішувача. Але задачі можуть досліджуватися з урахуванням характеристик вирішувачів. Якщо задача розглядається стосовно до деякого вирішувача, то Г. О. Балл говорить про віднесену задачу. Треба зазначити, що усі типи, що виділені для не віднесених задач, зберігають силу і для віднесених, але типи віднесених задач можуть виділятися і за іншими ознаками.

Розглянемо класифікацію віднесених задач за Г. О. Баллом [48]. Якщо вирішувач володіє алгоритмом (квазіалгоритмом — який складається із ефективних або квазіефективних операцій, і може містити неоднозначно детерміновані розгалуження) розв'язання родової віднесеної задачі, то таку задачу називають ***рутинною (квазірутинною)***; інші родові задачі називають ***нерутинними***. Індивідуальна віднесена задача вважається рутинною, якщо вона: 1) віднесена до класу задач, що відповідають рутинній (квазірутинній) родовій задачі; 2) пряма інформація про це є у вирішувача або операція співвіднесення індивідуальної задачі до даного класу є для цього вирішувача ефективною (квазіефективною).

Родові та індивідуальні віднесені задачі поділяються на:

— ***чіткі***, якщо інформація про те, чи розв'язна ця задача, є у розпорядженні вирішувача або якщо задача встановлення того, чи розв'язна дана задача, є для цього вирішувача рутинною;

— ***квазічіткі***, якщо пряма інформація про те, чи розв'язна ця задача, з вірогідністю, досить близькою до одиниці, знаходиться у вирішувача, або якщо задача встановлення того, чи розв'язна дана задача, є для цього вирішувача квазірутинною;

— ***нечіткі***, якщо задача не є іна чіткою ані квазічіткою.

Істотними характеристиками віднесених задач є відношення, які існують між основними компонентами задачі (її предметом і вимогою), з одного боку, і вирішувачем, з іншого. Виходячи з цього, Г. О. Балл класифікує задачі на ***зовнішні та внутрішні***. Задачу, предмет і вимога якої знаходиться поза вирішувачем, називають зовнішньою. Внутрішня — це така задача, предметом якої є деяка модель, що є у вирішувача. Автор зазначає, що зовнішні і внутрішні задачі у сукупності не вичерпують множини віднесених (до даного вирішувача) задач.

В залежності від відношень між вирішувачем, предметом задачі і зовнішнім середовищем Г. О. Балл поділяє задачі на ***теоретичні і практичні***.

Теоретичною називається віднесена задача, для якої виконуються наступні умови:

1) зміна предмета задачі можлива лише в результаті впливу з боку вирішувача;
2) зовнішнє середовище може впливати на предмет задачі лише через вплив вирішувача.

Віднесену задачу, для якої не виконується хоч би одна з умов, називають практичною. Практичні задачі, для яких виконується перша вимога, називаються статичними, а ті, для яких не виконується, — динамічними.

Треба зазначити, що Л. Л. Гурова виділяє практичні і пізнавальні задачі [143].

Серед інформаційних віднесених задач Г. О. Балл виділяє ***пізнавальні задачі*** — задачі вдосконалення знання, яким володіє вирішувач. Так само, як і Л. Л. Гурова, Г. О. Балл в залежності від характеру пізнавальної мети поділяє пізнавальні задачі на *мислительні, перцептивні, імажинативні та мнемічні*. Отже, якщо за Л. Л. Гуровою задача може бути або практичною, або пізнавальною, то за означенням практичної задачі Г. О. Балла пізнавальна задача може бути, в свою чергу, й практичною.

За Г. О. Баллом, пізнавальні задачі можуть бути *закритими і відкритими*. Якщо для того, щоб розв'язати задачу, достатньо вибрати (для кожного із запитань, якщо їх більше одного) відповідь, яка підходить, з набору варіантів, які має у розпорядженні вирішувач, то така задача називається закритою. Усі інші задачі називають відкритими.

Г. О. Балл розглядає клас пізнавальних задач, в яких можна виділити три компоненти, що моделюють відповідно початковий стан (ПС), кінцевий стан (КС) та процедуру (Пр), яка переводить деякий предмет за ПС у КС. Таких трьохкомпонентних пізнавальних задач автор виділив шість видів (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1

Шість видів трьохкомпонентних пізнавальних задач за Г. О. Баллом

№ п\п	Вид задачі	ПС	Пр	КС
1.	Задача виконання	+	+	-
2.	Задача перетворення	+	-	+
3.	Задача відновлення	-	+	+
4.	Задача побудови	-	-	+
5.	Задача використання процедури	-	+	-
6.	Задача використання наявного стану	+	-	-

Ю. М. Колягін показав, що для шкільних математичних задач корисно ввести поряд з трьома компонентами ще й четвертий, який він назвав «базисом розв'язання задачі», який являє теоретичну або практичну основу для перетворення ПС предмету, що змінюється, у КС засобом визначеної процедури. Ю. М. Колягін склав класифікацію чотирьохкомпонентних задач і на ряді прикладів показав, що вона надає можливість, змінивши формулювання будь-якої традиційної шкільної задачі, отримати задачу нового виду [239].

З пізнавальними задачами багато в чому схожі ***комунікативні* задачі**. Щоб розв'язати комунікативну задачу, що спрямована на збагачення знань одного суб'єкта, інший суб'єкт повинен організувати розв'язання цим суб'єктом відповідної пізнавальної задачі (або забезпечити таке розв'язання).

Таким чином, ми розглянули зміст поняття «задача», його структуру і класифікації задач у проблемології. У наступному параграфі проаналізуємо поняття «сюжетна задача» з точки зору теорії задач.

1.2. ПОНЯТТЯ «СЮЖЕТНА МАТЕМАТИЧНА ЗАДАЧА»

1.2.1. Математичні задачі

До мислительних задач (в одних випадках — квазірутинних, в інших — не рутинних) належать в психологічному плані математичні задачі.

Є. І. Лященко класифікує задачі залежно від того результату, на досягнення якого спрямовано розв'язання задачі. Якщо цей результат отриманий (або його передбачається отримати) у вигляді математичного факту (числа, виразу, фігури тощо), то задача називається математичною [311].

Поняття «математична задача» розглядалося в працях Г. П. Бевза, Є. С. Березанської, М. В. Богдановича, М. І. Зайкіна, Ю. М. Колягіна, В. І. Крупича, Є. І. Лященко, В. І. Мишина, Д. Пойя, Г. І. Саранцева, З. І. Слєпкань, Н. А. Терьошина, Л. М. Фрідмана, П. М. Ерднієва та інших. Автори досліджують структуру задачі, виділяють етапи її розв'язування, описують методи та прийоми, що при цьому застосовуються, складають різноманітні класифікації математичних задач.

Існують різні трактування поняття «*математична задача*». Так, А. А. Столяр під математичною задачею розуміє задачу, що сформульована в математичних термінах [524]. Г. П. Бевз, М. В. Богданович, М. В. Козак, Я. А. Король, З. І. Слєпкань під *математичною задачею* розуміють будь-яку вимогу обчислити, перетворити, побудувати, довести або дослідити що-небудь, що стосується кількісних відношень і просторових форм, створених людським розумом на основі знань про навколишній світ [56; 80; 506]. Але, незалежно від трактування поняття «задача», усі автори єдині в описі таких її компонентів, як умова, запитання (вимога), відомі та шукані величини, суб'єкт, що розв'язує задачу.

Розглядаючи теорію задач, ми вже піднімали питання про співвіднесення понять «задача» та «навчальна задача». В літературі і практиці навчання математичну задачу нерідко називають навчальною задачею на тій підставі, що вона застосовується у навчальному процесі. А. К. Артьомов [31] вважає це неправомірним: математична задача відображує зміст навчання, навчальна задача — процес оволодіння цим змістом, результатом якого виступає оволодіння учнями узагальненим поняттям, способом діяльності, використання якого дозволить їм розв'язувати усі (або, принаймні, багато) математичні задачі з даної сукупності (користуючись терміном Г. О. Балла, можна казати про родові задачі).

Розв'язування математичної задачі закінчується отриманням відповіді, яку немає необхідності запам'ятовувати скільки завгодно довго. Результат розв'язування навчальної задачі, навпаки, засвоюється на довгий час: багаторазово використовується в процесі навчання.

1.2.2. Сюжетні математичні задачі

Серед численних математичних задач виділяють задачі, які називають по-різному: арифметичні, текстові, сюжетні.

А. А. Свєчніков визначає поняття «*арифметична задача*», як зв'язану лаконічну розповідь, в яку введені значення деяких величин та пропонується знайти інші невідомі значення величин, залежні від даних та зв'язані з ними певними співвідношеннями, вказаними в умові. Як спеціальний текст, в якому описана якась життєва ситуація, що характеризується числовими компонентами, розуміє задачу А. В. Белошиста. Причому ситуація обов'язково містить певну залежність між цими числовими компонентами. Таким чином, текст задачі можна розглядати, як словесну модель реальної дійсності [58].

Більш лаконічне визначення поняття «арифметична задача» подають такі методисти, як М. В. Богданович [80], М. І. Моро, А. М. Пишкало [363]: під *арифметичною задачею* розуміють вимогу або запитання щодо знаходження невідомої величини за числовими даними та залежності між ними.

Але подібні задачі пропонуються не лише в арифметиці, але й і у курсі алгебри. В методичній літературі зустрічається ще й такий термін: «*текстова задача*». Так, В. А. Мізюк у дисертаційному дослідженні [357] до текстових задач відносить задачі, в яких описується кількісна або якісна сторона реальних процесів, явищ та ситуацій та міститься вимога знайти шукану величину, що знаходиться у зв'язку із даними в задачі величинами. Існує означення текстових задач на основі їх відмінності від прикладів: якщо в умові задачі не вказуються дії, які необхідно виконати над даними числами для знаходження шуканого, то їх називають текстовими [56]. С. М. Лук'янова у дисертаційному дослідженні також користується терміном «текстова задача», якою вважає сформульовану природною мовою вимогу знайти невідоме число чи значення деякої величини на основі заданих співвідношень між даними числами чи значеннями величин. Між тим, авторка говорить і про сюжетні задачі, як такі, в тексті яких описано кількісну сторону деякого явища чи процесу, і цей опис суттєво

впливає на пошук плану розв'язування (задачі на рух, виконання роботи, купівлю тощо) [303]. Між тим, і будь-які текстові задачі описують деякий життєвий сюжет!

Л. М. Фрідман визначає спільну особливість текстових, арифметичних задач — наявність в їх умові певного сюжету. Тому він називає такі задачі *сюжетними* [555]. Автор під сюжетними розуміє задачі, в яких описаний певний життєвий сюжет (явище, подія, процес), з метою знаходження певних кількісних характеристик або значень. Також у цього автора ми зустрічаємо трактування сюжетних задач, як вимогу знайти (встановити, визначити) які-небудь характеристики деякого об'єкта за відомими іншими його характеристиками [561]. Г. П. Лишенко користується терміном «сюжетна арифметична задача» і трактує його як математичну задачу, що сформульована природною мовою і яка містить вимогу знайти значення деякої величини за іншими значеннями величин та за вказаними залежностями (відношеннями) між ними [294].

Задачу, як деяку модель явища або процесу, відображеного з точки зору кількісної його характеристики, що виражається через систему компонентів, функціональна залежність між якими має бути розкрита під час розв'язування, розглядають Т. Й. Мельничук та Т. М. Хмара [337].

Порівнявши трактування «арифметична задача» та «текстова задача», «сюжетна задача», ми впевнилися в тому, що вони розкривають одне й те саме поняття, але для його означення застосовані різні терміни. Усі ці задачі характеризуються наступними рисами: 1) задачі сформульовані на природній мові (тому їх називають текстовими); 2) в них звичайно описується кількісний бік якихось явищ, подій (тому вони називаються сюжетними); 3) вони являють собою задачі на визначення шуканого значення деякої величини (тому їх інколи називають арифметичними, обчислювальними).

В нашому дослідженні ми будемо користуватися терміном «***сюжетна задача***».

Під сюжетною задачею ми будемо розуміти математичну задачу, в якій описаний деякий життєвий сюжет, а саме кількісний бік реальних процесів, явищ та ситуацій, і міститься вимога знайти шукану величину за даними в задачі величинами та зв'язками між ними.

Розглянемо сюжетну задачу з точки зору загальної теорії задач. За класифікацією Г. О. Балла, сюжетна задача — це інформаційна, теоретична, пізнавальна, мисленнєва задача, яка може бути квазірутинною або нерутинною, чіткою або квазічіткою. Така задача може бути індивідуальною або родовою, якщо замість числових даних вона містить літери-параметри; повинна бути принципово вирішуваною; спочатку вона подається як зовнішня задача і після прийняття її вирішувачем стає для нього внутрішньою.

З точки зору класифікації Л. М. Фрідмана сюжетна задача — це задача-опис, знаково-символічна, повинна бути правильною, строго визначеною. Такі задачі є неповно поставленими задачами на знаходження шуканого.

Співвіднесення характеристик сюжетної задачі за Г. О. Баллом та Л. М. Фрідманом подано на рисунку 1.2.

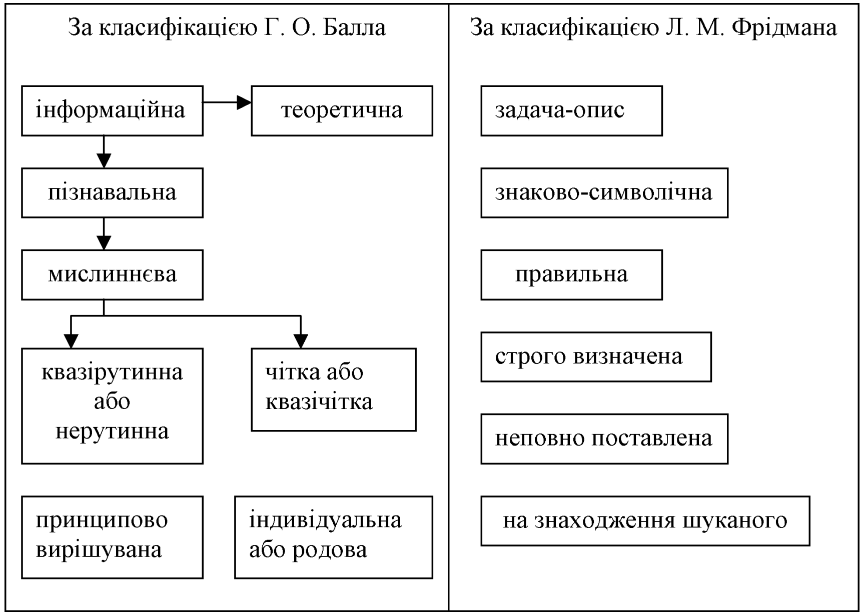


Рис. 1.2. Характеристика сюжетної задачі, виходячи з класифікацій задач Г. О. Балла та Л. М. Фрідмана

Специфіку сюжетних задач розглядали Г. О. Балл та Т. К. Чмут. На думку вчених, така задача з одного боку є моделлю життєвої ситуації, де вимагається знайти невідоме значення кількісної характеристики (або характеристик) того чи іншого об'єкта (або об'єктів) і при цьому можна використати зв'язок

між шуканою характеристикою (характеристиками) та відомими характеристиками. З іншого боку, така задача безпосередньо не містить у собі засобів знаходження шуканого (або шуканих), і тому вимагається подальше моделювання, що забезпечує перехід до числового виразу або рівняння [49]. Застосовуючи систему понять Л. М. Фрідмана, тут треба говорити про перехід від «задачі-описа» до «справжньої задачі».

Отже, роблять висновок Г. О. Балл та Т. К. Чмут, сюжетні математичні задачі є зв'язуючою ланкою між різноманітними сюжетами реального світу і строгими формами математичних виразів і операцій. Автори зауважують, що слід врахувати, що вказаний «вертикальний» зв'язок сюжетних математичних задач з «життєвими ситуаціями» та «власно математичними задачами» може доповнитися «горизонтальним» зв'язком із іншими сюжетними математичними задачами, що пояснюється можливістю отримання з однієї задачі інших задач засобом перетворення або поєднання кількох задач у одну (рис. 1.3).

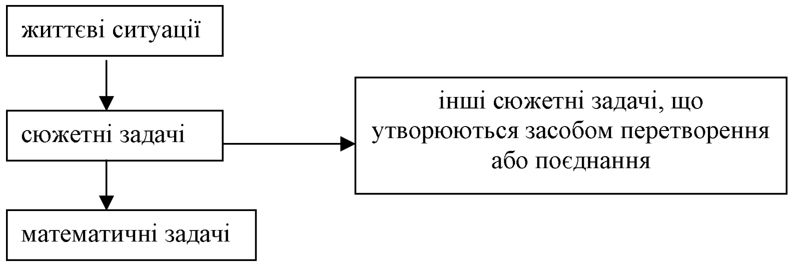


Рис. 1.3. Специфіка сюжетної математичної задачі за Г. О. Баллом та Т. К. Чмут

Але автори наголошують на відсутності взаємно однозначної відповідності між елементами множини задач, що відповідають різним «горизонтальним» рівням, обґрунтовуючи це положення тим, що кожній власне математичній задачі можна поставити у відповідність скільки завгодно сюжетних задач, і навпаки, одній й тій самій сюжетній задачі — скільки завгодно власне математичних задач. Вчені звертають увагу, що віднесення усіх сюжетних задач до одного й того самого «горизонтального рівня» є явним спрощенням. У дійсності ці задачі можуть знаходитися на різних «відстанях» від «площин», що відповідають життєвим задачам і власне математичним задачам [49].

Треба зазначити, що сюжетні задачі у проблемології (за Л. М. Фрідманом) належать до тернарних задач, тобто таких задач, які являють собою взаємопов'язані системи співвідношень, в кожне з яких входять три елементи. Клас тернарних задач включає також фізичні, хімічні, лінгвістичні та інші задачі. Л. М. Фрідман розглядає наступні характерні особливості тернарних задач:

1) вони являють собою набір елементів деякої предметної області (наприклад, значень якихось величин, або характеристик якихось об'єктів тощо), серед яких є хоч би один відомий і один невідомий елементи. При цьому поняття «відомий» і «невідомий» елементи визначаються змістовно в кожному окремому випадку;
2) усі відомі і невідомі елементи пов'язані між собою тернарними (тричленними, триелементними) співвідношеннями;
3) тернарні співвідношення задачі утворюють зв'язану систему умов і вимог.

Л. М. Фрідман наводить перелік вимог до тернарних задач:

1. Будь-яка тернарна задача повинна складатися з однієї вимоги і не менш, ніж однієї умови. Якщо в задачі вказується кілька вимог, то таку задачу завжди можна розбити на відповідне число задач, які містять лише одну вимогу.
2. Якщо в задачі є лише одна умова, то вона повинна містити принаймні один відомий елемент, і тоді два невідомих, або два відомих елементи і один невідомий.
3. Якщо задача містить кілька умов, то кожна умова повинна бути пов'язаною хоч би ще з однією умовою. Вузлом зв'язку між умовами може бути лише якийсь невідомий елемент, що входить в кожну з умов, що пов'язані між собою.
4. Якщо невідомий елемент є вузлом зв'язку між n умовами, тобто входить як елемент в кожну з n умов, то такий невідомий елемент буде називатися вузлом n-го порядку ($n \geqslant 2$).
5. Якщо умова задачі пов'язана з m іншими умовами, тобто містить m вузлів зв'язку, то таку умову називають умовою m-го роду ($1 \leqslant m \leqslant 3$).
6. Якщо невідомий елемент не є вузлом зв'язку між умовами задачі, то такий елемент називається кінцевим елементом [559].

Сюжетні задачі є найважливішими представниками тернарних задач. З точки зору загальної теорії задач, сюжетні задачі — це

задачі-описи, словесні моделі — описи реальних проблемних ситуацій. При цьому, як і в будь-якій моделі, в сюжетній задачі описується головним чином лише кількісна сторона проблемної ситуації.

1.2.3. Структура сюжетної задачі

Згідно підходу У. Рейтмана, розуміння сутності задачі розкривається через визначення її структури. Структуру сюжетної задачі вивчали А. К. Артьомов, А. В. Белошиста, М. В. Богданович, Л. М. Фрідман та інші. В структурі будь-якої задачі можна виділити умову (твердження) і вимогу (запитання), або дані і шукані величини. Структура сюжетної задачі повністю відповідає структурі задач у проблемології, але має характерні особливості.

Безпосередньо ситуація звичайно задається в тій частині задачі, яка називається умовою. У загальній теорії задач під умовою розуміється одне чи кілька тверджень, що приймаються за істинні, в яких вказуються характеристики і відношення між об'єктами. При цьому умови можуть бути явно задані та неявно задані, тобто не міститися в самому тексті (формулюванні) задачі, але без яких розв'язання неможливо; вони виявляються при аналізі змісту задачі. Кожна умова містить один чи кілька об'єктів. Якщо вона містить один об'єкт, то в умові вказується його характеристика (властивість, особливість) — предикат, при цьому значення цієї характеристики може бути відомим (даним, заданим) або невідомим (змінним). Якщо ж в умові міститься два і більше об'єктів, то в ній вказується предикат — відношення між цими об'єктами; воно може бути відоме або невідоме (змінне) [559].

Умова сюжетної задачі — це частина тексту, в якій задана сюжетна ситуація, числові компоненти цієї ситуації і зв'язки між ними. В стандартному формулюванні умова виражається одним або кількома розповідними реченнями, які містять числові компоненти. Більш вдале означення умови задачі дає Л. М. Фрідман: умова задачі складається в основному із словесного задання окремих значень величин, що характеризують кількісну сторону події (явища, процесу), що розглядається, та з деяких вказівок про залежність (співвідношення) між цими значеннями [559].

Завершується ситуація вимогою знайти невідомий компонент. Вимога — це частина тексту, в якій вказана (названа, позначена) шукана величина (число, множина). Вимога задачі може бути сформульована у формі наказового або питального речення.

В залежності від способів поєднання та формулювання умови та вимоги задачі визначають канонічне і неканонічне формулювання задачі. Канонічним І. І. Аргинська [17] називає формулювання, в якому спочатку в оповідній формі викладено умову, а потім йде запитання, яке подано запитальним реченням. Будь-яке відхилення від такої форми викладення задачі автор відносить до неканонічних. Таких неканонічних форм може бути п'ять:

— після умови слідує запитання, подане оповідним реченням;

— частина умови в оповідній формі стоїть на початку тексту, а інша її частина поєднана із запитанням у складне запитальне речення;

— частина умови в оповідній формі стоїть на початку тексту, а інша її частина поєднана із запитанням у складне оповідне речення;

— весь текст задачі поєднаний в одне складне запитальне речення, що починається з її запитання;

— весь текст задачі поєднаний у складне оповідне речення, що починається з її запитання.

Слід зазначити, що часто під умовою задачі розуміють весь текст задачі. Це поширена помилка — задача складається з умови і запитання.

В *умові* будь-якої задачі містяться характеристики об'єктів задачі. ***Об'єктом задачі*** може бути: предмет, явище, подія, процес.

Своєрідність опису об'єкта в задачі, за Л. М. Фрідманом, виявляється в тому, що описані не всі його властивості, а лише кількісний бік об'єкта (предмета, явища, події, процесу). Причому будь-яка сюжетна задача являє собою словесний опис одного або кількох фіксованих моментів (випадків, епізодів) якого-небудь явища, процесу, події.

У задачі: «Якщо відкрити крани з гарячою та холодною водою, то ванна наповниться за 8 хвилин до певного рівня. А якщо відкрити лише кран із гарячою водою, то ванна наповниться за 18 хвилин до певного рівня. За скільки хвилин наповниться ванна до певного рівня, якщо відкрити кран із холодною водою?», об'єктом є процес наповнення ванни водою; розглядаються такі моменти цього процесу: 1) наповнення ванни через обидва крани; 2) наповнення ванни, якщо відкритий лише кран із гарячою водою; 3) наповнення ванни, якщо відкритий кран із холодною водою [561].

Математичним змістом сюжетних задач, є не самі по собі явища, а ті їх сторони, в яких виражена їх кількісна характеристика. Цей бік явища (об'єкта задачі) виявляється у заданні (в умові задачі) тих чи інших величин і їх значень — відомих і невідомих.

В умові задачі містяться дані задачі, а запитання задачі вказує на шукане. Дані — це, як правило, числові компоненти тексту задачі. Вони характеризують кількісні відношення ситуації, що пропонується в задачі: значення величин, числові характеристики множин, числові характеристики відношень між ними. Числові характеристики величин та числові характеристики множин звичайно задані числами, а числові характеристики відношень між ними можуть бути позначені словесно. Знаходження шуканого в числовому вигляді звичайно є кінцевою метою розв'язування сюжетної задачі.

Кількісний бік випадку (епізоду) характеризується однією або трьома взаємопов'язаними величинами, із яких одна є величина відношення двох інших. Л. М. Фрідман докладно вивчав питання про задання у задачах величин та їх значень. Автор зазначає, що крім основних величин, для характеристики явища, що розглядається, в деяких задачах застосовуються ще й дискретні (допоміжні) величини як порядкові характеристики окремих епізодів явища або різних значень однієї і тієї самої величини («в перший раз», «другий раз»), а також в якості значень різницевого або кратного відношень двох значень основної величини («на 15 кг менше», «у 2 рази більше» й тощо).

В наведеному прикладі задачі кількісна сторона явища характеризується трьома величинами: загальний об'єм води, об'єм води за 1 хвилину, час. Причому в цій задачі явно вказана лише одна величина — час наповнення ванни, яка задана двома відомими значеннями — 8 хвилин і 18 хвилин, і одним шуканим значенням в третьому моменті процесу, що розглядається. Друга величина (загальний об'єм води) названа лише непрямо («до певного рівня»), а третя величина (об'єм води за 1 хвилину) взагалі не названа. Між тим, для розв'язування цієї задачі потрібно знати значення усіх трьох величин.

В цій задачі автор виділяє дискретні (допоміжні) величини: загальний об'єм води, який налили обидва крани — з холодною та гарячою водою, об'єм води за 1 хвилину, що наливають обидва крани — з холодною та гарячою водою, час спільної праці кранів з холодною та гарячою водою; загальний об'єм води, який налив кран з гарячою водою, об'єм води за 1 хвилину, що наливає кран з гарячою водою, час роботи крану з гарячою водою; загальний об'єм води, який налив кран з холодною водою, об'єм води за 1 хвилину, що наливає кран з холодною водою, час роботи крану з холодною водою [561].

В сюжетних задачах величини і їх числові значення можуть бути задані явно або неявно (якщо у формулюванні задачі вони не вказані і виявляються лише при глибокому аналізі описаного у задачі явища). Усе вищесказане відповідає загальним характеристикам елементів предметної області та відношень між ними, що даються у проблемології.

Розглядаючи питання про задання в сюжетних задачах окремих значень величин, що характеризують кількісний бік об'єкта, який розглядається в задачі, Л. М. Фрідман характеризує повне задання в тексті задач окремих значень величини:

1) назви величини, значенням якої воно є;
2) вказування особливостей даного значення, що відрізняє його від інших значень тієї самої величини;
3) розміру цього значення у вигляді іменованого числа, якщо це значення відоме (дано).

Однак, у більшості випадків задач завдання значень величин здійснюються неповно: перша частина може бути пропущеною і лише мається на увазі; друга може бути скороченою до мінімуму і майже повністю пропущеною, але є якісь непрямі вказівки, наприклад, у вигляді найменування у числа — розміру значення і так далі. Відсутність у словесному заданні значення величини третьої частини — її розміру у вигляді іменованого числа — показує, що це значення невідоме. При цьому, якщо у задання значення входять слова: «Скільки?», «Знайти» і так далі, то це невідоме значення є шуканим [555, 561].

Значення різних величин (відомі і невідомі) складають у сукупності *предметну область сюжетних задач*. Ці елементи предметної області сюжетних задач пов'язані такими співвідношеннями, моделями яких є арифметичні дії, рівності і нерівності. Співвідношення, котрими пов'язані між собою значення величин в сюжетних задачах, поділяються на три види:

1. Співвідношення між значеннями однієї і тієї самої величини:
   а) співвідношення поєднання двох або кількох значень в одне ціле;
   б) співвідношення віднімання від цілого якоїсь його частини;
   в) співвідношення розбиття цілого на рівні частини;
   г) співвідношення, пов'язане з переходом від однієї одиниці лічби або вимірювання до іншої.

2. Співвідношення порівняння двох значень однієї і тієї самої величини:
   а) співвідношення рівності двох значень величини;
   б) співвідношення різницевого порівняння двох значень величини;
   в) співвідношення кратного порівняння двох значень величини.
3. Співвідношення між значеннями різних величин [559, 561].

А. К. Артьомов виділяє в сюжетній задачі *логічну основу умови* — ядро, що «очищене» від сюжетних деталей, в ньому відображуються необхідні для розв'язування математичні відношення між об'єктами, що використані в задачі. Воно застосовується у змісті обчислювального процесу для отримання відповіді на запитання задачі. Це ядро звичайно фіксується в короткому записі тексту задачі [37]. Отже, в логічній основі умови відображуються основні і дискретні величини, що характеризують об'єкт або об'єкти задачі, її предметну область.

Така логічна основа умови задачі, вважає А. К. Артьомов, може бути не одиничною. В задачі може міститися не одна логічна основа, а декілька, але заданих по-різному: одна із них завжди задається у відкритій, явній формі, а інші у прихованій.

При *відкритій формі логічної основи*, поняття, що застосовані в задачі, і відношення між ними явно та чітко фіксуються у словесному формулюванні задачі. Логічна основа одночасно може бути багаторівневою, із яких один рівень явно, відкрито відображений в словесному формулюванні умови задачі, а інші — не відображені, «приховані на глибині». Це означає, що тут задані різні логічні основи. Виявлення прихованих логічних основ народжує інший спосіб розв'язування задачі.

Наприклад: «Два потяги відправилися з однієї станції в протилежних напрямках. Один з них пройшов 175 км, а інший на 62 км менше. На якій відстані один від одного знаходилися потяги в цей час?». Тут логічну основу умови складають: дані значення відстаней, що пройшли потяги, відношення між останніми (другий потяг пройшов на 62 км менше за перший), напрямок руху потягів. Ці основи задані у відкритому вигляді, вони мають однорівневий характер, їх аналіз народжує єдиний спосіб розв'язування:

1) $175 - 62 = 113$ (км),
2) $175 + 113 = 288$ (км) [37].

Користуючись положенням Л. М. Фрідмана про види співвідношень, якими пов'язані елементи предметної області сюжетної задачі, можна сказати, що в предметній області цієї задачі задані два співвідношення: 1) співвідношення різницевого порівняння; 2) співвідношення поєднання частин у ціле (додавання). Ця логічна основа є однорівневою, тому що в ній не можна ці співвідношення трактувати по-іншому.

«За 7 днів їдальня витратила 35 кг масла. На скільки днів при тій самій нормі витрати вистачить 105 кг масла?». Тут логічна основа задачі виявляється на двох рівнях — відкритому та прихованому. В першому випадку спрямованість розумового процесу визначається запитанням: скільки масла витрачали за 1 день? Отримаємо:

1) $35 : 7 = 5$ (кг)

2) $105 : 5 = 21$ день.

В другому випадку хід того самого процесу визначається допоміжним запитанням, постановка якого викриває інші відношення, що містяться в умові задачі, тобто іншу логічну основу: у скільки разів маса масла стала більшою? ($105 : 35 = 3$. Тому, його вистачить на число днів більше 7 у 3 рази: $7 \times 3 = 21$ день).

В цій задачі на одному рівні можна виділити два співвідношення між значеннями різних величин, а на другому рівні — два співвідношення кратного порівняння.

Виявити приховану логічну основу задачі можна не лише через постановку додаткового запитання, а й за допомогою наочного оформлення задачі.

Наочне оформлення і аналіз його дозволяє викрити різні логічні основи умови, що народжує різні способи розв'язування. Наочне оформлення може бути у предметній та графічних формах [37].

Положення А. К. Артьомова про неодиничність логічних основ умови задачі перекликається з думкою Л. М. Фрідмана про залежність характеру трактування співвідношення, що задано в задачі, від особистого погляду того, хто розв'язує цю задачу. Так, Л. М. Фрідман наводить приклади, коли співвідношення віднімання можна трактувати і як співвідношення додавання (поєднання) і навпаки; співвідношення переходу від однієї одиниці рахунку або вимірювання до іншої, як співвідношення залежності між різними величинами, і так далі [561, 563]. Взявши до уваги вищесказане, дістаємо висновку, що термін А. К. Артьомова «логічна основа умови» та термін Л. М. Фрідмана «вид співвідношення» характеризують одне й те саме поняття, і визначення логічних основ умови, і визначення видів співвідношень, якими пов'язані значення різних величин, спрямовує хід розумового процесу на розв'язання задачі.

Запитання (вимога) задачі повинно бути пов'язаним з її умовою. А. К. Артьомов [37] зазначає, що зв'язок запитання з умовою задачі може бути *прямим* або *непрямим*. Прямий зв'язок: запитання задачі безпосередньо орієнтує на застосування того, що дано в умові, для відповіді на нього. Непрямий зв'язок: запитання задачі безпосередньо не пов'язане з даними в умові задачі поняттями та відношеннями між ними; тому попередньо вимагається перетворити запитання так, щоб після цього запитання безпосередньо орієнтувало на умову задачі. При цьому перетворення може бути виконане по-різному, що може визначити різні способи розв'язування задачі:

1. *Переформулювання запитання* — заміна даного запитання іншим, що є рівносильним першому, тобто таким, щоб з першого логічно слідував другий та навпаки. Наприклад: «Дві ланки школярів вийшли одночасно назустріч одна одній з двох селищ. Одна ланка йшла з швидкістю 4 км/год, а друга з швидкістю 3 км/год. Зустріч відбулася через 2 год. Знайди відстань між селищами.» Тут зв'язок запитання і умови задачі поданий в непрямій формі: в умові немає неопосередкованої вказівки на шукану відстань, цей зв'язок опосередкований, тому що відповідь на запитання задачі можлива лише через відповідь на інше запитання: яку відстань пройшли дві ланки разом? Це запитання прямо пов'язано з умовою задачі.

2. *Добір допоміжного запитання*. В цьому випадку до запитання даної задачі ставиться допоміжне запитання (нерівносильне першому), відповідь на яке дозволяє відповісти на запитання даної задачі. При цьому добір може бути неоднозначним, що народжує різні способи розв'язування.

Наприклад: «В парку посадили 5 рядочків лип, по 16 штук в кожному рядку; і стільки ж осик, по 20 штук в кожному рядку. Скільки рядків осик посадили в парку?». Тут запитання задачі зв'язано з її умовою непрямо. Воно не припускає переформулювання на рівносильне запитання. Тому для відповіді на нього слід підібрати допоміжне запитання, яке призведе до відповіді на запитання задачі. Про що треба попередньо дізнатися, щоб відповісти на запитання задачі? Скільки всього осик посадили? Тут постановка допоміжного запитання визначила один хід міркувань для відповіді на запитання задачі, але допоміжне запитання можна поставити інакше: «Число яких рядків було більше при однаковій кількості дерев, та на скільки більше?» (Лип в кожному рядку було по 16, а осик по 20, при однаковій кількості дерев число рядків з осиками менше, тому що в кожному рядку осик на $20-16=4$ дерева більше. Але «4 зайві» осики, що повторені 4 рази, дадуть 16, тобто число лип в одному рядку. Значить, рядків осик буде на 1 менше, ніж лип: $5-1=4$) [37].

У результаті встановлення взаємозв'язків між умовою й вимогою визначається *оператор задачі* — окрема дія (при розв'язуванні простих задач) та сукупність дій (при розв'язуванні складених задач), та їх обґрунтування.

Очевидно, що вчителі повинні мати поняття про структуру сюжетної задачі: про умову і вимогу, як складові задачного формулювання; про канонічне і неканонічне формулювання задачі; про об'єкт (об'єкти) задачі; про математичний зміст сюжетних задач (числові дані, шукане, взаємозв'язки між числовими даними і числовими даними і шуканим, види співвідношень, якими вони пов'язані); про логічну основу умови (відкриту, приховану), про способи виявлення прихованих логічних основ.

Між тим, вимоги до правильної постановки сюжетних задач:

1) усі елементи предметної області, про які йдеться в задачі, мають існувати;
2) усі твердження, які задано в умові задачі, мають бути істинними;
3) умова і вимога задачі мають бути логічно зв'язані між собою;

також мають бути усвідомлені вчителями та майбутніми вчителями.

Щодо засвоєння структури сюжетної задачі молодшими школярами, то слід зазначити, що, як свідчить досвід нашої роботи в школі, учні 1-го класу здатні визначити в задачі умову і запитання (вимогу), об'єкт (об'єкти) задачі, числові дані і шукане задачі, виконувати наочну інтерпретацію задач. Учні 2-го класу на основі слів-ознак можуть виділяти окремі види співвідношень, якими пов'язані числові дані, числові дані та шукане. Учні 3-го класу успішно можуть визначати групу пропорційних величин, в тому числі й пояснювати дискретні (допоміжні) величини.

Таким чином, ми розглянули зміст поняття «сюжетна задача» та структуру сюжетних задач і визначили які відомості щодо структури сюжетних задач мають знати вчителі та школярі.

1.3. КЛАСИФІКАЦІЯ СЮЖЕТНИХ ЗАДАЧ ПОЧАТКОВОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Питання про класифікацію сюжетних задач не є новим для методичної науки. Класифікації задач присвячені праці математиків-методистів XIX — XX століття І. В. Арнольда, О. М. Астряба, Є. С. Березанської, Д. М. Воронова, А. І. Гольденберга, І. М. Кавун, І. І. Александрова, М. М. Попової, Г. Б. Поляк, О. М. Пчьолко, С. І. Шохор-Троцького та інших.

Поділ задач за сюжетом впроваджено у методичну науку Л. Ф. Магницьким [157]. Вибір сюжету задачі, як основи для класифікації, набув критики з боку О. М. Астряба та І. І. Александрова. Така класифікація є недосконалою тому, що до різних типів за фабулою відносяться задачі з однаковою математичною структурою.

В основу класифікації задач К. П. Арженнікова покладено не лише сюжет задачі, а й способи розв'язування. Автор виділяє 5 типів задач: 1) задачі на потрійне правило (просте і складне); 2) задачі на відповідне (співрозмірне) ділення; 3) задачі на змішування; 4) задачі на обчислення часу; 5) задачі на квадратні та кубічні міри [28]. В цій класифікації немає єдиної основи для поділу задач на типи і, тому її не можна назвати вдалою; крім того, вона не є повною.

Підставою для класифікації ряд методистів обрали лише спосіб розв'язування задачі (І. І. Александров, В. Г. Чичигін та Є. С. Березанська та інші).

Виходячи з того, що для розв'язання будь-якої задачі треба знати один з п'яти методів (1) зведення до одиниці або до спільної міри, обернене зведення до одиниці, метод відношень; 2) метод зворотності; 3) метод виключення невідомих: зміна одного невідомого іншим, зрівняння невідомих, зрівняння даних, зрівняння двох умов відніманням, об'єднання двох умов в одну; 4) метод пропорційного поділу, подібності або знаходження частин; 5) метод перетворення однієї задачі в іншу (розкладання складеної задачі на ряд простіших, підготовчих; зведення невідомих до таких значень, для яких стає відомим їх відношення; прийом призначення довільного числа для однієї з невідомих величин), І. І. Александров виділяє 6 класів задач: 1) прості задачі, які не вимагають спеціальних способів розв'язування, оскільки їх умова підказує напрямок обчислень; 2) задачі, що розв'язуються зведенням до одиниці (спільної міри) або способом відношень; 3) задачі, що вимагають зворотних міркувань; 3) задачі, що розв'язуються способом виключення невідомих; 5) задачі, що розв'язуються способом подібності, пропорційного ділення чи знаходження частин; 6) задачі, що вимагають перетворення [3].

Аналогічну класифікацію пропонує В. Г. Чичигін: 1) задачі, що розв'язуються способом зведення до одиниці; 2) задачі на довільне припущення; 3) на спосіб подібності, коли одній з величин відразу надають певне числове значення; 3) задачі на спосіб порівняння (виключення невідомого); 4) задачі на знаходження дробу від числа і числа за відомим дробом [585].

Аналізуючи класифікацію задач І. І. Александрова, Г. Б. Поляк підкреслює її недоліки: 1) нечітке розмежування методів; 2) вона не дає основи для розташування задач за ступенем складності їх розв'язання — єдиного виправдання класифікації задач за способами розв'язування [424]. Те саме можна сказати і про класифікацію В. Г. Чичигіна.

Є. С. Березанська виділяє 8 типів задач: 1) на спосіб «відновлення чисел»; 2) на знаходження двох чисел за сумою або різницею; 3) на знаходження двох чисел за їх сумою і відношенням; 4) на знаходження двох чисел за їх різницею і відношенням; 5) на виключення одного шуканого заміною його другим; 6) виключення одного шуканого зрівнянням даних; 7) на зміну одного з співмножників на кілька одиниць; 8) геометричні задачі [68].

Як зазначає Л. М. Фрідман, принцип класифікації задач за способами їх розв'язування є суто суб'єктивним і не диктується об'єктивним змістом самих задач [561]. Між тим, класифікація задач за способом їх розв'язування не описує усього різноманіття сюжетних задач, тому не є повною. Крім того, ігнорувати повністю сюжет задачі неможливо, оскільки сюжетні задачі дозволяють учневі краще усвідомити зв'язок між величинами в типових життєвих ситуаціях: задачі на рух, на час (визначення тривалості події або часу початку чи закінчення події), на спільну роботу, на суміші тощо.

Поділ задач на типи відповідно способам їх розв'язування набув критики з боку провідних математиків-методистів П. С. Гур'єва, В. О. Латишева, А. І. Гольденберга, С. І. Шохор-Троцького.

С. І. Шохор-Троцький класифікував задачі за кількістю арифметичних дій на прості (прямі та непрямі) і складені (зведені та незведені). Якщо задача викладена так, що дані в ній числа розташовані в тому порядку, в якому треба виконувати обчислення, то вона є зведеною; якщо ж дані в задачі числа розташовані не в тому порядку, в якому будуть виконуватися обчислення, то задача — незведена. При цьому в процесі засвоєння змісту задачі можна надати їм вид зведеної [604].

Класифікація за кількістю дій та їх комбінаціями виявилась також невдалою, тому що одна й та сама кількість дій не говорить про аналогію в міркуваннях, що важливо для учнів під час пошуку розв'язування. Але, у випадку цієї класифікації, стає можливим розміщення задач в порядку зростання їх складності — відповідно кількості арифметичних дій, потрібних для їх розв'язування. Тому ця класифікація виявилась досить життєздатною — методисти, що досліджують проблему навчання математики в початковій школі, ще й досі дотримуються поділу задач на прості і складені. Ми також в нашому дослідженні класифікуємо задачі за кількістю арифметичних дій, які потрібні для розв'язування задачі, і розглядаємо прості та складені задачі.

Д. М. Воронов поклав в основу класифікації простих задач поняття «співвідношення» між числами, яких він нарахував три: 1) різницеві (10 видів); 2) кратні (11 видів); 3) цілого і частин (13 видів) [111].

На відміну від Д. М. Воронова, І. В. Арнольд поклав в основу для класифікації співвідношення не між числами, а між значеннями величин. Автор розбиває усі сюжетні задачі на дві категорії: 1) задачі, що описують явища, що характеризуються однією величиною; 2) задачі, що описують явища, що характеризуються кількома величинами. Задачі першої категорії розбиті на групи відповідно наступним співвідношенням: а) рівності і нерівності; б) різницевого порівняння; в) простої зміни; г) кратної зміни; д) ділення на рівні частини; е) цілого і частин цілого; є) кратного порівняння (ділення на вміщення); ж) переходу від однієї одиниці вимірювання до іншої і т. д. Всього автор наводить 12 груп задач [30]. Таке розбиття першої категорії задач на групи Л. М. Фрідман вважає невдалим, тому що методично не обґрунтовано ані число груп, ані їх порядок.

О. М. Астряб поділяє задачі на два класи, відповідно співвідношенням різницевого і кратного порівняння числових значень величин. Таким чином, автор виділяє 4 групи задач на різницеве порівняння і 4 групи задач на кратне порівняння. До задач на різницеве порівняння відносяться задачі: 1) на усвідомлення поняття про різницеве відношення чисел: збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, визначення, на скільки одне число більше чи менше за інше; 2) задачі на порівняння різницевих відношень: взаємне порівняння різницевих відношень двох величин, виключення однієї невідомої величини за допомогою способу віднімання чи зрівняння даних, порівняння різницевих відношень двох величин способом припущення; 3) задачі на поділ числа в різницевому відношенні: поділ на дві частини, поділ на кілька частин; 4) задачі на заміну однієї величини другою, зв'язаною з нею різницевим відношенням. Задачі на кратне порівняння містять наступні групи: 1) задачі на усвідомлення поняття про кратне порівняння чисел: кратне відношення є цілим числом (збільшення або зменшення числа у кілька разів, визначення, у скільки разів одне число більше чи менше за інше), кратне відношення є дробом (знаходження дробу від числа і числа за його частиною, визначення, яку частину становить одне число від іншого), кратне відношення, виражене у відсотках (три типи задач на відсотки); 2) задачі на порівняння кратних відношень (на з'ясування поняття про величини, що зв'язані пропорційною залежністю, на «просте правило трьох», на «складне правило трьох»; 3) задачі на поділ числа в кратному відношенні (поділ числа в кратному відношенні: знаходження числа за їх сумою або різницею і кратним відношенням, поділ числа прямо пропорційно ряду чисел, поділ числа обернено пропорційно ряду чисел, поділ числа пропорційно двом рядам чисел); 4) задачі на зміну однієї величини другою, зв'язаною з нею кратним відношенням [38].

В основу власної класифікації сюжетних задач ми покладемо ідею І. В. Арнольда про два класи задач відповідно кількості величин, що описують подію в задачі, а також ідеї Д. М. Воронова та О. М. Астряба про класифікацію задач на основі співвідношень, що в них задані. Кількість і види співвідношень становлять математичну структуру задачі. Отже, основою поділу задач на типи та види повинна бути їх математична структура — саме її особливості впливають на вибір того чи іншого способу розв'язування.

На сучасному етапі розвитку методичної науки сюжетні задачі класифікують в залежності від кількості видів співвідношень, які вони містять (Л. М. Фрідман), та в залежності від кількості арифметичних дій, за допомогою яких вони розв'язуються (М. О. Бантова, Г. В. Бєльтюкова, М. В. Богданович, О. С. Дубинчук, М. І. Моро, Л. М. Скаткін, А. М. Пишкало та інші). Таким чином виділяються два класи задач: прості і складені. Зрозуміло, що в межах кожного класу задач виділяються окремі типи, підтипи, види.

Розглянемо існуючі класифікації сюжетних задач у початковій школі, а також проаналізуємо чинні підручники математики з метою визначення різноманіття математичних структур сюжетних задач і послідовності їх вивчення в курсі математики 1—4-го класів.

1.3.1. Класифікація простих задач

У методичній літературі прості задачі визначаються як задачі, що можна розв'язати однією арифметичною дією. На думку

Л. М. Фрідмана, таке визначення виключає із числа простих задач такі, розв'язання яких не вимагає виконання будь-якої арифметичної дії (наприклад задачі, в яких задано відношення рівності або нерівності). За цим визначенням, вважає автор, встановити, чи є задача простою чи ні, ми зможемо лише після її розв'язання, а саме це потрібно знати до її розв'язання. Л. М. Фрідман простою називає задачу, якщо в ній задано одне співвідношення між значеннями однієї і тієї самої величини або різних величин [561].

Між тим, поняття співвідношення різнопланове (може бути співвідношення подібності тощо), тому ***під простою задачею будемо розуміти сюжетну задачу, в яка розв'язується за допомогою однієї арифметичної дії.***

Для складання методики формування у молодших школярів умінь розв'язувати прості задачі слід визначити задачний матеріал, тобто типи і види простих задач і їх системи. Прості задачі є математичними моделями життєвих ситуацій, які виникають внаслідок об'єднання, вилучення чи поділу предметних множин, у процесі різницевого чи кратного порівняння двох значень тієї самої величини, а також при кількісній характеристиці якого-небудь явища кількома взаємозв'язаними величинами. Ще О. М. Астряб, критикуючи типізацію задач за фабулою, зупинявся на з'ясуванні того, які типи задач, згрупованих за ознакою відповідних математичних дій, бажано розв'язувати в школі. До таких типів він відносив: а) задачі на різницеве порівняння двох чисел; б) задачі на кратне порівняння двох чисел; в) задачі на відсотки [39]. За характером випадків застосування арифметичних дій М. О. Бантова, Г. В. Бєльтюкова визначають наступні типи простих задач:

1. Задачі на конкретний зміст арифметичних дій. Сюди відносять задачі на знаходження: суми двох чисел, остачі, добутку, частки (ділення на рівні частини і на вміщення).
2. Задачі на зв'язки між компонентами та результатами арифметичних дій (задачі на знаходження невідомих компонентів: доданка, зменшуваного, від'ємника, множника, діленого, дільника).
3. Задачі, пов'язані з поняттям різницевого чи кратного відношення двох чисел, тобто задачі на збільшення чи зменшення числа на кілька одиниць чи у кілька разів (у прямій і непрямій формі), на різницеве чи кратне порівняння двох чисел.
4. Задачі на ділення з остачею.

5. Задачі на знаходження частини числа та числа за його частиною.
6. Задачі на час (які мають три компоненти: час початку події, тривалість події та час закінчення події).
7. Задачі на обчислення площі прямокутника [52].

Треба зазначити, що М. В. Богданович [84], М. І. Моро та А. М. Пишкало [363], а також Н. Б. Істоміна [210] виділяють лише перші три групи простих задач у власній класифікації.

Існують класифікації простих задач на основі арифметичної дії, за допомогою якої розв'язується задача. Так, О. С. Дубинчук [172] подає чотири типи і виділяє відповідні ним види простих задач. Між тим, О. С. Дубинчук зазначає, що до простих задач відносяться й такі, для розв'язання яких треба послідовно виконати одну й ту саму дію над трьома і більше числами. Але, на відміну від попередніх авторів, ця вчена зазначає, що задачі на знаходження невідомого компоненту арифметичних дій не є простими. Що, на нашу думку, неправомірно, бо для їх розв'язання треба виконати одну арифметичну дію.

Аналогічної підстави для класифікації простих задач притримується М. П. Нікітіна [376], і виділяє також чотири типи простих задач: на додавання, на віднімання, на множення, на ділення (рис. 1.4).

Так само, як і О. С. Дубинчук та М. П. Нікітіна, Н. Б. Істоміна та Р. Н. Шикова класифікують задачі за арифметичною дією, якою вони розв'язуються, але класифікація цих авторів більш повна, ніж у попередніх авторів. Так, серед задач на додавання і віднімання Н. Б. Істоміна та Р. Н. Шикова виділяють ще й задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, які сформульовані у непрямій формі; а серед задач на множення і ділення — встановлення взаємозв'язку між компонентами і результатами дій множення і ділення, в тому числі, задачі на пропорційну залежність величин [218]. Аналогічно до класифікації простих задач підходить П. М Ерднієв [611]. Його класифікацію побудовано на підставі трійок взаємнообернених задач, причому умовно прямою задачею є задача, яка логічно простіша за решту задач, і тому, за методикою цього автора, вивчається спочатку. Класифікація простих задач за П. М. Ерднієвим подана у таблиці 1.2.

Схожу класифікацію простих задач (розглядаються трійки простих задач, але не взаємно обернених) ми зустрічаємо у Л. Н. Скаткіна. Але цей автор виділяє ще й задачі на знаходження невідомого множника, діленого, дільника [347].

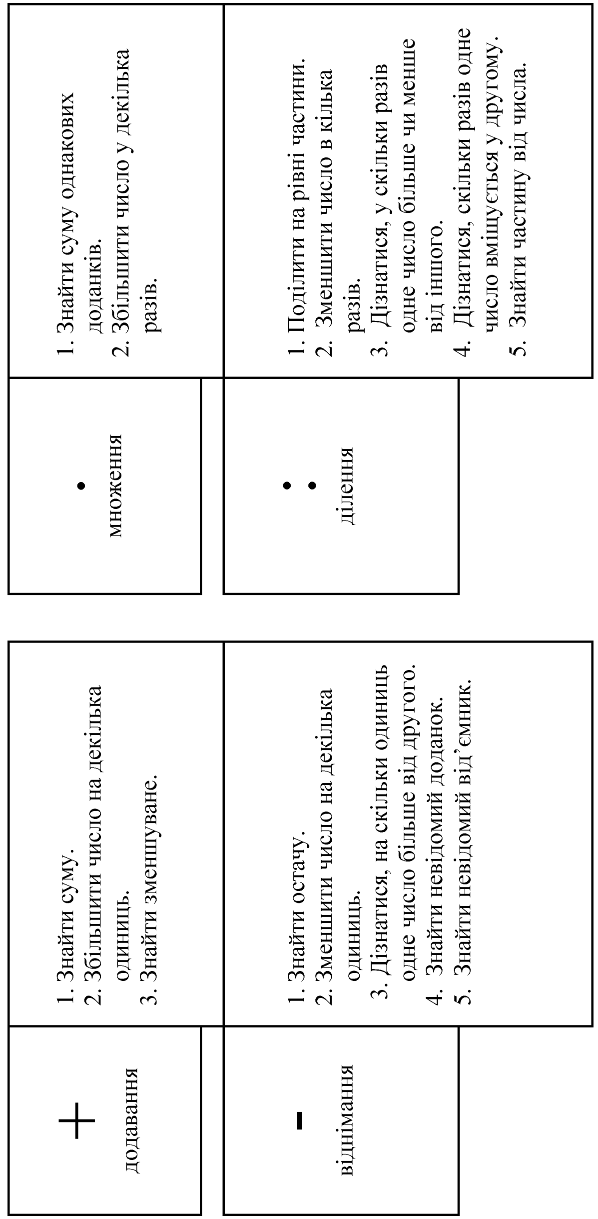


Рис. 1.4 Класифікація простих задач за М. П. Нікітіною

Таблиця 1.2

Класифікація простих задач за П. М. Ерднієвим

Цикл	Задачі на додавання	Задачі на віднімання	
I	Знаходження суми (пряма задача)	Знаходження 1-го доданка (1-а обернена задача)	Знаходження 2-го доданка (2-а обернена задача)
II	Знаходження зменшуваного (1-а обернена задача)	Знаходження остачі (пряма задача)	Знаходження від'ємника (2-а обернена задача)
III	Збільшення числа на кілька одиниць (пряма задача)	Зменшення числа на кілька одиниць (1-а обернена задача)	Різницеве порівняння (2-а обернена задача)

Цикл	Задачі на множення	Задачі на ділення	
I	Множення (повтор рівних доданків) (пряма задача)	Ділення на вміщення (1-а обернена задача)	Ділення на рівні частини (2-а обернена задача)
II	Збільшення числа в кілька разів (пряма задача)	Кратне порівняння (1-а обернена задача)	Зменшення числа у кілька разів (2-а обернена задача)
III	Знаходження частини числа (пряма задача)	Знаходження числа за його частиною (1-а обернена задача)	Яку частину одне число становить від другого (2-а обернена задача)

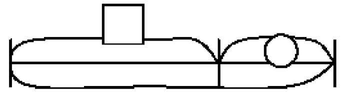
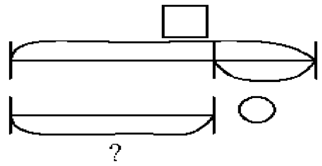
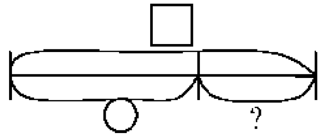
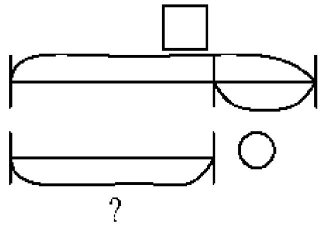
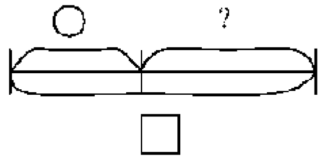
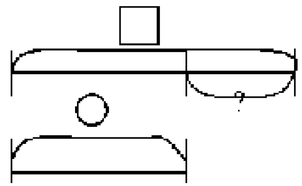
Взявши за основу класифікації простих задач не теоретичну основу вибору арифметичної дії, а зміст понять *ціле* та *частина*, С. І. Смирнова розробила класифікацію простих задач 1-го класу і поділила задачі на дві групи:

1. Задачі, розв'язування яких зводиться до знаходження цілого за відомою частиною.
2. Задачі на знаходження невідомої частини за відомим цілим та іншою частиною [509].

Відповідність запропонованої класифікації і класифікації М. О. Бантової С. І. Смирнова наводить в таблиці, яку ми відтворюємо (табл. 1.3).

Таблиця 1.3

Класифікація простих задач за С. І. Смирновою

Тип задачі	Вид	Схематичний рисунок
Задачі на знаходження цілого за відомими частинами	1) задачі на знаходження суми; 2) задачі на збільшення числа на кілька одиниць	 
Задачі на знаходження невідомої частини за відомим цілим і іншою частиною	1) задачі на знаходження остачі; 2) задачі на зменшення числа на кілька одиниць;	 
Задачі на знаходження невідомої частини за відомим цілим і іншою частиною	3) задачі на знаходження невідомого доданка; 4) задачі на різницеве порівняння.	 

Так само, як і С. І. Смирнова, Л. М. Фрідман при класифікації простих задач також застосовує поняття про ціле та його частини і відокремлює задачі на співвідношення частин і цілого у першу групу, а також виділяє ще дві групи простих задач:

1-а група — прості задачі співвідношень частин і цілого;

2-а група — прості задачі співвідношень порівняння значень однієї і тієї самої величини;

3-я група — прості задачі співвідношень між значеннями різних величин.

До 1-ї групи простих задач входять такі види простих задач:

1. Прості задачі на додавання кількох значень однієї й тієї самої величини або інакше: поєднання частин у ціле — задачі на поєднання.

2. Прості задачі на віднімання від одного значення величини другого значення тієї самої величини або інакше: віднімання від цілого однієї з його частин — задачі на віднімання.

До 2-ї групи простих задач входять такі види задач:

1. Прості задачі співвідношення рівності між двома значеннями однієї і тієї самої величини.
2. Прості задачі співвідношення нерівності між двома значеннями однієї і тієї самої величини.

Тут слід зазначити, що задачі 1-го та 2-го видів не відповідають загальноприйнятому трактуванню простих задач як задач, що розв'язуються однією арифметичною дією, тому що для їх розв'язання не потрібно виконувати арифметичну дію.

3. Прості задачі співвідношення різницевого порівняння двох значень однієї і тієї самої величини.
4. Прості задачі співвідношення кратного порівняння двох значень однієї і тієї самої величини.
5. Прості задачі співвідношення знаходження частини (відсотку) від числа.

У 3-ю групу простих задач входять наступні види задач:

1. Прості задачі співвідношення переходу від однієї одиниці рахунку або вимірювання до іншої.
2. Прості задачі співвідношення розбиття цілого на рівні частини.
3. Прості задачі співвідношення залежності між значеннями різних величин.

Л. М. Фрідман зазначає, що прості задачі останнього виду можна ще поділити на підвиди залежно від того, яке явище (подія, процес) характеризує задане в задачі співвідношення залежності між значеннями різних величин. Найчастіше зустрічаються в задачах такі співвідношення цього виду, які характеризують такі явища:

1. Задачі на рух. У цих задачах задаються співвідношення залежності між значеннями величин: шлях — час — швидкість.
2. Задачі на купівлю і продаж. У цих задачах задаються співвідношення залежності між значеннями величин: вартість — кількість — ціна.
3. Задачі на спільну роботу. В цих задачах задаються співвідношення залежності між значеннями величин: обсяг роботи — час — продуктивність праці.

Крім цього, зустрічаються й інші види, наприклад, на суміші, визначення проміжку часу і та ін [561].

Проаналізувавши існуючі класифікації простих задач, ми впевнилися, що найбільш повною є класифікація Л. М. Фрідмана, але вона значно відрізняється від існуючих традиційних класифікацій. Тому, ми спробували адаптувати класифікацію Л. М. Фрідмана для застосування в умовах традиційного навчання (додаток А). В основу класифікації простих задач ми поклали види співвідношень, що виділені Л. М. Фрідманом (див. параграф 1.2.3), і співвіднесли їх з традиційними видами простих задач, що широко застосовуються у чинних підручниках та в методичній літературі, причому до кожного виду навели схематичний рисунок. **В нашому дослідженні ми будемо використовувати класифікацію простих задач,** подану в додатку А, таблиця А.1.

Наведені види задач пропонуються протягом чотирьох перших років навчання. Усі розглянуті види задач вводяться не одночасно, а традиційно ознайомлення з ними йде в певній послідовності. У додатку Б пропонується послідовність розгляду видів простих задач за роками навчання згідно чинної програми [256], причому до кожного виду наведено опорну схему та схематичний рисунок.

Природно, що найбільша кількість нових видів простих задач припадає на перші два роки навчання. У подальшому навчанні вважається, що уміння розв'язувати прості задачі вже сформовано, і на перший план виступає формування уміння розв'язувати складені задачі.

Усі розглянуті види простих задач повинні входити до переліку обов'язкових результатів навчання в початкових класах, оскільки уміння розв'язувати прості задачі є основою для розв'язування складених задач.

1.3.2. Класифікація складених задач

В методичній літературі складеними називають задачі, які розв'язуються двома або більше арифметичними діями. Складена задача включає в себе ряд простих задач, які пов'язані між собою так, що невідомі одних простих задач є даними других. Тому розв'язування складеної задачі зводиться до розкладання її на кілька простих задач і послідовного їх розв'язування (М. О. Бантова, Г. В. Бєльтюкова, Г. І. Мартинова та інші).

Під складеними сюжетними задачами Л. М. Фрідман розуміє такі, які складаються з двох або більше взаємопов'язаних видів співвідношень. За таким означенням до складених задач слід віднести задачу, яка традиційно вважається простою: «12 л соку розлили у трилітрові бутлі. Чи вистачить п'ять бутлів для цієї операції?» В цій задачі задано два співвідношення: розбиття цілого на рівні частини та співвідношення нерівності між значеннями однієї й тієї самої величини. Крім того, за таким означенням, задачі на знаходження третього числа по сумі двох даних також слід розглядати як складені, тому що вони містять два співвідношення: співвідношення додавання та співвідношення рівності.

Але ця відмінність, на наш погляд, не є принциповою: у традиційному означенні складеної задачі для розв'язання задачі треба виконати не менше ніж дві ***арифметичні*** дії, а за означенням Л. М. Фрідмана, для розв'язання складеної задачі слід виконати не менш ніж дві дії.

Тому, ***в нашому дослідженні будемо вважати складеною задачею таку, для розв'язання якої треба виконати дві або більше арифметичні дії***.

Для розробки методики треба визначити систему задач, за допомогою якої буде здійснено формування умінь розв'язувати складені задачі. Складені задачі дуже численні й різноманітні. Л. М. Фрідман класифікує складені задачі на підставі кількості співвідношень, що входять у задачу, і виділяє задачі 2-го, 3-го і так далі порядку. Кожна складена задача містить не меншє ніж два співвідношення; при цьому, чим більша кількість співвідношень у задачі, тим складніше її розв'язати [561, с. 116]. Аналогічно до класифікації складених задач підходять і інші методисти — вони визначають види складених задач за кількістю арифметичних дій, які потрібно виконати для їх розв'язання. Так, подавши досить повну класифікацію простих задач, Л. Н. Скаткін при розгляді складених задач обмежується такими термінами, як «задачі в дві дії», «задачі, які вимагають більш ніж дві дії» [347].

М. В. Богданович класифікує складені задачі за їх математичною моделлю і розглядає дві категорії — зведені і незведені складені задачі. До зведених задач він відносить задачі, для розв'язання яких треба виконати ряд послідовних обчислень з урахуванням порядку виконання арифметичних дій, а для розв'язання незведених задач треба виконати не лише арифметичні дії, а й скористатися залежністю між компонентами та результатами арифметичних дій. Автор зазначає, що до програмного мінімуму входять зведені задачі на 2—4 дії, а незведені — на 1—3 дії. Так само, як і решта методистів, він класифікує складені задачі програмного мінімуму на дві групи — до першої групи належать задачі в 2 дії, а до другої в 3—4 дії. Між тим, М. В. Богданович здійснює подальшу класифікацію задач на дві дії:

1. Найлегші зведені задачі — це задачі на дії одного або різних ступенів; це задачі, відомі дітям за сюжетом, які здебільшого мають практично-дійовий характер.
2. Задачі з відношенням — задачі, в яких одне з даних задано різницевим чи кратним відношенням.
3. Задачі з «сумою» (або іншим виразом) — задачі, в яких два з даних трьох чисел у процесі розв'язування задач виступають у вигляді суми або іншого виразу як єдине ціле; ці задачі нібито дублюють на множині трьох чисел основні види простих задач.
4. Задачі на двоопераційне знаходження невідомого компонента. В цих задачах першою дією знаходимо значення виразу з невідомим компонентом, у другій — числове значення компонента.
5. Задачі на порівняння результату першої дії з її компонентом чи з іншим числом.
6. Задачі на знаходження четвертого пропорційного.

Задачі на 3—4 дії класифікуються цим автором наступним чином:

1. Задачі, отримані шляхом «розширення» задач на дві дії. Розширення здійснюється на основі доповнення умови чи постановки іншого запитання.
2. Задачі на знаходження суми чи різницевого або кратного порівняння двох добутків (сум, різниць, часток).
3. Задачі на пропорційне ділення та на знаходження невідомих за двома різницями [84].

П. М. Ерднієв також виділяє задачі в дві дії, задачі в три дії, задачі на зведення до одиниці, задачі на рух [611]. Але у підручниках цього автора декларуються наступні види задач: задачі на дві дії; задачі на зведення до одиниці; задачі, які розв'язуються способом порівняння; задачі на знаходження частки двох добутків; задачі на знаходження чисел за двома сумами (традиційна назва — на пропорційне ділення) та за двома різницями (традиційна назва — задачі на знаходження невідомих за двома різницями); задачі на знаходження суми або різниці двох часток; задачі на знаходження частки двох часток; задачі на середнє арифметичне [610].

Характеризуючи складені задачі, що пропонуються в окремих класах, Н. Б. Істоміна та Р. Н. Шикова [218] визначають: складені задачі на додавання і віднімання, які включають сполучення простих задач; різні сполучення простих задач на всі чотири дії; задачі на пропорційну залежність між величинами (задачі на пропорційне ділення, задачі на знаходження невідомих за двома різницями, задачі на рух).

Шмирьова Г. Г. виділяє серед них ще й задачі, які пов'язані з властивостями арифметичних дій (множення числа на суму, суми на число, ділення суми на число тощо) [216].

М. І. Моро та А. М. Пишкало поділяють складені задачі на три групи. До першої групи автори відносять задачі, за допомогою яких вводяться нові поняття та властивості арифметичних дій. Друга група пов'язана з роботою над можливими кількісними відношеннями. Також цими авторами виділяється група задач, які пов'язані з необхідністю застосовувати знання зв'язків між пропорційними величинами [363].

Класифікація М. І. Моро та А. М. Пишкало, порівняно з іншими, більш загальна. У методичних та навчальних посібниках, календарних плануваннях автори також вдаються до поділу складених задач, називаючи їх певним чином, часто дотримуючись загальноприйнятих назв. Так, у посібниках «Вчись розв'язувати задачі» С. П. Логачевською та Т. А. Каганець застосовано більш конкретизовану класифікацію складених задач [298, 299]. У календарному плануванні з математики для 3(2) та 4(3) класів М. В. Богдановича та Н. П. Листопад ми зустрічаємо такі самі види складених задач, але ще й задачі, що пов'язані з одиничною нормою, та задачі на подвійне зведення до одиниці [83].

Як бачимо у низці типологій складених задач (крім класифікації Л. М. Фрідмана та Л. Н. Скаткіна), на жаль, немає єдиної основи для класифікації. Так, П. М. Ерднієв в основу класифікації поклав структуру математичної моделі задачі (задачі на знаходження суми двох добутків й тощо), але таким чином не можна описати усе різноманіття складених задач. В решті типологій взагалі важко визначити основу для класифікації. Як зазначають М. О. Бантова та Г. В. Бєльтюкова, для складених задач немає

єдиної основи для класифікації, що дозволило б з користю для справи розбити їх на певні групи [52]. Однак з методичних міркувань слід розбити складені задачі на окремі групи.

Виходячи з того, що для класифікації складених задач немає єдиної основи, ми пропонуємо поділити їх на дві групи. До першої групи, вслід за І. В. Арнольдом та Л. М. Фрідманом, віднесемо задачі, в яких явища, що описуються, характеризуються однією величиною, тобто містяться у різноманітних поєднаннях прості задачі на співвідношення додавання, віднімання, різницевого порівняння, кратного порівняння та переходу від більшої одиниці рахунку або вимірювання до меншої, співвідношення розбиття цілого на рівні частини, на співвідношення частин і цілого. Таким чином, до цієї групи відносяться складені задачі, які містять різноманітні поєднання відомих видів простих задач, крім співвідношення залежності між значеннями різних величин. Ці задачі можна записати коротко схематично, причому на цьому короткому записі майже завжди можна виділити складові прості задачі. Зрозуміло, що до другої групи ми віднесли задачі, в яких явища, що описуються, характеризуються кількома величинами, а саме — містять співвідношення залежності між значеннями різних величин; ці задачі доцільніше записувати коротко в формі таблиці.

Класифікувати складені задачі першої групи ми будемо за назвою простої задачі, що має розв'язуватися останньою; тому ми отримаємо такі види складених задач (додаток В):

— задачі на знаходження остачі (різниці);
— задачі на знаходження суми;
— задачі на знаходження невідомого доданка;
— задачі на знаходження невідомого зменшуваного;
— задачі на знаходження невідомого від'ємника;
— задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць;
— задачі на різницеве порівняння;
— задачі на знаходження добутку;
— задачі на знаходження частки;
— задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів;
— задачі на кратне порівняння;
— задачі на знаходження дробу від числа;
— задачі на знаходження числа за його дробом.

Зрозуміло, що в межах кожного виду можна виділити різноманіття задач за наявністю в них різних видів простих задач.

Другу групу складених задач (задачі, що містять пропорційні величини) ми умовно розділимо на дві підгрупи (додаток Г):

1) задачі, що містять знаходження суми, різницеве чи кратне порівняння двох добутків або часток:
   — на знаходження суми двох добутків (часток);
   — задачі, обернені до задач на знаходження суми двох добутків (часток);
   — на різницеве порівняння двох добутків (часток);
   — задачі, обернені до задач на різницеве порівняння двох добутків (часток);
   — задачі на кратне порівняння двох добутків (часток);
   — задачі, обернені до задач на кратне порівняння двох добутків (часток);
2) «типові» задачі:
   — задачі на спільну роботу;
   — на знаходження четвертого пропорційного;
   — задачі на подвійне зведення до одиниці;
   — на пропорційне ділення;
   — на знаходження невідомих за двома різницями;
   — на одночасний (неодночасний) рух в різних напрямках;
   — на одночасний (неодночасний) рух в одному напрямку;
   — на знаходження середнього арифметичного.

Задачі цієї групи записуються коротко в формі таблиці.

Підставою для виділення двох підгруп задач, що містять пропорційні величини, є те, що задачі другої підгрупи традиційно вважаються «типовими». Як показав аналіз історичного розвитку проблеми класифікації задач, поділ цих задач здійснювався або за сюжетом (задачі на рух, на спільну роботу), або за способом розв'язання (задачі на пропорційне ділення, на знаходження невідомих за двома різницями, задачі на подвійне зведення до одиниці тощо) Тому у межах другої підгрупи немає єдиної основи для класифікації.

Таким чином, складену задачу вважаємо «типовою», якщо вона належить до групи задач, що мають спільні риси або за сюжетом, або за способом розв'язування. Під способом розв'язування задачі розуміємо процедуру, яка являє собою сукупність прийомів розумової діяльності або логічних операцій і математичних дій, які використовуються під час розв'язування певної сукупності задач одного типу чи виду (див. 1.1.4).

Задачі першої підгрупи ми класифікуємо за математичною моделлю.

У таблиці В. 1 (див. додаток В) подано види задач першої групи, що виділено нами на основі аналізу чинних підручників математики для початкової школи [71—79; 258—261], до яких наведено опорні схеми та схематичні рисунки.

Класифікацію складених задач другої групи наведено у таблиці Г. 1 (див. додаток Г). Як було показано вище, усі методисти одностайні у класифікації складених задач з пропорційними величинами, в тому числі «типових» задач. Тому, дотримуючись загальноприйнятих назв «типових» задач, ми спробували дещо вдосконалити існуючу класифікацію, розглядаючи прямі та обернені задачі; задачі I та II «виду». Причому до задачі кожної математичної структури ми надали опорну схему та схематичний малюнок.

В результаті аналізу чинних підручників нами виділено близько 150 видів складених задач першої групи. Тому зазначимо лише, що випускники початкової школи повинні вміти розв'язувати задачі, що містять співвідношення додавання, віднімання, різницевого порівняння, кратного порівняння та переходу від більшої одиниці рахунку або вимірювання до меншої, співвідношення розбиття цілого на рівні частини, на співвідношення частин і цілого, на 3—4 дії будь-якого виду.

Щодо складених задач другої групи — що містять групу пропорційних величин, то слід зазначити, що до обов'язкового мінімуму слід віднести задачі: на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків та обернені до них; на знаходження четвертого пропорційного, на подвійне зведення до одиниці; на пропорційне ділення, на знаходження невідомих за двома різницями; на спільну роботу; на рух в різних напрямках.

Таким чином, у нашому дослідженні ми класифікуємо задачі на прості та складені (за С. І. Шохор-Троцьким). Прості задачі розподіляємо на типи в залежності від виду співвідношення (за Л. М. Фрідманом), виділяючи в межах кожного типу кілька видів. Складені задачі розбиваємо на два типи: 1) задачі, що описують явища, які характеризуються однією величиною; 2) задачі, що описують явища, які характеризуються кількома величинами (за І. В. Арнольдом). У межах першого типу складених задач ми здійснюємо класифікацію залежно від виду останньої простої задачі, і маємо: задачі на знаходження суми, на знаходження різниці тощо. В межах другого типу єдиної основи для класифікації немає; тут ми виділили: 1) задачі на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків чи часток (в залежності від математичної моделі); 2) «типові» задачі (на основі способу розв'язування або сюжету). Ми зберегли традиційну назву цього класу задач — «типові», а також назви задач окремих видів.

1.4. ДІЯЛЬНОСТЬ З РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1.4.1. Сутність процесу розв'язування задач

В психології розв'язування задачі звичайно розглядається як дія чи послідовність дій, спрямованих на вирішення протиріччя між умовами і вимогами задачі: Л. С. Виготський [112], А. В. Запорожець [194], А. Р. Лурія [305], С. Л. Рубінштейн [451].

Виходячи з власного трактування поняття задачі, Г. О. Балл під розв'язуванням задачі розуміє вплив на предмет задачі, що обумовлює її перехід з вихідного стану у стан, що вимагається. Задача, що розв'язана, тобто задача, предмет якої приведений у стан, що вимагається, перестає бути задачею [48]. Л. М. Фрідман розв'язування задач розглядає як діяльність, що обумовлює перехід від вихідного стану до рівня моделі [559].

Г. О. Балл пов'язує поняття розв'язування задачі із способом розв'язування задачі. Часто процес розв'язування може бути описаний як реалізація деякого способу розв'язування. Причому способом розв'язування задачі автор вважає будь-яку процедуру, яка при її здійсненні вирішувачем може забезпечити розв'язання цієї задачі. До речі, спосіб розв'язування може бути алгоритмічним (якщо він складається з ефективних операцій і не містить неоднозначно детерміновані розгалуження) або квазіалгоритмічним (може містити неоднозначно детерміновані розгалуження) [48].

Під способом розв'язування сюжетної задачі ми розуміємо процедуру, яка являє собою сукупність прийомів розумової діяльності або логічних операцій і математичних дій, які використовуються під час розв'язування певної сукупності задач одного типу чи виду.

Аналогічно розв'язування задачі як спосіб знаходження «шуканого» засобом перетворення об'єкта для виявлення прихованих зв'язків, які дозволяють визначити його характеристики, визначає З. О. Решетова. Будь-яка задача (і теоретична, і практична) розв'язується шляхом поступових перетворень її вихідних умов, тільки в одному випадку — з метою отримання нового знання, в іншому — з метою отримання нових характеристик реального об'єкта [448].

Таким чином, ***розв'язування задачі є складним процесом розумової діяльності людини, який спрямований на перетворення об'єкта, що описаний у змісті задачі, на вирішення суперечності між умовою та вимогою задачі.***

У загальному випадку процес розв'язування задачі (віднесеної) Г. О. Балл визначає як фрагмент функціонування того, хто розв'язує задачу, що здійснюється з метою її розв'язання [48]. Отже, процес розв'язування задачі пов'язаний з діяльністю вирішувача з розв'язування цієї задачі. Діяльність з розв'язування задач, за означенням Л. М. Фрідмана, — це складання плану розв'язування і процес здійснення цього плану, і, нарешті, отримання результату процесу розв'язування — відповіді задачі [559].

Якщо користуватися термінологією Г. О. Балла, то можна говорити, що сутність діяльності з розв'язування задачі полягає у відшукуванні способу її розв'язування. Сутність діяльності з розв'язування задач, за Л. М. Фрідманом, полягає у знаходженні такої теорії, такої системи загальних положень, застосовуючи які до умов задачі і проміжних результатів розв'язування, можна врешті відповісти на запитання задачі (задовольнити вимозі задачі) [559]. Зрозуміло, що відшукування способу розв'язування задачі пов'язано і з відшукуванням теорії, і з застосуванням її до умов задачі. Тому можна говорити про аналогічність підходів Г. О. Балла та Л. М. Фрідмана до розгляду сутності діяльності з розв'язування задач, але Г. О. Балл розглядає це питання більш загально, а Л. М. Фрідман — конкретизовано.

Дещо інакше визначає сутність розумової діяльності з розв'язування задачі Г. П. Щедровицький. Автор вважає, що ця діяльність полягає у заміщенні досліджуваних об'єктів іншими об'єктами (еталонами або «посередниками») або знаками. Тому процеси розв'язування задач правильно класифікувати у відповідності з тим, чим у ході розв'язування заміщується досліджуваний об'єкт і як він заміщується [606]. При цьому Г. П. Щедровицький виділяє такі групи операцій, які необхідні для розв'язування задачі.

1. Наявність однієї пізнавальної операції, наприклад лічби, вимірювання, накладання тощо.
2. Недостатність однієї пізнавальної операції, наприклад, порівняння довжин двох предметів, що не можна пересунути і які знаходяться в різних місцях й тощо.
3. Утворення та застосування складної знакової форми для здійснення пізнавального процесу.

4. Здійснення складної комбінації заміщень деякого об'єкта знаковими формами.

У проблемології розглядаються засоби діяльності з розв'язування задач, які, на думку Л. М. Фрідмана, складаються з трьох компонентів:

1) засоби, представлені в умовах задачі, над якими виконуються кроки-перетворення — ***специфічний компонент***;
2) загальнологічні правила виведення, за якими виконуються перетворення умов задачі — ***логічний компонент***;
3) евристики, які спрямовують процес розв'язування — ***евристичний компонент***.

Крім цих компонентів, при реальному розв'язуванні задач використовуються ще й інші засоби, а саме — здогадка, інтуїція.

Для розв'язання задачі недостатньо знати, явно чи неявно задані умови, потрібні ще знання з тієї галузі, до якої належить задача, що розв'язується. Для того, щоб розв'язати задачу, вона повинна бути викладена на мові тієї галузі знань, засобами якої вона може бути розв'язана. Крім того, потрібний деякий досвід у діяльності з розв'язування задач. Без всього цього процес мислення, процес діяльності з розв'язування задачі неможливий [559].

Ця позиція Л. М. Фрідмана відповідає положенню Г. О. Балла про засоби розв'язування задачі, сукупністю яких володіє той, хто розв'язує задачу. Автор розділяє засоби розв'язування на внутрішні та зовнішні [48]. Можна говорити, що логічний та евристичний компоненти, здогадка, інтуїція, знання тієї галузі знань, до якої належить задача, досвід діяльності з розв'язування задач — це внутрішні засоби; специфічний компонент — це зовнішній засіб розв'язування задачі.

Доречно тут торкнутися проблеми складності і трудності задач. У педагогічній літературі можна зустріти вживання слів «складність» і «трудність» як синонімів. Тим часом, розрізняти ці терміни необхідно. Складність є об'єктивною властивістю змісту задачі, незалежною від підготовленості того, хто її розв'язує, а трудність — суб'єктивна характеристика, пов'язана з його рівнем підготовки. Трудність характеризує можливість суб'єкта подолати об'єктивну складність задачі.

Рівень трудності задачі за визначенням Г. О. Балла, характеризується мірою фактичного і передбачуваного (прогнозованого) витрачання ресурсів того, хто її вирішує, на розв'язування. Розуміючи складність задач як складність процесів їх розв'язування, І. Я. Лернер визначив, що складність залежить: 1) від кількості даних в умові, що підлягають обліку (чим їх більше, тим складніше задача); 2) від числа проміжних операцій, логічних ланок, які необхідно пройти, щоб знайти розв'язок. Ще одним показником складності задачі І. Я. Лернер вважає число рядовстановлених висновків, які можуть бути зроблені із задачі. Тим часом, на його думку, найбільші труднощі викликає кількість операцій. Отже рівень трудності задачі залежить від рівня її складності. Аналогічних висновків дійшов А. М. Сохор. Ним були розроблені графи, вершинами яких служать «логічні елементи» міркувань, необхідних для розв'язування задачі, а дугами — операції переходу від одного такого елементу до іншого. За даними А. М. Сохора, трудність задач виявилася тим більше, чим більше число дуг (операцій), що зв'язують його вершини.

Отже, процес розв'язування задачі є процесом перетворення її умов. С. Л. Рубінштейн вважав, що «перетворення задачі можна привести до її переформулювань, а саме «переформулювання» здійснюється за допомогою аналізу через синтез. Під час такого процесу відбувається «вичерпання» задачі, коли... об'єкт у процесі мислення включається у все нові зв'язки і в силу цього виступає у все нових якостях, що фіксуються у нових поняттях; із об'єкта, таким чином, ніби вичерпується все новий зміст; він ніби повертається кожного разу іншим боком, у ньому виявляються все нові властивості» [450, с. 98–99]. Поглиблює концепцію розв'язування задачі С. Л. Рубінштейна А. М. Сохор, який розглядає розв'язування задачі як... «процес «вичерпування» інформації <...> послідовність переформулювань умови пізнавальної задачі, причому кожне нове переформулювання пов'язане з наданням об'єктові нових характеристик, а характеристики ці ґрунтуються на виявленні прихованих (латентних, як кажуть психологи) — принаймні від початкового розгляду — зв'язків досліджуваного об'єкта з іншими» [514, с. 24].

Доповнюючи таке розуміння перетворення задачі, В. В. Давидов вказує, що воно не дає відповіді на запитання: «За допомогою яких засобів суб'єкт може ставити об'єкт у нові відношення, відкриваючи тим самим і нові якості? Якими суб'єктивними «важелями» людина повертає предмет, щоб мати можливість «вичерпувати» його якості?» [145, с. 222]. Таким специфічним засобом дії суб'єкта з відкриття ще прихованих якостей об'єкта (задачі) можна розглядати моделювання. «Переведення деякого об'єкта у форму моделі дозволяє відкрити у ньому такі властивості, які невизначувані без безпосереднього оперування з ним» [Там же, с. 223].

Як помітив Л. М. Фрідман, у наведеному висловлюванні В. В. Давидова найбільш важливим є його вказівка, що в процесі розв'язування задач засоби пізнання виступають у формі моделювання. Більше того, дійсним психологічним змістом мислення, за Л. М. Фрідманом, є процес динамічного моделювання об'єктів мисленнєвої діяльності, що полягає у побудові потоку зовнішніх і мислених моделей вихідного об'єкту і мисленого співвіднесення їх з моделлю цілі діяльності. У той час, як аналіз, синтез, узагальнення і абстрагування (визначені характеристики мислення під час розв'язування задач, за С. Л. Рубінштейном) є лише логічними характеристиками тих дій і операцій, що здійснюються над моделями, тобто характеристиками окремих кроків динамічного моделювання [555].

Отже, в описі процесу розв'язування задач розглядаються два типи структур: зовнішня та внутрішня [533]. Зовнішня структура описує розв'язування задачі через логічні схеми, алгоритмічні і евристичні приписи, тим самим визначаючи послідовність перетворення задачної системи. Використання розумових операцій передбачає побудову внутрішньої структури. Зазначимо, що в реальному процесі розв'язування задачі внутрішній і зовнішній аспекти тісно взаємодіють один з одним, утворюючи єдине ціле.

1.4.2. Зовнішня структура процесу розв'язування задач

До зовнішніх структур процесу розв'язування задачі Ю. М. Колягін відносить передусім логічну структуру розв'язування, різноманітні перетворення задачної системи, послідовність у здійсненні розв'язування задачі, розчленування процесу розв'язування задачі на певні етапи [241].

Ю. І. Машбиць на основі ретельного аналізу і узагальнення великої кількості вітчизняних і зарубіжних наукових джерел розробив модель діяльності учіння як розв'язування задач [336]:

1. Розв'язування задачі, як правило, складається із розв'язування множини підзадач, серед яких вирізняються дві підмножини: перша — це самостійні етапи розв'язування вихідної задачі, особливо якщо остання містить кілька шуканих величин; друга — це підзадачі, що виникають у випадку, якщо вирішувач має утруднення і розбиває певний етап розв'язування на підетапи.
2. Кожне розв'язування передбачає вихід за межі задачної ситуації (К. Дункер, Г. Катоне, Ф. Барлет, Дж. Брунер). Вихід за межі задачної ситуації пов'язаний з пошуком засобів розв'язування задачі, перш за все із залученням знань вирішувача.
3. Розв'язування задачі розпочинається з усвідомлення суб'єктом задачної структури, тобто з побудови моделі задачної ситуації. Така структура повинна відповідати реальній (об'єктивній) структурі задачі і характеризує бачення суб'єктом навчальної задачі. Визначення структури часто стає найбільш важким етапом у розв'язуванні задачі.
4. Після того, як задачна структура визначена, суб'єкт із відомих йому задачних структур вибирає ту, у яку визначена структура може бути перетворена, тобто він здійснює пошук аналогічної задачної структури, яка наближає його до розв'язку задачі. Про зміну задачної структури у процесі розв'язування говорять Д. Б. Богоявленська, В. В. Рєпкін, В. Т. Дорохіна та ін. Автор розглядає пошук аналогічної задачної структури як один із психологічних механізмів розв'язування задачі.
5. Розв'язок знайдено, коли суб'єкт знаходить задачну структуру, яка тотожна, на думку вирішувача, об'єктивній структурі задачі.
6. Контроль за правильністю розв'язку задачі, рефлексія способу дії і оцінка раціональності можуть розглядатися як розв'язування задач, що відмінні від звичайних навчальних задач спрямованістю на дії суб'єкта, але мають той самий операціональний склад.

3–6-й аспекти, що визначені Ю. І. Машбицем, визначають етапи роботи над задачею: усвідомлення суб'єктом задачної структури, пошук аналогічної задачної структури, контроль за правильністю розв'язку задачі, рефлексія способу дії і оцінка раціональності.

Дещо інший поділ етапів роботи над задачею пропонують В. В. Дружинін, Д. С. Конторов та О. І. Ларічев. Основними елементами, за допомогою яких здійснюється процес розв'язування задач, є наступні:

— вибір одного з способів дії;
— усвідомлення взаємозв'язку і взаємодії мети і засобів виконання дії;
— моделювання дії;
— оцінювання наслідків дії;
— обговорення результату дії, що передбачається;
— ухвалення розв'язання;
— здійснення розв'язання;

— обговорення дії, що виконувалася, та її результату [172, 278].

Попередніми авторами зовсім не приділено уваги ознайомленню з умовою задачі та її аналізу. Між тим, розв'язування будь-якої задачі розпочинається саме з цього. В. О. Моляко при розгляді окремої творчої конструкторської задачі учнями визначає три послідовні циклічні за будовою етапи. Це розуміння умови задачі (оцінка умови); формування проекту майбутньої конструкції (формування задуму); попереднє розв'язування, прогнозування успішності проекту [359].

В. Н. Осинська подає процес розв'язування задач таким чином, що можна чітко простежити етапність у роботі над задачею: аналіз задачі та пошук її розв'язування. Отже, розв'язування розумової задачі починається з аналізу формулювання задачі, усвідомлення того, що дано. Ці дані зіставляють одне з одним і з питанням, визначають зв'язки між ними, співвідносять з наявними знаннями і досвідом людини. Людина пробує використати принципи, успішно застосовані раніше при розв'язуванні попередньої задачі, яка схожа з новою. На цій основі виникає гіпотеза, намічається спосіб дії, шлях розв'язування. Практична перевірка гіпотези, перевірка шляху розв'язування може показати помилковість намічених дій. Тоді шукають нову гіпотезу, інший спосіб дії, причому тут важливо старанно з'ясувати причини невдачі, зробити з неї відповідні висновки [390].

Порівнявши розглянуті підходи, можна говорити, що найбільш повно, але в загальному плані, описано етапи процесу розв'язування задачі Ю. І. Машбицем; В. В. Дружинін, Д. С. Конторов та О. І. Ларічев більш детально розглядають етап пошуку розв'язання та здійснення і дослідження його, зовсім не звертаючи уваги на аналіз самої задачі; В. Н. Осинська та В. О. Моляко приділяють увагу першим двом етапам — ознайомленню з умовою задачі, її аналізу і пошуку розв'язання задачі.

У кібернетиці, психології та предметних дидактиках процес розв'язування задач також розглядається за чотирма етапами:

Перший етап: ознайомлення з умовою задачі, аналіз умови.

Другий етап: складання плану розв'язування задачі.

Третій етап: здійснення плану розв'язування.

Четвертий етап: перевірка правильності розв'язання задачі [584].

Проте кібернетичний, управлінський аспект структури розв'язування задачі в силу своєї властивості не бере до уваги логіко-психологічну сторону. Л. М. Фрідман за основу ключового психологічного механізму розв'язування задачі бере співвіднесення побудованих і перетворюваних моделей з моделлю кінцевої або проміжної мети діяльності [555]. Ю. І. Машбиць та В. Н. Осинська надають перевагу пошукові і співвіднесенню задачної структури з аналогічною.

Як бачимо, підходи вчених до визначення зовнішньої структури процесу розв'язування задач мають схожі і відмінні риси, тому звернемося до тлумачення цього питання у проблемології.

На основі нормативного підходу до аналізу діяльності з розв'язування задач, який полягає у побудові ідеальної моделі цієї діяльності на основі теорії задач, Л. М. Фрідманом [559] було досліджено макроструктуру та мікроструктуру діяльності з розв'язування задач. Під макроструктурою автор розуміє встановлення характеру окремих етапів цієї складної діяльності.

Першим етапом є аналіз задачі. При цьому мається на увазі усвідомлення даних і невідомих та встановлення зв'язку між ними. Аналіз задачі, на думку Л. М. Фрідмана, складається з наступних дій:

1) Розчленування умови задачі на елементарні умови і вимоги та перехід до аналізу кожної умови й вимоги, а потім до аналізу кожного об'єкта і предиката, з яких складаються ці умови й вимоги.

2) Встановлення характеру кожного з елементів предметної області задачі і всіх її предикатів. Треба встановити, які з них є відомими (даними), а які — невідомими (змінними). Стосовно кожного з невідомих треба встановити, чи є воно шуканим, чи проміжним (допоміжним) невідомим або ж невизначеним. Крім того, зазначає автор, деякі з відомих доцільно розглядати як змінні; в цьому випадку треба визначити область зміни цих змінних.

3) Встановлення визначеності або ступеня невизначеності задачі. Тут необхідно, якщо це можливо, сформулювати усі неявно задані умови, що необхідні для розв'язування.

4) Перевірка логічної правильності задачі. Якщо якісь вимоги до логічної правильності задачі (див. 1.1.3) не виконуються, то встановити причину, і якщо це можливо, виправити цю неправильність. Якщо це неможливо зробити, то подальша діяльність з розв'язування цієї задачі даремна.

Л. М. Фрідман зазначає, що зміст аналізу задачі, його повнота та глибина залежать від характеру самої задачі. В деяких випадках аналіз задачі проводиться миттєво під час читання формулювання задачі, а у деяких — з фіксацією кожного кроку.

В останньому випадку результати аналізу задачі оформлюються у вигляді моделі, що складає другий етап діяльності з розв'язування задач.

Отже, ***другим етапом є побудова моделі задачі***. У філософії під моделлю розуміють таку мислено уявлювану або матеріально реалізовану систему, яка відображуючи або відтворюючи об'єкт дослідження, здатна заміщувати його так, що вивчення такої системи дає нам нову інформацію про цей об'єкт [605].

Модель визначається Л. М. Фрідманом, як деякий об'єкт (система), дослідження якої служить засобом для отримання нових знань про інший об'єкт (оригінал або прототип). Моделлю деякого об'єкта А (оригіналу) називається об'єкт В, в якомусь відношенні подібний (аналогічний) оригіналу А, який вибрано або побудовано суб'єктом С принаймні для однієї з наступних цілей:

1) заміна А в деякій мисленій (уявній) або реальній дії (процесі), виходячи з того, що модель В буде зручна для цієї дії в даних умовах (заміщуюча модель, модель-заступник);
2) створення наочного або більш чіткого уявлення про об'єкт А за допомогою моделі В: репрезентативна модель, модель — уявлення (подання);
3) тлумачення (інтерпретація) об'єкта А у вигляді моделі В (інтерпретаційна модель);
4) дослідження (вивчення) об'єкта А засобом вивчення моделі В (дослідницька модель).

Автор зауважує, що у більшості випадків модель має не одну ознаку, що відповідає одній із вказаних цілей, а кілька, тому вона придатна для інших цілей: заміщуюча модель може бути одночасно й репрезентативною, а остання може бути дослідницькою. Якщо задача складна, то іноді складають не одну, а послідовність різних моделей вихідної задачі.

Сама побудова і використання моделі у науковому чи навчальному пізнанні складає особливий метод — моделювання. Н. Г. Салміна виокремлює у моделюванні як методі наукового пізнання ряд етапів: 1) вибір моделі або її побудова; 2) вивчення моделі, робота з моделлю; 3) перенесення знань, отриманих під час опрацювання моделі, на оригінал [458].

Стосовно сюжетних задач моделювання можна розглядати як особливу діяльність з побудови (вибору або конструювання) моделей. Розв'язання задач здійснюється за евристичною схемою діяльності математичного моделювання, що складається з послідовності наступних етапів: 1) побудова, конструювання моделі; 2) дослідження моделі (експериментальне чи мислене); 3) аналіз

одержаних результатів і їх перенесення на образ, що вивчається; яка, до речі, повністю співпадає з етапами, визначеними Н. Г. Салміною.

Л. М. Фрідман розглядає два види моделей сюжетних задач: репрезентативні (моделі, засобом яких подаються у наочній формі результати аналізу задачі) та розв'язуючі (обчислювальні формули, рівняння або системи рівнянь). На даному етапі роботи над задачею нас цікавлять саме репрезентативні моделі, вони можуть бути наступних видів:

1. Схематичні моделі (мається на увазі схематичний короткий запис).
2. Графічні моделі (короткий запис задачі у вигляді креслення; рисунка).
3. Табличні моделі (короткий запис у вигляді таблиці).
4. Структурні моделі [558, 561].

Аналіз і побудова моделі задачі виконуються заради знаходження плану розв'язування задачі. ***Четвертий етап — пошук плану (ідеї, принципу, методу) розв'язання***. Л. М. Фрідман обґрунтовує положення, що з психологічної точки зору план розв'язування — це думка, ідея про можливий шлях досягнення мети задачі, тобто виконання її вимоги. Так, якщо в процесі аналізу задачі ми впізнали в ній задачу знайомого виду, то план розв'язування виникає у вигляді думки про можливість застосування відомого нам способу розв'язування. Якщо ж задача незнайомого виду, то ми шукаємо в ній елементи знайомих задач, перетворюємо її доти, поки не побачимо в ній знайомі риси задач, що раніше розв'язувалися (це відповідає позиціям Ю. І. Машбиця та В. Н. Осинської).

Для знаходження плану розв'язування задачі, перш за все, вважає Л. М. Фрідман, треба встановити, до якої галузі знань належить дана задача. Це здійснюється звичайно в ході переформулювання, яке завжди являє собою побудову якоїсь моделі. При цьому модель може бути побудована фактично чи у думці.

Здійснення знайденого плану розв'язування і доведення (перевірка), що отриманий результат задовольняє вимозі задачі відбувається на ***четвертому етапі***. Щоб перевірити застосований план розв'язування задачі, треба впевнитися, що отриманий розв'язок задовольняє усім вимогам задачі. Ця перевірка здійснюється під час ***п'ятого етапу*** процесу діяльності з розв'язування задачі — ***обговорення (аналізу) проведеного розв'язання***. На цьому етапі ми впевнюємось, що проведене розв'язання правильне, але аналізуємо його, виявляємо в ньому те цінне, найбільш важливе, що може збагатити наш досвід, розвинути інтуїцію.

Слід зазначити, що в реальному процесі розв'язування задач не всі описані етапи мають місце, бо реальна діяльність з розв'язування задач залежить від багатьох обставин.

Отже, ми розглянули етапи процесу розв'язування задач, у проблемології. Проаналізуємо їх відповідність опису процесу та етапів розв'язування математичної сюжетної задачі методистами.

Розв'язати математичну задачу — це означає знайти такі загальні теоретичні підстави (правила, означення, формули, теореми), застосовуючи які послідовно до умов задачі і до висновків з них (проміжних результатів розв'язання), ми нарешті відповімо на запитання задачі (задовольнимо вимогу задачі) [561].

М. І. Моро і А. М. Пишкало вважають, що розв'язати сюжетну задачу — це означає відповісти на поставлене в ній запитання [363]. Розв'язати сюжетну задачу, за М. О. Бантовою та Г. В. Бєльтюковою, — це означає розкрити зв'язки між даними та шуканим, які задані в умові задачі, і на цій підставі вибрати, а потім й виконати арифметичні дії та дати відповідь на запитання задачі [52].

Слід розрізняти розв'язання задачі, як план, спосіб, метод та як процес здійснення вимоги задачі. Л. М. Фрідман розглядає розв'язування сюжетної задачі як складний багатоплановий процес. В процесі розв'язування слід осмислити запропоновану задачу, знайти спосіб її розв'язування, здійснити власне розв'язання, сформулювати відповідь до задачі, перевірити чи правильно виконане розв'язання, з тим, щоб знайти в ньому слабкі і сильні сторони, може, знайти інший спосіб розв'язування, осмислити застосовані в процесі розв'язування різноманітні прийоми, які можуть знадобитися у подальшому; зробити так, щоб це розв'язання принесло користь для майбутньої роботи [561]. Отже, розв'язування сюжетної задачі Л. М. Фрідман, як і Г. О. Балл, пов'язує із знаходженням способу її розв'язування.

Виходячи з того, що технологічно при розв'язуванні задачі дитина як мінімум двічі виконує «перекодування» словесно заданої задачної ситуації — спочатку перекладаючи її у короткий запис, малюнок, схему, для виявлення зв'язків між даними та шуканим, а потім ще раз перекладаючи залежність, що виявлена, на мову математичних знаків і символів (запис розв'язання), А. В. Бєлошиста робить висновок, що під розв'язуванням задачі слід розуміти процес «перекодування» учнем словесно заданого сюжету, що містить числові компоненти і характерну структуру,

на мову арифметичного запису (запис розв'язання) [60]. Аналогічно Н. Б. Істоміна розглядає процес розв'язування сюжетних задач як перехід від словесної моделі до моделі математичної або схематичної. В основі здійснення цього переходу лежить семантичний аналіз тексту і виділення в ньому математичних понять і співвідношень [210]. Позиції Н. Б. Істоміної та А. В. Бєлошистої співвідносяться із загальним положенням С. Л. Рубінштейна та А. М. Сохора про розв'язування задачі як переформулювання її умов та подальшим розвитком цього положення В. В. Давидовим про засоби цього переформулювання через моделювання.

Отже, методисти та психологи одностайні у розумінні процесу розв'язування задачі, в тому числі сюжетної. Проаналізуємо відповідність етапів роботи над сюжетною задачею загальним положенням проблемології щодо макроструктури діяльності з розв'язування задач.

Аналіз процесу розв'язування математичної задачі має тривалу історію. Вперше основні етапи розв'язування задач були намічені Є. А. Євтушевським, але сформулював їх назви А. І. Гольденберг, — це аналіз, план розв'язання, розв'язування, перевірка. Аналогічно до процесу розв'язування математичної задачі підходить Д. Пойя, але він дещо інакше формулює назви цих етапів:

1) аналіз задачі;
2) складання плану розв'язування задачі;
3) реалізація складеного плану;
4) перевірка розв'язання і дослідження задачі [422].

Визначені Д. Пойа етапи в роботі над задачею повністю відповідають розглянутому вище кібернетичному підходу і стосуються керування процесом розв'язування задачі.

Більшість методистів, вслід за Д. Пойа, вказують ті самі чотири етапи, іноді об'єднуючи деякі з них або, навпаки, конкретизуючи.

Сучасні дослідники методики початкового курсу математики М. О. Бантова, Г. В. Бельтюкова, М. В. Богданович, В. Л. Дрозд та інші визначають, що розв'язування задачі — це процес перетворення її умови, який здійснюється на основі знань з тієї галузі, до якої належить задача, певних загальнологічних правил. Цей процес складається з таких етапів:

— ознайомлення із змістом задачі,
— аналізу задачі і пошуку плану розв'язування;
— здійснення знайденого плану розв'язування; виконання розв'язання;

— перевірки розв'язання; з'ясування того, що здобутий результат задовольняє умову задачі [52; 84; 348].

Отже, методисти визначають чотири етапи процесу розв'язування сюжетної задачі, пропускаючи один з найважливіших етапів — складання моделі задачі, який у проблемології вважається другим етапом. Однак, взявши до уваги досвід розвивального навчання та пропозиції провідних методистів про корисність застосування схематичних рисунків для розв'язання сюжетних задач, можна говорити про застосування моделювання на різних етапах розв'язування задачі (під час аналізу формулювання задачі та під час пошуку її розв'язання), тим самим не виділяючи складання моделі в окремий етап.

Ю. М. Колягін в процесі розв'язування задачі також виділяє чотири етапи. Але його підхід ближчий до процесу розв'язування задач, що описаний у проблемології, визначенням змісту останнього етапу. Автор вважає, що на четвертому етапі фіксується кінцевий результат розв'язання, проводиться критичний аналіз розв'язання, ведеться пошук інших шляхів розв'язування, здійснюється дослідження особливих та часткових випадків, виявляється істотне, потенційно-корисне, відбувається систематизація нових знань і досвіду [245]. З. І. Слєпкань зазначає, що на цьому етапі здійснюється узагальнення розв'язання для складання алгоритму розв'язування задач даного типу [504].

Треба зазначити, що Л. М. Фрідман не лише розробив, у проблемології, макроструктуру діяльності з розв'язування задач, але й застосував її до процесу розв'язування сюжетних задач, причому у процесі розв'язування сюжетних задач він виділяє вже вісім етапів:

1-й етап — аналіз задачі (змістовний, логічний, і в ряді випадків — і семантичний);
2-й етап — складання моделі задачі;
3-й етап — пошук способу розв'язування;
4-й етап — здійснення розв'язання задачі;
5-й етап — перевірка розв'язання задачі;
6-й етап — дослідження задачі та її розв'язання;
7-й етап — формулювання відповіді задачі;
8-й етап — навчально-пізнавальний аналіз задачі та її розв'язання.

Автор зазначає, що із зазначених восьми етапів чотири є обов'язковими: аналіз задачі, пошук способу розв'язання, здійснення розв'язання і формулювання відповіді; і вони мають місце в процесі розв'язування будь-якої задачі [561].

Таким чином, в основному думки Л. М. Фрідмана щодо етапів процесу розв'язування задач збігаються з пропозиціями інших методистів, але Л. М. Фрдіман розглядає ще й необов'язкові етапи, які мають місце при розв'язуванні складних або якихось особливих задач.

Оскільки моделювання має місце і на етапі аналізу задачі, і на етапі пошуку розв'язування задачі, тому ми не будемо складання моделі виділяти окремим етапом. Ми в нашому дослідженні будемо розглядати такі ***етапи процесу розв'язування сюжетної задачі*:**

1. Ознайомлення з задачею. Аналіз тексту задачі.
2. Пошук розв'язування задачі.
3. Реалізація плану розв'язування задачі. Запис розв'язання і відповіді.
4. Робота над задачею після її розв'язання.

Перші три етапи повністю збігаються з етапами процесу розв'язування задачі, що визначені методистами та психологами. Останній етап співвідноситься з етапами: з'ясування того, що здобутий результат задовольняє умові задачі, перевірка розв'язання; аналізу розв'язання, обґрунтування прийомів розв'язування, розгляд інших способів розв'язування (М. О. Бантова, Г. В. Бельтюкова, М. В. Богданович, М. І. Моро); та етапами: перевірки розв'язання задачі, дослідження задачі і її розв'язання, навчально-пізнавального аналізу задачі і її розв'язання (Ю. М. Колягін, З. І. Слєпкань, Л. М. Фрідман).

Тепер слід розглянути, з яких дій чи операцій складається діяльність з розв'язування задачі. Центральним питанням аналізу мікроструктури діяльності з розв'язування задач є встановлення характеристик і класифікація елементарних кроків цієї діяльності.

Задача розв'язується виконанням певних дій. Дія розглядається як одиниця аналізу будь-якої діяльності людини, в тому числі й психічної. С. Л. Рубінштейн, характеризуючи дію, писав, що це така «клітинка», в якій можна знайти зачатки усіх елементів психіки в їх єдності [451]. Причому О. М. Леонтьєв акцентував увагу на тому, що дії — не особливі «окремості» у складі діяльності; діяльність людини не існує інакше, як у формі дії або ланцюжку дій. Один і той самий процес виступає як діяльність у своєму відношенні до мотиву, як дія або ланцюжок дій — у своєму підпорядкуванні меті. Таким чином — дія не компонент і не одиниця діяльності: це саме її «утворююча» [288].

В. В. Давидов зазначає, що виконанню дій відповідають певні мотиви, а самі дії у процесі розв'язування задач здійснюються за наявності тих чи інших матеріальних або знаково-символічних засобів [146].

П. Я. Гальперіним визначено структуру дії та її функціональні частини. Як структурні елементи будь-яка дія містить предмет дії, мотив, мету, операції, що реалізують цю дію; орієнтувальну основу дії, яка містить інформацію, необхідну суб'єкту для виконання дії, та її продукт. При функціональному аналізі дії автор виокремив чотири складові: орієнтувальну (керуючу), виконавчу (робочу), контролюючу та корекційну [115; 123; 525].

П. Я. Гальперін висував положення про необхідність детального дослідження операційного змісту діяльності. Для цього вченого операції в їх психологічному аспекті — це передусім певні способи орієнтування в умовах дії, завдяки яким діяльність може розглядатися як змістовний процес, адекватний тим об'єктивним індивідуально-змінним умовам, в яких де-факто опиняється суб'єкт діяльності [373].

У проблемології (за Л. М. Фрідманом) вважається, що елементарні дії — операції в процесі діяльності з розв'язування задачі полягають у виявленні, аналізі і застосуванні, для здійснення розв'язання, елементів кожної з наступних груп:

1. Група висловлювань (тверджень), які приймаються за істинні, і висловлювальних функцій (форм), що задані явно або неявно в задачі.
2. Група вимог і запитань задачі.
3. Група загальних положень, що утворюють теорію задачі.
4. Група правил логічних перетворювань висловлювань і запитань та утворення силогізмів (правил виводу та отримання наслідків).
5. Група особливих евристичних правил та схем, що спрямовують процес діяльності з розв'язування задач [559].

Дії, що складають етапи процесу роботи над задачею та належать до 1 — 4-ї груп, ми розглянемо в параграфі 2.4 при визначенні операційного складу загального уміння розв'язувати сюжетні задачі.

Особливий інтерес являють елементарні дії — операції, що належать до останньої групи. Розглянемо їх.

Діяльність з розв'язування задач може здійснюватися як алгоритмічним і евристичним способом. Якщо учень виконує приписи, то в цьому випадку здійснюється алгоритмічний спосіб діяльності з розв'язування задач, який характеризується тим, що учень здійснює власну діяльність у відповідності з відомим йому алгоритмом. Елементарні дії полягають у застосуванні відомого алгоритму розв'язання даного класу задач. Але для цього під час аналізу задачі треба встановити належність даної задачі до задач певного класу. Евристичний спосіб діяльності з розв'язування задач відрізняється відсутністю у школяра такого алгоритму, і головна частина його діяльності полягає у пошуках плану або способу розв'язування даної задачі. Для задач неалгоритмічного характеру застосовуються різноманітні евристичні правила і схеми, застосування яких не гарантує знаходження системи елементарних дій, які призведуть до повного розв'язання задачі.

Якщо, розпочинаючи розв'язування математичної задачі, учень не має орієнтувальної основи для своїх дій, то він її відшукує, виконуючи пошукову (евристичну) діяльність. Така діяльність здійснюється за допомогою особливих прийомів — евристик. Під евристиками А. К. Артьомов розуміє прийоми пошуку розв'язання задач, інакше — це системи розумових дій, операцій, виконання яких підвищує ймовірність знайдення розв'язку [33].

Між тим, у психолого-дидактичній літературі існують й інші трактування поняття «евристики». По-перше, евристики як всілякі засоби (графічні схеми, друковані інструкції, усні вказівки викладача, наочні матеріали, відомості тощо), застосування яких робить можливим і полегшує розв'язання задачі (М. Б. Балк, Г. Д. Балк, Г. О. Балл, К. Г. Юнг та ін.). По-друге, евристики як прийоми розв'язування певних класів задач, що не піддаються чіткій алгоритмізації (В. І. Андрєєв, О. Б. Єпішева, В. І. Крупич, О. І. Скафа, З. І. Слєпкань та ін.). І, нарешті, евристики, як специфічні розумові прийоми, що складають пошукові стратегії і тактики, так само, як і А. К. Артьомов, розуміють Н. І. Зільберберг, Л. Ларсон, Ю. М. Колягін, Ю. М. Кулюткін, Г. І. Саранцев, О. І. Скафа, Л. М. Фрідман та ін.

О. І. Скафа виділяє евристичні орієнтири, які дають лише загальний напрямок думки, не гарантуючи при цьому одержання потрібного результату (евристичні правила-орієнтири, евристичні схеми, евристичні орієнтири специфічного характеру тощо), та спеціальні евристичні приписи, які не лише вказують логічний шлях, але й дають часткові вказівки, роз'яснення того, як доцільніше це зробити (евристичні приписи). Під евристичними приписами розуміються системи евристик в формі запитань, вказівок-порад, цілеспрямоване застосування яких не детермінує діяльність розв'язувача, але активно формує в нього загальну стратегію раціональнішого пошуку розв'язування задачі. Треба зазначити, що О. І. Скафа розглядає евристико-дидактичні конструкції як системи задач і навчальних програм, які залежно від змісту і напряму запроектованої в них діяльності можуть використовуватися як елементи управління евристичною діяльністю учнів при розв'язуванні математичних задач. Причому при розв'язуванні задач вимагається: сформувати потребу в учня в оволодінні прийомами евристичної діяльності; познайомитися з технологією виявлення евристик, їх реалізацією та систематизацією [475].

Оволодіння учнями початкових класів хоч би деякими узагальненими типовими евристиками, вважає А. К. Артьомов, має істотне значення у розвивальному навчанні математики: ці евристики виступають і засобом здійснення дітьми творчої діяльності, і показником їх розумового розвитку.

У проблемології здійснено спробу знаходження загальних механізмів використання відомих евристичних правил для розв'язання будь-яких нестандартних задач. Ці загальні механізми Л. М. Фрідман називає «евристичними схемами або загальними правилами» [559], Г. О. Балл говорить про «евристичні засоби» [48]. Серед евристичних засобів Г. О. Балл виділяє евристичні відомості, евристичні приписи, евристичні рекомендації. Подібно алгоритмам і квазіалгоритмам розв'язування задач, евристичні відомості, приписи і рекомендації можуть знаходитися у розпорядженні того, хто розв'язує задачу, в різній формі: чи то у формі зовнішньої опори, чи то у формі внутрішнього надбання [48].

Докладні евристичні рекомендації подані в роботах М. Б. Балка, І. І. Грудьонова, Є. С. Каніна, А. Ю. Карлащук, Ю. М. Колягіна, Ю. А. Паланта, І. Б. Писаренко, Д. Пойя, Г. І. Саранцева, О. І. Скафи, З. І. Слєпкань, А. А. Столяра, Л. М. Фрідмана та інших. Їх цінність полягає в тому, що вони систематизують відомі прийоми розв'язування будь-яких задач, є узагальненими і, безумовно, корисними. Автори пропонують для цього застосовувати наступні евристичні прийоми: подання задачі у просторі станів; зведення задачі до системи підзадач; переформулювання даної задачі в іншу, більш знайому; індуктивні міркування; введення допоміжної змінної; аналогію, узагальнення тощо.

Більш докладне дослідження загальних прийомів розв'язування задач проведено Ю. М. Колягіним. Вкажемо ті з них, які можна застосувати для розв'язання сюжетних задач. Це такі вміння:

1. Аналізувати дану ситуацію з метою виявлення істотного (дані, відомі, шукані, невідомі елементи, властивості і відношення); з метою встановити повноту (достатність, недостатність, надмірність), несуперечність (або суперечність), незалежність (або залежність) умови задачі або її елементів.

2. Співвідносити невідомі елементи задачі з відомими (дані з шуканими); розпізнавати відомі або дані елементи в різноманітних (в тому числі й нових) поєднаннях; зіставляти дану задачу з відомими задачами (класами задач).

3. Конструювати простіші математичні моделі даної задачної ситуації (а також графічні, схематичні зображення задачі); ототожнювати елементи задачі з елементами моделі; встановлювати ізоморфність моделі і даної задачної ситуації в істотних для розв'язання задачі властивостях та відношеннях.

4. Здійснювати розумовий експеримент, передбачати його проміжні і кінцевий результати; індуктивно складати гіпотези, висловлювати здогадки; розбивати дану задачу на підзадачі (поступове розв'язання яких веде до встановлення елементів, важливих для розв'язання основної задачі).

5. Інтерпретувати результати роботи над моделлю даної задачної ситуації; кодувати мову ситуації в термінах моделі і кодувати (в термінах ситуації) результати, виражені мовою моделі.

6. Оформляти власні думки (знайдене розв'язання задачі) коротко та чітко (символічно, текстом, графічно тощо); наочно ілюструвати провідні ідеї.

7. Критично оцінювати результати розв'язання задачі з різних точок зору (правильності, економічності, естетичності, вагомості тощо); узагальнювати результати розв'язання задачі; досліджувати можливі часткові й особливі випадки [239, 240].

Схожого підходу притримується І. А. Горчакова, яка досліджувала систему математичних задач як засіб формування евристичної діяльності учнів основної школи. Автор виділяє наступні базові евристики: залучення допоміжних моделей; інтерпретація формулювання задачі іншою мовою (геометричною, алгебраїчною, фізичною); переформулювання задачі тією ж мовою; розбиття складної задачі на підзадачі; розглядання окремих (граничних) випадків; введення допоміжних елементів; скорочений перебір; тимчасове відкидання частини умови задачі; застосування допоміжних побудов; ворушіння окремих параметрів системи; оцінювання і прикидки; наведення контрприкладу [133].

Л. М. Фрідман наводить евристичні правила:

1. Правило Яновської: розв'язати задачу — значить звести її до задач, що вже розв'язані.

2. Правило Тартаковського: щоб розв'язати задачу, можна або відкидати із складної задачі окремі її частини доти, поки не стане ясно, як розв'язати частину, що залишилася, або аналі-

зувати задачу багаторазово доти, поки не виникне ідея її розв'язання [559].

Оцінюючи можливість застосування розглянутих евристичних засобів, слід зважати на вікові особливості. Так, у зв'язку з тим, що довільність, рефлексія і внутрішній план дій у молодшого школяра формуються за сприятливих умов лише наприкінці початкової школи, вони не зможуть скористатися порадою розв'язати частину задачі, якщо вони не можуть розв'язати усієї задачі, тому що в учнів не сформовано вміння розбивати задачу на частини. Те саме можна сказати про більшість порад щодо відшукання плану розв'язання задачі. Отже, для початкового навчання розв'язування задач необхідна конкретизація цих рекомендацій. Типові евристики, які доцільно формувати в учнів початкової школи, виділені і описані А. К. Артьомовим [33]:

— виділення із тексту задачі змістовних одиниць, їх перетворення і комбінування з умовою і запитанням задачі; формулювання простої задачі з частини умови даної складеної задачі;

— перекодування інформації, а саме побудова різноманітних моделей однієї й тієї самої задачі;

— переформулювання умови і (або) запитання задачі на рівносильні;

— розчленування запитання задачі та запитань, які виникають по ходу її розв'язування, на допоміжні; добір допоміжного запитання до даного;

— отримання висновків з того, що дано (вичерпання з даного математичного об'єкту особливостей, що є в ньому);

— постановка запитання до даних і результатів, отриманих під час розв'язування задачі;

— введення допоміжних позначень, умов (наприклад, у співвіднесенні з життєво практичними ситуаціями).

Серед запропонованих евристик немає повністю ізольованих, вони взаємопов'язані між собою і взаємозалежні. Причому, одні з них порівняно прості за складом, інші — є більш складними. Але постає питання про виділення домінуючих евристик. Тобто таких, які актуалізують багато інших, що формуються при цьому попутно.

О. В. Баринова, проаналізувавши операційний склад діяльності з розв'язування сюжетних задач у початкових класах, дійшла висновку, що як домінуючу евристику слід використовувати моделювання, тому що саме моделювання забезпечує необхідне орієнтування в задачній ситуації. При цьому дослідниця має на увазі моделювання як задачної ситуації (побудову допоміжних моделей — предметних, схематичних, словесних), так і процесу її розв'язування (схеми аналітичного і синтетичного розбору задачі, «дерева міркувань»). Це обумовлено тим, що моделювання:

а) забезпечує орієнтувальну основу розв'язування задачі;

б) дозволяє зовнішнім засобам організувати, впорядкувати внутрішній план дій і завдяки цьому дозволяє керувати діяльністю учнів з метою її вдосконалення;

в) містить можливості для розробки завдань, що адекватні різним рівням розвитку учнів;

г) дозволяє створити умови для переходу учня на більш високий рівень навчання, бо легко закладається у навчальні завдання з урахуванням наступності між різними рівнями;

д) сприяє формуванню навичок самоконтролю.

Моделювання задачної ситуації відображає сутність розглянутих в задачі об'єктів, зв'язків і відношень між ними. Така діяльність вимагає від учня глибокого аналізу задачі, а побудована модель допомагає з'ясувати приховані залежності між величинами. Моделювання пошуку розв'язування організує і впорядковує процес пошуку шляху розв'язування задачі [54].

У методиці математики питання про складання і застосування моделей є досить розробленим. Моделювання задачної ситуації у вигляді схематичних рисунків докладно вивчалося методистами Н. Б. Істоміною, І. Б. Нефьодовою, В. В. Малихіною, П. У. Байрамуковою, Н. А. Матвєєвою та ін. [220; 318; 327; 328]. Схематичні рисунки міцно увійшли у практику розвивального навчання, широко застосовуються у підручниках з математики Л. Г. Петерсон [400—415], Е. І. Александрової [3—8], Н. Б. Істоміної [206—209] та ін. Але інша справа з моделюванням процесу пошуку розв'язування задачі.

Зазначимо, що в методиці роботи над задачами відомі способи пошуку розв'язування задачі — міркування від запитання задачі до числових даних (аналіз), від числових даних до запитання (синтез) і змішаний спосіб [35; 522; 572]. Навчити учнів користуватися вказаними прийомами міркувань дозволяють відповідні графічні схеми. У початковому навчанні математики таку схему прийнято називати або «деревом міркувань» (А. К. Артьомов), або «схемою аналізу чи схемою синтезу» (М. О. Бантова, Г. І. Мартинова). Схеми аналізу та синтезу застосовуються у чинних підручниках з математики для початкової школи М. В. Богдановича, але не можна говорити про їх широке використання вчителями при розв'язуванні задач. За нашими спостереженнями, більшість вчителів не застосовують моделювання пошуку розв'язування сюжетних задач, вважаючи це зайвою витратою часу.

Між тим, така схема міркувань несе подвійне навантаження: з одного боку, вона є абстрактною моделлю задачі, а з іншого — схема досить конкретна: вона наочна, вона фактично втілює ті розумові дії, які учень виконує, розв'язуючи задачу, тобто є зовнішнім виразом внутрішніх дій. Можливість утілити ці дії та їх результат у зовнішню опору служить для багатьох учнів тією самою необхідною сходинкою, піднявшись на яку, вони можуть рухатися далі. Таким чином, моделювання пошуку розв'язування забезпечує орієнтування в задачній ситуації.

Відомо, що моделювання задачного формулювання є ефективним засобом знаходження різних способів розв'язування задачі [37; 89; 553; 575]. Нерідко за допомогою перекодування інформації, яку дано в задачі, а саме побудови різних моделей задачі, вдається виділити різні логічні основи її умови. О. В. Баринова довела, що в процесі розв'язування задачі за допомогою моделювання (в двох видах) реалізуються розумові дії, які необхідні і достатні для її розв'язання, і вона робить висновок, що ***моделювання є домінуючою евристикою*** [54].

Згідно з характеристикою засобів розв'язування задач за Г. О. Баллом [48], моделювання може виступати «внутрішнім» або «зовнішнім» таким засобом. Внутрішнім засобом воно стає в тому випадку, коли учень оволодів прийомом моделювання, в нього сформовано відповідне навчальне вміння і учень користується ним при розв'язуванні задачі. Зовнішнім засобом розв'язування задачі моделювання виступає тоді, коли учень, не володіючи цим прийомом, використовує готову модель для розв'язування задачі (в якості допоміжного засобу).

Таким чином, щоб моделювання стало внутрішнім засобом розв'язування задач, треба організувати процес навчання розв'язування задач особливим чином. Спочатку вчитель, керуючи діяльністю учнів із складання схематичних рисунків їх аналізу на матеріалі простих задач, поступово підводить учнів до самостійного складання таких моделей. Знаючи можливі варіанти схематичних рисунків, що ілюструють окремі види співвідношень, діти застосовують їх і при створенні моделі складеної задачі, на перших етапах під керівництвом учителя, а далі самостійно. В результаті такої роботи школярі усвідомлюють, якщо розв'язання задачі викликає труднощі, то по-перше слід виконати схематичний рисунок задачної ситуації та проаналізувати його. Такі моделі задач є дуже корисними для молодших школярів, виходячи з наочно-образного типу мислення, який домінує в них.

Аналогічного підходу дотримуємось і при навчанні учнів моделюванню пошуку розв'язання задачі. Складання «дерева міркувань» є предметом засвоєння учнями; вони вчаться його складати під керівництвом вчителя, а далі виконують міркування та ілюструють їх самостійно. Якщо при розв'язуванні задачі, яка становить певні труднощі для дитини, складання та аналіз схематичного рисунка не допомогли відразу перейти до плану розв'язування, то слід виконати аналітичні (від запитання до числових даних) або синтетичні (від числових даних до запитання задачі) міркування, ілюструючи їх схематично.

Як свідчить наш особистий досвід навчання молодших школярів розв'язування задач, учні початкової школи здатні опанувати вміння складання схематичного рисунка та «дерева міркувань», але це можливо за умов управління процесом розв'язування задач з боку вчителя. Молодшим школярам можна і треба пропонувати правила-орієнтири методів, способів розв'язування сюжетних задач.

1.4.3. Психологічна структура діяльності з розв'язування задач

Нагадаємо, що у психолого-дидактичній науці виділяються два види структур в описі діяльності з розв'язування задач: зовнішня і внутрішня. Ми проаналізували макроструктуру і мікроструктуру діяльності з розв'язування задач, які належать до зовнішньої структури. Перейдемо до розгляду внутрішньої структури процесу розв'язування задач.

Процес розв'язування сюжетних задач дуже складний. Якщо цей процес розглядати з математичної точки зору, то важливо, на які поняття учень спирається, щоб розглянути усі відношення; які математичні операції слід виконати, щоб відповісти на запитання задачі; в якому порядку побудувати власну структуру дій для досягнення мети; що обрати за основу власних дій (зовнішня структура діяльності з розв'язування задач). Якщо його розглядати з точки зору психолога, то треба встановити: з яких розумових дій складається процес розв'язування, як учень здійснює аналіз, планує розв'язання, контролює себе, як він розкриває зв'язки між величинами тощо (внутрішня структура діяльності по розв'язуванню задач).

Ці положення відповідають результатам досліджень В. Л. Ярощука. Аналізуючи процеси розв'язування простих сюжетних задач, він дійшов висновку, що розв'язання задачі можна розглядати з двох точок зору:

1) чи є адекватною математична структура розв'язування задачі;
2) яка психологічна структура цього розв'язування.

Психологічну (внутрішню) структуру розв'язання сюжетних задач складають усі ті розумові процеси, що відбуваються у психіці учня і призводять до виконання певних дій у певній послідовності. Автор вважає, що саме знання психологічних структур процесу розв'язування задач повинно бути покладено в основу методики навчання учнів розв'язування задач [617].

Ю. М. Колягін розглядає внутрішню структуру процесу розв'язування математичних задач, як певну сукупність факторів. Подібно до В. Л. Ярощука, він відносить до неї розумові операції, які забезпечують сприймання і переробку умови задачі, внутрішній механізм пошуку і планування розв'язання, здійснення контролю, певні стани мислення, що забезпечують успішність процесу розв'язування задачі або гальмують його [241].

Психологічну структуру розв'язування сюжетних задач вивчали: Н. О. Менчинська, К. А. Славська, З. І. Камикова та інші. Ще С. Л. Рубінштейном були визначені характеристики мислення під час розв'язування задач, такі, як аналіз, синтез, аналіз через синтез, абстрагування і узагальнення. Ряд психологів (Н. О. Менчинська та інші) на підставі експериментальних досліджень довели особливу роль цих розумових процесів при розв'язуванні сюжетних задач. З. І. Калмикова, досліджуючи процеси аналізу і синтезу при розв'язуванні сюжетних задач, підкреслювала необхідність навчання учнів правильного аналізу задачі, способам розкриття відношень, що пов'язують шукане і дані.

З. І. Калмикова зазначає, що розв'язання задачі добре знайомої структури спирається на відновлення зв'язків, що раніш закріплені, асоціацій, що раніше склалися. Розв'язання нових задач передбачає формування нових асоціацій, які виникають на підставі старих. У розв'язуванні нової задачі два етапи: I етап загального орієнтування в умові задачі; II етап детального розбору. Таким чином, дослідниця дістає висновку, що аналітико-синтетична діяльність учнів при розв'язуванні сюжетних задач спрямована на аналіз даних, шуканого, а також на виділення закономірностей, які дозволяють встановити взаємовідносини даних між собою і з шуканим.

Отже, загальні розумові дії, передусім, аналізу і синтезу лежать в основі процесу розв'язування сюжетних задач молодшими школярами. Між тим, слід мати на увазі, що за даними А. А. Люблинської [309], Г. П. Антонової [14] та інших для молодших школярів характерним є низький рівень виконання аналізу і синтезу і нерівномірний їх розвиток, який полягає у відставанні синтезу. Дитині легше виконати аналіз, виділивши частини об'єкту, ніж поєднати їх у одне ціле і визначити співвідношення між ними. Особливо психологічно важким для дітей є поєднання того, що у їх досвіді зустрічалося окремо (А. Валлон).

Особливості здійснення молодшими школярами аналізу і синтезу впливають на виконання операції порівняння. В основі розв'язування задач знайомої математичної структури лежить саме порівняння. В. Н. Осинська зазначає, що при порівнянні задач треба звернути увагу на дані, що містяться в умовах, характер зв'язку між даними та шуканим, тому що саме це визначає спосіб їх розв'язування. У задач одного типу є спільне в суттєвому: структурі, умові, зв'язках між даними умови і шуканими величинами; відмінності ж стосуються несуттєвого в умові і розв'язках задач [390].

Порівняння — обов'язкова умова будь-якого абстрагування і будь-якого узагальнення. Розв'язування із наступним порівнянням кількох задач окремого виду надає можливість узагальнити спосіб їх розв'язування. Узагальнення — складний прийом розумової діяльності, який передбачає уміння аналізувати, порівнювати, виділяти суттєве, головне, абстрагувати, синтезувати [147].

Г. П. Антонова, вивчаючи індивідуальні особливості розумової діяльності молодших школярів, провела ряд експериментів по виявленню відмінностей у здійсненні ними операцій аналізу і синтезу, узагальнення і абстрагування; у виявленні гнучкості розумових процесів. В результаті встановлено, що рівні узагальнення і абстрагування знаходяться у відповідності з рівнями аналізу і синтезу: чим вищий рівень аналізу і синтезу, тим вищий рівень узагальнення і абстрагування. Крім цього, високий ступінь гнучкості мислення виявляється у тих учнів, яким притаманний високий рівень розвитку розумових процесів, і навпаки.

Оскільки прийом узагальнення посідає важливе місце у психологічній структурі процесу розв'язування сюжетних задач, то не можна не цікавитися віковими особливостями молодших школярів щодо здійснення узагальнення. Досліджуючи розвиток мислення молодших школярів засобом розв'язування задач, А. К. Медигалієва дійшла висновку про те, що розвиток узагальнення при розв'язуванні задач у дітей відбувається в кількох напрямках:

По-перше, від узагальнень, які спираються на окремі зовнішні неістотні ознаки, учні переходять до узагальнення за істотними ознаками.

По-друге, узагальнення, яке має широкий, глобальний характер, замінюється більш диференційованим.

По-третє, вдосконалюється зв'язок конкретного з загальним [338].

В. В. Давидов виділяє два типи узагальнень при розв'язуванні задач [145]:

1. Узагальнення через аналіз умови і вимоги задачі, що дозволяє абстрагувати її істотні залежності (теоретичний шлях узагальнення).

Завдяки цьому, розв'язання задачі відразу набуває узагальненого значення і переноситься на цілий клас задач, забезпечуючи теоретичний підхід з позицій єдиного типу розв'язання.

2. Узагальнення через порівняння (емпіричний шлях узагальнення).

Узагальнення здійснюється шляхом розгорненого порівняння задач. При цьому кожна наступна задача розв'язується як відносно окрема через спроби і помилки. Лише поступово в цих розв'язаннях знаходяться схожі моменти, що призводить до узагальнення.

Отже, під час розв'язування будь-якої задачі учень виконує аналіз: відокремлює запитання від умови, виділяє дані й шукані числа; складаючи план розв'язування, він виконує синтез, користуючись при цьому конкретизацією (у думці «малює» умову задачі), а потім абстрагуванням (абстрагуючись від конкретної ситуації, вибирає арифметичні дії); внаслідок багаторазового розв'язування задач певного виду учень узагальнює знання зв'язків між даними і шуканим, чим узагальнюється спосіб розв'язування задач цього виду [420; 471].

Таким чином, в основі процесу розв'язування сюжетних математичних задач лежать загальні розумові дії (зокрема, аналізу, синтезу, абстрагування та узагальнення), які складають внутрішню структуру процесу розв'язування сюжетних задач.

Досліджуючи зовнішню структуру діяльності молодших школярів з розв'язування сюжетних задач, а саме її мікроструктуру, ми впевнилися в тому, що домінуючою евристикою є моделювання. Розглянемо його з психологічної точки зору.

Моделювання передбачає дії кодування, декодування і перетворення [526]. Під кодуванням розуміється «переклад» об'єкта (задачної ситуації) на мову знаково-символічних засобів. Декодування виконується при співвіднесенні моделі (готової або отриманої) з об'єктом моделювання. При цьому нерідко вдається отримати нову інформацію про об'єкт, що моделюється, глибше проникнути у його суть. Дія перетворення дозволяє учням перегрупувати елементи моделі, доповнити її елементами, яких бракує.

Н. А. Тарасенкова пов'язує побудову моделі задачі чи вибір схеми її розв'язування з декодуванням вихідної інформації. За рахунок уведення кодування (декодування) у навчальну діяльність учнів видається можливим здійснювати переходи до різних видів знаково-символічного вираження навчального змісту. Такі переходи є необхідним компонентом теоретичного мислення [529].

Аналогічних висновків дістала під час власних експериментів А. К. Мендигалієва, яка також пов'язує процес розв'язування задач з виконанням дії кодування. Автор вважає, що через розвиток кодування в процесі навчання вдається забезпечити повну і точну взаємодію образних і вербальних компонентів, зробити більш легким і доступним, досконалим взаємне перетворення образів і слів. Розв'язуючи задачу, учні звертаються до її словесної моделі (тексту задачі), до її словесного короткого запису, графічної ілюстрації, тобто відбувається кодування та перекодування інформації. Крім того, кодування здійснюється в процесі розв'язування задачі, коли відбувається перехід до складання математичної моделі.

Дослідниця виходила з того, що в учнів достатньою мірою сформована здатність до кодування, якщо вони можуть сприймати і застосовувати інформацію, яка подана в різній формі, а також перекладати інформацію з однієї форми у іншу [338]. Ми вважаємо, що це положення може бути корисне для розробки методики навчання молодших школярів розв'язування задач, а саме для формування моделювання, в основі якого лежить кодування. Тому, треба пропонувати учням вправи на переклад інформації з однієї форми у іншу та «читання» інформації, що подана в різних формах. Так, в експериментальному навчанні вже першокласникам пропонувалися завдання на вибір схематичного рисунка до тексту задачі та навпаки — тексту задачі до схематичного рисунка, вибір схематичного рисунка до математичного виразу та навпаки, вибір тексту задачі та схематичного рисунка до математичного виразу і навпаки, на створення схематичного рисунка до тексту задачі і навпаки тощо, з якими, до речі, вони успішно справлялися.

Цей підхід набирає ваги ще й тому, що за даними психологів саме в молодшому шкільному віці йде формування кодування (через спеціально організовану діяльність), тобто відбувається засвоєння способів перекладу образів реального світу в систему понять, що утворюють фонд знань особистості, яка розвивається [323].

Зрозуміло, що діяльність з розв'язування задач не обмежується лише дією кодування; у складі цієї діяльності вчені виділяють ще й дії прогнозування і переносу. А. К. Мендигалієва довела, що від рівня розвитку дій кодування, прогнозування і переносу залежить правильність і свідомість розв'язання задач [338]. Вагомість дій кодування, прогнозування і переносу, не лише для забезпечення процесу розв'язування задач, а й для розвитку особистості молодшого школяра, підкреслює Л. А. Матвєєва, вважаючи, що володіння цими діями визначає розумовий розвиток молодшого школяра.

Певний рівень прогнозування — передбачення результату діяльності, того, що повинно відбутися, формулювання догадки, гіпотези, за даними Л. Н. Кутергіної [274] та Л. А. Регуш [442], — визначається діями планування і встановлення причинно-наслідкових зв'язків. Прогнозування передбачає наявність знання про основи прогнозу, відповідності причин і наслідків, про можливі варіанти розв'язування задач.

Щодо розв'язання задач, вважається, що в учнів достатньою мірою сформована властивість прогнозування, якщо вони передбачають зміни однієї величини при зміні другої (при сталій третій), можуть виконати різні способи розв'язування задачі і обрати оптимальний [338].

Результати досліджень Л. Н. Кутергіної та Л. А. Регуш свідчать, що в період від 9—10 років до 11—12 років відбуваються істотні зміни в процесі прогнозування у бік більшої узагальненості, повноти і перспективності.

Із вищесказаного випливає, що при створенні методики навчання молодших школярів розв'язування задач, починаючи з 3-го класу, слід широко застосовувати і розвивати дію прогнозування при розв'язуванні типових задач з пропорційними величинами. В експериментальному навчанні було передбачено ознайомлення третьокласників із різними групами пропорційних величин та знаннями про зміну однієї величини залежно від зміни другої величини при сталій третій величині. Ці знання опрацьовувалися на матеріалі простих задач, що надало можливість при розв'язуванні типових задач на знаходження четвертого порційного робити прикидку відповіді, розв'язувати їх способом відношень; а також робити прикидку при розв'язуванні задач на пропорційне ділення, на знаходження невідомих за двома різницями; використовувати знання про зміну відстані при зміні швидкості при сталому часі при складанні короткого запису задач на рух тощо. Треба зазначити, що експериментальне навчання підтвердило можливість спеціальної роботи з розвитку прогнозування у молодших школярів, починаючи з 8 років.

При розв'язуванні задач важливу роль відіграє планування, яке пов'язане з формуванням властивостей прогнозування. Внутрішніми засобами планування, згідно з С. Л. Рубінштейном, виступають аналіз, синтез, порівняння, узагальнення тощо. Для молодших школярів визначені такі рівні планування:

1) покрокова зміна плануючих та виконавчих дій;
2) складання найближчого плану дій;
3) створення кількох варіантів плану і вибір більш раціонального [338].

Ці дані психологічної та дидактичної науки ми також використовували в експериментальному навчанні при формуванні у молодших школярів умінь розв'язувати задачі, а саме при застосуванні евристичних розпоряджень — квазіалгоритмів розв'язування задач. Так, для роботи над простими і складеними задачами дітям були запропоновані певні пам'ятки, за якими будувалися запитання вчителя при фронтальній роботі над задачею та які застосовувалися учнями при самостійній роботі над задачами. Причому, учням пропонувалося спочатку прочитати завдання пам'ятки, а потім його виконати; за допомогою мимовільного запам'ятовування школярі засвоювали порядок виконання дій при розв'язуванні задач. Крім того, діти мали певну свободу у виборі власних кроків по розв'язуванню задачі: після аналізу задачного формулювання учні могли відразу перейти до складання плану розв'язування задачі; якщо складання плану розв'язання становило труднощі для них, то вони виконували схематичний рисунок; якщо ж і це не призводило до визначення плану розвязання, то діти виконували аналітичні або синтетичні міркування, ілюструючи їх на схемі аналізу.

Можливість використання сформованих навички або вміння у схожих умовах у психології визначається як феномен переносу [324; 224]. Є. М. Кабанова-Меллер, С. Ф. Жуйков, В. І. Решетникова та інші досліджували перенос прийомів і способів розумової діяльності. Саме перенос в нові умови вважала Є. М. Кабанова-Меллер показником засвоєного прийому. Одним із показників сформованості переносу знань, навичок і умінь у молодших школярів є можливість застосування сформованих умінь при розв'язуванні задач творчого характеру і задач іншого виду.

Психологічною основою переносу вчені вважають узагальнення [451]. У відповідності з цим підходом К. А. Славська експериментально довела, що за переносом розв'язання математичних задач сховані процеси узагальнення і конкретизації.

Це положення психологічної науки нами було покладено в основу розробки методики навчання молодших школярів розв'язування «типових» задач. В експериментальному навчанні ми проводили спеціальну роботу з узагальнення математичної структури та плану розв'язування задач певного виду, який учні успішно переносили на інші задачі виду що розгладався та на задачі споріднених видів.

Отже, до складу психологічної основи діяльності з розв'язування задач, поряд із загальними розумовими діями: аналізом, синтезом, порівнянням, абстрагуванням, узагальненням, входять дії кодування (декодування), прогнозування і переносу. Розвиток у молодших школярів дій кодування, прогнозування та переносу врахований нами при розробці методики навчання розв'язування задач.

Розділ 2

ПСИХОЛОГО-ДИДАКТИЧНІ ЗАСАДИ ФОРМУВАННЯ УМІНЬ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ

2.1. ПРОБЛЕМА ФОРМУВАННЯ УМІНЬ РОЗВ'ЯЗУВАТИ СЮЖЕТНІ ЗАДАЧІ В ДИДАКТИЦІ МАТЕМАТИКИ

2.1.1. Зміст поняття «уміння розв'язувати задачі». Види умінь

В дидактиці та методиках навчання навчальна діяльність розуміється як процес оволодіння різноманітними навичками і уміннями, в основі формування яких лежать знання (І. Я. Лернер, М. М. Скаткін, Г. І. Батурина, Н. Ф. Тализіна, Т. І. Шамова, А. В. Усова та інші).

Навчальна діяльність учня складається з окремих дій. Ці дії досить різноманітні і утворюють складну ієрархічну структуру. Серед них є найпростіші, які виконуються багаторазово, практично на кожному кроці (наприклад, написання цифр, читання запису чисел й тощо). Кожна з цих дій входить як складовий елемент у більш складні дії, тому потрібно, щоб учень виконував їх швидко і безпомилково, тобто автоматизовано. Таке автоматизоване виконання дій й називають навичками. Навик, на думку С. Л. Рубінштейна, виникає як свідомо автоматизована дія, а потім функціонує як автоматизований спосіб виконання дії. Те, що дана дія стала навиком, означає, що індивід у результаті вправ набув можливість здійснювати дану операцію, не роблячи її виконання власною свідомою метою [451].

Л. М. Фрідман зазначає, що для розв'язування сюжетних задач учень повинен володіти діями застосування знань і навиків. Уміння — це свідоме застосування знань і навиків, що є в учня, для виконання складних дій у різноманітних умовах, тобто для розв'язування відповідних задач (виконання складаної дії виступає для учня як розв'язування задачі) [560].

Такого ж трактування поняття уміння дотримуються С. Ю. Головін [507] та В. Б. Шапар [587], і вважають умінням освоєний суб'єктом спосіб виконання дії, яка забезпечується сукупністю придбаних знань і навичок. Таким чином, ці вчені трактують поняття «уміння» ширше, ніж поняття «навик».

На відміну від попередніх авторів, психологи В. В. Давидов, В. П. Зинченко, В. Г. Мещеряков та інші розглядають навик як автоматизоване уміння. За цим підходом уміння — проміжний етап оволодіння новим способом дії, заснованим на якому-небудь правилі (знанні), що відповідає правильному використовуванню цього знання в процесі розв'язування певного класу задач, але рівня навику він ще не досягнув. На етапі умінь засвоєний спосіб дії регулюється знанням. У міру наступного тренування, що включає розв'язання задач в нових умовах, досягається перетворення уміння в навик, при цьому відбувається подальша зміна орієнтувальної основи регуляції дії, а сама дія виконується правильно без безпосереднього співвідношення з правилом (знанням). Процес його виконання протікає у формі автоматизованого (неусвідомлюваного) психічного регулювання, а звернення до знання відбувається тільки у випадках утруднень [431].

Пояснити різні точки зору вчених на трактування поняття уміння можна на основі підходу В. С. Цетлін. Розглядаючи уміння, як компонент навчальної діяльності, автор виділяє первинні уміння і вторинні. Первинні уміння близькі до навичок, до дій, що підлягають автоматизації, підкоряються правилу (трактування уміння за В. В. Давидовим, В. П. Зинченко, В. Г. Мещеряковим та ін.). Вторинні відмінні від навичок, не можуть бути автоматизовані, тому що у власній основі не мають однозначного правила і передбачають застосування евристики (Л. М. Фрідман, В. Б. Шапар та ін.).

Уміння класифікують на рухові, сенсорні та розумові [507; 587], але будь яке уміння розуміється як якість людини, її готовність і можливість успішно здійснювати певні дії [573]. Так, на думку Д. Н. Левитова, уміння означає успішне виконання дії або діяльності з вибором і застосуванням правильних прийомів роботи з врахуванням певних умов [287]. А К. К. Платонов розглядає уміння, як здатність людини продуктивно, якісно і у відповідний час виконувати роботу у нових умовах [418].

В нашому дослідженні ми будемо дотримуватися трактування поняття уміння за Л. М. Фрідманом, і вважатимемо умінням свідоме застосування знань і навичок, що є в учня, для виконання складних дій у різноманітних умовах, тобто для розв'язування відповідних задач.

Поняття навиків та умінь пов'язані з поняттям здібностей. Але навики та уміння характеризують діяльність учня, а здібності є характеристикою його особистості. В. А. Крутецький зазначає, що при аналізі здібностей завжди мають на увазі якості, особливості людини, яка виконує певну діяльність, а при аналізі вмінь і навиків — якості, особливості діяльності, яку здійснює людина [265].

Л. М. Фрідман дійшов висновку про те, що уміння і навички у розв'язуванні задач — це наявні в учня можливості у розв'язуванні задач певних видів, а здібності у розв'язуванні задач — це його потенційні можливості у розв'язуванні будь-яких задач, це головна умова швидкого, легкого і глибокого оволодіння уміннями у розв'язуванні нових видів задач. Навички, уміння і здібності учня у розв'язуванні задач взаємообумовлені: без наявності певних здібностей і певного рівня їх розвитку у нього не можуть сформуватися навички та уміння і у той час без наявності в учня певних навиків та умінь не зможуть розвинутися його здібності [560].

Оволодіння умінням розв'язувати задачі здійснюється в процесі навчання за правильної організації діяльності вчителя та учня. Таким чином, навчання розв'язування задач — це спеціально організована взаємодія вчителя та учнів, мета якої полягає в формуванні у дітей *уміння розв'язувати задачі*.

Зосередимо спочатку увагу на змісті поняття «уміння розв'язувати задачі», а потім розглянемо формування уміння розв'язування задач. Слід зазначити, що незважаючи на те, що поняття «уміння розв'язувати сюжетні задачі» широко застосовується в практиці для характеристики мети і результатів навчання розв'язування задач, в методичній літературі [52; 80; 347; 348; 363] означення цього поняття відсутнє. Зміст даного поняття подається у більшості випадків у вигляді конкретної мети, яка повинна бути здійснена в процесі розв'язування сюжетних задач.

Означення поняття «уміння розв'язувати задачі» зустрічається у дисертаційних дослідженнях Г. Д. Бухарової [99], С. Є. Царьової [577], Ю. М. Колягіна [241] та В. А. Мізюк [357]. Підхід Г. Д. Бухарової та С. Є. Царьової до трактування поняття «уміння розв'язувати сюжетні задачі» являє собою сукупність операційних факторів зовнішньої структури процесу розв'язування задачі. За Г. Д. Бухаровою, уміння розв'язувати задачі передбачає діяльність, що складається з певної сукупності дій, кожна з яких має у власному складі операції, наповненість яких визначається видом і типом задачі. С. Є. Царьова під вмінням розв'язувати задачі розуміє уміння, що складається із знань про задачі, про процес розв'язування задачі і володіння способами виконання кожного етапу розв'язування при певному рівні тих чи інших знань, що використовуються при розв'язуванні.

В. А. Мізюк виходить з того, що про сформоване вміння можна говорити лише тоді, коли учень самостійно, без допомоги розв'язує задачі. Отже, вміння розв'язувати сюжетні задачі — це готовність і здатність учнів самостійно і свідомо розв'язувати ці задачі. Розкривають зміст поняття «*уміння розв'язувати сюжетні задачі*» і ті *показники*, які обирають вчені для його *діагностики*. Досліджуючи психологічні особливості взаємодії вчителя і учнів молодших класів при розв'язуванні «важких» мисленнєвих (математичних) задач, Л. В. Дяченко для діагностики здатності учня до розв'язування задач обрала такі показники:

— здатність учня самостійно, без допомоги дорослого, аналізувати умову задачі, встановлювати зв'язок між відомими і шуканими, схематично записувати умову задачі, виконувати розв'язання;

— здатність учня на основі аналізу математичних відношень формулювати запитання задачі;

— здатність учня планувати дії;

— здатність учня самостійно розв'язувати задачі (ступінь самостійності дитини і міра допомоги з боку вчителя);

— здатність самостійно переключатися від однієї розумової операції до іншої, з прямого ходу міркування до зворотного [175].

У розглянутих показниках можна умовно виділити ті, що стосуються зовнішньої та внутрішньої структури процесу розв'язування задач. Це також знайшло відображення в означенні поняття «уміння розв'язувати задачі», що запропоноване Ю. М. Колягіним [241]. Він вважає: вміння розв'язувати задачі, що притаманне деякому суб'єкту, можна розглядати як специфічне оточуюче середовище системи (S, R), (де S — деякий суб'єкт, а R — задачна система), що здійснює суттєвий вплив на успішність процесу розв'язування задачі і являє собою складний комплекс.

До складу цього комплексу Ю. М. Колягін включає: 1) активно діючі математичні знання (і відповідні їм спеціальні уміння і навички); 2) досвід у застосуванні знань; 3) певну сукупність сформованих властивостей мислення (розумові операції), які виявляються в процесі розв'язування задач.

Орієнтуючись на комплексний підхід у розкритті змісту поняття «уміння розв'язувати задачі», враховуючи специфіку сюжетних задач, психологічні особливості молодших школярів, а також зміст початкового курсу математики, В. В. Малихіна подає «уміння розв'язувати сюжетні задачі» у вигляді комплексу дій (компонентів), які забезпечують самостійне розв'язування школярами сюжетних задач, математичний зміст яких відповідає програмі початкового курсу математики. Даний комплекс передбачає:

1) сформованість навичок читання;
2) засвоєння молодшими школярами змісту арифметичних дій (додавання, віднімання, множення і ділення), понять «збільшити (зменшити) на»; «збільшити (зменшити) в»; різницевого, кратного порівняння; пропорційної залежності величин; уміння інтерпретувати ці поняття за допомогою предметних, словесних, схематичних і символічних моделей;
3) сформованість загальних логічних прийомів мислення (аналіз, синтез, порівняння, аналогія, абстрагування, узагальнення) і досвід їх застосування для розв'язування різноманітних математичних задач;
4) засвоєння структури сюжетної задачі і досвід застосування цих знань для аналізу різноманітних конструкцій задач;
5) уміння співвідносити предметні, текстові, схематичні й символічні моделі. Досвід застосування цих умінь при аналізі сюжетних задач різноманітних конструкцій;
6) усвідомлення процесу розв'язування сюжетних задач як діяльності, що спрямована на виявлення відношень, зв'язків і залежностей між величинами, даними в задачі (математизація тексту), і застосування цих відношень для вибору послідовності арифметичних дій, виконання яких дозволяє відповісти на запитання задачі [317].

Для цілеспрямованого формування уміння розв'язувати сюжетні задачі слід проводити роботу за двома напрямкам: по-перше формування дій та операцій, що складають зовнішню структуру; по-друге, формування дій та операцій, що складають внутрішню (психологічну) структуру процесу розв'язування задач. Тому у розглянутих трактуваннях уміння розв'язувати сюжетні задачі Ю. М. Колягіна, Л. В. Дяченко та В. В. Малихіної поєднано зовнішню та внутрішню структуру процесу розв'язування задач. Але **в даному дослідженні ми зосереджуємося на формуванні зовнішньої — макро- та мікроструктури діяльності з розв'язування задач.** Аналіз формування внутрішньої структури — це справа психологів.

В нашому дослідженні, вслід за Г. Д. Бухаровою та С. Є. Царьовою, ми спираємося на трактування поняття «уміння розв'язувати сюжетні задачі» на підставі визначення його операційного складу (зовнішньої структури). Однак, цими авторами подані дуже загальні, не конкретизовані, означення цього поняття. Тому ми пропонуємо наступне означення уміння розв'язувати сюжетні задачі: **уміння розв'язувати сюжетні задачі — це складне уміння, яке містить комплекс умінь нижчого порядку, що стосуються послідовно виконуваних дій, а саме:**

1) **уміння аналізувати текст задачі;**
2) **уміння подавати результати аналізу у вигляді репрезентативної моделі;**
3) **уміння співвідносити задачу з раніш вивченими і відтворювати спосіб розв'язування задач даного типу (якщо учню пропонується задача відомого типу);**
4) **уміння виконувати пошук розв'язування задачі, якщо задача невідомого типу або учень не «впізнав» задачу: при арифметичному способі розв'язання виконувати аналітичні міркування (від запитання задачі до числових даних) або синтетичні (від числових даних до запитання задачі), при алгебраїчному методі розв'язування — складати рівняння, при геометричному методі розв'язування — виконувати креслення, будувати діаграми або графіки;**
5) **уміння виконувати операції, які забезпечують розв'язання задачі;**
6) **уміння перевіряти правильність розв'язку.**

На відміну від означень поняття уміння розв'язувати задачі, що надані Г. Д. Бухаровою та С. Є. Царьовою, у запропонованому нами означенні визначено комплекс умінь нижчого порядку, що стосуються послідовно виконуваних дій, що складають процес розв'язування задачі. Ми окремо не виділили «знання про задачу та процес її розв'язування», які включені С. Є. Царьовою у трактування поняття «уміння розв'язувати задачі», тому що ми дотримуємося загальноприйнятого означення «уміння» у психології, як свідомого застосування знань і навичок.

О. В. Баринова, на підставі аналізу робіт психологів, відокремлює наступні *рівні уміння розв'язувати задачі молодшими школярами* (в основу цих рівнів покладено виділені Н. О. Менчинською види аналізу: елементарний, комплексний, перевершуючий).

Низький рівень. Сприймання задачі здійснюється учнем поверхово, неповно. При цьому він виділяє зовнішні, частіше несуттєві елементи задачі. Учень не може і не пробує уявити хід розв'язування задачі. Також характерна ситуація, коли учень, не зрозумівши зміст задачі, відразу приступає до її розв'язування, яке частіше є хаотичним маніпулюванням числовими даними. Тут переважає «елементарний» аналіз.

Середній рівень. Сприймання задачі супроводжується її аналізом. Учень прагне зрозуміти задачу, відокремлює дані та шукане, але здатний при цьому встановити між ними лише окремі зв'язки. Через відсутність усвідомлення єдиної системи зв'язків між величинами утруднюється в передбаченні наступного ходу розв'язування задачі. На цьому рівні учню доступне покрокове планування розв'язання задачі. Він здатний узагальнити спосіб розв'язування, але для цього вимагається більша кількість вправ у розв'язанні задач одного типу і допомога вчителя. Недостатньо розвинена гнучкість мислення, тому є труднощі у встановленні обернено-пропорційних зв'язків між величинами, виявляється схильність до звичних форм подання завдань, способів розв'язування. Учню стає доступним знаходження різних способів розв'язування задачі, якщо є такий досвід при розв'язанні аналогічних задач.

Високий рівень. На підставі всебічного аналізу задачі учень виділяє цілісну систему (комплекс) взаємодій між даними та шуканим. Це дозволяє йому здійснити планування розв'язування задачі. Учень здатний самостійно побачити різні способи розв'язування й виокремити найбільш раціональний із можливих. При аналізі задачної ситуації учень вільно відкидає елементи неістотні або зайві з точки зору її вимоги. Легко узагальнює спосіб розв'язування часткової задачі. Гнучкість мислення виявляється у вільному переключенні з одного способу розв'язування на інший, у правильному встановленні як прямих, так і обернених зв'язків між величинами. Тут переважає «перевершуючий» аналіз [53; 54].

В першому розділі роботи підкреслено вагомість аналізу задачі для її подальшого розв'язання. Зрозуміло, що рівень сформованості уміння розв'язувати задачі прямо залежить від рівня сприймання і розуміння задач. С. Д. Максименко та В. П. Максименко в результаті аналізу процесу розв'язування математичних задач виділили три групи учнів з різними співвідношеннями наочно-образних і словесно-логічних компонентів у їх розумовій діяльності і на основі аналізу особливостей аналітико-синтетичної діяльності учнів всіх груп виділили п'ять рівнів сприймання і розуміння задач:

Перший рівень характеризується тим, що учні самостійно і швидко схоплюють цілісно-розчленовану математичну структуру задачі і дані в ній відношення та залежності між величинами, включають у розв'язування числові дані, виражені словом, легко помічають відсутність запитання і швидко його формулюють. Бачать невідповідність між умовою й запитанням і долають її. Швидко відтворюють правила і розв'язують відповідні рівняння, легко встановлюють за схемою задачі її умову.

Другий рівень характеризується тим, що учні самостійно включають у розв'язування числові значення, виражені словом, не звертаючи уваги на зайві числові дані. Помічають відсутність запитання в задачі, формулюють його, встановлюють невідповідність між запитаннями і умовою задачі, змінюють відповідно зміст запитання, правильно розв'язують рівняння, самостійно трансформують схему задачі в її словесне формулювання, але роблять це повільно і з деякими незначними помилками.

Третій рівень характеризується тим, що учні включають у розв'язування числові значення, виражені словом, відкидають зайві числові дані, формулюють запитання і встановлюють невідповідність його умові задачі, трансформують схему в словесне формулювання, розв'язують рівняння і відтворюють правила, але потребують при цьому незначної допомоги.

Четвертий рівень характеризується тим, що учні включають числові значення, виражені словом, відкидають зайві числові дані. А розв'язування і відтворення правил, трансформування схеми, формулювання запитання та встановлення невідповідності між умовою і запитанням як головним елементом задачі проходить з труднощами і лише при значній допомозі.

П'ятий рівень характеризується тим, що учні сприймають лише окремі розрізнені числові дані, не включають у розв'язання задачі числові значення величин, виражені словом, включають неістотні числові дані в розв'язок, не диференціюють дані і шукані значення величин і не встановлюють зв'язки і залежності між ними, не можуть трансформувати схему задачі в її словесне формулювання, не помічають відсутності запитання задачі або невідповідності його умові задачі [314].

Як бачимо, визначені рівні характеризують уміння розв'язувати задачі. Між тим, С. Д. Максименком та В. П. Максименко подано більш детальний поділ на рівні, ніж О. В. Бариновою. Але рівні сформованості уміння розв'язувати сюжетні задачі О. В. Бариновою співвідносяться з рівнями, що визначено С. Д. Максименком та В. П. Максименко: високому рівню за О. В. Бариновою можна поставити у відповідність перший та другий рівні за С. Д. Максименком та В. П. Максименко; середньому рівню — третій та четвертий рівень; низькому рівню — п'ятий рівень.

Оскільки процес розв'язування простої і складеної задачі дещо відрізняється — для розв'язування складеної задачі, наприклад, арифметичним способом, треба виконати аналітичні або синтетичні міркування, скласти план розв'язування задачі, то ми виділили рівні сформованості уміння розв'язувати прості задачі та рівні

сформованості вміння розв'язувати складені задачі. Рівень сформованості умінь розв'язувати прості та складені задачі визначається на основі розробленого нами їх операційного складу. Оскільки операційний склад уміння розв'язувати прості задачі та уміння розв'язувати складені задачі ми розглянемо пізніше, то й рівні сформованості цих умінь будуть подані у параграфі 2.5.

Таким чином, ми визначили зміст поняття «уміння розв'язувати сюжетні задачі» та рівні сформованості цих умінь. Слід зазначити, що в методичній літературі виділяють два основних типи умінь розв'язувати задачі:

— загальне уміння розв'язувати задачі — узагальнен;

— уміння розв'язувати задачі певного виду — окремі уміння розв'язувати задачі.

Загальне (узагальнене) уміння розв'язувати задачі виявляється при розв'язуванні людиною незнайомої задачі, тобто такої, спосіб розв'язання котрої людині невідомий (С. Є. Царьова, Л. М. Фрідман та інші). Якщо учень переносить засвоєні дії на нові види задач, правильно і самостійно розв'язує сюжетні задачі широкого кола, то відповідне вміння є узагальненим (В. А. Мізюк).

В основі умінь розв'язування задач певних видів лежать окремі методи розв'язування задач даного виду (алгоритми, евристичні схеми). Для того, щоб виявити наявність і рівень ***умінь розв'язувати задачі певних видів***, учням пропонуються декілька задач, серед яких є задачі тих видів, які цікавлять дослідника; і вимагається обрати ті, які учень знає, як розв'язувати, й розв'язати їх. Рівень і якість цього уміння визначаються складністю розв'язаних задач та тим, наскільки усвідомлений та ґрунтовний спосіб розв'язування [573; 357].

У І. І. Аргинської ми зустрічаємо термін «істинне уміння розв'язувати задачі». Таке уміння полягає у здатності розв'язувати будь-яку задачу, що є доступною за рівнем складності для даного віку, якщо в ній відсутні незнайомі поняття і якщо для її розв'язання не вимагається виконати незнайомі операції [17]. Як бачимо, «істинне уміння розв'язувати задачі» та «загальне уміння (узагальнене)» — це різні терміни, що позначають одне й те саме поняття.

В нашому дослідженні ми користуватимемося термінами: «загальне уміння розв'язувати задачі», «уміння розв'язувати задачі певних видів» або «окреме уміння розв'язувати задачі».

Л. М. Фрідман наголошує на необхідності відрізняти загальне уміння розв'язувати задачі від окремих умінь розв'язування задач певного виду. Учні можуть дуже успішно навчитися розв'язувати задачі усіх тих видів, які вивчаються в школі, але не оволодіти загальним умінням розв'язувати задачі. Уміння розв'язувати задачі певних видів формуються на базі наданого вчителем зразка, користуючись яким учні виконують операції, що входять у дане уміння. Загальне ж уміння розв'язання задач, зазначає автор, у більшості випадків формується стихійно, а не в результаті цілеспрямованого, систематичного навчання. Існує думка про те, що воно може бути сформоване лише на основі розв'язування великої кількості задач (Д. Пойя). Але ж результати такої роботи учнів дуже незначні: більшість дітей не можуть розв'язати незнайому задачу. Між тим, результатом навчання є формування загального вміння розв'язувати задачі.

2.1.2. Методичні підходи до формування умінь розв'язувати сюжетні задачі

Проблему формування умінь розв'язувати сюжетні задачі досліджували: М. О. Бантова, Г. В. Бельтюкова, А. В. Белошиста, М. І. Бурда, В. Л. Дрозд, Н. Б. Істоміна, Т. М. Хмара, С. Є. Царьова, Л. М. Фрідман та інші. У методичній літературі висвітлюються різні підходи щодо формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі. Серед них можна виділити: застосування різних форм організації навчального процесу — диференційованої (О. В. Баринова, В. А. Мізюк) і колективної (Є. С. Казько); проведення систематичної індивідуальної роботи в процесі організації самостійної діяльності учнів (Є. І. Мишарьова, О. О. Ребріна та інші); формування уміння розв'язувати задачі різними способами (А. К. Артьомов, Г. Г. Шульга, Р. Н. Шикова); підсилення уваги до роботи з перетворення задач після їх розв'язання (Л. І. Шорнікова, С. Є. Царьова та інші); озброєння учнів методами розбору сюжетних задач.

Методику формування у молодших школярів уміння розв'язувати сюжетні задачі в системі розвивального навчання математики Н. Б. Істоміної вивчала В. В. Малихіна, а психологічні особливості функцій і способів формування уміння розв'язувати сюжетні задачі на матеріалі традиційного і розвивального навчання досліджував В. В. Слугін. Психологічні особливості взаємодії вчителя і учнів молодших класів при розв'язуванні «важких» мисленнєвих (математичних) задач вивчала Л. В. Дяченко. Розробляла методику формування уміння розв'язувати сюжетні задачі в умовах наступності між початковою та середньою школою

Л. А. Сафонова. Систему задач, що розв'язуються арифметичними способами та методичну систему навчання учнів основної школи розв'язування задач досліджувала С. М. Лук'янова. Формування в учнів середньої школи алгоритмічного способу розв'язування задач вивчав В. В. Кащей.

Значне число розробок присвячено навчанню окремих прийомів розв'язування сюжетних задач. Пропонується введення зручних одиниць вимірювання величин, які містяться в задачі (С. Є. Царьова), широке застосування правил-орієнтирів (С. М. Лисенкова), наближення у часі розв'язання аналогічних сюжетних задач тощо.

П. М. Ерднієв в рамках концепції укрупнення дидактичних одиниць пропонує:

— ввести спільне навчання розв'язування відповідних видів задач, наприклад, збільшення або зменшення числа на кілька одиниць та різницеве порівняння;
— протиставляти задачі, наприклад, на різницеве та кратне порівняння;
— складати і розв'язувати обернені задачі [609; 611; 613].

Багато методистів при розв'язуванні сюжетних задач пропонують використовувати наочні образи: координатний промінь (координатна пряма), графіки рівномірних прямолінійних процесів, відрізки (одномірні діаграми), прямокутники (двомірні діаграми), зображення фігур, про які йдеться в задачі. Методика роботи над ними подана у працях Н. Я. Віленкіна, Н. Б. Істоміної, Б. А. Кордемського, Л. Ш. Левенберга, Л. С. Луніної, А. І. Островського, Л. Г. Петерсон, З. І. Турлакової, Д. С. Фоніна, І. І. Целищевої, М. Д. Черней та інших. Л. Ш. Левенберг [285] зазначає, що малюнки і схеми не лише допомагають учням у свідомому з'ясуванні прихованих залежностей між величинами, але й спонукають їх активно мислити, шукати найбільш раціональні шляхи розв'язування задач, допомагають не лише засвоювати знання, але й оволодівати уміннями застосовувати їх. Однак у вигляді системи методика застосування цих моделей у навчанні розв'язування сюжетних задач подана лише у дисертаційному дослідженні Л. С. Луніної. В дисертаційному дослідженні В. В. Малихіної розглянуто методику формування в молодших школярів умінь розв'язувати задачі на основі схематичної інтерпретації тексту задачі. Формування прийомів моделювання у молодших школярів в процесі навчання розв'язування сюжетних задач вивчала К. А. Паладян; схематичні моделі як засіб навчання молодших школярів розв'язування сюжетних задач різними способами досліджувала Н. А. Муртазіна.

А. К. Артьомов та Н. Б. Істоміна до основних видів роботи, що спрямовані на формування уміння арифметично розв'язувати сюжетні задачі, відносять:

1) складання репрезентативної моделі задачі (короткий запис, таблиця, схематичний малюнок й тощо);
2) порівняння задач (умов, запитань, текстів, розв'язань);
3) перетворення задачі (зміна даних, умови);
4) розгляд текстів з неповними або зайвими даними;
5) складання задач учнями;
6) розв'язання задачі іншим арифметичним способом;
7) складання і розв'язування обернених задач [36].

Спробу класифікувати способи формування уміння розв'язувати складені задачі здійснено С. Є. Царьовою у дисертаційному дослідженні з проблеми формування навчальної діяльності молодших школярів при навчанні розв'язування задач. В основу класифікації автором покладено етапи процесу розв'язування складених задач (читання і усвідомлення тексту, пошук шляху розв'язування, запис розв'язання та відповіді, перевірка розв'язання). У відповідності із цим на першому етапі виділяються способи: уявлення тієї життєвої ситуації, яка описана в задачі, мислена участь в ній (якщо це можливо); постановка спеціальних запитань по змісту задачі; розбиття тексту задачі на змістовні частини; переформулювання задачі; моделювання ситуації, що описана в задачі. На другому етапі (пошук шляху розв'язування): пошук за предметною або графічною моделлю, пошук за допомогою відокремлення словесного задання математичних відношень і перекладу їх на мову виразів; пошук за допомогою міркувань «від запитання до даних» та «від даних до запитання».

Як приклади здійснення запису розв'язання використовують зразки оформлення розв'язання (арифметичним способом); на етапі перевірки розв'язання задачі учні оволодівають способами: складання і розв'язування обернених задач; розв'язування задач іншим способом; прикидки відповіді або встановлення її меж; перевірки вибору дій шляхом складання «оберненої логічної задачі» (спосіб названий С. Є. Царьовою) [577].

Усі вказані способи не викликають заперечень і описані у методичній літературі (М. О. Бантова, Г. В. Бельтюкова, М. І. Моро, В. Л. Дрозд, Л. М. Фрідман та інші). Як було показано в 1.3.2 моделювання задачного формулювання та процесу пошуку розв'язування задачі є домінуючими евристиками, яким слід навчати молодших школярів, тому основну увагу слід приділити озброєнню учнів способами моделювання задачної ситуації та міркування від запитання задачі до числових даних (аналізом) або від числових даних до запитання задачі (синтезом), що дозволить їм у подальшому самостійно розв'язувати будь-які задачі; є діями, що складають загальне уміння розв'язувати задачі.

На думку С. Є. Царьової, навчання *загального вміння розв'язувати* задачі — це:

— формування знань про задачі, методи та способи розв'язування, прийоми, що допомагають розв'язуванню; про процес розв'язування задачі, етапи цього процесу, призначення і зміст кожного етапу;

— опрацювання уміння розкладати задачі на складові частини; застосовувати різні методи розв'язування, адекватно застосовувати прийоми, що допомагають зрозуміти задачу, складати план її розв'язування, виконувати його, перевіряти розв'язання; уміння виконувати кожний із етапів розв'язування.

Таким чином, зазначає автор, при формуванні *загального уміння розв'язувати задачі* предметом навчання і основним змістом повинно бути не лише розв'язання задач, але й їх структура, процес розв'язування задач, методи і способи, що допомагають здійсненню кожного етапу та усього процесу розв'язування в цілому [573].

Схожої думки дотримується Л. М. Фрідман. Розглядаючи вимоги до процесу формування умінь і навичок розв'язування задач, він зазначає, що одна з цих вимог полягає в тому, що уміння розв'язувати задачі повинно бути синтезом знань і навичок. Такі компоненти процесу розв'язування задачі, як змістовий і семантичний аналіз задачі, складання моделі задачі, пошук способу її розв'язування, в тому числі відшукування теорії, на підставі якої може бути розв'язана дана задача, повинні стати самостійними вправами для учнів, тобто учням пропонуються тексти задач для виконання зазначених дій, але не пропонується знайти саме їх розв'язок.

Ці теоретичні знання потрібні учням для того, щоб вони могли виконувати розв'язання будь-яких задач свідомо та цілеспрямовано, щоб вони бачили у розв'язаннях різноманітних задач те спільне, що складає загальний підхід, загальне уміння розв'язувати задачі. Теоретичні знання про задачі та їх розв'язання потрібні учням для того, щоб вони виконували розв'язання різноманітних задач свідомо, а не лише на основі наслідування, за аналогією з раніш розв'язаними задачами. Такі аналогії, зазначає автор, потрібні, але якщо учень при зустрічі із незнайомою задачею обмежується лише пошуком аналогій, то неминучі помилки, і у більшості випадків розв'язок не буде знайдено.

Загальні знання про задачі і механізми їх розв'язування потрібні також для того, щоб розв'язання приносило найбільший розвивальний ефект, щоб процес їх розв'язування перетворився на справжній метод навчання учнів певних знань і навичок [556; 561; 562].

З метою формування загальних умінь розв'язувати задачі автор пропонує при розв'язанні задач певного виду в першу чергу підкреслювати і виділяти *загальні прийоми розв'язування задач*: розбиття задачі на підзадачі, розбиття області задачі на частини, зведення однієї задачі до раніш розв'язаної, модельні перетворення задачі та інші евристики. Головне при цьому — формувати такий загальний підхід до розв'язування задач, коли задача розглядається як об'єкт для аналізу, для дослідження, а її розв'язання — як конструювання і винахід способу розв'язування. Природно, що такий підхід вимагає не розв'язання великої кількості задач, а уважного розв'язання значно меншої їх кількості, але із наступним аналізом проведеного розв'язання, виявлення в ньому загальних методів і прийомів розв'язування будь-яких задач [560].

Ми вважаємо, що формування загального уміння розв'язувати задачі повинно призводити не лише до навчання учнів загальних прийомів роботи над задачею, а, передусім, повинно передбачати опрацювання всіх умінь нижчого порядку, що його складають. Між тим, у переліку складових загального уміння слід врахувати дії, що стосуються дослідження задачі.

Безперечно, що у дітей слід формувати загальне уміння розв'язувати задачі, але в початковому курсі математики присутні й типові задачі — це задачі на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення, знаходження невідомих за двома різницями, знаходження середнього арифметичного, на подвійне зведення до одиниці, на спільну роботу, на рух тощо. О. М. Астряб вважав, що вміння розв'язувати типові задачі певної групи конче потрібно для опанування уміння розв'язувати задачі взагалі, але воно не може бути самоціллю, не є головним і далеко не єдиним чинником у складному процесі навчання самостійного розв'язування задач. Таке вміння — це тільки допоміжний засіб у цьому процесі [55] . А. Ф. Есаулов зазначав, що відмовитися від типізації задач украй небезпечно [614].

При формуванні у дітей *умінь розв'язувати задачі певних видів* предметом навчання і основним змістом навчання є види задач, способи і зразки розв'язування задач конкретних видів [573].

С. Є Царьова, М. І. Моро, М. О. Бантова та інші методисти наголошують на необхідності формування обох видів умінь: і загального, і умінь розв'язувати задачі певних видів; робота над задачами не повинна призводити до розучування способів розв'язування задач окремих видів (мається на увазі нетипових задач) [52; 363; 573]. Але у шкільній практиці застосування сюжетних задач для формування у дітей уявлень про математичні поняття, в тому числі про зміст арифметичних дій і відношень призводить до того, що учні запам'ятовують види сюжетних задач (нетипових) і спосіб їх розв'язування, що не створює умови для формування загального уміння розв'язувати задачі. Хоча у чинній програмі з математики визначено, що «Здійснення дидактичних функцій задач можливе за умови, коли учні набудуть певних уявлень про сутність задач, оволодіють умінням їх розв'язувати. Цього можна досягти: формуванням в учнів уявлень про структуру простої та складеної задач; ознайомленням з різними способами розв'язування задач; розвитком умінь застосовувати знання про арифметичні дії і залежності між величинами для складання плану розв'язування задачі; використанням загального підходу до розв'язування задач; ознайомленням з формами запису їх розв'язання; формуванням уявлення про способи перевірки правильності розв'язання задач [256]. Виходячи з цього, можна стверджувати, що у новій програмі визначено завдання формування у молодших школярів загального уміння розв'язувати задачі. Між тим, це завдання лише декларовано. У програмі для 1-го класу передбачено ознайомлення дітей зі структурою задачі, визначення її відмінності від інших завдань, засвоєння окремих методів пошуку дії розв'язування задачі. Але у програмах для наступних класів Л. П. Кочина не послідовна — визначено лише види задач, з якими учні повинні познайомитися, та які види вони мають навчитися розв'язувати; тобто не передбачено формування в школярів дій, що складають загальні уміння розв'язувати задачі [257].

Як бачимо, у сучасній програмі з математики зроблено крок уперед у цій справі — поставлено завдання формування в молодших школярів загального уміння розв'язувати задачі. Тому на даному етапі розвитку школи актуальна розробка методики навчання учнів розв'язування задач, метою якої є формування у молодших школярів обох видів умінь розв'язувати задачі.

Таким чином, зміст і методику навчання молодших школярів розв'язування задач слід визначити через дві підсистеми — систему задач для формування загального уміння розв'язувати задачі та систему задач для формування вмінь розв'язувати задачі певних видів; загальне уміння формувати на матеріалі простих і складених задач (які не містять пропорційних величин) та на матеріалі складених задач з пропорційними величинами на знаходження суми чи різницеве порівняння двох добутків або часток; розпочати опрацювання окремих складових уміння розв'язувати задачі певних видів на задачах останнього виду і продовжити їх формування на матеріалі «типових» задач.

Для розробки змісту і методики навчання молодших школярів розв'язування задач можна скористатися пропозиціями вчених щодо формування загального уміння та умінь розв'язувати задачі певних видів.

З метою формування у дітей обох видів умінь розв'язувати задачі С. Є. Царьова пропонує сполучення трьох ліній у змісті і організації діяльності учнів:

— накопичення досвіду розв'язування різноманітних задач як з усвідомленням процесу і способу розв'язування, так і без такого усвідомлення, на інтуїтивній основі;

— оволодіння компонентами загального уміння розв'язувати задачі у спеціально організованій для цього діяльності;

— опрацювання уміння розв'язувати усі види простих задач, в тому числі задачі на рух, на «купівлю-продаж», на знаходження дробу від числа та числа за його дробом, на обчислення площі прямокутника та знаходження сторони прямокутника за відомою площею та стороною; опрацювання уміння розв'язувати окремі види складених задач [573].

Дослідження С. Є. Царьової показують, що найбільш ефективним є навчання, у якому йдуть від накопичення досвіду розв'язування різноманітних задач, а від них — до оволодіння способами розв'язування конкретних видів задач (типових).

Дещо інакше підходить до проблеми формування умінь розв'язувати задачі Л. М. Фрідман. Він висуває такі необхідні умови:

а) задачі, їх генезис, особливості, структура повинні стати предметом глибокого вивчення учнями;

б) у навчанні розв'язування задач певного виду на перших етапах слід розгорнути процес розв'язування як процес моделювання задач;

в) слід відмовитися від основного методу навчання розв'язування задач, що застосовується у більшості шкіл (розв'язання великої кількості задач). *Основним методом навчання розв'язування задач повинен стати метод розв'язування особливої системи підготовчих навчальних задач* [554].

Як бачимо, в методичній науці багато уваги приділено формуванню в учнів умінь розв'язувати задачі, але вчені обмежуються викладом лише загальних підходів. Отже, у дидактиці математики не розроблено цілісної методичної системи навчання молодших школярів розв'язування задач, в якій реалізовано формування загального уміння та умінь розв'язувати задачі певних видів на усьому різноманітті задачного матеріалу початкового курсу математики, починаючи від простих задач до складених, а далі й до типових.

Відсутність такої системи визначає той факт, що й досі на сторінках методичних журналів часто піднімають питання про те, що вчителям не кожну дитину вдається навчити розв'язувати задачі, не кожний учень початкової школи досягає високого рівня уміння розв'язувати задачі. Зрозуміло, що це об'єктивне явище і його не можна змінити в силу індивідуальних особливостей учнів. Але покращити ситуацію можна, тим більш, що у традиційній методиці навчання розв'язування задач є суттєві недоліки.

Аналізуючи традиційну методику ознайомлення учнів з поняттям «задача» і формування уміння розв'язувати задачі, Н. Б. Істоміна та І. Б. Нефьодова роблять висновки щодо традиційної методики навчання розв'язування задач:

1. Уміння розв'язувати сюжетні задачі розглядається як уміння розв'язувати окремі їх види, в словесній моделі яких спочатку дано умову, а потім запитання.

2. Робота над засвоєнням структури задачі носить формальний характер, тому що пропонуються однотипні текстові конструкції, в яких учні можуть виділити умову і запитання, відомі і невідомі, орієнтуючись на зовнішні ознаки.

3. Одночасна реалізація двох функцій: навчання дітей розв'язування задач і формування у них уявлення про математичні поняття і відношення засобом задач не сприяє формуванню в учнів умінь розв'язувати задачі.

4. Переважна увага приділяється оформленню розв'язання сюжетних задач на шкоду обговоренню процесу їх розв'язування.

5. На уроках спостерігається тенденція до розв'язання великої кількості задач на шкоду їх навчальному і розвивальному призначенню.

6. Перелік методичних засобів і прийомів, які сприяють формуванню уміння розв'язувати задачі, дуже обмежений (предметна інтерпретація, короткий запис, аналітико-синтетичний розбір) [220].

Аналогічних висновків дійшла В. В. Малихіна в результаті проведення констатуючого експерименту, під час якого аналізувалися результати навчання розв'язування сюжетних задач в практиці початкової школи [317].

Аналізуючи психологію і методику формування уміння розв'язувати сюжетні задачі в системі традиційного початкового навчання, В. В. Слугін робить висновок: традиційна методика навчання розв'язування сюжетних задач — це процес запам'ятовування дітьми міркувань учителя і відновлення цієї послідовності міркувань при розв'язуванні задачі, що є впізнаною [508]. Такої ж позиції дотримується І. І. Аргинська, пояснюючи розучування розв'язків видів задач прагненням учителів отримати швидкий зовнішній результат: озброєння школярів деяким комплектом таких зразків надає можливість учням при розв'язуванні певної задачі порівнювати її з раніш вивченими, і якщо в комплекті знайдено зразок, що підходить, то учень використовує його для розв'язання. Якщо зразок знайдено неправильно, розв'язання буде помилковим. Якщо ж учень не знайшов зразка, то він опиняється безсилим перед задачею, і, як правило, відмовляється від її розв'язування. Такі ситуації, зазначає автор, виникають не лише при пред'явленні учню задачі незнайомого виду, а й у випадку нестандартного формулювання задачі відомого виду [17].

Л. А. Сафанова, здійснюючи констатуючий експеримент у межах дисертаційного дослідження, дійшла висновку, що учні середньої школи мають великі труднощі у розв'язанні сюжетних задач. Особливо складний стан виникає в 5—6-х класах при переході від арифметичного до алгебраїчного методу розв'язування. Це відбувається, на думку автора, тому, що у початковій школі практично не приділяється уваги пропедевтиці алгебраїчного методу, а в середній — не знаходять продовження уміння, які сформувалися в початкових класах, а від учнів вимагається розв'язання тих самих задач, але новими засобами [462; 463]. У констатуючому експерименті С. М. Лук'янової також виявлено, що в більш ніж половини учнів уміння розв'язувати задачі сформовано на початковому та середньому рівнях [303].

Ми згодні з попередніми авторами. Перелік недоліків традиційної методики навчання молодших школярів розв'язування задач можна доповнити даними, що були отримані нами під час констатуючого експерименту:

1. Не всі вчителі проводять повноцінний аналіз тексту задачі, частіше обмежуються лише виділенням умови і запитання задачі. Результати аналізу формулювання задачі більшість вчителів подає у вигляді схематичного короткого запису.

2. Близько третини вчителів при розв'язуванні простих задач не вимагає від учнів обґрунтування вибору арифметичної дії. Близько половини вчителів при пошуку розв'язування складених задач активно не застосовують міркування від запитання задачі до числових даних, і трохи менше — міркування від числових даних до запитання.

3. Більше третини вчителів спостерігали той факт, що учні не можуть пояснити розв'язання та дати ґрунтовну відповідь на запитання задачі, навіть після фронтального розбору задачі.

4. Мало уваги з боку вчителів приділяється перевірці розв'язання задачі, вчителі лише іноді пропонують учням перевірити правильність розв'язання задачі.

З вищесказаного та з проведеного нами констатуючого експерименту можна зробити висновок, що у початковій школі переважна більшість учнів не досягають достатнього високого рівня сформованості уміння розв'язувати задачі.

Отже, перед методистами та вчителями стоїть проблема підвищення ефективності процесу формування умінь розв'язування задачі як загального, так і умінь розв'язувати задачі певних видів. Вирішення цієї проблеми можливо через створення методики навчання молодших школярів розв'язування задач, яка містить дві підсистеми — систему задач для формування загального уміння розв'язувати задачі та систему задач для формування вмінь розв'язувати задачі певних видів. Розробка такої методики можлива на основі застосування пропозицій С. Є. Царьової, Л. М. Фрідмана та інших вчених щодо формування обох видів умінь. Тим часом, ми бачимо можливості підвищення ефективності формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі у реалізації особистісно орієнтованого підходу, а також у дотриманні психолого-дидактичних вимог до процесу формування умінь і навичок. Розглянемо їх у наступних параграфах.

2.2. ОСОБИСТІСНО ОРІЄНТОВАНЕ НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Одним із пріоритетів державної політики розвитку освіти є особистісна орієнтація навчання. Особистісно орієнтований підхід в освіті розуміється як побудова відкритої особистісної взаємодії у ході навчання, забезпечення умов для особистісного розвитку, розкриття здібностей, розуміння себе, становлення суб'єктності учня. При цьому навчальний матеріал виступає вже не як самоціль, а як засіб, що створює умови для повноцінного виявлення й розвитку особистісних якостей суб'єкта освітнього процесу.

Філософським фундаментом такої системи є методологія гуманізму. Гуманістична (феноменологічна) парадигма ставить в центр уваги учня як суб'єкта життя, як вільну і духовну особистість, що має потребу в саморозвитку. Представники гуманістичної парадигми не відрізняються єдністю поглядів. У її рамках співіснують достатньо різноманітні моделі освіти. У єдиний напрям їх об'єднує ціннісне відношення до дитини і дитинства як унікального періоду життя людини; визнання розвитку дитини (розумового, етичного, фізичного, естетичного) головною задачею школи.

У сучасній педагогіці є велика кількість концепцій і теорій, визначуваних їх авторами як «особистісно орієнтовані». З позицій психології концепція особистісно орієнтованого навчання розроблена І. С. Якиманською; аксіологічну концепцію особистісного виховання розроблено І. Б. Котовою, А. В. Петровським, Є. Н. Шияновим; дидактичну модель особистісно орієнтованої освіти подано В. В. Серіковим; проективну модель особистісно орієнтованого навчання — Н. І. Алексеєвим.

Головне призначення навчання, за І. С. Якиманською, полягає в тому, щоб перетворювати, шліфувати, збагачувати суб'єктивний досвід. В її концепції основна увага надається технології особистісно орієнтованого навчання, основною метою якого автор вважає розвиток індивідуальності учня. Тому підставою технології особистісно орієнтованого навчання є принцип суб'єктивності освіти, який реалізується в наступних дидактичних вимогах до змісту особистісно орієнтованого освітнього процесу:

— учбовий матеріал (характер його пред'явлення) повинен забезпечувати виявлення змісту суб'єктного досвіду учня, включаючи досвід його попереднього навчання;
— виклад знань в підручнику (вчителем) повинен бути спрямований не тільки на розширення їх об'єму, структуризацію, інтеграцію, узагальнення наочного змісту, але і на перетворення наявного досвіду кожного учня;
— в ході навчання необхідне постійне узгодження досвіду учня з науковим змістом знань, що задаються;
— активне стимулювання учня до самоцінної освітньої діяльності повинно забезпечувати йому можливості самоосвіти, саморозвитку, самовираження в ході оволодіння знаннями;

— учбовий матеріал повинен бути організований так, щоб учень мав нагоду вибору при виконанні завдань, розв'язуванні задач;
— необхідно стимулювати учнів до самостійного вибору і використання найзначущіших способів опрацьовування учбового матеріалу;
— при введенні знань про прийоми виконання учбових дій необхідно виділяти загальнологічні і специфічні наочні прийоми учбової роботи з урахуванням їх функцій в особовому розвитку;
— необхідно забезпечувати контроль і оцінку не тільки результату, але, головним чином, процесу навчання, тобто тих трансформацій, які здійснює учень, засвоюючи учбовий матеріал;
— освітній процес повинен забезпечувати побудову, реалізацію, рефлексію, оцінку навчання як суб'єктної діяльності. Для цього необхідне виділення одиниць навчання, їх опис, використовування вчителем на уроці, в індивідуальній роботі (різні форми корекції, репетиторство) [616].

Автор доводить, що «одиницями навчання» в особистісно орієнтованому освітньому процесі слід вважати особистісно значуще відношення до учбового тексту, самостійність мислення і спосіб учбової роботи, який створює і реалізує сам учень. Постійна активізація цих способів в ході навчання — основний шлях розвитку пізнавальних здібностей, умова їх прояву. Творцем способів є суб'єкт навчання — учень. Вчитель їх корегує, сприяє їх закріпленню і перетворенню в прийоми інтелектуальної діяльності.

У концепції І. Б. Котової, А. В. Петровського, Є. Н. Шиянова реалізовано аксіологічний (ціннісний) підхід, який полягає у визначенні гуманістичної спрямованості освіти як соціально-цілісного комплексу поглядів, переконань, ідеалів, де людина виступає вищою цінністю. Система цінностей, що створює аксіологічний аспект педагогічної свідомості, включає цінності, пов'язані із затвердженням особою своєї ролі в соціальній і професійній сфері; цінності, що задовольняють потреби в спілкуванні і розширюють його круг; цінності, що орієнтують на саморозвиток творчої індивідуальності; цінності, що дозволяють здійснити самореалізацію. У зв'язку з цим задача педагогічної освіти — підготовка вчителя як творчої особистості, здібної до рефлексії і корекції своїх дій по здійсненню культурно-гуманістичної особистісно-твірної функції. Розв'язування цієї задачі сприяє розвитку «Я-концепції» майбутнього педагога.

У основу моделі особистісно орієнтованої освіти, розробленої В. В. Серіковим, покладено теорію особистості З. Л. Рубінштейна, згідно якої суть особистості виявляється в її здатності займати певну позицію. Провідною ідеєю цієї концепції є не формування особистості із заданими властивостями, а створення умов для повноцінного прояву і розвитку особистісних функцій суб'єктів освітнього процесу. Головною умовою прояву особистісних здібностей в освітньому процесі В. В. Серіков вважає створення особистісно орієнтованої ситуації (учбової, пізнавальної, життєвої). Це така ситуація, в якій вимагається прояв особистісних функцій, тобто дитина потрапляє в ситуацію, коли треба шукати значення, подумати про себе, побудувати образ і модель свого життя, вибрати творчий варіант рішення проблеми, дати критичну оцінку чинникам і т. д. Пропонується Технологія, що ґрунтується на ідеї реалізації трьох основних характеристик особистісно орієнтованої ситуації: життєвої контекстності, діалогічності і ігровій (ролевій) взаємодії її учасників.

У моделі, розробленій Н. І. Алексєєвим, суть особистісно орієнтованого навчання зв'язується не тільки з унікальністю і самобутністю учня, але і з неповторністю особистості педагога, з одного боку, а з іншого — з поняттям «культурного акту», значення якого полягає в створенні учнем себе, своєї особистості за допомогою самоствердження в культурі. Головними орієнтирами особистісно орієнтованої освіти є значення діяльності, ієрархія оцінок, розвиток рефлексії, самостійності як суб'єктивної освіти (наявність особистої позиції) і т. д. Математику, фізику, хімію, біологію і ін. Н. І. Алексєєв визначає як структурно орієнтовані предмети, механізмом засвоєння яких виступає рефлексія, пошук «нового» знання.

Визначаючи проблеми особистісно орієнтованої математичної освіти учнів середньої школи, З. І. Слєпкань зазначає, що особистісно орієнтована освіта приймає розвиток: функцій вибору з цілепокладання, рефлексії, смисловизначення, побудови образу «Я», прийняття рішень, відповідальності за їх виконання, творчу самореалізацію в обораній діяльнісній сфері, забезпечення автономності й індивідуальності буття суб'єкта. Тому у системі особистісно орієнтованої математичної освіти надзвичайної важливості набуває цілепокладання як основний регулятор обґрунтування процесу навчання математики; реконструкція процесуально-методичної складової процесу навчання, при цьому зміст навчання має являти єдність змістовного і процесуального компонентів, взаємодію навчання й особистісного досвіду школяра; проблема створення підручника, який би надав можливість учневі самостійно обирати рівень засвоєння навчального матеріалу і режим просування у навчанні відповідно до своїх потреб і можливостей; у підготовці вчителя зростає потреба актуалізації його особистісних властивостей і функцій як головного суб'єкта в організації навчально-виховного процесу [505].

Однією з поширених освітніх стратегій є особистісно-розвивальне навчання. Теорія розвивального навчання не представляє в даний час єдиної наукової концепції, а складається з різних напрямів, заснованих на оригінальних, експериментально перевірених ідеях їх творців. Так, на думку Є. Н. Кабанової-Меллер, Д. Н. Богоявленського, основна задача розвивального навчання полягає у формуванні в учнів прийомів розумової діяльності, на думку П. Я. Гальперіна, Н. Ф. Тализіной, — в поетапному формуванні розумових дій, орієнтувальної основи учбової діяльності; З. І. Колмикова вважає розвивальним таке навчання, яке формує продуктивне, тобто творче, мислення, і т. д. Проблемі розвивального навчання присвячені роботи А. К. Дусавицького, Г. Д. Кириллової, О. О. Леонтьєва, О. Я. Савченко, І. С. Якиманської та інших.

Теоретичні основи психології розвивального навчання закладалися Л. С. Виготським, О. М. Леонтьєвим, Е. В. Ільєнковим, Д. Б. Ельконіним в 60-ті — 70-ті роки XX століття. В теперішній час існують системи розвивального навчання у різних варіантах — система Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова, система Л. В. Занкова, система «Школа 2100» або школа П. Я. Гальперіна та Н. Ф. Тализіної. В усіх цих системах на першому місці стоїть не накопичення знань, вмінь та навичок у вузькій предметній області, а становлення особистості, її «будівництво» в процесі діяльності дитини в предметному світі, причому не просто індивідуальної, а спільної, колективної діяльності. Усі зазначені концепції реалізують діяльнісний підхід у навчанні, вони розглядають процес навчання — як процес діяльності учня, який спрямований на становлення його свідомості і його особистості в цілому.

О. О. Леонтьєв вважає, що усі варіанти теорії розвивального навчання базуються на спільних положеннях психології і дидактики, що пов'язані з діяльнісним підходом:

1. Процес навчання — це завжди процес навчання діяльності — або предметно-практичним діям (наприклад, найпростішим трудовим діям, практичному спілкуванню на іноземній мові), або розумовим діям. Навчати діяльності — це означає робити навчан-

ня мотивованим, вчити дитину самостійно ставити перед собою мету і знаходити шляхи, в тому числі й засоби, її досягнення (тобто оптимально організовувати власну діяльність), допомагати дитині сформувати в себе уміння контролю і самоконтролю, оцінки і самооцінки. Те, що ми називаємо знаннями, — це орієнтувальна основа навчальної, а потім й пізнавальної діяльності. Те, що називається навичками, — це здатність учня здійснювати «технологічний» бік діяльності навчання.

2. Діяльнісний підхід передбачає розкриття перед дитиною всього спектру можливостей і створення в неї установки на вільний, але відповідальний і так або інакше обґрунтований вибір тієї можливості (або знаходження нею інших можливостей, які не передбачені досвідом дитини і її соціального середовища). Отже, мета розвивального навчання полягає в поглибленні і розширенні творчого потенціалу людини.

3. Діяльнісний підхід в освіті пов'язаний ще й з тим, що для того, щоб забезпечити самостійну, творчу діяльність кожного учня, щоб навчити його розумовим діям, треба йти від зовнішніх, практичних, матеріальних дій до дій внутрішніх, теоретичних, ідеальних. Це відоме положення П. Я. Гальперіна реалізується в усіх напрямках теорії розвивального навчання. Крім того, навчання діяльності передбачає на першому етапі спільну навчально-пізнавальну діяльність групи учнів під керівництвом вчителя. Відома «зона найближчого розвитку», за Л. С. Виготським, — це як раз те, що лежить між матеріалом, який може бути засвоєним дитиною тільки в процесі спільної діяльності, і тим, що вона здатна вже засвоїти самостійно [290].

Система розвивального навчання Л. В. Занкова. Задача навчання в системі Л. В. Занкова — загальний розвиток учнів, який розуміється як розвиток розуму, волі школярів і як надійна основа засвоєння ними знань, навичок та вмінь. Дидактичні принципи:

1) навчання на високому рівні складності,
2) ведуча роль теоретичних знань,
3) вивчення програмного матеріалу швидким темпом,
4) усвідомлення школярами процесу навчання,
5) систематична робота над загальним розвитком усіх учнів, в тому числі сильних й слабих.

На думку Л. В. Занкова, в числі дидактичних принципів вирішальна роль належить принципу навчання на високому рівні складності. Один з аспектів даного поняття — це подолання перешкод. Інший аспект — це напруження сил учнів. Зміст цього

принципу базується на учінні Л. С. Виготського про зону найближчого розвитку.

Принципи дидактичної системи реалізуються у побудові змісту початкової освіти, в методичній побудові роботи з навчальних предметів. Цілісність реального навчального процесу забезпечується не сумою часткових предметних методик, а завдяки тому, що навчання здійснюється на основі єдиної методичної системи, яка має типові методичні властивості, що охоплюють усі навчальні предмети, — багатогранність, процесуальний характер, колізії, варіативність.

Багатогранність навчального процесу розуміється як розвиток різних боків особистості, багатство видів діяльності учнів. Процесуальність методики виявляється в ході засвоєння нового матеріалу; знання, що засвоєні раніше, не залишаються на попередньому рівні, вони вступають у нові або більш широкі системи зв'язків, прогресують. Колізія — типова властивість методичної системи, з якої випливає необхідність систематичного використання у навчальному процесі ситуацій, що виникають при зіткненні старих знань з новими, нового матеріалу з знаннями, що раніше засвоєні, старого індивідуального досвіду з новими вимогами його застосування, почуттів з розумом. Варіативність характеризується як гнучкість у використанні форм і способів навчання у залежності від ситуації, що склалася на уроці, конкретизуючи власну думку наступним чином, — це коли на уроці варіюється рівень складності завдань, серед яких особливе місце займають завдання пошукового характеру на класифікацію, групування, завдання, що розвивають тонкість спостереження. Варіативність — це право, свобода вибору різнорівневих завдань для виконання учнями.

Головним змістом математики є побудова причинно-наслідкових зв'язків і системи зв'язків між поняттями. Не менш важливим є вироблення в дитини уявлення про мінливість більшості явищ, неоднозначність розв'язань проблем, що стоять перед людиною, які вимагають самостійного мислення. Тому у підручнику І. І. Аргинської багато завдань, що мають кілька розв'язків або не мають жодного, завдань, які містять «провокації». Багато уваги приділяється формуванню алгоритмічного мислення, яке є необхідною складовою математичного мислення і грає вирішальну роль у комп'ютерному світі, який все ширше входить у життя людей. Шлях до такого мислення лежить, на думку І. І. Аргинської, через розв'язування різноманітних задач з логічним навантаженням і через завдання на усвідомлення способів виконання математичних операцій.

На уроці здійснюється робота над різноманітним матеріалом і ставиться задача у просуванні дітей у вивченні кількох тем. Поєднання в одному уроці різноманітних питань сприяє, з одного боку, природній індивідуалізації темпу і глибини оволодіння знаннями, вміннями кожною дитиною, а з іншого, дозволяє ефективніше використовувати час уроку (переключення на інший матеріал знімає втомленість і збуджує нову хвилю інтересу). Отже, урок математики в системі Л. В. Занкова — багатоаспектний. Наступною його відмінною особливістю є відсутність чіткого розмежування на звичні етапи: повторення, вивчення нового, закріплення. Це пов'язано із тим, що майже усі завдання підручника містять елементи кожного з цих етапів [16].

Теорія розвивального навчання на основі навчальної діяльності. На підставі уявлень про психологічний вік, як простір дитячих можливостей, Д. Б. Ельконін сформулював гіпотезу про те, що рівень інтелектуальних досягнень, який при традиційній системі навчання демонструють лише обдаровані діти 6—12 років, стає доступним більшості молодших школярів при навчанні іншого типу. Головна новизна даної системи навчання полягає в ідеї про те, що введення у навчальний предмет має починатися з відкриття дітьми найбільш загальних властивостей цього предмета. Ці загальні властивості учні відкривають у результаті дій з перетворення вихідного предмета, вивчення в його у почуттєвій формі і фіксування у моделі. Подальше вивчення предмета розгортається як конкретизація, збагачення вихідного загального поняття при зустрічі з новими фактами. Рух від загального до часткового відбувається в ситуаціях, коли діти стикаються з протиріччями між знанням, що зафіксоване у моделі, і новим фактом. Розв'язання цих протиріч і призводить до збагачення вихідного поняття [581].

Ці автори розглядають навчальну діяльність (НД) як діяльність учня, свідомо спрямовану ним на здійснення цілей навчання і виховання, які приймаються учнем в якості власних цілей. Характеризуючи поняття «навчальна діяльність», В. В. Давидов зазначає, що:

— по-перше, вона містить усі компоненти загального поняття «діяльності» — потреби і мотиви, цілі, умови і засоби їх досягнення, дії і операції;
— по-друге, ці компоненти мають специфічний предметний зміст, що відрізняє її від будь-якої іншої діяльності (ігрової, трудової й тощо);
— по-третє, у навчальній діяльності обов'язково повинна бути присутньою творча або перетворююча основа [150].

В. В. Давидов, А. К. Дусавицький також зазначають, що поняття «навчальна діяльність», «засвоєння» та «навчання» ототожнювати не можна. Засвоюватися можуть й готові знання, навчання може здійснюватися так, що не буде вимагати від учня предметного або розумового експериментування. Навчальна діяльність включає в себе процеси засвоєння, але здійснюється лише тоді, коли ці процеси перебігають у формі цілеспрямованого перетворення того чи іншого матеріалу. Таку навчальну діяльність Л. М. Фрідман називає цілеспрямованою навчальною діяльністю (ЦНД).

Л. М. Фрідман [560] виділяє чотири особливості — принципи цілеспрямованої навчальної діяльності (ЦНД).

Першою особливістю цілеспрямованої навчальної діяльності є те, що вона спрямована не на отримання яких-небудь матеріальних або інших результатів, а на зміну самого учня, на оволодіння ним певними діями, уміннями, на засвоєння яких-небудь знань, на опрацювання в себе яких-небудь психічних якостей.

Другою особливістю цілеспрямованої навчальної діяльності є те, що вона спрямована на засвоєння загальних способів дій.

Третьою особливістю ЦНД є те, що вона із самого початку формується як науково-теоретична діяльність. В межах і засобом навчальної діяльності у молодших школярів формуються основи теоретичного відношення до дійсності, уміння орієнтуватися в теоретичних формах людської діяльності, здатність оперувати абстрагованими поняттями [154].

Наступна особливість ЦНД: вивчення навчального матеріалу будується за принципом змістовного узагальнення, *коли засвоєння знань загального і абстрактного характеру передує ознайомленню з більш частковими і конкретними знаннями.*

У відповідності з вказаними особливостями — принципами ЦНД — будується і структура такої діяльності. Першим елементом цієї структури є *навчально-пізнавальні мотиви*. Д. Б. Ельконін зазначає, що навчально-пізнавальними мотивами, якими спонукається навчальна діяльність школярів, можуть бути лише такі, які безпосередньо пов'язані із змістом навчальної діяльності, тобто мотиви придбання *узагальнених способів дій, мотиви власного росту, власного самовдосконалення* [608].

Другим елементом структури навчальної діяльності є *навчальні задачі* (див. 1.1.1). В. В. Давидов зазначає, що особливу увагу вчителя слід спрямувати на повноцінне і правильне виконання школярами дій і операцій, засобом яких успішно розв'язуються навчальні задачі. Серед таких дій автор виділяє:

1. Перетворення школярами умов задачі, що не розв'язується відомими їм способами. Ця дія спрямована на виявлення загальної основи часткових особливостей усіх однорідних задач.

2. Моделювання в предметній, графічній або знаковій формі вже виділеного відношення у навчальній задачі, що розв'язується. При цьому не будь-яке зображення того чи іншого матеріалу можна назвати моделлю, а лише те, яке фіксує деяке загальне (істотне) відношення умов навчальної задачі, що розв'язується.

3. Перетворювання самої моделі з метою ретельного вивчення властивостей загального відношення, що в ній виділено.

4. Конкретизація цього відношення в системі різноманітних часткових задач, що є однорідними з навчальною задачею.

5. Контроль і оцінка. Контроль забезпечує школяру правильне виконання навчальних дій, а оцінка дозволяє йому визначити, засвоєний чи не засвоєний (і в якому ступені) загальний спосіб розв'язування даної навчальної задачі [150].

Особливе місце в структурі навчальної діяльності займають дії *контролю і оцінки*. За допомогою контролю учень повинен співвіднести власні дії та їх результати з наданими йому зразками і загальними уявленнями, встановити якість цих результатів. В процесі навчання застосовуються кілька видів контролю:

1) контроль на підставі аналізу результату виконаних дій;
2) пооопераційний (покроковий) контроль у відповідності з встановленою повною орієнтувальною основою дії у вигляді алгоритму або евристичної схеми.

Дія оцінки встановлює ступінь відповідності або невідповідності результатів навчальної діяльності учнів вимогам навчальної задачі.

Засвоєння навчальної діяльності неможливо без засвоєння операційного боку навчальних дій. Поетапне формування розумових дій, при умові цілеспрямованого їх формування, є засобом, за допомогою якого учні не лише оволодівають цією дією, але й умінням контролювати процес її виконання.

Курс математики Є. І. Александрової реалізує підхід до навчання, при якому дитина відчуває особистісний успіх, впевненість в своїх силах. Він створює умови, щоб навчити дітей думати. Характерною особливістю даного курсу математики є його спрямованість на виховання, розвиток особистості дитини, а формування теоретичного мислення складає лише засіб для досягнення освітньої мети.

Нові цілі і задачі визначають новий зміст, що являє собою систему наукових теоретичних понять, а тому і новий метод навчання, який називається квазідослідницьким. Поняття задаються

не в готовому вигляді, не у вигляді означень і правил, а учень їх «відкриває» самостійно. Для цього створюються такі навчальні ситуації, коли у дитини з'являється потреба в цьому понятті або способі дії, коли дитина стоїть на межі знання і незнання. «Відкриття» відбувається у ході співпраці дітей, при чому задача вчителя полягає у організації і підтримці навчального діалогу.

У підручнику виділяються 10 блоків завдань:

Перший блок — це завдання, які вже виконані кимось, а дитині їх слід оцінити (оціночний блок):

1-й рівень — завдання виконані кимось з використанням графічної моделі;

2-й рівень — завдання виконані кимось без використання графічної моделі. Щоб оцінити його, дитина повинна скласти графічну модель.

Другий блок — виконавчий. Ці завдання дитині слід виконати самостійно:

1-й рівень — дитина виконує завдання сама, але їй дана готова відповідь;

2-й рівень — дитина виконує завдання сама, але їй дано кілька відповідей, серед яких одна правильна, а решта отримані в результаті типових помилок;

3-й рівень — дитина сама виконує завдання і сама доводить правильність його виконання.

Третій блок — рефлексивний. Це завдання на складання дитиною аналогічних завдань. Цей блок дозволяє з'ясувати, чи вміє дитина виділяти істотні зв'язки і відношення.

Четвертий блок — рефлексивно-методичний. Це завдання типу «як навчити інших придумувати такі завдання».

П'ятий блок — діагностичний. Це завдання з «ловушками».

Шостий блок — рефлексивно-діагностичний. Це завдання на придумування завдань з «ловушками», що дозволяє визначити, наскільки дитина бачить «помилконебезпечні» місця.

Сьомий блок — методико-діагностичний, в якому дітина вирішує питання, як навчити інших придумувати завдання з «ловушками».

Восьмий блок — це так звані олімпіадні задачі, до яких відносяться задачі, що не виходять за межі понять, що вивчаються, але вимагають нестандартних способів розв'язування.

Дев'ятий блок — завдання на придумування дітьми власних олімпіадних задач по аналогії з даними.

Десятий блок пропонує учням навчити інших придумувати олімпіадні задачі.

Ці рівні адекватні рівням оволодіння учнями тим чи іншим поняттям і надають можливість дітям з різними математичними здібностями відчути власні сили [9].

Поєднує в собі підходи до розвивального навчання і Л. В. Занкова, і Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова, освітня система, керівником якої є О. О. Леонтьєв. **Освітня система «Школа 2100»** спирається на розвивальну парадигму, яку часто позначають так само як «варіативну», «гуманістичну» або «особистісно орієнтовану». Вона реалізує принципи:

а) особистісно орієнтовані принципи (принцип адаптивності; принцип розвитку; принцип психологічної комфортності);

б) культурно орієнтовані принципи (принцип образу світу; принцип цілісності змісту освіти; принцип систематичності; принцип смислового відношення до світу; принцип орієнтовної функції знань; принцип оволодіння культурою);

в) діяльнісно орієнтовані принципи (принцип навчання діяльності; принцип керованого переходу від діяльності в учбовій ситуації до діяльності в життєвій ситуації; принцип керованого переходу від спільної учбово-пізнавальної діяльності до самостійної діяльності учня; принцип опори на попередній (спонтанний) розвиток; креативний принцип).

Основна мета курсу математики у системі «Школа 2100» — розвиток усіх боків особистості дитини, формування в неї інтересу до пізнання, здатності до творчості, готовності до саморозвитку [416].

Курс математики для початкової школи створений на базі психолого-педагогічних досліджень, проведених наприкінці 70-х — на початку 80-х років в НДІ ОПП АПН СРСР під керівництвом професора Н. Я. Віленкина. Цей курс є частиною єдиного безперервного курсу математики, який розробляється в даний час з позицій розвивального навчання, гуманізації і гуманітаризації математичної освіти (науковий керівник — Г. В. Дорофєєв). Відзначимо основні особливості даного курсу.

Навчання математики здійснюється на основі діяльнісного методу (рис. 2.1.) [411].

Нові математичні поняття і відносини між ними не даються дітям в готовому вигляді. Діти «відкривають» їх самі в процесі самостійної дослідницької діяльності. Вчитель лише направляє цю діяльність і на завершення підводить підсумок, даючи точне формулювання встановлених алгоритмів дії і знайомлячи із загальноприйнятою системою позначень. Таким чином, діти будують «свою» математику, тому математичні поняття набувають для

них особову значущість і стають цікавими не із зовнішньої сторони, а по суті.

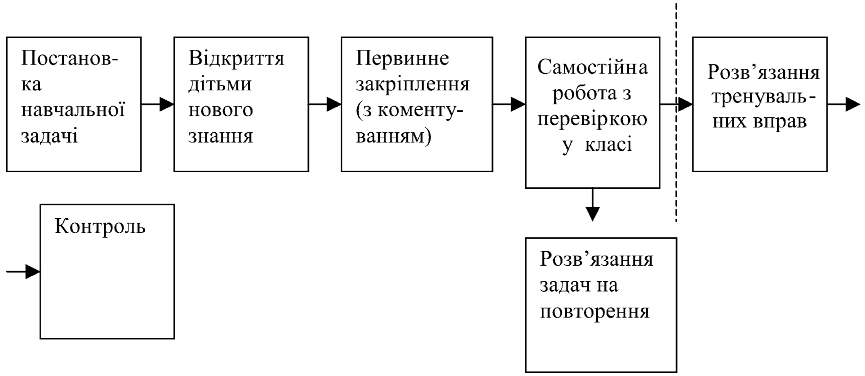


Рис. 2.1. Схема діяльнісного методу за Л. Г. Петерсон

Ще однією особливістю використовування діяльнісного методу є необхідність попередньої підготовки дітей в плані розвитку у них мислення, мови, творчих здібностей, пізнавальних мотивів діяльності. Спеціальна робота в цьому напрямі передбачена протягом всіх років навчання дітей в початковій школі, але особливо на початкових етапах навчання — в І півріччі 1-го класу.

Діяльнісний метод вимагає наступну структуру уроків введення нового знання:

І. Постановка учбової задачі

У список задач, що актуалізують знання дітей, включається проблемне питання, що мотивує вивчення нової теми.

ІІ. «Відкриття» дітьми нового знання

Вчитель пропонує учням систему питань і завдань, що підводять їх до самостійного «відкриття» нової властивості або відношення. В результаті обговорення він підводить підсумок, знайомлячи із загальноприйнятою термінологією і показуючи зразок коментованого рішення задач і прикладів нового типу.

ІІІ. Первинне закріплення

Виконуються тренувальні вправи з обов'язковим коментуванням, промовлянням вголос вивчених алгоритмів дії.

IV. Навчальна самостійна робота

Учні самостійно виконують завдання на застосування вивчених властивостей, перевіряють їх в класі і виправляють допущені помилки. Тут важливо створити для кожної дитини ситуацію успіху («я можу», «у мене виходить»).

V. Розв'язання задач на повторення

Пропонуються завдання, що забезпечують безперервний розвиток змістовно-методичних ліній курсу і доводять до рівня автоматизованого навику уміння розв'язувати задачі і приклади основних видів. З другого боку, сюди регулярно включаються нестандартні, логічні, цікаві задачі і т. д.

Щоб не втрачати в рівні відпрацювання навиків і, одночасно, постійно підтримувати високий рівень активності дітей, Л. Г. Петерсон використовує прийом, який можна назвати «випереджаючою многолінійністю». Після введення поняття, яке вимагає для відпрацювання багато часу, автор знайомить учнів з такими математичними фактами, які не входять на даному віковому етапі в обов'язкові результати навчання, а слугують розвитку дітей, розширенню їх кругозору, формуванню інтересу до математики, готують подальше, глибше вивчення математичних понять. Тренувальні вправи виконуються паралельно з дослідженням нових математичних ідей, тому вони не стомлюють дітей, тим більше, що їм надається, як правило, ігрова форма (кодування і розшифровка, відгадування загадок і т. д.). Таким чином, кожна дитина з невисоким рівнем підготовки має нагоду не «поспішаючи» відпрацювати необхідний навик, а найбільш підготовлені діти постійно одержують «їжу для розуму», що робить уроки математики привабливими для всіх дітей — і сильних, і слабких.

Навчання ведеться в «зоні найближчого розвитку дитини», тобто на високому рівні трудності. Дитина з найперших уроків попадає в ситуацію, що вимагає від неї інтелектуальних зусиль, продуктивних дій. Разом з тим, високий рівень подачі матеріалу повинен поєднуватися із створенням в класі атмосфери довіри, доброзичливості, захопленості, що дозволяє по-справжньому «розкритися» і повірити в свої сили кожному учню [403].

Як бачимо, розглянуті системи розвивального навчання мають багато спільного, а саме ґрунтуються майже на одних й тих самих психологічних принципах. Психологічні принципи розвивального навчання запропоновані З. І. Калмиковою [232].

Основним принципом розвивального навчання за З. І. Калмиковою є проблемність. Проблемним називається таке навчання, під час якого засвоєння знань і початковий етап формування інтелектуальних навичок відбувається в процесі відносно самостійного розв'язування системи задач-проблем, який протікає під загальним керівництвом вчителя. Причому розвивальний ефект забезпечують лише такі задачі-проблеми, які відповідають рівню розумового розвитку учнів.

Проблемність та інші принципи розвивального навчання не можуть бути реалізовані без врахування вікових та індивідуально-типологічних особливостей мислення дітей. Тому одним з важливих принципів розвивального навчання З. І. Калмикова вважає оптимальний (який відповідає цілям навчання і психічним особливостям індивіда) розвиток різних видів розумової діяльності: і абстрактно-теоретичного, і наочно-образного, і наочно-дійового практичного мислення.

Школярі, які знаходяться в однакових умовах навчання, засвоюють матеріал по-різному: одни на високому рівні, другі — на середньому, треті — на низькому. Такий стан пояснюється суттєвими відмінностями між дітьми. Так, за даними Ю. З. Гільбуха, розбіг індивідуальних відмінностей молодших школярів можна охарактеризувати відношенням 1:10. В умовах індивідуалізації і диференціації навчання різниця в рівнях засвоєння може бути згладжена шляхом варіювання кількості вправ і міри допомоги. Ось чому одним з важливих принципів розвивального навчання є його індивідуалізація і диференціація.

Наступним принципом розвивального навчання за З. І. Калмиковою є формування узагальнених прийомів розумової діяльності. Лише у школярів з високим рівнем научуваності на основі розв'язування одиничних задач формуються узагальнені прийоми, методи розв'язування цілого класу задач. Формування такого роду узагальнених прийомів розумової діяльності дуже важливе, тому що означає суттєве зрушення в інтелектуальному розвитку, розширює можливості переносу знань в нові умови.

Реалізація розглянутих принципів можлива за умов спеціальної організації мнемічної діяльності учня, яка забезпечує усвідомлення і міцність знань, що є також принципом розвивального навчання [231].

Виходячи з вищесказаного, при розробці методичної системи навчання розв'язування сюжетних задач слід врахувати властивості процесуальності, колізії, варіативності (Л. В. Занков); основним методом навчання розв'язування типових задач має бути квазідослідницький (Е. І. Александрова); методична система повинна бути побудована на основі діяльнісного підходу до навчання (В. В. Давидов, Л. Г. Петерсон та ін.).

Таким чином, ми розглянули розвивальну парадигму навчання. Усі системи реалізують ідеї особистісно орієнтованого навчання. Інший бік проблеми особистісно орієнтованого навчання — це врахування індивідуальних особливостей учнів та реалізації індивідуального та диференційованого підходу до них. Так, серед особистісно орієнтованих принципів О. О. Леонтьєв виділяє наступні:

Принцип адаптивності. Не дитина для школи, а школа для дитини! Школа повинна бути гнучкою системою, щоб в ній знайшли собі місце і діти, що з тих або інших причин виявилися позаду основної маси однолітків, і обдаровані діти, і діти з різною підготовленістю і різними інтересами.

Принцип розвитку. Основна задача школи — це розвиток школяра, і в першу чергу — цілісний розвиток його особистості і готовність особистості до подальшого розвитку. Розвиваюча освіта у відвічному, прямому значенні цього слова орієнтована на те, щоб створювати кожному школяреві умови, в яких він максимально реалізував би себе, і не тільки свій інтелект, своє мислення, свою діяльність і здібності, але саме особистість.

Принцип психологічної комфортності. Сюди відноситься, поперше, зняття всіх стресоутворюючих чинників учбового процесу. Даний принцип припускає створення в учбовому процесі розкутої, стимулюючої творчу активність школяра атмосфери. Принцип комфортності вимагає опори на внутрішні мотиви і, зокрема, на мотивацію успішності, постійного просування вперед.

Таким чином, особистісно орієнтоване навчання спирається на розвиваючу парадигму та реалізується за допомогою диференційованого підходу до дітей.

В педагогічній науці в якості одного із стратегічних напрямків, які забезпечують ефективність навчального процесу, зорієнтованого на врахування індивідуальних особливостей учнів, максимальний вплив на їх розвиток, визнана **диференціація навчання**. Проблемі диференціації і індивідуалізації навчання присвячені роботи О. О. Бударного, М. І. Бурди, В. Я. Забранського, О. О. Кірсанова, О. Я. Савченко, З. І. Слєпкань, Є. С. Рабунського, І. Унт та ін. Треба зазначити, що у психолого-педагогічній науці існує неоднозначність в тлумаченні терміну «диференціація навчання». Іноді це поняття неправомірно звужується. Так, у роботі І. Унт воно призводиться до одного з видів диференціації. Автор під диференціацією розуміє групування учнів на підставі яких-небудь особливостей для окремого навчання за різними навчальними планами і програмами [543]. Але цей вид диференціації відомий під терміном «зовнішня диференціація» і означає таку організацію навчального процесу, при якій, для врахування індивідуальних особливостей учнів, вони поєднуються в спеціальні диференційовані навчальні групи.

Аналізуючи різноманітні означення, можна зазначити, що поняття диференціації навчання нерідко застосовується в якості синоніма індивідуалізації навчання. Так, в одному й тому ж значенні говорить про індивідуальний та диференційований підхід до учнів на уроці Є. Я. Голант.

Більшість дослідників даної проблеми використовують поняття «індивідуалізація» таким чином: індивідуалізація не передбачає обов'язкового врахування особливостей кожного учня; частіше вчені обмежуються врахуванням особливостей груп учнів, які схожі за будь-яким комплексом якостей (О. О. Бударний, О. О. Кірсанов, Є. С. Рабунський).

О. О. Кірсанов розглядає індивідуалізацію навчальної роботи як систему виховальних і дидактичних засобів, які відповідають цілям діяльності і реальним пізнавальним можливостям колективу класу, окремих учнів і груп учнів, забезпечуючи при цьому навчальну діяльність учня на рівні його потенційних можливостей з врахуванням цілей навчання [236]. Схоже означення дано Г. Д. Глейзером, який говорить про диференційований підхід, розуміючи його як систему керування пізнавальною діяльністю учнів з врахуванням як індивідуальних психологічних відмінностей окремих школярів, так і домінуючих особливостей груп учнів [204].

Але є й і інші точки зору на трактування цих понять. За думкою І. Унт, індивідуалізація — це врахування в процесі навчання індивідуальних особливостей учнів в усіх його формах і методах, незалежно від того, які особливості і в якій мірі враховуються.

І. В. Дубровіна вважає, що індивідуальний підхід у навчанні та вихованні не означає, що кожна дитина повинна навчатися індивідуально, незалежно від інших дітей, а передбачає добре знання й розуміння індивідуально-психологічних особливостей учнів, специфічних умов, які впливають на формування тієї чи іншої риси особистості. Індивідуальний підхід передбачає вміння спиратися у вихованні та навчанні на те позитивне, що є в кожної дитині. Якщо учень відчуває, що вчитель помічає його позитивні якості, підтримує успіх, що намітився, він прикладе всі зусилля для того, щоб досягти більшого. Вчителю необхідно знати, яка діяльність є для учня найбільш успішною, в якій галузі сама дитина вважає себе сильнішою [173].

За означенням В. Ф. Харьковської, індивідуальний підхід — це система заходів по виявленню й розвитку навчальних можливостей кожного учня в умовах колективного навчання за єдиними програмами [564].

Як бачимо, поняття індивідуалізації навчання і диференціації дуже близькі. Якщо розглядати поняття «диференціації» у широкому змісті, то можна виділити два напрямки: «внутрішня диференціація» (яка саме й близька до індивідуалізації навчання) та «зовнішня диференціація» (розуміння диференціації І. Унт).

Якщо учні одного класу об'єднуються у тимчасові групи, за певними ознаками, на будь-якому етапі уроку і до кожної групи вчитель пропонує різний рівень вимог й тощо, тоді мова йде про внутрішню диференціацію. Якщо учні об'єднуються у відносно стабільні колективи: класи або групи для вивчення окремих предметів, тоді мова йде про зовнішню диференціацію навчання (Ю. З. Гільбух).

Проблема внутрішньої диференціації є найбільш розробленою в психолого-дидактичній науці і розповсюдженою в шкільній практиці. Внутрішня диференціація може здійснюватися як в традиційній формі врахування індивідуальних особливостей, так і в формі системи рівневої диференціації на підставі планування результатів навчання. У відповідності із цим перед вчителем ставиться подвійна мета: добитися безумовного досягнення усіма учнями рівня обов'язкової підготовки і одночасно створювати умови для засвоєння матеріалу на більш високих рівнях на підставі врахування індивідуальних особливостей учнів [54].

В. Я. Забранським обґрунтовано основні завдання диференційованого навчання математики в 5—6-х класах: створення компенсуючих умов для учнів у період кризисного етапу у математичному розвитку; допомога школярам в усвідомленні ступеню власного інтересу до математики; створення умов для розвивального навчання, забезпечення посильного рівня у навчанні.

Автором розроблено методику диференційованого навчання математики в 5—6-х класах, в основі якої лежать вимоги: врахування індивідуальних особливостей учнів за допомогою визначення рівня розвитку учнів на даному етапі навчання, діагностики навченості та научуваності школярів і виділення на цій основі мобільних груп учнів у межах класу; логіко-дидактичний аналіз навчального матеріалу, його планово-тематична організація і виділення рівнів навчальних вимог, що пред'являються школяру; раціональне сполучення фронтальних, колективних та індивідуальних форм організації навчання в залежності від етапа навчання і мети уроку; цілеспрямоване формування навчальної діяльності на різних рівнях засвоєння способів дій [181].

Сформульовані В. Я. Забранським основні завдання та методика диференційованого навчання математики для учнів 5—6-х класів охоплюють весі напрямки застосування диференційованого

підходу і, на нашу думку, можуть бути реалізовані й у початковій школі.

Питання індивідуалізації навчальної роботи на підставі типології учнів за особливостями їх навчальної діяльності та відносно цього класифікації завдань для самостійної роботи вивчалися А. А. Рабунським. Автор розглядає диференціацію завдань за об'ємом та ступенем складності, а також надання учням дозованої допомоги з врахуванням зони найближчого розвитку школяра як ефективні засоби здійснення індивідуального підходу до учнів.

Проблемою індивідуалізації навчальних завдань займалися А. А. Кірсанов, М. І. Махмутов. М. М. Анцибор, розглядаючи індивідуалізацію навчання в початкових класах на базі математики та російської мови, запропонувала застосування завдань 3—4-го ступенів важкості, які відрізняються один від одного за обсягом, складністю, засобом виконання або за усіма названими ознаками разом.

Об'єктом дослідження І. Унт була індивідуалізація навчальних завдань для самостійної роботи. При діленні завдань автор виходить із характеру навчальної діяльності учнів при виконанні завдань і виділяє три основні види:

І. Навчальні завдання, які опосередковують навчальну інформацію. Використовуються під час роботи з новим матеріалом, їх мета — доведення навчального матеріалу до свідомості учнів.

ІІ. Навчальні завдання, які спрямовують роботу учня з навчальним матеріалом. Цей вид завдань самостійної роботи можна поділити на такі види: 1) спостереження; 2) робота з текстом підручника; 3) вправи; 4) практичні та лабораторні завдання.

ІІІ. Творчі завдання. Сюди відносять завдання, які вимагають від учнів творчої діяльності. Учень повинен сам знайти засіб розв'язування, прикласти знання в нових умовах, створити щось суб'єктивно нове.

Також І. Унт розробила вимоги щодо змісту робочого керівництва самостійною роботою [543]. Враховуючи вікові особливості молодших школярів, учням початкових класів не можна пропонувати самостійні роботи за спеціальними інструкціями — робочими керівництвами — в повній мірі, тому ми не будемо наводити зміст цих вимог.

В дослідженні І. Унт внутрікласова індивідуалізація здійснювалась за допомогою індивідуалізованих навчальних завдань, які пропонувалися учням для виконання на уроці або вдома. Індивідуалізоване завдання лише умовно відрізняється від звичайного — воно передбачено не для всього класу, а для групи учнів або окремого учня згідно з їх індивідуальними особливостями.

Відповідно індивідуальним особливостям, які слід враховувати при індивідуалізації, подана ще одна класифікація завдань, які враховують: 1) рівень знань, вмінь й навичок; 2) загальні та спеціальні здібності; 3) навчальні вміння; 4) пізнавальні інтереси.

Завдання, які враховують рівень знань, вмінь та навичок. Тут І. Унт виділяє дві групи завдань: 1) завдання, які спрямовані на ліквідацію прогалин; 2) завдання по врахуванню попередніх знань (їх необхідність викликана тим, що неможливо допустити, щоб учень виконував завдання, які знаходяться нижче актуального рівня його розвитку).

До другої групи віднесено завдання, які: а) дозволяють учню інтегрувати свої попередні знання й життєвий досвід з новим матеріалом; б) пропонують учню коротко повторити новий матеріал для узагальнення; в) пропонують учню відразу виконати завдання, яке вимагає узагальнення й тим самим звільнює його від опрацювання нового матеріалу.

Завдання, які враховують загальні та спеціальні здібності учнів. Відмінності у здібностях впливають на темп засвоєння матеріалу. Більш здібні учні швидше схоплюють зміст матеріалу, що вивчається; для засвоєння знань і вмінь їм потрібно відносно менше повторень та вправ. Тому, у випадку, коли передбачено повторення і узагальнення, а також у випадку вправ, доцільно пропонувати більш здібним учням більше завдань на високому рівні складності.

Завдання, які враховують рівень навчальних вмінь. Для врахування навчальних вмінь у завданнях використовуються прийоми: різний обсяг дозування завдання при ознайомленні з новим матеріалом; різна кількість запитань по тексту (велика кількість питань більш деталізує матеріал); детальне або менш детальне робоче керівництво для самостійної роботи.

Завдання, які враховують пізнавальні інтереси учнів. Це можуть бути: 1) читання додаткової науково-популярної літератури; 2) читання додаткової художньої літератури; 3) робота зі словниками, енциклопедіями й тощо; 4) складання доповідей, творів й так інше.

Індивідуалізовані завдання можна розглядати з точки зору їх обов'язковості та регламентованості: 1) завдання, які призначені вчителем; 2) альтернативні або вибіркові завдання; 3) запропоновані вчителем додаткові завдання [543].

Очевидно, що не всі розглянуті види індивідуалізованих завдань можуть застосовуватися в початковій школі. Учням молодших класів здебільше пропонуються одні й ті самі завдання або

варіанти аналогічних завдань і при цьому даються вказівки, пояснення, необхідні учню в момент його виконання. Н. Ф. Вапняр виділяє три види таких вказівок: 1) поширюючи або поглиблюючи основне завдання; 2) супроводжуючи основне завдання ілюстраціями, запитаннями, які наводять, що полегшують в деякому ступіні роботу учня; 3) докладні вказівки і пояснення, що полегшують роботу учня [102].

У власних рекомендаціях Н. Ф. Вапняр виходить з того, що одні учні в змозі виконати завдання самостійно, іншим потрібна допомога, а треті зможуть виконати ще й додаткове завдання, яке поглиблює основне. В якості допоміжних засобів виступають: зразок способу дії, алгоритмічне розпорядження, теоретична довідка, інструкція, малюнок, схема, креслення, допоміжне запитання, вказівка й тощо. Додаткові завдання передбачають творче застосування знань і вмінь. Серед них завдання на порівняння, аналіз математичних об'єктів, на отримання певних висновків.

Реалізацію диференційованого підходу до учнів початкових класів на різних етапах уроку досліджували Г. Ф. Суворова, І. К. Глушков, З. П. Шабаліна. Методисти наголошують на необхідності застосування індивідуальних карток для актуалізації опорних знань перед вивченням нового матеріалу; на поясненні нового матеріалу на різних рівнях — спочатку на високому рівні складності, а потім більш доступно; на використанні диференційованих самостійних робіт під час закріплення та формування вмінь і навичок. Диференціація самостійної роботи здійснюється за кількістю завдань, за мірою допомоги та за часом виконання. Природним продовженням класної роботи можуть бути диференційовані домашні завдання.

Таким чином, диференціація навчання розглядається як необхідна умова гуманізації освіти. Визнання математики як обов'язкового компонента загальної середньої освіти в більшій мірі обумовлює необхідність здійснення диференційованого підходу до учнів — як до певних їх груп (сильних, середніх, слабких), так і до окремих учнів. Диференційований підхід стає необхідним не тільки для поліпшення успішності слабких учнів, але і для розвитку сильних учнів. Причому його розуміння не повинне зводитися лише до збільшення кількості тренувальних задач для слабо встигаючих, а підготовленішим — задач підвищеної трудності. Розуміння диференціації навчання припускає використовування її на різних етапах вивчення математичного матеріалу: підготовки учнів до вивчення нового, ознайомлення з новим матеріалом, застосування його до розв'язування задач, етапу контролю за засвоєнням і ін. Диференційованим може бути зміст матеріалу, що вивчається (виділення обов'язкового і додаткового); диференціювати можна методи (прийоми) навчання, варіюючи ними з метою надання різного ступеня індивідуальної або групової допомоги учням при організації самостійної роботи по вивченню нового, при розв'язуванні задач та ін.; диференціювати можна засоби і форми навчання. Диференціація може зачіпати всі елементи методичної системи навчання, і в цьому випадку вона дає найбільший ефект в умовах звичного класу.

Рівнева диференціація виявляється у тому, що навчання учнів одного і того ж класу в рамках однієї програми і підручника проходить на різних рівнях засвоєння учбового матеріалу. Визначаючим при цьому є рівень обов'язкової підготовки (базовий рівень), який задається зразками типових задач. На основі цього рівня формується вищий рівень оволодіння матеріалом — рівень можливостей.

Рівнева диференціація припускає, що кожен учень класу повинен почути програмний матеріал, що вивчається, в повному об'ємі, побачити зразки учбової математичної діяльності. При цьому одні учні сприймуть і засвоять учбовий матеріал, запропонований вчителем, у повному обсязі, а інші засвоять з нього тільки те, що передбачається обов'язковими результатами як мінімум. Кожен учень має право добровільно вибрати рівень засвоєння і звітності в результатах своєї учбової праці по кожній конкретній темі (розділу), а можливо, і курсу в цілому. Задачею вчителя є забезпечення поступального просування учнів до вищого рівня знань і умінь.

2.2.1. Навчання розв'язування задач в системі розвивального навчання

Навчання розв'язування задач в системі розвивального навчання Л. В. Занкова

Результатом навчання учнів з розв'язування задач в системі Л. В. Занкова є формування в них «істинного уміння розв'язувати задачі», яке полягає у здатності розв'язувати будь-яку задачу, що є доступною за рівнем складності для даного віку, якщо в ній відсутні незнайомі поняття і якщо для її розв'язання не вимагається виконати незнайомі операції [17].

Цікавий підхід до формування «істинного уміння розв'язувати задачі» запропоновано І. І. Аргинською (їй належить і взятий у лапки термін). Автор виходить з того, що усі чотири етапи процесу роботи над задачами є важливими, але на різних щаблях (рівнях) оволодіння умінням розв'язувати задачі основну увагу дітей необхідно концентрувати на різних етапах.

Під час *підготовки* (**1-й клас**) учні складають розповіді математичного змісту до малюнку. Впорядковують кілька даних малюнків і усвідомлюють за ними сюжет, що містить математичні відношення. Здійснюють доповнення кількох пов'язаних між собою малюнків недостатніми для завершення сюжету. Вносять зміни у дані малюнки, що запобігають спотворенню значення сюжету. Отже, в 1-му класі термін «задача» ще не вводиться і учні ще не розв'язують задачі.

На *першому рівні* (2—3-й класи) особливо важливим є перший етап — усвідомлення постановки задачі, її змісту. Тут учні навчаються відрізняти сюжетну задачу від інших видів завдань, виділяти основні частини задачі, здійснювати всебічний аналіз ситуації, що подана в задачі, виділяти математичні відношення, що до неї закладені. На цьому рівні учні досліджують тексти простих задач (в результаті їх всебічного вивчення учні обирають арифметичну дію та розв'язують задачу) і починають знайомитися зі складеними задачами [17].

Формування уміння працювати над тестом задачі здійснюється за напрямками:

— доведення, що даний текст належить до задач на основі виділення необхідних і достатніх ознак, що притаманні цьому виду завдань;

— доповнення текстів, які не містять усіх необхідних і достатніх ознак, до задачі;

— встановлення залежності між зміною одного з елементів задачі та її розв'язанням;

— складання схеми аналізу задачі при її розборі від запитання (отримання наочної моделі процесу аналізу);

— перетворення задач з ускладненою (неканонічною) структурою тексту в задачі простішої структури;

— порівняння задач, що схожі за фабулою, але різних за математичним змістом;

— перетворення складених задач в задачі, для розв'язання яких потрібна менша кількість кроків, аж до отримання простої задачі;

— скорочення розгорненого тексту задачі до її короткого запису [18].

З ускладненням задач, що пропонуються учням, і вдосконаленням їх уміння працювати з текстом задачі увага вчителя та учнів переміщується з першого етапу їх розв'язання — усвідомлення постановки задачі — на два наступних — висунення гіпотези розв'язання (складання плану розв'язування) і перевірку гіпотези, що висунуто (здійснення складеного плану). При цьому автор пояснює, що це зовсім не означає ігнорування першого етапу, його здійснення повинно бути органічною частиною роботи над задачею, та воно вже здійснюється на рівні навички. Тут учням пропонуються задачі з браком даних [17]. В цьому випадку виникає проблема перетворення вихідного тексту таким чином, щоб задача мала розв'язок. Діти можуть застосовувати два принципово різних способи таких перетворень:

— доповнення умови даними, яких бракує;

— зміну запитання так, щоб для відповіді на нього було достатньо даних вихідного тексту.

Також на цьому рівні пропонуються учням задачі з зайвими даними — щоб текст став задачею з необхідною і достатньою кількістю даних, він також потребує перетворень, що аналогічні перетворенням задач з даними, яких бракує: зміна умови так, щоб лишилися тільки потрібні для розв'язання дані; зміна запитання так, щоб усі дані стали необхідні для розв'язання задачі [18].

На третьому рівні (4-й клас) здійснюється класифікація задач за схожістю їх математичного змісту і дослідження таких шляхів перетворення тексту задач, які призводять до ускладнення або спрощення останніх; складаються і розв'язуються обернені задачі. Ще одним аспектом роботи над задачами є встановлення зв'язків між ними; встановлення схожості і відмінності в розв'язанні задач, виявлення тих моментів, від яких вони залежать, допомагає дітям у класифікації задач. Тут здійснюється ознайомлення з алгебраїчним методом розв'язування задач, в якому більш чітко виступають ознаки класифікації [19].

Безумовно, методичні підходи І. І. Аргинської до навчання молодших школярів розв'язування задач заслуговують на увагу. Але незрозуміло, коли учні вчаться виконувати пошук розв'язування складених задач аналітичним або синтетичним методом, якщо ознайомлення із складеною задачею відбувається на першому етапі, на якому декларується усвідомлення постановки задачі, її змісту? Як формуються дії, що складають уміння розв'язувати задачі? Як взагалі формується поняття про складену задачу? Незрозуміло, як здійснюється класифікація задач на третьому рівні? Як формуються уміння розв'язувати задачі певних видів?

Автор підручників математики для початкової школи за системою Л. В. Занкова І. І. Аргинська виділяє наступні етапи в роботі над кожною задачею:

1) усвідомлення постановки задачі, її змісту;

2) висунення гіпотези розв'язання (складання плану розв'язування);

3) перевірку гіпотези, що висунуто (здійснення складеного плану);

4) перевірка і дослідження задачі.

Основними відмітними характеристиками роботи над задачами є:

— різні форми короткого запису;

— пошук розв'язування здійснюється аналітично;

— різні форми запису розв'язання;

— дослідницька робота над задачею після її розв'язання, яка полягає у:

а) складанні і розв'язуванні обернених задач;

б) зміні запитання або умови так, щоб розв'язання містило більше чи менше арифметичних дій;

в) зміна умови або запитання так, щоб задачу не можна було розв'язати;

г) внесення у задачу таких змін, щоб вона містила зайві числові дані або щоб в ній було недостатньо числових даних для відповіді на її запитання;

д) внесення у задачу таких змін, щоб в ній зникли зайві числові дані або щоб числових даних було достатньо для відповіді на запитання задачі;

е) зміна тексту задачі так, щоб у її розв'язанні з'явилася обернена дія.

Велику увагу приділено порівнянню задач з однаковою фабулою, але з різним математичним змістом; порівнянню задач з різною фабулою та однаковим математичним змістом [16–27].

На наш погляд, дуже корисною для формування загального уміння розв'язувати задачі є дослідницька робота над задачею. Ці методичні прийоми ми будемо враховувати при розробці власної методичної системи навчання молодших школярів розв'язування задач.

Навчання розв'язування задач в системі розвивального навчання Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова

Одним із завдань курсу математики є оволодіння дітьми дією моделювання. Навчальний предмет, який розкривається як система понять, вимагає логіки руху в його пізнанні від загальних властивостей до конкретних, виділення і дослідження підстав, які визначають дану систему, що неможливо без моделювання. Моделювання у навчанні повинно бути засвоєно учнями і як спосіб пізнання, яким вони повинні оволодіти, і як найважливіша навчальна дія, яка є основним елементом навчальної діяльності.

Розробники цієї системи виходять з того, що формування вміння моделювання, загальних методів розв'язування задач, здібностей до розв'язування будь-яких задач передбачає якісно інший підхід до формування вміння розв'язувати задачі. Якщо моделювання — це метод і засіб пізнання, тоді набір сюжетних задач — це один з полігонів, де опрацьовується дія моделювання; вміння розв'язувати задачі виступає як один з критеріїв сформованості дії моделювання.

Сюжетна задача являє собою словесний опис якоїсь події, явища, дії, процесу. Сама сюжетна задача — це модель, де головним чином описаний кількісний бік цих явищ або дій, або процесу. Текст будь-якої сюжетної задачі можна відновити по-іншому: предметно, графічно, за допомогою таблиць, формул й тощо. Це й є перехід від словесного моделювання до інших форм моделювання.

Здатність дитини виконати кілька моделей до однієї й тієї самої задачі свідчить про ступінь оволодіння дією моделювання. Існує і обернений зв'язок: чим краще дитина оволодіває дією моделювання, тим легше їй розв'язувати задачі.

В системі розвивального навчання Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова навчання розв'язування задач не будується за типами задач, хоча типологія задач розглядається, але на відміну від традиційної методики у навчанні типи задач не «нарощуються». Таким чином, прості і складені задачі вводяться одночасно. В 1—4-му класах діти не розв'язують задачі по діях. Розв'язання записується або виразом, або рівнянням, але те та інше складається з опорою на схему [9].

Розв'язання задачі складається з наступних етапів:

I етап — це *переклад* умови задачі у *графічну модель*, тобто *схему*. Схема, на відміну від креслення, не вимагає спеціальних креслярських приладів і точного дотримання заданих відношень. Схема може виконуватися від руки, вказувати і відображувати задані відношення.

II етап — це *перетворення* однієї графічної *моделі* в другу. Цей етап може бути перепущеним, якщо необхідності у перетворенні немає або вона відпала у зв'язку із згорнутістю дії.

III етап — складання буквено-знакової моделі (формули), тобто *складання рівняння*.

IV етап — розв'язання складеного рівняння. Цей етап може співпадати із попереднім, якщо дитина записує рівняння відразу у формі розв'язання: $x =$ вираз

V етап — це підбір замість літер відповідних чисел. Числа повинні підходити з трьох точок зору: сюжету задачі; здійснимості арифметичної дії; уміння успішно оперувати з підібраними числами.

Іншими словами, зазначає Е. І. Александрова, мова йде про область припустимих значень по відношенню до сюжету, до здійснимості арифметичної дії на множині чисел, яка розглядається (в залежності від сюжету), по відношенню до власного досвіду дитини в оперуванні числами, що надає можливість діагностувати область успішності дитини.

VI етап — виконання необхідних обчислень, які вимагають послідовного виконання арифметичних дій з числами.

VII етап — повернення до умови задачі для отримання відповіді на її запитання, тому що не завжди величина, яку позначали літерою x і відносно якої складається і розв'язується рівняння, може співпадати з величиною, яку потрібно знайти для відповіді на запитання задачі. Розв'язавши рівняння, необхідно перевірити, чи отримана відповідь на запитання задачі.

Автор зазначає, що основними етапами є чотири: побудова схеми, складання і розв'язання рівняння з літерними даними і обчислення числового значення шуканої величини.

Саме цим основним етапам — моделюванню в графічній, буквено-знаковій і числовій формі — відводиться значне місце у навчанні. Таким чином, однією з функцій розв'язування задач в системі Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова є формування у дітей здатності до математичного моделювання і переходу від однієї моделі до другої, і навпаки. Отже, процес розв'язування сюжетної задачі Е. І. Александрова подає у вигляді схеми (рис. 2.2).

Пунктиром показані ще два етапи, пов'язані із моделюванням задачі за допомогою короткого запису, який по своєї суті несе в собі елемент як графічної моделі (наступність повідомлень), так і буквено-знакової моделі. Таким чином, в цій системі короткий запис розглядається як додатковий засіб моделювання, і з'являється в 4-му класі, коли дитина достатньо вільно розв'язує задачі за допомогою складання схеми і рівняння [9].

Таким чином, в системі Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова вміння розв'язувати задачі розглядається як похідне від вміння моделювання. Робота по формуванню дії моделювання, а попутно і по формуванню вміння розв'язувати задачі, цілеспрямовано ведеться на протязі всього курсу.

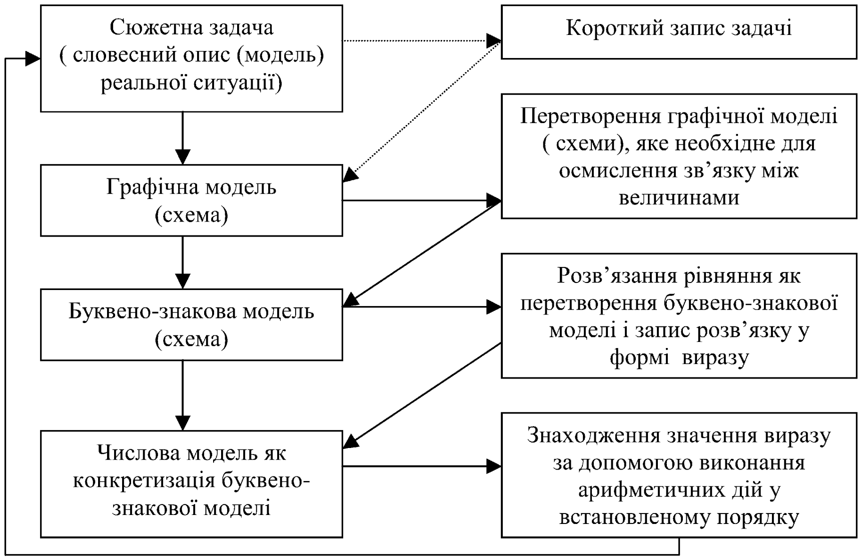


Рис. 2.2. Схема процесу розв'язування сюжетної задачі за Е. І. Александровою

Отже, за системою Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова, задачі розглядаються як засіб формування у молодших школярів уміння моделювати, прості та складені задачі вводяться одночасно. Е. І. Александрова виділяє вміння, які повинні дати можливість дитині розв'язувати будь-які задачі в межах відомих їй операцій (дій) з числами: по ходу читання тексту задачі зображати на схемі величини; за схемою складати математичний вираз або рівняння; усно в словесній формі давати відповідь на запитання, записуючи вираз або його числове значення [13].

Таким чином, ми розглянули особливості навчання розв'язування задач в системі розвивального навчання Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова. Треба зазначити, що сюжетні задачі не диференціюються на прості та складені, ці види задач вводяться одночасно; методика роботи на задачею полягає по-перше у складанні схеми за текстом задачі, а від неї до складання рівняння і його розв'язання, а потім обчислення і формулювання відповіді на запитання задачі. Основною відмінністю від традиційного навчання є алгебраїчний спосіб розв'язування задач: діти розв'язують задачу способом складання рівняння або виразу.

Відмітною особливістю методики навчання молодших школярів розв'язування задач в цій системі є те, що до 4-го класу не розглядається зміст поняття «задача», його складові. В 4-му класі діти знайомляться з поняттям «сюжетна задача» та її складовими, вчаться записувати задачу коротко і перетворювати короткий запис задачі з метою складання схематичного малюнку. Отже, елементами новизни при роботі над задачею стає:

1) осмислення того, що таке сюжетна задача;
2) введення нової формули моделювання — короткого запису;
3) встановлення зв'язку між задачами «на процеси» з відомими схемами до арифметичних дій.

Е. І. Александрова зауважує, що особливістю при складанні короткого запису задачі є те, що діти відразу вказують дію, яка відповідає відношенням між величинами, які виділені з тексту. Крім уміння складати короткий запис задачі, дітям потрібне й вміння його перетворювати. Причиною, за якою потрібно перетворювати короткий запис, є побудова схеми. Загальна схема роботи над сюжетною задачею має наступний вигляд (рис. 2.3).

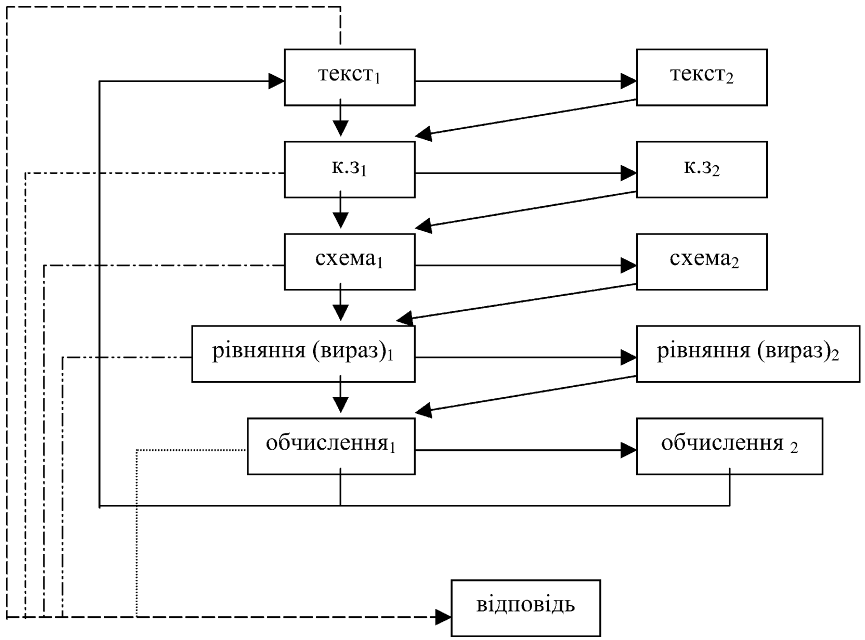


Рис. 2.3. Загальна схема роботи над сюжетною задачею за Е. І. Александровою

З моделі способу роботи над задачею видно, що перетворенню підлягає не лише короткий запис, схема та рівняння теж можуть при необхідності перетворюватися; такому перетворенню підлягають також текст задачі і обчислення [12].

Безумовно, складання різноманітних моделей є дуже корисним для розв'язання задачі. Але, на відміну від розглянутої методики навчання розв'язування задач Е. І. Александрової, ми в нашому дослідженні вважаємо моделювання **засобом** розв'язування задачі і будемо його використовувати на усіх етапах формування уміння розв'язувати задачі.

Навчання розв'язування задач в освітній системі «Школа 2100»

Поняття «задача» вводиться, як і традиційно, на задачах на знаходження суми і остачі. Але, на відміну від традиційної методики, у підручнику Л. Г. Петерсон, далі розглядаються задачі на дві дії, і лише потім вводяться спочатку задачі на різницеве порівняння, а потім — на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць.

Відмінним від традиційної методики є те, що в якості обґрунтування вибору арифметичної дії при розв'язуванні простих задач застосовуються поняття «частина» і «ціле»; основою пошуку розв'язування — вибору арифметичної дії, за допомогою якої розв'язується проста задача, є схематичний малюнок, який, до речі, виконує роль і короткого запису задачі. Задача подається у текстовому вигляді з малюнками, замість числових даних. На даному етапі проводиться певна робота з навчання учнів виконанню схематичного рисунка. На відміну від традиційної методики відразу вводиться поняття про обернену задачу (традиційно це робиться у 2—3-му класі).

Введення складених задач не готується спеціальним чином, як це робиться у традиційній методиці. Складені задачі пропонуються в 1-му класі відразу після кількох уроків розв'язування простих задач на знаходження суми і остачі. Причому, спочатку пропонуються складені задачі на знаходження третього числа; і пізніше, після навчання розв'язування простих задач, що містять відношення різницевого порівняння, вводяться складені задачі на знаходження суми, що містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. А далі — складені задачі на знаходження остачі, що містять просту задачу на знаходження суми, на яких традиційно здійснюється ознайомлення молодших школярів із задачами на дві дії.

Основним методом пошуку способу розв'язування задач виступає схематичний рисунок, який подано у готовому вигляді для більшості задач, а для решти дано схематичний рисунок, в якому відсутні числові дані, і лише незначна частина задач пропонується без нього.

При формуванні умінь розв'язувати задачі учні озброюються алгоритмом для самостійної роботи над задачами, і переважна більшість задач пропонується для самостійного розв'язання. На цьому етапі розв'язуються задачі у 3—4 дії, які містять усі чотири арифметичні дії; вводяться задачі на знаходження четвертого пропорційного і задачі на знаходження двох чисел за їх сумою або різницею.

За такого подання завдань на розв'язування задач у підручника Л. Г. Петерсон не можна говорити про спеціальне формування дії моделювання при розв'язуванні задач, хоча основним способом пошуку розв'язування задачі є пошук розв'язування за схематичним рисунком. Це не єдина відмінність від методики навчання розв'язування задач в системі Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова — так учні майже не виконують короткі записи задач, не ведеться робота з перетворення моделей. На відміну від методики навчання розв'язування задач в системі Л. В. Занкова, в цій системі учні не озброюються загальним методом розв'язування задач — аналізом.

Враховуючи вищесказане, для особистісно орієнтованого навчання молодших школярів розв'язування задач слід передбачити навчання учнів моделюванню задачного формулювання, перетворенню моделей, а також впроваджувати прийоми дослідницької роботи над задачею.

2.2.2. Відмінності у розумовій діяльності молодших школярів при розв'язуванні задач

Багаточисельні психологічні дослідження доводять, що відмінності у психологічному розвитку дітей одного й того самого віку досить великі. Школярі, що знаходяться в однакових умовах навчання, показують різний рівень засвоєння навчального матеріалу. У ступені засвоєння виявляються типові для учнів, стійкі особливості їх психіки. Від цих особливостей залежить успішність навчальної діяльності, можливість розв'язувати проблемні ситуації, оперувати отриманими знаннями в нових умовах. Тому для забезпечення успішності навчання усіх учнів необхідно враховувати індивідуальні варіанти розвитку. При цьому важливо пам'ятати, що відмінності дітей виявляються не лише у рівні їх розвитку, але й у продуктивності навчальної праці.

Як було показано в 1.3.3, психологічну структуру процесу розв'язування задач складають загальні розумові дії аналізу, синтезу, порівняння, абстракції і узагальнення. Тому на процес розв'язування задач значно впливає рівень аналітико-синтетичної діяльності молодших школярів, який безпосередньо пов'язаний, за думкою М. О. Менчинської, із швидкістю засвоєння [342].

Також успіх в процесі навчання визначається ще одною важною особливістю — гнучкістю розумових процесів і її протилежністю — інертністю розумових процесів. Для другокласників, згідно дослідженням З. І. Калмикової, у розв'язанні предметних задач характерним є перевага інертності мислення. Це виявляється у низькій здатності до відкривання нових знань, у зв'язаності з конкретною ситуацією, яку не завжди можна подолати навіть при допомозі вчителя, розумова активність виявляється у розв'язуванні задач за методом «сліпих проб» [230]. Для учнів третього та четвертого років навчання, за даними Н. О. Менчинської, характерно зростання можливостей до варіювання способів дій, до вибору найбільш раціонального шляху розв'язання задачі. Але, поряд із цим, автор вказує, що наявність вікових відмінностей у зміні властивостей розумової діяльності не знімає питання про індивідуальні відмінності, оскільки в межах одного й того самого віку і на протязі усіх років навчання зустрічаються учні, які мають різну гнучкість мислення, що безпосередньо впливає на засвоєння знань.

Схильність до варіювання дій або, навпаки, тенденція до їх стереотипного повторення визначає підхід до розв'язування задач. В роботі Н. О. Менчинської [342] продуктивний підхід характеризується всебічним аналізом задачі, активними пошуками способів її розв'язування, а при репродуктивному підході, як правило, відсутнє усвідомлення задачі як проблеми, і усе її розв'язування призводиться до відновлення звичних способів дій, які відносяться до знайомих окремих задач, причому вони не співвідносяться з умовою в цілому.

А. З. Зак говорить про теоретичний і емпіричний спосіб розв'язування задач [187]. Теоретичний спосіб характеризується виконанням таких розумових дій, як:

1) аналіз змісту задачі (виділення істотних відношень);
2) моделювання (організація зовнішніх опор певного виду, графічне зображення ходу міркування);
3) рефлексія (осмислення власних дій, розуміння їх невипадковості і правомірності);

4) планування, як здатність діяти в розумі.

При емпіричному способі сприймання задачі обмежується зовнішніми ознаками, розв'язування здійснюється методом «спроб і помилок»; аналогічна задача розв'язується як зовсім нова; при обґрунтуванні розв'язання (за вимогою експериментатора) йде опора на випадкову ознаку.

Певний рівень аналізу і синтезу, узагальнення і абстрагування при засвоєнні і застосуванні знань, а також пов'язаний із ним рівень співвідношення чуттєвих і абстрактних компонентів розумової діяльності сполучаються з певним ступенем гнучкості розумових процесів. І усі вони безперервно пов'язані з темпом засвоєння, з швидкістю просування учнів у навчанні [342].

В результаті досліджень І. В. Дубровіної було встановлено, що у здатних до математики молодших школярів ярко виявляються здібності до аналітико-синтетичного сприймання умови задачі, узагальнення математичного матеріалу, гнучкість розумових процесів. Менш ясно виражені: здібність до згорнення міркувань і системи відповідних дій, прагнення до пошуку більш раціонального способу розв'язування задач. Але останні компоненти виразно представлені у «дуже здатних» учнів. У «мало здатних» ці компоненти виявляються на порівняно низькому рівні або не виявляються зовсім [173].

Таким чином, при розв'язуванні задач учні відрізняються один від одного рівнем аналітико-синтетичної діяльності, який безпосередньо пов'язаний із швидкістю засвоєння. Також успіх в процесі навчання визначається ще одною важною особливістю — гнучкістю розумових процесів. З цією якістю мислення пов'язана схильність до варіювання дій або, навпаки, тенденція до їх стереотипного повторення, яка визначає підхід до розв'язування задач. Означені особливості визначають підхід до задачі. Продуктивний (теоретичний) підхід характеризується всебічним аналізом задачі, активними пошуками способів її розв'язування, а при репродуктивному (емпіричному) підході, як правило, відсутнє усвідомлення задачі як проблеми, і усе її розв'язування призводиться до відновлення звичних способів дій, які відносяться до знайомих окремих задач, причому вони не співвідносяться з умовою в цілому.

2.2.3. Диференціація у навчанні молодших школярів розв'язування задач

Процес розв'язування задачі обумовлений можливостями учня, який розв'язує її (Ю. М. Колягін, В. І. Крупич, В. О. Крутецький та інші). Так, за даними В. О. Крутецького, для формування узагальненого способу розв'язування учням потрібно від 1 до 27 задач [264]. Близькі до цих експериментальні дані одержано Н. О. Менчинською — нею констатований розбіг від 2 до 20 розв'язаних задач [342]. Тому навчання, яке зорієнтовано на «середнього» учня, недостатньо ефективно.

Дитина не здійснює активну навчальну діяльність, якщо навчальне завдання не відповідає її можливостям. Щоб запобігти цьому, методисти пропонують здійснювати диференціацію навчання розв'язування задач за рахунок варіювання їх за ступенем складності (С. О. Алексєєв, В. О. Гусев, Г. В. Дорофеєв, О. Н. Капиносов, В. Н. Рудницька, І. М. Смирнова, О. О. Столяр та інші). Ця група авторів розглядає диференціацію змісту навчання розв'язування задач.

Але існує й інший напрямок — диференціація процесу розв'язування задачі. Так, М. Є. Тимощук пропонує диференціювати допомогу учням згідно етапам роботи над задачею. В методичних рекомендаціях Л. Г. Латохіної для диференціації навчання розв'язування задач пропонуються спеціальні завдання, які пов'язані з аналізом тексту задачі, пошуком способу її розв'язування, а також спрямовуючі на складання оберненої задачі, виразів і рівнянь до задачі.

В руслі першого напрямку виконана дисертаційна робота В. А. Мізюк, в якій розроблена система завдань, диференційованих за складністю; визначено психолого-методичні засади диференційованого формування вмінь розв'язувати задачі в початковій школі. Авторка дійшла висновку, що методика диференційованого вироблення вмінь розв'язувати задачі має враховувати рівні навчальної діяльності учнів початкової школи (мінімально-базовий, базовий і підвищений), операційний склад умінь і психолого-методичні засади їх формування [357].

На *мінімально-базовому* рівні учні мають розв'язувати задачі обов'язкового мінімуму, визначеного програмою з математики. На цьому рівні доцільно використовувати пояснювально-ілюстративні методи, прийоми емоційного стимулювання; більшої ваги набуває наочність. Учням пропонуються задачі репродуктивного характеру, нескладні творчі завдання; обсяг їх самостійності незначний: переважає розв'язування задач за зразком, реконструктивна робота. На цьому рівні учні повинні знати структуру задачі, вміти виділяти умову, вимогу, відомі й шукані величини, встановлювати залежності між ними.

На *базовому* рівні учні повинні розв'язувати задачі середньої складності. Це задачі з більш складними обчисленнями і логічними перетвореннями, задачі, що утворені шляхом комбінації задач обов'язкового мінімуму і містять одну чи дві новозасвоєні дії. Розв'язування цих задач потребує від школярів продуктивної розумової діяльності. На цьому рівні навчання переважають конструктивні і варіативні самостійні роботи, збільшення кількості задач, які потребують від учнів ретельного аналізу задачної ситуації. Учні, які досягли цього рівня, повинні володіти загальними знаннями про задачу і вміти пояснювати причини неповноти або неправильності її побудови, самостійно складати нескладні задачі.

Підвищений рівень математичної підготовки характеризується вміннями розв'язувати задачі підвищеної складності, із логічним навантаженням, з елементами випереджувального навчання. Ці задачі характеризуються збільшенням кількості логічних операцій, нестандартною фабулою і способом розв'язування. Вироблення вмінь спрямоване на інтенсивну самостійну діяльність — самостійні пошуки нової інформації, дослідження цікавих і оригінальних способів розв'язування й тощо. Окрім загальних знань про задачу, учні мають знати додаткові характеристики її складових. На основі цього вони самі мають складати задачі та завдання творчого характеру.

Важливим засобом вироблення вмінь розв'язувати задачі у дослідженні В. А. Мізюк виявилася система диференційованих завдань, яка включає такі їх види: підготовчі, пробні, тренувальні, творчі, перевірочні.

Підготовчі завдання спрямовані на активізацію опорних знань і вмінь, необхідних для розв'язування задачі. До них віднесено завдання-питання і нескладні задачі. Для підготовки таких завдань аналізується задачний матеріал уроку чи теми, визначаються основні поняття теоретичного курсу математики та ускладнення, які можуть виникнути в учнів певної групи. Автор зазначає, що для учнів з низькими навчальними можливостями (III група) доцільно систематично пропонувати підготовчі завдання, для учнів із середніми і високими (II та I групи) — залежно від складності задачного матеріалу.

Пробні завдання рекомендується використовувати на етапі ознайомлення із розв'язуванням задач нового виду. Вони спрямовані на первинне закріплення набутих знань та вироблення вмінь розв'язувати аналогічні задачі. Використання пробних завдань залежить від числових даних і сюжету задачі. Для учнів третьої групи краще пропонувати невеликі числові дані, щоб спрямовувати їх увагу саме на засвоєння способу розв'язування. Учням

ІІ групи слід надавати інструктивні вказівки до розв'язання, ІІІ групи — розв'язувати пробні задачі під керівництвом учителя.

Тренувальні завдання спрямовували діяльність учнів на закріплення вивчених способів розв'язування, опрацювання окремих дій та застосування набутих знань і вмінь у стандартних ситуаціях. Диференціація завдань відбувалася шляхом підвищення їх складності і збільшенням міри самостійності.

Творчі завдання спрямовані на розширення, поглиблення і вдосконалення набутих знань і вмінь розв'язувати задачі. Їх розв'язування вимагають оригінальності мислення, кмітливості, цілеспрямованого пошуку плану, складних міркувань, які потребують напруження розумової діяльності, творчого підходу до розв'язання. До творчих віднесено задачі з нестандартними ситуаціями: зайвими, недостатніми даними, з незвичайно сформульованим текстом, завдання на переформулювання і складання задач [357].

Аналогічної позиції — диференціації змісту навчання учнів розв'язування задач дотримується С. М. Лук'янова. Авторка визначила вимоги, яким повинна задовольняти направленість на диференціацію і індивідуалізацію під час розв'язування задач:

1. Для забезпечення різних темпів руху під час вивчення типових задач та способів їх розв'язування слід виділити базову і варіативну частину. До базових відносяться задачі, які дають можливість скласти уявлення про даний тип задач і основні способи його розв'язування. Базова частина є основою для варіативної, що складається із завдань підвищеної складності. Також до варіативної частини можна включати окремі ускладнені за структурою типи задач (наприклад, поділ обернено пропорційно ряду чисел) чи окремі способи або прийоми роботи із задачами (наприклад, прийом метатезису).

2. Для того, щоб уникнути дискомфорту в процесі поділу учнів на тих, хто працює тільки на базовому рівні, і тих, хто розв'язує складніші задачі з варіативної частини, треба використати принцип мінімаксу (ножиць): пропонувати всім учням зміст максимального рівня, забезпечувати засвоєння базового, а контролювати той рівень, який обирає учень.

3. Побудова і базового, і варіативного рівнів відбувається за принципом поступового наростання складності і трудності задачного матеріалу, а процес їх вивчення — за принципом активної діяльності. Діяльність учня, в свою чергу, орієнтована на отримання ним власного досвіду творчої діяльності [303].

Треба зазначити, що в початковій школі індивідуальні особливості школярів ще незначно пов'язані із системою знань, і це

суттєво обмежує можливості диференціації навчання розв'язування задач за змістом. Тому, на відміну від В. А. Мізюк, яка розглядала принципи відбору задач, диференційованих за складністю, та С. М. Лук'янової, яка визначала базовий і варіативний компонент, О. В. Баринова вивчала можливості диференціації діяльності учнів в процесі розв'язування однієї і тієї самої задачі. Рівнева диференціація процесу розв'язування сюжетних задач за ступенем повноти подання орієнтувальної основи діяльності дозволяє забезпечити оптимальну діяльність усіх учнів у залежності від рівня індивідуальних можливостей, що сприяє вдосконаленню їх уміння розв'язувати задачі.

В роботах методистів, що дотримуються диференціації процесу розв'язування, варіативність діяльності учнів під час розв'язування задач досягається за рахунок варіювання міри допомоги через застосування допоміжних засобів (Н. Ф. Вапняр, Л. Г. Латохіна, Н. Ф. Роганова, С. Б. Суворова та інші) або безпосереднього керівництва з боку вчителя (І. К. Глушков, М. Є. Тимощук та інші). О. В. Баринова дійшла висновку, що навчання розв'язування задач доцільно будувати на рівневій основі, з врахуванням домінуючих особливостей розумової діяльності молодших школярів. Рівнева диференціація процесу розв'язування задач за ступенем повноти подання орієнтувальної основи діяльності (ООД) дозволяє забезпечити оптимальну діяльність усіх учнів у залежності від рівня індивідуальних можливостей, що сприяє вдосконаленню їх уміння розв'язувати задачі.

Процес навчання при рівневій диференціації має особливості. Діяльність по керуванню таким навчанням авторка подає трьома блоками: І. Діагностико-орієнтувальним, ІІ. Виконавчим, ІІІ. Контрольно-корекційним. В першому блоці необхідну інформацію про рівень уміння розв'язувати задачі учня дає застосування критеріальних задач. Зазначимо, що критеріальні задачі — це задачі з несформульованим запитанням; даними, яких бракує; із зайвими даними; завдання, що не вимагають розв'язання (псевдозадачі); задачі, що містять відношення, яке виражено у непрямій формі; задачі, що мають кілька способів розв'язування. На цій підставі визначається рівень навчання — опорний, підвищений або перехідний між ними.

На опорному рівні ООД задається навчаємому у готовому вигляді. Тут поряд з текстом задачі пропонується готова модель даної задачної ситуації та (або) процесу її розв'язування. Спеціальні завдання націлюють на аналіз моделі у співставленні із текстом задачі і її діяльнісне усвідомлення. При цьому учні виконують дію декодування. Завдання учням можуть бути дані у вигляді алгоритму дій, що націлюють на добудування незавершеної моделі і, одночасно, таких, що ведуть учня до досягнення результату розв'язання задачі. Таким чином, учень отримує орієнтувальну основу діяльності, що спрямована на розв'язання задачі, у готовому вигляді.

Підвищений рівень характеризується самостійним складанням ООД на підставі аналізу тієї самої задачної ситуації, при цьому здійснюється пошукова діяльність. Тут моделі є внутрішнім засобом розв'язування задачі, який дозволяє впорядкувати самостійний пошук орієнтувальної основи. При цьому учням пропонується виконати доцільну модель до задачі самостійно. Учень, який засвоїв різні види моделей, повинен обрати той вид, який відповідає запропонованій задачі і є найбільш зручним у даному випадку. Складена модель задачної ситуації та (або) процесу розв'язування задачі використовується для її розв'язання. Тут учня слід націлювати на пошук альтернативних способів розв'язування задачі і, у випадку неможливості, пропонувати змінити задачу (і відповідно, перетворити модель) так, щоб стали можливі різні способи її розв'язування.

Перехідний між ними рівень передбачає діяльність за частково заданою системою орієнтирів; при цьому учень, самостійно доповнивши її, отримує ООД, що необхідна для розв'язування задачі. Тут пропонується учню складена частково модель, при цьому вона може бути незавершеною у більшому чи меншому ступіні. Пропонується завдання: визначити недостатні елементи і завершити побудову моделі самостійно. Далі модель застосовується при розв'язуванні задачі. Таким чином, діяльність перехідного рівня повинна бути частково пошуковою.

Для того, щоб організувати різнорівневу роботу над задачею в один і той самий час, який відведено для цього на уроці, О. В. Баринова пропонує застосовувати картки-завдання з друкованою основою, які заздалегідь готуються у трьох варіантах (для трьох рівнів). Картки містять системи завдань, які пов'язані з аналізом і розв'язанням однієї й тієї самої задачі, але на різних рівнях. Пропонуючи учню варіант оптимального для нього рівня складності, автор здійснює диференціацію пошукової діяльності при розв'язуванні задач.

Авторка зазначає, що робота на уроці над задачею із застосуванням карток відбувається як самостійна. Вчитель під час цієї роботи надає допомогу окремим учням. Але можливий варіант, коли вчитель керує роботою учнів одного з рівнів, в той час, як інші працюють самостійно.

Не виключено й можливості групової роботи на уроці. При цьому діти кожної групи обговорюють і виконують завдання спільно. Склад таких груп може бути як однорівневим, так і різнорівневим, в залежності від цілей, які ставить вчитель в цій роботі. Наприкінці уроку учні збираються вчителем для перевірки.

Той факт, що всі учні розв'язують одну й ту саму задачу, надає можливості обговорити задачу відразу після її розв'язання. Це, з одного боку, служить оберненим зв'язком для вчителя, який отримує уявлення про виконання завдання вже на уроці. А з іншого, обернений зв'язок здійснюється для учня: він ще пам'ятає, які мав труднощі і сумніви, і отримує або підтвердження, або спростування власної діяльності і результатів. Крім того, під час обговорення результатів роботи учень може побачити діяльність більш високого рівня, ніж той, на якому він працював. Таким, чином, зазначає О. В. Баринова, учень не обмежується рамками рівня, що йому пропонується [54].

Проаналізувавши підходи до диференційованого навчання В. А. Мізюк та О. В. Баринової, ми вважаємо доцільною організацію диференційованої роботи над однією й тією самою задачею за рівнями навчальних можливостей учнів (О. В. Баринова), але цей підхід не виключає подальшої диференціації роботи над задачами за рівнем складності пропонуємих завдань (В. А. Мізюк). Хоча О. В. Баринова та В. А. Мізюк підходять до диференціації навчання молодших школярів розв'язування задач з різних боків, але спільною в них є кінцева мета — формування загального вміння розв'язувати задачі.

В методичній науці розроблена методика диференційованого навчання Т. Гори та С. Логачевської. На відміну від О. В. Баринової та В. А. Мізюк, які, згідно останніх пропозицій вчених, орієнтуються на формування загального уміння розв'язувати задачі, Т. Гора та С. Логачевська виходять з того положення, що формування навичок розв'язування простих задач і розвиток умінь розв'язувати складені задачі на початковому етапі відбувається завдяки наслідуванню зразків і постійній практиці.

Т. Гора та С. Логачевська [131] розглядають методику роботи над задачами на етапі закріплення вміння розв'язувати задачі певного виду. Підхід Т. Гори та С. Логачевської містить риси і підходу В. А. Мізюк (учням різних груп пропонуються завдання, відмінні за рівнем складності), й підходу О. В. Баринової (слабим учням надається певна доза допомоги). Але методика цих авторів має ряд відмінних рис. По-перше, в ній враховані не три групи учнів, як у В. А. Мізюк та О. В. Баринової, а лише дві —

дуже груба диференціація. Учні розбиваються на ці групи не за рівнями навчальної діяльності (підвищений, базовий, мінімально-базовий), як у В. А. Мізюк, та не за рівнем навчання (опорним, підвищеним та перехідним між ними), як у О. В. Баринової, а за можливістю самостійного запису розв'язання задачі з підручника, що була піддана колективному аналізу. Крім того, Т. Гора та С. Логачевська першому варіанту пропонують самостійну роботу вже на другому етапі, а другому варіанту лише на останньому етапі, в той час як О. В. Баринова пропонує усім учням самостійну роботу, але з диференціацією дози допомоги. Тобто О. В. Бариновою здійснюється диференціація самостійної роботи учнів над задачею, а Т. Гора та С. Логачевска — працюють фронтально із слабкою групою, у той час як сильні учні самостійно розв'язують задачі.

Виходячи з того, що усі школярі навчаються за єдиним підручником, вважаємо доцільним йти за другим напрямком диференціації — диференціювати дозу допомоги учням при розв'язанні однієї й тієї самої задачі. Але крім цього, в системі навчання молодших школярів розв'язування задач, що розробляється, ми будемо здійснювати диференціацію й за мірою складності задач, визначаючи типи і види задач, які пропонуються дітям додатково, для поглибленого вивчення.

Таким чином, ми розглянули методики навчання розв'язування сюжетних задач у різних системах розвивального навчання, визначили можливості застосування диференційованого підходу під час навчання молодших школярів розв'язування задач. Ми впевнилися, що в розвивальне навчання та рівнева диференціація (за О. В. Баріновою) реалізують ідеї діяльнісного підходу. Тому у наступному параграфі розглянемо більш докладно процес формування умінь з точки зору діяльнісного підходу.

2.3. ПРОЦЕС ФОРМУВАННЯ УМІНЬ З ТОЧКИ ЗОРУ ДІЯЛЬНІСНОГО ПІДХОДУ

2.3.1. Вимоги до процесу формування розумових дій, які забезпечують високу ефективність навчання навичкам та вмінням

У параграфі 2.1 нами було розглянуто проблему формування умінь розв'язувати задачі у дидактиці математики. Між тим, формування в учнів умінь розв'язувати задачі — це формування в них діяльності з розв'язування задач. Тому процес формування

умінь розв'язувати задачі слід розглядати з точки зору діяльнісного підходу.

У психології детально розроблені дві діяльнісні теорії навчання: теорія поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна та Н. Ф. Тализіної та теорія навчальної діяльності Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова, складовою частиною якої є теорія змістовних узагальнень В. В. Давидова.

Будь-яка діяльність складається з окремих дій. Тому однією зі складових діяльнісного підходу є формування дій, які складають ту чи іншу діяльність. Так, уміння розв'язувати сюжетні задачі складають дії, які адекватні різним способам і методам розв'язування, а також деякі загальні для всіх способів і методів дії.

Формування навичок і умінь є складним і тривалим процесом. Психологами (передусім П. Я. Гальперіним та його науковою школою) доведено, що від того, як організований процес формування розумових дій, залежать і тривалість формування навичок і умінь, і результати цього формування: міцність, гнучкість, узагальненість, усвідомленість навичок і умінь.

Л. М. Фрідманом виділено основні вимоги до процесу формування розумових дій, виконання яких забезпечує високу ефективність формування навичок та умінь [560]. Розглянемо їх докладно.

I. *Повнота орієнтувальної основи розумових дій.* Формування будь-якої навички або уміння починається з подання учням такої системи вказівок та орієнтирів, користуючись якою, учень в змозі самостійно виконати дану дію. Ця система орієнтирів і вказівок називається орієнтувальною основою дії (ООД) [528].

Н. Ф. Тализіна вважає, що ООД може бути подана учням в різній формі: у формі зразка дії (вчитель показує, як слід виконувати цю дію), у вигляді словесного пояснення з одночасним показом процесу виконання дії, у вигляді покрокового алгоритму тощо. Однак, в будь-якому випадку важливо, щоб ця ООД була повною, тобто містила всі необхідні вказівки та орієнтири.

II. *Розгорненість дії при її першому показі.* Коли розумова дія учнями вже засвоєна і вони оволоділи навичкою або умінням у її виконанні, тоді вона згортається, окремі операції, що її складають, виконуються мислено і не фіксуються. Однак при першому ознайомленні необхідна повна розгорненість дії з фіксацією усіх її складових.

III. *Поелементне засвоєння складної дії.* Багато математичних дій, які мають бути засвоєні учнями, є складними за своєю структурою і складаються з ряду елементарних дій. Коли учень оволодів навичкою (умінням) в такій дії, тоді він виконує всі елементарні дії цілісно, одну за одною. Однак, при засвоєнні такої складної дії, при формуванні навички або вміння в цій дії, кожну із складових її елементарних дій треба засвоїти окремо, як самостійну дію.

Слід відмітити, що при навчанні учні не можуть (і не повинні) робити одночасно декілька нових дій. Тільки отримавши міцну навичку або уміння в кожній з них, вони в змозі набути уміння одночасного виконання всіх цих дій у складі складної дії.

IV. *Усвідомленість і повноцінність навиків та вмінь.* Учні повинні мати знання, на основі яких виконується дана дія, вони повинні знати, чому саме вона виконується так та чи можна її виконати інакше. До складу уміння мають входити навички з планування дії, прогнозування її результату, навички з контролю за перебігом виконання цієї дії. Важливо, щоб учень міг завжди пояснити, чому і як він виконує дану дію і в яких випадках її можна застосувати.

V. *Розтягненість процесу формування навичок і вмінь.* Формування уміння являє собою тривалий процес, при цьому його не можна проводити ущільнено, протягом короткого часу шляхом багаторазових і частих вправ. Більш ефективним є розтягнення процесу формування навички чи вміння за часом.

VI. *Поетапне опрацювання кожної навички або вміння.* Як встановлено дослідженнями П. Я. Гальперіна і його співробітників, для того, щоб сформувати повноцінну розумову дію, щоб учень набув міцної навички або гарне уміння в цій дії, необхідно, щоб процес її формування містив ряд обов'язкових етапів. Дія, перед тим, як стати розумовою, узагальненою, скороченою і засвоєною, проходить через перехідні стани. Основні з них і складають етапи засвоєння дії, кожний із котрих характеризується сукупністю змін основних властивостей дії.

У 2002 році до 100-річчя П. Я. Гальперіна у російському журналі «Вопросы психологии» було опубліковано ряд статей про його внесок у психологію, визначалося місце теорії П. Я. Гальперіна у психологічній концепції діяльності (Подольський А. І., Степанова М. О., Тализіна Н. Ф., Арієвич І. М., Хознев В. Б., Решетова З. О., Подьяков О. М., Бушменська Г. В., Обухова Л. Ф., Поршнєв А. В., Поршнєва Є. Р., Гапонова С. О., Айдарова Л. І., Зінченко В. П.). Аналіз публікацій останніх років надає можливість досить докладно вивчити зміст теорії поетапного формування розумових дій і понять, що була розроблена П. Я. Гальперіним, та її подальший розвиток представниками його наукової школи.

2.3.2. Теорія поетапного формування розумових дій і понять (за П. Я. Гальперіним)

В основу цієї концепції покладено вчення про інтеріоризацію. Перехід, в результаті якого зовнішні за своєю формою процеси із зовнішніми ж речами-предметами перетворюються в процеси, які перебігають у розумовому плані, в плані свідомості, О. М. Леонтьєв називає інтеріоризацією; це процес, в якому формується внутрішній план дій [288]. П. Я. Гальперін підкреслював саме цей бік процесу інтеріоризації — як процесу утворення внутрішнього плану. Він вважав, що психологічна еволюція йде від розгорненої зовнішньої дії з окремими об'єктами до скороченої, узагальненої і автоматизованої дії у ідеальному плані [119].

Як показують роботи П. Я. Гальперіна, процес інтеріоризації може розумітися не як просторовий перенос, але як трансформація певних форм діяльності індивіда в інші форми тієї самої діяльності і як специфічна людська форма придбання нових знань і вмінь [29].

Треба зазначити, що Л. С. Виготський виділяв дві характеристики процесу інтеріоризації: перехід зовнішнього у внутрішнє і перехід соціального в індивідуальне [114]. О. М. Леонтьєв, розглядаючи інтеріоризацію, згадує перехід із зовнішнього у внутрішнє, а як другу характеристику вказує перехід із матеріального плану в план ідеальний, психічний. Хоча й О. М. Леонтьєв не включає в процес інтеріоризації перехід із соціального плану в план індивідуальний, але він погоджується із Л. С. Виготським, що специфічні людські психічні процеси можуть народитися лише у взаємодії людини з людиною, і лише потім починають виконуватися самостійно. Таким чином, робить висновок Н. Ф. Тализіна, у Л. С. Виготського та О. М. Леонтьєва разом ми знаходимо в інтеріоризації три переходи: від зовнішнього — до внутрішнього; від соціального — до індивідуального; від матеріального — до психічного [527].

Під процесом інтеріоризації в теорії поетапного формування розумових дій розуміється процес перетворення зовнішніх реальних дій з предметами у внутрішні, ідеальні. За основну структурну одиницю процесу мислення в цій теорії приймається дія. Операційними структурами мислення є практичні дії з об'єктами, перенесені в ідеальний план і здійснювані як розумові дії над образами цих об'єктів.

У своїх працях П. Я. Гальперін встановив закономірності, за якими дія з даним об'єктивним змістом перетворюється з матеріальної у розумову, яка має той самий об'єктивний зміст.

Розумові дії — підсумок перетворення зовнішньої матеріальної дії у внутрішню, результат переносу зовнішньої дії у план сприймання, уявлень і понять. В процесі переносу, який відбувається поетапно, відбуваються зміни дії за різними напрямками, параметрами. За кожним параметром дія характеризується яким-небудь одним показником, поєднання показників за усіма параметрами дає уявлення про стан дії у цілому. П. Я. Гальперін наголошував на тому, що для формування дії необхідна строга послідовність відпрацювання етапів і на кожному з них — властивостей дії. Ця послідовність пов'язана з тим, що кожна більш висока форма утворюється на підставі попередньої [518].

Н. Ф. Тализіна описує напрямки, за якими відбувається зміна дій при їх перетворенні із зовнішніх, матеріальних — у розумові.

Перший і головний напрямок — зміна дії за формою (іноді це називається зміною плану або рівня). Відомо вісім форм: матеріальна, матеріалізована, перцептивна, зовнішньомовна (усна або письмова), форма зовнішнього мовлення про себе, дія з уявленням, розумова форма (дія з поняттям).

Другий напрямок — перехід із зовнішнього плану у план внутрішній. Ці зміни пов'язані із зміною форми, але становлять самостійну характеристику. П'ять форм є зовнішніми, три — внутрішніми, при цьому шосту форму (внутрішня мова про себе) можна розглядати як перехідну, що поєднує в собі ознаки зовнішньої і внутрішньої форм.

Третій напрямок — зміна дії за мірою узагальненості. Виділені умови і діяльнісний механізм отримання заданої міри узагальненості дії за заданими властивостями. Встановлено, що узагальнення йде за тими і тільки тими властивостями, які увійшли у зміст ООД.

Четвертий напрямок — зміна дії за повнотою операцій, що виконуються.

П'ятий напрямок — зміна міри автоматизації і деяких інших характеристик дії.

Шостий напрямок — міра самостійності дії — перехід від розподіленого виконання дії до самостійного. Цей останній напрямок змін П. Я. Гальперін не вказує у своїх працях. Його розробляла Н. Ф. Тализіна. Вона вважає, що логічніше для цього напрямку зберегти назву Л. С. Виготського — перехід від соціального плану у індивідуальний.

В експериментальних роботах школи П. Я. Гальперіна цей перехід фактично мав місце. Так, в основній фазі поетапного формування здійснюється колективна робота дітей, і тільки поступово вона стає індивідуальною (самостійною) [527].

М. О. Степанова аналізувала динаміку поглядів П. Я. Гальперіна на параметри дії за роками. Ми зупинимося лише на тих параметрах, які П. Я. Гальперін виділяв у останній період. Серед **параметрів дії** П. Я. Гальперін виділяє **структурні, динамічні, рівневі** і **власне психологічні**.

Що стосується **структурних характеристик дії**, то П. Я. Гальперін бачить дві особливості побудови цілеспрямованої дії: розділення орієнтувальної та виконавчої частин і опосередкованість дії своєрідною психічною зброєю — схемою її орієнтувальної основи. До структурних особливостей дії належить її *повнота*, яка виявляється в тому, що дія може виконуватися з повним або неповним складом ланок (розгорнення дії та її скорочення). Скорочення може відбуватися свідомо або стихійно. При стихійному скороченні учень не розуміє, чому можна пропустити операцію; свідоме скорочення забезпечує можливість повернення від скорочених форм дії до більш повних.

Структурні властивості осмисленої дії полягають в *різному її виконанні*: то у вигляді злитого потоку, то в чіткому розділенні його окремих ланок, то в повному його відтворенні, то з пропуском різних, а то і всіх ланок, де від початкових даних суб'єкт безпосередньо переходить до результату. Повністю скорочене виконання — це «дія за формулою», коли від початкових (вихідних) даних і вказівки на дію з ними безпосередньо переходять до результату, минувши всі проміжні перетворення.

В **динамічні характеристики дії** автор включає *силові* і *часові*. Силові параметри — величина і розподіл зусиль на різних ділянках дії, а часові — темп і ритм дії. П. Я. Гальперін наголошував на тому, що на початку навчання темп повинен бути повільним настільки, щоб дитина спокійно могла оволодіти об'єктивною структурою дії; починати слід з повністю розгорненої та штучно уповільненої дії.

Відпрацювання нової дії відбувається на таких **рівнях**: *матеріальний або матеріалізований* — дія відбувається з речами або їх замінниками; *в гучному мовленні* — задача розв'язується вголос; «*в зовнішньому мовленні про себе*»; «*в прихованому мовленні*». Як зазначає М. О. Степанова, пізніше П. Я. Гальперін виділяв як самостійний рівень дію у «*внутрішньому мовленні*» і дію у «*прихованому мовленні*»; на його думку, рівень внутрішнього мовлення — проміжний між «зовнішнім мовленням про себе» і «прихованим мовленням».

Внутрішнє мовлення — те, в якому звукомоторний компонент внаслідок повної автоматизації спускається нижче порога свідомості, а його мовні значення у свідомості зберігаються. У внутрішньому мовленні багато що «мається на увазі», а у прихованому мовленні вже все «мається на увазі» — приховане мовлення і є чиста мисль.

М. О. Степанова зазначає, що П. Я. Гальперін на лекціях в 1983 році ще й виділяв між зовнішньопредметним (матеріальної або матеріалізованої дії) та мовним (виконання дії у голосному мовленні) етапами — ще й етап чисто перцептивний, коли дія виконується з тими самими речами, що й на попередньому етапі, але без рук, речі знаходяться перед очима.

До власне **психологічних** характеристик дії П. Я. Гальперін відносить *узагальненість, розумність, усвідомленість і критичність*.

Під *узагальненістю* розуміється діапазон варіантів умов, в яких дія може успішно виконуватися. Узагальнення є засобом відокремлення істотних умов дії від неістотних. Узагальнити дію — значить виокремити із різноманітних властивостей об'єкта саме ті властивості, які потрібні для виконання цієї дії. Узагальнення на матеріальному етапі — це ще не абстракція, а лише виділення істотних властивостей об'єкта (без відділення), перехід на етап голосного мовлення формує передумови виникнення абстракції.

Критичність дії — оцінка учнем відповідності передумов дії об'єктивній дійсності. Критичність дії передбачає уміння розрізняти слова про речі і самі речі та оцінювати речі не за словами про них, а за адекватним для них критерієм. Важливим для розуміння психологічних механізмів дії, на думку М. О. Степанової, є вказівка на зв'язок критичності дії з її розумністю. Розумність дії передбачає, по-перше, її орієнтацію на істотні властивості і, по-друге, її розгорненість. Розгорненість дії та її узагальненість забезпечують розумність дії, іншим виразом якої є її гнучкість [518].

Н. Ф. Тализіна дотримується класифікації параметрів дії, що була розроблена П. Я. Гальперіним до 1970 року. Тоді він виділяв групи первинних і вторинних параметрів. До первинних параметрів належать: форма, міра узагальненості, міра розгорненості, міра засвоєності (автоматизація, легкість та інше), міра самостійності. Що стосується переходу дії із зовнішнього плану

у внутрішній, то ця властивість не була позначена П. Я. Гальперіним спеціальним терміном, зазначає автор, але сам перехід систематично фіксувався. Тому Н. Ф. Тализіна пропонує цю властивість назвати планом дії (зовнішній план, внутрішній план).

До вторинних властивостей П. Я. Гальперін відносив: міцність, розумність, усвідомленість. Ці властивості або витікають з первинних (міцність, усвідомленість), або є наслідком адекватності (або неадекватності) ООД [527].

Сукупність первинних характеристик дає можливість описати *психологічний* стан дії і діяльності при переході із матеріальних, зовнішніх, розгорнених, не узагальнених, розділених, не автоматизованих дій у розумові, внутрішні, узагальнені, згорнені, самостійні, автоматизовані. Типовий стан дії відповідає етапові її засвоєння. П. Я. Гальперін спочатку виділяв п'ять етапів.

Перший можна було б назвати складанням ніби «проекту дії» — її орієнтувальної основи, якою у подальшому учень користується при її виконанні; пізніше він був названий етапом попереднього ознайомлення з дією.

На другому етапі утворюється матеріальна (або матеріалізована) форма цієї дії — її перша реальна форма в даного учня; його назва — етап матеріальної або матеріалізованої дії.

На третьому етапі дія відривається від речей (або їх матеріальних зображень) і переноситься у план голосного, діалогічного мовлення — етап голосного мовлення.

На четвертому етапі дія виконується шляхом беззвучного промовляння про себе, але з чітким словесно-понятієвим розчленуванням; це дія в плані «зовнішнього мовлення про себе».

На наступному етапі ця дія стає автоматичним процесом, внаслідок чого саме в своїй мовній частині полишає свідомість; мовний процес стає прихованим і в повному смислі внутрішнім.

Потім зазначені п'ять етапів були ще доповнені мотиваційним етапом формування мотиваційної основи дії як необхідного компоненту в структурі орієнтування суб'єкта [116; 458]. Однак зміни дії відбуваються лише на чотирьох етапах, тому **процес формування дії** поділяється на **дві фази**: *попередню*, яка містить два етапи (мотиваційний і етап складання схеми ООД) і *основну*, яка містить решту етапів [527].

Під час основної фази після ряду етапів, на кожному з яких відбувається формування бажаних властивостей дії, — формування розумової дії йде за однією й тією самою схемою (орієнтувальної основи дії), але з операційного складу дії виділяється узагальнений, інваріантний зміст. У розумовий план вона переноситься лише в розумовій формі, але членованість мовлення затримує виконання дії, і тепер суб'єкт орієнтується на предметний зміст дії, який поданий у мовних значеннях. Першою розумовою формою дії, за П. Я. Гальперіним, є мовлення, тільки без голосності, тобто «зовнішнє мовлення про себе». Подальші зміни дії полягають у тому, що з неї виділяється узагальнений, сталий склад, який теж поданий словами-носіями предметних значень. Потім останні починають усвідомлюватися у внутрішньому плані раніше звукових образів, що робить вимовляння слів зайвим. Лишаються мовні значення, за якими самоспостереження не знаходить ані чуттєвих образів предметів, ані звукових образів мови, ні її кинестезії. Інакше, кажучи, в результаті перетворення і автоматизації «зовнішнього мовлення про себе» предметна дія у розумі обертається у думку про цю дію, в «чисту думку» про розв'язання задачі, якій відповідає ця дія [117; 121].

Контроль за дією починає обмежуватися «почуттям» узгодження або неузгодження з її програмою; це тепер скорчена частина дії, яка не бере участі в її виконанні, але продовжує брати участь у її розумінні.

У заключній фазі, у «внутрішньому мовленні», від дії зберігається лише своєрідне переживання — «усвідомлення» об'єктивного змісту процесу, його напрямку і благополучного або неблагополучного руху [117].

Як бачимо, мовлення бере участь у всіх етапах формування розумової дії, але по-різному. На етапі попереднього ознайомлення з дією та на етапі матеріальної або матеріалізованої дії воно служить лише системою вказівок на матеріальну дійсність. Поглинувши у себе досвід останньої, мовлення на трьох наступних етапах стає єдиною основою дії, що виконується лише у свідомості. Однак на кожному з них має місце особливий вид мовлення. Дія в плані «голосного мовлення без предметів» відбувається під контролем іншої людини і передусім як повідомлення їй про цю дію. Отже, на першому власне мовленнєвому етапі мислення і повідомлення складають нерозривні сторони єдиного процесу спільної теоретичної дії. Але вже тут, зазначає П. Я. Гальперін, психологічний наголос може бути перенесений на ту або іншу сторону, і відповідно до цього форми мовлення змінюються від мовлення-повідомлення іншому до мовлення-повідомлення собі; в останньому випадку метою стає розгорнене викладення дії, ідеальне відновлення її об'єктивного змісту. Потім ця «дія у мовленні без предметів» починає виконуватися про себе беззвучно; в результаті з'являється «зовнішнє мовлення про себе». Воно тут

є спочатку зверненням до співрозмовника, однак по мірі засвоєння дії в цій новій формі уявлюваний контроль іншої людини все більш відходить на задній план, а мить розумового перетворення, власне мислення, все більш стає панівною. Як і на всіх етапах, дія у «зовнішньому мовленні про себе» засвоюється в різних аспектах: на різному матеріалі, у різному мовному виразі, із різною повнотою операцій, що складають дію. Поступово людина переходить до все більш скорочених форм дії, і нарешті, до її найбільш скороченої форми — до дії за формулою, коли від дії лишається, власне, тільки перехід від вихідних даних до результату, який відомий за минулим досвідом. П. Я. Гальперін вважає, що саме прихований мовленнєвий процес може і повинен називатися внутрішнім мовленням. Внутрішнє мовлення характеризується новою внутрішньою будовою — безпосереднім зв'язком звукового образу слова з його значенням і автоматичним перебігом, при якому власне мовленнєвий процес лишається за межами свідомості.

В таких умовах настає природна стереотипізація дії, а з нею і швидка її автоматизація. Остання в свою чергу призводить до відсунення дії на периферію свідомості, а потім за її межі. Явно мовленнєве мислення про себе стає прихованим мовленнєвим (власне розумовим) мисленням. Тепер результат його виявляється ніби «відразу» і без видимого зв'язку з мовленнєвим процесом (який лишається за межами свідомості), «просто» як об'єкт.

Процес автоматизації не відразу охоплює весь склад мовленнєвої дії, і навіть згодом, коли цей процес закінчився, дія відбувається описаним способом тільки за умови, що її застосування до нової задачі не зустрічає перешкод. Якщо ж вони виникають, то орієнтувальний рефлекс, увага переключається на утруднення, і це викликає на даній ділянці перехід дії до більш простого та раннього рівня.

На перших етапах поетапного формування розумових дій чітко виділяється психологічна частина цілеспрямованої дії — орієнтувальна її частина. П. Я. Гальперін зазначає, що орієнтувальна частина будь-якої цілеспрямованої дії в результаті повторення отримує фізіологічне відображення у вигляді так званої «нервової моделі стимулу». По мірі того, як нервова модель складається, зовнішня діяльність згортається. Коли нервова модель вже склалася, то вона збуджується симультанно і відразу видає свій кінцевий результат.

Процес орієнтування суб'єкта у ситуації, який випереджує його дії в ній, — це орієнтувальна діяльність, тому що цей процес теж систематично відновлюється діячем і призводить до певного результату. Структура орієнтувальної діяльності не відкривається ані внутрішньому, ані зовнішньому спостереженню, і основним методом її дослідження є вивчення її формування [196; 517].

Якість самої орієнтувальної діяльності визначається якістю подання схеми тієї дії, яка за цією схемою потім виконується. Під час формування на ділянках, де необхідні вказівки відсутні, виникають спроби і помилки, велике розпорошення за успішністю, великі витрати часу, зусиль і матеріалів. Коли схема орієнтувальної основи пояснюється повністю, та ще з поданням «рельєфного» запису, так що нею можна користуватися без попереднього заучування, то нова дія з першого разу виконується правильно, її формування дуже полегшується. Навчання стає доступнішим, відбувається значно швидше і навіть у класному навчанні дає невелике розпорошення успішності, при чому на вищих її показниках.

Але схема повної орієнтувальної основи може бути складена по-різному, і тут П. Я. Гальперін бачить дві можливості: орієнтувальна схема складається лише на характеристиках фактичного складу знання або на роз'ясненні його внутрішньої структури (що вимагає розкрити процес його утворення). При врахуванні лише фактичного складу знання планомірне формування дає бажану якість засвоєння конкретної галузі знання. При вивченні його внутрішнього складу, крім конкретного знання, отримується спосіб самостійного придбання нового знання у межах того ж матеріалу.

Так, відмінності у повноті та способі побудови схеми орієнтувальної основи дії призвели до виділення трьох основних типів орієнтування в матеріалі та його вивчення [121]. П. Я. Гальперін на підставі провідного типу ООД запропонував три типи навчання:

В умовах **І типу навчання** орієнтувальна основа діяльності (ООД) неповна, що зумовлює багаторазові спроби і помилки. У цьому випадку формування дії відбувається на підставі контролю за кінцевим результатом, що не забезпечує співвіднесення умов з конкретними операціями. Тому дія дуже нестійка до зміни умов ситуації і обмежена в переносі на нові знання.

Характерним для першого типу навчання, зазначає Л. М. Фрідман, по-перше, є немотивованість введення нових знань, а подруге, відсутність повної орієнтувальної основи усіх дій, якими повинен оволодіти учень, відсутність «загальних схем речей».

Тому природно, що вся наступна діяльність учнів при розв'язуванні численних задач спрямована на отримання конкретних результатів на основі даних їм часткових зразків дій, а не на засвоєння загальних способів дій, які не встановлюються при такому способі вивчення. Якщо все ж таки деякі учні ними оволодівають, то це відбувається стихійно.

ІІ тип навчання характеризується побудовою окремої конкретної дії на повній орієнтувальній основі, спроби й помилки стають випадковими та нехарактерними. Кожна операція чітко співвідноситься із умовами, і в результаті дія розумна (в рамках конкретних умов), узагальнена (у заздалегідь наміченому об'ємі) і свідома. Сформована дія стійка до змін умов, перенос значний, але залежить від ступеня ідентичності елементів, що входять до складу дії.

Навчання за **ІІІ типом** передбачає орієнтування на основні одиниці матеріалу, закони їх поєднання, методи визначення того та іншого і самостійне складання ООД для конкретних об'єктів. Повна ООД забезпечує формування дій і понять без проб і помилок; розумними стають не лише дії в сенсі співвідношення їх з умовами, але й самі умови, які розкриваються у своєму внутрішньому складі. Дія має можливість повного і широкого переносу.

Головна характеристика ІІІ типу полягає в тому, що учням пропонується метод аналізу предмету засобом його «розчленовування» на складові «одиниці» і вказуються закони їх поєднання, що становить основи складу предмету, а різні види сполучень одиниць — його варіанти. Користуючись методом «розчленовування», учень може складати ООД самостійно для аналізу різних варіантів предмета.

Перший тип, який не вимагає від викладача великих знань про процес навчання, є найпоширенішим. Другий тип забезпечує швидке та впевнене оволодіння новими знаннями та уміннями, які відповідають бажаній якості, але обмежені своєю галуззю. Третій тип, крім цього, забезпечує можливість самостійного оволодіння новими знаннями з усіх наук, які з різних сторін вивчають ті самі об'єкти [121, 447, 519, 560].

Отже, при вивченні структури дії основну увагу було приділено орієнтувальній основі дії (ООД). Відомо, що найбільш продуктивні дії мають орієнтувальну основу ІІІ типу, при якій орієнтири подані у загальному вигляді, який можна застосувати для цілого класу явищ. В кожному конкретному випадку ООД складається суб'єктом самостійно за допомогою загального методу, який йому дається вчителем. Діям, що сформовані на ООД III типу, притаманні не лише швидкість і безпомилковість процесу формування, але й більша стійкість до зміни умов і широта переносу. Цей тип орієнтування, зазначає Н. Ф. Тализіна, був і лишається у центрі уваги при формуванні пізнавальної діяльності. Звичайно пошук ООД III типу йде емпіричним шляхом, але в 1970-ті рр. З. О. Решетова почала для відокремлення ООД застосовувати метод системно-структурного аналізу явищ. Результатом такого аналізу є виділення інваріанту системи, який народжує усю множину явищ — варіантів системи.

З вищесказаного можна зробити висновок: для повноцінного формування загального уміння розв'язувати задачі навчання повинно реалізовувати розглянуті етапи засвоєння дії (за П. Я. Гальперіним), при чому ООД розв'язування будь-яких простих та складених задач повинна пропонуватися учням у готовому вигляді згідно II типу навчання; а виділення ООД способів розв'язування «типових» задач має здійснюватися за III типом навчання.

2.3.3. Орієнтувальна діяльність учнів під час розв'язування задач. Метод системно-структурного аналізу

У дослідженнях З. О. Решетової з формування теоретичного мислення (із системним типом орієнтування), де особливу увагу було приділено формуванню орієнтувальної діяльності (ОД) у всій повноті її функцій, вона (ОД) предстала не лише у розгортанні у «внутрішньому плані» на основі сформованого психічного образу, але й у побудові самого цього образу — його змісту, структури, функції і «внутрішнього плану» діяльності (ВПД), що відкривається ним.

Виходячи з необхідності відрізнення діяльності, що перебуває у процесі засвоєння, від діяльності вже засвоєної, дослідниця дійшла висновку, що ООД — атрибут вже засвоєної діяльності, вже набутого вміння розв'язувати задачу (вид задач). Ї тому засвоєння не може починатися з виділення ООД (або її «схеми») — вона сама повинна бути сформована, складена. Організація зовнішньої предметної діяльності учнів має починатися зі створення адекватної програми для задачі, яка розв'язується. У програмі фіксуються: мета і предмет діяльності, засоби аналізу предмета — метод і його процедури (операційний склад), продукт (структура знань про предмет). Діяльність, яка організується за цією програмою, потрібна, «щоб дізнатися», для чого необхідний образ, що формується (знання про предмет), як він будується і потім використовується при розв'язуванні конкретної задачі. При цьому «логіка речей» (предмета) розкривається через логіку діяльності, що організується з ними. Потім вона стане логікою мислення, що визначає тип орієнтування у предметах.

Діяльність, яка перебуває у процесі формування, виконує, по суті, орієнтувально-дослідницьку функцію — будує психічний образ предмета і ВПД в «полі образу». Будучи вже сформованою і засвоєною, вона стає умінням, яке включає результат дослідження до складу своєї «орієнтувальної частини». В цьому і полягає суть «з'ясування» ООД.

«Здійснення» психічного образу, який відкриває внутрішній план діяльності, виробляється не тільки змінами форми діяльності в процесі інтеріоризації, але передусім наступною зміною її функцій і змісту. Кожна така нова зміна як «попередня подія» робить свій внесок у формування орієнтувальної функції образу. Психологічна функція образу не в тому, що він — ідеальне відображення об'єкта, а в тому, що він орієнтує суб'єкта у предметному світі, опосередковує задачі по його перетворенню.

З. О. Решетова виділяє основні компоненти ООД: *дослідницький* (пізнавальний), *плануючий* (план майбутньої перетворюючої діяльності), *контрольно-оціночний* (звірення фактичного виконання дії із запланованою), *корекційний* (усунення відхилень). При створенні ООД, зазначає автор, треба мати на увазі:

1) формування її предметного змісту і функціональної структури;
2) поетапний перехід ОД із зовнішньої форми у внутрішню;
3) перетворення внутрішньої діяльності [447].

Треба зазначити, що у наступних роботах З. О. Решетова вказує такі структурні елементи ООД: *мотиваційно-цільовий, плануючий, дослідницький, контрольно-оціночний* [448].

Формування функціональної структури ООД передбачає відповідні стадії, на кожній з яких формується відповідний компонент. Розглянемо докладно зміст цих стадій за З. О. Решетовою. ***Дослідницька програма*** формує зміст образу і його структуру. Ставши внутрішньою і зазнавши деяких змін (скорочення за типом згорнення, автоматизацію), програма визначає спосіб мислення. До неї можуть бути закладені різні способи дослідження об'єкта: емпіричні спроби і помилки, алгоритмізація, системний аналіз й тощо.

Системний аналіз предмета передбачає наступну сукупність рівнів: *на рівні цілісності* виділяються параметри (властивості), які характеризують дану систему; *на рівні складності* об'єкт як ціле «розтинається» на складові елементи, виділяються їх характеристики; *на рівні організованості* розглядається внутрішня впорядкованість об'єкта; *на рівні «система — оточення»* багаторівнева будова об'єкта аналізується з точки зору внеску кожного рівня у механізм народження істотних властивостей об'єкта як цілого. В цілому, вважає вчена, дослідницька програма розкриває виучуваний об'єкт як систему; при цьому образ будується у єдності загальної форми (як система взагалі) та в її часткових особливостях (як конкретна система).

Функція ОД на дослідницькій стадії — побудова предметно-пізнавального змісту образу і діяльності, яка його виробляє. На цьому, зауважує автор, ще не вичерпується «виробництво» орієнтувальної функції образу. Пізнавальний зміст образу повинен «працювати» на орієнтування суб'єкта при розв'язуванні задачі, тобто відкривати план можливих перетворень діяльності, що передбачає наступну стадію — ***планування***, на якій виділяється порядок перетворень вихідних умов задачі як спосіб її розв'язування.

Будь-яка задача репрезентує об'єкт в системі відношень і зв'язків «даних» і «шуканого». «Шуканим» можуть бути різні боки об'єкта: той або інший параметр системи, характеристики того чи іншого структурного її елемента і так далі. Тому перший крок на стадії планування — це визначення характеру «шуканого» і його місця у системі зв'язків. Знаходження шуканого пов'язано з перетворенням вихідних умов задачі. План пошуку — це послідовні перетворення умов задачі, при яких виявляються приховані зв'язки та за їх відношенням до відкритих зв'язків визначаються «проміжні дані» в їх відношенні до «шуканого». Обрати оптимальний шлях пошуку, відхилити неефективний, а тим більш здійснити оригінальне творче розв'язання, на думку авторки, дуже важко без системного аналізу. Попереднє системне дослідження об'єкта дозволяє побачити його особливості, подані умовами задачі, і планувати їх перетворення для знаходження шуканого.

Як зазначалося в 1.3, розв'язування задачі — це знаходження «шуканого» шляхом перетворення об'єкта для виявлення прихованих зв'язків, які дозволяють визначити його характеристики. Будь-яка задача (і теоретична, і практична) розв'язується шляхом поступових перетворень її вихідних умов. Лише в першому випадку — з метою отримання нового знання, а в другому — з метою отримання нових характеристик реального об'єкта. В обох випадках використовується попередній дослідницький результат (виявлені системні властивості предмета). Таким чином, на стадії

планування змістом ООД стає: ідентифікація даної задачі з образом «системного предмета», визначення характеру і «місця» «шуканого» в даній конкретній системі, планування наступних перетворень вихідних умов задачі для отримання ряду «проміжних даних» та їх відношення до «шуканого».

Первинно зовнішня орієнтувально-плануюча діяльність в процесі інтеріоризації стає внутрішньою. У внутрішньому плані вона згортається (після її контролю і оцінки як «правильної») і автоматизується, змінює власну структуру і функцію і відтак відтворення образу, що орієнтує, стає «одномоментним актом», який виконується «автоматично» — без розгорненого свідомого контролю всього процесу. Цей образ «згасає» у власному продукті — сформованій ООД, яка у свідомості суб'єкта виступає як наявна подія, що «само собою» виникла. Саме в такому вигляді ООД є відображенням зовнішньої діяльності, не прямим її аналогом, а її «внутрішнім планом». Саме в такому кінцевому вигляді ОД постає орієнтувальною основою сформованого уміння. Але цьому передують не лише дослідницька і планувальна, а ще й *контрольно-оцінювальна* стадії. Контролю і оцінці підлягає і кінцевий продукт реалізованого плану (знайдені характеристики шуканого), і весь шлях відшукання «проміжних даних». Саме виявлення відхилення в той чи іншій ланці (неправильне виконання або пропущення якої-небудь операції, що передбачена планом) дає можливість своєчасно і обґрунтовано скоригувати ОД.

Виділені З. О. Решетовою стадії формування ОД відображують процес становлення її предметного змісту і функцій ООД. Етапи, які розкриваються в теорії П. Я. Гальперіна, описують зміну форм діяльності в процесі її перетворення із зовнішньої у внутрішню («розумову»). Механізм засвоєння, вважає авторка, включає в себе обидва ці аспекти, однак їх «розведення» дуже важливо, оскільки керування процесом засвоєння не зводиться лише до «поетапного відпрацювання» [447].

Отже, серед надбань П. Я. Гальперіна є включення у структуру діяльності такого важливого елементу, як орієнтувальна основа дії. П. Я. Гальперін виділяв деякі істотні характеристики ООД як цілісного регуляторного утворення: повнота, узагальненість, форми, у яких вона функціонує, міра засвоєння. З. О. Решетова розкрила їх зміст і доповнила новими:

Предметний зміст ООД. Ця характеристика важлива для формування змісту ООД у відповідності з предметним змістом уміння, що засвоюється. При стихійному його формуванні або неповному керуванні процесом вона може бути і не зовсім адекватною, і функціонування уміння буде нестійким.

Повнота ООД. Вона визначається не лише стосовно до предметного змісту діяльності (її мети, предмета тощо), але й до складу її регуляторних функцій: мотиваційно-цільової, плануючої, пізнавальної, контрольно-оцінювальної, корекційної.

Рівень узагальнення ООД. Він може бути різний: емпіричний, теоретичний, методологічний, в залежності від характеру задач, які розв'язуються учнем, та рівня його розвитку.

Форми функціонування ООД. П. Я. Гальперін виділяв їх за критерієм етапів інтеріоризації діяльності: матеріального, матеріалізованого, голосно-мовленнєвого й так далі; але процес інтеріоризації діяльності — це шлях становлення ООД. Треба зазначити, що З. О. Решетова має на увазі форми функціонування вже сформованої ООД (як діяльності внутрішньої). Тому авторка виділяє дві форми: орієнтувальну основу зовнішньої діяльності — вміння розв'язувати задачі на перетворення, і орієнтувальну схему, яка організує внутрішню діяльність, — відтворення образу предмета мисленням і діяльність «в плані образу» («як уміння мислити»).

Рефлективність ООД і форми її виявлення. Ця характеристика — показник усвідомленості вміння, що формується. Форми її виявлення можуть бути різними: здатність учня дати адекватний словесний звіт про виконання внутрішньої діяльності («як він думає»); здатність самостійно організувати діяльність із засвоєння нових знань і вмінь та сконструювати адекватну ООД для кожного випадку; здатність контролю, оцінки і корекції діяльності, що виконується, аналіз відхилень від норм, що виникають, їх причин та їх попередження.

Міра засвоєння ООД. Виділяючи цю характеристику, П. Я. Гальперін мав на увазі зміни, яких зазнає діяльність, ставши внутрішньою: її скорочення, згорнення, автоматизацію, структурні зміни тощо. Ці зміни неможливо проконтролювати ані самоспостереженням, ані спостереженням з боку іншої людини, але, зазначає З. О. Решетова, можна визначити непрямо. Вона розуміє засвоєння ООД в більш широкому сенсі — як міру сформованості її в усіх характеристиках, що задані.

Тип орієнтування у предметі. Ця характеристика пов'язана з засвоєнням методу аналізу предмету. З цим показником П. Я. Гальперін пов'язував рівень розвитку учня і його можливості. У дослідженнях З. О. Решетової формувався системний тип орієнтування в предметі [449].

Подальші дослідження ООД дозволили встановити її роль як психологічного механізму узагальнення, джерела формування системного типу мислення. Н. Ф. Тализіна [525] експериментально довела, що узагальнення йде тільки за тими властивостями предметів, які увійшли до орієнтувальної основи дій, що спрямовані на аналіз цих предметів. Це означає, що керування узагальненням пізнавальних дій і знань, які до них входять, повинно йти через побудову діяльності учнів, шляхом контролю за змістом орієнтувальної основи відповідних дій, а не шляхом тільки забезпечення спільності властивостей у об'єктах, що подаються. Крім того, згідно з отриманими дослідницею даними, варіації неістотних властивостей предметів зовсім не є обов'язковими для отримання узагальнення за системою істотних даних. Для цього достатньо лише включити відповідну систему істотних властивостей у зміст орієнтувальної основи дій. Важливим є зауваження авторки про те, що у дітей 5–6 років може бути отримано повноцінне узагальнення за закономірностями, або теоретичне узагальнення.

Виходячи з вищесказаного, можна зробити важливий висновок, щодо шляху отримання ООД розв'язування «типових» задач. Виділення ООД повинно здійснювати через всебічне дослідження задачі методом системно-структурного аналізу. Системно-структурний аналіз математичної структури задачі може здійснюватися за допомогою змін неістотних ознак задачі певного вида при збереженні істотних. Дослідження впливу цих змін на розв'язання задачі дозволить учням узагальнити спосіб розв'язування задач певного виду. Причому учні повинні підводитися кожного разу до узагальнення більш високого порядку. Так розв'язавши задачу певної математичної структури і дослідивши її засобом змін, наприклад групи пропорційних величин або числових даних задачі, учні узагальнюють план розв'язування таких задач. Наступні зміни задачного формулювання полягають у зміні шуканого задачі, і на основі порівняння задачі попередньої математичної структури з одержаною діти роблять узагальнення більш високого порядку.

2.3.4. Спільні підходи теорії поетапного формування розумових дій і понять та теорії розвивального навчання (за Д. Б. Ельконіним та В. В. Давидовим)

Нині погляди психологів, дидактів, методистів спрямовані на розвивальне навчання. Проблеми навчання, засвоєння, розвивального навчання були ключовими в системі досліджень П. Я. Гальперіна [448]. При традиційному навчанні засвоєння знань відбувається стихійно, без достатнього керівництва, і контролюється за кінцевим результатом. П. Я. Гальперін в якості предмета засвоєння розглядав дію і поставив завдання — з'ясувати умови, врахування яких не лише забезпечить можливість, а й змусить учня діяти правильно. П. Я. Гальперін виділяє чотири групи таких умов:

— формування адекватної мотивації учня;
— забезпечення правильного виконання дії;
— виховання бажаних властивостей дії;
— перетворення останньої у розумову дію.

За такої організації навчання нова дія формується легше і швидше, ніж в умовах традиційного навчання. Це забезпечується, головним чином, завдяки виключенню спроб і помилок у початковий період формування дії. Метод П. Я. Гальперіна дозволяє дитині вже після аналізу кількох перших об'єктів самостійно досліджувати будь-який новий об'єкт такого ж самого роду, встановлювати його склад і характерні ознаки, за ними самостійно відтворювати його і засвоювати знання про об'єкт і дії з ним [519]. Порівнюючи розроблений метод із традиційним формуванням розумових дій і понять, П. Я. Гальперін дав докладну характеристику типів навчання, кожний з яких відрізняється орієнтуванням у предметі, власним ходом процесу навчання, якістю його результатів і ставленням дітей до процесу і предмета навчання.

П. Я. Гальперін зазначав, що типи навчання розрізняються не лише певною побудовою предмета, але й певним способом його подання учителем і побудовою орієнтування учнем. Різне навчання здійснює й різний вплив на розумовий розвиток дитини. При навчанні за I типом йде накопичення вузьких знань та вмінь, розвиток мислення і здібностей відбувається ніби поза навчанням. Це дає підстави вважати, на думку П. Я. Гальперіна, що між навчанням і розвитком немає позитивного зв'язку, а розумовий розвиток не лише не залежить від навчання, а ще й обумовлює його можливість.

II тип навчання — це дуже гарне навчання (у сенсі набуття знань і вмінь бажаної якості), але воно також не впливає на розумовий розвиток, що пояснюється тим, що він виховує не теоретичний, пізнавальний, а прикладний інтерес до знань.

Навчання за III типом дає принципово іншу картину — воно не лише забезпечує набуття знань і вмінь раціонального характеру, але й формує настановлення на дослідження. П. Я. Гальперін визначав, що перше і головне в III типі навчання — це збудження пізнавальної діяльності, розвиток власне пізнавального інтересу, що й зумовлює потужний розвивальний ефект навчання [120; 121].

Крім цього, П. Я. Гальперін бачить ще одну важливу особливість III типу навчання: засвоєння прийомів інтелектуальної діяльності становить потенціальні можливості розумового розвитку, але не забезпечує сам цей розвиток; вказані можливості реалізуються в ході їх активного застосування, що передбачає їх безпосередній зв'язок з інтересами дитини. Отже, інтереси дитини забігають уперед стосовно до інтелектуальних можливостей і ніби ведуть за собою їх розвиток.

Таким чином, між навчанням і розумовим розвитком існують складні відносини: не будь-яке навчання сприяє розумовому розвитку, а лише III тип навчання озброює дитину методом дослідження, найбільш тісно поєднує набуття знань і умінь із загальним розумовим розвитком дитини.

П. Я. Гальперін бачить у III типі навчання два початки: метод дослідження об'єктів та метод заохочення до цього дослідження; вони нерозривно пов'язані між собою.

Ще Л. С. Виготський показав, що навчання лише тоді досягає справжнього успіху, коли веде за собою розвиток. А П. Я. Гальперін розкрив зв'язок інтелектуальних можливостей і типів навчання.

Як підкреслював Г. С. Костюк, розвивальний ефект шкільного навчання зумовлений як його змістом, так і методами. Структурна побудова змісту, виділення в ньому основних понять, їх систем і операцій, що з ними пов'язані, створюють сприятливі можливості повноцінного його засвоєння учнями. Реалізація цих можливостей залежить від того, як організовані дії учнів з навчальним матеріалом [255].

Н. Ф. Тализіна наголошує на тому, що теорія поетапного формування розумових дій і понять є передусім основою побудови діяльнісної теорії навчання.

Діяльність навчання складається з дій, як і будь-яка діяльність, але в її структурі дії можуть посідати різні місця: одні посідають місце предмета засвоєння, інші — місце засобів засвоєння.

Увагу П. Я. Гальперіна було спрямовано на перше, його цікавила саме динаміка засвоєння нових дій.

Загальна схема процесу навчання подається так: організація зовнішньої предметної діяльності (виокремлення учнями її орієнтувальної основи — ООД) → інтеріоризація (етапи засвоєння із зміною форм діяльності) → виникнення психічного образу → орієнтувальна діяльність у внутрішньому плані на базі цього образу. В цьому випадку психічне виступає як ОД на підставі образу, а зовнішня предметна діяльність — як спрямована на розв'язання різноманітних завдань орієнтування. Отже навчання виступає як процес планомірного керування ОД учня при засвоєнні знань і умінь. Зміст, функціональна структура і форми ОД на різних етапах засвоєння визначають і сам процес засвоєння, і типи, що формуються, орієнтування у предметі діяльності [447].

Предмет педагогічної психології, зазначає З. О. Решетова, розкриває навчання як процес планомірного керування формуванням орієнтувальної діяльності (ОД) учнів при засвоєнні знань і умінь. Зміст, функціональна структура і форми ОД на різних етапах засвоєння визначають і сам процес, і типи, орієнтування в предметі діяльності.

Треба зазначити, що теорія поетапного формування отримала експериментальне підтвердження для усіх видів діяльності і основних видів пізнавальної діяльності [517]. Теорія поетапного формування розумових дій є фундаментом не лише діяльнісної теорії навчання, але і діяльнісної дидактики і окремих методик. Там, де впроваджується цей підхід, наголошує Н. Ф. Тализіна, там незмінно досягаються вагомі результати, знімаються проблеми, які хвилюють масову школу. Впровадження інваріантної побудови навчальних предметів і формування адекватних їм видів діяльності із системним типом орієнтування дозволяє підвищити ефективність навчання за кількома напрямками:

1. Скоротити обсяг навчальних предметів (іноді у кілька разів).
2. Забезпечити життєздатність засвоєних знань, підготовленість людини до засвоєння нових знань, які, як правило, є тільки варіантом тієї самої системи.
3. Дати учням більш глибокі знання: досягти фундаменталізації освіти.
4. Скоротити час вивчення предметів (звичайно на 25–30%).
5. Підвищити розвивальний ефект навчання. Замість окремих навичок і умінь стає можливим формування загальних методів розв'язування задач — формування фактично інтелектуальні здібності [527].

Теорію поетапного формування розумових дій і понять застосовано методистами й у навчанні учнів розв'язування задач. Так,

Т. К. Горобець [132], Н. Н. Грязевою [139], В. І. Лефевром [292], М. І. Лісовою [293], Г. П. Стефановою [521], Н. М. Ткаченко [534], А. В. Токаревим [535] досліджені питання поетапного формування розумових дій в процесі розв'язування геометричних і фізичних задач, а також формування узагальнених прийомів розв'язування задач. Результати експериментальної роботи авторів свідчать про ефективність її застосування для формування умінь розв'язувати задачі.

Таким чином, формування загального уміння та умінь розв'язувати задачі певних видів слід здійснювати на підставі теорії поетапного формування розумових дій. Усі дії, що складають загальне уміння розв'язувати задачі, мають бути поетапно опрацьовані, причому виділення ООД йде за II типом навчання. А при формуванні умінь розв'язувати задачі певних видів здійснюється навчання за III типом, методом системно-структурного аналізу З. О. Решетової за умов управління навчальною діяльністю з боку вчителя.

На думку Н. Ф. Тализіної, В. В. Давидов розвинув діяльнісний підхід П. Я. Гальперіна [527]. Навчання за III типом орієнтування передбачає формування змістовних узагальнень, а теорія змістовних узагальнень В. В. Давидова є складовою частиною теорії навчальної діяльності. В параграфі 2.2 ми розглянули ***теорію навчальної діяльності*** Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова.

Нагадаємо, що навчальну діяльність (ЦНД) розглядають як діяльність учня, свідомо спрямовану ним на здійснення цілей навчання і виховання, які приймаються учнем як власні цілі [150].

За Л. М. Фрідманом, особливістю цілеспрямованої навчальної діяльності є те, що вона **спрямована на засвоєння загальних способів дій**. В кожній дії, що виконується учнем, треба розрізняти результат цієї дії і той спосіб, за допомогою якого виконується дана дія і всі інші дії того самого типу. ЦНД починається тоді, коли учень розрізняє у власних діях ці два боки і коли головні його зусилля спрямовані на оволодіння саме загальними способами дій, загальними схемами дій [560].

Спираючись на положення П. Я. Гальперіна про те, що лише при третьому типі орієнтування у програму навчання включається формування узагальнених схем дійсності, які в процесі їх вивчення стають об'єднуючими схемами окремих дій, новими структурами мислення, Л. М. Фрідман доходить висновку, що *третій тип орієнтування слід розглядати як основний спосіб організації навчання при формуванні ЦНД учнів*. Це означає, що необхідно озброювати учня таким методом аналізу, щоб він міг для будь-якого явища з цієї галузі самостійно складати повну орієнтувальну основу дії. Такий аналіз повинен бути орієнтований:

1) на «основні одиниці» матеріалу даної галузі;
2) на загальні правила їх поєднання у конкретні явища.

Відповідно до цього на перших об'єктах нової галузі учень оволодіває двома методами: методом виділення основних одиниць конкретних об'єктів і методом характеристики їх поєднання у цих галузях [118].

В. В. Давидовим було показано, що в основі теоретичного мислення лежить здатність до **змістовного узагальнення** тієї чи іншої системи. Воно виникає в процесі аналізу системи, що розвивається, і виділення генетично вихідної його основи.

Таким чином, вивчення навчального матеріалу будується за **принципом змістовного узагальнення**, *коли засвоєння знань загального і абстрактного характеру передує ознайомленню з більш частковими і конкретними знаннями.* Останні, зазначає В. В. Давидов, повинні бути виділені із перших як зі своєї основи; цей принцип витікає із настанови на з'ясування походження понять і відповідає вимогам сходження від абстрактного до конкретного [145]. Згідно з цією теорією, формування змістовних узагальнень передбачає:

1) виокремлення у системі, що вивчається, типового факту, відношення, «клітинки», яка має всі властивості цілого;
2) організацію діяльності учнів із поглибленого аналізу суттєвих зв'язків і відношень в цій системі;
3) формулювання узагальнення, принципу, засобу дії;
4) навчання застосування цього узагальнення до вивчення конкретного матеріалу.

2.3.5. Застосування змістовних узагальнень при навчанні розв'язування задач

Формування умінь розв'язувати математичні задачі в учнів основної школи за теорією змістовних узагальнень розглядає В. Н. Осинська [390]. Автор вважає, якщо виходити із теорії змістовних узагальнень, то передусім слід виділити опорну задачу даного типу. Після цього слід навчити школярів розв'язувати цю задачу. Коли учні проаналізують суттєві зв'язки умови задачі і спосіб розв'язування задач подібного типу, то вони будуть вміти розв'язувати всі аналогічні задачі, підводячи їх умови під

відомий їм загальний спосіб дії. Методика навчання розв'язування задач на базі змістовних узагальнень передбачає послідовність розумових прийомів: аналіз через синтез — абстрагування (виокремлення суттєвих зв'язків і відношень) — змістовні узагальнення (усвідомлення загального способу розв'язування). Змістовне узагальнення передбачає перехід від загального до часткового, конкретного.

Отже, вже на першій задачі учні засвоюють усі необхідні знання про типові особливості задач, способи їх розв'язування, принципи варіації несуттєвого в задачі, вчаться придумувати аналогічні задачі, переносити на них засвоєний спосіб розв'язування.

Саме так, за спостереженнями В. А. Крутецького, підходять до розв'язування задач здібні до математики школярі. Після першого знайомства з розв'язанням задачі вони вільно розв'язували всі інші задачі, виділяючи в них загальний тип, на основі попереднього аналізу структур задачі швидко знаходили їх типову схожість. Розв'язуючи першу конкретну задачу даного виду, вони з'ясовували сутність способу розв'язування всіх задач даного виду, їх структурні особливості.

Формування умінь розв'язувати задачі певних видів на засадах теорії змістовних узагальнень В. В. Давидова можливо здійснити, як вказує В. Н. Осинська, по-різному. Вчитель може сам розповісти все необхідне про особливості задач даного виду, про спосіб їх розв'язування, про принципи варіації несуттєвого в умовах задач і при їх розв'язуванні (на нашу думку, такий підхід відповідає II типу навчання за П. Я. Гальперіним). Такий підхід доречний за дефіциту часу, при значній складності матеріалу, в слабкому класі на початковій стадії навчання школярів вміння узагальнювати або тоді, коли вчитель знайомить школярів з основними видами задач розділу, теоретичний матеріал якого вивчається, і з особливостями їх розв'язування. Показ зразка розв'язання задачі в традиційному його розумінні не тотожний названому підходу. Можна підвести школярів до «самостійного» узагальнення, в цьому випадку діяльність учнів на уроці організується відповідно до такої методичної схеми: розв'язування опорної задачі — з'ясування її типових особливостей — виділення головного — узагальнення способу розв'язування таких задач — визначення суттєвого в процесі розв'язування, тобто таких дій, без яких задачу не можна розв'язати, — складання алгоритму (схеми) розв'язування задач даного типу або з'ясування загального підходу до їх розв'язування (відповідає III типу навчання за П. Я. Гальперіним).

В. Н. Осинська зазначає, що треба завжди попереджати учнів про те, що вони починають вчитися розв'язувати задачі нового типу, мотивувати їх діяльність, ставити мету — з'ясувати сутність способу розв'язування на прикладі розв'язування опорної задачі. В процесі навчання школярі привчаються до визначеної послідовності в своїх діях при розв'язуванні типової задачі: розв'язати задачу; проаналізувати головне, суттєве в її умові і розв'язуванні; скласти схему розв'язування або назвати узагальнений орієнтир; відокремити несуттєве; зрозуміти принципи варіації умови задачі; вчитися застосовувати спосіб розв'язування до аналогічних задач; вміти складати аналогічні задачі даного типу, розпізнавати «типові» задачі [390].

Пропозиції В. Н. Осинської щодо аналізу головного, істотного в умові задачі і у її розв'язанні через поглиблений аналіз істотних і неістотних зв'язків і відношень близькі до методу системно-структурного аналізу З. О. Решетової.

Таким чином, навчання за III типом орієнтування (П. Я. Гальперін) на основі системно-структурного аналізу (З. О. Решетова) та навчання згідно з теорією змістовних узагальнень мають багато спільного: передбачають всебічний аналіз об'єкта, його дослідження шляхом змін неістотних властивостей і узагальнення істотних властивостей. Це нам надає можливість стверджувати, що **застосування навчання за III типом орієнтування на основі системно-структурного аналізу та теорії змістовних узагальнень підвищить ефективність формування окремих умінь розв'язування сюжетних задач, тому може бути психологічною основою процесу формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі певних видів.**

В. Н. Осинська пропонує методичну схему навчання школярів розв'язування «типових» математичних задач із застосуванням змістовних узагальнень: аналіз усіх задач даного розділу — виділення основних видів задач — виділення в кожному виді однієї-двох опорних, найбільш типових задач-моделей (навколо них групується решта задач, що відрізняються варіаціями неістотного) — розв'язування опорних задач — складання алгоритму (схеми) розв'язання — визначення загального підходу — з'ясування меж зміни неістотного в задачах виду — складання аналогічних задач (узагальнених, обернених тощо).

Ця методична схема пропонується для учнів основної школи і її, на нашу думку, не можна застосувати у такому вигляді для

навчання молодших школярів розв'язування сюжетних задач. Тому для учнів початкової школи ми перетворили її на наступну:

1) **отримання задачі нової математичної структури із задачі, спосіб розв'язування якої дітям вже відомий;**
2) **визначення ознак, за якими задача нової математичної структури відрізняється від задачі знайомої математичної структури — висунення гіпотези про вплив цієї зміни на спосіб розв'язування задачі нової математичної структури;**
3) **розв'язування задачі;**
4) **перевірка гіпотези про вплив зміни у формулюванні задачі на спосіб її розв'язування;**
5) **зміна ситуації задачі або зміна числових даних задачі (в деяких задачах зміна шуканого або зміна сталої величини) та дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі;**
6) **узагальнення способу розв'язування задач даної математичної структури;**
7) **розв'язання задач даного виду на основі застосування узагальненого способу розв'язування;**
8) **складання і розв'язання обернених задач або перетворення у задачі спорідненого виду;**
9) **дослідження впливу зміни на план розв'язування задачі;**
10) **узагальнення математичної структури та плану (способу) розв'язування задач даної групи;**
11) **співставлення задач схожих математичних структур з метою визначення спільного і відмінного;**
12) **узагальнення плану розв'язування задач даного класу, формулювання правила-орієнтира.**

Зрозуміло, що запропонована методична схема навчання молодших школярів розв'язування сюжетних задач на основі змістовних узагальнень може бути застосована лише при роботі над «типовими» задачами, тобто при формуванні в них умінь розв'язувати задачі певних видів, тому що уміння розв'язувати задачі певного виду полягає у «впізнаванні» її математичної структури і актуалізації відомого способу розв'язування.

Формування загальних умінь розв'язувати задачі містить багато умінь нижчого порядку (див. 2.1.1), що адекватні діям, які реалізують кожний з чотирьох етапів розв'язування задачі. Виходячи з вимог до процесу формування розумових дій, які забезпечують високу ефективність навчання навичкам і вмінням Л. М.

Фрідмана, кожну з цих дій слід спеціально опрацювати, і це можливо на основі теорії поетапного формування розумових дій і понять П. Я. Гальперіна. Отже, **психологічною основою процесу формування загального уміння розв'язувати задачі може бути поетапне формування кожної з розумових дій, що складають це уміння.**

2.4. ОПЕРАЦІЙНИЙ СКЛАД ЗАГАЛЬНОГО УМІННЯ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ ТА УМІННЯ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ ПЕВНИХ ВИДІВ

2.4.1 Аналіз існуючих трактувань операційного складу загального та окремого уміння розв'язувати задачі

У попередньому параграфі нами було розглянуто процес формування умінь розв'язувати задачі з точки зору діяльнісного підходу, а саме двох діяльнісних теорій навчання — теорії поетапного формування розумових дій і понять П. Я. Гальперіна та теорії навчальної діяльності, складовою частиною якої є теорія змістовних узагальнень В. В. Давидова. В основі діяльнісного підходу лежить формування дій (операцій), що складають ту чи іншу діяльність, в даному разі — діяльність з розв'язування задач. Хоча у параграфі 2.1 ми запропонували означення поняття «уміння розв'язувати задачі», як складного уміння, що являє собою комплекс умінь нижчого порядку, але визначили, що уміння розв'язувати задачі поділяють на загальні та уміння розв'язувати задачі певних видів (окремі). Зрозуміло, що склад цих двох видів умінь буде дещо відмінний від поданого нами трактування поняття «уміння розв'язувати задачі». Тому перед нами постає питання про визначення змісту поняття «загальне уміння розв'язувати задачі» та «окреме уміння розв'язувати задачі певних видів».

Виходячи із аналізу процесу розв'язування задач, С. Є. Царьова зазначає, що ***загальне уміння розв'язувати задачі*** включає:

— знання про задачі, структуру задач, процес розв'язування та етапи розв'язування, методи, способи та прийоми розв'язування;

— уміння виконувати кожний із етапів розв'язування будь-яким методом та способом, застосовуючи будь-який із прийомів, що допомагає розв'язанню [572].

Аналогічного підходу у визначенні змісту загального уміння розв'язувати задачі дотримуються й В. І. Кузнєцов [269].

Пропозиції С. Є. Царьової та В. І. Кузнєцова не надають можливість конкретизувати операційний склад загального уміння розв'язувати задачі. Так, С. Є. Царьова вказує як одну з його складових — уміння виконувати кожний з етапів розв'язування задачі, а В. І. Кузнєцов просто перелічує ці етапи (з деякою конкретизацією), показуючи можливі переходи від одного етапу до іншого.

Більш вдало трактує поняття «загальне уміння розв'язувати задачі» Л. А. Сафонова. Авторка досліджувала навчання учнів 1—8 класів розв'язування сюжетних задач в умовах наступності вивчення математики. Вона вважає загальними уміннями ті, що є спільними для усіх методів розв'язування сюжетних задач: арифметичного, алгебраїчного, геометричного тощо; ті уміння, які необхідні дитині при розв'язуванні задачі будь-яким методом. У дисертаційному дослідженні з метою виділення загальних умінь розв'язувати задачі Л. А. Сафоновою здійснено спробу аналізу діяльності учнів з розв'язування задач трьома основними методами: арифметичним, алгебраїчним і геометричним. Виділені загальні уміння розв'язувати сюжетні задачі автором розбито на групи залежно від етапу розв'язування задачі, на якому вони виконуються.

На етапі аналізу тексту задачі:

— виділяти об'єкти, про які йдеться в задачі;

— виділяти умову і запитання (вимогу) задачі;

— виділяти відомі (дані), невідомі і шукані величини;

— виділяти ситуації, які містяться в задачі;

— виділяти з умови задачі речення, які виражають залежність між величинами, і перетворювати їх.

На етапі пошуку плану розв'язування задачі:

— записувати функціональну залежність між величинами;

— виділяти з даної задачі підзадачі.

На етапі реалізації плану розв'язування задачі:

— перекладати залежності між величинами математичною мовою;

— записувати розв'язання різними способами.

На етапі дослідження задачі:

— інтерпретувати результат розв'язання мовою даної задачі;

— виконувати перевірку розв'язання;

— вибирати оптимальний спосіб розв'язування.

Усі ці уміння є адекватними арифметичним способам розв'язування сюжетної задачі. Тому до складу загальних умінь дослідниця відносить уміння розв'язування сюжетних задач арифметичними способами [462].

Таким чином, на відміну від попередніх авторів, Л. А. Сафонова при визначенні змісту загального уміння розв'язувати задачі не лише вказує на уміння, що реалізують етапи розв'язування задачі, а й конкретизує їх склад стосовно кожного з цих етапів. Дослідниця не говорить про операційний склад загального уміння розв'язувати задачі, а виділяє групи умінь, які вона вважає обов'язковими. Але, на нашу думку, визначені Л. А. Сафоновою уміння виступають як загальне уміння розв'язувати задачі лише у комплексі. Тому ми ставимо питання про операційний склад загального уміння розв'язувати задачі як про комплекс умінь нижчого порядку, які реалізують кожний з етапів розв'язування задачі.

Підтвердження правильності нашого підходу ми знаходимо у роботі В. В. Силкова та А. П. Рибалко. Уміння розв'язувати задачу ці автори розчленовують на часткові уміння (поступове формування яких приводить до сформованості загального уміння розв'язувати задачу):

1) встановити повноту (достатність), недостатність, надлишок даних задачі;
2) розпізнавати і співвідносити дані елементи задачі із шуканими;
3) подавати елементи задачі в нових відношеннях;
4) виявляти структуру задачі;
5) використовувати схеми, таблиці, креслення та інші допоміжні засоби;
6) перекладати задачну ситуацію мовою математичних відношень та залежностей і, навпаки, перекладати символічне або графічне тлумачення задачі звичайною мовою;
7) виділяти із розв'язування задачі корисні нові знання;
8) розчленовувати дану задачу на підзадачі;
9) аналізувати розв'язання задачі [471].

На жаль, авторами ці часткові уміння не співвіднесені з етапами розв'язування задачі, тому ми це зробимо за них (див. табл. 2.1).

Ближче, ніж попередні автори, до вирішення питання про операційний склад загального уміння розв'язувати задачі підійшла В. А. Мізюк. Дослідниця, вивчаючи питання про загальне вміння розв'язувати сюжетну задачу, доходить висновку про те,

що це уміння становить складний комплекс, який включає активне оперування математичними знаннями і відповідними вміннями й навичками, досвід у застосуванні знань і певну сукупність розумових дій, необхідних для розв'язування. У дисертаційному дослідженні цією авторкою виконано аналіз діяльності учнів початкових класів під час розв'язування сюжетних задач, який дозволив виявити структуру даного вміння (рис. 2.4).

Рис. 2.4. Структура вмінь розв'язувати сюжетні задачі за В. А. Мізюк

Співставлення підходів Л. А. Сафонової, В. В. Силкова та А. П. Рибалко, В. А. Мізюк подано у таблиці 2.1. З таблиці видно, що вчені виділяють в загальному умінні розв'язувати сюжетні задачі майже одні й ті самі складові. Але на етапі ознайомлення з задачею, аналізу тексту задачі Л. А. Сафонова, на відміну від решти авторів, відокремлює таке уміння, як виділення об'єктів задачі. В. В. Силков та А. П. Рибалко при аналізі тексту задачі не виділяють ситуацію, яка описана в задачі, а Л. А. Сафонова не визначає уміння моделювання задачної ситуації.

Таблиця 2.1

Операційний склад загального уміння розв'язувати задачі у трактуванні дослідників

Етапи розв'язування задачі	Трактування Л. А. Сафонової	Трактування В. В. Силкова, А. П. Рибалко	Трактування В. А. Мізюк
1. Ознайомлення з задачею. Аналіз тексту задачі.	— виділяти об'єкти, про які йдеться в задачі; — виділяти умову і запитання (вимогу) задачі; — виділяти відомі (дані), невідомі і шукані величини; — виділяти ситуації, які містяться в задачі; — виділяти з умови задачі речення, які виражають залежність між величинами, і перетворювати їх.	— встановити повноту (достатність), недостатність, надлишок даних задачі; — розпізнавати і співвідносити дані елементи задачі із шуканими; — подавати елементи задачі в нових відношеннях; — виявляти структуру задачі; — використовувати схеми, таблиці, креслення та інші допоміжні засоби;	— проводити первинний аналіз тексту (уявляти задачну ситуацію, виділяти умову й вимогу, опорні слова); — виділяти відомі й невідомі, шукану величини; — встановлювати зв'язки між даними і шуканими; — конструювати моделі задачної ситуації (предметні, схематичні, графічні); — ототожнювати елементи задачі з елементами моделі; — встановлювати повноту даних задачі (достатність, недостатність, надмірність);

Етапи розв'язування задачі	Трактування Л. А. Сафонової	Трактування В. В. Силкова, А. П. Рибалко	Трактування В. А. Мізюк
2. Пошук розв'язування задачі.	— записувати функціональну залежність між величинами і виражати величини з формул; — виділяти з даної задачі підзадачі.	— розчленовувати дану задачу на підзадачі;	— розкладати складену задачу на прості; — переводити залежність між даними і шуканими величинами з мови словесної на математичну; — вибирати раціональні способи розв'язування; — проводити міркування аналітичним і синтетичним способами; — активізувати необхідні для розв'язування теоретичні знання;
3. Реалізація плану розв'язування задачі. Запис розв'язання задачі.	— перекладати залежності між величинами математичною мовою; — записувати розв'язання різними способами.	— перекладати задачну ситуацію мовою математичних відношень та залежностей і, навпаки, перекладати символічне або графічне тлумачення задачі звичайною мовою;	— встановлювати адекватність побудованої математичної моделі вихідній задачі; — раціонально вибирати математичні зв'язки між величинами; — встановлювати розмірність проміжних і кінцевих результатів; — оформляти розв'язання;

Етапи розв'язування задачі	Трактування Л. А. Сафонової	Трактування В. В. Силкова, А. П. Рибалко	Трактування В. А. Мізюк
4. Робота над задачею після її розв'язання.	— інтерпретувати результат розв'язання мовою даної задачі; — виконувати перевірку розв'язання; — вибирати оптимальний спосіб розв'язування.	— виділяти із розв'язування задачі корисні нові знання; — аналізувати розв'язання задачі.	— з'ясовувати відповідність отриманих результатів вихідній задачі; — виконувати перевірку розв'язання різними способами; — знаходити інші способи розв'язування задачі; — оцінювати одержані при розв'язанні результати; — узагальнювати результати розв'язання.

Л. А. Сафонова, В. В. Силков та А. П. Рибалко на етапі пошуку розв'язування задачі виділяють лише уміння розчленовувати дану задачу на підзадачі. Л. А. Сафонова та В. А. Мізюк відокремлюють уміння перекладати (записувати) функціональну залежність між даними і шуканими з словесної на математичну мову. Між тим, В. А. Мізюк детальніше, ніж Л. А. Сафонова та В. В. Силков і А. П. Рибалко, описує уміння, які застосовуються при пошуку розв'язування задачі. Тут треба зазначити, що уміння виконувати аналітичні або синтетичні міркування, розкладання складеної задачі на прості відповідають лише арифметичному способу розв'язування задачі, і тому не є загальними з точки зору означення Л. А. Сафонової.

Переклад задачної ситуації мовою математичних залежностей і відношень Л. А. Сафоновою віднесено до третього етапу — реалізації плану розв'язування задачі. Тоді як це уміння В. А. Мізюк відносить до пошуку розв'язування задачі. Ми згодні з цим автором, і вважаємо, що саме при пошуку розв'язування задачі здійснюється цей переклад, який дозволяє сформулювати план розв'язування задачі.

Аналогічно, щодо уміння раціонально вибирати способи розв'язування задачі, — це уміння В. А. Мізюк відносить до другого етапу, а Л. А. Сафонова — до третього. Ми вважаємо, що уміння відшукувати різні способи розв'язування задачі взагалі відноситься до четвертого етапу — до роботи над задачею після її розв'язання. Тому, що пошук розв'язання задачі спрямовує учня на застосування певного способу, а після аналізу вже знайденого розв'язання або повторного аналізу тексту задачі можливо відшукування й інших способів, серед яких можна вибрати більш раціональний. Виходячи з цього, нам незрозуміло, чому уміння раціонально вибирати зв'язки між величинами віднесено В. А. Мізюк до третього етапу — здійснення плану розв'язування задачі.

На думку Л. А. Сафонової та В. А. Мізюк, на четвертому етапі задіюються уміння: виконувати перевірку розв'язання задачі, з'ясовувати відповідність отриманих результатів вихідній задачі, знаходити різні способи розв'язування (В. А. Мізюк), виділяти оптимальній спосіб (Л. А. Сафонова). В. В. Силков та А. П. Рибалко роблять наголос на виділення із розв'язання задачі нових корисних знань і аналіз розв'язання задачі, що можна співвіднести з умінням узагальнювати результати розв'язання, що виділено В. А. Мізюк.

Виходячи з вищесказаного, ми не можемо погодитися із жодним з існуючих трактувань операційного складу загального уміння розв'язувати задачі і спробуємо визначити його власно, але перед тим з'ясуємо операційний зміст умінь розв'язувати задачі певних видів.

На думку С. Є. Царьової, ***уміння розв'язувати задачі певних видів*** **складається** із:

— знань про види задач, способи розв'язування задач кожного виду;

— уміння «впізнавати» задачу даного виду, обирати відповідний їй спосіб розв'язування і реалізовувати його на конкретній задачі [573].

Надана С. Є. Царьовою характеристика умінь розв'язувати задачі певних видів відповідає загальним положенням проблемології. Уміння розв'язувати задачі деякого класу, на думку Г. О. Балла, природно трактувати як квазіалгоритм розв'язування задач цього класу або евристичний припис щодо їх розв'язування за умови, що такий квазіалгоритм чи припис є внутрішнім надбанням суб'єкта [48]. Для того, щоб, за Л. М. Фрідманом [559], в процесі аналізу задачі ми впізнали в ній задачу знайомого типу і план розв'язування виник у вигляді думки про можливість застосування відомого нам способу розв'язування, й потрібні знання про види задач і способи їх розв'язування та уміння «впізнавати» задачу даного виду та обирати відповідний їй спосіб та реалізовувати його.

Розглянувши сутність понять «загальне уміння розв'язувати сюжетні задачі» та «уміння розв'язувати сюжетні задачі певних видів», доходимо висновку, що вченими здійснені спроби визначення операційного складу загального уміння розв'язувати задачі, що не можна сказати про уміння розв'язувати задачі певних видів. В даному дослідженні ставиться мета формування у молодших школярів як загального уміння розв'язувати сюжетні задачі, так і окремих умінь розв'язувати задачі певних видів. Тому, щоб мати єдину основу для цієї роботи, визначимо операційний склад і загального уміння, і уміння розв'язувати задачі певних видів.

2.4.2. Зміст етапів розв'язування задачі та дії, за допомогою яких вони реалізуються

Діяльність учнів із розв'язування задач являє собою реалізацію основних етапів розв'язування (макроструктура діяльності по розв'язуванню задач) через виконання певних дій (мікроструктура). З метою визначення операційного складу загального уміння розв'язувати задачі і уміння розв'язувати задачі певних видів розглянемо зміст кожного з етапів розв'язування і дії, які необхідно виконати учням для розв'язування задачі.

I. Ознайомлення з задачею. Аналіз тексту задачі.

Ознайомитися — це означає: прочитавши формулювання задачі, уявити собі життєву ситуацію, яка відображена в ній. При ознайомленні читаємо текст задачі двічі: перший раз — для ознайомлення з її змістом в цілому, а потім — для відокремлення кожної змістовної одиниці тексту в окрему частину (читаємо по частинах). Поділ задачі на частини передбачає відокремлення числових даних і шуканого, визначення їх змісту [52; 80; 322; 347; 363]. Так відбувається первинний аналіз задачі (термін М. І. Моро, О. М. Пишкало) [363].

Таким чином, методисти підкреслюють вагомість аналізу тексту задачі. *Проаналізувати текст задачі* — це означає виділити

умову і запитання; визначити величини, що входять до задачі: дані та шукані, встановити зв'язки між ними.

Л. С. Іванова доводить, що розкриття математичного змісту сюжетної задачі є найскладнішим в роботі над нею. Пояснюється це тим, що «носієм» арифметичної дії, яку слід виконати над числовими даними, щоб відповісти на запитання задачі, можуть бути різноманітні висловлювання. Тому є необхідним ґрунтовний аналіз тексту задачі [221].

Аналогічної думки дотримується В. В. Слугін. Він вважає, що справжнє розв'язання сюжетних задач може бути здійснене через змістовий аналіз задачі, який виявляє справжню математичну структуру задачі, тип математичних відношень величин, що міститься в ній. Змістовий аналіз розкриває в умові задачі тип математичних відношень величин у їх взаємозв'язку [508].

Все вищесказане узагальнюють пропозиції Л. М. Фрідмана, який розглядає аналіз задачі за двома способами:

а) предметно-змістовий аналіз — це декодування умови задачі в цілому, відновлення тієї реальної задачної ситуації, моделлю якої є дана задача. Такий аналіз звичайно виконується усно, і задачна ситуація, що створюється на основі цього аналізу, утворює у дитини мислений образ сюжету задачі;

б) логіко-семантичний аналіз — спрямований на виявлення особливостей словесного задання окремих величин, як відомих, так і невідомих, в тому числі шуканих, а головне — на виявлення словесних ознак окремих видів співвідношень. Це аналіз тексту задачі для встановлення величин, їх значень і співвідношень між ними, що задані в тексті задачі, розбиття тим самим тексту задачі на окремі елементарні умови (елементарною умовою задачі є судження, що міститься в тексті задачі, яке не можна розчленувати на більш дрібні судження) і вимоги. Таким чином виявляється структура задачі.

В результаті логіко-семантичного аналізу тексту задачі встановлюється:

1) які величини характеризують кількісний бік тих явищ, процесів і подій, які складають сюжет задачі;
2) скільки і які значення кожної величини задані явно або неявно в тексті задачі;
3) характер кожного значення величини: відоме або невідоме це значення, а якщо невідоме, то яке — шукане, проміжне (допоміжне) чи невизначене;
4) якими співвідношеннями пов'язані між собою ці значення величин;

5) яке значення є головним в кожному співвідношенні, які слова-ознаки, що входять у задання значення величини, вказують на характер цього значення;
6) який характер кожного з цих співвідношень (розв'язне, нерозв'язне);
7) як пов'язані між собою ці співвідношення [561].

Порівнявши другий спосіб аналізу за Л. М. Фрідманом та підхід до аналізу задачі В. В. Слугіна, бачимо, що ці автори розглядають один і той самий процес аналізу тексту задачі, але Л. М. Фрідман користується терміном «логіко-семантичний аналіз», а В. В. Слугін — терміном «змістовий аналіз»; метою кожного з них є визначення виду математичного співвідношення, яке міститься в задачі.

Слід зазначити, що існує інше трактування семантичного аналізу тексту задачі. Так, А. В. Белошиста під семантичним аналізом тексту задачі розуміє процес читання задачі з наступним виділенням основних понять, які пов'язані із специфічними назвами частин цього тексту: умова, запитання, відомі дані, невідомі шукані елементи задачі (первинний аналіз задачі за М. І. Моро та А. М. Пишкало). Передбачається, що в результаті здійснення семантичного аналізу дитина усвідомлює і уявляє ситуацію, що задана в тексті задачі, і зможе встановити зв'язки між даними та шуканим. Автор зазначає, що особливе значення такому семантичному аналізу тексту задачі надається в технологіях навчання математики, які базуються на системі Л. В. Занкова [62]. Отже, семантичний аналіз задачі за А. В. Бєлошистою не передбачає визначення математичних співвідношень, що задані у формулюванні задачі, на що вказує Л. М. Фрідман; це щось середнє між предметно-змістовим та логіко-семантичним аналізом, користуючись термінологією Л. М. Фрідмана.

Незважаючи на розбіжності у змісті понять, що позначаються одним і тим самим терміном, аналіз задачі повинен бути засвоєний учнями як самостійна дія, і лише після цього вони зможуть його виконувати в процесі розв'язування задач. Таким чином, учням слід пропонувати текст задач з метою здійснення їх аналізу, без подальшого розв'язання.

Підтвердження положення про необхідність проведення ґрунтовного аналізу тексту задачі ми знаходимо у працях Н. О. Менчинської. Н. О. Менчинська, як і багато інших вчених, шукала в словесному формулюванні сюжетних задач слова-ознаки арифметичної дії, за допомогою якої ця задача може бути розв'язана [343]. На відміну від цього Л. М. Фрідман звернув увагу на наявність у формулюванні слів-ознак співвідношень між значеннями величини. Знаючи вид співвідношення і знаючи, яким членом цього співвідношення є шукане, можна однозначно встановити арифметичну дію, за допомогою якої це шукане можна знайти. Саме для цього головним повинен бути другий спосіб семантичного аналізу сюжетних задач. Л. М. Фрідман наводить загальні правила проведення такого аналізу [559].

Такий аналіз можливий лише за наявності засобів фіксації — моделі задачі у формі таблиці, графіка або креслення. Так, Н. Б. Істоміна, Л. Г. Петерсон, Л. М. Фрідман та багато інших методистів після семантичного аналізу тексту задачі радять здійснювати поступовий переклад словесної моделі в графічну (схематичну), а потім у символічну (математичну) [210; 555].

Треба відмітити деяку розбіжність у поглядах Н. Б. Істоміної та А. В. Бєлошистої на семантичний аналіз як засіб цього перекладу. Н. Б. Істоміна розглядає процес розв'язування задач (простих і складених), як перехід від словесної моделі до моделі математичної або схематичної. В основі здійснення цього переходу лежить семантичний аналіз тексту і виділення в ньому математичних понять і співвідношень [210]. На що А. В. Бєлошиста заперечує і зазначає, що семантичний аналіз не є таким засобом — засобом такого переходу є процес виявлення відношень між даними і шуканим. Здійснюється цей процес через аналіз схематичної моделі задачі. Інакше, результатом цього аналізу є усвідомлення відношень між даними і шуканим [65]. Розбіжності у думках двох провідних методистів ми бачимо у різному розумінні змісту семантичного аналізу задачі. Якщо розуміти семантичний аналіз задачі у трактуванні А. В. Бєлошистої, то дійсно він не дає змогу перейти до складання математичної моделі задачі. А якщо розглядати два способи семантичного аналізу за Л. М. Фрідманом, як виділення математичних співвідношень, якими пов'язані дані і шукані задачі, то такий аналіз «найближче підводить» до її складання. Між тим, Л. М. Фрідман вважає, що результати семантичного аналізу обов'язково повинні бути подані в допоміжній моделі задачі. Допоміжні моделі служать формою фіксації результатів аналізу сюжетної задачі (Л. М. Фрідман) і є основним засобом її пошуку.

Отже, результати аналізу тексту задачі повинні бути втілені у репрезентативній моделі задачі. Л. М. Фрідман зазначає, що складання репрезентативної моделі сюжетної задачі має кілька цілей. Зокрема, така модель може слугувати:

а) для фіксації результатів аналізу задачі і тим самим для організації власне цього аналізу, тому складання моделі виконується в процесі аналізу та в міру його виконання;

б) для погляду на задачу з різних точок зору. Побудова моделі задачі дозволяє здійснити те основне, що спрямовує, підштовхує процес розв'язування, процес переформулювання задачі;

в) побудова моделі задачі є підготовчим етапом для складання математичної моделі задачі [561].

Репрезентативна модель задачі може бути: схематичною, табличною, структурною, графічною тощо. Такі моделі у проблемології називаються допоміжними. Допоміжні моделі служать формою фіксації аналізу сюжетної задачі і є основним засобом її пошуку.

Аналогічної думки дотримується М. І. Бурда. Він пов'язує труднощі, яких зазнають учні початкових класів під час розв'язування задач, зі встановленням залежностей між даними і шуканими величинами, які потрібні для знаходження способу розв'язування задачі. Автор зазначає, що під час сприймання та розв'язування учнями задач виникає розрив між конкретною ситуацією, описаною в умові задачі, і абстрактною логіко-математичною структурою її розв'язання. Щоб усунути цей розрив, доцільно конкретизувати математичну структуру задачі за допомогою її моделювання [97]. На застосування моделей під час аналізу умови задачі, як на фактор підвищення пізнавальної активності учнів, вказують Т. Й. Мельничук та Т. М. Хмара [337].

М. І. Бурда та Л. М. Фрідман розглядають предметні, наочно-схематичні й табличні моделі задачі (репрезентативні). Предметна модель сюжетної задачі — це будь-яке наочне відновлення тієї реальної ситуації, що описана в задачі. Такі моделі можуть складатися з речей, а можуть бути поданими у вигляді малюнків, різного роду інсценуванням сюжету задачі. До цього виду моделей М. І. Бурда відносить і мислене відновлення реальної ситуації, що описана в задачі, у вигляді уявлень. При цьому він підкреслює, що розумове моделювання є головним і найбільш важливим видом такого моделювання; решта видів використовуються, головним чином, для розвитку в учнів здатності до мисленого відтворення сюжету задачі.

Наочно-схематичні моделі використовуються для узагальненого, схематичного відновлення ситуації задачі. Моделі цього виду зберігають наочність, що притаманна предметним моделям, але відновлюють реальну ситуацію, що описана в задачі, за допомогою відрізків, геометричних фігур тощо. До наочно-схематичних

моделей належать різного роду схематичні записи умови задачі або короткі записи у формі таблиці. Таблична форма короткого запису застосовується тоді, коли в задачі є кілька взаємопов'язаних величин, кожна з яких задана одним або кількома значеннями [97; 555].

Вибір виду моделі залежить від характеру задачі і особливостей учня, що її розв'язує, його навичок і вмінь, звичного для нього способу аналізу і побудови моделі задачі. Побудова моделі задачі може бути самостійною вправою для формування в учнів навичок і умінь у складанні різного роду моделей (Л. М. Фрідман). Треба зазначити, що, за даними А. В. Бєлошистої, уміння перекладати текстову модель в предметну або схематичну є вирішальним для процесу самостійної роботи над задачею. Це уміння є центральним і в роботі над простою і над складеною задачею, але вчити такого моделювання слід на матеріалі простих задач [65]. Вагомість цього положення підтверджується результатами дослідження О. В. Баринової (дивись 1.3.2).

Звичайно наочно-схематичні моделі методисти називають коротким записом задачі. Короткий запис — це результат аналізу тексту задачі, наочна модель задачі. Вдало складений короткий запис допомагає учням виявити шляхи пошуку способу розв'язування задачі. Серед наочних моделей задачі методисти Н. Б. Істоміна, І. Б. Нефьодова, В. В. Малихіна, П. У. Байрамукова, Н. А. Матвєєва виділяють схематичні малюнки задач [220 236; 327].

У підручнику математики Н. Б. Істоміної, І. Б. Нефьодової та І. А. Кочеткової спеціально формується у дітей уміння складати схематичні малюнки до простих задач. Аналогічні схеми пропонують застосовувати при розв'язуванні складених задач В. В. Малихіна, П. У. Байрамукова, Н. А. Матвєєва, А. К. Артьомов та інші. Ці автори наголошують на корисності схематичного малюнку при відшукуванні різних способів розв'язування задач [37; 318; 328].

Обґрунтування необхідності застосування схематичних моделей підтверджується даними психології. Так, С. Д. Максименко та В. П. Максименко, вивчаючи психологію сприймання та розуміння схематичного запису задачі, дійшли висновку, що сприймання графічних схем і короткого запису задачі дає змогу з'ясувати деякі особливості переходу мислення з абстрактного плану в конкретний у тих учнів, які схильні розв'язувати задачу на основі тексту умови, і з наочно-конкретного у абстрактний, у словесно-логічний план у тих, які схильні до використання схеми. Адже графічна схема для учня, з одного боку, є конкретизацією в наочній формі функціональних залежностей між величинами, а з другого — способом абстрагування від сюжетних деталей тексту [314].

Треба зупинитися ще на одному виді моделей — структурних (графи, схеми), які виділяють Л. М. Фрідман та М. І. Бурда. Вони використовуються для наочного зображення залежностей і зв'язків між даними і шуканими величинами, тобто для наочного зображення математичної структури розв'язання задачі [97; 555].

Структурні моделі були вперше розроблені Л. М. Фрідманом ще в 50-ті роки. Ці моделі відновлюють у наочній формі усі співвідношення і вузлові зв'язки між ними. Корисність їх застосування для розв'язання сюжетних задач була доведена в експериментах Є. М. Семенова [468], Є. Н. Турецького [542], К. У. Асимова [38].

У структурних моделях самі співвідношення зображуються у вигляді замкнених геометричних фігур, які об'єднують умовні позначення членів, що входять до складу цього співвідношення; відомі значення величин позначають квадратиками, а невідомі — кружечками. Головний член співвідношення, який є результатом дії, відділяється від решти членів стрілкою, а ці останні — поєднуються знаком арифметичної дії: у співвідношеннях частин і цілого — додавання, у співвідношенні різницевого порівняння — віднімання; кратного порівняння — ділення, у співвідношенні-залежності між значеннями різних величин — множення [559; 561]. Приклади структурних моделей простих та складених задач, що наведені Л. М. Фрідманом, дивиться у додатку Д.

Складання структурної схеми задачі можна віднести не лише до першого етапу в роботі над задачею — до аналізу тексту задачі, а й до другого етапу — пошуку розв'язування задачі, тому що на структурній схемі наочно бачимо розв'язуючу модель задачі.

II. Пошук розв'язування задачі

Л. М. Фрідман розглядає пошук способу розв'язування задачі, як вибір методу та способу: чи то арифметичного (безпосереднє розв'язання простих задач, ланцюжний спосіб, складання числової формули, загальні та спеціальні методи й тощо), чи алгебраїчного.

Пошук розв'язування задачі арифметичним способом може бути здійснений від запитання задачі до числових даних — аналітично, або від числових даних задачі до її запитання — синтетично (див. рис. 2.5).

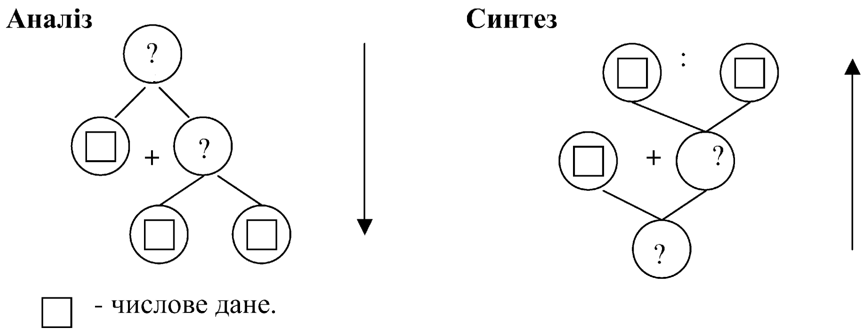


Рис. 2.5. Схематичне зображення міркувань при пошуку розв'язування задачі

У практиці навчання застосовуються обидва шляхи, але переваги належать синтетичному методу, оскільки аналітичний спосіб у чистому вигляді, зазначає Л. М. Фрідман, більш важкий для учнів [560; 561]. М. В. Богданович також вважає, що синтетичний спосіб для дітей легший, але застосування його може створювати додаткові проблеми. Аналітичний спосіб більш цілеспрямований щодо складання плану розв'язування задачі, тут треба мати на увазі не одну якусь дію, а хід міркування в цілому. Однак для задач на три й більше дій він громіздкий [80;84]. Р. Н. Шикова погоджується з М. В. Богдановичем і вважає, що при аналізі учні отримують уявлення про розв'язання задачі в цілому, а не про окремі дії, що вибрані, а синтез сприяє опрацюванню вміння передбачати, про що можна дізнатися за двома певними числовими даними, та спрямуванню думки дітей у потрібному напрямку [596].

Але М. О. Бантова, Л. М. Скаткін та інші методисти відзначають, що аналітичний розбір забезпечує більш свідоме розв'язування задачі, тому що виконанню розв'язання — запису арифметичних дій тут передує поділ складеної задачі на прості і з'ясування їх порядку, що визначає план розв'язування задачі. В той час як при синтетичному розборі учень може розв'язувати окремі прості задачі, не розуміючи значення власних дій для відповіді на головне запитання задачі [51; 52; 473].

На думку багатьох методистів, при пошуку розв'язування складених задач слід застосовувати переважно аналіз, ніж синтез. Це пояснюється тим, що при аналізі попереджується випадковість вибору числових даних — відповісти на запитання задачі можна за двома певними значеннями величин, а не двома будь-якими значеннями величин. Намагаючись міркувати синтетичним шляхом, учень може помилково «взяти» два випадкових значення величини (або величин), які не мають між собою зв'язку, й таким чином зайти у безвихідь [52; 465; 503].

Нагадаємо, що розглядаючи психологічні основи діяльності учнів з розв'язування задач (див. 1.3.3), нами було встановлено, що для молодшого шкільного віку характерний низький рівень виконання аналізу і синтезу і нерівномірний їх розвиток, який полягає у відставанні синтезу. Крім того, психологи зазначають, що дитині легше виконати аналіз, виділивши частини об'єкту, ніж поєднати їх у одне ціле і визначити співвідношення між ними.

Пошук простих задач, визначення їх послідовності становлять головну складність аналізу. Але аналіз має велике освітнє значення: він привчає учня до строгої послідовності мислення, а тому у початковій школі слід використовувати можливість застосування його при розв'язуванні сюжетних задач. Тим часом, Л. Ф. Чекмарьов наполягає на тому, що аналітичний розбір задачі складніший для дітей, в початковій школі треба дотримуватись почуття міри у його застосуванні. Він вважає: щоб навчити учнів аналізувати задачу, спочатку треба аналізувати задачі, які були розв'язані до цього звичайним синтетичним способом [582].

С. Є. Царьова розглядає пошук розв'язування задачі не лише як міркування «від запитання задачі до числових даних» або «від числових даних до запитання», а й виділяє ще кілька способів пошуку розв'язування задачі: пошук за предметною або графічною моделлю, пошук за допомогою відокремлення словесного задання математичних відношень і перекладу їх на мову виразів [577].

Для складених задач пошук розв'язування задачі завершується складанням плану розв'язування, в якому обговорюється, про що ми дізнаємося першою дією, другою дією, і так далі...

Пошук розв'язування задачі алгебраїчним методом передбачає кроки із складання рівняння:

— позначення шуканої або проміжної величини (величин) через змінну (змінні);
— алгебраїчне вираження шуканої величини через змінну (змінні);

— запис однієї й тієї самої величини різними способами;
— оформлення у вигляді рівності (рівностей) залежності (залежностей) між величинами або різні способи запису однієї й тієї самої величини.

Л. М. Фрідман визначає наступним етапом побудову розв'язуючої математичної моделі задачі. Розв'язуючою моделлю задачі є така модель, застосовуючи до якої апарат математики, можна знайти розв'язання задачі. Тому розв'язуюча модель по суті є математичною моделлю.

Обравши той або інший метод чи спосіб розв'язування сюжетної задачі, слід скласти для неї відповідну розв'язуючу математичну модель. Це означає, що якщо обрано арифметичний спосіб розв'язування, то модель будується у вигляді обчислювальної формули або просто послідовності арифметичних дій (план розв'язання); якщо ж обрано алгебраїчний метод розв'язування, то розв'язуюча модель будується у вигляді рівняння або системи рівнянь, нерівностей або змішаної системи [561].

Цікаву методику застосування схематичних моделей на етапі пошуку розв'язування задачі арифметичним методом пропонує М. І. Бурда. Автор при розв'язуванні складених задач виділяє три види схем: 1) схема розбору задачі (від шуканого до даних); 2) схема плану розв'язування; 3) структурна схема розв'язання. Застосування цих схем здійснюється при поступовому переході від схеми розбору до схеми плану розв'язування і від схеми плану розв'язування до структурної схеми та навпаки. Розбір задачі від шуканого до даних проводиться з одночасним кресленням схеми [97]. Наприклад для задачі: «Турист спочатку летів літаком 3 години з швидкістю 380 км за годину, потім — вертольотом 2 години з швидкістю 170 км за годину. На скільки кілометрів турист пролетів літаком більше, ніж вертольотом?», така схема може мати наступний вигляд (рис. 2.6).

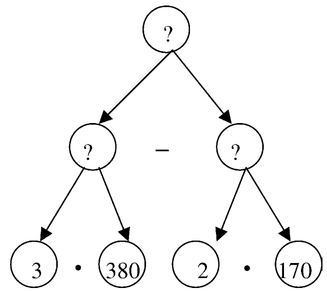


Рис. 2.6. Схема розбору задачі від шуканого до даних за М. І. Бурдою

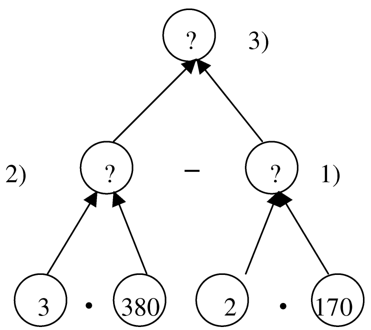


Рис. 2.7. Схема плану розв'язування задачі за М. І. Бурдою

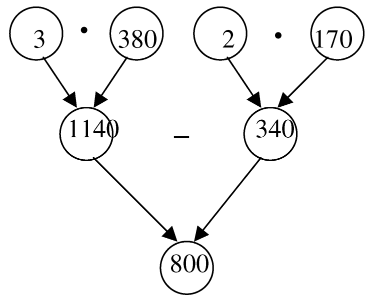


Рис. 2.8. Структурна схема розв'язування задачі за М. І. Бурдою

Після розбору задачі учні складають схему плану її розв'язування. З цією метою вони формулюють запитання задачі і розставляють біля відповідних кружків цифри, що визначають порядок виконання арифметичних дій, змінюють на протилежний напрям стрілок, які тепер моделюватимуть зв'язки між компонентами і результатами дій (рис. 2.7).

І нарешті, вставляючи у порожні кружечки результати відповідних дій (виключаючи, де це потрібно, дублювання одних й тих самих величин), учні наочно зображують дані, шукані, результати проміжних дій та зв'язки між ними, утворюючи тим самим структурну схему розв'язання задачі (рис. 2.8).

Далі автор пропонує учням за даною структурною схемою розв'язання провести розбір задачі (від шуканих до даних) та накреслити схему розбору задачі [97].

Треба зазначити, що на етапі пошуку розв'язування задачі особливу увагу мають дії, що належать до групи евристичних правил та схем, які спрямовують процес діяльності із розв'язування задач (ці правила та схеми розглянуті в параграфі 1.3.2).

III. Здійснення плану розв'язування задачі. Запис розв'язання і відповіді

Далі здійснюється власне розв'язання: знаходження результатів кожної з намічених арифметичних дій та встановлення змісту отриманого числа або знаходження значення числового (числових) виразу (виразів) — при арифметичному способі розв'язування задачі; розв'язання рівняння і відповідь на запитання задачі — при алгебраїчному методі. Таким чином, відбувається третій етап процесу роботи над задачею.

IV. Робота над задачею після її розв'язання

Робота над задачею після її розв'язання полягає у перевірці правильності розв'язку.

Перевірити розв'язання задачі — значить встановити, чи воно правильне, чи ні. Л. М. Фрідман розглядає перевірку розв'язання як встановлення факту, що отриманий розв'язок задовольняє умовам задачі. Перевірка потрібна лише при розв'язанні складених задач; при розв'язанні простих задач перевірка не виконується тому, що правильність або неправильність розв'язання очевидна.

Перевірка розв'язання задачі потрібна для того, щоб виключити неправильні або неповні відповіді задачі, по-перше, через можливі помилки в процесі розв'язування, а по-друге, через неточність математичних моделей.

Перевірка розв'язання сюжетних задач може бути прямою або непрямою, у свою чергу кожна з них може бути повною або неповною. Пряма повна перевірка розв'язання задачі полягає в тому, що ми впевнюємося у виконанні усіх умов задачі при знайденому (знайдених) значеннях шуканого; неповна перевірка полягає в тому, що перевіряються не усі умови, а лише деякі. Непряма перевірка проводиться за допомогою складання і розв'язування оберненої задачі [561].

1. Складання та розв'язання оберненої задачі. Обернена задача складається шляхом обміну ролями одного з шуканих з якимось із даних, тобто знайдене значення одного з шуканих приймають за дане, а одне з даних вважають шуканим. Якщо в результаті розв'язання оберненої задачі отримують значення, що збігається з обраним даним, то це свідчить, що задача розв'язана правильно.

Цікава методика використання стрілок при розв'язуванні прямих і обернених до них задач запропонована Т. Й. Мельничук та Т. М. Хмарою. Згідно з цим методом, розв'язування задачі недоцільно завершувати знаходженням відповіді на неї. Доцільно складати і розв'язувати одночасно з вихідною (прямою) задачею, обернену до неї. При цьому, зазначають автори, дістаємо нову інформацію про зв'язки між величинами вихідної задачі. Зв'язки, у яких перебувають пари застосовуваних операцій, використовуються для перевірки правильності розв'язання задачі. Їх достовірність ілюструється застосуванням двох протилежно спрямованих стрілок [337].

Наприклад: «Юннати на першій грядці посадили 40 кущів полуниці, на другій — на 6 кущів менше, ніж на першій, а на третій — на 10 кущів більше, ніж на другій. Скільки кущів полуниці посадили юннати на третій грядці?»

Розв'язання цієї задачі складається з двох дій, що можна подати на схемі (рис. 2.9):

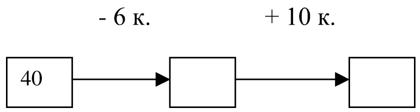


Рис. 2.9. Схема розв'язання прямої задачі за Т. Й. Мельничук та Т. М. Хмарою

Розв'язуючи задачу, обернену до даної, учні малюють схему, в якій стрілки мають протилежний напрям (рис. 2.10):

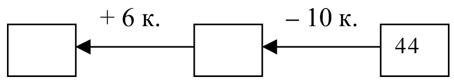


Рис. 2.10 Схема розв'язання оберненої задачі за Т. Й. Мельничук та Т. М. Хмарою

2. *Розв'язання задачі іншим способом.* Непряму перевірку можна здійснити, розв'язавши задачу іншим способом. Якщо задачу можна розв'язати іншим способом, то отримання однакових результатів підтверджує, що задача розв'язана правильно.

Проблему формування у молодших школярів уміння розв'язувати задачі різними способами вивчали провідні методисти Н. Б. Істоміна [219], Л. Ш. Левенберг [284], А. С. Пчьолко [435], С. Є. Царьова [575; 576], Р. Н. Шикова [595].

Цікавий підхід до відшукування різних арифметичних способів розв'язування задачі запропоновано А. К. Артьомовим. Цей підхід передбачає використання: переформулювання запитання задачі; добору допоміжного запитання; виявлення прихованих логічних основ задачі; наочного оформлення задачі [37].

В початкових класах застосовуються такі прямі способи перевірки правильності розв'язання:

3. Встановлення відповідності між числами, які отримані в результаті розв'язання задачі, і даними числами. При перевірці розв'язання задачі таким способом виконуються арифметичні дії над числом, яке було отримано у відповіді на запитання задачі: якщо при цьому отримаємо число, що дано в умові, тоді задача розв'язана правильно. Наприклад при розв'язуванні задачі: «Мама купила по однаковій ціні 3 кг яблук та 2 кг груш.

За всю покупку вона заплатила 15 гривень. Скільки окремо коштують яблука та окремо коштують груші?», — отримали, що яблука коштують 9 гривень, а груші — 6 гривень; додавши отримані числа (9 + 6 = 15 гривень), одержимо число, яке дано в умові задачі. Отже, задачу розв'язано правильно.

4. *Орієнтовна оцінка відповіді (встановлення відповідності шуканого числа області своїх значень)*. Цей спосіб полягає в тому, що до початку розв'язування задачі встановлюється область значень шуканого числа, тобто визначається, більшим або меншим якогось із даних чисел повинно бути шукане число. Після розв'язання задачі перевіряється, чи відповідає отриманий результат встановленій області значень (тоді задачу, можливо, розв'язано правильно), чи ні (тоді розв'язання неправильне). Цей засіб допомагає виявити помилковість розв'язання і має поєднуватися з іншими способами перевірки.

С. Є Царьова зазначає, що кожний із названих прийомів перевірки має ряд переваг та недоліків. Загальним недоліком усіх цих прийомів є спрямованість кожного на перевірку кінцевого результату, що в більшості випадків не дає змогу виявити помилку у розв'язанні, якщо вона допущена. Крім цього, при перевірці будь-яким із перелічених прийомів в розряд правильних може потрапити розв'язання з кількома помилками, що компенсують одна одну; коли розв'язання неправильне, а відповідь правильна. Але існує *прийом перевірки*, який не має таких недоліків, — це визначення змісту складених за задачею виразів. Методика роботи передбачає:

1. Читаю перший вираз.
2. Знаходжу в тексті задачі, що означає кожне число в ньому.
3. Визначаю, що означає вираз і результат його.
4. Читаю запитання задачі. Чи це показує вираз?
5. Якщо ні, то на запитання задачі ми ще не відповіли.
6. Складаємо другий вираз.

Працюємо над ним так само...

7. Висновок: всі дії мають смисл, остання дія (її результат) дає відповідь на запитання задачі. Правильно виконані всі обчислення, тому задача розв'язана вірно [576].

Пропозиції С. Є. Царьової співзвучні з підходом Л. М. Фрідмана, який останнім етапом в роботі над задачею визначає навчально-пізнавальний етап. На думку цього автора, розв'язання сюжетних задач виконується не для того, щоб учні знайшли відповідь на запитання цих задач, а для того, щоб у процесі їх розв'язування учні придбали певні знання, розвинули в себе певні уміння і здібності, опрацювали загальні корисні звички і навички. Тому заключне обговорення проведеного розв'язання, його аналіз і дослідження мають не менше (а може, й більше) значення, ніж власне розв'язання.

Виявлення недоліків проведеного розв'язання, пошуки кращого розв'язання, встановлення і закріплення в пам'яті учнів тих прийомів і способів, які були застосовані в даному розв'язанні, виявлення умов можливості застосування цих прийомів і способів — усе це й сприяє перетворенню розв'язування задачі у могутній навчальний та виховуючий засіб.

При обговоренні проведеного розв'язання корисно у деяких випадках встановити можливість узагальнення даної задачі, виявити її особливості, зіставити розв'язання даної задачі з раніш розв'язаними тощо [561].

Розглянуті етапи процесу розв'язування задачі: ознайомлення із змістом задачі, аналіз тексту задачі; пошук розв'язування задачі; запис розв'язання і відповіді; робота над задачею після її розв'язання, — надають можливість визначити зміст понять «загальне уміння розв'язувати задачі» та «уміння розв'язувати задачі певних видів (окремого)» на основі операційного змісту діяльності учнів із розв'язування сюжетних задач.

2.4.3. Визначення операційного складу загального уміння та окремого уміння розв'язувати задачі

На основі аналізу умінь, якими учень має володіти для реалізації кожного з етапів розв'язування задачі, та на основі наданого нами означення поняття «уміння розв'язувати задачі» ми пропонуємо його конкретизацію у вигляді трактувань понять «загальне уміння розв'язувати задачі» та «окреме — уміння розв'язувати задачі певних видів» на основі їх операційного змісту (таблиця 2.2). У нашому дослідженні під **загальним умінням розв'язувати сюжетні задачі будемо розуміти складне уміння, що застосовується при розв'язуванні сюжетної задачі різними (основними) методами та способами і складається з:**

1) **уміння здійснювати предметно-змістовий аналіз задачі;**
2) **уміння виконувати логіко-семантичний аналіз задачі;**
3) **уміння складати репрезентативну модель задачі (короткий запис задачі у вигляді схеми або таблиці; або малюнок, схематичний малюнок, креслення, діаграму, графік й тощо);**

4) **уміння робити прикидку очікуваного результату;**
5) **уміння здійснювати пошук розв'язування задачі: при арифметичному способі виконувати аналітичні або синтетичні міркування; уміння позначати одне з невідомих значень величини (шукане або проміжне) змінною та виражати інші величини через змінну, уміння подавати одну з величин двома способами (через змінну та без неї) при алгебраїчному методі;**
6) **уміння складати план розв'язування задачі при арифметичному способі; при алгебраїчному методі — уміння складати рівняння;**
7) **уміння реалізувати знайдений план розв'язування при арифметичному способі; уміння розв'язувати рівняння при алгебраїчному методі;**
8) **уміння перевіряти правильність розв'язання;**
9) **уміння співвідносити нову задачу з раніш розв'язаними. Уміння перетворювати дану задачу. Уміння узагальнювати математичну структуру задачі;**
10) **уміння досліджувати задачу засобом змін окремих її елементів, з метою формулювання загального плану розв'язування задач такої самої математичної структури.**

В наведеному переліку уміння з 1-го по 4-те належать до першого етапу в роботі над задачами — «Ознайомлення з задачею та аналіз тексту задачі»; з 5-го по 6-те — належать до другого етапу «Пошуку розв'язування задачі»; а решта (7-ме та з 8-го по 10-те) — відповідно до «Реалізації плану розв'язування» та «Роботи над задачею після її розв'язання».

Під окремим умінням розв'язувати задачі ми розуміємо уміння розв'язувати задачі певного виду, яке складається з:

1) **уміння здійснювати предметно-змістовий аналіз задачі;**
2) **уміння здійснювати логіко-семантичний аналіз задачі;**
3) **уміння складати репрезентативну модель задачі (короткий запис задачі у вигляді схеми або таблиці; малюнок, схематичний малюнок, схему...);**
4) **уміння робити прикидку очікуваного результату;**
5) **уміння співвідносити дану задачу з раніш вивченими і «впізнавати» задачу вивченої математичної структури;**
6) **уміння актуалізувати узагальнений спосіб розв'язування задач даного виду при арифметичному методі; уміння актуалізувати узагальнений спосіб складання рівняння при алгебраїчному методі;**

7) **уміння застосовувати узагальнений спосіб розв'язування та складати розв'язуючу модель задачі;**
8) **уміння реалізувати знайдений план розв'язування при арифметичному методі; уміння розв'язувати рівняння при алгебраїчному методі;**
9) **уміння перевіряти правильність розв'язку задачі;**
10) **уміння перетворювати задачу (в обернену або у задачу іншого виду, або у задачу спорідненої математичної структури).**

Співвіднесення наданих нами трактувань понять «уміння розв'язувати задачі», «загальне уміння розв'язувати задачі», «окреме — уміння розв'язувати задачі певних видів» на основі їх операційного складу подано у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Співвіднесення трактувань понять «уміння розв'язувати задачі» з трактуваннями двох видів умінь: «загального уміння розв'язувати задачі», «окремого — уміння розв'язувати задачі певних видів»

Уміння розв'язувати задачі	Загальне уміння розв'язувати задачі	Уміння розв'язувати задачі певних видів
1) уміння аналізувати текст задачі;	1) уміння здійснювати предметно-змістовий аналіз задачі; 2) уміння виконувати логіко-семантичний аналіз задачі;	1) уміння здійснювати предметно-змістовий аналіз задачі; 2) уміння здійснювати логіко-семантичний аналіз задачі;
2) уміння подавати результати аналізу у вигляді репрезентативної моделі;	3) уміння складати репрезентативну модель задачі (короткий запис задачі у вигляді схеми або таблиці; або малюнок, схематичний малюнок, діаграму, графік й тощо);	3) уміння складати репрезентативну модель задачі (короткий запис задачі у вигляді схеми або таблиці; малюнок, схематичний малюнок, схему...);
	4) уміння робити прикидку очікуваного результату;	4) уміння робити прикидку очікуваного результату;

Продовження таблиці 2.2

Уміння розв'язувати задачі	Загальне уміння розв'язувати задачі	Уміння розв'язувати задачі певних видів
3) уміння співвідносити задачу з раніш вивченими і відтворювати спосіб розв'язування задач даного типу (якщо учню пропонується задача відомого типу);		5) уміння співвідносити дану задачу з раніш вивченими і "впізнавати" задачу вивченої математичної структури; 6) уміння актуалізувати узагальнений спосіб розв'язування задач даного виду при арифметичному способі; уміння актуалізувати узагальнений спосіб складання рівняння при алгебраїчному методі; 7) уміння застосовувати знайдений спосіб розв'язування та складати розв'язуючу модель задачі;
4) уміння виконувати пошук розв'язування задачі, якщо задача невідомого типу або учень не "впізнав" задачу: при арифметичному методі розв'язування виконувати аналітичні міркування (від запитання задачі до числових даних) або синтетичні (від числових даних до запитання задачі), при алгебраїчному методі розв'язування — складати рівняння, при геометричному методі розв'язування — виконувати креслення, будувати діаграми або графіки;	5) уміння здійснювати пошук розв'язування задачі: при арифметичному способі виконувати аналітичні або синтетичні міркування; уміння позначати одне з невідомих значень величини (шукане або проміжне) змінною та виражати інші величини через змінну, уміння подавати одну з величин двома способами (через змінну та без неї) при алгебраїчному методі; 6) уміння складати план розв'язування задачі при арифметичному способі; при алгебраїчному методі — уміння складати рівняння;	

Закінчення таблиці 2.2

Уміння розв'язувати задачі	Загальне уміння розв'язувати задачі	Уміння розв'язувати задачі певних видів
5) уміння виконувати операції, які забезпечують розв'язання задачі;	7) уміння реалізувати знайдений план розв'язування при арифметичному способі; уміння розв'язувати рівняння при алгебраїчному методі;	8) уміння реалізувати знайдений план розв'язування при арифметичному способі; уміння розв'язувати рівняння при алгебраїчному методі;
6) уміння перевіряти правильність розв'язку.	8) уміння перевіряти правильність розв'язку; 9) уміння співвідносити нову задачу з раніш розв'язаними. Уміння перетворювати дану задачу. Уміння узагальнювати математичну структуру задачі; 10) уміння досліджувати задачу засобом змін окремих її елементів, з метою формулювання загального плану розв'язування задач такої самої математичної структури.	9) уміння перевіряти правильність розв'язку задачі; 10) уміння перетворювати задачу (у обернену або у задачу іншого виду або у задачу спорідненої математичної структури).

Як бачимо, до складу поняття «уміння розв'язувати задачі» входять майже ті самі дії, що й до складу «загального уміння розв'язувати задачі» або/і «уміння розв'язувати задачі певних видів». Але операційний склад загального уміння розв'язувати задачі та уміння розв'язувати задачі певних видів у більшому ступені конкретизований, в ньому визначені усі можливі, на нашу думку, операції. Тоді як операційний склад уміння розв'язувати задачі містить лише «обов'язкові операції», які учень має виконати, щоб успішно розв'язати задачу. Так, учень може розв'язати задачу, не припускаючи очікуваного результату... Крім того, якщо порівняти операційний склад загального і окремого умінь розв'язувати задачі, то бачимо, що вони містять однакові операції (дії), що стосуються аналізу тексту задачі та подання його результатів у вигляді моделі, уміння робити прикидку очікуваних результатів, уміння виконувати операції, які забезпечують

розв'язання задачі; є спільне і у діях щодо перевірки розв'язання задачі. Відмінність операційного складу загального і окремого уміння виявляється на етапі пошуку розв'язування задачі.

Таким чином, ми розглянули зміст поняття «уміння розв'язувати задачі», в контексті якого запропонували означення понять «загальне уміння» та «окреме — уміння розв'язувати задачі певних видів», які послужили однією з основ для розробки методики формування загальних умінь розв'язувати задачі та методики формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі певних видів. Формування загального уміння розв'язувати задачі відбувається спочатку на простих задачах — задачах, на запитання яких можна відповісти, виконавши одну арифметичну дію, а далі — на складених задачах — задачах, на запитання яких не можна відповісти однією арифметичною дією. Зазначена істотна відмінна ознака цих видів задач визначає відмінності у операційному складі загального уміння розв'язувати прості задачі та загального уміння розв'язувати складені задачі. Крім того, у початковій школі, прості і складені задачі, принаймні при формуванні загального уміння розв'язувати задачі, розв'язуються арифметичними способами. Тому у наступному параграфі ми обмежимося розглядом арифметичного способу розв'язування задач і визначимо операційний склад загального уміння, який виявляється при розв'язуванні простих задач, та операційний склад загального уміння на матеріалі складених задач.

2.5. НАВЧАННЯ ДІЙ, ЩО СКЛАДАЮТЬ ЗАГАЛЬНЕ УМІННЯ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЗАДАЧІ

2.5.1. Навчання дій, що адекватні арифметичним способам розв'язування задач

У наданих в параграфах 2.1 та 2.4 трактуваннях понять «уміння розв'язувати задачі», «загальне уміння розв'язувати задачі» та «окреме — уміння розв'язувати задачі певних видів» на основі їх операційного складу містяться дії, що адекватні різним арифметичним способам і алгебраїчному методу розв'язування задач.

У початковій школі основними, традиційно, є арифметичні способи. Арифметичні способи розв'язування задач — це не лише виконання дій над числами, а ще й здійснення логічних операцій. Розв'язування задач арифметичними способами — це, по-перше, — визначення зв'язків між даними і шуканими числами, розкладання складної задачі на прості; по-друге — побудова математичної моделі певної життєвої ситуації, причому працювати з моделлю у вигляді математичного виразу школярам легше, ніж з моделлю у вигляді рівняння.

Дослідники виділяють окремі дії, які складають уміння розв'язувати сюжетні задачі арифметичними способами (В. А. Мізюк [357], Л. А. Сафонова [462], А. К. Артьомов та Н. Б. Істоміна [530], С. Є. Царьова [573] та інші.

Складність навчання учнів розв'язування задач, на думку А. А. Столяра, полягає у відсутності (і неможливості) загального алгоритму, оволодіння яким гарантувало би здатність розв'язувати будь-яку задачу [524].

Між тим, в методичній літературі для початкової школи часто зустрічаються правила-орієнтири (пам'ятки) для розв'язування сюжетних задач арифметичними способами, що являють собою ООД з розв'язування задач. Пам'яток у методичній літературі подано декілька. Певні застосовуються для розв'язування простих задач, а інші — для розв'язування складених задач. Також існують пам'ятки для розв'язування задач окремих типів. На корисність їх використання для навчання молодших школярів розв'язування задач вказує М. О. Бантова. Автор вважає, що якщо при розв'язуванні задачі учні будуть багато разів виконувати завдання у строго визначеному порядку, то в них поступово сформується уміння працювати над задачею у відповідності з певним планом. Це дає дітям можливість самостійно справлятися у подальшому з розв'язуванням задач [52]. Але треба звернути увагу на необхідність орієнтування в ситуації для визначення адекватності способу роботи.

На початковому етапі (щаблі) навчання розв'язування простих задач С. М. Лисенковою [307], Н. П. Фаустовою [546; 547], Г. І. Мартиновою [321] для першокласників пропонуються пам'ятки, які містять речення, повторюючи які, учень примушується виконати етапи процесу розв'язування у певному порядку. Н. П. Фаустовою наведена ще й методика поетапного засвоєння змісту пам'ятки, якою передбачено три стадії, причому після третьої стадії учні повинні самостійно розв'язувати прості задачі [269]. Зміст пам'яток С. М. Лисенкової, Н. П. Фаустової, Г. І. Мартинової дуже схожий, майже усі вони містять одні й ті самі речення, але Н. П. Фаустовою введено для обґрунтування вибору арифметичної дії ще й малювання картинки з точками.

Застосування подібних пам'яток набуло критики з боку В. В. Малихіної, яка вважає, що вони дають лише можливість дітям запам'ятати пункти плану роботи над задачею і не забезпечують успіху у формуванні умінь, що дозволятимуть у подальшому самостійно розв'язувати задачі незнайомого типу. Очевидно, що послідовність завдань пам'ятки адекватна етапам розв'язування простої задачі. Перші два пункти «мені відомо», «треба дізнатися» передбачають виділення умови і запитання. Третій — «пояснюю розв'язання», на думку автора, орієнтує на відновлення схеми міркувань при обґрунтуванні вибору арифметичної дії. Завдання «розв'язую», «відповідаю» також не несуть змістовного навантаження в плані знаходження способів розв'язування задач, а відправляють до відновлення схеми виконання запису і відповіді задачі [317].

Ми згодні з В. В. Малихіною лише в тому, що завдання пам'ятки лише відтворюють послідовність етапів в роботі над задачею і не допомагають учням у їх реалізації. Але на цьому етапі навчання вони надають можливість засвоїти порядок роботи над задачею, а також спрямовують розумову діяльність дітей. Так, завдання «пояснюю розв'язання» спрямовує розумову діяльність дітей на те, що арифметичну дію треба **обрати**, виходячи з визначення слів-ознак співвідношення, що міститься в задачі; члену співвідношення, яким є шукане (див. 1.2, 2.1), а не відтворення певного зразка. Такі варіанти трактування одного й того самого пункту пам'ятки можливі внаслідок його неконкретності, тому виникає проблема визначення конкретних дій, через які виконується даний етап роботи над задачею.

Для розв'язування простих задач, у подальшому навчанні, та складених задач С. О. Скворцова, Г. І. Мартинова та Т. О. Шевченко радять застосовувати відповідні пам'ятки:

Пам'ятка № 2 (для розв'язування простих задач)

1. Прочитай задачу та уяви, про що в ній розповідається. Про що розповідається в задачі?
2. Виділи ключові слова та склади короткий запис задачі.
3. За коротким записом поясни числові дані задачі та запитання.
4. Повтори запитання задачі. Що потрібно знати, щоб на нього відповісти?
5. За допомогою якої арифметичної дії дістанемо відповідь на запитання задачі?
6. Запиши розв'язання задачі.
7. Запиши відповідь.

Пам'ятка № 3 (для розв'язування складених задач)

1. Прочитай задачу та уяви про що в ній розповідається. Про що розповідається в задачі?
2. Виділи ключові слова та склади короткий запис задачі.
3. За коротким записом поясни числові дані задачі та запитання.
4. Повтори запитання задачі. Що потрібно знати, щоб на нього відповісти? За допомогою якої арифметичної дії дістанемо відповідь на запитання задачі? Чи можна відразу відповісти на запитання задачі? Чому не можна? Що потрібно знати, щоб відповісти на це запитання?..
5. Розбий задачу на прості. Сформулюй кожну просту задачу. Покажи опорні схеми до кожної.
6. Склади план розв'язування задачі. Про що ми дізнаємося 1-ю дією? Про що дізнаємося 2-ю дією?..
7. Запиши розв'язання задачі.
8. Запиши відповідь [503].

Всі ці алгоритми-приписи (пам'ятки) репрезентують ООД і реалізуються за допомогою дій, які учень повинен поступово виконати одну за одною, щоб розв'язати задачу. Тому, щоб навчити учнів розв'язувати задачі арифметичними способами, слід визначити і опрацювати кожну з дій, що передбачено ООД, тобто виробити вміння у її виконанні. І лише тоді (згідно з вимогами до процесу формування розумових дій, які забезпечують високу ефективність формування умінь і навиків Л. М. Фрідмана), коли уміння у виконанні кожної дії, що складають ООД сформоване, учень може виконувати дії з розв'язування сюжетної задачі разом, одну за одною. Таким чином, **постає питання про навчання дій, які адекватні арифметичним способам розв'язування задач**.

2.5.2. Методичні прийоми формування дій, що складають загальне уміння розв'язування задач арифметичними способами на матеріалі простих задач

Як зазначалося вище, основним способом розв'язування сюжетних задач у початковій школі є арифметичні способи. Для формування дій, які складають уміння розв'язувати сюжетні задачі арифметичним способом, ряд авторів пропонують використовувати окремі методичні прийоми, які формують уміння читати текст задачі, виділяти умову і запитання, виконувати короткий запис задачі, рисунки за текстом задачі (З. П. Матушкіна), прийоми

сприймання і первинного аналізу задачі (С. Є. Царьова), прийоми для формування функціональної залежності (І. Н. Назарова), для перевірки розв'язання задачі (Н. Б. Істоміна, Р. Н. Шикова) та інші. Деякі з цих прийомів знайшли відображення у сучасних підручниках математики (в основному у російських підручниках для початкових класів — Н. Б. Істоміної, Е. І. Александрової, Л. Г. Петерсон та інших).

Визначені прийоми спрямовані на формування окремих дій у розв'язуванні задач. Між тим, авторами не запропоновано цілісної системи формування у молодших школярів дій, що адекватні арифметичному способу розв'язування задач.

Нами розглянуто алгоритми-приписи для розв'язування простих задач. Усі вони створені на основі того, що уміння розв'язувати прості задачі складається з таких дій:

1. Аналіз тексту задачі: визначення умови і запитання, числових даних і шуканого, виділення об'єктів задачі.
2. Зображення даних аналізу тексту задачі у вигляді схеми, малюнку тощо (короткий запис, схематичний малюнок).
3. Вибору арифметичної дії, за допомогою якої розв'язується задача.
4. Виконання розв'язання задачі.
5. Відповіді на запитання задачі.

Для формування *дій аналізу задачного формулювання — виділення умови і запитання задачі*, для з'ясування взаємозв'язку між ними пропонуються вправи, в яких застосовуються прийоми вибору умови до даного запитання або, навпаки, — вибору запитання до даної умови; перетворення умови, яка б відповідала даному запитанню, або перетворення запитання так, щоб воно відповідало даній умові; конструювання умови до даного запитання або запитання до даної умови [317]. Для формування дії *виділення об'єктів*, про які йде мова в задачі, пропонуються вправи на заміну одних об'єктів іншими [16; 24; 25], на співвіднесення об'єктів умови і запитання задачі [206; 207; 211; 217], на співвіднесення об'єктів з умовою задачі [400—403], на порівняння і складання задач, що аналогічні запропонованій задачі, але з іншим змістом [17; 26; 404—410].

Н. О. Менчинська виділяє як особливе уміння, необхідне для розв'язування простих задач, уміння правильно *вибирати арифметичну дію*. Автор розглядає його як нову розумову операцію, зміст якої призводить до перекладу конкретної ситуації, що описується в задачі, в план арифметичних операцій [343]. На думку М. О. Бантової, Н. О. Менчинської, Г. М. Сосніної та інших вчених, аналіз задачного формулювання надає можливість правильно обрати арифметичну дію, за допомогою якої розв'язується задача. Л. М. Фрідман уточнює позицію цих авторів і зазначає, що для вибору арифметичної дії слід орієнтуватися на певні слова-ознаки в тексті задачі [561].

Аналіз словесного формулювання задачі Л. М. Фрідман називає семантичним аналізом задачі. Як зазначалося в параграфі 2.1, автор виділяє два способи семантичного аналізу сюжетної задачі. При першому способі текст задачі декодується в цілому, мисленно відтворюється уся та реальна ситуація, словесною моделлю якої є задача, що аналізується. Другий спосіб аналізу спрямований на виявлення особливостей словесного задання окремих значень величин як відомих, так і невідомих, в тому числі й шуканих, а головне — на виявлення словесних ознак окремих видів співвідношень. За допомогою цього аналізу встановлюються словесні інваріанти кожного виду співвідношень простих задач [561].

Найбільш поширеним у шкільній практиці є перший спосіб семантичного аналізу задачі. Для нього застосовуються: драматизація задачі, коли ситуація, що описана в задачі, розкривається у діях учителя та учнів; малювання словесної картинки; моделювання задачі за допомогою наочних посібників тощо. Між тим, другого способу семантичного аналізу зовсім не навчають учнів, вони ним оволодівають стихійно в процесі розв'язування багатьох задач. Розв'язування сюжетних задач неможливе без такого аналізу, вважає Л. М. Фрідман.

Такий стан щодо семантичного аналізу сюжетної задачі спричинили невдачі із спробами безпосереднього застосування тексту задачі для знаходження способу її розв'язування. Так, І. М. Кавун та Н. С. Попова радили створити асоціації між термінами «додати» і «відняти» с тими різноманітними виразами, які характеризують дії додавання і віднімання у задачах. Додати — це присунути, принести, підійти, підбігти, підпливти, підлетіти, купити й тощо. На цю дію вказують слова: *і, та, ще, всього, разом* і так далі. Відняти — це відсунути, віднести, побігти, відпливти, полетіти, розбити, загубити тощо. Цю дію підказують такі слова: *без, від, із, залишилося* тощо [225].

Цей підхід критично оцінено Н. О. Менчинською, яка зазначала, що для однієї і тієї самої арифметичної дії можливий дуже різноманітний комплекс словесних виразів; крім того, одне й те саме слово в контексті умов різних сюжетних задач може мати різний математичний зміст [343]. Так, у чинних підручниках з математики для 1-го класу, автором яких є М. В. Богданович, є задача: «Дівчинка списала 5 зошитів у клітинку і 3 зошити у лінійку. Скільки всього зошитів списала дівчинка?». Звичайно зі словом «списала» асоціюється дія віднімання, але в цій задачі воно пов'язано із дією додавання.

Ми вважаємо, що при виборі арифметичної дії, якою розв'язується проста задача, слід орієнтуватися на слова, що містяться і в умові, і у запитанні задачі. В запитанні наведеної задачі міститься слово «всього», «всього дівчинка списала зошитів» більше, ніж окремо у клітинку і окремо у лінійку, а більше число знаходять дією додавання, тому задачу розв'язуємо дією додавання. Отже, семантичний аналіз сюжетної задачі другим способом дозволяє свідомо обрати арифметичну дію, за допомогою якої розв'язується проста задача.

Підтвердження нашої думки ми знаходимо у Л. М. Фрідмана. Він виконав семантичний аналіз другим способом сюжетних задач і визначив слова-ознаки окремих видів співвідношень. Так, словесний спосіб задання співвідношень виду додавання і віднімання полягає в такому:

1) в умові задачі задані три значення однієї і тієї самої величини (відомі і невідомі);
2) у заданні одного з цих значень є або мається на увазі слово-ознака «всього» або слова-ознаки «було» — в одному значенні і «залишилося» — у заданні другого значення; в першому випадку ми маємо співвідношення операції додавання, а в другому — операції віднімання [561].

Автор зазначає, що слово-ознака «всього» може бути замінено яким-небудь синонімом: «разом», «за все» тощо. Крім того, зауважує Л. М. Фрідман, слова-ознаки є ознаками виду співвідношення, але не ознакою дії, за допомогою якої може бути знайдено шукане задачі. Ця дія визначається не лише видом співвідношення, а й тим, яким членом цього співвідношення є шукане.

Аналогічної думки, щодо вибору арифметичної дії, дотримується М. П. Нікітіна [376].

Підхід Л. М. Фрідмана дуже схожий на висновки М. О. Менчинської, яка вивчала процеси розв'язування простих задач і виходила з співставлення розв'язання простих задач з операціями, що використовуються при розв'язуванні прикладів. Конкретну арифметичну операцію у прикладі позначає знак, в задачі цю операцію учень повинен обрати сам, виходячи із розуміння життєвої ситуації, що описана в умові. При цьому конкретна життєва ситуація, що описана в умові, перекладається на мову математики. В основі вибору дії лежать певні зв'язки, які виражені словесно. Так, одна й та сама дія в задачах може бути виражена різними словами, які містяться в тексті. Вибір дії одночасно визначають як слова в умові, так і у запитанні, тобто різні частини задачі [343].

Таким чином, Л. М. Фрідман робить такі висновки:

1. Кожна проста сюжетна задача є словесною моделлю деякої реальної ситуації, і за текстом задачі завжди можна відновити (мислено або у вигляді динамічної предметної моделі) цю ситуацію.
2. Однак для розв'язання задачі цього недостатньо. Треба ще за допомогою семантичного аналізу тексту задачі встановити вид співвідношення, що задано в задачі, і, знаючи характер цього співвідношення і яким його членом є шукане, встановити ту арифметичну дію, за допомогою якої можна буде знайти шукане.
3. Такий семантичний аналіз сюжетної задачі полягає у наступному:
   а) встановити, скільки величин розглядається в задачі. Словесною ознакою величини є або її назва, або найменування, що відповідає цій величині, що входить у завдання окремих її числових значень;
   б) відносно кожної величини необхідно встановити, скільки і які її значення задані в задачі. Задання кожного значення величини звичайно складається з трьох частин: назви величини, вказування особливостей даного значення і числового розміру значення, якщо воно відоме (дане). Якщо ж розмір не вказаний, то воно є невідомим, а якщо, крім цього, у заданні цього невідомого значення входить запитання «скільки?» або вимога «знайти», то це значення шукане.
   в) якщо яка-небудь величина задана трьома (чи більше) числовими значеннями (відомими і невідомими), то потрібно пошукати у заданні цих значень слова-ознаки «всього» або «було — залишилось», а якщо їх немає, то подивитися, чи не можна їх вставити у формулювання задачі, не змінюючи її характер. Слово-ознака «всього» або його синонім вказує, що значення цієї величини пов'язані співвідношенням додавання частин у ціле. Слова-ознаки «було — залишилося» вказують, що значення величини пов'язані співвідношенням віднімання від цілого його частин.
   г) якщо яка-небудь величина задана лише двома значеннями, то можна передбачити, що ці значення пов'язані співвідношенням порівняння. Якщо при цьому є слово-ознака «на» у сполученні з одним із слів пари «більше-менше» або якої-небудь іншої пари того ж смислу, то дані значення пов'язані співвідношенням різницевого порівняння; якщо ж є прийменник «в» у сполученні з одним із слів пари «більше-менше» і словом «разів», то дані значення пов'язані співвідношенням кратного відношення; якщо є слова-ознаки «складає... частину (частин)», то це вказує на співвідношення частини від цілого.
   У задачах, де два значення величини пов'язані відношеннями порівняння, крім основної величини, ще задається величина різницевого або кратного порівняння. У співвідношенні різницевого порівняння той член, у завданні якого стоїть прийменник «на», є значення величини різницевого порівняння двох основних значень величини. Те саме у співвідношеннях кратного відношення або частини від цілого: той член, у заданні якого стоять слова «у разів», — є значення величини кратного відношення; якщо ж стоїть слово «частина», то це значення частини від цілого;
   д) якщо в задачі вказані три різні величини, кожна з яких задана одним своїм значенням, то треба згадати, чи не пов'язані ці значення величин певним чином: якщо так, то значення цих величин пов'язані відповідним співвідношенням — залежністю.
   Наявність співвідношення-залежності вказується також прийменником «по» у сполученні зі словом «всього» і часткою «разів». В цьому випадку співвідношення можна трактувати і як співвідношення переходу від однієї одиниці рахунку або вимірювання до іншої або як співвідношення розбиття цілого на рівні частини;
   є) слід мати на увазі, що словесному способу задання окремих значень величин і співвідношень між ними властиві усі особливості нашої мови. Так, окремі слова можуть бути пропущені або замінені іншими того ж смислу; в ряді випадків можуть застосовуватися специфічні для ситуації, що описується, словесні способи задання значень величин і співвідношень. Все це слід враховувати у процесі семантичного аналізу сюжетних задач [561].

Як зазначалося в параграфі 2.1, результати семантичного аналізу задачі бажано, на думку багатьох методистів, подавати у наочній формі, у вигляді якої-небудь репрезентативної моделі. **Ре-**

презентативні моделі простих задач можуть бути різноманітними. Л. М. Фрідман виділяє наступні види моделей:

1. Схематичні моделі (йдеться про схематичний короткий запис).
2. Табличні моделі (короткий запис у вигляді таблиці).
3. Графічні моделі (короткий запис задачі у вигляді рисунка).
4. Структурні моделі.

Перші два види репрезентативних моделей давно відомі і широко застосовуються у шкільній практиці, тому на їх розгляді ми зупинятися не будемо; розглянемо графічні моделі, а саме короткий запис у вигляді рисунка. На користь застосування схематичної (рисунка), а не предметної інтерпретації тексту задач свідчать дані С. І. Смірнової щодо аналізу стану практики навчання молодших школярів розв'язування простих задач.

Дослідниця дійшла висновку, що схематичний рисунок має відповідати наступним *критеріям:* по-перше, виключати перерахунок; по-друге може бути застосованим при розв'язуванні задач з великими числовими даними і задач, що містять буквені дані [509].

Схематичний рисунок задачі широко застосовується у підручниках з розвивального навчання Е. І. Александрової, А. М. Захарової, Т. І. Фещенко, Н. Б. Істоміної, Л. Г. Петерсон. Н. Б. Істоміна та І. Б. Нефьодова наголошують на спеціальному формуванні у молодших школярів уміння виконувати схематичний малюнок задачі і пропонують методику навчання молодших школярів розв'язувати задачі, складовою частиною якої є формування зазначеного уміння [206-214; 217, 220]. Методисти В. В. Малихіна та П. У. Байрамукова, як і попередні автори, відносять зазначене уміння (виконувати схематичний малюнок і користуватися ним, здійснюючи пошук розв'язування задачі) до складу загальних умінь розв'язувати задачі і пропонують методику навчання учнів складання схематичних малюнків до задач [317; 318].

Так само, як В. В. Малихіна та П. У. Байрамукова, Н. Б. Істоміна та І. Б. Нефьодова, В. С. Овчиннікова вважає необхідним формування у дітей дії складання схематичного малюнка до задачі і наводить зміст пам'ятки для його створення:

Для створення малюнка треба:

1) скористатися якою-небудь геометричною фігурою;
2) зобразити величину, з якою за умовою задачі виконувалися дії;
3) придумати спосіб показати на малюнку, як виконувалися дії з величиною;
4) подивитися, як відобразився на малюнку результат дії [385].

Схематичні та табличні моделі задачі широко застосовуються в практиці навчання розв'язування задач. Це питання не є новим, і воно досить повно розглянуто у методичній науці. Тому перейдемо до інших видів моделей, які ще не набули поширення. Так, Л. М. Фрідманом запропоновано структурні моделі сюжетних задач (вони були розглянуті у параграфі 2.1, а також у додатку Д). В цих моделях відомі значення величин позначають квадратиками, а невідомі — кружечками. Головний член співвідношення, який є результатом дії, відділяється від решти членів стрілкою, а ці останні — поєднуються знаком арифметичної дії: у співвідношеннях частин і цілого — додавання, у співвідношенні різницевого порівняння — віднімання; кратного порівняння — ділення, у співвідношенні-залежності між значеннями різних величин — множення.

Розв'язуючою моделлю простої задачі є така модель, за допомогою якої здійснюється розв'язання задачі: обчислювальна формула.

В кожній задачі, яка має хоч би один розв'язок, задані відомі значення Б і В двох величин і шукане значення третьої величини. Якщо шукане є головним членом співвідношення задачі, то розв'язуючою моделлю такої задачі може бути обчислювальна формула:

$$(\text{шукане}) = \text{Б} \bullet \text{В}$$

де знак «•» означає знак якоїсь арифметичної дії: додавання, віднімання, множення і ділення.

Л. М. Фрідман вважає, що якщо шукане задачі є не головним членом співвідношення, то спочатку слід скласти модель співвідношення у вигляді формули: А = Б•В, де А — головний член співвідношення, а Б і В — решта членів співвідношення, а потім із цієї формули за відомими правилами знаходження невідомого члена арифметичної дії знайти шукане. Тоді отримаємо розв'язуючу модель задачі. Автор наводить розв'язуючі моделі для окремих видів співвідношень [561].

Цікавий підхід до навчання розв'язування задач, в якому враховані пропозиції вчених щодо логіко-семантичного аналізу задачі та подання результатів такого аналізу у схематичному рисунку, ми зустрічаємо в підручниках та методичних посібниках з розвивального навчання за системою Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова. Тут діти спеціально навчаються змістового аналізу текстів задач (змістовий аналіз спрямований на виділення в тексті описів відношень між величинами), тому з 1-го класу учні опоновують застосування модельних засобів (малюнків, схем) при спільному виявленні різних видів математичних відношень на матеріалі сюжетних задач [152].

В. В. Малихіна, досліджуючи методику розв'язування сюжетних задач в системі розвивального навчання математики Н. Б. Істоміної, розглядає засвоєння школярами структури сюжетної задачі, набуття певного досвіду в семантичному аналізі різних видів конструкцій задач для усвідомлення взаємозв'язку між умовою і запитанням задачі, як формування у молодших школярів комплексу умінь (дій):

1) аналізувати текст задачі з метою виявлення в ньому умови, запитання, відомих, невідомих величин, їх відношень;
2) співвідносити умову і запитання, встановлювати їх суперечність (несуперечність);
3) конструювати простіші моделі за даною задачною ситуацією (графічне або схематичне зображення);
4) оформляти власні думки (знайдене розв'язання) символічно, графічно, словесно.

Засобом організації цієї діяльності є система методичних прийомів:

— *прийоми вибору* з певного набору варіантів (прийом вибору запитання до даної умови; прийом вибору умови до даного запитання; вибір виразу, що відповідає тексту задачі; вибір схеми, що відповідає тексту задачі; вибір тексту, що відповідає даному виразу; вибір схеми і виразу, що відповідає тексту задачі; вибір запитання, що відповідає умові з урахуванням запропонованої моделі (математичного запису); прийом вибору даного, якого не вистачає в тексті задачі з кількох запропонованих; прийом вибору даних, яких не вистачає, з тексту іншої задачі);

— *прийоми перетворення* (прийом зміни запитання або умови; прийом зміни запитання у відповідності із зміною умови (у сполученні з прийомом вибору); прийом зміни запитання у відповідності із зміною умови; прийом перетворення даних (у поєднанні з прийомом вибору запитання); прийом зміни запитання у відповідності із зміною виразу задачі; прийом зміни умови у відповідності із зміною виразу, що відповідає йому; прийом зміни виразу (схеми) у відповідності із зміною умови або запитання; прийом зміни схеми у відповідності із зміною умови (запитання); прийом перетворення відношень у відповідності з математичним записом; прийом зміни розв'язання у залежності від зміни схеми);

— *прийоми конструювання* (прийом конструювання запитання до даної умови; прийом конструювання умови до даного запитання; прийом постановки запитань до виразів, що складені за умовою задачі; постановка запитання до умови (з використанням схеми); постановка умови до запитання (з використанням виразу); постановка умови до запитання (з використанням схеми); аналіз виразів, складених за умовою задачі; прийом конструювання виразів до даних запитань; конструювання задач [317].

Для оволодіння кожним умінням застосовуються різноманітні навчальні завдання. Їх варіативність забезпечується використанням в них різних поєднань методичних прийомів, а також тих дій, які виконують учні із структурними компонентами задачі, текстовими конструкціями, способами моделювання, математичними поняттями і відношеннями.

Із вищесказаного можна зробити висновок, що більшість методистів пропонує методичні прийоми для формування окремих дій, що складають діяльність з розв'язування простих задач. Лише В. В. Малихіною, яка аналізувала методику формування умінь розв'язувати задачі у системі Н. Б. Істоміної, та Л. М. Фрідманом надані рекомендації щодо формування комплексу дій, адекватних арифметичним способам розв'язування простих задач. Результати аналізу та узагальнення методичної літератури з цього питання подані у таблиці 2.3.

Так, Л. М. Фрідман докладніше, ніж В. В. Малихіна, визначає дії, що стосуються аналізу задачного формулювання, але він не приділяє уваги співвіднесенню умови і запитання з метою встановлення їх суперечності або несуперечності. У той час, як В. В. Малихіна (вслід за Н. Б. Істоміною) не визначає дії встановлення арифметичної дії, за допомогою якої розв'язується задача. Тут корисно загадати думку Н. О. Мечинської про те, що дія обґрунтування вибору арифметичної дії є основою при розв'язуванні простих задач.

Таким чином, узагальнюючи пропозиції методистів щодо застосування методичних прийомів для формування окремих дій, за допомогою яких здійснюється процес розв'язування простих задач, та результати аналізу власне процесу розв'язування сюжетних задач (див. 1.3 та 2.4), ми дійшли висновку: **з метою формування у молодших школярів умінь розв'язувати прості задачі арифметичними способами слід поступово опрацювати певну сукупність дій** (табл. 2.4). Треба зазначити, що в цій таблиці ми конкретизували склад загального уміння розв'язувати задачі, який був поданий нами у параграфі 2.4, для арифметичних способів розв'язування простих задач.

Таблиця 2.3

Дії, що адекватні арифметичним способам розв'язування задач

Пор. №	За Н. Б. Істоміною та В. В. Малихіною	За Л. М. Фрідманом
1.	1) аналізувати текст задачі з метою виявлення в ньому умови, запитання, відомих, невідомих величин, їх відношень;	1) виконати семантичний аналіз тексту задачі з метою встановлення виду співвідношення, що задано в задачі: — встановити, скільки величин розглядається в задачі; — відносно кожної величини необхідно встановити, скільки і які її значення задані в задачі; — якщо яка-небудь величина задана трьома (чи більше) числовими значеннями (відомими і невідомими), то потрібно пошукати у заданні цих значень слова-ознаки "всього" або "було — залишилось", а якщо їх немає, то подивитися, чи не можна їх вставити у формулювання задачі, не змінюючи її характер; — якщо яка-небудь величина задана лише двома значеннями, то можна передбачити, що ці значення пов'язані співвідношенням порівняння; — якщо в задачі вказані три різні величини, кожна з яких задана одним своїм значенням, то треба згадати, чи не пов'язані ці значення величин певним чином: якщо так, то значення цих величин пов'язані відповідним співвідношенням — залежністю;
2.	2) співвідносити умову і запитання, встановлювати їх суперечність (несуперечність);	

Закінчення таблиці 2.3

Пор. №	За Н. Б. Істоміною та В. В. Малихіною	За Л. М. Фрідманом
3.	3) конструювати простіші моделі за даною задачною ситуацією (графічне або схематичне зображення);	2) результати семантичного аналізу подавати у вигляді репрезентативної моделі;
4.		3) на основі визначеного виду співвідношення, що задано в задачі, і знаючи характер цього співвідношення і яким його членом є шукане, встановити ту арифметичну дію, за допомогою якої можна буде знайти шукане;
5.	4) оформляти власні думки (знайдене розв'язання) символічно, графічно, словесно.	4) складання обчислювальної формули.

Таблиця 2.4

Операційний склад загального уміння розв'язувати задачі арифметичними способами (на матеріалі простих задач)

Пор. №	Склад загального уміння розв'язувати задачі арифметичним способом	Дії, що адекватні арифметичному способу
1.	Уміння виконувати предметно-змістовий аналіз задачі	1) виділення умови задачі; 2) виділення запитання задачі; 3) виділення об'єкта (об'єктів) задачі; 4) виділення числових даних і шуканого задачі;
2.	Уміння виконувати логіко-семантичний аналіз задачі	1) виділення слів-ознак окремих видів співвідношень; 2) встановлення виду співвідношення;

Пор. №	Склад загального уміння розв'язувати задачі арифметичним способом	Дії, що адекватні арифметичному способу
3.	Уміння складати репрезентативну модель задачі (короткий запис задачі у вигляді схеми або таблиці; або малюнок, схематичний малюнок й тощо)	1) виділяти ключові слова і відповідні їм числові значення, складати короткий запис задачі у вигляді схеми; або визначати величини, що містяться в задачі, виділяти ключові слова і виділяти числові значення відповідних дискретних величин; записувати задачу у вигляді таблиці; 2) зображати значення величини у вигляді довжини відрізка, інтерпретувати довжину відрізка як деяку величину, виражати один відрізок через інші; складати схематичний рисунок задачі;
4.	Уміння робити прикидку очікуваного результату	1) виходячи із ситуації задачі, визначати, більше чи менше шукане число від одного з даних (наприклад, стало більше, ніж було, залишилося менше, ніж було, тощо); 2) співвідносити значення шуканої величини з іншими значеннями цієї самої величини, на основі знання характеру зміни однієї величини від зміни другої величини при сталій третій величині (у випадку співвідношення залежності між значеннями різних величин);

Пор. №	Склад загального уміння розв'язувати задачі арифметичним способом	Дії, що адекватні арифметичному способу
5.	Уміння здійснювати пошук розв'язування задачі	1) визначати, яким членом співвідношення є шукане; 2) актуалізувати правило знаходження невідомого компонента даного співвідношення; 3) обгрунтовувати вибір арифметичної дії, засобом якої розв'язується задача;
6.	Уміння реалізувати знайдений план розв'язування	1) записувати розв'язання; 2) пояснювати виконання дії;
7.	Уміння перевіряти правильність розв'язку	1) складати і розв'язувати обернені задачі; 2) встановлювати відповідність між числами, які отримані в результаті розв'язання задачі, і даними числами; 3) встановлювати відповідність шуканого числа області його значень, які очікувались під час прикидки;
8.	Уміння співвідносити нову задачу з раніш розв'язаними.	порівнювати задачі даної математичної структури з іншими задачами, математична структура яких схожа на дану; встановлювати, як ця відмінність впливає на розв'язання.

Таким чином, на основі аналізу та узагальнення пропозицій методистів та власного педагогічного досвіду, нами подано дії, адекватні арифметичним способам розв'язування простих задач. Виходячи з висновків параграфу 2.3.2, формування цих дій слід здійснювати за теорією поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна та Н. Ф. Тализіної.

2.5.3. Дії, що складають загальне уміння розв'язування задач арифметичними способами на матеріалі складених задач

В системі розвивального навчання математики (Н. Б. Істоміної, Е. І. Александрової, В. В. Давидова) прості та складені задачі не диференціюються, на відміну від традиційного навчання, коли учні спочатку оволодівають умінням розв'язувати прості задачі і лише потім — складені задачі. Прихильники розвивального навчання зазначають, що одночасне введення і простих і складених задач надає можливість сформувати свідоме уміння у виконанні змістового аналізу тексту задачі. Тоді як використання для цього лише простих задач, у зв'язку з їх невеликою складністю, приводить до того, що учні відразу знають її розв'язання, не вдаючись до аналізу тексту задачі та подання його результатів на схемі.

Прихильники традиційного навчання пояснюють власний підхід тим, що дія розв'язування складених задач містить більше операцій, ніж дія розв'язування простих задач: для розв'язування складеної задачі учень повинен визначати в тексті задачі не одне співвідношення а кілька співвідношень у певному порядку, тобто розбивати складену задачу на кілька простих і визначати їх порядок, і нарешті формулювати план розв'язування задачі. Для цього учні оволодівають умінням виконувати пошук розв'язування задачі: аналітично або синтетично.

Як свідчать наші спостереження за процесом розв'язування простих задач першокласниками, у більшості випадків діти дійсно знають відповідь на запитання задачі відразу після її читання. Але такий розв'язок є неусвідомленим ними, вимога вчителя пояснити вибір арифметичної дії часто примушує дітей змінити власну думку. Ми вважаємо, що прості задачі надають можливість школярам познайомитися з етапами у роботі над задачею та набути уміння у виконанні дій, що їх складають. Крім того, першокласники мають труднощі у простому переказі формулювання задачі, яке складається з двох речень, тому не можна їм пропонувати більш складні тексти (такі, які у складених задачах). Лише зрозумівши текст задачі, можна переходити до аналізу задачного формулювання. І, особливо, саме на простих задачах діти вчаться не випадково вибирати арифметичну дію, а обґрунтовувати її вибір. Тому ми дотримуємося традиційного підходу, який полягає в окремому навчанні учнів простим та складеним задачам.

Сформувавши в школярів уміння у виконанні дій, що реалізують етапи розв'язування задач на матеріалі простих задач, можна приступити до опрацювання дій, що притаманні власне розв'язуванню складених задач.

Орієнтувальною основою процесу розв'язування складених задач, як і при розв'язуванні простих задач, виступають зовнішні ознаки (кількість явних числових даних в задачі; так звані «ключові» слова; подання тексту задачі у вигляді короткого запису, в якому зафіксоване запитання задачі, величини, взаємозв'язок між ними; види простих задач, які містяться у складеній; виконання схематичних малюнків) [317].

На відміну від простих задач, де новим і складним для дітей є вибір арифметичної дії, при переході до складених задач новим і складним, на думку Н. О. Менчинської, є формулювання проміжного запитання. Це означає перебудову системи зв'язків, що сформувалися відповідно до розв'язання простої сюжетної задачі. Аналіз складеної задачі повинен призвести до вибору відповідної пари даних, за якими можна дізнатися про значення певної величини, яке, у свою чергу, становить пару з іншим числовим даним задачі, і так далі, щоб розчленувати задачу на кілька дій [343]. До прийомів аналізу при розв'язуванні складених задач Н. О. Менчинська відносить такі:

— виділення «опорного центру умови»;

— конкретизація (введення в умову нових побутових деталей);

— абстрагування (відображення в узагальнено-словесній формі умови задачі).

Аналогічної думки дотримуються Л. Н. Скаткін та Л. М. Фрідман. Але Л. М. Фрідман визначає дією, що необхідна для розв'язання складеної задачі, не добір запитання до певних числових даних, а розглядає розв'язання складеної задачі як знаходження вхідного співвідношення (співвідношення, яке має лише один невідомий член), тому що таке співвідношення можна вичленити з умови складеної задачі і розв'язати як просту задачу, тим самим «увійшовши» в структуру складеної задачі [561]. Такий підхід до розв'язування складеної задачі пов'язаний з визначенням пари числових даних, які потрібні для відповіді на запитання задачі, тобто з синтетичними міркуваннями.

Є. М. Семенів показав, що для вибору методу розв'язування задачі — аналітичного або синтетичного — існують об'єктивні критерії, а саме цей вибір залежить від побудови умови задачі: якщо до двох числових даних може бути поставлене лише одне певне запитання, то слід виконувати синтетичні міркування (від числових даних до запитання), а інакше — аналітичні (від запитання до числових даних) [468].

Досліджувала аналітичний і синтетичний підходи до розв'язування складеної задачі Н. О. Менчинська. Авторка робить висновок про те, що аналітичний підхід дозволяє краще (порівняно із синтетичним) довести до свідомості учня своєрідність складеної задачі [343].

Тому в нашому дослідженні під час розробки методики формування у молодших школярів загального уміння розв'язувати складені задачі ми центральну увагу будемо приділяти формуванню пошуку розв'язування аналітичним шляхом.

Нами було подано алгоритм-припис для розв'язування складених задач (пам'ятка № 3). Він містить ті самі уміння, що потрібні для розв'язування простих задач, але до нього ще додаються дії, що притаманні лише розв'язуванню складених задач:

— міркувати аналітично або синтетично при пошуку розв'язування задачі;

— розбивати задачу на прості задачі;

— встановлювати порядок простих задач;

— формулювати план розв'язування задачі.

В параграфі 2.4 було визначено складові загального уміння розв'язувати сюжетні задачі, лишилося співвіднести виділені дії, що складають арифметичний спосіб розв'язування складених задач, з кожним з перелічених умінь. Результати аналізу дій, що складають арифметичний спосіб розв'язування складених задач, подані у таблиці 2.5, де дії, які притаманні лише розв'язуванню складених задач виділені жирним шрифтом. Таким чином, в нашому дослідженні при побудові методики формування загального уміння на матеріалі складених задач ми будемо виходити з наступного операційного складу загального уміння розв'язувати задачі:

Таблиця 2.5

Операційний склад загального уміння розв'язувати задачі арифметичними способами (на матеріалі складених задач)

Пор. №	Склад загального уміння розв'язувати задачі арифметичним способом	Дії, що адекватні арифметичному способу
1.	Уміння виконувати предметно-змістовий аналіз задачі	1) виділення умови задачі; 2) виділення запитання задачі; 3) виділення об'єкта (об'єктів) задачі; 4) виділення числових даних і шуканого задачі;

Пор. №	Склад загального уміння розв'язувати задачі арифметичним способом	Дії, що адекватні арифметичному способу
2.	Уміння виконувати логіко-семантичний аналіз задачі	1) виділення слів-ознак окремих видів співвідношень; 2) встановлення виду співвідношення (співвідношень);
3.	Уміння складати репрезентативну модель задачі (короткий запис задачі у вигляді схеми або таблиці; або малюнок, схематичний малюнок й тощо)	1) виділяти ключові слова і відповідні їм числові значення, складати короткий запис задачі у вигляді схеми; або визначати величини, що містяться в задачі, виділяти ключові слова і числові значення відповідних дискретних величин; записувати задачу у вигляді таблиці; 2) зображати значення величини у вигляді довжини відрізка або за допомогою зображення іншої фігури, наприклад, прямокутника; інтерпретувати довжину відрізка як деяку величину, виражати один відрізок через інші; складати схематичний малюнок задачі;
4.	Уміння робити прикидку щодо очікуваного результату	1) виходячи із ситуації задачі, визначати більше чи менше шукане число від одного з даних (наприклад, стало більше, ніж було, залишилося менше, ніж було тощо); 2) співвідносити значення шуканої величини з іншими значеннями цієї самої величини на основі знання характеру зміни однієї величини залежно від зміни другої величини при сталій третій величині (у випадку співвідношення залежності між значеннями різних величин);

Пор. №	Склад загального уміння розв'язувати задачі арифметичним способом	Дії, що адекватні арифметичному способу
5.	Уміння здійснювати пошук розв'язування задачі	**1) від запитання задачі до числових даних — аналіз;** **2) від числових даних до запитання задачі — синтез;**
6.	Уміння складати план розв'язування задачі	**1) розбивати задачу на прості;** **2) встановлювати порядок розв'язування простих задач;** **3) формулювати план розв'язування задачі;**
7.	Уміння реалізувати знайдений план розв'язування	1) записувати розв'язання за діями; 2) пояснювати виконання дії; **3) складати вираз, який є розв'язанням задачі;**
8.	Уміння перевіряти правильність розв'язку.	1) складати і розв'язувати обернені задачі; **2) переходити до розв'язування задачі іншим способом;** 3) встановлювати відповідність між числами, які отримані в результаті розв'язання задачі, і даними числами; 4) встановлювати відповідність шуканого числа області його значень, які очікувались під час прикидки;
9.	Уміння досліджувати задачу через зміни окремих її елементів, з метою узагальнення її математичної структури і формулювання загального плану розв'язування задач такої самої математичної структури.	**1) досліджувати задачу через зміни числових даних задачі, її сюжету та величин; встановлювати, як ця зміна вплине на розв'язання задачі;** **2) визначати істотні ознаки задачі та узагальнювати її математичну структуру;** **3) узагальнювати спосіб розв'язування задач даної математичної структури;**

Пор. №	Склад загального уміння розв'язувати задачі арифметичним способом	Дії, що адекватні арифметичному способу
10.	Уміння співвідносити нову задачу з раніш розв'язаними.	порівнювати задачі даної математичної структури з іншими задачами, математична структура яких схожа на дану; встановлювати, як ця відмінність впливає на розв'язання.

Розділ 3

ТЕОРЕТИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДИЧНОЇ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ МОЛОДШИХ ШКОЛЯРІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЮЖЕТНИХ ЗАДАЧ

У попередніх параграфах нами було з'ясовано зміст понять «загальне уміння розв'язувати сюжетні задачі», «окреме — уміння розв'язувати задачі певних видів», в тому числі методичні підходи до формування загальних та окремих умінь розв'язувати задачі, психологічні вимоги до процесу формування розумових дій, які забезпечують високу ефективність навчання вмінь і навичок (Л. М. Фрідман), та теорії, що відповідають цим вимогам, — теорія поетапного формування розумових дій і понять (П. Я. Гальперін та Н. Ф. Тализіна), теорія навчальної діяльності (Д. Б. Ельконін та В. В. Давидов), складовою частиною якої є теорія змістовних узагальнень (В. В. Давидов). Також розглянуто операційний склад арифметичних способів розв'язування сюжетних задач.

Аналіз сучасних підручників, методичної літератури свідчить, що практично усі складові загального уміння розв'язувати сюжетні задачі формуються переважно в початковій школі. У зв'язку з тим, що в початковій школі основними є арифметичні способи розв'язування задач, в нашому дослідженні ми зосередимо увагу на формуванні загального уміння арифметично розв'язувати задачі.

Між тим, методисти наголошують на необхідності формування обох видів умінь (і загальних, і окремих), тому ми розглянемо навчання молодших школярів розв'язування ще й «типових» задач.

Таким чином, в основу розробки методичної системи навчання молодших школярів розв'язування сюжетних задач нами покладено наступні ідеї:

1. Навчання розв'язування сюжетних задач в курсі математики початкової школи буде ефективнішим, якщо проводити спеціальну роботу з формування загального уміння розв'язувати задачі, переважно, в 1—3 класах та окремих умінь в 4-му класі, на основі опрацювання дій, що складають ці уміння.

2. Основним засобом формування дій, що складають уміння розв'язувати задачі, є спеціальні системи взаємопов'язаних навчальних задач.

3. Навчання діям, що складають загальне уміння розв'язувати задачі, слід здійснювати через їх поетапне опрацювання на основі теорії П. Я. Гальперіна та Н. Ф. Тализіної із застосуванням системно-структурного аналізу за З. О. Решетовою.

4. Для навчання учнів розв'язування «типових» задач застосовується теорія змістовних узагальнень В. В. Давидова і метод системно-структурного аналізу З. О. Решетової, через зміни сюжету задачі або величин або числових або шуканих даних задачі.

3.1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДИЧНОЇ СИСТЕМИ НАВЧАННЯ МОЛОДШИХ ШКОЛЯРІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ АРИФМЕТИЧНИМИ СПОСОБАМИ

3.1.1. Характеристика п'яти компонентів методичної системи за А. М. Пишкало

Методична система навчання розв'язування задач учнів початкової школи розглядається як сукупність п'яти ієрархічних взаємопов'язаних компонентів (А. М. Пишкало): цілей, змісту, методів, організаційних форм і засобів навчання. Лідируючим компонентом методичної системи по відношенню до інших її компонентів є цілі навчання. Тому розглянемо цілі сюжетних задач в курсі математики початкової школи.

Питання про цілі розв'язування сюжетних задач є центральним в методиці навчання математиці. Вони, з одного боку, складають специфічний розділ програми, зміст якого учні повинні засвоїти, з другого — виступають як дидактичний засіб навчання, виховання і розвитку учнів. Проаналізувавши цілі розв'язування сюжетних задач, які були визначені В. А. Євтушевським, Н. О. Менчинською та М. І. Моро, Є. С. Ляпіним, Л. М Фрідманом, дістаємо висновку про те, що цілі розв'язування сюжетних задач за багато років не змінилися. На сучасному етапі розбудови шкільної математичної освіти розв'язування сюжетних задач у навчанні математики переслідує наступні цілі:

1) формування в учнів загального підходу, загальних вмінь і здібностей розв'язування будь-яких задач;
2) пізнання і більш глибинне оволодіння математичними поняттями, що вивчаються, і деякими загальнонауковими і загальножиттєвими поняттями;
3) оволодіння поняттями моделі і моделювання і власне математичним моделюванням;

4) розвиток мислення, кмітливості учнів, їх творчого потенціалу.

Крім загальних цілей, розв'язання задач виконує у навчальному процесі ряд функцій: навчальні, розвивальні, виховуючі та контролюючі. Функції задач у навчанні розглянуто в роботах І. В. Баранова, В. Г. Болтянського, А. Д. Ботвинникова, М. І. Бурди, Н. Я. Віленкина, Г. Д. Глейзера, Ю. М. Колягіна, Є. І. Лященко, Ю. М. Макаричева, Є. І. Машбиця, Н. Г. Миндюк, В. М. Монахова, К. І. Нешкова, Д. Пойя, А. М. Пишкало, В. Г. Розумовського, Г. І. Саранцева, З. І. Слєпкань, А. А. Столяра, В. В. Фирсова, Л. М. Фрідмана, П. М. Ерднієва та інших.

Важливість досліджень цього напрямку пояснюється тим, що методика формування у школярів уміння розв'язувати сюжетні задачі обумовлюється тими функціями, які сюжетні задачі повинні і можуть виконувати в процесі навчання математиці.

Історичний розвиток функціонального потенціалу сюжетних задач відбувався за двома напрямками:

— розширення функцій сюжетних задач в процесі навчання математиці;
— зміна пріоритету одних функцій над іншими.

Ще в математиці Л. Ф. Магницького сюжетні задачі були засобом формування певного кола знань, центром якого було засвоєння змісту арифметичних дій. При тому, що спроби методистів були спрямовані на вивчення структури задачі (Н. Г. Курганов), вдосконалення методів навчання розв'язування задач (П. С. Гур'єв), опис вимог до змісту сюжетних задач (К. Д. Ушинський), основна функція задач, як засобу вивчення математики, лишалася незмінною до середини XIX століття.

Далі В. А. Євтушевський пропонує розглядати задачі як засіб перевірки знань учнів. Ідеї В. А. Євтушевського розвиває С. М. Шохор-Троцький, висуваючи «метод доцільно підібраних задач» — засвоєння арифметики повинно відбуватися при більш або менш самостійній роботі учня над штучно підібраними завданнями — задачами [604].

Подальші дослідження методистів були спрямовані на вивчення проблеми навчання учнів розв'язування задач, на необхідність проведення спеціальної підготовчої роботи, виділення тих умінь, від яких залежить успіх у розв'язанні задачі (А. Г. Гольденберг), розбиття складеної задачі на прості, а простих — на змістовні частини, методи здійснення пошуку розв'язування задачі — аналітичний і синтетичний, аналітико-синтетичний (В. А. Латишев, Г. Б. Поляк).

Питання про розвивальні функції задач вперше було поставлено в 30-ті роки XX століття, коли сюжетну задачу стали розглядати як засіб розвитку уміння логічно мислити і правильно узагальнювати результати мислення. Методичне забезпечення процесу розв'язування задач, що зорієнтоване на розвиток мислення молодших школярів, подано у роботах І. І. Кавуна, В. Т. Снігірьова, Я. Ф. Чекмарьова, О. С. Пчьолко, М. М. Нікітіна та інших.

Певну увагу в роботах зазначених авторів було приділено навчанню розв'язування «типових» задач, що свідчить про висунення нової функції задач — формування уміння їх розв'язувати. Але треба зазначити, що до середини XX століття під умінням розв'язувати задачі розуміли лише уміння розв'язувати задачі окремих видів, при цьому кожний вид задач розв'язувався за допомогою певного правила, яких, до речі, дуже багато. Перехід початкової школи на нові програми (1969) не вніс принципових змін ні в перелік функцій сюжетних задач, ні в методику навчання їх розв'язування.

Отже, в курсі початкової математики сюжетні задачі традиційно реалізують навчальні, розвивальні, виховуючі і контролюючі функції. **Навчальні функції задач** спрямовані на формування системи математичних знань, умінь і навичок. Через систему задач учні вчаться не лише застосовувати здобуті теоретичні знання, а й переконуються на етапі мотивації у потребі здобуття нових знань; в процесі розв'язування задач дістають інформацію про методи їх розв'язування.

Під **розвивальними** розуміють функції задач, спрямовані на формування в учнів науково-теоретичного, зокрема функціонального, стилю мислення, на оволодіння ними загальними та специфічними розумовими діями та прийомами розумової діяльності. У процесі розв'язування задач учні виконують різні розумові дії (аналіз, синтез, абстрагування, порівняння, конкретизацію й узагальнення), висловлюють судження і міркування.

Під **виховуючими** розуміють такі функції задач, що спрямовані на формування в учнів наукового світогляду, сприяють екологічному, економічному, естетичному вихованню, розвивають пізнавальний інтерес, позитивні риси особистості. Як виховний спосіб, задачі роблять можливим пов'язування навчання з життям, ознайомлення учнів із пізнавально важливими фактами. Внутрішня краса самої математики, оригінальність прийомів розв'язування задач збуджують у дітей естетичні почуття.

Треба виділити ще й **контролюючу** функцію сюжетних задач, яка спрямована на встановлення навченості, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класом в цілому.

З. І. Слєпкань та Л. М. Фрідман зазначають, що розв'язування будь-якої задачі поліфункціонально, але в кожній конкретній задачі вчитель має виділяти провідну функцію і за належної цільової установки домагатися її реалізації в першу чергу.

Останнім часом на перший план методисти висувають функцію формування умінь розв'язування будь-яких задач (Н. Б. Істоміна, І. Б. Нефьодова, С. М. Лук'янова, В. В. Малихіна, Л. М. Фрідман, С. Є. Царьова). Формування уміння розв'язувати задачі розуміється вченими, як формування загального уміння та умінь розв'язувати задачі певних видів. При цьому процес навчання розв'язування сюжетних задач повинен бути організований так, щоб він здійснював ефективний вплив на розвиток мислення учнів та формування їх особистості.

Це положення знайшло відображення і у новій програмі з математики для початкової школи. Таким чином, сюжетні задачі в початковому курсі математики реалізують навчальні, розвивальні, виховуючі і контролюючі функції, але основною є функція вироблення вмінь у їх розв'язуванні.

Таким чином, **метою навчання** за методичною системою, що пропонується є *формування у молодших школярів умінь (загального і окремих) розв'язувати сюжетні задачі*, що виявляється у можливості учнів успішно розв'язати задачу будь-якої математичної структури початкового курсу математики. Тому системоутворюючим компонентом методичної системи — *змістом навчання* — є *задачний матеріал початкового курсу математики* (див. 1.3), а саме види простих і складених задач.

На матеріалі простих і складених задач діти знайомляться із структурою задачі, етапами її розв'язування, в них опрацьовується загальне уміння розв'язувати сюжетні задачі. Серед складених задач в окрему групу виділяються задачі, що містять пропорційні величини, які, в свою чергу, ми поділили на дві підгрупи. До другої підгрупи увійшли «типові» задачі — задачі на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення, на знаходження невідомих за двома різницями, на подвійне зведення до одиниці, на спільну роботу, на рух, на знаходження середнього арифметичного. Саме на цих задачах здійснюється формування окремих умінь розв'язувати задачі.

Різноманіття математичних структур складених задач, що не містять групу пропорційних величин (див. додаток В), подане у чинних підручниках з математики для початкової школи, ми вважаємо корисним для формування загального уміння розв'язувати задачі. Саме пропонування дітям задач різноманітних математичних структур спрямовує їх діяльність не на запам'ятовування способу розв'язування окремої задачі, а на засвоєння загального методу роботи над задачею.

У Державному стандарті початкової загальної освіти [162] та у чинній програмі з математики [256, 257] визначено, що в початковій школі діти повинні навчитися розв'язувати прості задачі на чотири арифметичні дії та складені задачі, які є комбінаціями вивчених видів простих задач. Щодо «типових» задач, то учні початкових класів мають вміти розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного, складені задачі, в яких використовується залежність між величинами (швидкістю, часом і відстанню при рівномірному прямолінійному русі; ціною, кількістю і вартістю товару; площею прямокутника і довжинами суміжних сторін). До речі, задачі, що містять означені величини, мають різноманітні математичні структури і відмінні способи розв'язування; отже незрозуміло, які саме види задач повинні вміти розв'язувати випускники початкової школи. Програма має ще й наступні розбіжності і недоліки:

1) серед вмінь на кінець навчального року визначено вміння розв'язувати задачі, що пов'язані з рівномірним рухом тіл, а у розділі «Задачі» цей вид задач не вказується;

2) в програмі 3—4-го класів перелічуються види задач: ускладнені задачі на знаходження четвертого пропорційного (задачі на подвійне зведення до одиниці та задачі, пов'язані з одиничною нормою), складені задачі, які включають знаходження частини від числа і числа за його частиною, задачі на знаходження суми двох добутків та обернені до них, задачі на спільну роботу, задачі на пропорційне ділення, задачі на знаходження числа за двома різницями, задачі на знаходження середнього арифметичного, задачі на знаходження трьох чисел за сумою трьох і сумами двох доданків, але у результатах на кінець навчального року не визначено, на якому рівні діти мають засвоїти цей матеріал.

Питання про «задачний мінімум» вирішувалося автором чинних підручників з математики для початкової школи М. В. Богдановичем [84]. Усі види простих задач (див. додаток А) входять до обов'язкового мінімуму, а щодо складених задач, то випускники початкової школи повинні вміти розв'язувати складені задачі на 3—4 дії одного чи різних ступенів. До програмного мінімуму відносяться «типові» задачі на знаходження четвертого пропорційного, ускладнені задачі на знаходження четвертого пропорційного (задачі на подвійне зведення до одиниці), на пропорційне ділення, на знаходження невідомих за двома різницями. Бачимо, що М. В. Богдановичем не віднесено до програмного мінімуму задачі на рух. Отже, маємо розбіжності із програмою Л. П. Кочиної та Н. П. Листопад, в якій визначено, що учні на кінець навчання в 4-му класі повинні вміти розв'язувати задачі, які містять величини швидкість, відстань і час при рівномірному прямолінійному русі, тобто задачі на рух! Але авторами не вказано, які саме задачі на рух діти мають розв'язувати. Також слід зазначити, що і М. В. Богдановичем, і Л. П. Кочиною щодо задач на спільну роботу та на знаходження середнього арифметичного не вказано рівень засвоєння навчального матеріалу.

За нашими спостереженнями, які ґрунтуються на власному педагогічному досвіді 6-річної роботи з учнями 1—4-х класів та за спостереженнями вчителів, які приймали участь у експериментальній роботі, учні початкової школи можуть і здатні навчатися розв'язувати задачі на спільну роботу, задачі на одночасний рух в різних напрямках (назустріч та у протилежних напрямках). Тому задачі на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці знаходять дією додавання, і задачі на одночасний рух в різних напрямках (назустріч та у протилежних напрямках) слід віднести до програмного мінімуму. Задачі на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання, та задачі на одночасний рух в одному напрямку (навздогін та з відставанням) та на неодночасний рух викликають цікавість в учнів з достатнім і високим рівнем навчальних досягнень.

Що стосується задач на знаходження середнього арифметичного, вважаємо, що цей вид задач має розглядатися в курсі математики основної школи, коли діти знайомляться з поняттям про середнє арифметичне, або у початковій школі перед введенням цього виду задач слід спочатку сформувати поняття про середнє арифметичне.

Отже, випускники початкової школи повинні вміти розв'язувати прості задачі, які містять співвідношення додавання, віднімання, переходу від однієї одиниці лічби або вимірювання до іншої, розбиття цілого на рівні частини, різницевого або кратного порівняння, взаємозалежності між значеннями різних величин, знаходження частини від цілого. Діти мають розв'язувати складені задачі на 3—4 дії одного або різних ступенів, також «типові» задачі на знаходження четвертого пропорційного, на подвійне зведення до одиниці, на пропорційне ділення, на знаходження невідомих за двома різницями, на спільну роботу, на одночасний

рух в різних напрямках (назустріч та у протилежних напрямках). Задачі на знаходження середнього арифметичного, на одночасний рух в одному напрямку (навздогін та з відставанням), на неодночасний рух в різних або в одному напрямку, на рух за течією та проти течії річки, на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання, хоча й розглядаються в курсі математики початкової школи, але до обов'язкового мінімуму не входять.

Таким чином, постає питання про диференціацію змісту навчання молодших школярів розв'язування задач. Типи і види задач, що виходять за межі програмного мінімуму, можуть бути віднесені до варіативного компоненту і пропонуватися за наявності резерву часу, для поглибленого вивчення курсу.

Основним **методом навчання** молодших школярів розв'язування сюжетних задач є *частково-пошуковий метод* або евристична бесіда, який полягає в тому, що вчитель заздалегідь готує систему запитань, відповідаючи на які, учні самостійно знаходять спосіб розв'язування задачі. Таким чином, методом навчання є *особливі системи взаємопов'язаних навчальних задач*, які побудовані із застосуванням сюжетних задач різноманітних математичних структур, що пропонуються у чинних підручниках математики для початкової школи. Системи навчальних задач побудовані таким чином, щоб спонукати учня виконувати операції порівняння, абстрагування, узагальнення, тобто спрямовані на розвиток мислення дитини. Нами реалізовано тезис О. М. Астряба про необхідність розкриття зв'язків між задачами різних видів і типів і приучування учнів пов'язувати кожну нову задачу з раніш вже розв'язаною.

Так, при навчанні розв'язування простих задач учням пропонується порівняти структуру взаємно обернених задач, що містять співвідношення додавання або віднімання або різницевого порівняння, — з метою визначення відмінних ознак та їх впливу на розв'язання задачі. При введенні задач нових математичних структур (простих, складених, в тому числі й «типових») також здійснюється порівняння із задачами відомих математичних структур, визначення їх відмінності та її впливу на розв'язання задачі. Для узагальнення способу розв'язування «типових» задач використовуються різноманітні зміни умови або вимоги задачі і досліджується їх вплив на розв'язання. Отже, формування уміння здійснюється не за допомогою розв'язання великої кількості задач, а через «дослідження» опорної задачі засобом спеціальної системи навчальних задач, яка містить такі обов'язкові елементи: розв'язання задачі відомої математичної структури, зміна/зміни її умови або вимоги, дослідження впливу цих змін на розв'язання задачі. Учні під керівництвом вчителя аналізують спосіб розв'язування задачі на прикладі опорної задачі, виділяють загальний спосіб розв'язування, а потім застосовують його до окремих задач.

Також при ознайомленні першокласників з поняттям «задача», її структурними компонентами, застосовується пояснювально-ілюстративний метод.

Очевидно, що зазначені зміст і методи навчання визначають **форми навчання** молодших школярів розв'язування задач — *фронтальну роботу вчителя з класом* під час ознайомлення із задачами певного виду або типу і *індивідуальну роботу* учнів над задачею. Під час індивідуальної роботи здійснюється диференціація навчання через диференціацію дози допомоги учням або диференціацію задач за рівнем їх складності. Диференціація дози допомоги реалізується через застосування карток з друкованою основою.

Відмітною особливістю карток I варіанту — для слабких учнів — є наявність короткого запису задачі та схематичного малюнку (вони не вміють читати і аналізувати текст задачі), з метою полегшення пошуку розв'язування, слабим учням пропонується на схематичному малюнку обвести певні відрізки, пояснити, значення яких величин вони ілюструють, і подумати, як можна дізнатися про невідомі значення величин. Далі слабі учні повторюють міркування за поданою схемою аналізу і, користуючись нею, складають план розв'язування задачі. Записавши розв'язання по діях з поясненням, слабі учні мають можливість перевірити власне розв'язання, тому що на зворотному боці картки подане й готове розв'язання з поясненнями і відповідь. Додаткове завдання для слабких учнів являє собою додаткове запитання, на яке можна відповісти за даною умовою, або пропозицію розв'язати аналогічну задачу.

Завдання за II варіантом — середня група — будуються наступним чином: учням пропонується самим скласти короткий запис до задачі, добудувати схематичний малюнок і схему аналізу, користуючись ними, скласти план розв'язування задачі, а далі записати розв'язання по діях з поясненням і виразом. Також передбачена можливість перевірки: на зворотному боці картки наведено вираз і відповідь. Додаткове завдання для II варіанту являє собою завдання на порівняння даної задачі із попередньою або постановку запитання, так щоб відповісти на нього можна було, виконавши ще одну арифметичну дію.

Завдання для III варіанту — сильна група — спрямовані на самостійний аналіз задачі, на порівняння з попередніми задачами,

на узагальнення плану розв'язування задачі. Перевірка розв'язання частіше полягає у складанні і розв'язуванні оберненої задачі. Додаткове завдання передбачає складання аналогічної задачі. Зразки карток з диференційованою дозою допомоги учням при розв'язуванні задач подані у додатку Д.

Диференціація змісту навчання розв'язування задач здійснюється за допомогою визначення обов'язкових для розгляду усіма учнями питань та додаткових, які вивчаються за умов резерву часу або для поглибленого вивчення за рахунок інваріантного компоненту навчального плану. Очевидно, що до обов'язкових питань відноситься навчання розв'язування задач, що входять до програмного мінімуму.

Основним **засобом навчання** молодших школярів розв'язувати сюжетні задачі є репрезентативні та розв'язуючі моделі. Репрезентативні моделі у вигляді короткого запису задачі (схема або таблиця) або у вигляді схематичного рисунка; розв'язуючі моделі у вигляді «дерева міркувань». Навчання учнів самостійному складанню схематичних рисунків розпочинається ще в 1-му класі під час підготовчої роботи до введення поняття «задача» і продовжується протягом наступних років навчання. Тому можна очікувати, що нескладні схематичні рисунки діти в змозі виконати самостійно, а рисунки до задач дещо ускладненої математичної структури — під керівництвом вчителя. Іноді для економії часу на уроці під час фронтальної роботи над задачею схематичний рисунок виконується вчителем на дошці, на основі пропозицій школярів, або пропонується дітям у готовому вигляді. Схеми аналізу або синтезу — «дерева міркувань» — є ілюстрацією процесу пошуку розв'язування і складаються вчителем разом із учнями під час фронтальної роботи над задачею. Схематичний рисунок та «дерево міркувань» виконуються учнями у разі потреби, під час самостійної роботи над задачею.

Також до засобів навчання розв'язування задач віднесемо дидактичні матеріали: тексти пам'яток, картки з друкованою основою. На перших етапах засвоєння порядку роботи над задачами (простими, складеними), під час самостійної роботи, учні користуються картками із текстом пам'яток, почергово виконуючи їх завдання. Для опрацювання окремих дій при розв'язуванні задач (в матеріалізованій формі) використовуються картки з друкованою основою, які містять певні наочні опори. Наприклад, опрацьовуючи дію складання короткого запису задач, діти розв'язують задачі на картках з друкованою основою, на яких вже є ключові слова і треба записати відповідні ним числа. До засобів навчання можна також віднести опорні схеми простих і складених задач, що подані на окремих картках; також опорні схеми «типових» задач та узагальнені плани їх розв'язування тощо.

Таким чином, ми детально проаналізували цілі і функції сюжетних задач у навчанні математики в початковій школі, охарактеризували мету, зміст, методи, способи і форми навчання розв'язування задач, тепер зосередимо увагу на змісті методичної системи навчання розв'язування сюжетних задач.

3.1.2. Будова системи з точки зору теорії проектування педагогічних систем

Перехід від традиційної до особистісно орієнтованої парадигми освіти спричинює зміни пріоритетів й у методиках навчання, а тому при створенні методичних систем виникає необхідність у відповідних застосуваннях методології системного аналізу та теорії проектування педагогічних систем.

Система — у філософському значенні — об'єктивна єдність закономірно зв'язаних між собою елементів, предметів, явищ, а також знань про природу і суспільство. Система — за П. К. Анохіним — комплекс вибірково залучених елементів, що сприяють досягненню заданого корисного результату, який приймається основним системоутворюючим чинником.

В основу розробки методичної системи навчання молодших школярів розв'язування сюжетних задач покладено системні принципи: цілісність, структурність, взаємозалежність системи і середовища, ієрархічність, множинність і тощо [1; 40; 95; 98; 273].

Цілісність є узагальненою характеристикою складних за власним змістом і структурою об'єктів. Цілісність виявляється у неможливості звести властивості системи до механічної суми властивостей окремих її компонентів і неможливість вивести з останніх властивостей цілого; залежність кожного елементу, властивості і відношення системи від його місця, функцій і тощо усередині цілого.

Кожний із елементів підсистеми виконує певну функцію. Цілісність передбачає наявність структурності, взаємозалежності, взаємообумовленості, ієрархічності та інтегративності. Структурність визначає існування певних зв'язків та відношень між елементами, що утворюють систему. Структурність розглядається як можливість опису системи через встановлення її структури, тобто мережі взаємозв'язків і відношень системи; обумовленість поведінки системи поведінкою її окремих елементів і властивостями її структури.

Запропонована **методична система містить обов'язкові елементи**:

1) **методику формування загального уміння розв'язувати задачі;**
2) **методику формування у молодших школярів окремих умінь розв'язувати задачі певних видів.**

Принцип взаємозалежності системи і середовища полягає в тому, що система формує і проявляє свої властивості в процесі взаємодії з середовищем, будучи при цьому провідним активним компонентом взаємодії.

За характером взаємостосунки системи і середовища системи діляться на закриті — замкнуті і відкриті — незамкнуті. Відкрита система — в теорії систем — система, всі або деякі елементи якої взаємодіють не тільки один з одним, але і з зовнішнім середовищем. Методична система навчання молодших школярів розв'язування задач є відкритою системою. Метою цієї системи є формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі, тому в ній передбачено поетапне опрацювання дій, що складають загальне уміння, визначено на різних етапах навчання можливі стани формування певної дії та зміст навчальних завдань, засобом яких досягається стан, що планується; крім того, визначається зміст навчальних завдань за допомогою яких здійснюється узагальнення математичної структури «типових» задач та способів їх розв'язування.

Елементи методичної системи взаємопов'язані, взаємообумовлені та взаємозалежні. Так, неможливо розпочати формування уміння розв'язувати задачі певних видів («типових»), якщо в учнів не сформовані дії, що складають загальне уміння розв'язувати задачі. Це пояснюється тим, що перед здійсненням роботи по узагальненню способу розв'язування задачі певного виду її слід розв'язати, працюючи за загальним планом. А далі для того, щоб «впізнати» задачу певного виду, учень повинен виконати змістовий і логіко-семантичний аналіз задачі (що є складовою дією загального уміння розв'язувати задачі) і лише потім «впізнати» задачу та актуалізувати узагальнений план розв'язування, що надасть йому можливість розв'язати дану задачу.

Принцип ієрархічності передбачає, що кожен компонент системи в свою чергу може розглядатися як система, а досліджувана в даному випадку система є одним з компонентів ширшої системи. Ієрархічність методичної системи навчання молодших школярів розв'язування задач слід розглядати з позицій виділення двох аспектів: по-перше, кожний її елемент може бути вивчений як система; по-друге, послідовність розташування елементів в системі здійснюється на основі впорядкованості. Так, кожний з двох елементів системи є комплексним і містить елементи нижчого порядку:

1) методика формування загального уміння розв'язувати задачі реалізується:
   — *на матеріалі простих задач;*
   — *на матеріалі складених задач;*
   — *на матеріалі задач, що містять пропорційні величини, на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків або часток;*
2) методика формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі певних видів, що містять пропорційні величини, реалізується:
   — *на матеріалі «типових» задач, що містять однакову (сталу) величину для двох випадків (задач на знаходження четвертого пропорційного, задач на пропорційне ділення, задач на знаходження невідомих за двома різницями, задач на подвійне зведення до одиниці);*
   — *на матеріалі «типових» задач на процеси (на спільну роботу та на рух);*
   — *на матеріалі «типових» задач на знаходження середнього арифметичного.*

Кожний з поданих елементів реалізується засобом відповідних систем навчальних задач, отже він також може розглядатися як система (рис. 3.1).

Множинність опису системи полягає в тому, що через принципову складність системи її адекватне пізнання вимагає побудови безлічі різних моделей, кожна з яких описує лише певний аспект системи. Тому нами складено три послідовні моделі формування загального уміння розв'язувати задачі: 1) на матеріалі простих задач, 2) на матеріалі складених задач, 3) на матеріалі задач з пропорційними величинами на знаходження суми чи різницеве чи кратне порівняння двох добутків або часток. Моделі формування окремого уміння: 1) на матеріалі задач, що містять однакову величину, 2) на матеріалі задач на процеси, 3) на матеріалі задач на знаходження середнього арифметичного. Кожний елемент системи містить декілька елементів нижчого порядку — систем навчальних завдань, розроблених для певного року навчання або (і) виду задачі (див. рис. 3.1). Інтегративність забезпечує цілісність методичної системи, її вдосконалення та розвиток.

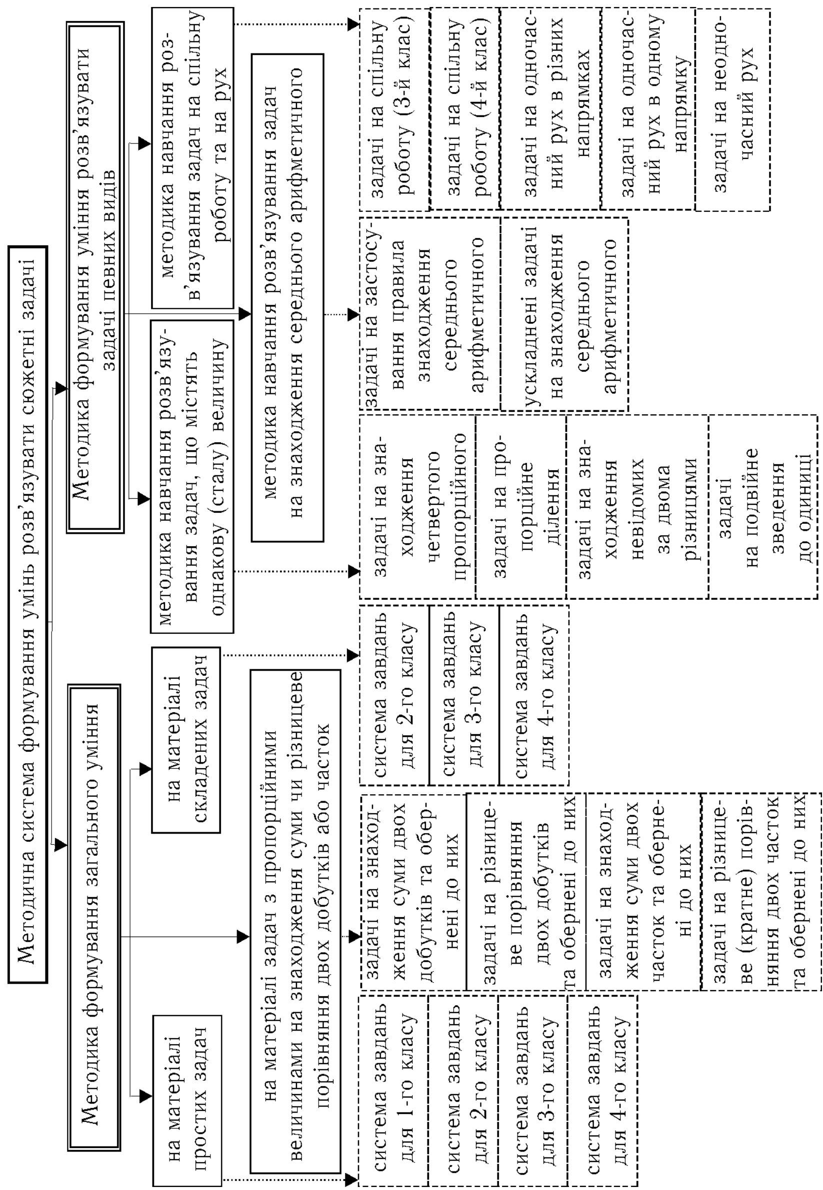


Рис. 3.1. Зміст методичної системи навчання розв'язування сюжетних задач

3.2. МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ В МОЛОДШИХ ШКОЛЯРІВ ЗАГАЛЬНОГО УМІННЯ РОЗВ'ЯЗУВАТИ СЮЖЕТНІ ЗАДАЧІ

Традиційною методикою навчання молодших школярів розв'язування задач, яка реалізована у чинних підручниках М. В. Богдановича, не передбачено формування загального уміння розв'язувати сюжетні задачі. Аналіз стану педагогічної практики свідчить, що навчання дітей розв'язування задач зводиться до запам'ятовування ними зразків міркувань вчителя. Між тим, у новій програмі Л. П. Кочиної вперше поставлено завдання формування вмінь розв'язувати задачі і вказуються деякі дії, які складають загальне уміння розв'язувати задачі. На жаль, цим автором не описано цілісної методики формування в учнів умінь розв'язування задач. Таким чином, можна говорити про відсутність у методичній літературі України аналогів методики формування загального уміння розв'язувати задачі. У Росії варіант такої методики існує — він поданий у роботах Н. Б. Істоміної та В. В. Малихіної та реалізований у чинних підручниках з математики Н. Б. Істоміної (Росія). Цими авторами визначено основну функцію задач у навчанні — формування умінь у їх розв'язуванні. Але треба зазначити, що Н. Б. Істоміна не диференціює прості і складені задачі, а вводить їх одночасно, тому цим автором не запропоновано методики формування загального уміння розв'язувати окремо прості задачі і окремо складені задачі.

Теоретичною основою складання методики формування у молодших школярів загального уміння розв'язувати прості задачі є вимоги до процесу формування розумових дій, які забезпечують високу ефективність навчання навикам і умінням, що сформульовані Л. М. Фрідманом, а також теорія поетапного формування розумових дій і понять П. Я. Гальперіна, яка відповідає цим вимогам.

3.2.1. Методика формування загального уміння розв'язувати задачі на матеріалі простих задач

Формування загального уміння розв'язувати прості задачі відбувається за етапами, які є загальноприйнятими у методичній науці:

І етап — підготовча робота до введення поняття «задача» (1-й клас);

ІІ етап — ознайомлення з поняттям «задача», його структурними елементами та етапами її розв'язування (1-й клас);

ІІІ етап — формування загального уміння розв'язувати будь-які прості задачі (1—4-й класи).

На етапі підготовчої роботи в учнів формується конкретний зміст дій додавання і віднімання, йде робота з розвитку мови дітей, коментування малюнків й тощо. Це пояснюється тим, що поняття «задача» вводиться на задачах на знаходження суми й остачі (різниці). Лише потім, познайомившись з відношенням різницевого порівняння, діти розв'язують задачі на збільшення чи зменшення числа на кілька одиниць, на різницеве порівняння, а далі, дізнавшись про взаємозв'язок дій додавання і віднімання, учні вчаться розв'язувати задачі на знаходження невідомого доданка. Отже, традиційно, задачі вводяться відразу після того, як вивчений «теоретичний» матеріал, і є засобом його подальшого засвоєння. Але, як зазначено вище, застосування сюжетних задач для формування у дітей уявлень про математичні поняття, в тому числі про зміст арифметичних дій, призводить до того, що типізація сюжетних задач і засвоєння процесу їх розв'язування виступає як основний спосіб формування уміння розв'язувати задачі, учні не вчаться міркувати при виборі арифметичної дії, а орієнтуються на зразок, що наданий вчителем. Тому для попередження шаблонного і тому неадекватного підходу учнів до розв'язування окремих видів задач ми пропонуємо вводити поняття «задача» не лише на задачах на знаходження суми й остачі (різниці), а на матеріалі перших п'яти видів простих задач. Крім того, як було показано вище, однією з дій, що складають загальне уміння розв'язувати прості задачі, є дія побудови репрезентативної моделі, а саме — схематичного рисунка. Такий підхід вимагає ґрунтовної підготовчої роботи, а саме опрацювання знань і умінь, які є достатніми для засвоєння поняття «задача»:

знання
- — конкретного змісту арифметичних дій додавання і віднімання;
- — конкретного змісту відношення різницевого порівняння;

уміння
- — переходити від *предметної* інтерпретації операції об'єднання елементів двох множин, що не перетинаються, до запису математичного виразу або рівності і навпаки;
- — переходити від *схематичної* інтерпретації операції об'єднання елементів двох множин, що не перетинаються, до запису математичного виразу або рівності і навпаки;

— переходити від *предметної* до *схематичної* інтерпретації операції об'єднання елементів двох множин, що не перетинаються, а від неї до запису математичного виразу або рівності і навпаки;
— переходити від *предметної* інтерпретації вилучення частини множини і показу решти до математичного виразу або рівності і навпаки;
— переходити від *схематичної* інтерпретації вилучення частини множини і показу решти до математичного виразу або рівності і навпаки;
— переходити від *предметної* до *схематичної* інтерпретації вилучення частини множини і показу решти, а від неї до математичного виразу або рівності і навпаки;
— знаходити суму і різницю двох чисел;
— знаходити невідомий доданок, користуючись схематичною інтерпретацією дії додавання;
— збільшувати (зменшувати) число на кілька одиниць;
— знаходити, на скільки одиниць одне число більше (менше) від іншого числа;
— переходити від *предметної* до *схематичної* інтерпретації відношення різницевого порівняння, а від неї до математичного виразу або рівності і навпаки.

Подібний підхід до підготовчої роботи здійснено у системі розвивального навчання Н. Б. Істоміної (Росія), але цей етап триває протягом всього 1-го класу, що суперечить чинній на Україні програмі. Ми дещо збільшили тривалість підготовчого етапу до введення поняття «задача», і вводимо його у II семестрі (за чинними підручниками це відбувається у другій половині I семестру). Але, завдяки тому, що ознайомлення із задачею відбувається на перших п'яти видах задач, значного відставання у засвоєнні певних видів задач не спостерігається. Таким чином, ми відмовляємося від такої функції задач, як формування конкретного змісту арифметичних дій і відношень на матеріалі задач.

Отже, на етапі підготовчої роботи до введення поняття «задача» ми розширили традиційне коло питань, додавши ще й розгляд конкретного змісту відношення різницевого порівняння і знаходження невідомого доданка. Це дає можливість ознайомлення учнів з поняттям «задача» здійснювати не лише на задачах на знаходження суми та остачі (різниці), як це робиться традиційно, а пропонувати учням відразу усі п'ять видів простих задач:

1. Задачі на знаходження суми.
2. Задачі на знаходження остачі (різниці).

3. Задачі на знаходження невідомого доданка.
4. Задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць.
5. Задачі на різницеве порівняння.

Саме робота відразу над п'ятьма видами простих задач ставить учнів в умови свідомого вибору арифметичної дії і виключає заучування способу розв'язування задач окремих видів. Необхідність вибору арифметичної дії визначає здійснення змістового аналізу тексту задачі: виділення умови й запитання, числових даних і шуканого, зв'язків між ними, слів-ознак, на які слід спиратися при складанні схематичного рисунка (а пізніше для вибору виду математичного співвідношення) і виборі арифметичної дії для розв'язування задачі.

Робота, що проведена на підготовчому етапі до ознайомлення з поняттям «задача», результатом якої є засвоєння молодшими школярами математичних понять і відношень та вміння їх моделювати за допомогою предметних, словесних, схематичних і символічних моделей і досвід застосування їх у процесі виконання різноманітних завдань, дозволяє організувати цілеспрямовану роботу із засвоєння молодшими школярами структури сюжетної задачі і свідомого процесу її розв'язування.

Істотним в організації діяльності учнів на етапі ознайомлення з поняттям «задача» є її *спрямованість не на розв'язання кожної конкретної задачі, а на оволодіння зазначеним комплексом умінь*. Згідно з вимогами до процесу формування розумових дій Л. М. Фрідмана кожна із складових дій загального уміння розв'язувати прості задачі повинна бути опрацьована окремо. Отже, на спеціальних вправах повинні бути сформовані уміння виконувати семантичний аналіз тексту задачі, складати схематичний малюнок за текстом задачі, обґрунтовувати вибір арифметичної дії при розв'язуванні задачі.

Для оволодіння кожним умінням застосовуються різноманітні навчальні завдання. Їх варіативність забезпечується використанням в них різноманітних методичних прийомів (вибору, перетворення, конструювання — терміни Н. Б. Істоміної), а також дій, які виконують діти зі структурними компонентами задачі, текстовими конструкціями, способами моделювання, математичними поняттями і відношеннями.

Особливістю розробленої програми ознайомлення першокласників з поняттям задачі і відповідної системи завдань є спрямованість на оволодіння учнями семантичним аналізом тексту задачі та подання результатів цього аналізу у вигляді репрезентативної моделі — схематичного рисунка. Треба зазначити, що на цьому етапі нами застосовано новий методичний підхід Н. Б. Істоміної до навчання розв'язування задач, який зорієнтований на формування загального уміння: читати задачу, виділяти умову і запитання, встановлювати взаємозв'язок між ними, свідомо використовувати математичні поняття для відповіді на запитання задачі [211].

Але, на відміну від Н. Б. Істоміної, ми приділяємо увагу й формуванню уміння обґрунтовувати вибір арифметичної дії, за допомогою якої розв'язується задача. На етапі ознайомлення першокласників з поняттям «задача» словесні конструкції пояснення вибору арифметичної дії лише починають засвоюватись, і учні вибирають арифметичну дію, в основному, на основі схематичного рисунка, а словесні пояснення здійснюються учнями при відповіді на запитання учителя. На третьому етапі — при формуванні умінь розв'язувати прості задачі у 1-му та у 2-му класі — ця дія набуває подальшого засвоєння.

Формування загального уміння розв'язувати прості задачі ми здійснюємо на основі операційного складу загального уміння розв'язувати прості задачі арифметичним методом. Як було показано в параграфі 2.5, дія розв'язування простих задач є складною за власною структурою і, згідно з вимогами Л. М. Фрідмана, кожна складова дія повинна бути опрацьована окремо, як самостійна дія.

Треба зазначити, що при формуванні загального уміння розв'язувати прості задачі нами врахована вимога розтягненості в часі процесу формування навичок та умінь. Так, на етапі підготовчої роботи було розпочато навчання переходу від словесної до схематичної інтерпретації співвідношень додавання, віднімання та різницевого порівняння, а від неї до математичного запису. На етапі ознайомлення ця робота продовжується з тією відмінністю, що словесний текст тепер містить запитання і називається задачею. На цьому етапі опрацьовуються дії виділення умови і запитання, виділення числових даних і шуканого, складання схематичного рисунка за текстом задачі. Розпочато формування дії виділення об'єкта (об'єктів) задачі, виділення слів-ознак окремих видів співвідношень, обґрунтування вибору арифметичної дії, засобом якої розв'язується задача, дії запису розв'язання і відповіді задачі. На етапі формування умінь розв'язувати прості задачі ці дії набувають подальшого засвоєння, а також діти вчаться виділяти ключові слова і відповідні їм числові значення, складати короткий запис задачі.

Під час подальшої роботи над простими задачами у 2—4-му класі уміння у виконанні зазначених дій вдосконалюються при розв'язуванні задач нових видів. Також вони вчаться визначати числові дані, які потрібні для відповіді на запитання задачі; складати і розв'язувати обернені задачі; встановлювати відповідність шуканого числа області своїх значень, що зроблено під час прикидки очікуваного результату; порівнювати задачі схожих математичних структур.

При ознайомленні з простими задачами, що містять пропорційні величини, учні опрацьовують дії, що відповідають аналізу задачної ситуації (виділяти величини, що містяться в задачі, виділяти ключові слова і виділяти числові значення відповідних величин; записувати задачу у вигляді таблиці); прикидки очікуваного результату на основі знання характеру зміни однієї величини від зміни другої величини при сталій третій величині і її перевірки.

Усі ці дії засвоюються поетапно згідно теорії П. Я. Гальперіна. Отже, наступна вимога Л. М. Фрідмана до процесу формування розумових дій — поетапне опрацювання будь-якої навички або вміння — реалізована нами на кожному етапі: підготовки, ознайомлення і формування умінь розв'язувати задачі.

3.2.2. Методика формування загального уміння розв'язувати задачі на матеріалі складених задач

Формування загального уміння розв'язувати складені задачі відбувається за загальноприйнятими у методиці етапами, які ми дещо конкретизували:

I етап — підготовча робота до введення поняття «складена задача»;

II етап — ознайомлення з поняттям «складена задача» та процесом її розв'язування;

III етап — формування загального уміння розв'язувати будь-які складені задачі.

На підставі визначених теоретичних основ нами розроблена програма і методика формування загального уміння розв'язувати складені задачі у молодших школярів, в якій визначено мету і зміст кожного з зазначених етапів.

На **етапі підготовчої роботи** у дітей формуються уявлення:

— про те, що за двома певними числовими даними можна відповісти на кілька запитань (постановка запитань до даної умови, вибір запитання до даної умови);

— про те, що різні задачі можуть мати однакові розв'язання (завдання на складання задач, розв'язанням яких є певний вираз);

— про неможливість відповісти на запитання задачі, якщо числових даних бракує (розв'язання задач з недостатньою кількістю числових даних);

— про необхідність вибору числових даних для відповіді на запитання задачі (розв'язання задач із зайвими числовими даними);

— про існування задач, на запитання яких не можна відповісти одразу (постановка додаткового запитання до задач з зайвими числовими даними, об'єднання двох послідовних простих задач, відповідь на друге запитання при розв'язуванні задач з двома запитаннями);

— про існування задач, що складаються з двох простих задач, які пов'язані за змістом (при розв'язуванні двох послідовних простих задач);

— про те, що аналіз може складатися з двох циклів, кожний з яких відповідає певній з двох простих задач (при розв'язуванні задач з зайвими числовими даними, при розв'язанні двох послідовних простих задач, при розв'язуванні задач з двома запитаннями).

Традиційно ознайомлення з поняттям «складена задача» здійснюється в 2-му класі на задачах на знаходження остачі, які містять просту задачу на знаходження суми, і ці задача пропонуються учням майже протягом усієї теми. Але учні запам'ятовують спосіб їх розв'язування і при розв'язуванні нової задачі наслідують його, не звертаючись до розгорнених міркувань. Для попередження цього, ознайомлення з поняттям «складена задача» та процесом її розв'язування ми проводимо на різноманітних математичних структурах складених задач.

На етапі підготовчої роботи опрацьовувались мовні конструкції, які застосовуються при аналітичному пошуку розв'язування, учні побачили, як на схемі аналізу можна виділити прості задачі, і спробували їх сформулювати. Всі ці уміння вдосконалюються на етапі ознайомлення і набувають подальшого засвоєння. Крім того, в параграфі 2.5 було виділено операційний склад загального уміння розв'язувати задачі арифметичними способами на матеріалі складених задач. Зрозуміло, що окремі складові дії цього уміння були сформовані в учнів під час формування загального уміння на матеріалі простих задач (1—4, 8_1, 8_3, 10). Тому метою етапу ознайомлення молодших школярів з поняттям «складена задача» є опрацювання трьох нових дій:

— проведення аналітичного пошуку розв'язування задачі, під час якого слід вибирати пару числових даних для відповіді на певне запитання;

— виділення, спочатку на схемі аналізу, а потім словесне формулювання кожної простої задачі, із яких складається дана задача;

— складання плану розв'язування задачі.

Істотним в організації діяльності учнів на даному етапі є її *спрямованість не на розв'язання кожної окремої задачі, а на оволодіння даним комплексом умінь*. Згідно з вимогами до процесу формування розумових дій (за Л. М. Фрідманом) кожна із складових дій загального уміння розв'язувати складені задачі повинна бути опрацьована окремо, причому формування певної дії має бути розтягненим у часі. Тому на етапі підготовчої роботи і здійснюється попереднє ознайомлення та опрацювання в матеріалізованій формі *дії аналізу* — міркування від запитання задачі до числових даних, а також попереднє ознайомлення з *розбиттям задачі на прості та визначенням порядку простих задач*.

На етапі ознайомлення, дії *аналізу* (міркування від запитання задачі до числових даних) та *розбиття складеної задачі на прості з визначенням їх порядку*, а також дія *складання плану* розв'язування задачі почали засвоюватись в *формі голосного мовлення*. Подальше засвоєння цих дій у формі зовнішнього мовлення про себе і у внутрішньому плані відбувається на третьому етапі — при формуванні загального уміння розв'язувати складені задачі.

Формування загального уміння розв'язувати складені задачі ми пропонуємо здійснювати на різноманітних математичних структурах складених задач, не зосереджуючись на відпрацюванні розв'язання задачі певної структури. Істотним у методиці ознайомлення із задачами нової математичної структури є введення їх на основі порівняння з схожими простими задачами або на основі продовження сюжету простої задачі, або на основі зміни запитання простої задачі до даної умови, або на основі зміни умови або запитання складеної задачі відомої математичної структури. Таким чином, досліджується вплив цих змін на розв'язання задачі; задачі нової математичної структури співставляються з задачами вже відомими, що полегшує їх засвоєння (психологами доведено, що знання, які пропонуються у порівнянні з іншими, засвоюються міцніше). Крім того, застосовується й такий методичний прийом, коли задача нової структури подається без зіставлення з відомими структурами. У цьому випадку учні опиняються в умовах необхідності відтворення повного складу дій, які містить загальне уміння розв'язувати складені задачі.

Отже, якщо учень зустрічається з задачею, яку він не вміє розв'язувати, то він виконує поступово, одну за одною, дії, що складають загальне уміння. А якщо математична структура задачі дитині відома, то відразу після виконання короткого запису та (або) схематичного рисунка вона розбиває задачу на прості і формулює план її розв'язування.

В другому класі ми формуємо наступні дії, що складають загальне уміння розв'язувати складені задачі:
— міркувати від запитання задачі до числових даних — аналіз;
— розбивати задачу на прості;
— встановлювати порядок простих задач;
— формулювати план розв'язування задачі;
— записувати розв'язання по діях з поясненням;
— складати вираз, який є розв'язанням задачі;
— переходити до розв'язання задачі іншим способом;
— досліджувати вплив зміни умови або запитання задачі на її розв'язання.

У третьому класі зосереджуємо увагу на опрацюванні дій:
— міркувати від числових даних до запитання — синтез;
— визначати істотні ознаки задачі та узагальнювати її математичну структуру;
— узагальнювати спосіб розв'язування задач даної математичної структури;

Визначені дії ми формуємо на основі вивчених видів складених задач, а також задач нової математичної структури.

Усі основні дії, які дозволяють учневі самостійно розв'язувати складені задачі, формуються до 3-го класу (дії: міркувати від числових даних до запитання задачі, розбивати задачу на прості та встановлювати порядок простих задач, формулювати план розв'язування, записувати розв'язання по діях та виразом); у 3-му класі опрацьовується дія міркування від числових даних до запитання задачі, а уміння розв'язувати задачі набуває подальшого засвоєння, скорочується — учні від короткого запису задачі переходять до виділення простих задач і плану розв'язування задачі. На прикладі задачі на знаходження невідомих трьох доданків за сумою трьох та сумами двох чисел здійснюється попереднє ознайомлення з діями визначення істотних ознак задач, узагальнення їх математичних структур та способу розв'язування,

яке буде засвоюватися у наступному навчанні на матеріалі складених задач з пропорційними величинами (2-га група). Отже, усі складові загального уміння розв'язувати складені задачі формуються до 4-го класу, тому у цей час увага зосереджується на формуванні умінь розв'язувати задачі окремих видів, а загальне уміння розв'язувати складені задачі набуває подальшого засвоєння на прикладі задач нових математичних структур і задач, які містять дроби.

3.2.3. Методика формування загального уміння на матеріалі задач з пропорційними величинами на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків або часток

На задачах на знаходження суми чи різницеве (кратне) порівняння двох добутків або часток ми дедалі вдосконалюємо загальне уміння розв'язувати задачі згідно теорії поетапного формування розумових дій і понять (П. Я. Гальперін, Н. Ф. Тализіна) на основі III типу навчання (П. Я. Гальперін) з системним типом орієнтування (З. О. Решетова). Такий підхід надасть нам можливість на наступному етапі навчання побудувати методику роботи над «типовими» задачами на основі їх всебічного дослідження та узагальнення математичної структури і способу розв'язування на основі теорії змістовних узагальнень (В. В. Давидов) та її застосування до навчання учнів розв'язування задач певних видів.

Щоб реалізувати поставлену мету, ми дещо змінили традиційний порядок розгляду складених задач, що містять пропорційні величини. Так, традиційно, «типові» задачі на знаходження четвертого пропорційного пропонуються раніше задач на знаходження суми двох добутків та обернених до них. Це пояснюється тим, що задачі на знаходження четвертого пропорційного розв'язуються двома арифметичними діями, а задачі на знаходження суми двох добутків — трьома; в традиційній методиці дотримуються розгляду задач за збільшенням кількості арифметичних дій. Але задачі на знаходження четвертого пропорційного належать до «типових» задач, прямі і обернені задачі мають подібну математичну структуру, яку учні легко впізнають, а тому й згадують загальний спосіб їх розв'язування. Тим часом задачі на знаходження суми двох добутків з оберненими до них задачами мають дещо відмінну математичну структуру і різні плани розв'язування. Хоча й існує можливість узагальнити способи розв'язування і цих задач, проте робота над цими задачами, в основному, відбувається у загальному порядку, який передбачає виконання операцій, що складають загальне уміння розв'язувати сюжетні задачі. Тому видається доцільним спочатку сформувати в учнів уміння розв'язувати задачі на знаходження суми чи різницеве (кратне) порівняння двох добутків або часток і лише потім перейти до типових задач.

Теоретичною основою складання методики формування умінь розв'язувати задачі, що містять знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків (часток), є також теорія поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна та Н. Ф. Тализіної.

Але, якщо у розглянутих компонентах системи — формування загального уміння розв'язувати задачі на матеріалі простих та на матеріалі складених задач, основну увагу було приділено поетапному опрацюванню складових дій загального уміння. На цьому етапі навчання усі основні складові дії загального уміння сформовано, а лишається опрацювати дії, що стосуються аналізу задачного формулювання, яке містить групу пропорційних величин; прикидки відповіді на основі знання зміни однієї величини у залежності від зміни іншої при сталій третій, та перевірки правильності очікуваного результату (які, до речі, опрацьовуються у розумовій формі); а також дії визначення істотних ознак та узагальнення математичної структури та способу розв'язування (у формі голосного мовлення та «зовнішнього мовлення про себе»). Таким чином, на матеріалі задач з пропорційними величинами, на знаходження суми чи різницеве (кратне) порівняння двох добутків або часток, основна увага приділяється опрацюванню дій визначення істотних ознак та узагальнення математичної структури і способу розв'язування задач, що можливо на основі III типу навчання за П. Я. Гальперіним з системним типом орієнтування (З. А. Решетова).

В основу розробки методики формування умінь розв'язувати задачі, що містять знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків (часток), ми поклали такі загальні підходи:

— розбиття задачі на підзадачі (на складові прості задачі);
— зведення задачі до раніш розв'язаної;
— аналіз і дослідження математичної структури задачі з визначенням її істотних ознак, шляхом складання і розв'язування обернених задач і шляхом зміни величин задачі або числових даних;

— встановлення зв'язків між задачами, встановлення схожості і відмінності у їх розв'язаннях та виявлення чинників, від яких це залежить.

Задачі на знаходження суми чи різницеве/кратне порівняння двох добутків або часток вивчаються за планом:

1. Ознайомлення із задачами на знаходження суми двох добутків за допомогою складання задачі нової математичної структури з двох простих задач.
2. Дослідження задачі на знаходження суми двох добутків, визначення істотних ознак математичної структури та узагальнення способу розв'язування прямих і обернених задач.
3. Ознайомлення із задачами на різницеве порівняння двох добутків на основі перетворення задачі на знаходження суми двох добутків у задачу на різницеве порівняння двох добутків. Порівняння прямих задач на знаходження суми та різницеве порівняння двох добутків з метою узагальнення їх математичних структур та плану розв'язування.
4. Дослідження задачі на різницеве порівняння двох добутків, визначення істотних ознак математичної структури та узагальнення способу розв'язування прямих і обернених задач.
5. *Порівняння відповідних обернених задач до задач на знаходження суми та на різницеве порівняння двох добутків. Узагальнення математичної структури прямих і обернених задач на знаходження суми двох добутків та плану їх розв'язування.*
6. Ознайомлення із задачами на кратне порівняння двох добутків на основі зміни запитання до задачі на різницеве порівняння двох добутків і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі. Порівняння прямих задач на різницеве та кратне порівняння двох добутків з метою узагальнення їх математичних структур та плану розв'язування.
7. Порівняння прямих задач на знаходження суми та різницеве або кратне порівняння двох добутків з метою узагальнення їх математичних структур та плану розв'язування.
8. Дослідження задачі на кратне порівняння двох добутків, визначення істотних ознак математичної структури та узагальнення способу розв'язування прямих і обернених задач.
9. *Порівняння відповідних обернених задач до задач на різницеве та на кратне порівняння двох добутків. Узагальнення математичної структури прямих і обернених задач на різницеве або кратне порівняння двох добутків та плану їх розв'язування.*

10. *Порівняння математичних структур прямих і обернених задач на знаходження суми, на різницеве/кратне порівняння двох добутків; визначення істотних ознак їх математичних структур та узагальнення планів розв'язування.*
11. Ознайомлення із задачами на знаходження суми двох часток на основі порівняння з задачами на знаходження суми двох добутків і з'ясування впливу зміни тексту задачі на її розв'язання.
12. Ознайомлення із задачами на різницеве порівняння двох часток на основі зміни запитання задачі на знаходження суми двох часток і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі.
13. Ознайомлення із задачами на кратне порівняння двох часток на основі зміни запитання задачі на різницеве порівняння двох часток і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі.
14. Порівняння задач на знаходження суми, різницеве або кратне порівняння двох часток; визначення істотних ознак задач даної математичної структури і узагальнення способу розв'язування.
15. *Дослідження задач на знаходження суми, різницеве або кратне порівняння двох часток за допомогою складання і розв'язання обернених задач. Визначення істотних ознак математичних структур та узагальнення способів розв'язування обернених задач.*
16. *Ознайомлення із задачами на різницеве порівняння двох часток (значень величини однієї одиниці виміру або лічби) за допомогою співставлення двох задач: на різницеве порівняння двох значень кількості (часу) із задачею на різницеве порівняння двох значень величини однієї одиниці.*
17. *Ознайомлення із задачами на кратне порівняння двох часток (значень величини однієї одиниці виміру або лічби) за допомогою зміни запитання у попередній задачі.*
18. *Ознайомлення із задачами на знаходження суми двох часток (значень величини однієї одиниці виміру або лічби) на основі зміни запитання попередньої задачі.*
19. *Порівняння задач з метою визначення спільних істотних ознак та узагальнення плану розв'язування.*
20. *Дослідження задач на знаходження суми, різницеве або кратне порівняння двох часток (значень величини однієї одиниці виміру або лічби) за допомогою складання і розв'язання обернених задач. Визначення істотних ознак математичних структур та узагальнення способів розв'язування обернених задач.*

Слід зазначити, що пункти 5, 9, 10, 15—20 не є обов'язковими, вони розглядаються за наявності резерву часу або для поглибленого вивчення курсу за рахунок варіативної складової навчального плану. Таким чином здійснюється диференціація змісту навчання.

Істотним, на даному етапі є не лише опрацювання визначених дій, що складають загальне уміння розв'язувати задачі, а й організація спеціальної роботи по дослідженню задач з метою визначення істотних ознак їх математичних структур та планів розв'язування.

Так, дослідження задач відбувається за наступними факторами:
- — за зміною групи пропорційних величин;
- — за зміною числових даних;
- — за зміною шуканих задачі;
- — за зміною співвідношень, що задані в задачі: сума значень величини замінюється їх різницевим, а потім й кратним співвідношенням;
- — за зміною величин, для значень яких дано або треба знайти суму, різницеве чи кратне відношення, і визначивши вплив цих змін на план розв'язування задач, ми виділяємо істотні ознаки математичних структур задач та узагальнюємо плани їх розв'язування:

Істотні ознаки задач на знаходження суми/різницевого чи кратного порівняння двох добутків та обернених до них:
1) *для одного з випадків дані значення двох величин*;
2) *для іншого випадку дано або значення двох величин, або однієї з них, тоді інша є шуканою*;
3) *сума чи різниця чи частка значень загальних величин є шуканою або її значення дано.*

План розв'язання задач на знаходження суми/різницевого чи кратного порівняння двох добутків та обернених до них:
1) *значення загальної величини у одному випадку*;
2) *значення загальної величини у іншому випадку*;
3) *відповімо на запитання задачі.*

Треба зазначити, що всі ці задачі містять групу пропорційних величин. Наприклад: загальну масу, масу одного предмету, кількість предметів або загальну довжину, довжину одного відрізу, кількість відрізів або вартість, ціну, кількість куплених речей.

Кожна група пропорційних величин має загальну величину (загальну масу, загальну довжину, вартість), величину однієї одиниці виміру або лічби (масу 1 предмета, довжину 1 відрізу, ціну) і кількість. Тому ми користуємося термінами «загальна величина», «величина однієї одиниці».

Істотні ознаки прямих і обернених задач на знаходження суми/різницевого чи кратного порівняння двох часток:

1) *для одного з випадків дано значення двох величин: загальної величини та величини однієї одиниці/кількості або часу.*
2) *для другого випадку дано лише одне з значень цих величин, а інше є шуканим або для другого випадку також дані два значення цих величин.*
3) *дано значення суми/різницевого чи кратного відношення значень величини однієї одиниці/кількості або часу або це значення є шуканим.*

План розв'язання прямих і обернених задач на знаходження суми/різницевого чи кратного порівняння двох часток:

1) *першою дією дізнаємося про значення величини однієї одиниці/кількості або часу в одному з випадків.*
2) *другою дією дізнаємося про значення величини однієї одиниці/кількості або часу в іншому випадку.*
3) *третьою дією відповімо на запитання задачі.*

Треба зазначити, що на цьому етапі робота над окремою задачею здійснюється згідно загальному підходу: виконується повноцінний аналіз тексту задачі (змістовий та логіко-семантичний), виконується репрезентативна модель задачі, пошук розв'язування здійснюється аналітично або синтетично, формулюється план розв'язування і записується розв'язання по діях або виразом, крім того, передбачається робота над задачею після її розв'язання, яка полягає, переважно, у складанні і розв'язанні обернених задач. Але описаний порядок роботи може бути дещо скорочений, якщо учень відразу, після складання репрезентативної моделі задачі, здатен сформулювати план розв'язування; в цьому випадку аналітичні або синтетичні міркування при пошуку розв'язування задачі зайві. Таким чином, хоча й проведена певна робота з узагальнення математичних структур задач та способів їх розв'язування, результати цієї роботи не застосовуються активно при роботі над задачами.

На матеріалі задач на знаходження суми двох добутків та обернених до них здійснюється лише *попереднє ознайомлення з дією визначення істотних ознак математичної структури задачі та узагальнення її плану розв'язування*. Засвоєння цих дій у *матеріалізованій формі та у формі голосного мовлення* відбувається відповідно під час ознайомлення з задачами на різницеве та кратне порівняння двох добутків та оберненими до них. Під час роботи із перетворення задач однієї математичної структури в іншу, із порівняння аналогічних математичних структур задач, визначення їх спільних істотних ознак та узагальнення планів розв'язування, можна очікувати, що в деяких учнів *дія визначення істотних ознак та узагальнення математичної структури задачі та дія узагальнення способу розв'язування задачі* набуває подальшого засвоєння в формі *зовнішнього мовлення про себе*. Формування цих дій у *розумовій формі* відбувається при навчанні розв'язування задач на знаходження суми, різницеве або кратне порівняння двох часток та обернених до них.

Таким чином, нами запропонована методика навчання молодших школярів розв'язування задач на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків (часток), яка сприяє формуванню операцій, що складають загальне уміння розв'язувати сюжетні задачі арифметичними способами, а саме:

1) виділяти величини, що містяться в задачі, виділяти ключові слова і виділяти числові значення відповідних величин; записувати задачу у вигляді таблиці;
2) зображати значення величини у вигляді довжини відрізка, інтерпретувати довжину відрізка як деяку величину, виражати один відрізок через інші; складати схематичний рисунок задачі;
3) визначати істотні ознаки задачі та узагальнювати її математичну структуру;
4) узагальнювати спосіб розв'язування задач даної математичної структури.

Зазначимо, що дії:

— прикидки значення шуканої величини, якщо задача містить три пропорційні величини, на основі знання характеру зміни однієї величини залежно від зміни другої величини при сталій третій величині;
— встановлення відповідності шуканого числа області своїх значень, яка визначена під час прикидки очікуваного результату, набуватимуть подальшого засвоєння при навчанні учнів розв'язування «типових» задач, що містять однакову величину.

Отже, на матеріалі простих та складених задач та задач на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків (часток) опрацьовані майже усі складові загального уміння розв'язувати сюжетні задачі арифметичними способами. При розробці методики навчання молодших школярів розв'язування «типових» задач, що містять однакову величину, будемо вважати, що загальне уміння розв'язувати задачі майже сформовано і існує можливість перейти до формування умінь розв'язувати задачі певних видів.

3.3. МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ В МОЛОДШИХ ШКОЛЯРІВ УМІНЬ РОЗВ'ЯЗУВАТИ СЮЖЕТНІ ЗАДАЧІ ПЕВНИХ ВИДІВ

Методика формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі певних видів будується на поданому нами означенні окремого уміння через комплекс умінь нижчого порядку, серед яких основними є: уміння співвідносити дану задачу з раніш вивченими і впізнавати задачу вивченої математичної структури; уміння актуалізувати узагальнений спосіб розв'язування задач даного виду, а потім його реалізувати.

Називання та заучування назв видів задач традиційною методикою не схвалюється. Водночас, самостійне називання виду задачі (навіть своїми словами) спонукає учня розглянути зв'язки між відомими та шуканими величинами, визначити дії, за допомогою яких можна її розв'язати. Ми вимагаємо від учнів запам'ятовувати і вказувати вид задачі (задач), цим самим в них формуються навички аналізування тексту задачі, її математичної структури, та актуалізації способу розв'язування задач.

Цей підхід підтверджується результатами дослідження З. І. Калмикової та В. Л. Ярощука. З. І. Калмикова встановила: якщо вид задачі не запам'ятовується, то для відтворення (пригадування) способу розв'язування задач даного виду потрібно більше часу, і часто у схожих ситуаціях відбувається підміна одного способу іншим, який має схожі риси [230]. В. Л. Ярощук дійшов висновку про те, що спочатку з назвою виду пов'язується певна сукупність дій, направлена на розв'язання задачі, потім утворюється асоціація між особливостями умови задачі й назвою виду, а також між особливостями виду і узагальненими прийомами розв'язування [617]. Таким чином, при навчанні розв'язування «типових» задач спочатку спрямовуємо зусилля учнів на узагальнення способу розв'язування, а потім на узагальнення математичної структури задачі.

Щоб співвіднести дану задачу з раніш вивченими і впізнати задачу вивченої математичної структури, а також актуалізувати узагальнений спосіб розв'язування задач цього виду, учень повинен мати знання різноманітних математичних структур «типових» задач та узагальнених способів їх розв'язування. При наявності зазначених знань успішність розв'язання «типових» задач залежить, насамперед, від якості орієнтувальної діяльності школяра. Як було показано в 2.2, якість самої орієнтувальної діяльності визначається якістю подання, схеми тієї дії, яка за цієї схемою потім виконується. Головна характеристика III типу орієнтування полягає в тому, що учням пропонується всебічне вивчення предмета, шляхом його «розчленування» на складові «одиниці», і визначаються закони їх сполучення, що становить основи складу предмету, а різні види сполучень одиниць — його варіанти. Пошук ООД III типу йде за методом системно-структурного аналізу, запропонованим З. О. Решетовою. Метою системно-структурного аналізу є багаторівневе дослідження задач заради визначення істотних ознак задачі та їх узагальнення. Цей підхід повністю узгоджується з теорією змістовних узагальнень В. В. Давидова, який розглядає теоретичний шлях узагальнення при розв'язуванні задач як узагальнення через аналіз умови і вимоги, що дозволяє абстрагувати представлені в задачах істотні залежності. Завдяки цьому розв'язання задачі відразу набуває узагальненого значення і переноситься на цілий клас задач. Зазначимо, що методику навчання учнів розв'язування задач певних видів за теорією змістовних узагальнень було розроблено В. Н. Осинською: розв'язування опорної задачі — з'ясування її «типових» особливостей — виділення головного — узагальнення способу розв'язування таких задач — визначення суттєвого в процесі розв'язування, тобто таких дій, без яких задачу не можна розв'язати — складання алгоритму (схеми) розв'язання задач даного виду або з'ясування загального підходу до їх розв'язування. Ми адаптували цю методику з метою її застосування у початковій школі (див. 2.3.5).

Таким чином, **теоретичною основою складання** методики формування у молодших школярів умінь розв'язувати «типові» задачі є теорія змістовних узагальнень В. В. Давидова, її реалізація при навчанні учнів розв'язування «типових» задач, що здійснюється на основі III типу орієнтування за П. Я. Гальперіним, методом системно-структурного аналізу З. О. Решетової.

Системно-структурний аналіз задачі ми будемо здійснювати шляхом змін величин задачі або числових даних у прямій та обернених задачах, і дослідження впливу цих змін на її розв'язання. Між тим, для задач, що містять однакову (сталу) величину, існує можливість змінювати ще й однакову величину.

З метою здійснення узагальнення на досить високому рівні навчання має бути побудоване особливим чином. Його теоретичну основу ми вже визначили, розглянемо методичні підстави для розробки методики формування у молодших школярів окремих умінь розв'язувати задачі певних видів.

В параграфі 2.1.2 нами було проаналізовано і узагальнено підходи до формування окремих умінь розв'язування задач. Ці підходи й склали **методичну основу** розробки методики формування у молодших школярів умінь розв'язування «типових» задач:

1) предметом навчання і основним змістом навчання є види задач, способи і зразки розв'язування задач конкретних видів (С. Є. Царьова);
2) навчання розв'язування задач протікає успішно у тому випадку, коли спосіб розв'язування, його засвоєння виступає як мета дії, а власно розв'язання окремої задачі є лише побічним продуктом (Ю. І. Машбиць);
3) задачі, їх структура повинні стати предметом глибокого вивчення учнями (Л. М. Фрідман);
4) при навчанні розв'язування задач певного виду на перших етапах слід розгорнути процес розв'язування як процес моделювання задач (Л. М. Фрідман);
5) основним методом навчання розв'язування задач повинен стати метод розв'язування особливої системи підготовчих навчальних задач (Л. М. Фрідман).

При розробці методики формування окремих умінь ми спираємось на пропозицію О. М. Астряба щодо зменшення основних «типових» груп задач. Як зазначалося вище, окремі уміння складаються із знань різноманітних математичних структур «типових» задач та знань узагальнених планів розв'язування задач різноманітних математичних структур. Зрозуміло, що учню важко запам'ятати усе різноманіття математичних структур «типових» задач і відповідні плани розв'язування. Тому, з метою зменшення обсягу навчального матеріалу, який підлягає запам'ятовуванню, необхідно перейти до більш високого ступеню узагальнення математичних структур задач та планів розв'язування. Отже, нами здійснено спробу узагальнення математичних структур та способів розв'язування задач на:

1) **знаходження четвертого пропорційного;**
2) **на пропорційне ділення;**
3) **на знаходження невідомих за двома різницями;**
4) **на подвійне зведення до одиниці.**

Математична структура задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями містить спільні істотні ознаки: наявність двох випадків, одна з величин є однаковою для обох випадків і для іншої величини дані два числові значення для обох випадків. Відмітні ознаки математичних структур задач цих видів полягають у наступному: в задачах на знаходження четвертого пропорційного для третьої величини дано одне числове значення, а друге є шуканим; у задачах на пропорційне ділення та у задачах на знаходження невідомих за двома різницями обидва числові значення третьої величини є шуканими, причому у задачах на пропорційне ділення дано їх суму, а у задачах на знаходження невідомих за двома різницями — їх різницю (рис. 3.2).

Задачі на знаходження четвертого пропорційного

I	*а*		*с*
		однакова	
II	*в*		?

Задачі на пропорційне ділення

I	*а*		?
		однакова	*к*
II	*в*		?

Задачі на знаходження невідомих за двома різницями

I	*а*		?
		однак.	
II	*в*		?, на *р* б.(м.)

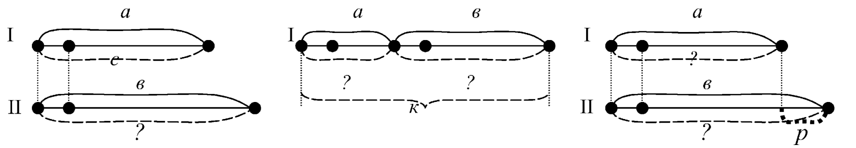


Рис. 3.2. Опорні схеми та схематичні рисунки задач на знаходження четвертого пропорційного, пропорційне ділення, знаходження невідомих за двома різницями

Наявність спільних ознак надає можливість узагальнити спосіб розв'язування задач цих видів. Оскільки усі ці задачі містять однакову для двох випадків величину, то ключем до їх розв'язання є знаходження її значення. Але відмінність у розв'язанні цих видів задач полягає саме у способі відшукування значення однакової величини: у задачах на знаходження четвертого пропорційного однакову величину знаходять за двома іншими величинами одного з випадків; у задачах на пропорційне ділення — за двома сумарними значеннями двох інших величин; у задачах на знаходження невідомих за двома різницями — за значеннями різницевого відношення двох інших величин.

Дещо відокремлені від інших задачі на подвійне зведення до одиниці. Ці задачі також містять однакову (сталу) величину, але це величина «подвійної одиниці», наприклад, маса сіна 1 коню на 1 день. Крім того, усі розглянуті вище види задач містять три пропорційні величини, а задачі на подвійне зведення до одиниці — чотири величини. Але можна говорити, що ці задачі також розв'язуються способом знаходження однакової величини — величини «подвійної одиниці», яку у задачах першого та другого підвиду знаходять послідовним діленням значення загальної величини на значення двох інших величин, що пов'язані з нею. Треба відмітити, що між задачами на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою може бути величина однієї одиниці, і задачами на подвійне зведення до одиниці є певний зв'язок: таку задачу на знаходження четвертого пропорційного можна перетворити у задачу на подвійне зведення до одиниці і навпаки; при розв'язуванні задачі на подвійне зведення до одиниці після виконання першої дії ми призводимо цю задачу до відповідної задачі на знаходження четвертого пропорційного.

Незважаючи на визначені відмінності, можна говорити про спільні підходи у методиці навчання учнів розв'язування зазначених видів задач. Хоч математична структура задач на подвійне зведення до одиниці дещо відрізняється від математичних структур задач, що розглянуті вище, але у цих задач є спільне у способі розв'язування — для відповіді на запитання задачі треба знайти значення однакової величини, тому ми пропонуємо поєднати у одну групу задачі цих чотирьох видів.

Перейдемо до обґрунтування поєднання у одну групу задач на **спільну роботу та на рух**.

Задачі на рух містять опис процесу руху двох тіл. За суттю математичних залежностей між величинами, що входять в задачу, за математичною структурою та математичною моделлю їх не можна віднести до особливого виду задач. Р. Н. Шикова порівняла математичні структури та способи розв'язування задач на рух з іншими видами задач, що містять пропорційні величини, і дійшла висновку про те, що структура, моделі і способи розв'язування, як арифметичні, так і алгебраїчні, повністю співпадають [598].

Якщо подати математичні структури задач на одночасний рух та на спільну роботу (в яких дано продуктивність праці кожного

виконавця) у вигляді таблиці, то ми отримаємо такі математичні структури (рис. 3.3).

	заг. виробіток / *відстань*	*продукт. пр.* / *швидкість*	час
I		□	
II		□	
I і II	**?**	?	□

	заг. виробіток / *відстань*	*продукт. пр.* / *швидкість*	час
I		□	
II		□	
I і II	□	?	**?**

	заг. виробіток / *відстань*	*продукт. пр.* / *швидкість*	час
I		**?**	
II		□	
I і II	□	?	□

	заг. виробіток / *відстань*	*продукт. пр.* / *швидкість*	час
I		□	
II		**?**	
I і II	□	?	□

Рис. 3.3. Опорні схеми задач на спільну роботу (3-й клас) та на одночасний рух (4-й клас)

Так, і задачі на спільну роботу, і задачі на одночасний рух поданої математичної структури, містять такі спільні істотні ознаки:
1) три пропорційні величини: загальний виробіток/відстань, продуктивність праці/швидкість, час роботи/руху;
2) три випадки: перші два стосуються роботи/руху кожного з двох об'єктів, а третій — їх спільної роботи/руху;
3) чотири числові значення: продуктивність праці/швидкість руху першого об'єкта, продуктивність праці/швидкість руху другого об'єкта, загальний виробіток/загальна відстань при їх спільній праці/русі та час спільної роботи/руху; три з них дано, а одне є шуканим.

Математичну структуру задач на одночасний рух та на спільну роботу можна подати у вигляді узагальненої таблиці (рис. 3.4).

	заг. виробіток / *відстань*	*продукт. .пр.* / *швидкість*	час
I		N_1 / V_1	
II		N_2 / V_2	
I і II	A / S	?	t

Рис. 3.4. Узагальнена опорна схема задач на спільну роботу та на рух

N_1 — продуктивність праці першого виконавця, N_2 — продуктивність праці другого виконавця, A — загальний виробіток при спільній праці, V_1 — швидкість першого тіла, V_2 — швидкість другого тіла, t — час спільного руху або час спільної праці, S — відстань між тілами на момент початку або на момент закінчення руху.

Задачі на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці знаходять дією додавання, та задачі на одночасний рух в різних напрямках (назустріч та у протилежних напрямках) мають два способи розв'язування (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Способи розв'язування задач на спільну роботу, в яких спільну продуктивність роботи двох виконавців знаходять дією додавання, та на рух в різних напрямках

I спосіб	II спосіб
$A = N_1 \cdot t + N_2 \cdot t$ $S = V_1 \cdot t + V_2 \cdot t$	$A = (N_1 + N_2) \cdot t$ $S = (V_1 + V_2) \cdot t$
	$t = A : (N_1 + N_2)$ $t = S : (V_1 + V_2)$
$N_1 = (A - N_2 \cdot t) : t$ $N_2 = (A - N_1 \cdot t) : t$ $V_1 = (S - V_2 \cdot t) : t$ $V_2 = (S - V_1 \cdot t) : t$	$N_1 = A : t - N_2$ $N_2 = A : t - N_1$ $V_1 = S : t - V_2$ $V_2 = S : t - V_1$

Задачі на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці являє собою різницю продуктивностей кожного виконавця, та задачі на рух в одному напрямку (навздогін та з відставанням) також мають два способи розв'язування (табл. 3.2).

Треба зазначити, що в курсі початкової математики розглядають задачі на спільну роботу та на рух в різних напрямках дещо ускладненої математичної структури (рис. 3.5).

Задачі на спільну роботу і задачі на одночасний рух, поданої математичної структури, містять такі спільні ознаки:

1) три пропорційні величини: загальний виробіток/відстань, продуктивність праці/швидкість, час роботи/руху;

2) три випадки: перші два стосуються роботи/руху кожного з двох об'єктів, а третій — їх спільної роботи/руху;

3) шість числових значень: загальний виробіток/загальна відстань першого об'єкта, загальний виробіток/загальна відстань другого об'єкта, загальний виробіток/загальна відстань при їх

	заг. виробіток / відстань	продукт. пр. / швидкість	час
I	□	?	□
II	□	?	□
I і II	**?**	?	□

	заг. виробіток / відстань	продукт. пр. / швидкість	час
I	□		**?**
II	□		□
I і II	□	?	□

	заг. виробіток / відстань	продукт. пр. / швидкість	час
I	**?**	?	□
II	□	?	□
I і II	□	?	□

	заг. виробіток / відстань	продукт. пр. / швидкість	час
I	□	?	□
II	□	?	□
I і II	□	?	**?**

	заг. виробіток / відстань	продукт. пр. / швидкість	час
I	□	?	□
II	□	?	**?**
I і II	□	?	□

	заг. виробіток / відстань	продукт. пр. / швидкість	час
I	□	?	□
II	**?**	?	□
I і II	□	?	□

Рис. 3.5. Опорні схеми задач на рух і на спільну роботу

спільній праці/русі та час роботи/руху першого об'єкта, час роботи/руху другого об'єкта, час їх спільної праці/руху; п'ять з них дано, а одне є шуканим.

Таблиця 3.2

Способи розв'язання задач на спільну роботу, в яких спільну продуктивність роботи двох виконавців знаходять дією віднімання, та на рух в одному напрямку

I спосіб	II спосіб
$A = N_1 \cdot t - N_2 \cdot t$ $S = V_1 \cdot t - V_2 \cdot t$	$A = (N_1 - N_2) \cdot t$ $S = (V_1 - V_2) \cdot t$
	$t = A : (N_1 - N_2)$ $t = S : (V_1 - V_2)$
$N_1 = (A + N_2 \cdot t) : t$ $N_2 = (A + N_1 \cdot t) : t$ $V_1 = (S + V_2 \cdot t) : t$ $V_2 = (V_1 \cdot t - S) : t$	$N_1 = A : t + N_2$ $N_2 = A : t + N_1$ $V_1 = S : t + V_2$ $V_2 = V_1 - S : t$

Математичну структуру задач на одночасний рух та на спільну роботу дещо ускладненої математичної структури можна подати у вигляді узагальненої таблиці (рис. 3.6).

	заг. виробіток / *відстань*	*продукт. пр.* / *швидкість*	час
I	A_1/S_1	?	t_1
II	A_2/S_2	?	t_2
I і II	A/S	?	t

Рис. 3.6. Узагальнена опорна схема задач на спільну роботу та на рух ускладненої математичної структури

Спосіб розв'язування цих задач, на відміну від задач, розглянутих вище, передбачає виконання ще двох арифметичних дій, внаслідок чого задачі такої математичної структури зводяться до попередніх.

Таким чином, задачі на спільну роботу та задачі на одночасний рух мають однакові математичні структури та аналогічні способи розв'язування, що дає можливість об'єднати їх в одну групу і розробляти методику навчання молодших школярів розв'язування цих задач у їх порівнянні, з метою узагальнення їх математичних структур та способів розв'язування.

Запропонований підхід повністю відповідає позиції Н. Ф. Тализіної та Г. Ніколи, які також дійшли висновку про необхідність об'єднання задач на рух і на спільну роботу в одну групу на основі спільної особливості, як задачі на процеси. На думку авторів, засвоївши основні величини, що містяться в таких задачах, та співвідношення між ними, а також навчившись моделювати ці співвідношення в умовах конкретної задачі і здійснювати відповідні їм перетворення, учні зможуть в подальшому розв'язувати будь-які задачі, де залежність між величинами явища, що описується, може бути подана аналогічно (зокрема, задачі з фізики на тиск, питому вагу тощо) [378].

Задачі на знаходження середнього арифметичного були включені в початковий курс математики у 90-х роках XX століття. У підручнику М. В. Богдановича для 3-го класу 3-річної початкової школи «Математика 3(4)» (1995) було введено новий для учнів початкової школи вид задач — задачі на знаходження середнього арифметичного, які раніше вивчалися в 4(5) класі середньої школи. У зв'язку з тим, що цей вид задач не вивчався раніше у початковій школі, а був запроваджений для вивчення у 3-му класі лише кілька років тому, у методичній літературі для початкової ланки освіти ця проблема є недостатньо розробленою. Крім того, методика роботи над задачами у середній школі відрізняється від роботи над задачами у початкових класах.

Спосіб розв'язування задач цього виду спирається на правило знаходження середнього арифметичного кількох чисел, яке розглядається в курсі математики 5-го класу. Тому ми вважаємо, що немає потреби у вивченні цього виду задач у початковій школі. Але ці задачі містяться у чинних підручниках і заявлені у програмі, тому зупинимося на розгляді групи задач на знаходження середнього арифметичного.

Серед усього різноманіття задач на знаходження середнього арифметичного, які подані у чинному підручнику [74; 75], можна виділити два класи таких задач:

1. Задачі на застосування правила знаходження середнього арифметичного.

2. Ускладнені задачі на знаходження середнього арифметичного, які містять пропорційні величини.

Перший клас охоплює задачі, які не містять групу пропорційних величин, і спосіб їх розв'язування полягає у «перекладі» задачі мовою математики, визначенні чисел, для яких треба знайти середнє арифметичне. Другий клас охоплює задачі, які містять три пропорційні величини і в яких явно не вказано, середнє арифметичне яких і скількох чисел треба знайти. «Ключем» до розв'язання цих задач є правила знаходження середньої величини.

Таким чином, ми виділили три групи «типових» задач:
— задачі, що містять однакову (сталу) величину;
— задачі на процес;
— задачі на знаходження середнього арифметичного.

3.3.1. Методика формування окремих умінь розв'язувати задач, що містять однакову (сталу) величину

Застосовуючи уміння, що набуті учнями на попередньому етапі навчання, ми сконструювали загальну методику формування у школярів умінь розв'язувати «типові» задачі, що містять однакову величину. Вивчення задач відбувається у наступному порядку:
1. Задачі на знаходження четвертого пропорційного (3-й клас, 4-й клас);
2. Задачі на подвійне зведення до одиниці (3-й клас, 4-й клас);
3. Задачі на пропорційне ділення (4-й клас);
4. Задачі на знаходження невідомих за двома різницями (4-й клас).

Нами складено методику на підставі перетворення задачі одного виду у задачу іншого виду і визначення спільних та відмітних ознак їх математичних структур, а також їх розв'язань.

Вивчення задач, що містять однакову (сталу) величину, відбувається за загальною програмою:

1. Введення задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою (сталою) є величина однієї одиниці виміру чи лічби, за допомогою складання задачі нового виду з двох простих задач. Спосіб розв'язування полягає у знаходженні однакової величини.

2. Формування уміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою (сталою) є величина однієї одиниці виміру або лічби, шляхом знаходження однакової (сталої) величини (3-й клас).

3. Введення задач на подвійне зведення до одиниці. Складання задачі на подвійне зведення до одиниці з двох простих задач (3-й клас).

4. Формування умінь розв'язувати задачі на подвійне зведення до одиниці (3-й клас, 4-й клас).

5. Формування уміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою (сталою) величиною є значення загальної величини, шляхом знаходження однакової (сталої) величини (4-й клас).

6. Формування уміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою (сталою) величиною є значення кількості або часу, шляхом знаходження однакової (сталої) величини (4-й клас).

7. Формування уміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного способом відношень (4-й клас).

8. Введення задачі на пропорційне ділення, в якій однаковою (сталою) величиною є значення величини однієї одиниці для обох випадків, шляхом перетворення відповідної задачі на знаходження четвертого пропорційного (4-й клас).

9. Формування уміння розв'язувати задачі на пропорційне ділення, в яких однаковою (сталою) величиною є значення величини однієї одиниці для обох випадків способом знаходження однакової (сталої) величини (4-й клас).

10. *Формування уміння розв'язувати задачі на пропорційне ділення, в яких однаковою (сталою) величиною є значення кількості або часу. Спосіб знаходження однакової (сталої) величини (4-й клас).*

11. Введення задачі на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою (сталою) величиною є значення величини однієї одиниці для обох випадків, шляхом перетворення відповідної задачі на пропорційне ділення (4-й клас).

12. Формування уміння розв'язувати задачі на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою (сталою) величиною є значення величини однієї одиниці для обох випадків шляхом знаходження однакової (сталої) величини (4-й клас).

13. *Формування уміння розв'язувати задачі на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою (сталою) величиною є значення кількості. Спосіб знаходження однакової (сталої) величини (4-й клас).*

Треба зазначити, що пункти 10, 13 не є обов'язковими і розглядаються лише за наявності резерву часу, для поглибленого вивчення курсу за рахунок варіативного компоненту навчального плану.

Центральною ідеєю методики навчання учнів розв'язування цих видів задач **є всебічний аналіз і дослідження задачі за наступними рівнями**:

— за зміною групи пропорційних величин, і визначення впливу цієї зміни на розв'язання задачі;
— за зміною числових даних, і визначення впливу цієї зміни на план розв'язування задачі;
— за зміною шуканої величини при певній однаковій величині, і визначення її впливу на план розв'язування задачі;
— за зміною однакової величини, і визначення впливу цієї зміни на план розв'язування задачі;
— за зміною числових даних задачі з метою застосування іншого способу розв'язування (для задач на знаходження четвертого пропорційного).

Для реалізації загальної програми вивчення задач, що містять однакову (сталу) величину, нами розроблено методики навчання молодших школярів розв'язування кожного з зазначених видів задач. Зміст цих методик подано нами у параграфі 5.1. Зазначимо, що кожна з розроблених методик реалізує три етапи навчання учнів розв'язування задач: підготовчу роботу, ознайомлення і закріплення — формування вмінь та навичок. Коротко охарактеризуємо кожну з зазначених методик.

Методика формування у молодших школярів умінь розв'язувати **задачі на знаходження четвертого пропорційного** передбачає дослідження задачі за наступними рівнями:

— за зміною групи пропорційних величин;
— за зміною числових даних;
— за зміною однакової величини;
— за зміною шуканої величини при певній однаковій величині, причому кожного разу ми визначаємо вплив зміни, що сталася, на план розв'язування задачі.

А також ми дослідили ці задачі:

— за зміною числових даних задачі з метою застосування іншого способу розв'язування.

Дослідження впливу зазначених змін на математичну структуру та план розв'язування надало можливість узагальнити істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного і узагальнити способи, якими розв'язуються ці задачі: спосіб знаходження однакової величини і спосіб відношень; також ми встановили можливості застосування кожного з них.

Таким чином, ***істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного***:

1) *ці задачі містять два випадки*;
2) *ці задачі містять три пропорційні величини*;
3) *одна з величин є однаковою для двох випадків*;
4) *стосовно однієї величини дані два числових значення*;
5) *стосовно іншої величини дано лише одне числове значення, а інше є шуканим.*

Спосіб знаходження однакової величини

1) *Першою дією знаходимо значення однакової величини за відомими значеннями двох інших величин стосовно одного з випадків.*
2) *Другою дією відповідаємо на запитання задачі.*

Спосіб відношень

1) *Першою дією дізнаємося про числове значення відношення між двома відомими числовими даними однієї з величин. Робимо висновок про числове значення і характер відношення між числовим даним і шуканим стосовно другої величини.*
2) *Другою дією відповідаємо на запитання задачі.*

Методика формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного реалізується засобом систем навчальних задач з:

— навчання розв'язування задач способом знаходження однакової (сталої) величини;
— навчання розв'язування задач способом відношень.

Треба зазначити, що під системою навчальних задач ми розуміємо добірку (ланцюжок) допоміжних задач, дібраних таким чином, щоб їх послідовне розв'язування природно привело учня до визначення і узагальнення способу розв'язування задачі певного виду.

У методиці формування окремих вмінь розв'язувати **задачі на пропорційне ділення** реалізовано наступні аспекти:

1. Для усвідомлення учнями зв'язку задач на пропорційне ділення і задач на знаходження четвертого пропорційного ми перетворили задачу на знаходження четвертого пропорційного (однакова величина — величина однієї одиниці) у задачу на пропорційне ділення, при чому спочатку отримали задачу першого підвиду, а потім другого.

2. Ми здійснили порівняння задач на знаходження четвертого пропорційного і на пропорційне ділення, визначили спільні та відмітні істотні ознаки.

3. Дослідження задачі йде за шляхом зміни однакової величини і її впливу на план розв'язування задач на пропорційне ділення.

4. Дослідження задачі на пропорційне ділення здійснювалося на підставі перетворення задачі одного підвиду у задачу другого підвиду.

5. Працюючи над кожною задачею на пропорційне ділення, ми досліджували вплив зміни величин задачі на її розв'язання.

6. Ми досліджували вплив зміни числових значень задачі на план її розв'язування.

Такий всебічний аналіз призвів до узагальнення ***істотних ознак задач на пропорційне ділення***, в яких однаковою є величина однієї одиниці або кількості чи часу:

1) *ці задачі містять два випадки*;
2) *ці задачі містять три пропорційні величини*;
3) *одна з величин є однаковою для двох випадків*;
4) *стосовно однієї величини дані два числові значення*;
5) *стосовно іншої величини дано значення суми, а значення цієї величини для кожного випадку є шуканими.*

Дослідження задачі на пропорційне ділення надало нам можливість узагальнити план розв'язування задач цього виду арифметичним методом — способом знаходження однакової величини.

Спосіб знаходження однакової величини

1) *Першою дією знаходимо значення другої суми (для величини стосовно якої дани числові значення для обох випадків).*
2) *Другою дією знаходимо значення однакової величини за двома сумами.*
3) *Третьою дією відповідаємо на перше запитання задачі.*
4) *Четвертою дією відповідаємо на друге запитання задачі.*

Методика формування окремого уміння розв'язувати задачі на пропорційне ділення реалізується за допомогою системи навчальних задач.

У методиці навчання молодших школярів розв'язування **задач на знаходження невідомих за двома різницями** реалізовано наступні елементи:

1. Для усвідомлення учнями зв'язку задач на знаходження невідомих за двома різницями і задачі на пропорційне ділення, їх порівняння, ми пропонуємо перетворити задачу на пропорційне ділення (однакова величина — величина однієї одиниці) у задачу на знаходження невідомих за двома різницями, при чому спочатку отримати задачу першого підвиду, а потім другого.

2. Дослідження задачі на знаходження невідомих за двома різницями йде шляхом зміни однакової величини і вивчення впливу цієї зміни на план розв'язування задач.

3. Дослідження задачі на знаходження невідомих за двома різницями здійснюється на підставі перетворення задачі одного підвиду у задачу другого.

4. Працюючи над кожною задачею, ми досліджуємо вплив зміни величин задачі та числових даних на план її розв'язування.

Методика формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі на знаходження невідомих за двома різницями реалізується за допомогою системи завдань із дослідження математичної структури задач на знаходження невідомих за двома різницями і узагальнення способів їх розв'язування, на підставі зміни величин задачі, числових даних, значення першої різниці і однакової величини. Ця система завдань допомагає учням визначити, що від зміни значення різниці, яку дано в умові задачі, та від зміни однакової величини спосіб міркування не змінюється; узагальнити математичну структуру задач на знаходження невідомих за двома різницями і спосіб знаходження однакової величини.

Істотні ознаки задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина однієї одиниці або кількості чи часу:

1) *ці задачі містять три пропорційні величини*;
2) *ці задачі містять два випадки*;
3) *одна з величин є однаковою для обох випадків*;
4) *для однієї величини дано два числових значення для кожного випадку*;
5) *числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано значення їх різниці.*

Спосіб знаходження однакової величини

1) *Першою дією знаходимо різницю даних числових значень однієї з величин.*
2) *Другою дією знаходимо значення однакової величини за значеннями двох різниць.*
3) *Третьою дією знаходимо шукане значення у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі.*
4) *Четвертою дією знаходимо шукане значення у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі.*

Під час дослідження задач на пропорційне ділення та на знаходження невідомих за двома різницями ми впевнилися, що в початковій школі не можна пропонувати учням задачі цих видів, в яких однаковим є загальне значення величини, тому що такі задачі не розв'язуються арифметичним способом, а для розв'язання алгебраїчним методом в учнів початкових класів немає певних знань: вони не вміють розв'язувати рівняння, які отримуються при розв'язуванні подібних задач.

Між тим, запропонована робота по дослідженню задач на пропорційне ділення та на знаходження невідомих за двома різницями надає можливість учням побачити різноманітні варіації структур задач цього виду і розширює коло задач, які пропонує чинний підручник.

Далі можна запропонувати дітям зіставити узагальнені математичні структури задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями з метою узагальнення істотних ознак цих видів задач та способу їх розв'язування:

Істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення та на знаходження невідомих за двома різницями:

1) Ці задачі містять три пропорційні величини;

2) Ці задачі містять два випадки;

3) Одна з величин є однаковою для обох випадків;

4) Для однієї з величин дано два числових значення для обох випадків;

5) Для другої величини дано лише одне числове значення, а інше є шуканим/обидва числові значення є шуканими, але дано їх суму або різницю.

Також можна узагальнити спосіб розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення та на знаходження невідомих за двома різницями способом знаходження однакової величини:

— знайти однакову величину за двома числовими значеннями стосовно одного з випадків/за двома сумами або різницями;

— відповісти на запитання задачі.

Методика формування в молодших школярів умінь розв'язувати **задачі на подвійне зведення до одиниці** передбачає ознайомлення дітей з двома математичними структурами цих задач: спрощеною — в якій дана або є шуканою величина подвійної одиниці (3-й клас) та дещо ускладненою — величина подвійної одиниці невідома, але не є шуканою (4-й клас). З метою узагальнення математичних структур таких задач відбувається дослідження задачі:

— за зміною величин задачі;

— за зміною числових даних задачі;

— за зміною шуканого задачі, причому кожного разу визначається вплив змін на математичну структуру та план розв'язування задачі.

Така робота надає можливість учням визначити істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці та узагальнити план розв'язування:

Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці (3-й клас):

1) чотири величини: кількість, час та загальне значення для даної кількості та часу, а також величина, яка поєднує усі ці величини, — «подвійна одиниця»;

2) дано три числових значення даних величин;

3) шуканим є одне з числових значень: або величини подвійної одиниці, або загальної величини або кількості, або часу.

План розв'язування *(3-й клас)*

1) першою дією знаходимо величину однієї одиниці для певної кількості або часу;

2) другою дією відповідаємо на запитання задачі.

Задача на подвійне зведення до одиниці математичної структури, що пропонується у 4-му класі, отримується з вивченої раніше (у 3-му класі) за допомогою зміни запитання. Наступне дослідження задачі нової математичної структури відбувається за поданим вище описом змін. Таким чином учні визначають істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці та узагальнюють спосіб їх розв'язування:

Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці (4-й клас):

1) чотири величини: кількість, час та загальне значення для даної кількості та часу, а також величина, яка поєднує усі ці величини, — подвійна одиниця;
2) два випадки;
3) величина подвійної одиниці однакова для обох випадків;
4) задача містить п'ять числових значень, причому чотири дані за умовою задачі, а п'яте є шуканим;

Спосіб розв'язування задач на подвійне зведення до одиниці (4-й клас)

«Ключем» до розв'язання є знаходження значення величини «подвійної одиниці».

З метою показу зв'язку між задачами на знаходження четвертого пропорційного та на подвійне зведення до одиниці учні перетворюють задачу на знаходження четвертого пропорційного, в якій однаковою (сталою) є величина однієї одиниці, у задачу на подвійне зведення до одиниці.

Порівнявши розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного та на подвійне зведення до одиниці, діти з'ясовують, що задача на подвійне зведення до одиниці розв'язується трьома діями, тому що введено значення ще однієї величини, а задача на знаходження четвертого пропорційного — двома; причому обидва розв'язання містять дві однакові дії. Можна стверджувати, що виконавши першу дію у розв'язуванні задачі на подвійне зведення до одиниці, ми привели цю задачу до задачі на знаходження четвертого пропорційного. Спільним в обох задачах є наявність однакової величини — величини однієї одиниці в задачі на знаходження четвертого пропорційного і величини «подвійної одиниці» у задачі на подвійне зведення до одиниці. Спосіб розв'язування цих задач полягає у знаходженні значення однакової величини — величини однієї одиниці (зведення до одиниці) або значення величини «подвійної одиниці» (подвійне зведення до одиниці).

3.3.2. Методика формування окремих умінь розв'язувати задачі на спільну роботу та на рух

Як було показано вище, задачі на спільну роботу та на рух мають багато спільного у математичній структурі: обидва види задач містять три пропорційні величини, два об'єкти, але вони описують різні процеси: перші описують процес спільної праці двох об'єктів, а інші спільний рух двох тіл. Математична структура цих видів задач містить характеристики роботи/руху кожного з двох об'єктів, та характеристики їх спільної роботи/руху. А також задачі на спільну роботу та задачі на рух мають однакові способи розв'язування. Тому нами реалізовано ідею співставлення задач цих видів з метою узагальнення їх математичних структур та способів розв'язування.

Як зазначалося в параграфі 3.1.2, теоретичну основу складання методики формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі певних видів становила теорія змістовних узагальнень В. В. Давидова, її реалізація при навчанні розв'язування «типових» задач, що здійснюється за III типом навчання (П. Я. Гальперін) на основі системно-структурного аналізу (З. О. Решетова).

Навчання за III типом орієнтування на основі системно-структурного аналізу реалізується за допомогою зміни ситуації задачі, числових даних та шуканих задачі та дослідження впливу цих змін на математичну структуру та план розв'язання задачі.

Вивчення ***задач на спільну роботу та на рух відбувається за загальною програмою***:

1. Задачі на спільну роботу, в яких дано продуктивність кожного виконавця (3-й клас).
2. Задачі на спільну роботу (не дано продуктивність кожного виконавця), в яких спільна продуктивність являє собою суму продуктивностей кожного виконавця (4-й клас).
3. *Задачі на спільну роботу (не дано продуктивність кожного виконавця), в яких спільна продуктивність являє собою різницю продуктивностей виконавців (4-й клас).*
4. Задачі на одночасний рух в різних напрямках: назустріч та у протилежних напрямках (4-й клас).
5. *Співставлення задач на спільну роботу, в яких спільна продуктивність являє собою суму продуктивностей кожного виконавця, та задач на одночасний рух в різних напрямках (назустріч або у протилежних напрямках). Узагальнення істотних ознак математичних структур задач та способів їх розв'язування (4-й клас).*
6. *Задачі на рух в одному напрямку: навздогін або з відставанням (4-й клас).*
7. *Співставлення задач на спільну роботу, в яких спільна продуктивність являє собою різницю продуктивностей виконавців, та задач на одночасний рух в одному напрямку. Узагальнення істотних ознак математичних структур задач та способів їх розв'язування (4-й клас).*
8. *Задачі на неодночасний рух (4-й клас).*

Треба зазначити, що 3, 5—8 не є обов'язковими, вони розглядаються за наявності резерву часу, для поглибленого вивчення курсу за рахунок варіативного компоненту навчального плану.

Центральною ідеєю методики навчання учнів розв'язування цих видів задач **є всебічний аналіз і дослідження задачі, залежно від таких її трансформацій**:

— за зміною ситуації задачі, і визначення впливу цієї зміни на розв'язання задачі;

— за зміною числових даних, і визначення впливу цього на план розв'язування задачі;

— за зміною шуканої величини, і визначення впливу цієї зміни на план розв'язування задачі;

Для реалізації загальної програми нами розроблено методику навчання молодших школярів розв'язування кожного з зазначених видів задач.

Методика формування в учнів уміння розв'язувати **задачі на спільну роботу** реалізується у 3-му та 4-му класах. Це пояснюється дещо відмінними математичними структурами задач цього виду: так, в 3-му класі пропонуються задачі на спільну роботу, в яких дано продуктивність кожного виконавця, а у 4-му — не дано продуктивність кожного виконавця, вона є проміжним невідомим.

Дослідження задач на спільну роботу відбувається за наступними змінами:

— зміною ситуації задачі;
— зміною числових даних задачі;
— зміною шуканого задачі;
— за зміною «характеру дій» виконавців.

Виконавши певні зміни, учні досліджують їх вплив на математичну структуру та план розв'язування задачі. Таке дослідження задачі є могутнім засобом визначення істотних ознак математичної структури та узагальнення плану розв'язування задачі.

Істотні ознаки задач на спільну роботу (3-й клас):

1) ці задачі містять три пропорційні величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи;

2) ці задачі містять три випадки: перший — стосується роботи першого виконавця, другий — роботи другого виконавця, а третій — спільної роботи двох виконавців;

3) дано продуктивність кожного виконавця, а шуканим є час спільної роботи/загальний виробіток при спільній роботі, або дано загальний виробіток та час при спільній роботі, а шуканим є продуктивність праці одного з виконавців.

План розв'язування задач на спільну роботу (3-й клас)

1) першою дією знаходимо продуктивність спільної праці виконавців;

2) другою дією відповідаємо на запитання задачі.

У 4-му класі задача на спільну роботу дещо ускладненої структури отримується за допомогою зміни запитання допоміжної задачі (задачі на знаходження суми двох часток, які є значеннями величини однієї одиниці виміру чи лічби, що містить групу пропорційних величин: загальний виробіток, продуктивність роботи, час роботи). Діти встановлюють вплив змін на розв'язання задачі і розв'язують її. А далі відбувається дослідження задачі через

зміни величин, числових даних і шуканого задачі, а також за зміною характеру «дій виконавців» — результати їх роботи спрямовані протилежно. Таким чином визначаються істотні ознаки та план розв'язування задач на спільну роботу:

Істотні ознаки задач на спільну роботу (4-й клас):

1) ці задачі містять три пропорційні величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи;

2) ці задачі містять три випадки: перший стосується роботи першого виконавця, другий — роботи другого виконавця, третій — спільної роботи двох виконавців;

3) для двох випадків дано значення загального виробітку і часу роботи;

4) для іншого випадку дано лише одне числове значення (або загального виробітку, або часу роботи), а інше — є шуканим.

План розв'язування задач на спільну роботу *(4-й клас)*

1) першою дією знаходимо продуктивність першого виконавця/спільну;

2) другою дією знаходимо продуктивність другого/першого або другого виконавця;

3) третьою дією знаходимо продуктивність спільну/першого або другого виконавця;

4) четвертою дією відповідаємо на запитання задачі.

Методика формування в молодших школярів умінь розв'язувати **задачі на рух**. Особливий вид задач, які містять опис процесу руху двох тіл одне відносно одного, які переміщуються в одному або в різних напрямках, ми називаємо задачами на рух. До задач на рух відносяться задачі: на рух в різних напрямках — назустріч, в протилежних напрямках; на рух в одному напрямку: навздогін та з відставанням.

Задачі на рух містять пропорційні величини: відстань, швидкість та час. Кожна з цих задач має **три підвиди** в залежності від даних та шуканого: I — задачі на знаходження відстані: дано швидкості обох тіл та час їх спільного руху, треба знайти відстань; II — задачі на знаходження швидкості: дано відстань, яку подолали обидва тіла, відомий час їх спільного руху та швидкість одного з тіл, треба знайти швидкість другого тіла; III — задачі на знаходження часу: дано значення відстані та швидкостей обох тіл, треба визначити час їх спільного руху.

В методичній літературі описано підхід до ознайомлення учнів с задачами на одночасний рух в різних напрямках, згідно з яким учні спочатку знайомляться з трьома підвидами задач на одночасний рух назустріч і розв'язують їх двома способами, і лише після цього знайомляться с задачами на одночасний рух в протилежних напрямках (М. О. Бантова, М. В. Богданович, М. В. Король, Я. А. Козак, А. А. Свєчніков, А. С. Пчьолко, Н. Б. Істоміна та інші.). Між тим, задачі на знаходження відстані при одночасному русі назустріч та в протилежних напрямках мають однакові способи розв'язування. Те ж саме можна сказати і про задачі на знаходження швидкості та часу. Тому має сенс розглядати одночасно задачі на рух назустріч та задачі на рух в протилежних напрямках.

Треба зазначити, що традиційно учні відразу знайомляться із двома способами розв'язування задач на знаходження відстані і швидкості. Однак, ці способи принципово відмінні: при розв'язуванні першим способом розглядається рух кожного тіла окремо, і лише потім відповідають на запитання задачі; а при розв'язуванні другим способом розглядається рух одного тіла відносно іншого і дізнаються, на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу. Саме це є «ключем» до розв'язання задачі, після чого можна відповісти на її запитання. Практика свідчить, що діти краще засвоюють перший спосіб міркування, другий спосіб викликає у багатьох дітей труднощі. Тому ми пропонуємо спочатку навчити молодших школярів розв'язувати задачі першим способом, а потім — другим; після чого їх порівняти и узагальнити.

Отже, ми пропонуємо підхід, коли задачі на одночасний рух назустріч і одночасний рух в протилежних напрямках розглядаються разом, спочатку розв'язуються задачі на знаходження відстані і швидкості першим способом, і після засвоєння першого способу вводиться другий спосіб і вивчаються задачі на знаходження часу. Вивчення ***задач на одночасний рух у різних напрямках (назустріч та у протилежних напрямках) ми здійснюємо за планом***:

1. Підготовча робота до введення задач на одночасний рух в різних напрямках.
2. Ознайомлення з задачами на рух в різних напрямках. Задачі на знаходження відстані. Перший спосіб розв'язування.
3. Задачі на знаходження швидкості. Перший спосіб.
4. Задачі на знаходження відстані і швидкості. Другий спосіб розв'язування.
5. Задачі на знаходження часу.
6. Формування умінь розв'язувати задачі на одночасний рух в різних напрямках.

7. Узагальнення математичних структур та способів розв'язування задач на одночасний рух в різних напрямках та задач на спільну роботу.

Дослідження задач на одночасний рух відбувається за наступними змінами:

— за зміною напрямку руху тіл;
— за зміною числових даних задачі;
— за зміною шуканого.

Визначення впливу цих змін на математичну структуру задачі та план її розв'язування допомагає учням сформулювати істотні ознаки задач на одночасний рух в різних напрямках та план їх розв'язування:

Істотні ознаки задач на одночасний рух назустріч та у протилежних напрямках:

1) в цих задачах йде мова про спільний рух двох тіл — назустріч/в протилежних напрямках;
2) в цих задачах є чотири числові значення: швидкість руху першого тіла, швидкість руху другого тіла, час їх спільного руху, відстань, яку подолали обидва тіла під час спільного руху; при чому три з них дани, а одне — шукане.

План розв'язування *(1 спосіб: S, V)*

1) першою дією визначають відстань, яку подолало перше тіло;
2) другою дією визначають відстань, яку подолало друге тіло;
3) третьою дією відповідають на запитання задачі.

План розв'язування *(2-й спосіб)*

1) першою дією визначають, на скільки збільшеється/зменшується відстань між тілами за одиницю часу;
2) другою дією відповідають на запитання задачі.

З метою підведення учнів до можливості порівняння задач на рух із задачами на спільну роботу, а також перетворення задачі на рух у задачу на спільну роботу і навпаки, учні знайомляться з табличною формою короткого запису задач на рух, вчаться складати за таблицею дві задачі на рух (на рух назустріч і рух у протилежних напрямках). А далі діти зіставляють короткі записи задачі на спільну роботу та задачі на одночасний рух в різних напрямках (можливих математичних структур), і помічають схожість математичних структур.

Спільні істотні ознаки задач на спільну роботу та на одночасний рух в різних напрямках:

1) ці задачі містять три пропорційні величини: загальний виробіток/відстань, продуктивність праці/швидкість, час роботи/руху;

2) ці задачі містять три випадки: перші два стосуються роботи/руху кожного з двох об'єктів, а третій — їх спільної роботи/руху;

3) ці задачі містять чотири числові значення: продуктивність праці/швидкість руху першого об'єкта, продуктивність праці/швидкість руху другого об'єкта, загальний виробіток/відстань при їх спільній праці/русі та час спільної роботи/руху; три з них дано, а одне є шуканим.

Порівнявши розв'язання задач двома способами (якщо це можливо), впевнюємося, що ці задачі мають однакові математичні моделі.

Набуті знання учні застосовують при перетворенні задачі на рух у задачу на спільну роботу та навпаки.

Задачі на рух в одному напрямку викликають найбільші труднощі у молодших школярів. Задачі цього виду присутні у чинному підручнику М. В. Богдановича, але їх дуже мало, тому казати про цілеспрямоване формування уміння розв'язувати задачі на рух в одному напрямку не можна.

Методичну основу розробки методики формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі на рух в одному напрямку становлять:

1. Зіставлення задач на одночасний рух назустріч та одночасний рух навздогін, задач на рух навздогін та задач на рух з відставанням, під час ознайомлення (П. М. Ерднієв).
2. Узагальнення способів розв'язування задач на рух в одному напрямку на підставі задач з буквеними даними (Л. Г. Петерсон).

Теоретичною основою розробки методики формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі на одночасний рух в одному напрямку, так само, як і для розробки методики навчання розв'язування задач на одночасний рух в різних напрямках, є теорія змістовних узагальнень В. В. Давидова. В основі будь-якого узагальнення, в тому числі й змістовного, лежить порівняння. Порівняння може бути організовано по-різному — послідовно або паралельно, що, на думку А. К. Артьомова, суттєво впливає на результат навчання. Суть послідовного порівняння полягає в тому, що новий об'єкт порівнюється з раніш вивченим. Паралельне порівняння характеризується тим, що відразу, одночасно подаються декілька зразків, що відображують усі або найбільш типові варіанти з даної сукупності, щоб на підставі їх порівняння зробити правильне узагальнення [32].

При використанні в навчанні як послідовного, так і паралельного порівняння, гальмуються помилкові і закріплюються правильні тимчасові зв'язки, підвищується диференціація понять і правил, утворюються міцні асоціативні зв'язки за схожістю і контрастом. Взагалі, психологами встановлено, що знання, подані у порівнянні, засвоюються ефективніше і запам'ятовуються міцніше. Крім того, слід зазначити, що порівняння сприяє встановленню більш глибоких зв'язків раніш вивченого і нового матеріалу, полегшує засвоєння знань, допомагає побачити аналогії [390]. Саме такий підхід до навчання розв'язування задач на рух в одному напрямку обрано П. М. Ерднієвим [610].

Тому дану методику ми розробили на основі послідовного порівняння задач на одночасний рух в різних напрямках та задач на одночасний рух в одному напрямку, і паралельного порівняння задач на одночасний рух навздогін з задачами на одночасний рух з відставанням. Дана методика реалізується за допомогою системи завдань, у якій містяться задачі з двома умовами руху: або рух відбувається назустріч, або навздогін; або рух відбувається у протилежних напрямках, або з відставанням; або навздогін, або з відставанням. При розгляді задач, в яких подано два варіанти руху — навздогін та з відставанням, учні досліджують ці задачі за зміною шуканого.

Далі ми узагальнили математичні структури та способи розв'язування задач на рух навздогін та задач на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання. Крім того, нами здійснено спробу узагальнити математичні структури та способи розв'язування задач на одночасний рух навздогін або назустріч та задач на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання або додавання.

Ми узагальнили математичну структуру та способи розв'язування пар задач:

1. На знаходження відстані на момент початку руху або загального виробітку;
2. На знаходження часу зустрічі або часу спільної праці;
3. На знаходження швидкості або продуктивності одного з об'єктів.

Усі узагальнення зафіксовані у буквеній формі. Спочатку широко застосовуємо задачі з буквеними даними, а далі переходимо до заміни числових даних буквами і складання формул для знаходження можливих шуканих.

У чинних підручниках з математики для 4-го класу є задачі, які пов'язані з рухом за течією та проти течії річки. Таких задач, на жаль, дуже мало. Тому в описі методики ми приділили увагу й задачам на рух за течією та проти течії річки.

Докладніше про методику навчання молодших школярів розв'язування задач на спільну роботу та на рух у параграфі 5.2. Методика формування окремого уміння розв'язувати задачі на спільну роботу та на рух реалізується за допомогою системи навчальних завдач.

3.3.3. Методика формування окремих умінь розв'язувати задачі на знаходження середнього арифметичного

Задачі на знаходження середнього арифметичного вивчаються за планом:

1. Задачі на застосування правила знаходження середнього арифметичного:
   1) на знаходження середньої температури;
   2) на знаходження середньої довжини;
   3) на знаходження середньої маси;
   4) на знаходження середньої швидкості;
   5) на знаходження середньої схожості насіння;
   6) на знаходження середньої ціни.
2. Ускладнені задачі на знаходження середнього арифметичного:
   1) на знаходження середньої довжини;
   2) на знаходження середньої маси;
   3) на знаходження середньої швидкості;
   4) на знаходження середньої схожості насіння;
   5) на знаходження середньої ціни.

Дослідження задач на знаходження середнього арифметичного відбувається за наступними змінами:

— за зміною ситуації задачі: задача на знаходження середньої температури перетворюється у задачу на знаходження середньої довжини, а потім — на знаходження середньої маси і так далі;

— за зміною числових даних задачі;

— за наступною зміною: задача, у якій містилося кілька значень однієї і тієї самої величини, перетворюється у задачу, що містить групу пропорційних величин (ускладнену).

Виконавши певні зміни, учні досліджують їх вплив на математичну структуру та план розв'язування задачі. Таке дослідження задачі є могутнім засобом визначення істотних ознак математичної структури та плану розв'язування задач.

***Істотні ознаки задач на знаходження середнього арифметичного*:**

1) ці задачі містять або кілька числових значень однієї тієї самої величини, або містять три пропорційні величини і кілька випадків;

2) якщо задача містить групу пропорційних величин, то дани значення двох величин: величини однієї одиниці виміру чи лічби/загальної величини та кількості або часу для кількох випадків;

3) в цих задачах шуканим є середнє значення або середнє значення величини однієї одиниці виміру або лічби.

«Ключем» до розв'язання цих задач є правила знаходження середньої величини.

Спосіб розв'язування задач на знаходження середнього арифметичного

1) знаходимо суму значень загальної величини для усіх випадків;
2) знаходимо суму значень кількості або часу;
3) знаходимо середнє значення.

Докладніше про методику навчання учнів розв'язування задач на знаходження середнього арифметичного у параграфі 5.3. Методика формування окремого уміння розв'язувати задачі на знаходження середнього арифметичного реалізується за допомогою системи навчальних завдач.

Розділ 4

ФОРМУВАННЯ ЗАГАЛЬНОГО УМІННЯ РОЗВ'ЯЗУВАТИ СЮЖЕТНІ ЗАДАЧІ

4.1. СИСТЕМА НАВЧАЛЬНИХ ЗАДАЧ З ФОРМУВАННЯ ЗАГАЛЬНОГО УМІННЯ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРОСТИХ ЗАДАЧ

4.1.1. Зміст підготовчого етапу до введення поняття «задача»

Метою підготовчого етапу до введення поняття «задача» є формування у молодших школярів поняття про конкретний зміст арифметичних дій додавання і віднімання, а також поняття про конкретний зміст збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, відношення різницевого порівняння та їх схематичного зображення.

Математичною основою пояснення змісту додавання є трактування суми як об'єднання двох множин без спільних елементів. Конкретний зміст дії віднімання розглядається як вилучення частини елементів скінченної множини і перерахунок решти. Це трактування легко перекладається на мову практичних дій, що дозволяє у процесі формування уявлень про зміст додавання і віднімання спиратися на досвід дітей і перерахунок предметів. Співвіднесення предметної, вербальної, схематичної та математичної моделей і перехід від однієї моделі до іншої є основою організації діяльності учнів, спрямованої на засвоєння предметного змісту арифметичних дій додавання і віднімання та відношення різницевого порівняння.

Спочатку школярам пропонуються навчальні завдання, виконуючи які, вони можуть застосовувати власний досвід. Ці завдання пов'язані з аналізом об'єктів (предметних, схематичних, математичних), з їх співвідношенням, що дозволяє поступово ввести маленького школяра у світ математичної термінології та символіки.

Цілі навчальних завдань на підготовчому етапі до ознайомлення з поняттям «задача» такі:

1. Сформувати поняття про арифметичні дії додавання і віднімання і відношення різницевого порівняння.

2. Сформувати у дітей уміння співвідносити предметну або схематичну модель з математичною моделлю; в тому числі сформувати у дітей уміння співвідносити словесну і схематичну модель з математичною, а також самостійно виконувати схематичний малюнок за текстом.
3. Сформувати у дітей знання про назви компонентів дій додавання і віднімання; правила знаходження невідомого компонента.

Зазначені цілі реалізуються програмою підготовчого етапу до введення поняття «задача». Розглянемо ***програму підготовчого етапу*** докладно:

1. Формування понять «об'єднати», «вилучити».
2. Формування конкретного змісту арифметичних дій додавання і віднімання.
3. Співвіднесення практичної дії об'єднання елементів двох множин, що не перетинаються/вилучення елементів множини і перерахунку решти з арифметичною дією додавання/віднімання.
4. Співвіднесення арифметичної дії додавання/віднімання з практичною дією об'єднання елементів двох множин, що не перетинаються/вилучення елементів множини і перерахунку решти.
5. Співвіднесення практичної дії об'єднання елементів двох множин, що не перетинаються/вилучення елементів множини і перерахунку решти з схематичним рисунком.
6. Співвіднесення схематичного рисунка, на якому ілюструється об'єднання елементів двох множин, що не перетинаються/вилучення елементів множини і перерахунку решти з арифметичною дією додавання/віднімання.
7. Перехід від практичних дій об'єднання елементів двох множин, що не перетинаються/вилучення елементів множини і перерахунку решти до схематичного зображення, а від нього до математичного запису.
8. Перехід від словесного опису (текст) операції об'єднання елементів двох множин, що не перетинаються/вилучення елементів множини і перерахунку решти до схематичного малюнка, а від нього до запису математичного виразу.
9. Перехід від словесного опису (текст) операції об'єднання елементів двох множин, що не перетинаються/вилучення елементів множини і перерахунку решти до схематичного малюнка, а від нього до вибору математичного виразу.
10. Складання текстів-ситуацій за даним виразом — сумою/різницею двох чисел.
11. Коментування сюжетних малюнків. Перехід від сюжетних малюнків, які ілюструють операції об'єднання елементів двох

множин, що не перетинаються/вилучення елементів множини і перерахунку решти до схематичного креслення, а від нього до запису математичного виразу суми/різниці.

12. Перехід від словесного опису (текст) відношення «стільки ж» до схематичного малюнка, а від нього до запису рівності.

13. Формування конкретного змісту відношення збільшення/зменшення числа на кілька одиниць. Ілюстрування відношення збільшення/зменшення числа на кілька одиниць практичними діями та на схематичному рисунку.

14. Перехід від словесно заданого відношення збільшення/зменшення числа на кілька одиниць (тексту) до схематичного рисунка.

15. Перехід від словесно заданого відношення збільшення/зменшення числа на кілька одиниць (тексту) до схематичного рисунка, а від нього до вибору арифметичної дії додавання/віднімання і математичного запису.

16. Перехід від схематичного рисунка відношення збільшення/зменшення числа на кілька одиниць, операцій об'єднання/вилучення до запису рівності.

17. Схематичне зображення суми двох доданків. Зв'язок знаходження невідомого доданка з операцією вилучення з цілого (суми) однієї частини (відомого доданка).

18. Перехід від словесно заданого співвідношення додавання (невідомим є доданок) до схематичного рисунка, а від нього до математичного запису.

19. Формування поняття про співвідношення різницевого порівняння. Схематичне зображення.

20. Співвіднесення схематичного рисунка, на якому ілюструється співвідношення різницевого порівняння, з математичним записом.

21. Перехід від словесного опису (тексту), в якому задано співвідношення різницевого порівняння, до схематичного рисунка, а від нього до запису математичного виразу.

22. Постановка запитань до даної умови.

Запропонована програма реалізується через систему завдань, типи яких подані у роботах автора [499; 503].

4.1.2. Методика ознайомлення першокласників з поняттям «задача»

Метою етапу ознайомлення молодших школярів з поняттям «задача» є формування у молодших школярів:

— знань про складові задачі (умова і запитання, числові дані і шукане) та етапи її розв'язування;
— знань про зв'язок умови і запитання задачі;
— умінь виділяти умову задачі та її запитання;
— умінь виділяти числові дані і шукане задачі;
— умінь виконувати схематичний рисунок до задачі;
— умінь свідомо обирати арифметичну дію, якою розв'язується задача;
— умінь виконувати розв'язання задачі;
— умінь відповідати на запитання задачі;
— умінь оформляти розв'язання задачі.

Треба зазначити, що на цьому етапі учням відразу пропонуються для розв'язання п'ять видів простих задач:

1) Задачі на знаходження суми.
2) Задачі на знаходження остачі (різниці).
3) Задачі на знаходження невідомого доданка.
4) Задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць.
5) Задачі на різницеве порівняння.

Ознайомлення молодших школярів з поняттям «задача» ми пропонуємо здійснювати за ***програмою***:

1. Складові частини задачі — умова і запитання, порівняння задачі і аналогічного маленького оповідання, виділення умови і запитання в текстах задач, зв'язок умови і запитання.

Учні дізнаються, що задача складається з умови і запитання, без запитання немає задачі. Усвідомленню цього факту сприяють завдання на порівняння двох текстів — маленького оповідання і задачі. Наприклад:

1) В парку гуляло 5 дітей. 2 дитини пішли. Тоді залишилося 3 дитини.

2) В парку гуляло 5 дітей. 2 дитини пішли. Скільки дітей залишилося гуляти в парку?

Учням надаються ознаки, за якими можна визначити умову — це те, що відомо в задачі, і запитання — це те, що невідомо. Аналізуючи різноманітні тексти, які містять і умову, і запитання, діти впевнюються: щоб отримати задачу, треба, щоб умова була пов'язана із запитанням. Усвідомлення цього факту відбувається й при виконанні завдань на добір запитання до даної умови або на добір умови до даного запитання, а також при виконанні завдань на зміну умови (запитання) так, щоб вона була пов'язана з даним запитанням (умовою).

Добір запитання до даної умови

Застосування завдань на добір запитання до даної умови стимулює учнів до аналізу тексту, до висловлювання суджень, їх обґрунтування, сприяючи тим самим розвитку учнів. Серед переліку запитань є такі, в яких запитується про вже відоме в умові задачі, і, з'ясувавши це, учні повинні їх відкинути, як такі, що не можна поставити до даної умови. Також серед запитань подаються й кілька різних запитань про невідоме, яке можна знайти за числовими даними умови. При цьому важливо підвести дітей до розуміння того, що до даної умови можна поставити кілька запитань. До переліку запитань вносяться й такі, в яких запитується про те, що невідомо, але поставити його до даної умови не можна, тому що відсутній зв'язок між цим запитанням і запропонованою умовою. Наприклад:

Підбери запитання до даної умови:

В одному кошику 7 груш, а в другому на 3 груші менше.

— Скільки груш в першому кошику?
— На скільки груш в першому кошику більше, ніж в другому?
— Скільки груш в другому кошику?
— Скільки груш в двох кошиках?
— Скільки груш в третьому кошику?

Використання таких завдань сприяє не лише засвоєнню структури задачі, але й ставить учнів перед необхідністю аналізувати зв'язки між даними і шуканим, формує вміння вибирати потрібний зв'язок, який дозволяє відповісти на запитання задачі.

Добір умови до даного запитання

Дана дія є оберненою відносно попередньої і має сенс з логічної точки зору, але, як зазначає А. В. Бєлошиста, вона для дітей є складною. За даними цього автора, діти готові до нього лише починаючи з 2-го чи 3-го класу, коли їм дійсно вже легко працювати з досить великими текстовими масивами. Але до цього часу прості задачі є вже засвоєними і не цікавлять дітей. Якщо ж діти добре читають вже в 1-му класі, то цей прийом є корисним для розвитку оперативної пам'яті (тому що дитині потрібно держати «в розумі» усю словесну конструкцію) [62]. Наприклад:

Скільки книжок на другій полиці?

«На одній полиці 7 книжок, а на другій на 2 книжки більше».

«На одній полиці 5 книжок, а на другій — 8 книжок».

«На двох полицях 10 книжок, причому на першій полиці 4 книжки».

Зміна запитання/умови так, щоб воно було пов'язано з умовою/запитанням.

Цей вид завдань вирішує ті самі завдання, що й попередні, а саме усвідомлення учнями взаємозв'язку між умовою і запитанням та сприяє засвоєнню структури задачі. Наприклад:

1) «На одній тарілці 5 яблук, на другій 4. Скільки груш на двох тарілках?»

Зміни запитання так, щоб воно було пов'язано з умовою. Зміни умову так, щоб можна було відповісти на запитання задачі.

2) «Рибак спіймав 8 карасів, а окунів на 6 більше, ніж карасів».

Зміни умову так, щоб можна було відповісти на запитання: «Скільки всього риб спіймав рибак?»

Треба зазначити, що при виконанні завдань на:

— *виділення умови і запитання;*
— *порівняння задачі і маленького оповідання;*
— *аналіз задачі, в якій запитання не пов'язано з умовою;*
— *добір запитання до даної умови;*
— *добір умови до даного запитання;*
— *зміну умови так, щоб вона була пов'язана з даним запитанням;*
— *зміну запитання так, щоб воно було пов'язано з даною умовою,*

здійснюється *етап попереднього ознайомлення з дією* виділення умови і запитання (дивись таблицю Б. 1 у додатку Б).

2. Числові дані й шукане задачі. Виділення числових даних і шуканого.

Дітей слід познайомити з термінами «числові дані» і «шукане», вони повинні усвідомити, що числові дані — це числа, що відомі в задачі, вони містяться в умові, а на шукане число вказує запитання задачі (*здійснюється етап попереднього ознайомлення з дією визначення числових даних і шуканого*). При роботі над текстом задачі пропонуємо підкреслити умову однією рискою, обвести кружком числові дані і пояснити, що означає кожне числове дане, підкреслити запитання двома рисками і пояснити, що означає шукане (*етап матеріалізованої дії з визначення числових даних і шуканого*). Для чіткого розуміння і виділення в тексті задачі даних та шуканого корисні задачі із зайвими числовими даними та числовими даними, яких бракує.

Завдання з числовими даними, яких бракує, та із зайвими числовими даними

В основі вміння моделювати текст задачі на рівні математичного запису (вираз, рівність) лежить вміння моделювати текст задачі на рівні схеми (виділяти величини, залежності між ними, дані, шукане, відношення), а також уміння виділяти невідоме і здійснювати його пошук, який може бути пов'язаний з аналізом не лише відомих відношень. З цією метою застосовуються тексти з даними, яких бракує, що сприяє формуванню уміння визначати, чи є склад даних повним, і доповнювати у разі потреби. Наприклад:

1) Чим схожі тексти задач? Чим вони відрізняються? Яку задачу ти зможеш розв'язати? Яку — ні? Чому?

а) В вазі лежали черешні і 2 яблука. Скільки всього фруктів лежало в вазі?

б) В вазі лежало 4 черешні і 2 яблука. Скільки всього фруктів лежало в вазі?

2) Порівняй тексти задач. Чим вони схожі? Чим відрізняються? Чи можна стверджувати, що ці задачі мають однакові розв'язання?

а) У бабусі було 3 гуся, 5 курок. Скільки птахів було у бабусі?

б) У бабусі було 3 гуся, 5 курок і 2 кроля. Скільки птахів було у бабусі?

3) Порівняй тексти. Чим вони схожі? Чим відрізняються?

а) З кошика взяли 4 яблука. Скільки яблук залишилося в кошику?

б) В кошику було 10 яблук. Скільки яблук залишилося в кошику?

— Доповни умову кожної задачі так, щоб можна було відповісти на поставлене запитання.

4) Вибери дане, якого недістає, з кількох умов:

«На аеродромі було 7 літаків. Скільки літаків залишилося на аеродромі?»
1) Вранці прилетіло 2 літаки.
2) Улетіло на 2 літаки менше, ніж було.
3) Улетіло 3 літаки.

При виділенні числових даних і шуканого в задачах із зайвими числовими даними і з числовими даними, яких бракує, учні вголос пояснюють, які числа дані в задачі, скільки їх і яке число є шуканим; встановлюють, чи вистачить числових даних для відповіді на запитання задачі або які з трьох числових даних потрібні для відповіді на запитання задачі. Для з'ясування цих фактів

застосовується схематична інтерпретація тексту задачі. Таким чином, *дія виділення числових даних і шуканого* набуває подальшого засвоєння у *формі голосного мовлення*.

Вибір запитання до даної умови

Пропонується умова, до якої подано кілька варіантів запитань у наступному порядку:
1) відповідь на це запитання не вимагає виконання арифметичної дії,
2) відповідь на це запитання вимагає виконання арифметичної дії.

Наприклад:
1) Рибак спіймав 8 карасів, а окунів на 6 більше, ніж карасів. Щук на 5 менше, ніж окунів.

На які запитання ти зможеш відповісти, не виконуючи арифметичних дій додавання і віднімання? На які запитання можна відповісти, виконавши додавання або віднімання?

- На скільки менше рибак спіймав карасів, ніж окунів?
- Скільки карасів спіймав рибак?
- Скільки окунів спіймав рибак?
- Скільки щук спіймав рибак?
- На скільки більше рибак спіймав окунів, ніж щук?
- Скільки карасів і окунів спіймав рибак?
- Скільки всього риб спіймав рибак?

З метою формування уміння виділяти відомі та невідоме використовується прийом вибору, в основі якого лежить класифікація запропонованих запитань. Учням пропонується дізнатися, на які запитання можна відповісти, не виконуючи арифметичних дій додавання і віднімання, а на які запитання можна відповісти, виконавши додавання або віднімання. Такі завдання вимагають від учнів великої розумової роботи: вони повинні співвіднести числові дані, які містяться в поданій умові, з шуканим, на яке вказує конкретне запитання. Отже, *дія виділення числових даних і шуканого* тут виконується швидко, в формі «*зовнішнього мовлення про себе*».

Тексти з парадоксальним сюжетом або з парадоксальними даними

Ці завдання є дуже цікавими для дітей, тому що їм пропонуються «нібито задачі» — ці тексти містять і умову, і запитання, але в умові описується такий сюжет, який не має місця у житті; крім того, доцільно застосовувати тексти з парадоксальними даними (такі числові дані, які суперечать логіці або здоровому глузду). Після аналізу таких текстів учні можуть змінити сюжет або числове дане так, щоб задачу можна було розв'язати.

При виконанні завдань, в яких пропонуються парадоксальні дані, діти повинні встановити числові дані задачі і шукане, зіставити числові дані і дійти висновку, що при даному сюжеті такі дані неможливі. Отже, *дія виділення числових даних і шуканого* набуває подальшого засвоєння в формі *«зовнішнього мовлення про себе»*. Завдання з парадоксальним сюжетом надають можливість здійснити *попереднє ознайомлення з дією виділення об'єкта задачі*, а саме, що в задачі події мають відбуватися з одним і тим самим предметом і про нього потрібно запитувати, і це повинно мати місце у житті.

3. Засвоєння структури задачі

Аналіз різних конструкцій задачі, коли частина умови міститься у запитанні, коли запитання стоїть перед умовою тощо.

В міру усвідомлення дітьми структури задачі пропонуємо завдання, які спонукають дітей активно застосовувати ті уявлення, якими вони оволоділи, а також вимагають використання змістовних ознак в аналізі текстів завдань. Це тексти задач, що мають неканонічну конструкцію, тобто є розходження між змістовою та формальною структурою: частина умови міститься у запитанні; вимога задачі сформульована розповідним реченням і містить частину умови; текст задачі являє собою одне складне запитальне речення; текст задачі являє собою одне складне розповідне речення, в якому спочатку йде вимога. Наприклад:

Чи можна цей текст назвати задачею? Що в ньому незвичайного? Розкажи умову. Розкажи запитання.

— Скільки вагонів залишилося в поїзді, якщо в ньому було 10 вагонів, а на станції відчепили 3 вагони?
— У відрі було 7 л води. Скільки літрів води залишилося у відрі, якщо з нього взяли 4 л води?
— У кравчині було 8 м тканини. З 6 м вона пошила плаття. Знайди остачу тканини.

В таких текстах правильно виділити умову і запитання можна, лише спираючись на змістовні ознаки. *Дія виділення умови і запитання* виконується в формі «*зовнішнього мовлення про себе*».

Вибір виразу, який відповідає тексту задачі

Мама купила 10 зошитів. З них 6 у клітинку, решта у лінійку. Скільки зошитів у лінійку купила мама?

Вибери вираз, який дозволяє відповісти на запитання задачі: $10 - 6$, $10 + 6$.

Вибір тексту задачі, який відповідає математичному виразу

Вибери текст, якому відповідає даний вираз $4 + 3$:

«Марійка висадила на клумбу 4 тюльпана, а Мишко на 3 тюльпана більше. Скільки тюльпанів висадив Мишко?»

«Марійка висадила 3 тюльпана, а Мишко — 4 тюльпана. На скільки тюльпанів більше висадив Мишко, ніж Марійка?»

«Марійка висадила на клумбу 4 тюльпана, а Сашко 3. Скільки всього тюльпанів висадили діти?»

Вибір схеми, яка відповідає тексту задачі

Вибери схему, яка відповідає тексту задачі:

На одній полиці 10 книг, а на другій на 4 книжки менше. Скільки книжок на другій полиці?

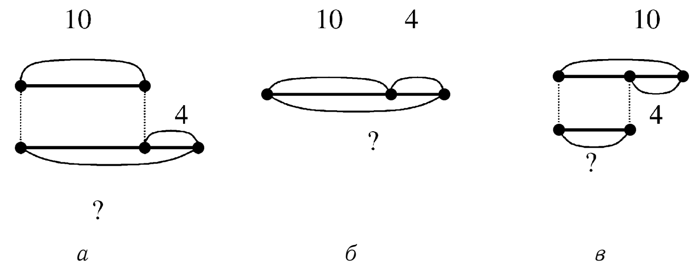


Рис. 4.1. Схематичні рисунки, серед яких слід вибрати схему, що відповідає даній задачі

Вибір тексту задачі, який відповідає схемі

Вибери текст задачі, яка відповідає схемі:

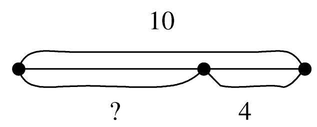


Рис. 4.2. Схематичний рисунок, до якого треба вибрати текст задачі

1. У Наталки 10 цукерок, а у Надійки на 4 цукерки менше. Скільки цукерок у Надійки?
2. На озері плавало 10 гусок і 4 качки. Скільки птахів плавало на озері?
3. В коробці 10 олівців, серед них 4 прості, решта кольорові. Скільки кольорових олівців у коробці?
4. На дитячому майданчику було 10 дітей, 4 дитини пішли. Скільки дітей залишилося на майданчику?
5. Столяр виготовив 10 стільців та 4 стола. На скільки більше стільців, ніж столів зробив столяр?

На підставі сформованих уявлень про задачу, її структуру, а також уміння встановлювати взаємозв'язки між умовою і запитанням, формується вміння аналізувати, а потім інтерпретувати текст задачі (моделювати різноманітні текстові конструкції на рівні схем, виразів, рівностей) і здійснювати переклад одних моделей у інші. З цією метою використовуються прийоми вибору, в яких дії учнів спрямовуються вказівкою «Вибери...», що дозволяє здійснювати іншу, на відміну від традиційної, подачу зразка, коли він не копіюється сліпо, а виявляється дітьми самостійно. Так, учням пропонується текст задачі і кілька виразів або кілька схем, складених з числовими даними задачі, серед яких слід вибрати той вираз, який є математичною моделлю задачі.

До певного виразу або схеми пропонуємо по кілька текстів задач, з метою усвідомлення учнями того факту, що один і той самий вираз може бути математичною моделлю різних за математичною структурою задач.

При виконанні завдань на вибір схеми до даного тексту задачі або на вибір задачі до даної схеми, набуває подальшого засвоєння *дія зображення величини у вигляді довжини відрізка, інтерпретування довжини відрізка як деякої величини, подання одного відрізка через інші* (дія засвоюється *в матеріалізованій формі*).

Завдання на вибір виразу до даного тексту задачі та вибір тексту задачі до даного математичного виразу передбачають опрацювання *дії визначення числових даних і шуканого* в формі «*зовнішнього мовлення про себе*» та засвоєння *дії обґрунтування вибору арифметичної дії*, якою розв'язується задача, в *матеріалізованій формі*.

Вибір схеми і виразу до даного тексту задачі

В процесі аналізу схем, математичних записів з метою «вибору» у дітей формується уміння читати текст задачі (виділяти умову, запитання, встановлювати взаємозв'язки між ними), а також накопичується досвід у перекладі одних моделей у інші (як словесної в схематичну, математичну, так і навпаки), але центральне місце при виконанні таких завдань належить опрацюванню *в матеріалізованій формі* дії *обґрунтування вибору арифметичної дії*.

Подальша робота в цьому напрямку пов'язана з формуванням уміння виконувати моделі на рівні схеми.

При виконанні завдань на вибір виразу до даного тексту задачі та завдань на вибір тексту задачі до даного виразу, вибір схеми і виразу до даного тексту задачі, учні знайомляться з тим, що вибір арифметичної дії залежить від певних слів-ознак, які містяться в тексті задачі. Отже, тут відбувається *попереднє ознайомлення з визначенням слів-ознак окремих видів співвідношень*. Так, із словом «всього» або «було-стало» пов'язано співвідношення додавання, із словом «було-залишилося» — співвідношення віднімання, із словами «на... більше (менше)» — співвідношення різницевого порівняння.

4. Складання схематичного рисунка до даної задачі

Ця робота була розпочата ще на ступені підготовчої роботи до введення поняття «задача»: учні вчилися переходити від словесної до схематичної інтерпретації операцій об'єднання або вилучення, а від неї до математичного запису. Відмінністю виконуваних при цьому завдань є лише те, що текст доповнюється запитанням і називається задачею; учень пояснює кожний власний крок із складання схематичного рисунка, тут *дія складання схематичного рисунка* засвоюється в *формі голосного мовлення*.

5. Ознайомлення з порядком роботи над задачею та записом її розв'язання

При виконанні цих завдань учні знайомляться з порядком роботи над задачею за пам'яткою № 1:

Пам'ятка № 1

Перекажи умову задачі. Мені відомо...
Перекажи запитання задачі. Про що треба дізнатися?
Поясни, що означають числа задачі; зроби схематичний малюнок.
Поясни розв'язання: якою арифметичною дією розв'язується задача? Чому?
Запиши розв'язання.
Повтори запитання задачі. Дай відповідь на це запитання.

і вчаться записувати задачу у три рядки, а також знайомляться з поняттями «розв'язання», «відповідь».

Як зазначалося вище, Н. О. Менчинською було висунуто тезу про те, що основною дією при розв'язуванні простих задач є *дія вибору арифметичної дії*, тому вже з розв'язування першої задачі починається її опрацювання у *формі голосного мовлення*. Вчитель повідомляє, що при знаходженні значень виразів дія, яку слід виконати із числами, заздалегідь відома, а при розв'язуванні задачі відомі лише числові дані. Дію, якою розв'язується задача, слід визначити, виходячи із запитання задачі та певних слів-ознак, які містяться в умові задачі. Пояснити вибір арифметичної дії можна наступним чином:

Задачі на знаходження суми

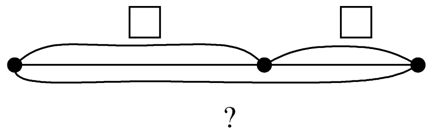


Рис. 4.3. Схематичний рисунок до задачі на знаходження суми

Якщо в задачі запитується, скільки стало/всього, то міркуємо так:

1) Стало/Всього більше, ніж було/окремо та окремо, а більше число знаходимо дією додавання.

2) Стало/Всього — □ та ще □, □ та □ знаходять дією додавання. Тому задачу розв'язуємо дією додавання.

Задачі на знаходження остачі

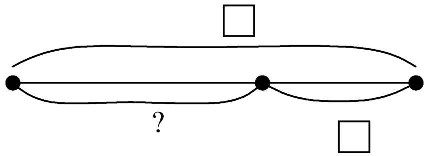


Рис. 4.4. Схематичний рисунок до задачі на знаходження остачі

Якщо в задачі запитується, скільки залишилось, то міркуємо так:

1) Залишилось менше ніж було, а менше число знаходять дією віднімання.

2) Залишилось □ але без □, □ без □ знаходимо дією віднімання, тому задачу розв'язуємо дією віднімання.

Задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць

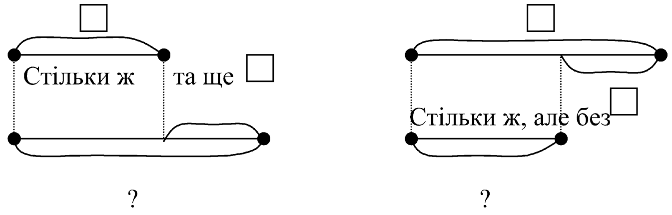


Рис. 4.5. Схематичний рисунок до задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць

Якщо в задачі є шуканим число, яке на кілька одиниць більше чи менше за дане, то міркуємо так:

1) Шукане число на □ більше/менше за дане. На □ більше/менше — це означає стільки ж та ще/але без □. Стільки ж та ще/але без □ знаходимо дією додавання/віднімання.

2) Шукане число більше/менше за дане, а більше/менше число знаходять дією додавання/віднімання. Тому задачу будемо розв'язувати дією додавання/віднімання.

Задачі на різницеве порівняння

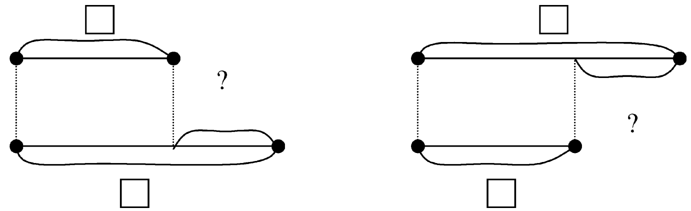


Рис. 4.6. Схематичний рисунок до задачі на різницеве порівняння

Якщо в задачі треба знайти, на скільки одне число більше чи менше за інше, то міркувати слід так:

1) Щоб дізнатися, на скільки одне число більше/менше за дане, треба від більшого числа відняти менше число.

Задачі на знаходження невідомого доданка

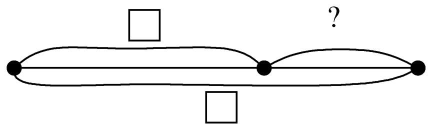


Рис. 4.7. Схематичний рисунок до задачі на знаходження невідомого доданка

Якщо в задачі відомо, скільки всього/стало — суму і треба знайти невідомий доданок, то міркуємо так:

1) Стало/Всього — це сума, було/одне число — це відомий доданок. Треба знайти невідомий доданок. Щоб знайти невідомий доданок, треба від суми відняти відомий доданок.

2) Шукане число менше, ніж всього/стало, а менше число знаходимо дією віднімання. Тому задачу будемо розв'язувати дією віднімання.

Система завдань (типи завдань), за допомогою яких реалізується програма ознайомлення першокласників з поняттям «задача», подана у роботі автора [499; 503].

4.1.3. Закріплення поняття «задача». Формування умінь розв'язувати прості задачі в 1-му класі

Розглянуті типи завдань є переважно підготовчими для формування повноцінного уміння розв'язувати прості задачі. На цьому етапі навчання формування загального уміння ми здійснюємо на основі операційного складу загального уміння розв'язувати задачі арифметичним способом (на матеріалі простих задач). Як було показано в параграфі 2.5.2, дія розв'язування простих задач є складною за власною структурою і, згідно з вимогами Л. М. Фрідмана, кожна складова дія повинна бути опрацьована окремо, як самостійна дія. На етапі ознайомлення нами були сформовані такі дії: виділення умови задачі; виділення запитання задачі; виділення об'єкта (об'єктів) задачі; виділення числових даних і шуканого задачі; зображення значення величини у вигляді довжини відрізка, інтерпретування довжини відрізка як деякої величини, подання одного відрізка через інші; складання схематичного рисунка задачі. Почала засвоюватися дія виділення слів-ознак окремих видів співвідношень і обґрунтування вибору арифметичної дії.

Розглянемо докладно ***програму формування у молодших школярів загального уміння розв'язувати прості задачі***.

1. Подання текстів задач разом із сюжетними малюнками, робота над задачами перших п'яти видів за пам'яткою № 1 та запис у три рядки.

З метою розуміння сюжету задачі до кожного тексту пропонується малюнок, причому цей малюнок активно застосовується дітьми, тому що одне з числових даних задачі треба «взяти» з малюнка. Таким чином ми привчаємо дітей кожного разу при читанні або прослуховуванні формулювання задачі наочно уявляти її ситуацію. Запропоновані малюнки до текстів задач наочно дозволяють «побачити» об'єкт задачі, таким чином, *дія виділення об'єкта задачі* засвоюється в *матеріальній формі*.

На даному етапі основним видом завдань є розв'язання задач. При роботі над текстом задачі учитель вимагає повторити умову задачі, підкреслити її олівцем, повторити запитання задачі; визначити числові дані та шукане, пояснити, що вони означають. Після цього числові дані записуються у рядок через клітинку, і через клітинку записується знак запитання. Пояснивши, що означають числа задачі, переходимо до складання схематичного рисунка задачі: учні кожне числове дане позначають відрізком, довільної довжини, але такої, щоб зберігалося співвідношення за величиною. За схематичним рисунком учні пояснюють, що означає кожний відрізок і з яких відрізків «складається» шуканий відрізок. Спираючись на наочну модель, переходимо до пояснення вибору арифметичної дії, через запитання вчителя привчаємо учнів обґрунтовувати вибір арифметичної дії словесно; після чого у другому рядку записуємо рівність, а в третьому рядку, під значенням виразу, записуємо число, яке було шуканим, і даємо словесну відповідь на запитання задачі. Для усвідомлення і застосування в активному словнику термінів «розв'язання» і «відповідь» радимо учням підкреслити олівцем та прочитати ще раз розв'язання або відповідь.

На даному етапі особливе місце займає словесне пояснення вибору арифметичної дії. Отже, *дія вибору арифметичної дії засвоюється в формі зовнішнього мовлення*.

Дії виділення умови і запитання, числових даних і шуканого були сформовані на етапі ознайомлення, а дія складання схематичного рисунка і перехід від схематичної інтерпретації до математичного запису почала опрацьовуватися на етапі підготовки і набула подальшого засвоєння під час ознайомлення. Отже, майже усі складові дії, виконання яких передбачено пам'яткою № 1 для розв'язання задачі, засвоєні дітьми на попередньому етапі. Метою даного етапу є засвоєння саме *порядку роботи над* *задачею* з опорою на текст пам'ятки. Треба зазначити, що робота над задачею проводиться фронтально — вчитель ставить запитання, а учні на них відповідають. Запитання вчителя конструюються так, що вони відтворюють завдання пам'ятки №1. Тут здійснюється етап матеріалізованої дії засвоєння порядку роботи над задачею — дітям пропонується текст пам'ятки, щоб, відповідаючи на запитання вчителя, вони починали речення із відповідного завдання пам'ятки. Методику роботи над задачами дивіться у роботах автора [499; 503].

Наприклад, розглянемо методику роботи над задачею: «В ігровій кімнаті було 5 самокатів. Хлопчик взяв 1 самокат. Скільки самокатів залишилося?»

— Повтори умову задачі. Назви числові дані. (5 — означає, скільки було самокатів, 1 — означає, скільки взяли самокатів.)

— Що нам відомо? (Нам відомо, що було 5 самокатів, взяли 1 самокат.)

— Назви запитання задачі. (Скільки залишилося самокатів?)

— Яке число є шуканим? (Шукане — кількість самокатів, що залишилися).

— ***Нам відомо***, що було 5 самокатів, взяли 1 самокат.

— ***Треба дізнатися***: скільки самокатів залишилося?

— Запишімо це у рядок через клітинку.

— Зробимо схематичний малюнок до задачі. Щоб показати, скільки самокатів залишилося, треба об'єднувати чи вилучати? (Вилучати.) Як це показати на схемі? (Треба з великого відрізку, який означає, скільки самокатів було, вилучити частину, що означає, скільки самокатів взяли. Решта відрізку і показуватиме, скільки самокатів залишилися).

— У відповіді отримаємо більше чи менше число за дані? (Отримаємо менше число, тому що залишилося самокатів менше, ніж було).

— Якою дією відповімо на запитання задачі? (Дією віднімання,тому що менше число знаходять дією віднімання.)

— ***Пояснюю розв'язання***: залишилося самокатів менше, ніж було, тому задачу розв'язуємо дією віднімання.

Зазначимо, що вибір арифметичної дії можна обґрунтувати інакше: залишилося самокатів 5 без 1, 5 без 1 знаходять дією віднімання.

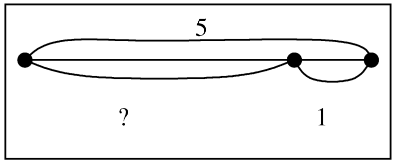
— ***Розв'язую***: 5 − 1 = 4.

— Повтори запитання задачі. Як відповісти на запитання задачі?(4 самоката залишилося).

— ***Відповідаю***: 4 самоката залишилося.

Зразок оформлення розв'язання задачі у зошиті:

5		1		?
5	-	1	=	4
				4



2. Подання задачі у вигляді тексту разом з коротким записом задачі, розв'язання задачі за пам'яткою № 1.

Основним видом завдань є розв'язання задач. На цьому етапі *уміння визначати об'єкт (об'єкти) задачі* набуває подальшого засвоєння у *формі голосного мовлення*: учні переказують задачу, з'ясовують, про що в ній говориться, і виділяють об'єкт або об'єкти задачі. Нагадаємо, що об'єктом задачі може бути: предмет, явище, подія, процес. З об'єктом задачі пов'язані ключові слова, причому ключовими словами можуть бути діючі особи (наприклад, Сашко і Микола). Якщо в сюжеті задачі відбуваються якісь дії з об'єктом задачі, то ключовими словами будуть характеристики цієї події (наприклад: було, витратили, залишилось). Для визначення ключових слів ми пропонуємо наступну пам'ятку:

Пам'ятка

1) Про що розповідається в задачі?
2) Чи є в задачі кілька діючих осіб? Це ключові слова!

Або

3) Що відбувається по сюжету задачі? Що було спочатку?
Що зробили потім? Що сталося нарешті? Це ключові слова!

При визначенні ключових слів діти спираються на поданий (готовий) короткий запис задачі і вчаться їх відшукувати в тексті задачі: підкреслюють ключові слова і обводять кружком числові дані, які відповідають цим ключовим словам, з'ясовують, яке число є шуканим і якому ключовому слову воно відповідає. Далі за карткою з друкованою основою (де подано частину короткого запису — записані у стовпчик ключові слова) діти розглядають, як розташовуються ключові слова у короткому записі, і відповідно кожному з них записують числові дані або знак запитання, якщо це число є шуканим. Вчитель повідомляє, що отримано *короткий запис задачі* (*здійснюється етап попереднього ознайомлення з дією*). Короткий запис задачі (в даному разі схематичний) є репрезентативною моделлю задачі, і його складання передбачає дії кодування тексту задачі. У короткому записі в явному вигляді подані всі істотні ознаки даної задачі, числові дані і зв'язки між ними. Далі передбачається виконання дії перекодування і складання іншої, більш абстрактної, моделі — схематичного рисунка. Але спочатку ми вчимо дітей за коротким записом пояснювати числа задачі і що означає шукане. Числові значення позначаються відповідними відрізками, учні пояснюють, що означає кожний відрізок і який з відрізків є шуканим. На основі вже сформованої дії переходу від схематичного рисунка до запису математичного виразу, а також обґрунтовуючи вибір арифметичної дії словесно, учні записують вираз і знаходять його значення (*дія обґрунтування вибору арифметичної дії виконується у формі голосного мовлення*). Незважаючи на те, що вводиться поняття короткого запису, діти ще продовжують записувати задачу у три рядки і працюють над задачею за пам'яткою № 1.

На цьому етапі учні опрацьовують *дію розв'язання простих задач за пам'яткою № 1* у *формі голосного мовлення*, промовляючи по пам'яті кожний крок, і поступово переходять до самостійного розв'язання задач, пояснюючи власні дії про себе (*етап «зовнішнього мовлення про себе»*). Подальші вправи у розв'язанні задач призводять до того, що дія максимально скорочується і автоматизується, учень вже не зупиняється на окремих етапах цього процесу і не пояснює кожний крок розв'язання (*етап виконання дії в розумовому плані*). Зрозуміло, що не всі діти одночасно переходять на певний етап засвоєння дії, слабші учні довше затримуються на перших етапах засвоєння, а у дітей з високою научуваністю скорочення і автоматизація дії відбувається швидше, про це свідчить швидкість виконання завдань.

3. Навчання учнів складання короткого запису задачі: опорні схеми простих задач перших п'яти видів; визначення ключових слів та числових даних, що їм відповідають.

Описаним вище способом нами було здійснено попереднє ознайомлення з дією складання короткого запису. Для виконання цієї дії в матеріалізованій формі дітям потрібно надати можливі зразки коротких записів, тому учні знайомляться з опорними схемами простих задач, які будуть застосовуватись у якості матеріальних опор при самостійному складанні короткого запису до задачі. Ця дія передбачає визначення ключових слів, числових даних та шуканого і знання певних символів позначення окремих слів.

В методиці роботи над задачею на цьому етапі відбуваються наступні зміни: учні повинні самостійно, спираючись на надану пам'ятку, визначити ключові слова, знайти опорну схему задачі і записати ключові слова у потрібній опорній схемі; далі визначити числові дані і записати їх в опорній схемі, відповідно ключовим словам; звернути увагу, як позначено на короткому записі

шукане; за коротким записом пояснити, що означає кожне число (*дія складання короткого запису виконується в матеріалізованій формі*). Далі йде робота за звичайним планом. Треба зазначити, що не кожну задачу слід пропонувати учням для розв'язання, можна обмежитися лише аналізом тексту задачі, результатом якого буде короткий запис або короткий запис і схематичний малюнок.

При переході до етапу «*голосного мовлення*» учні повинні пояснити власні кроки із самостійного *складання короткого запису* задачі: пояснити, які слова є ключовими, як їх слід записати; визначити опорну схему даної задачі, біля яких слів слід записати певні числові дані, як позначити шукане; пояснити за коротким записом, що означають числові дані й шукане.

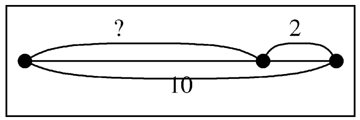
3. Нова форма запису задачі

Після того, як учні усвідомили процес складання короткого запису задачі, змінюється форма її запису — задача записується не в три рядки, як це було раніше, а виконується стандартний запис: записується слово «Задача», під цим словом зліва записується короткий запис, праворуч від нього виконується схематичний рисунок. В наступному вільному рядку в центрі записується слово «Розв'язання», під яким ліворуч — рівність, а нижче слово «Відповідь», і записується речення, яке є відповіддю на запитання задачі.

Н а п р и к л а д, розглянемо методику роботи над задачею на знаходження невідомого доданка: «В корзині і на тарілці разом 10 яблук. На тарілці 2 яблука. Скільки яблук в корзині?»

— Розкажіть всю задачу. Розкажіть умову задачі. Виділіть числові дані.
— Розкажіть запитання задачі. Яке число є шуканим?
— Запишіть в зошитах посередині рядку слово «Задача».
— Складемо короткий запис задачі. Знайдіть її опорну схему. Які ключові слова можна виділити? (В корзині, на тарілці.) Чи відомо, скільки яблук лежить в корзині? (Ні.) Тому напроти цього ключового слова поставимо знак запитання. Чи відомо, скільки яблук на тарілці? (Так, 2.) Запишімо це напроти цього ключового слова. Що ще відомо із умови задачі? (Всього 10 яблук і в корзині, і на тарілці.) Як це показати на короткому записі? (Треба поставити фігурну дужку і за нею число 10.)

$$\left.\begin{array}{l}\text{В корзині - ?}\\ \text{На тарілці – 2 ябл.}\end{array}\right\}\ ?$$



— За коротким записом поясніть числа задачі. Що означає число 10? (Число 10 означає, скільки яблук всього і в корзині, і на тарілці.) Що означає число 2? (Число 2 означає, скільки яблук на тарілці.) Яке число є шуканим? (Число, яке означає, скільки яблук в корзині.)
— Виконаємо схематичний рисунок. Накресліть відрізок, що позначає, скільки яблук у корзині, і поставте над ним знак запитання. Покажіть за допомогою відрізка, що яблука ще лежать на тарілці. Що треба написати над ним? Покажіть відрізок, який позначає всі яблука. Запишіть під ним відповідне число.
— Перекладіть цю задачу на мову математики. (Число 10 — це сума; число 2 — це другий доданок; треба знайти перший доданок.)
— Згадайте правило, за яким можна знайти невідомий доданок. (Якщо із суми двох чисел відняти один доданок, то залишиться інший доданок. Або: щоб знайти невідомий доданок, треба із суми відняти відомий доданок.)
— Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією віднімання.)
— Запишіть посередині рядка слово «Розв'язання», відступіть 1 клітинку вниз, і з лівого краю рядку запишіть рівність. ($10 - 2 = 8$ шт.)
— Відступіть 1 клітинку вниз, і з лівого краю рядку запишіть слово «Відповідь», поставте за ним двокрапку, і після неї напишіть відповідь, починаючи зі знайденого числа. (Відповідь: 8 яблук в корзині.)
— Зверніть увагу на те, як ми оформили запис задачі в зошиті. Ми написали слова «Задача», «Розв'язання» і «Відповідь»; ми склали скорочений запис задачі і написали повну відповідь на запитання задачі.

На цьому етапі *дія складання короткого запису* набуває подальшого засвоєння *у формі голосного мовлення*. Зрозуміло, що учні з високою научуваністю можуть самостійно складати короткий запис задачі, не промовляючи кожний крок цієї дії (етап «*зовнішнього мовлення про себе*»).

4. Підготовча робота до введення задач на знаходження невідомого зменшуваного, невідомого від'ємника

У методиці навчання учнів розв'язування простих задач визначено зміст підготовчої роботи до введення задач на знаходження невідомого зменшуваного та невідомого від'ємника. Отже, на цьому етапі треба актуалізувати:

— знання компонентів та результату дії віднімання;
— уміння розв'язувати задачі на знаходження остачі (різниці).

А також на етапі підготовчої роботи діти повинні познайомитися з правилом знаходження невідомого зменшуваного і навчитися знаходити зменшуване за відомими різницею та від'ємником. На нашу думку, досягти розуміння цього правила усіма учнями

можливо, якщо застосовувати схематичний рисунок відношення віднімання: цілий відрізок — це зменшуване, від нього вилучили частину, — від'ємник і залишається — остача (різниця). Таким чином, учні наочно бачать, що зменшуване складається із остачі та від'ємника: щоб знайти ціле, слід додати його частини — і формулюють правило знаходження невідомого зменшуваного. На цьому ж рисунку діти показують зменшуване, вилучають з нього різницю і впевнюються, що залишається від'ємник; і таким чином формулюють правило знаходження невідомого від'ємника. Далі сформульовані правила засвоюються через виконання завдань на знаходження невідомих компонентів.

Також на етапі підготовчої роботи розв'язуються прості задачі на знаходження остачі, зміст цих задач перекладається на мову математики: визначається, яке число є зменшуваним, яке — від'ємником, а яке — остачею.

5. Ознайомлення з задачами на знаходження невідомого зменшуваного та невідомого від'ємника. Поняття «обернена задача».

Після розв'язання задачі на знаходження остачі учні виписують числа задачі у рядок і пояснюють числові дані й шукане число на мові математики.

Н а п р и к л а д: Під берізкою росло 9 грибочків. 7 грибочків зрізали. Скільки грибочків залишилося?

Вчитель пропонує перетворити задачу так, щоб шуканим стало зменшуване. Діти складають і розв'язують задачу на знаходження зменшуваного, виконуючи зміни у короткому записі і кресленні попередньої задачі на знаходження остачі.

Н а п р и к л а д: Після того, як зрізали 7 грибочків, під берізкою залишилося 2 грибочка. Скільки грибочків було під берізкою?

Особлива увага приділяється обґрунтуванню вибору арифметичної дії: при першому способі застосовується правило знаходження невідомого зменшуваного, а при другому — спираємося на те, що шукане число більше за дане. Після розв'язання задачі на знаходження невідомого зменшуваного діти порівнюють ці дві задачі і доходять висновку: те, що було відомим в першій задачі, стало невідомим у другій задачі, а те, що було невідомим, — стало відомим. Вчитель повідомляє, що такі задачі називаються оберненими, здійснюється *етап попереднього ознайомлення з дією складання і розв'язування обернених задач*.

Далі пропонується скласти ще одну обернену задачу так, щоб невідомим був від'ємник.

Н а п р и к л а д: Під берізкою росло 9 грибочків. Після того, як кілька грибочків зрізали, під берізкою залишилося 2 грибочки. Скільки грибочків зрізали?

Над цією задачею працюємо аналогічно попередній. Після розв'язання задач учні порівнюють усі три задачі і з'ясовують, чому дві задачі розв'язуються дією віднімання, а одна — дією додавання. Учням надаються опорні схеми трійки взаємно обернених задач на знаходження остачі, на знаходження зменшуваного, на знаходження від'ємника, і здійснюється подальше засвоєння поняття про співвідношення віднімання: усі три задачі містять одній й ті самі ключові слова — «було — залишилось», слово «було» відповідає зменшуваному, слово «зрізали» відповідає від'ємнику, слово «залишилось» — різниці; в залежності від того, який компонент є шуканим, й вибирається арифметична дія. Отже, *дія визначення слів-ознак окремих видів співвідношень* набуває подальшого засвоєння у *формі матеріалізованої дії*.

На цьому етапі розпочинається опрацювання *дії порівняння задач, математична структура яких схожа на дану; встановлення, як відмінність між ними впливає на розв'язання задач* (етап *попереднього ознайомлення з дією*).

Таким чином, в 1-му класі учні вчаться розв'язувати прості задачі перших семи видів, це:

1. Задачі на знаходження суми.
2. Задачі на знаходження остачі (різниці).
3. Задачі на знаходження невідомого доданка.
4. Задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць.
5. Задачі на різницеве порівняння.
6. Задачі на знаходження невідомого зменшуваного.
7. Задачі на знаходження невідомого від'ємника.

Треба зазначити, що методику підготовчої роботи, ознайомлення першокласників з поняттям «задача» та формування уміння розв'язувати задачі в 1-му класі докладно подано у публікаціях автора [499; 503].

4.1.4. Формування умінь розв'язувати прості задачі в 2-му класі

6. Опорні схеми простих задач перших семи видів. Розв'язання задач перших семи видів

Учні повторюють істотні ознаки поняття «задача» на прикладі завдань на порівняння текстів маленького оповідання та задачі,

завдань з парадоксальними даними, завдань, в яких умова не пов'язана із запитанням, завдань на постановку запитання до даної умови, на зміну запитання так, щоб при відповіді на нього потрібно було виконати певну арифметичну дію. Діти розв'язують прості задачі перших семи видів (міркування за пам'яткою № 1, запис розв'язання за новою формою), користуючись опорними схемами, називають види задач, а також на основі опорних схем класифікують задачі за арифметичною дією, якою вони розв'язуються, — називають види задач, які розв'язуються дією додавання та які розв'язуються дією віднімання.

У зв'язку з тим, що до 2-го класу молодші школярі оволоділи навичками читання та письма, у структуру процесу розв'язування задач вводиться новий елемент, а саме складання короткого запису задачі. Крім того, з метою підготовки до введення складених задач, учні засвоюють мовні конструкції, які відповідають аналітичним міркування. Ці фактори визначають новий порядок роботи над простою задачею — за пам'яткою № 2. Отже, ця пам'ятка передбачає виконання наступних дій:

— уявлення, про що розповідається в задачі (виділення об'єкта та сюжету);
— складання короткого запису і пояснення за ним чисел задачі;
— визначення того, які числові дані потрібно знати, щоб відповісти на запитання задачі;
— запис розв'язання;
— запис відповіді.

Усі дії, крім визначення числових даних, які потрібні для відповіді на запитання задачі, вже засвоєні дітьми на попередньому етапі навчання. Тому на опорних схемах та при розв'язуванні задач учні перед обґрунтуванням вибору дії визначають, які числові дані їм потрібні, щоб відповісти на запитання задачі. Бесіда будується наступним чином:

— Що треба знати, щоб відповісти на запитання задачі? (Треба знати два числових значення: перше — ... та друге — ...)

— Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі? (Дією ... Тому, що...)

Отже, відбувається *попереднє ознайомлення з дією визначення числових даних, які потрібні для відповіді на запитання задачі.*

При розв'язуванні наступних задач учні перед обґрунтуванням вибору дії, застосовуючи надані мовні конструкції, визначають, які числові дані їм потрібні для відповіді на запитання задачі, і вчаться зображати це схематично — кружками:

□ — числові дані задачі

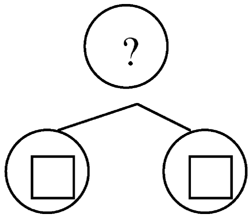


Рис. 4.8. Схематичне зображення визначення числових даних, які потрібні для відповіді на запитання задачі

Отже, дія *визначення числових даних, які потрібні для відповіді на запитання задачі,* набуває подальшого засвоєння в *матеріалізованій формі*. Для свідомого визначення числових даних, які потрібні для відповіді на запитання задачі, корисні завдання із зайвими числовими даними та числовими даними, яких бракує.

7. Обернені задачі

З поняттям про обернену задачу діти вже знайомі [в 1-му класі задачі на знаходження невідомого зменшуваного та невідомого від'ємника вводилися як обернені до задач на знаходження остачі (різниці)], тому *дія складання обернених задач* здійснюється в *матеріалізованій формі*: після розв'язання прямої задачі учні виписують числа задачі і пояснюють, що вони означають; потім одне з числових даних прикривається (замінюється) знаком запитання і учні складають задачу так, щоб шуканим було число, яке позначено знаком запитання, — це перша обернена задача; далі, прикриваючи (замінюючи) знаком запитання друге числове дане, діти складають другу обернену задачу. При цьому учні з'ясовують, що обернених задач буде стільки, скільки числових даних в прямій задачі. В простих задачах (в стандартному вигляді) є двоє числових даних, тому до простої задачі можна скласти дві обернені задачі. Діти порівнюють математичні структури задач і визначають їх вид та доходять висновку, що спільним, наприклад, у трійки взаємно обернених задач на знаходження остачі — на знаходження невідомого зменшуваного — невідомого від'ємника або на знаходження суми — на знаходження першого доданка — на знаходження другого доданка або на різницеве порівняння — на збільшення числа на кілька одиниць — на зменшення числа на кілька одиниць, є слова-ознаки. Ці слова визначають вид співвідношення відповідно віднімання або додавання, або різницевого порівняння. В залежності від того, який член співвідношення є шуканим, вибирається і арифметична дія, за допомогою якої розв'язується задача. Таким чином, здійснюється *попереднє ознайомлення з дією встановлення виду співвідношення.* Крім того, на основі порівняння опорних схем трійок взаємно обернених

задач: на знаходження суми, першого доданка, другого доданка або на знаходження остачі, на знаходження зменшуваного та на знаходження від'ємника, відбувається опрацювання дії *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв'язання задачі в матеріалізованій формі.*

8. Новий порядок роботи над задачами за пам'яткою № 2

Здійснюється попереднє ознайомлення з дією розв'язування простих задач за пам'яткою № 2. Всі дії, виконання яких передбачає ця пам'ятка, вже засвоєні або знаходяться в процесі формування (а саме — вибір числових даних). Тому достатньо вчителю пояснити учням, що відтепер над задачею будемо працювати за новою пам'яткою, і запропонувати учням прочитати текст пам'ятки і з'ясувати, чи все їм зрозуміло, чи вміють вони виконувати усі завдання цієї пам'ятки.

Пам'ятка № 2

1. Прочитай задачу та уяви про що в ній ідеться. Про що ідеться в задачі?
2. Виділи ключові слова та відповідні їм числові дані; яке число є шуканим? Склади короткий запис задачі.
3. За коротким записом поясни числові дані задачі та запитання. Зроби схематичний малюнок.
4. Повтори запитання задачі. Що потрібно знати, щоб на нього відповісти?
   Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі?
5. Запиши розв'язок задачі.
6. Запиши відповідь.
7. Перевір розв'язок: склади і розв'яжи обернену задачу.

Отже, всі задачі розв'язуються за пам'яткою № 2: запитання учителя будуються на підставі пунктів пам'ятки, а учні слідкують за текстом пам'ятки (*засвоєння дії роботи над задачею за пам'яткою № 2 в матеріалізованій формі*). Внаслідок такої роботи можна очікувати, що здійсниться мимовільне запам'ятовування тексту пам'ятки, без прикладання спеціальних зусиль з боку учнів. Схематичний малюнок до задачі складається в разі потреби в ньому або за вимогою учителя. Самостійна робота над задачею здійснюється також за пам'яткою № 2 з безпосереднім використанням тексту пам'ятки.

На цьому етапі відбувається подальше засвоєння *дії визначення числових даних, які потрібні для відповіді на запитання задачі*, яка опрацьовується у *формі голосного мовлення.*

Розглянемо приклад методики роботи над задачею за пам'яткою № 2.

У господарки було 13 морквин, 3 морквини вона віддала козеняті. Скільки морквин залишилося?

Про що розповідається в задачі? (В задачі розповідається про морквини: було 13 морквин, віддали 3 морквини; запитується, скільки залишилося морквин.)

Виділи ключові слова та склади короткий запис задачі. Які слова розкривають ситуацію, описану в задачі? (Було, віддали, залишилося.) Запишімо їх. Чи відомо, скільки морквин було? (Було — 13 морквин.) Чи знаємо ми із умови задачі, скільки віддали морквин? (Знаємо, віддали — 3 морквини.) Чи відомо, скільки морквин залишилося? (Ні, невідомо, поставимо знак запитання — це є запитання задачі.)

Було — 13 м.
Віддали — 3 м.
Залишилося — ?

За коротким записом поясни числові дані задачі та запитання. Що позначає число 13? (Число 13 позначає, скільки було морквин.) Що позначає число 3? (Число 3 позначає, скільки віддали морквин.) Яке запитання задачі? (Скільки залишилося морквин?)

Повтори запитання задачі. Що потрібно знати, щоб на нього відповісти?

(Потрібно знати два числових значення: I — скільки було морквин (13) та II — скільки віддали морквин (3).)

— *Якою арифметичною дією відповімо на запитання задачі?* (На запитання задачі відповімо дією віднімання, тому що залишилося менше, ніж було.) Процес аналізу ілюструємо схемою.

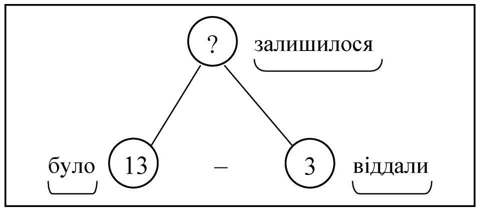


Рис. 4.9. Схема аналізу задачі

Запиши розв'язання задачі. (Розв'язання: 13 — 3 = 10 (м).)
Запиши відповідь. (Відповідь: 10 морквин залишилося.)

9. Співвідношення додавання і віднімання. «Переклад» задач на мову математики

На основі розгляду опорних схем трійок взаємно обернених задач на співвідношення додавання і віднімання учні встановлюють, що в них однакові слова-ознаки: було — стало, після того, як щось додали, або всього, і є перше та друге число (було — залишилося, після того, як щось витратили). Відрізняються вони шуканим: в одній задачі невідомо, скільки стало, в другій — скільки було, а в третій — скільки додали (різні шукані: скільки залишилося, скільки було, скільки витратили). Усі три задачі містять співвідношення додавання (віднімання), але шуканими є різні члени співвідношення.

Далі ці задачі «перекладаються» на мову математики, тобто визначають яким компонентам відповідають певні слова (рис. 4.10.)

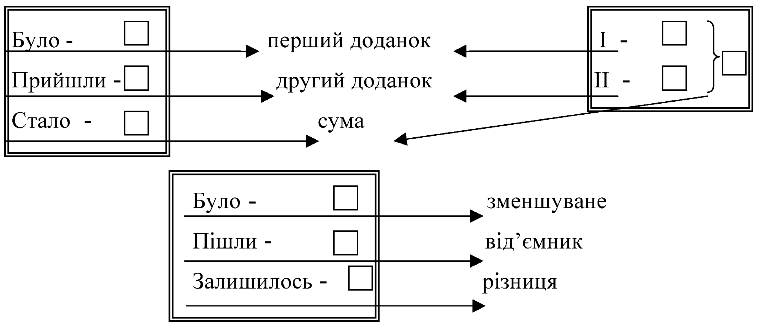


Рис. 4.10. Відповідність ключових слів задач компонентам співвідношення додавання та віднімання

□ — числове дане або шукане

Таким чином, *дія визначення виду співвідношення та визначення слів-ознак окремих видів співвідношень* засвоюється в *матеріалізованій формі*.

Учні визначають, якою арифметичною дією вони відповідатимуть на запитання задачі, якщо шуканими будуть різні компоненти співвідношення додавання (віднімання).

У подальшому учням пропонуються завдання на визначення виду співвідношення в задачах. При розв'язуванні цих завдань учні міркують вголос, отже, дії *визначення виду співвідношення та визначення слів-ознак окремих видів співвідношень* засвоюються у *формі голосного мовлення*.

10. Співвідношення різницевого порівняння

В аналогічний спосіб йде робота над засвоєнням співвідношення різницевого порівняння. Слова-ознаки співвідношення різницевого порівняння — «на» «більше» чи «менше». Якщо шуканим є число, яке позначає, на скільки одне число більше чи менше за друге число, то його знаходять за правилом: щоб дізнатися, на скільки одне число більше чи менше від другого, треба від більшого числа відняти менше число. Якщо шукане число на кілька одиниць більше за дане, то його знаходять дією додавання. Якщо число на кілька одиниць менше даного, то його знаходять дією віднімання.

11. Задачі на знаходження суми трьох доданків

Задача на знаходження суми трьох доданків вводяться на основі порівняння із задачею на знаходження суми двох доданків. Учням пропонується розв'язати задачу на знаходження суми двох доданків, а потім порівняти її з наступною задачею — задачею на знаходження суми трьох доданків. Наприклад:

1) В 2-А класі 4 відмінника, в 2-Б класі 6 відмінників. Скільки всього відмінників в цих класах?
2) В 2-А класі 4 відмінника, в 2-Б класі 6 відмінників, а в 2-В 5 відмінників. Скільки всього відмінників в цих класах?

При порівнянні учні встановлюють відмінні ознаки і виконують зміни у короткому записі і схематичному рисунку першої задачі. Далі з'ясовується, як ця відмінність вплине на розв'язання задачі: для відповіді на запитання задачі потрібно не два, а три числових значення. Учням дається опорна схема задач на знаходження суми трьох доданків, і вони переходять до розв'язання задач цього виду, в тому числі й задач, які вимагають переформулювання запитання. Такий методичний підхід має на меті ще й опрацювання *у матеріалізованій формі* дії *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв'язання задачі.*

На цьому етапі вдосконалюється уміння у виконанні дії *вибору числових даних для відповіді на запитання задачі*, ця дія виконується у *формі голосного мовлення.*

З метою підготовки до введення задач на конкретний зміст добутку, серед задач на знаходження суми трьох доданків можна пропонувати дітям задачі на знаходження суми однакових доданків, з обов'язковим аналізом виразу до задачі.

12. Задачі на знаходження третього числа за сумою двох даних чисел

На етапі підготовчої роботи до ознайомлення з цим видом простих задач учням пропонуються завдання типу: на столі лежать 2 трикутники і 3 круги, намалюйте в зошиті стільки квадратів, скільки трикутників і кругів разом. Тут учні повинні усвідомити, що для того, щоб дізнатися, скільки слід намалювати квадратів, треба міркувати так: квадратів стільки, скільки трикутників і кругів разом; трикутників і кругів разом 2 та 3, тобто 5; тому квадратів теж 5. Або учні можуть діяти практично: покласти на парті трикутники і круги у рядок, а під ними покласти квадрати так, щоб кожному трикутнику і кожному кругу відповідав тільки один квадрат, тобто учні складають пари. Але після такої практичної роботи вчитель разом з учнями відтворює вголос міркування.

Після ґрунтовної підготовчої роботи учням пропонується задача на знаходження третього числа за сумою двох даних, яку учні розв'язують під керівництвом учителя. Особливість полягає тут у тому, що під час аналізу розв'язання з'ясовується, що для відповіді на запитання задачі потрібно знати: скільки всього ... та те, що шукане число складає стільки ж; відповісти на запитання задачі відразу ми не можемо, тому що не знаємо, скільки всього...; щоб дізнатися, скільки всього, треба знати два числових значення: перше — ... та друге ...; відповімо на запитання задачі дією додавання. Схема аналізу цих задач має наступний вигляд (рис. 4.11).

Аналіз умови Аналіз розв'язування

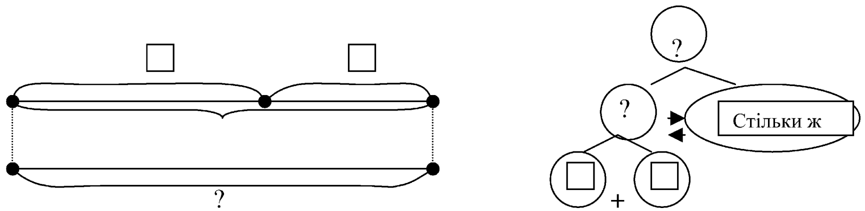


Рис. 4.11. Схема аналізу умови і схема аналізу розв'язування задач на знаходження третього числа за сумою двох даних чисел

□ — числове дане

З метою усвідомлення істотних особливостей задач даної математичної структури пропонуємо учням для розв'язання пари задач: задачі на знаходження суми і задачі на знаходження третього числа за сумою двох даних чисел, а також пропонується виконати зміни в задачі на знаходження третього числа по сумі двох даних, так щоб одержати задачу на знаходження суми.

Наприклад:

1) Для годування кролів на фермі приготували 7 кг моркви, 3 кг буряків. Скільки всього кілограмів овочів приготували для годування кролів?

2) Для годування кролів на фермі приготували 7 кг моркви, 3 кг буряків, а капусти стільки, скільки моркви і буряків разом. Скільки кілограмів капусти приготували для годування кролів?

В результаті усвідомлення істотних ознак задач цього виду учні будуть, змозі виконати завдання на постановку запитання до даної умови і отримати задачу на знаходження третього числа за сумою двох даних чисел.

На цьому етапі вдосконалюється уміння у виконанні дії *вибору числових даних для відповіді на запитання задачі*. Вона виконується у *формі голосного мовлення*. Дії *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв'язання задачі — у формі голосного мовлення*.

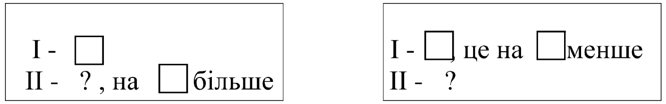
13. Розв'язання сформульованих у непрямій формі задач на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць

На етапі підготовки до ознайомлення з задачами даного виду, які сформульовані в непрямій формі розв'язуються задачі на різницеве порівняння з двома запитаннями, наприклад: «У класі 13 хлопчиків та 16 дівчат. На скільки більше дівчат, ніж хлопчиків? На скільки менше хлопчиків, ніж дівчат?». Після розв'язання цієї задачі учні роблять висновок: «Дівчат на стільки більше, ніж хлопчиків, на скільки менше хлопчиків, ніж дівчат.» І узагальнюють його: «на скільки одне число більше/менше за друге число, на стільки ж друге число менше/більше за перше.» Також корисними є вправи на розв'язання задач даного виду, які сформульовані в прямій формі.

Ознайомлення відбувається на основі перетворення задачі, що сформульована в прямій формі, у задачу, в якій зв'язок між числами сформульований в непрямій формі. Наприклад, «З першої ділянки зібрали 54 кг моркви, а з другої — на 12 кг більше. Скільки кілограмів моркви зібрали з другої ділянки?». Розв'язавши цю задачу, учні встановлюють, що тут знайшли число, яке на 12 більше за 54, виконавши додавання. Звертаємо увагу учнів на те, якщо знайдене число на 12 більше за число 54, то число 54 на 12 менше за знайдене число.

Цю задачу можна перетворити в задачу, сформульовану в непрямій формі: «З першої ділянки зібрали 54 кг моркви, це на 12 кг менше, ніж з другої ділянки. Скільки кілограмів моркви зібрали з другої ділянки?» Учні порівнюють зміст обох задач і встановлюють, що вони відрізняються лише тим, що в першій задачі говорилося про те, що з другої ділянки зібрали на 12 кг більше, а в даній задачі сказано, що з першої зібрали 54 кг, а це на 12 кг менше, ніж з другої ділянки. Тобто в першій задачі дається числове значення маси моркви, яку зібрали з першої ділянки, а числове значення маси моркви, яку зібрали з другої ділянки, невідоме, але говориться, що з неї зібрали на 12 кг більше, ніж з першої. У другій задачі також дано числове значення маси моркви, яку зібрали з першої ділянки, і зовсім нічого не дано стосовно маси моркви, яку зібрали з другої ділянки; тим

часом про масу моркви, яку зібрали з першої ділянки, додатково розповідається, що це на 12 кг менше, ніж з другої ділянки. Ці дві задачі відрізняються своєю структурою (рис. 4.12).



Пряма форма *Непряма форма*

Рис. 4.12. Опорні схеми задач на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, що сформульовані у прямій та у непрямій формі $\square$ — числове дане

У першій задачі до кожного випадку (I чи II) подані числові значення, а в другій задачі — до першого випадку пропонуються два числових значення, а до другого — жодного (здійснюється *в матеріалізованій формі* опрацювання дії *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв'язання задачі*).

Розв'язуючи отриману задачу, слід запитати «Більше чи менше кілограмів моркви зібрали з другої ділянки?», «На скільки більше кілограмів моркви зібрали з другої ділянки, ніж з першої?», «Якою дією знаходимо більше число?». Таким чином, учні встановлюють, що тут треба знайти число, яке теж на 12 більше за 54: з першої ділянки зібрали на 12 кг менше, ніж з другої, тому з другої ділянки зібрали на 12 кг більше, ніж з першої; це означає, що для розв'язання задачі треба виконати дію додавання.

Порівнюючи розв'язання обох задач, доходимо висновку, що вони мають однакове розв'язання. Тобто основним є визначення: яке число ми знаходимо — більше чи менше, що обумовлює вибір арифметичної дії.

Зазначимо, що з метою попередження помилок корисно пропонувати учням саме пари задач у прямій та непрямій формі та проводити порівняльний аналіз їх умов та розв'язань. Крім того, завдання на зіставлення задач корисні з точки зору формування дії *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв'язання задачі* (дія виконується у *формі голосного мовлення*).

Так, учням пропонується пара задач: задача на збільшення (зменшення) числа на кілька одиниць, що сформульована в прямій формі, та аналогічна задача, що сформульована у непрямій формі, і дві схеми; діти повинні вибрати схему за текстом кожної задачі. Вони з'ясовують, що обом задачам відповідає одна й та ж схема, незважаючи на різницю у формулюванні умов.

Далі подаються для розв'язання пари задач, розв'язки яких порівнюються і учні встановлюють їх відмінність: в першій зв'язок між числами (різницеве відношення чисел) сформульований прямо, а в другій — непрямо. Таким чином, учні усвідомлюють, що не завжди з словом «менше» треба пов'язувати дію віднімання, а з словом «більше» — додавання. Тому при виборі арифметичної дії в задачах даного виду слід міркувати так:

1. Встановити, яке число слід знайти, — більше чи менше.
2. На цій підставі обрати арифметичну дію.

На цьому етапі опрацьовується у *формі зовнішнього мовлення* дія *вибору арифметичної дії при розв'язуванні задачі*.

14. Підготовча робота і ознайомлення учнів з задачами на конкретний зміст дії множення і ділення на вміщення

Традиційно задачі на конкретний зміст дії множення і на конкретний зміст дії ділення на рівні частини і на вміщення вивчаються окремо, послідовно одна за одною. Дія множення розуміється як додавання однакових доданків. А дію ділення на вміщення можна розглядати як віднімання однакових чисел, доки не одержимо нуль. Познайомивши учнів з цими теоретичними положеннями, ми озброюємо учнів методом знаходження результатів арифметичних дій множення і ділення, навіть тоді, коли вони ще не знають таблиць множення і ділення, способів позатабличного множення і ділення.

Тому ми змінили традиційний порядок вивчення цих задач і, виходячи з теорії укрупнення дидактичних одиниць при навчанні математики П. М. Ерднієва, пропонуємо вивчати ці задачі ***за двома циклами:***

1. Задачі на конкретний зміст дії множення і ділення на вміщення.
2. Задачі на конкретний зміст дії ділення на рівні частини та ділення на вміщення.

Досвід нашої експериментальної роботи свідчить про доцільність застосування двох циклів простих задач. Цей підхід надає нам можливість розв'язувати задачі на конкретний зміст арифметичних дій множення і ділення на вміщення, не дотримуючись вивчення відповідних таблиць множення і ділення, і тим самим урізноманітнити числові дані задач.

На етапі **підготовчої роботи до ознайомлення з задачами на конкретний зміст дії множення** пропонуємо учням задачі на знаходження суми однакових доданків, на складання задач за даним виразом — сумою однакових доданків, на складання задач за малюнком, на перерахування великої кількості предметів, способом групування. Розв'язуючи завдання на перерахунок великої кількості предметів, учні переконуються, що рахувати їх дуже довго. Тоді вчитель розбиває їх на п'ятірки, зрозуміло, що п'ятірками рахувати легше. В ході такої роботи учні усвідомлюють роль групового рахування, засвоюють цю техніку, розв'язують приклади на знаходження суми однакових доданків. Практична вагомість групового рахування показується на прикладах із життя: лічба вишень по три ($3+3+3=9$), лічба грошей п'ятикопійковими монетами ($5+5+5+5=20$), лічба паличок, із яких складено чотирикутники ($4+4+4+4+4=20$). Далі пропонуємо учням порахувати двійками, трійками, четвірками, п'ятірками й тощо. З цією метою застосовуємо стрічку чисел від 1 до 100, в кожній клітинці якої записані по порядку числа. Саме за допомогою цієї стрічки учні рахують групами: вся стрічка перегинається на смужки по певній кількості кліточок і читаються всі числа на кінцях риски.

Окрему групу підготовчих завдань до введення дії множення складають завдання на обчислення суми однакових доданків. Увага при виконанні завдань звертається на те, що доданки однакові, і визначається число однакових доданків. Розв'язок записуємо так:

$$\underbrace{4+4+4+4+4}_{5\ \text{разів}} = 20$$

Застосовуючи запис такої форми, розв'язуємо задачі на знаходження суми трьох, чотирьох і більше однакових доданків.

Під час **підготовчої роботи до ознайомлення з дією ділення на вміщення** учні виконують практичні завдання типу: «12 зошитів роздали учням по 4 зошити. Скільки учнів отримали зошити?»

— По скільки зошитів повинні отримати учні? (По 4 зошити) Візьміть 4 зошити і дайте першому учню. Якщо ми віддаємо зошити, то зошитів лишається більше чи менше? Якою арифметичною дією дізнаємось, скільки зошитів залишилось, якщо ми віддали 4 зошити? Дією віднімання, запишемо це: $12-4$.

— Чи всі зошити ми роздали?

— Візьміть ще 4 зошити і дайте другому учню. Продовжимо записувати вираз: $12-4-4$.

— Чи всі зошити роздали? (Ні, не всі) Візьміть ще 4 зошити і дайте ще одному учню. Запишемо: $12-4-4-4$.

— Чи всі зошити ми роздали? Запишемо це: $12-4-4-4=0$. Скільки учнів отримали зошити? (3 учня отримали зошити.) Учнів буде стільки, скільки в 12 зошитах вміщується по 4 зошити. Запишемо це:

$$12\underbrace{-4-4-4}_{3 \text{ рази}}=0$$

Читаємо так: в 12 вміщується по 4 три рази. Отже, 3 учні отримали зошити.

Особливе місце займає на етапі підготовчої роботи розв'язання задач, аналогічних розглянутим, причому, учні переходять від практичних дій до малюнків, а від них до схематичного рисунка і записують розв'язання задачі у вигляді різниці, яку інтерпретують певним чином. Також пропонуємо завдання на знаходження різниці, в якій декілька однакових від'ємників.

На етапі підготовчої роботи до введення дій множення і ділення учні вчаться ілюструвати додавання однакових доданків та віднімання однакових чисел, доки не отримаємо нуль, у вигляді схематичного рисунка. Отже, на цьому етапі здійснюється подальше опрацювання *дії складання схематичного малюнку та інтерпретування відрізків як деякої величини* у *формі голосного мовлення*.

Ознайомлення із задачами на конкретний зміст дії множення відбувається під час ознайомлення з цією дією. Ми пропонуємо учням для порівняння пару задач: обидві задачі на знаходження суми, але перша задача на знаходження суми неоднакових доданків, а друга — на знаходження суми рівних доданків. Наприклад:

1) На трьох тарілках лежать пиріжки: на першій 4 пиріжка, на другій — 3 пиріжка, а на третій — 5 пиріжків. Скільки всього пиріжків лежить на трьох тарілках?

2) На трьох тарілках лежать пиріжки по 4 пиріжка на кожній тарілці. Скільки всього пиріжків лежить на трьох тарілках?

Порівнявши розв'язання цих задач, учні доходять висновку, що вираз, який є розв'язанням другої задачі, являє собою суму однакових доданків, а першої — суму неоднакових доданків. Для усвідомлення відмінності між двома цими сумами вчитель пропонує учням записати по кілька прикладів до кожного виду сум. Отже, в окрему групу виділяються суми однакових доданків. Після чого вчитель повідомляє, що суму однакових доданків можна замінити новою арифметичною дією — множенням. Вводиться

знак дії множення, і учні вчаться замінювати суму рівних доданків дією множення і читати записані вирази.

Аналогічно, для **ознайомлення з дією ділення пропонується задача**, яку діти на етапі підготовчої роботи розв'язували відніманням, після її розв'язання учням повідомляється, що віднімання однакових чисел, доки не одержимо нуль, можна замінити дією ділення. Діти виконують вправи на заміну віднімання діленням і читають записані рівності.

15. Прості задачі на конкретний зміст дії множення і ділення на вміщення. Два способи розв'язання

На попередньому етапі учні познайомилися з новим способом розв'язування відомих їм задач на знаходження суми однакових доданків — дією множення, і задач на віднімання однакових чисел, доки не одержимо нуль, — дією ділення. Ці знання активно застосовуються при розв'язуванні задач тепер вже двома способами: додаванням і множенням або відніманням і діленням. До прямої задачі, наприклад, на конкретний зміст дії множення (знаходження суми однакових доданків), складається і розв'язується обернена задача на конкретний зміст дії ділення на вміщення.

На даному етапі вводяться слова-ознаки співвідношення переходу від меншої одиниці лічби або вимірювання до більшої (по ... взяти ... разів) та співвідношення розбиття цілого на рівні частини (... розділили по...). Засвоєння дії *виділення слів-ознак окремих видів співвідношень* йде від *матеріалізованої* форми, коли діти підкреслюють в тексті задачі слова-ознаки до промовляння їх вголос, після переказу задачі. Отже, ця *дія* набуває подальшого засвоєння у *формі голосного мовлення*. На основі виділених слів-ознак вибирається арифметична дія, за допомогою якої розв'язується задача, тому *дія обґрунтування вибору арифметичної дії* засвоюється у *формі голосного мовлення*.

16. Ознайомлення з діленням на рівні частини. Задачі на ділення на рівні частини. Розв'язання трійок взаємно обернених задач

Задачі на конкретний зміст дії ділення на рівні частини вводяться на основі порівняння пари задач: перша задача на ділення на вміщення, а друга на ділення на рівні частини. Наприклад:

1) У Наталки 12 цукерок. Вона роздала ці цукерки по 3 кожній подрузі. Скільки подруг отримали цукерки?

2) У Наталки 12 цукерок. Вона роздала ці цукерки порівну трьом подругам. По скільки цукерок отримала кожна подруга?

Учням пропонується розв'язати задачу, яку вони вже вміють розв'язувати (ділення на вміщення), а для відповіді на запитання другої задачі зробити малюнок і зобразити на ньому ці дії. Відповідь на запитання задачі отримано і вчитель показує запис розв'язання, звертаючи увагу, що ця задача теж розв'язується дією ділення, але ділення на рівні частини.

Далі порівнюються опорні схеми таких задач і слова-ознаки, які визначають вид ділення (рис. 4.13).

Ділення на вміщення

В □ вміщується по □ - ?

□ розділити по □ - ?

Ділення на рівні частини

□ розділити на □ порівну - ?

Якщо в задачі говориться про те, що щось розклали, розрізали, розсипали...
по…/порівну, то треба виконати дію ділення **- на вміщення/на рівні частини**

Рис. 4.13. Опорні схеми задач на конкретний зміст дії ділення

Таким чином, *дія виділення слів-ознак окремих видів співвідношень* опрацьовуються у *формі голосного мовлення*, а дія *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв'язання задачі в матеріалізованій формі*.

Відтепер учням пропонуються для розв'язання трійки взаємно обернених задач: задача на конкретний зміст дії множення, на конкретний зміст дії ділення на вміщення та на конкретний зміст дії ділення на рівні частини. Або учні розв'язують пряму задачу і складають до неї дві обернені задачі. Отже, *дія складання обернених задач* набуває подальшого засвоєння у *формі голосного мовлення*.

Докладніше зміст і методику підготовчої роботи і ознайомлення з задачами на конкретний зміст дії множення і ділення подано у публікаціях автора [482; 500].

17. Ознайомлення із збільшенням та зменшенням числа у кілька разів. Прості задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів

На етапі **підготовчої роботи** до введення задач даного виду необхідно актуалізувати конкретний зміст дії множення і ділення на рівні частини, конкретний зміст відношень «більше на кілька одиниць», «менше на кілька одиниць». А також через спеціальні вправи підвести учнів до усвідомлення конкретного змісту вира-

зів «більше в» та «менше в». З цією метою учням пропонується покласти у рядок три кружки, а під ними два рази по три кружки; з'ясовується, де кружків більше, скільки разів у нижньому рядку поклали по стільки кружків, скільки в першому. При цьому вчитель повідомляє, що в нижньому рядку кружечків в 2 рази більше, ніж в першому. Далі ставиться запитання «Де кружечків менше?». Діти пояснюють, що в першому рядку лише один раз по 3 кружечки, а в другому — два рази, у першому рядку у 2 рази менше кружечків, ніж в другому. Наступна вправа передбачає практичні дії з вимогою покласти ліворуч 2 квадрати, а праворуч у 4 рази більше. Діти відповідають, що треба зробити, щоб отримати в 4 рази більше, ніж 2: треба по 2 квадрати взяти 4 рази, про що дізнаємося дією множення ($2 \cdot 4 = 8$), і кладуть праворуч 8 квадратів. В результаті такої роботи маємо висновок: для того, щоб дізнатися про число, яке у кілька разів більше за дане, треба дане число помножити на число, яке показує, у скільки разів шукане більше за дане. Або: про число, яке у кілька разів більше даного, дізнаємося дією множення. Аналогічно працюємо над зменшенням числа у кілька разів.

На етапі підготовки розв'язуються завдання на знаходження числа, яке у кілька разів (або на кілька одиниць) більше чи менше за дане число. На підставі розв'язання таких задач робиться узагальнення: «Більше число знаходимо дією додавання або множення. Додаємо тоді, коли число більше даного **на** кілька **одиниць**. Множимо тоді, коли число більше даного **у** кілька **разів**»; «Менше число знаходимо дією віднімання або ділення. Віднімаємо тоді, коли число менше даного **на** кілька **одиниць**. Ділимо тоді, коли число менше даного **у** кілька **разів**». Таким чином, засвоюються слова-ознаки співвідношення кратного порівняння: «більше (менше) у кілька разів», а *дія виділення слів-ознак окремих видів співвідношень* засвоюється в *формі голосного мовлення*.

Від практичних дій учні переходять до схематичного зображення відношення «більше (менше) у кілька разів». Ці завдання мають на меті усвідомлення учнями особливостей схематичного зображення даного відношення і подальшого формування в них *дії складати схематичний малюнок в формі голосного мовлення*.

Після засвоєння відношень «більше у кілька разів», «менше у кілька разів» відбувається **ознайомлення** із задачами даного виду на основі розв'язання пари задач: перша задача на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, а друга задача на збільшення або зменшення числа у кілька разів (здійснюється *у матеріалізованій формі* формування дії *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв'язання задачі*).

Наприклад:

1) У Сашка 8 марок, а Толі на 4 марки більше. Скільки марок у Толі?

2) У Сашка 8 марок, а у Толі в 4 рази більше. Скільки марок у Толі?

Перед розв'язанням учні порівнюють задачі, встановлюють їх відмінність і з'ясовують, як ця відмінність вплине на короткий запис задачі, на схематичний рисунок та на розв'язання задачі. Ця відмінність впливає на вибір арифметичної дії: перша задача розв'язується дією додавання, а друга — дією множення. Отже *дія обґрунтування вибору арифметичної* дії набуває подальшого засвоєння у *формі голосного мовлення*.

При ознайомленні з даним видом простих задач опорні схеми задач на збільшення або зменшення числа у кілька разів подаються у порівнянні з опорними схемами задач на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць (рис. 4.14).

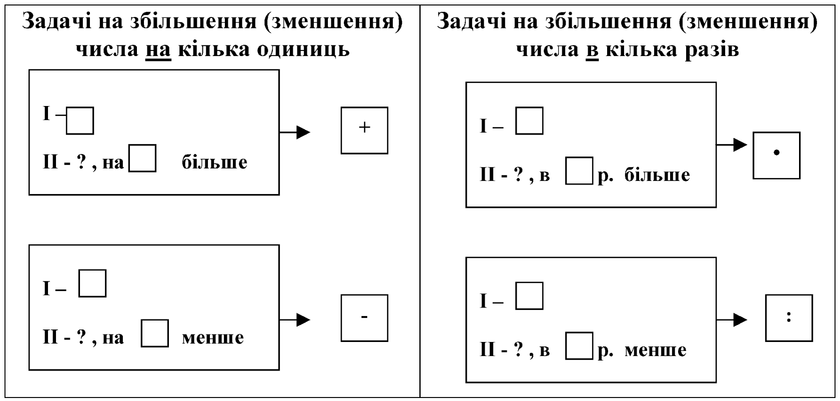


Рис. 4.14. Опорні схеми простих задач на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць чи у кілька разів

☐ — числове дане

В результаті порівняння відповідних опорних схем учні встановлюють їх подібність, тому складання короткого запису задач розглянутого виду не викликає в них труднощів. *Дія складання короткого запису* набуває подальшого засвоєння у *формі «зовнішнього мовлення про себе»*.

18. Ознайомлення з кратним порівнянням. Прості задачі на кратне порівняння

Методикою введення нового виду задач передбачено підготовчу роботу, метою якої є засвоєння правила: щоб знайти, у скільки разів одне число більше або менше від іншого числа, треба більше число поділити на менше число.

Л. Н. Скаткіним **сформульовані вимоги щодо ознайомлення учнів з кратним порівнянням** [473]:

1. Перше ознайомлення необхідно провести практично, пропонуючи дітям безпосередньо порівняти довжину відрізків різного розміру, а потім перейти до порівняння числових значень величини.

2. Обидва питання: «У скільки разів більше?», «У скільки разів менше?» слід розглядати разом, тому що прийом кратного порівняння при цьому один і той самий.

3. Далі слід перейти до кратного порівняння кількостей, ілюструючи це порівняння на класній рахівниці.

4. Після цього можна перейти до порівняння чисел, які є значеннями інших величин: вартості, віку тощо, а потім — до кратного порівняння чисел.

Правила кратного порівняння можна також ввести на підставі додаткових завдань після розв'язання задач на збільшення або зменшення числа у декілька разів. Наприклад, після розв'язання задачі: «Маса індика 15 кг, а гуски — в 3 рази менше. Яка маса гуски?» — можна запропонувати додаткові запитання:

— Яка маса индика?(15 кг)
— Яка маса гуски? (5 кг)
— Маса якої птиці менша? (Менша маса гуски.)
— У скільки разів маса гуски менша, ніж маса індика? (У 3 рази)
— Маса якої птиці більша? (Більша маса індика.) У скільки разів маса індика більша маси гуски? (У стільки ж, у 3 рази)
— Як ви про це дізналися? (В умові задачі, яку ми розв'язали, сказано, що маса гуски в 3 рази менша, ніж маса індика.)
— Як можна про це дізнатися обчисленням? Яку дію слід виконати між числами 15 та 5, щоб отримати 3? (Про це можна дізнатися дією ділення: $15:5-3$.)
— Що ми зробили, щоб дізнатися, у скільки разів одне число більше другого? (Ми більше число поділили на менше.)
— Який висновок можна зробити про те, як знайти, у скільки разів одне число більше, ніж друге число? (Щоб знайти,

у скільки разів одне число більше другого, треба більше число поділити на менше.)

Аналогічно отримуємо висновок: щоб знайти, у скільки разів одне число менше другого, треба більше число поділити на менше.

Кратне порівняння слід вводити, зіставляючи з різницевим порівнянням (на цьому етапі здійснюється засвоєння *у матеріалізованій формі* дії *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв'язання задачі*). Учні визначають, які слова-ознаки визначають дію віднімання [на скільки більше (менше)], а які — дію ділення [у скільки разів більше(менше)]. Таким чином, працюємо над формуванням *дії виділення слів-ознак* співвідношення кратного порівняння (*етап голосного мовлення*).

На ступені підготовчої роботи опрацьовуємо дію складання схематичного рисунка до співвідношення кратного порівняння, тому *дія складання схематичного рисунка* набуває подальшого опрацювання у *формі голосного мовлення*.

При **ознайомленні із задачами на кратне порівняння**, на нашу думку, можна застосувати два методичні підходи. Перший полягає у розв'язанні задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів і складанні оберненої задачі на кратне порівняння. Ми реалізуємо інший варіант, який полягає у порівнянні пари задач: на різницеве порівняння та на кратне порівняння. Наприклад:

1) Довжина кімнати 6 м, а вітальні 3 м. На скільки метрів довжина кімнати більша за довжину вітальні? На скільки метрів довжина вітальні менша за довжину кімнати?

2) Довжина кімнати 6 м, а вітальні 3 м. У скільки разів довжина кімнати більша за довжину вітальні? У скільки разів довжина вітальні менша за довжину кімнати?

Порівнюючи ці задачі, учні встановлюють, що вони відрізняються запитаннями, а саме, в першій задачі запитується «**На** скільки більше (менше)?», а в другій «**У** скільки разів більше (менше)?». З'ясовуємо, як ця відмінність вплине на короткий запис другої задачі, її схематичний рисунок та розв'язання. Виділені слова-ознаки визначають вибір арифметичної дії, тому перша задача розв'язується дією віднімання, а друга — дією ділення (рис. 4.15). Таким чином, здійснюється подальше засвоєння *у формі голосного мовлення* дії *обґрунтування вибору арифметичної дії*.

При закріпленні цих задач учням пропонують в тексті задачі підкреслити слова, які допоможуть вибрати опорну схему задачі і арифметичну дію при її розв'язанні, таким чином *дія виділення слів-ознак співвідношення* кратного порівняння формується у *матеріалізованій формі*.

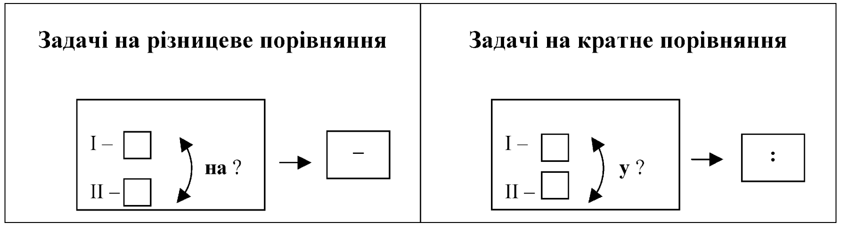


Рис. 4.15. Опорні схеми простих задач на різницеве і кратне порівняння

Пропозиція завдань на складання і розв'язання обернених задач до задачі на кратне порівняння має на меті подальше опрацювання *у формі голосного мовлення* дії *порівняння задач схожих математичних структур, встановлення відмінності між ними і дослідження її впливу на розв'язання задачі*.

Методика формування умінь розв'язувати прості задачі в 2-му класі докладно викладена в роботі автора [500].

4.1.5. Формування уміння розв'язувати прості задачі в 3-му класі

19. Ознайомлення з пропорційними величинами. Прості задачі, що містять пропорційні величини

Задачі з пропорційними величинами вводяться тоді, коли учні вже добре засвоїли конкретний зміст дій множення і ділення. Але вони стикаються з певними труднощами, щоразу зустрічаючись з новими величинами. Виходячи з цього, вважаємо за необхідне проводити спеціальну роботу з ознайомлення школярів з пропорційними величинами.

Отже, знайомимо учнів з групами пропорційних величин:

— маса одного предмета, кількість предметів, загальна маса;
— об'єм однієї посудини, кількість посудин, загальний об'єм;
— довжина одного відрізу, кількість відрізів, загальна довжина;
— ціна товару, кількість товару, вартість;
— продуктивність праці, час роботи, загальний виробіток;
— витрата на один виріб, кількість виробів, загальна витрата;

та зв'язками між ними.

Ці пропорційні величини вводимо за планом:

1. Ознайомлення з термінами: «загальна маса», «загальна довжина», «загальний об'єм». Прямо пропорційна залежність між величинами; знаходження загального значення величини.
2. Обернено-пропорційна залежність між величинами. Знаходження значення величини однієї одиниці виміру та знаходження кількості за відомими двома значеннями.
3. Прості задачі з пропорційними величинами.
4. Зміна загальної величини в залежності від зміни іншої величини (величини однієї одиниці або кількості) при сталій третій величині (кількості або величини однієї одиниці).
5. Зміна кількості в залежності від зміни величини однієї одиниці при сталій загальній величині. Зміна кількості в залежності від зміни загальної величини при сталій величині однієї одиниці.
6. Зміна величини однієї одиниці в залежності від зміни загальної величини при сталій кількості. Зміна величини однієї одиниці в залежності від зміни кількості при сталій загальній величині.
7. Ознайомлення з величинами: загальна вартість, ціна одного предмету, кількість предметів.
8. Задачі з величинами: вартість, ціна, кількість. Зміна однієї величини в залежності від іншої при однаковій третій величині.
9. Величини: продуктивність праці, час роботи, загальний виробіток.
10. Ознайомлення з іншими пропорційними величинами.

Ознайомлення з пропорційними величинами здійснюється через розв'язування простих задач, які спочатку розв'язуються на підставі конкретного змісту арифметичної дії множення і лише потім вводяться назви величин (*етап попереднього ознайомлення з дією виділення величин, що містяться в задачі*). Аналізуючи розв'язок, виводимо правило знаходження числового значення загальної величини за двома відомими числовими значеннями інших величин.

Таким чином, спочатку вводяться правила знаходження загальних величин (маси, довжини, об'єму), і лише після цього, на основі правил знаходження невідомих множників, вводяться правила знаходження величини однієї одиниці та правила знаходження кількості.

Далі учні вчаться у задачах виділяти певну групу величин, з'ясовувати, якими числовими даними вони подані і значення якої величини є шуканим, записувати задачу коротко в формі таблиці і актуалізовувати правило знаходження шуканої величини та застосовувати його для розв'язання задачі. На цьому етапі пропонуються задачі з трьома групами пропорційних величин (маса одного предмета, кількість предметів, загальна маса; об'єм однієї посудини, кількість посудин, загальний об'єм; довжина одного відрізу, кількість відрізів, загальна довжина). Розв'язуючи задачі на знаходження загальної величини або на знаходження величини однієї одиниці, або на знаходження значення кількості з опорою на наочне подання відповідних правил або груп величин, учні опрацьовують *у матеріалізованій формі* дію *виділення величин*, що містяться в задачі.

При розв'язуванні задач на знаходження однієї з трьох величин учням спочатку подаються зразки коротких записів у формі таблиці, а потім вони складають короткий запис самостійно, за зразками, на основі знання груп пропорційних величин та володіючи загальним підходом до їх визначення:

1) на основі найменувань, що стоять поряд з числами задачі, визначити, про яку величину йде мова в задачі: якщо в задачі є іменоване число, подане у кілограмах, грамах, тонах тощо, то в задачі йдеться про масу; якщо іменоване число подано у сантиметрах, метрах, дециметрах й тощо — то йде мова про довжину; якщо іменоване число подано у літрах — то йде мова про об'єм;

2) згадати групу пропорційних величин, що пов'язана із масою, або довжиною, або об'ємом.

Таким чином, здійснюється опрацювання *у матеріалізованій формі* дії *складання короткого запису задачі у вигляді таблиці*. Після того, як діти поступово відходять від застосування зразків, а самостійно вголос промовляють усі міркування по виділенню величин та запису числових значень цих величин в таблиці, *дія складання короткого запису у вигляді таблиці* набуває подальшого засвоєння в *формі голосного мовлення*. Після розв'язання достатньої кількості задач з пропорційними величинами ця дія поступово згортається, і учень, прочитавши задачу, відразу визначає групу пропорційних величин, яка міститься в даній задачі, і записує числові значення цих величин в таблиці (*етап «зовнішнього мовлення про себе»*), а якщо учень відразу після читання задачі без додаткових пояснень робить короткий запис у вигляді таблиці, то це свідчить про те, що дія перейшла у *внутрішній план*.

Широко застосовується складання і розв'язання трійок взаємно *обернених задач* з даною групою пропорційних величин (*етап «зовнішнього мовлення про себе»*).

Потім обговорюється питання про прямо пропорційну залежність загальної величини від зміни однієї з двох інших величин при сталій третій та обернено пропорційну залежність величини однієї одиниці від зміни кількості при сталій загальній величині (*етап попереднього ознайомлення з дією прикидки значення шуканої величини*). Спираючись на наочне подання виведених правил знаходження загальної величини, величини однієї одиниці і кількості (див. рис. 4.17), дітям пропонуються завдання на зміну числового даного задачі так, щоб відповідь збільшилася або зменшилася (*дія прикидки значення шуканої величини* засвоюється в *матеріалізованій формі*).

Після ознайомлення з групами пропорційних величин, які пов'язані з масою, довжиною та об'ємом, вводиться наступна група величин: вартість, ціна, кількість. На підставі порівняння відомих трьох груп величин учні встановлюють, що в кожній групі є загальна величина, величина однієї одиниці та кількість. Вчитель повідомляє, що якщо об'єктом задачі є процес купівлі або продажу, то вона містить величини: вартість, ціну і кількість товару. Далі йде пояснення, що вартість — це кількість грошей, яку сплачують за всю покупку, а ціна — це вартість однієї речі. Таким чином, уся покупка характеризується вартістю або загальною вартістю — кількістю грошей, що заплачено за неї; також ціною — вартістю однієї речі — кількістю грошей за одну річ; та кількістю речей. Учні порівнюють цю групу величин з кожною з трьох розглянутих раніше груп та визначають, що спільним є наявність загальної величини (вартість, загальна маса, загальна довжина, загальний об'єм), величини однієї одиниці (ціна, маса одного предмета, довжина одного відрізу, об'єм однієї посудини) та кількість. Згадується, що загальна величина — це добуток величини однієї одиниці і кількості, і робимо висновок про знаходження вартості покупки. На основі правила знаходження невідомого множника, з правила знаходження вартості отримуємо правила знаходження ціни і вартості.

Опорні схеми до задач, які містять пропорційні величини, можна подати у вигляді узагальненої таблиці з кишенями для назви величин і числових даних (рис. 4.16).

Величини: загальний виробіток, продуктивність праці та час роботи вводимо на основі порівняння двох задач, в яких дуже схожа ситуація (йде мова про кравчиню), але в одній містяться

величини однієї з відомих груп (загальна довжина (витрата) тканини, довжина (витрата) тканини на один виріб, кількість виробів), а в другій — описується процес роботи, тому міститься нова група величин — загальний виробіток, продуктивність праці і час роботи. Над другою задачею працюємо аналогічно, і виділяємо групу величин, яку поки ще називаємо відповідно їх смислу: загальна кількість виробів, кількість виробів за 1 годину і час роботи. Далі учитель повідомляє, що загальна кількість виробів називається загальним виробітком, кількість виробів за одиницю часу — продуктивністю праці. Отже, учні знайомляться з новою групою пропорційних величин: загальний виробіток, продуктивність праці і час роботи. Після розв'язання другої задачі діти «включають» нову групу величин до узагальненої таблиці пропорційних величин (рис. 4.17).

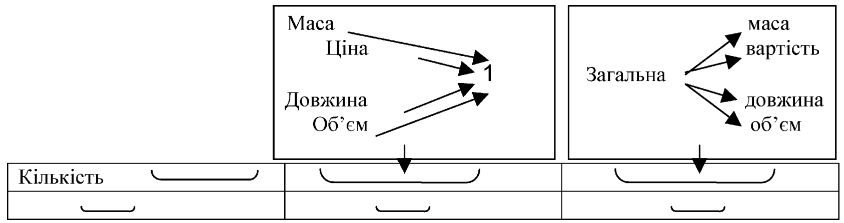


Рис. 4.16. Опорні схеми простих задач, які містять пропорційні величини

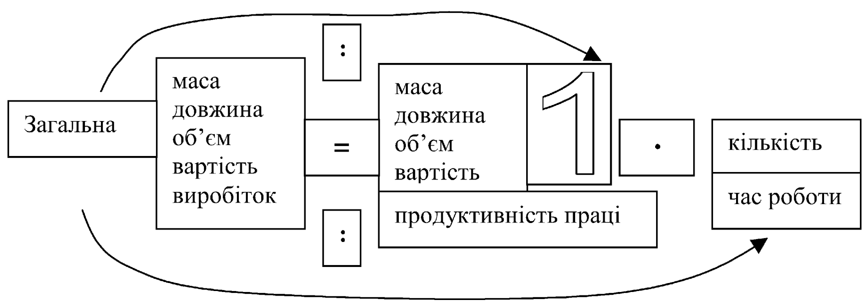


Рис. 4.17. Групи пропорційних величин. Взаємозв'язок між величинами

Школярі формулюють правила знаходження загального виробітку, продуктивності праці і часу роботи. Закріплення цих правил здійснюється при розв'язуванні задач, які описують роботу різних виконавців: друкарки, робітника, насосу й тощо, а також при складанні і розв'язуванні задач за поданими схематичними рисунками. Широко застосовуємо спосіб перевірки правильності розв'язання задачі на основі складання і розв'язання обернених задач.

Крім поданих груп пропорційних величин, задачі містять ще й інші групи пропорційних величин. Методикою роботи над задачами з пропорційними величинами передбачено під час ознайомлення зі змістом задачі і аналізу умови проводити спеціальну роботу по виділенню величин, які містить задача. Наприклад, розглянемо методику роботи над задачею «*Щоб отримати 1 кг заліза, треба 3 кг залізної руди. Скільки кілограмів заліза отримаємо із 18 кг руди?*»:

— Прочитайте задачу та уявіть, про що в ній говориться. Про що розповідається в задачі? (В задачі розповідається про виготовлення заліза із залізної руди: беруть залізну руду і із неї виплавляють залізо. Не із всієї залізної руди дістають залізо, а тільки із частини, тому що під час переробки залізної руди отримають не тільки залізо, але й інші продукти. Відомо: для того, щоб отримати 1 кг заліза потрібно витратити 3 кг залізної руди. Запитується, скільки кілограмів заліза отримаємо із 18 кг залізної руди.)

— Які величини містяться в задачі? 3 кг — це значення якої величини? (В кілограмах вимірюється маса, тому 3 кг — це маса залізної руди, яку потрібно витратити на 1 кг заліза.) 18 кг — це значення якої величини? (В кг вимірюється маса, тому 18 кг — це маса залізної руди.) Щоб відрізнити ці величини, домовимося 18 кг називати загальною масою залізної руди.

— Про що запитується в задачі? (В задачі запитується: «Скільки кілограмів заліза отримають?») Яка величина вимірюється в кілограмах? (Маса) Тому про яку величину запитується? (Про масу заліза.)

Таким чином, ми виділили величини: загальна маса залізної руди, маса залізної руди на 1 кг заліза, маса заліза.

У подібних задачах загальною величиною буде величина вихідного продукту, величиною однієї одиниці — величина вихідного продукту на одиницю нового продукту, і третьою є величина нового продукту.

Отже, на підставі простих задач з пропорційними величинами навчаємо школярів виділяти величини задачі, записувати такі задачі коротко у вигляді таблиці, пояснювати числові дані і запитання відповідно до виділених величин, встановлювати зв'язок між шуканою величиною і даними в задачі величинами. Та частина узагальненої пам'ятки, що стосується аналізу змісту задачі, доповнюється новим пунктом:

1. Прочитай задачу і уяви, про що в ній говориться;

2. Виділи величини, про які йдеться в задачі; виділи ключові слова;
3. Запиши задачу коротко в формі таблиці;
4. За коротким записом поясни числа задачі; яка величина є шуканою.
5. Визнач зв'язок шуканої величини з даними величинами.

Докладно методику ознайомлення молодших школярів з пропорційними величинами, а також методику роботи над задачами з пропорційними величинами подано в роботі автора [492].

20. Ознайомлення з частинами величини. Прості задачі на знаходження частини від числа та числа за числовим значенням його частини

Для засвоєння задач даного виду в учнів повинно бути сформоване поняття про частини, про спосіб отримання частин, про кількість частин в цілому. Безпосередньою підготовкою до введення задач на знаходження частини від числа є засвоєння учнями правила знаходження частини від числа, яке вводиться на основі уявлень учнів про частини та знань про отримання частин. Учням пропонується накреслити відрізок, наприклад, довжиною 12 см, показати четверту частину цього відрізку, пояснюючи цей процес: четверта частина — це одна з чотирьох рівних частин цілого, тому щоб отримати чверть, треба довжину цілого відрізку 12 см поділити на 4 рівні частини, показати одну таку частину і назвати її довжину. Потім вчитель радить виміряти довжину однієї четвертої частини відрізку і повідомляє, що ми знайшли величину однієї чверті від 12 см. Учні з'ясовують, якою арифметичною дією знаходять чверть від 12 см, і формулюють правило знаходження частини від числа. Далі правило знаходження частини від числа застосовується при розв'язуванні завдань, і лише після його засвоєння учням пропонуються сюжетні задачі на знаходження частини від числа і показується схематичний короткий запис.

Правило знаходження числа за числовим значенням його частини вводиться аналогічно. Учням пропонується накреслити відрізок довжиною 3 см і повідомляється, що це чверть цілого відрізку, треба знайти довжину цього відрізка. Спираючись на уявлення учнів про частини, а саме про кількість рівних частин в цілому: для отримання цілого учні пропонують послідовно накреслити чотири таких відрізки, тобто по 3 см взяти 4 рази. З'ясовується, якою арифметичною дією дізнаємося про величину цілого відрізка, і формулюється правило знаходження цілого за числовим значенням його частини. Після засвоєння правила на конкретних прикладах діти розв'язують сюжетні задачі на знаходження цілого за значенням його частини.

При розв'язуванні задач із застосуванням схематичного рисунка відбувається засвоєння обґрунтування вибору дії в матеріалізованій формі. При переході до застосування відповідного правила ця дія переходить у форму голосного мовлення. Після розв'язання певної кількості задач обґрунтування вибору арифметичної дії набуває подальшого засвоєння у формі «зовнішнього мовлення про себе», а далі переходить у внутрішній план.

Дія прикидки відповіді: виходячи із ситуації задачі, визначати, більше чи менше шукане число за одне з даних, набуває подальшого засвоєння у *формі голосного мовлення*. Перед розв'язанням задачі учні міркують так: частина менша за ціле, тому в задачі будемо шукати менше число або ціле більше за його частину, тому в задачі будемо шукати більше число. Зрозуміло, що такі пояснення виконуються при розв'язуванні достатньої кількості задач, після чого міркування згортаються і дія переходить в форму *«зовнішнього мовлення про себе»*, а потім у *«внутрішній план»*.

Система завдань по формуванню уміння розв'язувати задачі на знаходження частини від числа та числа за його частиною подана у роботі автора [494].

Докладно методику роботи над простими задачами 3-го класу подано у публікаціях [492 — 495; 501].

4.1.6. Формування уміння розв'язувати прості задачі в 4-му класі

21. Ознайомлення з величинами: швидкість, відстань та час. Взаємозв'язок між цими величинами. Прості задачі з величинами: швидкість, відстань і час

Задачі даного виду містять функціональний зв'язок між величинами: відстань, швидкість та час. У третьому класі були розглянуті задачі з пропорційними величинами: вартість, ціна, кількість; загальна маса, маса одного предмета, кількість предметів; загальна довжина, довжина одного відрізу, кількість відрізів; загальний об'єм, об'єм однієї посудини, кількість посудин; загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи й тощо. Отже, прості задачі з величинами: відстань, швидкість і час — мають ту саму математичну структуру, що й і будь-які прості задачі на знаходження однієї величини за відомими значеннями двох пов'язаних з нею величин. З цього випливає, що задачі з величинами "відстань", "швидкість" і "час", можна розглядати, як і задачі з будь-якими пропорційними величинами, а також порівнювати їх з задачами з іншими величинами.

Особливе місце в підготовчій роботі повинно займати розв'язування простих задач на функціональну залежність величин, в тому числі задач на знаходження величини «однієї одиниці». Під час розв'язування таких задач актуалізуємо знання про взаємозв'язок між пропорційними величинами.

На етапі підготовчої роботи у молодших школярів формується уявлення про швидкість як про відстань, що проходить тіло, яке рухається рівномірно, за одиницю часу. Діти вже знайомі з величинами: час та відстань. Чули вони й слово «швидкість». Але перед тим, як перейти до розгляду залежності між відстанню, швидкістю та часом при рівномірному русі, поняття про швидкість руху треба ввести.

Спостерігаючи за рухом кількох тіл, учні помітили, що:

— за один і той самий час два тіла можуть пройти різну відстань;

— одну й ту саму відстань два тіла можуть подолати за різний час.

Чому так відбувається? Учні можуть відповісти, виходячи з власного життєвого досвіду: «Тому, що у цих тіл різні швидкості!». Що таке швидкість? На це запитання діти навряд чи дадуть чітку відповідь... Поняття про швидкість вводиться на задачі, яка розв'язується на основі конкретного змісту дії ділення на рівні частини. Але спочатку пропонуємо допоміжну задачу з відомою групою величин на знаходження продуктивності праці з тими самими числами. Учні порівнюють ці задачі і встановлюють їх відмінність. Вчитель пропонує виконати зміни у короткому записі задачі і схематичному рисунку. Розв'язання «нової» задачі не викликає труднощів у дітей, і вчитель повідомляє, що в цій задачі знайшли відстань, що подолало тіло за одиницю часу, тобто швидкість тіла. На основі аналізу розв'язання учні виводять правило знаходження швидкості руху тіла; встановлюється, що швидкість — це теж величина однієї одиниці, і це правило вноситься до загального банку правил знаходження величини однієї одиниці. Далі йде робота по закріпленню фізичного змісту швидкості та правила знаходження швидкості тіла, розв'язуються сюжетні задачі на знаходження швидкості при рівномірному русі. Спочатку ці задачі містять два запитання, наприклад: «Скільки метрів долав бігун за одну секунду? З якою швидкістю біг бігун?», а потім — з одним запитанням.

Ми не обійшли увагою залежність швидкості від зміни відстані або часу. Учням пропонуються пари задач, аналізуючи розв'язки яких, діти роблять відповідні висновки про прямо пропорційну залежність між швидкістю та відстанню та обернено пропорційну залежність між швидкістю та часом.

Аналогічно, на матеріалі задачі, яка розв'язується на основі конкретного змісту дії множення, вводиться правило знаходження відстані за відомими швидкістю і часом, а правило знаходження часу — на основі задачі на конкретний зміст дії ділення на вміщення. На основі аналізу розв'язань цих задач формулюються відповідні правила, які засвоюються при розв'язуванні спеціальних завдань.

Під час формування умінь розв'язувати задачі на знаходження відстані, швидкості й часу ми пропонуємо узагальнити спосіб одержання формули швидкості і часу з формули відстані на основі правила знаходження невідомого множника, який закріплюється при розв'язуванні трійок взаємно обернених задач (*дія складання і розв'язування обернених задач виконується у внутрішньому плані*).

Функціональний зв'язок між величинами відстань, швидкість і час вводиться на основі порівняння пар задач, які відрізняються лише значенням однієї з трьох величин. Встановивши відмінність цих задач і розв'язавши їх, діти визначають, як ця зміна вплинула на розв'язання задачі, та роблять висновки про вид залежностей між двома величинами при сталій третій величині. Таким чином, при роботі над задачами з величинами відстань, швидкість і час ми продовжуємо формувати у молодших школярів *у формі зовнішнього мовлення* дії *прикидки значення шуканої величини та встановлення відповідності шуканого числа області своїх значень*.

Докладно методику формування умінь розв'язувати задачі з величинами "відстань", "швидкість" і "час" подано в роботах автора [497; 502].

22. Прості задачі на час: знаходження тривалості події, знаходження часу початку або часу закінчення події

Задачі на час містять три компоненти: дата початку події, тривалість події і закінчення події. Ці задачі записуються коротко в формі таблиці (див. рис. 4.18):

Час початку події	Тривалість події	Час закінчення події
☐	☐	☐

Рис. 4.18. Опорна схема задач на час

☐ — числове дане або шукане

Ці задачі розв'язуються на основі застосування правил:

1) щоб знайти час закінчення події, треба до часу початку події додати тривалість події;
2) щоб знайти тривалість події, треба від часу закінчення події відняти час початку події;
3) щоб знайти час початку події, треба від часу закінчення події відняти тривалість події.

Пропонуємо учням після розв'язання задачі складати і розв'язувати ще дві обернені задачі. Такі задачі не становлять труднощів для молодших школярів і розв'язуються на основі вже сформованих дій, що складають загальне уміння розв'язувати задачі.

Докладно питання навчання учнів 4-го класу розв'язування простих задач викладено в публікаціях автора [494; 496; 503].

Таким чином, ми розглянули послідовність формування уміння розв'язувати прості задачі в початковій школі. Як бачимо, усі дії, що складають загальне уміння на матеріалі простих задач, формуються в основному в 1-му та 2-му класах, і набувають подальшого засвоєння в 3-му та 4-му класах (додаток Б).

Таким чином, нами запропоновано програму формування загального уміння розв'язувати задачі на матеріалі простих задач, яка передбачає підготовчу роботу до введення поняття «задача», ознайомлення з цим поняттям, та формування уміння розв'язувати прості задачі в 1-му, 2-му, 3-му та 4-му класах. Повноцінне уміння розв'язувати прості задачі є фундаментом формування уміння розв'язувати складені задачі.

4.2. СИСТЕМА НАВЧАЛЬНИХ ЗАДАЧ З ФОРМУВАННЯ ЗАГАЛЬНОГО УМІННЯ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СКЛАДЕНИХ ЗАДАЧ

4.2.1. Зміст і методика підготовчого етапу до введення поняття «складена задача»

Поняття про складену задачу вводиться в 2-му класі, але перед цим слід провести ґрунтовну підготовчу роботу. В результаті аналізу і узагальнення методичної літератури з питання підготовчої роботи до ознайомлення молодших школярів з поняттям «складена задача» ми визначили види завдань, які пропонуються на даному етапі:

— завдання на постановку запитання до даної умови так, щоб задача розв'язувалась певною дією;

— складання задач, які розв'язуються даним виразом;
— складання задач з числами, які розв'язуються даною арифметичною дією;
— задачі з недостатньою кількістю числових даних;
— задачі з зайвими числовими даними;
— дві послідовні прості задачі, у другій з яких бракує числового даного;
— задачі з двома послідовними запитаннями.

Ці види завдань ми поклали в основу розробки програми підготовчої роботи. Розглянемо ***програму підготовчої роботи до введення поняття «складена задача»***:

1. Постановка запитання до даної умови

Метою завдань на постановку запитання до даної умови є навчання учнів ставити запитання до даної умови, на яке можна відповісти за числовими даними, що в ній містяться; закріплення мовних конструкцій: «Для відповіді на запитання задачі потрібно знати два числових значення... На запитання задачі відповімо арифметичною дією...»; навчання знаходження спільного і відмінного в текстах задач.

При розв'язуванні задач цього виду проводиться подальша робота над структурою задачі — щоб одержати задачі, діти повинні поставити до даної умови запитання, яке пов'язано з нею. При цьому вони впевнюються, що до однієї і тієї самої умови можна поставити кілька запитань. Отже, учні опиняються перед необхідністю визначення запитання, на яке можна відповісти за двома числовими даними. Корисними є завдання на вибір запитання до даної умови або на вибір умови до даного запитання.

Наприклад:

1. Подумай, які з даних запитань можна поставити до даної умови? «У білочки було 17 горішків. Вона з'їла 5 горішків вранці, а в обід ще 2 горішки».
   1) Скільки всього горішків з'їла білочка?
   2) На скільки більше горішків з'їла білочка вранці, ніж в обід?
   3) На скільки менше горішків з'їла білочка в обід, ніж вранці?
   4) Скільки грибочків з'їла білочка?
   5) Скільки горішків залишилося в білочки?
2. Підбери умову до даного запитання: «Скільки всього дітей займаються танцями?»
   1) Танцями займаються 24 дитини. З них 13 хлопчиків.
   2) Танцями займаються хлопчики і дівчинки. Хлопчиків на 5 менше, ніж дівчинок.
   3) Танцями займаються 12 хлопчиків і 13 дівчинок.
   4) Танцями займаються 7 хлопчиків, а дівчинок на 2 більше.
   5) Танцями займаються 11 хлопчиків, а дівчинок на 4 менше.

При виконанні таких завдань ми продовжуємо працювати над засвоєнням дій виділення умови і запитання задачі, числових даних і шуканого, виділення слів-ознак окремих видів співвідношень, виділення виду співвідношення.

2. Складання задач з даними числами, які розв'язуються арифметичними діями додавання і віднімання, або складання задач, розв'язком яких є даний вираз

Мета — розвиток варіативності мислення: учні впевнюються, що однією й тією ж арифметичною дією над даними числами можна розв'язати багато задач, які відтворюють різноманітні життєві ситуації; діти вчаться визначати значення числових даних та підбирати запитання, відповідь на яке знаходять певною арифметичною дією. На цьому етапі відбувається подальше навчання школярів порівнювання задач; закріплюються мовні конструкції: «Для відповіді на запитання задачі потрібно знати два числові значення... На запитання задачі відповімо арифметичною дією...».

Складені задачі порівнюються між собою, і учні впевнюються, що в них є спільними лише числові дані, а умови та запитання — різні. Таким чином, розв'язком різних задач може бути один й той самий вираз.

При складанні задачі за даним виразом учням пропонується перевірити себе і встановити, чи всі з поданих запитань вони використали при складанні задач. Також корисними є завдання на постановку запитання до даної умови, на яке можна відповісти за поданим числовим виразом.

Так само, як і в попередніх завданнях, ми продовжуємо формувати дії, що були засвоєні учнями при навчанні розв'язування простих задач.

3. Розв'язання задач із зайвими числовими даними

Під час розв'язання задач із зайвими числовими даними відбувається навчання вибору числових даних, які необхідні для відповіді на запитання задачі. Діти впевнюються, що не всі числові дані використано у розв'язанні задачі, тому вчитель пропонує поставити додаткове запитання, на яке можна відповісти, використавши зайве дане та отриманий розв'язок. Формулюється задача з даною умовою, але з новим запитанням, поєднуються схеми аналізу розв'язання при відповіді на два запитання. Отже, з'являється схема аналізу, яка складається з двох циклів, і учням пропонується повторити міркування за цією схемою. Таким чином, здійснюється формування прийому розумової дії — аналізу, та уміння аналізувати при пошуку розв'язування задачі, коли аналіз складається з двох циклів (*етап попереднього ознайомлення з дією аналізу — міркування від запитання задачі до числових даних)*. Також на цьому етапі продовжується формування уміння порівнювати задачі і решта дій, що були сформовані у процесі навчання розв'язування простих задач (див. табл. В.1. додаток В).

4. Розв'язання задач з недостатньою кількістю числових даних

Метою розв'язання задач з недостатньою кількістю числових даних є формування у дітей уявлення про те, що не завжди можна відповісти на запитання задачі через відсутність числового даного. Це числове дане можна дібрати, але тоді учні отримують різні розв'язки, тому слід добирати додаткову умову, за якою дізнаємось про потрібне число. Далі учні поєднують умову даної задачі й додаткову умову і формулюють задачу, а вчитель поєднує схеми аналізу в одну, яка містить два цикли. Таким чином, на даному етапі продовжуємо вчити учнів аналізувати розв'язування задачі, коли аналіз складається з двох циклів (*етап попереднього ознайомлення з дією аналізу — міркування від запитання задачі до числових даних*) і застосовуємо уміння, які були сформовані у навчанні розв'язування простих задач.

5. Послідовне розв'язання двох простих задач

При послідовному розв'язанні простих задач, таких, що друга задача є продовженням першої, здійснюється формування у дітей уявлення про складену задачу як таку, що містить дві або більше прості задачі. Діти вчаться складати складену задачу із двох пов'язаних між собою простих задач. Наприклад:

1. У дівчинки було 8 олівців. Вона купила ще 4 олівці. Скільки олівців стало у дівчинки?
2. У дівчинки $\boxed{}$ олівців. Вона подарувала подрузі 6 олівців. Скільки олівців в неї залишилося?

Після розв'язання пари простих задач учні встановлюють, що відповісти на запитання другої задачі неможливо, не відповівши на запитання першої задачі; вчитель радить поєднати ці дві задачі в одну та за поданою схемою аналізу, яка містить два цикли, пропонує учням пояснити міркування (*дія аналізу — міркування від числових даних до запитання — опрацьовується в матеріалізованій формі)*. На схемі аналізу виділяються трикутниками прості задачі, діти формулюють кожну з них і визначають їх порядок: перша проста задача — це задача, на запитання якої можна відповісти одразу; друга проста задача — це задача, на запитання якої не можна відповісти, не розв'язавши першу задачу (здійснюється *етап попереднього ознайомлення з діями розбиття задачі на прості та встановлення порядку простих задач, які складають складену задачу)*.

6. Розв'язання задач з двома послідовними запитаннями

Мета — продовжувати формувати у дітей уявлення про те, що існують такі запитання до даної умови, відповісти на які одразу не можна; формувати уявлення про складену задачу, як таку, що складається з двох або більшого числа простих. Продовжувати формувати прийом аналізу у процесі пошуку розв'язування задачі.

Наприклад: В парку гуляло 6 дівчинок, а хлопчиків на 4 більше. Скільки хлопчиків гуляло в парку? Скільки всього дітей гуляло в парку?

Після розв'язання таких задач учні з'ясовують, що відповісти на друге запитання задачі неможливо, не відповівши на перше запитання, — тому схеми аналізу, що стосуються відповідей на кожне запитання, поєднуються, і учні пояснюють міркування за поєднаною схемою. На цих завданнях опрацьовується *дія аналізу — міркування від запитання задачі до числових даних — у матеріалізованій формі*. Далі учні визначають: на яке запитання можна відповісти одразу? Це запитання першої простої задачі, її на поєднаній схеми показано трикутником. А на яке потім? Це запитання другої простої задачі, її теж показано на схемі трикутником. Отже, здійснюється попереднє ознайомлення з *діями розбиття складеної задачі на прості* та *встановлення порядку простих задач*.

Докладніше зміст і методику підготовчої роботи подано у роботах автора [498; 500].

4.2.2. Ознайомлення учнів 2-го класу з поняттям «складена задача»

На **етапі ознайомлення з поняттям «складена задача»** ми спираємося на уявлення та поняття, які були сформовані на підготовчому етапі, а саме:

1. Уявлення про те, що на запитання задачі іноді не можна відповісти одразу.

2. Якщо на запитання задачі не можна відповісти одразу, то схема аналізу містить два цикли, а задача складається з двох простих задач.

Ці уявлення доможуть на етапі ознайомлення молодших школярів з поняттям «складена задача» у опрацюванні наступних дій:

— проведення аналітичного пошуку розв'язування задачі, під час якого слід вибирати пару числових даних для відповіді на певне запитання;
— виділення, спочатку на схемі аналізу, а потім словесне формулювання кожної простої задачі, із яких складається дана задача;
— складання плану розв'язування задачі.

Ознайомлення молодших школярів з поняттям «складена задача» ми пропонуємо здійснювати за ***програмою***:

1. Поняття «складена задача». Ознайомлення з процесом розв'язання складених задач.

На цьому етапі починається формування поняття про складену задачу як про задачу, що складається з кількох простих задач; про розв'язання складеної задачі як послідовне розв'язання простих задач, які вона містить. Крім того, тут певну увагу приділено формуванню уміння аналізувати текст задачі та проводити аналітичний пошук розв'язування задачі і розбиття складеної задачі на прості.

Порівняння задачі з двома запитаннями та відповідної складеної задачі

Поняття «складена задача» вводиться на основі порівняння двох задач, перша з яких — задача з двома послідовними запитаннями, а друга — складена задача. Н а п р и к л а д:

1) Наталка зробила 7 сніжинок, а Іринка на 5 сніжинок більше. Скільки сніжинок зробила Іринка? Скільки всього сніжинок зробили дівчата?

2) Наталка зробила 7 сніжинок, а Іринка на 5 сніжинок більше. Скільки всього сніжинок зробили дівчата?

Учні визначають, що обидва тексти — це задачі, але вони відрізняються тим, що перша задача містить два запитання, а друга — одне. Але ці задачі мають однакові умови і однакові запитання: друге запитання першої задачі таке саме, як запитання другої задачі. Вчитель пропонує з'ясувати, що необхідно знати, щоб відповісти на це запитання. Учні пояснюють міркування за поданою схемою аналізу, в якій слід вписати потрібні числові дані та проставити знаки арифметичних дій, за допомогою яких

відповімо на певне запитання. Таким чином, дія *аналізу — міркування від запитання задачі до числових даних* — продовжує виконуватись у *матеріалізованій формі*. Вчитель вимагає від учнів показати трикутниками на схемі прості задачі і сформулювати їх, показавши опорні схеми, та визначити послідовність простих задач (*дія розбиття задачі на прості та визначення порядку простих задач відбувається в матеріалізованій формі*). Після розбиття складеної задачі на прості дітям повідомляється, що на запитання першої простої задачі відповімо першою дією, а на запитання другої простої задачі — другою дією, таким чином складається план розв'язування задачі (*попереднє ознайомлення з дією складання плану розв'язування задачі*).

Порівняння простої та складеної задач, які мають однакові умови

Учням пропонується пара задач, які мають однакові умови, але різні запитання. Н а п р и к л а д:

1) Щоб прикрасити класну кімнату, учні принесли 8 червоних кульок, а зелених на 4 більше. Скільки зелених кульок принесли діти?

2) Щоб прикрасити класну кімнату, учні принесли 8 червоних кульок, а зелених на 4 більше. Скільки всього кульок принесли діти?

На запитання першої задачі можна відповісти одразу однією арифметичною дією, а на запитання другої задачі не можна відповісти, виконавши лише одну арифметичну дію. Учні порівнюють ці задачі, і перед ними ставиться запитання: «Чи матимуть ці задачі однакові розв'язання?», «На яке запитання можна відповісти одразу?». Після розв'язання простої задачі учні з'ясовують, які зміни треба виконати в короткому записі та схематичному рисунку першої задачі, щоб одержати короткий запис та схематичний рисунок другої задачі, пояснюють числа задачі. Таким чином, *дія складання короткого запису* набуває подальшого засвоєння і *переноситься в нову ситуацію — на складені задачі*. Подальші міркування йдуть від запитання другої задачі: «Що потрібно знати, щоб відповісти на запитання другої задачі?», і за поданою схемою аналізу, вставляючи відповідні числові дані та знаки арифметичних дій, учні виконують *аналітичний пошук розв'язування в матеріалізованій формі*. На схемі аналізу учні показують трикутниками *прості задачі і визначають їх порядок* та формулюють їх (*виконання дії в матеріалізованій формі*) і, виходячи з порядку та запитань простих задач, перевіряють, чи правильно сформульований план розв'язування задачі (*дія формулювання плану розв'язування задачі* виконується в *матеріалізованій формі*). Далі учні знайомляться із записом розв'язання задачі двома діями — за зразком учні записують розв'язання даної задачі і пояснюють кожну дію (відбувається *попереднє ознайомлення з діями запису розв'язання задачі і пояснення виконаних дій*).

Таким чином здійснюється *попереднє ознайомлення з поняттям «складена задача»*; учні впевнюються, що існують задачі, на запитання яких не можна відповісти одразу, однією арифметичною дією, — такі задачі називаються складеними. Складені задачі складаються з кількох простих задач.

Для повноцінного засвоєння цього поняття, за Н. Ф. Тализіною [528], учням потрібно пропонувати завдання на:

1) підведення під поняття;
2) вибір необхідних і достатніх ознак для розпізнавання об'єкта;
3) виведення наслідків про належність або неналежність предмета до поняття.

Вибір необхідних і достатніх ознак для розпізнавання складеної задачі

Орієнтуючись на зроблений висновок про те, що на запитання складеної задачі не можна відповісти одразу однією дією, ми пропонуємо учням завдання на вибір серед поданих задач складених. Ці завдання пропонуються не лише на даному етапі, а й у подальшому (коли учні вже навчаться самостійно розв'язувати складені задачі). Таким чином, формулюється істотна ознака поняття «складена задача» — неможливість розв'язання однією арифметичною дією. Зазначимо, що ця ознака є необхідною взагалі, а достатньою для множини задач, що є розв'язними.

Підведення під поняття «складена задача»

Користуючись визначеною ознакою поняття «складена задача» — неможливістю її розв'язання однією арифметичною дією, учні виконують завдання на встановлення виду, до якого належать певні задачі, або на розпізнавання задач.

Виведення наслідків про належність або неналежність задачі до поняття «складена задача»

За допомогою запитань вчителя учні спонукаються до висновків:

— Якщо задача складена, то її не можна розв'язати однією арифметичною дією;

— Якщо задача проста, то її можна розв'язати однією арифметичною дією;

— Якщо задача складена, то для її розв'язання треба виконати не менш, ніж дві арифметичні дії;

— Якщо задача не проста то вона складена.

2. Формування уміння проводити аналітичний пошук розв'язання задачі

Розв'язання задач за поданими схемами аналізу

На цьому етапі ми продовжуємо формувати *дію аналізу — міркування від запитання задачі до числових даних — в матеріалізованій формі*, але поступово переводимо її у *форму голосного мовлення*. У завданнях, що подані на картках з друкованою основою, поки ще подано схеми аналізу із записами про відповідні числові дані і шукані, але не всі учні читають їх — вони відповідають на запитання вчителя самостійно (форма голосного мовлення). Наведемо приклад картки з друкованою основою:

1. В автоперегонах стартувало 43 легкові машини і 21 вантажна машина. До фінішу прийшли 60 машин. Скільки машин не прийшло до фінішу?

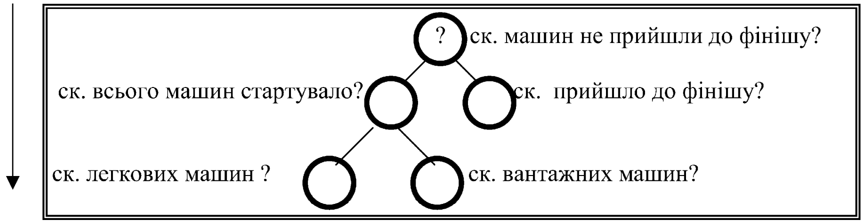


Рис. 4.19. Схема аналізу, що подана на картці з друкованою основою

Треба зазначити, що для формування уміння виконувати аналітичний пошук розв'язування задачі ми пропонуємо різноманітні математичні структури задач, з тим, щоб попередити формальний підхід, обмежити запам'ятовування способу розв'язування і ставити учнів, кожного разу, в умови свідомого вибору числових даних для відповіді на запитання задачі. Тому на даному етапі ми пропонуємо задачі:

— на знаходження суми, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць;
— на знаходження остачі, які містять просту задачу на знаходження суми;
— на знаходження суми, які містять просту задачу на знаходження суми;
— на різницеве порівняння, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць.

За допомогою цих завдань продовжуємо формувати *у матеріалізованій формі* дії *розбиття складеної задачі на прості та визначення порядку простих задач*, при цьому ми спираємось на виділення трикутниками простих задач на схемі аналізу. Зазначимо, що *дія формулювання плану* розв'язування також виконується в *матеріалізованій формі*, спираючись на виділені трикутниками прості задачі та на пояснення вчителя: «Першою дією відповімо на запитання першої простої задачі. Назви запитання першої простої задачі. Про що дізнаємося першою дією? Другою дією відповімо на запитання другої простої задачі. Назви запитання другої простої задачі. Про що дізнаємося другою дією?».

3. Формування уміння розбивати складену задачу на прості та визначати їх порядок. Пам'ятка № 3 для розв'язання складених задач

Завдання на виділення простих задач у короткому записі задачі

На цьому етапі задачі подаються у вигляді тексту без схематичного зображення аналізу розв'язування задачі. Зазначимо, що *дія аналізу — міркування від запитання задачі до числових даних* — на попередньому етапі почала засвоюватися у *формі голосного мовлення*. Таким чином, діти самі промовляють словесні конструкції аналізу, складають схему аналізу і коментують її.

Щодо *дій розбиття складеної задачі на прості та визначення порядку простих задач*, ці дії починають засвоюватися у *формі голосного мовлення*. При формулюванні простих задач показуємо не їх опорні схеми, а виділяємо прямокутниками на короткому записі задачі (рис. 4.20).

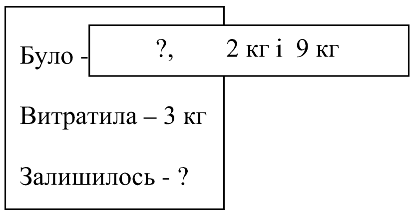


Рис. 4.20. Зразок показу простих задач на короткому записі складеної задачі

Таким чином, ми розпочинаємо формувати «бачення» складу задачі з простих задач відразу після виконання короткого запису, а від цього переходимо до формулювання плану розв'язування задачі.

Учням повідомляється, що при розв'язуванні складеної задачі визначають план розв'язування задачі, тому що складена задача містить в собі кілька простих задач і треба визначити послідовність відповіді на запитання цих простих задач. Таким чином, *дія формулювання плану розв'язання задачі* продовжує засвоюватися в *матеріалізованій формі*.

Далі дітям подається пам'ятка № 3 (дивись 2.4.), в якій відображений порядок роботи над задачею. Учні читають завдання пам'ятки і встановлюють, які з них вони навчилися виконувати при розв'язуванні простих задач, а які — при ознайомленні зі складеною задачею. Особливу увагу приділено 4-му пункту пам'ятки: залежно від відповіді на його запитання, міркування йдуть різними шляхами — якщо на запитання задачі можна відповісти відразу, то задача проста, і ми переходимо до 7-го пункту; а якщо, не можна, то це складена задача, і слід послідовно виконати розпорядження пунктів 5 і 6. Починаючи з цього моменту, робота над усіма задачами проводиться за пам'яткою № 3: учні спочатку читають завдання пам'ятки, а потім їх виконують.

Учням пропонується скласти задачу з даними числами, аналогічну попередній задачі за поданою опорною схемою. За допомогою цих завдань проводиться спеціальна робота із виділення простих задач на опорній схемі та їх формулювання, а потім, виходячи з короткого запису задачі, до розбиття задачі на прості і визначення плану розв'язування.

4. Формування уміння розбивати складену задачу на прості і складати план розв'язання задачі. Складені задачі на знаходження суми і остачі

Складання задач за опорними схемами, короткими записами або за поданим планом розв'язання

Дія аналізу набуває подальшого опрацювання у *формі голосного мовлення*, а центральну увагу приділено *виділенню простих задач і формулюванню плану розв'язування задачі* — ці дії також продовжують засвоюватись у *формі голосного мовлення*. Учні виділяють прості задачі на опорних схемах і порівнюють опорні схеми складених задач на знаходження остачі або суми, схожої математичної структури, визначаючи їх відмінність (перша проста задача на знаходження суми відповідає різним ключовим словам), на цій підставі вони формулюють план розв'язування кожної складеної задачі. Крім того, пропонується задачу на знаходження остачі перетворити у схожу задачу на знаходження суми (або складену задачу на знаходження суми перетворити у іншу задачу на знаходження суми) і, виділивши на короткому записі прості задачі, з'ясувати, як вплине ця зміна на план розв'язання задачі. Таким чином, здійснюється *попереднє ознайомлення з дією дослідження впливу зміни сюжету задачі на її розв'язання*.

З метою засвоєння дії виділення простих задач, визначення їх порядку і формулювання плану розв'язування пропонуються також завдання на складання складеної задачі з двох простих. Тут встановлюється зв'язок між кількістю дій, якими розв'язується задача, і кількістю простих задач, з яких вона складається.

Зіставляючи дві опорні схеми задач на знаходження остачі та дві опорні схеми задач на знаходження суми, а також опорні схеми задачі на знаходження остачі і суми, ми продовжуємо працювати над засвоєнням *дії порівняння задач схожої математичної структури*.

Докладніше зміст і методику ознайомлення молодших школярів з поняттям «складена задача» подано у роботах автора [498; 500].

Далі пропонуємо ***програму формування у молодших школярів загального уміння розв'язувати складені задачі***.

4.2.3. Формування уміння розв'язувати складені задачі в 2-му класі

1. Розв'язання задач. Запис розв'язання задачі виразом. Складені задачі на знаходження зменшуваного та від'ємника, які містять просту задачу на знаходження суми

На цьому етапі учні самостійно розв'язують задачі, міркуючи за пам'яткою № 3. Вони записують задачу коротко, виконують схематичний рисунок, зображають схематично аналітичні міркування, показують прості задачі на схемі й на короткому записі, складають план розв'язування про себе і записують розв'язання по діях з поясненням та відповідь на запитання задачі. Таким чином, *дії аналізу, розбиття складеної задачі на прості та визначення їх порядку, складання плану розв'язування задачі* виконуються у формі *зовнішнього мовлення про себе*.

Після розв'язання задачі учням пропонується розглянути запис розв'язання виразом, визначити в ньому порядок виконання дій і співвіднести його з записом розв'язання по діях. Учні впевнюються, що це інша форма запису розв'язання задачі. Таким чином, відбувається *попереднє ознайомлення з дією запису розв'язання задачі виразом*. Щодо наступних задач, після їх розв'язання пропонується скористатися або схемою аналізу, або

схематичним рисунком, або записом розв'язання по діях, виходячи з останньої дії, і записати вираз за поданою схемою, або вибрати вираз (*дія запису розв'язання виразом* засвоюється в *матеріалізованій формі*).

2. Розв'язання задач на знаходження суми і остачі, які містять просту задачу на знаходження суми, двома способами

Учням пропонується задача, до якої вже поданий план розв'язування, але вчитель радить не застосовувати його.

Наприклад: 1. У шкільній їдальні було 16 л олії. На сніданок витратили 5 л олії, а на обід 8 л. Скільки літрів олії залишилося?

План розв'язування

1) Скільки літрів олії залишилося після сніданку?
2) Скільки літрів олії залишилося після обіду?

Діти розв'язують задачу, міркуючи за пам'яткою № 3: першою дією дізнаємося, скільки всього літрів олії витратили на сніданок і на обід, другою дією дізнаємось, скільки літрів олії залишилось. А потім вчитель пропонує прочитати поданий план і з'ясувати, чи так вони розв'язували задачу, з'ясовується, що не так. Діти виконують схематичний рисунок, який відповідає даному плану, і розв'язують задачу іншим способом. Таким чином здійснюється *попереднє ознайомлення з дією переходу до розв'язання задачі іншим способом*. При розв'язанні задач двома способами за поданими планами розв'язування або за поданими розв'язаннями відбувається опрацювання у *матеріалізованій формі* дії *переходу до розв'язання задачі іншим способом*. Далі учні під керівництвом вчителя розв'язують задачі двома, а далі й трьома способами (дія засвоюється в *формі голосного мовлення*). Слід зазначити, що при розв'язуванні цих завдань учні встановлюють умови, за яких задача даної математичної структури має лише один спосіб розв'язування, а за яких — два способи, а за яких — три.

3. Задачі на знаходження суми і остачі, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць

Наприклад: На клумбі росло 7 червоних троянд, а жовтих на 5 більше. Для букету зрізали 3 жовті троянди. Скільки троянд залишилось на клумбі?

При складанні короткого запису до задач цього виду діти мають труднощі: в задачі є два об'єкти, але події відбуваються лише з одним. Тому зосереджуємо увагу на навчанні складання короткого запису задачі. За допомогою спеціальної бесіди вчитель допомагає учням виділити об'єкт задачі, з яким відбуваються події, і визначити ключові слова та відповідні ним числові дані.

4. Складені задачі, які містять чотири ключових слова

Задачі цього виду вводяться на основі порівняння простої задачі та складеної, причому в складеній задачі події, що відбуваються з об'єктом задачі, продовжуються. Наприклад:

1) На льотному полі було 12 літаків. 4 літака полетіли. Скільки літаків залишилось?

2) На льотному полі було 12 літаків. 4 літаки полетіли, а 3 літаки прилетіли. Скільки літаків стало?

Учні спочатку розв'язують просту задачу, а далі, через зміни в короткому записі і схематичному рисунку, отримують короткий запис і схематичний рисунок другої задачі. Отже, складену задачу, яка містить чотири ключових слова, отримано за допомогою зміни ситуації задачі, що відображується в короткому записі та на схематичному рисунку. Порівнюючи ці наочні опори, учні встановлюють, як ця зміна вплине на розв'язання задачі. Таким чином, *дія дослідження задачі засобом зміни сюжету* набуває подальшого засвоєння у *матеріалізованій формі*.

5. Складені задачі на різницеве порівняння, які містять просту задачу на знаходження суми. Складання і розв'язання обернених задач. Складені задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, які містять просту задачу на знаходження суми

Ознайомлення з задачами цього виду здійснюється на основі порівняння пари задач: перша задача складається з двох задач на знаходження суми, а друга — задача на різницеве порівняння, в якій перша проста задача на знаходження суми.

Наприклад:

1) У Андрія 9 марок з тваринами та 2 марки з містами світу. А у Сашка 8 марок. Скільки всього марок у Андрія і Сашка разом?

2) У Андрія 9 марок з тваринами та 2 марки з містами світу. А у Сашка 8 марок. На скільки менше марок у Сашка, ніж у Андрія?

Учні встановлюють, що ці задачі мають однакові умови, але різні запитання. Діти розв'язують першу задачу і вносять зміни у її короткий запис і схематичний рисунок, щоб одержати короткий запис і схематичний рисунок другої задачі. Далі встановлюється, як ця зміна вплине на розв'язання задачі, — зміниться друга дія. Розв'язання другої задачі здійснюється за пам'яткою № 3. Після чого розв'язання порівнюються і з'ясовується, чому другі дії різні. Отже, дія *дослідження впливу зміни запитання задачі на її розв'язання* набуває подальшого засвоєння в *матеріалізованій формі*.

Після розв'язання задачі на різницеве порівняння пропонуємо учням скласти і розв'язати обернену задачу на збільшення (зменшення) числа на кілька одиниць. Таким чином, дія складання і розв'язання обернених задач набуває подальшого засвоєння.

6. Складені задачі на знаходження третього невідомого доданку

Підготовкою до введення цих задач є розв'язання простих задач на знаходження невідомого доданка. Тому задачі цього виду вводяться на основі порівняння двох задач: перша — проста задача на знаходження невідомого доданка, а друга — складена задача на знаходження невідомого третього доданка, яка містить просту задачу на знаходження суми. Наприклад:

1) За альбом і ручку заплатили 20 гривень. Скільки коштує ручка, якщо альбом коштує 8 гривень?

2) За альбом, ручку та олівці заплатили 27 гривень. Альбом коштує 8 гривень, а ручка — 12 гривень. Скільки коштують олівці?

Порівнявши ці задачі, діти встановлюють, що в другій задачі продовжується ситуація першої задачі. Учні розв'язують першу задачу. А далі виконуються зміни у короткому записі та схематичному рисуеку так, щоб одержати короткий запис і схематичний рисунок другої задачі. З'ясовується, як ці зміни вплинуть на розв'язання задачі, чи можна скористатися правилом знаходження невідомого доданка при розв'язуванні другої задачі. Друга задача розв'язується за пам'яткою № 3, а після її розв'язання визначається, який компонент був невідомий в першій та другій задачі. Учні роблять висновок, що обидві задачі — на знаходження невідомого доданка, але перша задача проста, а друга — складена. Така методика ознайомлення з новим видом задач дозволяє здійснити подальше формування *у матеріалізованій формі* дії *дослідження впливу зміни сюжету задачі на її розв'язання*. Треба зазначити, що ці задачі мають два способи розв'язування, тому *дія переходу до іншого способу розв'язування задачі* набуває подальшого засвоєння. Визначити цей спосіб можна, якщо по-іншому скласти схематичний малюнок до задачі.

7. Складені задачі, які містять дві прості задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць

Задача цього виду вводиться на основі продовження ситуації простої задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Наприклад:

1) Мишко спіймав 8 окунів, а Сашко на 6 окунів більше. Скільки окунів спіймав Сашко?

2) Мишко спіймав 8 окунів, а Сашко на 6 окунів більше, ніж Мишко. Петро спіймав на 5 окунів більше, ніж Сашко. Скільки окунів спіймав Петро?

Так само, як і в попередніх випадках, учні досліджують вплив продовження ситуації задачі на короткий запис, схематичний рисунок, і, головне, на розв'язання задачі. *Дія дослідження впливу зміни сюжету задачі* продовжує засвоюватися в *матеріалізованій формі* або у *формі зовнішнього мовлення* (для тих учнів, які відразу після читання бачать ці зміни і можуть відразу пояснити, як вони вплинуть на розв'язання задачі).

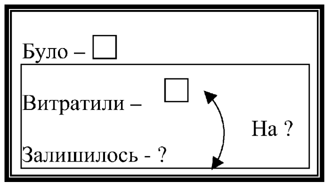
8. Складені задачі на різницеве порівняння, які містять просту задачу на знаходження остачі або невідомого доданка. Складання і розв'язування обернених задач

Наприклад: У класній бібліотеці було 56 книжок. 37 книжок видали учням для читання. На скільки більше книжок видали, ніж залишилося в бібліотеці?

Робота над задачами нової математичної структури здійснюється за пам'яткою № 3. Під керівництвом учителя учні поступово виконують усі складові дії загального уміння розв'язувати задачі, а тому ці дії засвоюються й далі.

Складання задач за опорними схемами

На основі розгляду опорних схем та виділення на них простих задач учні знайомляться з новими математичними структурами задач на різницеве порівняння (рис. 4.21).



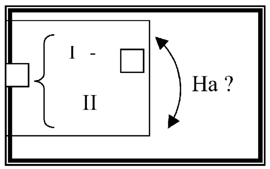


Рис. 4.21. Опорні схеми складених задач на різницеве порівняння
□ — числове дане

Учні самостійно складають задачі за поданими опорними схемами, розбивають їх на прості, визначаючи їх порядок, формулюють план розв'язування і записують розв'язання та відповідь. Отже, дії *розбиття складеної задачі на прості, визначення порядку простих задач та складання плану розв'язування* набувають подальшого засвоєння *у формі зовнішнього мовлення про себе*. Також вдосконалюється *уміння складати і розв'язувати обернені задачі*.

9. Складені задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, які містять просту задачу на знаходження суми та обернені до них складені задачі на різницеве порівняння

Учням пропонується задача нової математичної структури, яку вони розв'язують, міркуючи за пам'яткою № 3. Наприклад:

На шкільній кролефермі було 25 білих кролів, 43 чорних, а сірих на 12 менше, ніж білих і чорних разом. Скільки сірих кролів було на кролефермі?

Таким чином, ми продовжуємо формувати усі складові дії загального уміння розв'язувати складені задачі.

Наступне завдання передбачає постановку запитання до даної умови і розв'язання одержаної задачі, після чого вимагається скласти обернену задачу. Наприклад:

Діти прикрашали класну кімнату до свята. Тетянка зробила 24 ліхтарика, Іринка — 25 ліхтариків, а Сашко — 59 ліхтариків.

— Це задача? Що треба зробити, щоб отримати задачу?
— Чи можна поставити до цієї умови запитання: «На скільки більше зробив ліхтариків Сашко, ніж Тетянка та Іринка разом?»

Математичні структури прямої та оберненої задач аналізуються, порівнюються, і досліджується вплив відмінності на розв'язання оберненої задачі. Це дає можливість на прикладі однієї задачі познайомити дітей з задачами на різницеве порівняння та на знаходження числа, яке на кілька одиниць більше чи менше за дане. Отже, продовжуємо формувати *уміння досліджувати вплив зміни умови задачі на її розв'язання у формі голосного мовлення.*

10. Складені задачі на знаходження невідомого доданка, які містять просту задачу на знаходження суми

Задачі цього виду вводяться на основі порівняння двох взаємно обернених задач, перша з яких містить дві прості задачі на знаходження суми. Наприклад:

1) В Андрія було 12 марок з тваринами і 14 марок з містами світу. Тато йому подарував 13 марок. Скільки марок стало в Андрія?

2) В Андрія було 12 марок з тваринами та 14 марок з містами світу. Після того, як тато подарував йому кілька марок, в нього стало 39 марок. Скільки марок подарував Андрію тато?

Розв'язання першої задачі не викликає у дітей труднощів, і вони можуть відразу виділити прості задачі та, сформулювавши план розв'язування, записати розв'язання та відповідь. Далі з'ясовуємо, чим відрізняється друга задача від першої і як ця зміна вплине на розв'язання задачі?

На даному етапі пропонуємо порівняти пари задач (по стрілочках), визначаючи спільне та відмінне (рис. 4.22).

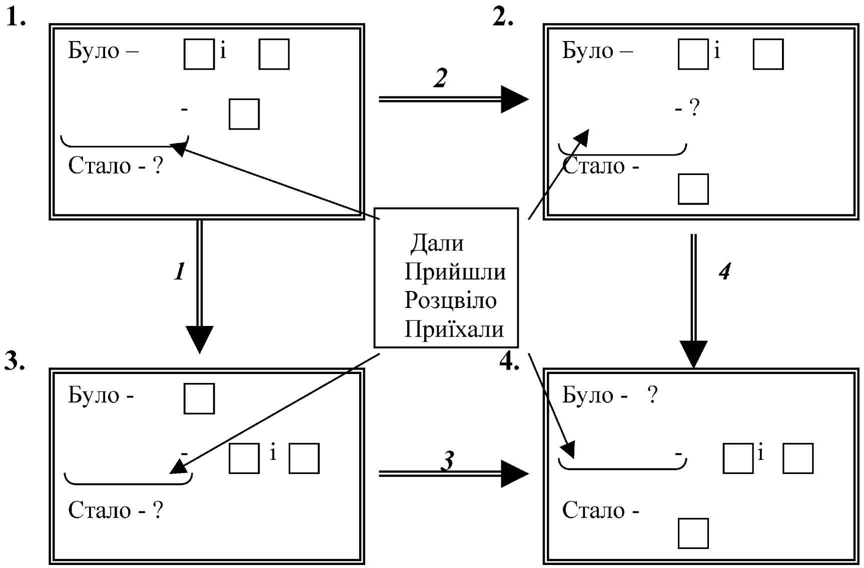


Рис. 4.22. Схема порівняння пар задач

Діти помічають, що задачі, з'єднані стрілочками 2 та 3, взаємно обернені; задачі, з'єднані стрілочкою 1, — задачі на знаходження суми, а стрілочкою 4 — задачі на знаходження невідомого доданка. Але спільним в усіх цих задач є наявність простої задачі на знаходження суми. Таким чином, дії складання і розв'язання обернених задач, порівняння задач і дослідження впливу зміни на розв'язання задачі набувають подальшого засвоєння.

Зазначимо, що ці задачі можна розв'язувати кількома способами, тому здійснюється опрацювання *дії переходу до розв'язання задачі іншим способом в формі «зовнішнього мовлення про себе»*.

11. Складені задачі на знаходження невідомого зменшуваного або від'ємника, які містять просту задачу на знаходження суми

Учням спочатку пропонується розглянути опорні схеми задач і порівняти їх попарно за стрілочками (рис. 4.23).

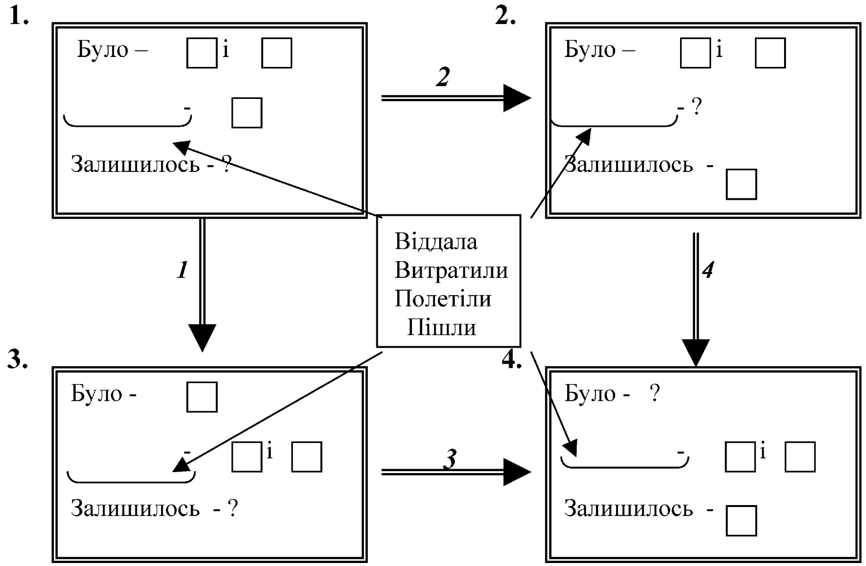


Рис. 4.23. Схема порівняння пар задач

Діти роблять аналогічні висновки, що й при порівнянні задач на знаходження суми та на знаходження невідомого доданка. Далі пропонуються для розв'язання задачі розглянутих математичних структур.

12. Задачі на знаходження суми трьох доданків, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць

Задачі нової математичної структури вводяться на основі порівняння простої задачі на знаходження суми трьох доданків і складеної задачі на знаходження суми трьох доданків, яка містить просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Н а п р и к л а д:

1) У Марійки 8 цукерок, у Віті 7, а у Сашка 9 цукерок. Скільки всього цукерок у дітей?

2) У Марійки 8 цукерок, у Віті на 4 цукерки більше, ніж у Марійки. У Сашка 9 цукерок. Скільки всього цукерок у дітей?

При порівнянні цих задач встановлюється спільність і відмінність. Діти розв'язують першу задачі, а далі виконують зміни в короткому записі і схематичному рисунку, так щоб одержати короткий запис і схематичний рисунок другої задачі. З'ясовується, як ця зміна вплине на розв'язання другої задачі. Таким чином, *дія дослідження впливу зміни умови задачі на її розв'язання* набуває подальшого засвоєння у *формі голосного мовлення*.

Учні розглядають опорну схему задач нової математичної структури, виділяють на ній прості задачі і формулюють план розв'язування.

13. Складені задачі на знаходження третього числа по сумі двох даних, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць

Ознайомлення зі складеними задачами цього виду відбувається аналогічно введенню задач на знаходження суми трьох доданків, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Н а п р и к л а д:

1) Першого дня туристи пройшли 12 км, а другого 9 км. Третього дня вони подолали стільки, скільки за перші два дні разом. Скільки кілометрів подолали туристи третього дня?

2) Першого дня туристи пройшли 12 км, а другого на 3 км менше. Третього дня вони подолали стільки, скільки за перші два дні разом. Скільки кілометрів подолали туристи третього дня?

Але на цьому етапі *дія дослідження впливу зміни умови задачі на її розв'язання* формується в формі «*зовнішнього мовлення про себе*» — учні відразу встановлюють відмінність цих задач і, не розв'язуючи першої задачі, визначають вплив зміни на розв'язання другої.

14. Задачі на знаходження суми, які містять дві задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць

Ці задачі ми пропонуємо для розв'язання без допоміжних задач, хоча можна було б застосувати й реалізований нами у багатьох випадках методичний прийом — порівняння двох задач, перша з яких має відому структуру (задача на знаходження суми трьох доданків, яка містить збільшення або зменшення числа на кілька одиниць), а друга дещо ускладнена (задача на знаходження суми двох доданків, яка містить дві прості задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць). Оскільки тут відмінність полягає не лише у застосуванні другої простої задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, а ще й у зміні суми трьох доданків на суму двох доданків, то ми обмежилися поданням задачі нової математичної структури і розв'язанням її за пам'яткою № 3. Н а п р и к л а д: У причала стояло 12 скутерів, а яхт на 7 менше, ніж скутерів, а катерів — на 8 більше, ніж яхт. Скільки яхт та катерів стояло у причала?

Вважаємо таку роботу корисною, тому що учні ще раз повертаються до розгорнених міркувань при розв'язуванні складених задач, отже, усі складові дії загального уміння розв'язувати складені задачі й далі засвоюються.

Ускладнення задач даної математичної структури йде засобом знаходження суми не двох, а трьох доданків.

15. Сформульовані у непрямій формі задачі на дворазове збільшення або зменшення числа на кілька одиниць

На етапі підготовчої роботи розв'язуються прості задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, сформульовані у непрямій формі. Саме уміння розв'язувати такі прості задачі є основою для розв'язання відповідних складених задач. Задача нової математичної структури пропонується у порівнянні з відповідною складеною задачею, яка містить дві прості задачі на збільшення числа на кілька одиниць, що сформульовані у прямій формі. Н а п р и к л а д:

1) Композитор Моцарт написав першу оперу у 10 років, а Гайдн на 4 роки пізніше Моцарта, а Прокоф'єв — на рік раніше Моцарта. У скільки років написав першу оперу Прокоф'єв?

2) Композитор Гайдн написав першу оперу в 14 років, що на 4 роки пізніше, ніж Моцарт, а Прокоф'єв на 1 рік раніше Моцарта. У скільки років написав першу оперу Прокоф'єв?

Учні встановлюють відмінність, але ця відмінність не вплине на розв'язання другої задачі. Таким чином, продовжуємо формувати *дію дослідження впливу зміни умови задачі на її розв'язання у формі «зовнішнього мовлення про себе»*.

16. Задачі на знаходження остачі, які містять задачу на конкретний зміст дії множення

На етапі підготовчої роботи до ознайомлення з задачами цієї математичної структури актуалізується уміння розв'язувати прості задачі на конкретний зміст дії множення. Задача нової математичної структури вводиться без допоміжної задачі, одразу, і пропонується розглянути опорну схему таких задач. Н а п р и -

к л а д: Для шкільного свята мама купила 4 пакета соку по 2 л в кожному. Діти випили 7 л соку. Скільки літрів соку залишилося?

Опорні схеми у наступній роботі над задачами є зразками коротких записів, з яких учні обирають потрібний. Задачі розв'язуються за пам'яткою № 3, учні виконують повний аналіз. Отже, всі складові дії загального уміння розв'язувати задачі набувають подальшого засвоєння. Звертаємо увагу на прикидку очікуваного результату: у відповіді повинні отримати менше число, тому що залишилося менше, ніж було, та на встановлення відповідності між знайденим числом та числовими даними задачі.

17. Задачі на знаходження суми, які містять задачу на конкретний зміст дії множення або дві прості задачі на конкретний зміст добутку

Робота над задачами на знаходження суми, які містять просту задачу на конкретний зміст добутку, проводиться аналогічно.

А задачі на знаходження суми, які містять дві прості задачі на конкретний зміст добутку, вводяться як ускладнення ситуації попередньої задачі. Н а п р и к л а д:

1. Кравчиня пошила 6 платтів, витрачаючи по 2 м на кожне і пальто, на яке вона витратила 3 м тканини. Скільки всього метрів тканини витратила кравчиня?

2. Кравчиня пошила 6 платтів, витрачаючи по 2 м на кожне, та 2 пальто, витрачаючи по 3 м на кожне. Скільки всього метрів тканини витратила кравчиня?

Також задачі на знаходження суми, які містять слова-ознаки «було — стало», вводяться як зміна ситуації відповідної задачі на знаходження остачі («було — залишилося»). Н а п р и к л а д:

1) У Іринки було 5 купюр по 2 гривні. Вона купила коробку цукерок за 7 гривень. Скільки грошей залишилося в Іринки?

2) У Іринки було 5 купюр по 2 гривні. Тато дав їй ще 7 гривень. Скільки грошей стало в Іринки?

Таким чином, учні ставляться в умови необхідності *дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі*, тому ця дія набуває подальшого засвоєння в *формі «зовнішнього мовлення про себе»*.

18. Задачі на знаходження остачі, які містять задачу на конкретний зміст дії ділення

Робота над задачами цього виду проводиться аналогічно попереднім: подаються опорні схеми, якими учні користуються для

розв'язання задач, вибираючи потрібну. Задачі, які містять просту задачу на ділення на вміщення, подаються у порівнянні з задачами, які містять просту задачу на ділення на рівні частини, досліджується вплив цієї зміни на розв'язання задачі. Н а п р и к л а д:

1) До шкільної їдальні привезли 27 л молока в трилітрових бутлях. На сніданок витратили 7 бутлів молока. Скільки бутлів молока залишилося?

2) До шкільної їдальні привезли 27 л молока в 9 бутлях, порівну в кожному. Для приготування млинців з бутля відлили 2 л молока. Скільки літрів молока залишилось в бутлі?

19. Задачі на різницеве порівняння, які містять дві прості задачі на конкретний зміст добутку

Вводяться у порівнянні з відповідними задачами на знаходження суми. Н а п р и к л а д:

1) Софійка розв'язала три стовпчики прикладів по 7 прикладів у кожному. А Оленка розв'язала чотири стовпчики прикладів по 5 прикладів у кожному. Скільки всього прикладів розв'язали дівчата?

2) Софійка розв'язала три стовпчики прикладів по 7 прикладів у кожному. А Оленка розв'язала чотири стовпчики прикладів по 5 прикладів у кожному. На скільки більше прикладів розв'язала Софійка, ніж Оленка?

Встановивши відмінність цих задач, учні досліджують вплив цієї зміни на розв'язання другої задачі, формулюють план її розв'язуванні і записують його. Дія дослідження впливу зміни запитання задачі набуває подальшого засвоєння.

20. Задачі на різницеве порівняння, які містять дві прості задачі на конкретний зміст частки

Задача нової математичної структури вводиться одразу, без порівняння з відомими задачами, і розв'язується за пам'яткою № 3. Н а п р и к л а д:

У двох однакових каструлях 10 л молока, а в банці 3 л. На скільки літрів молока більше в одній каструлі, ніж у банці?

Але задача на різницеве порівняння, яка містить дві прості задачі на конкретний зміст частки, вводиться у порівнянні з задачею, яка містить лише одну просту задачу на знаходження частки:

1) Один чабан настриг з 3 овець 18 кг шерсті, порівну з кожної, а інший з однієї вівці настриг 7 кг шерсті. Хто настриг з однієї вівці більше шерсті і на скільки?

2) Один чабан настриг з 3 овець 18 кг шерсті, порівну з кожної, а інший з 4 овець — 28 кг шерсті, порівну з кожної. Хто настриг з однієї вівці більше шерсті і на скільки?

Учні розв'язують першу задачу, працюючи за пам'яткою № 3, потім порівнюють другу задачу з першою, встановлюють, що змінилося, і з'ясовують, як ця зміна вплине на розв'язання задачі. Після чого формулюється план розв'язування другої задачі, записується її розв'язання та відповідь.

21. Задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, що містять просту задачу на конкретний зміст дії множення. Задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, що містять просту задачу на конкретний зміст дії ділення

Подаються опорні схеми цих задач, якими учні користуються для складання коротких записів при розв'язуванні задач за пам'яткою № 3.

1. У ларьок привезли 4 ящика помідорів по 9 кг у кожному, а огірків на 7 кг менше, ніж помідорів. Скільки кілограмів огірків привезли в магазин?

2. На три плаття кравчиня витратила 6 м тканини, а на один костюм витрачається на 1 м тканини більше, ніж на плаття. Скільки метрів тканини необхідно на костюм?

22. Складені задачі на знаходження частки, які містять просту задачу на конкретний зміст суми

Задача нової математичної структури подається у порівнянні з простою задачею на знаходження суми. Наприклад:

1) Першого дня мати зробила 11 л соку, а другого 10 л соку. Скільки всього літрів соку зробила матуся за два дні?

2) Першого дня мати зробила 11 л соку, а другого 10 л соку. Весь сік вона розлила в трилітрові банки. Скільки отримала банок з соком матуся?

Зіставивши ці задачі, діти впевнюються, що складена задача є продовженням простої задачі. І далі досліджується вплив цієї зміни на розв'язання задачі: добавляється ще одна арифметична дія, і це дія ділення. Таким чином діти, які одразу помічають цю відмінність і висловлюють припущення, як вона вплине на розв'язання складеної задачі, виконують *у внутрішньому плані* дію *дослідження впливу зміни умови задачі на її розв'язання*.

23. Складені задачі на знаходження суми, які містять просту задачу збільшення або зменшення числа у кілька разів. Задачі на різницеве порівняння, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа у кілька разів

Вводяться аналогічно: пропонуються для порівняння дві задачі — проста задача на збільшення або зменшення числа у кілька разів та складена задача нової математичної структури.

Наприклад:

1) Сашко посадив 4 дерева, а тато в 3 рази більше. Скільки дерев посадив Сашко?

2) Сашко посадив 4 дерева, а тато в 3 рази більше. Скільки всього дерев посадили Сашко і тато?

Діти визначають, що складена задача є продовженням простої, тому для її розв'язання потрібно буде виконати ще одну дію — і це дія додавання, тому що в задачі запитується: «Скільки всього?».

Задача аналогічної математичної структури на різницеве порівняння подається після розв'язання задачі на знаходження суми:

Порівняй задачу з попередньою: Сашко посадив 4 дерева, а тато в 3 рази більше. На скільки менше дерев посадив Сашко, ніж тато?

Учні визначають, що змінилося запитання і ця зміна вплине на другу дію — друга дія зміниться і буде дією віднімання, тому що запитується: «На скільки більше чи менше?».

24. Складені задачі, які містять дві прості задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів

Задачі нової структури вводяться у порівняння з складеними задачами, які містять дві прості задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Наприклад:

1) Сашко посадив 4 дерева, а тато на 3 дерева більше. Мама посадила на 2 дерева менше, ніж тато. Скільки дерев посадила мама?

2) Сашко посадив 4 дерева, а тато в 3 рази більше. Мама посадила в 2 рази менше, ніж тато. Скільки дерев посадила мама?

Учні з'ясовують, що задачі відрізняються умовами, а саме — в першій задачі було задано два співвідношення різницевого порівняння, а в цій два співвідношення кратного порівняння. Тому зміняться арифметичні дії, але план розв'язування лишиться тим самим.

25. Задачі на знаходження суми, які містять дві прості задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів

Вводяться у порівнянні з задачами попередньої математичної структури. Наприклад:

1) Сашко посадив 4 дерева, а тато в 3 рази більше. Мама посадила в 2 рази менше, ніж тато. Скільки дерев посадила мама?

2) Сашко посадив 4 дерева, а тато в 3 рази більше. Мама посадила в 2 рази менше, ніж тато. Скільки всього дерев посадили?

При цьому виявляється, що задачі мають однакові умови, але різні запитання, причому друга задача є продовженням першої. Тому ця зміна викликає необхідність виконання ще однієї арифметичної дії — додавання (запитується: «Скільки всього?»).

26. Складені задачі на кратне порівняння, які містять дві прості задачі на конкретний зміст добутку

Задачі подаються у порівнянні зі складеною задачею на різницеве порівняння, яка містить дві прості задачі на конкретний зміст добутку. Наприклад:

1) У Миколи 4 купюри по 10 гривень, а в Іринки 4 купюри по 2 гривні. На скільки менше грошей у Іринки, ніж у Миколи?

1) У Миколи 4 купюри по 10 гривень, а в Іринки 4 купюри по 2 гривні. У скільки разів менше грошей у Іринки, ніж у Миколи?

Учні встановлюють, що ці задачі відрізняються лише запитаннями — в першій задачі запитується «На скільки більше чи менше?», і ми відповідаємо на це запитання дією віднімання, а в другій — «У скільки разів більше чи менше?», і ми відповідаємо на це запитання дією ділення. Отже будуть різні останні дії.

27. Задачі на кратне порівняння, які містять першу просту задачу на конкретний зміст дії ділення, а другу — на конкретний зміст остачі

Застосовується підхід, аналогічний до попереднього (див. 26). Учням пропонується пара задач: перша — складена задача на різницеве порівняння, яка містить першу просту задачу на конкретний зміст дії ділення, а другу на знаходження остачі; інша задача — задача на кратне порівняння аналогічної математичної структури. Наприклад:

1) В магазині 16 кг цукру розсипали у пакети, по 2 кг в кожний. 6 пакетів продали. На скільки менше пакетів залишилось, ніж продали?

2) В магазині 16 кг цукру розсипали у пакети, по 2 кг в кожний. 6 пакетів продали. У скільки разів менше пакетів залишилось, ніж продали?

Після розв'язання першої задачі, порівнявши другу задачу з першою і визначивши їх відмінність, діти встановлюють, як ця зміна вплине на розв'язання задачі, та виконують зміни у розв'язанні попередньої задачі.

28. Складені задачі на знаходження невідомого доданка, які містять просту задачу на конкретний зміст дії множення. Складені задачі на знаходження невідомого доданка, які містять просту задачу на конкретний зміст дії ділення

Застосовується метод зміни умови задачі і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі. Учням пропонується проста

задача на знаходження невідомого доданка, яка порівнюється з задачею даної математичної структури. Наприклад:

1) Тарас за три дні повинен розв'язати 32 приклади. Скільки прикладів він розв'язав в третій день, якщо за два дні він розв'язав 18 прикладів?

2) Тарас за три дні повинен розв'язати 32 приклади. Скільки прикладів він розв'язав в третій день, якщо перші два дні він розв'язував по 9 прикладів?

Діти встановлюють, що другу задачу отримано засобом надання додаткової умови, а тому ця зміна викличе необхідність виконання ще однієї арифметичної дії.

29. Складені задачі на знаходження невідомого зменшуваного або від'ємника, які містять просту задачу на конкретний зміст дії множення. Складені задачі на знаходження невідомого зменшуваного або від'ємника, які містять просту задачу на конкретний зміст дії ділення

Застосовується підхід аналогічний попередньому (див. 28). Дітям пропонується пара задач: перша — проста задача на знаходження зменшуваного (або від'ємника), а друга — складена задача з тим самим запитанням, але із ускладненою умовою.

Наприклад:

1) Садівник обкопав 16 дерев, і йому залишилось ще обкопати 18 дерев. Скільки дерев він повинен був обкопати?

2) Садівник обкопав 2 рядки по 8 дерев в кожному, і йому ще залишилось обкопати 18 дерев. Скільки дерев він повинен був обкопати?

1) До їдальні привезли 35 л олії. Через тиждень залишилось 28 л олії. Скільки літрів олії витратили за тиждень?

2) До їдальні привезли 7 п'ятилітрових каністр олії. Через тиждень залишилось 28 л олії. Скільки літрів олії витратили за тиждень?

1) В бутлі було 3 л соку. Після того, як з бутля відлили кілька літрів, в ньому залишилось ще 1 л. Скільки літрів соку відлили з бутля?

2) Мама купила 12 л соку в 4 бутлях, порівну в кожному. Після того, як з бутля відлили кілька літрів, в ньому залишилось ще 1 л. Скільки літрів соку відлили з бутля?

Після розв'язання першої задачі, порівнявши другу задачу з першою і визначивши їх відмінність, діти встановлюють, як ця зміна вплине на розв'язання задачі.

Докладніше методику формування в учнів 2-го класу умінь розв'язувати складені задачі подано в роботах автора [408; 500].

Незважаючи на різноманіття видів складених задач, на матеріалі яких здійснюється формування загального уміння розв'язувати задачі, до обов'язкового мінімуму 2-го класу входять лише задачі, що розв'язуються двома арифметичними діями першого ступеню.

4.2.4. Формування уміння розв'язувати складені задачі в 3-му класі

З метою актуалізації складових дій загального уміння розв'язувати складені задачі та подальшого засвоєння, скорочення і автоматизації цього уміння ми на початку навчального року пропонуємо провести спеціальну роботу по узагальненню поняття складеної задачі та окремих її видів.

30. Узагальнення поняття про складену задачу

Порядок роботи над задачею

Учні розв'язують задачу, міркуючи за пам'яткою № 3, таким чином актуалізуються складові дії загального уміння розв'язувати задачі. Перша задача розбирається з повним аналізом, і лише після цього діти формулюють прості задачі (Наприклад: За добу від вівці надоїли 1 л молока, від кози 3 л, від корови на 20 л більше, ніж від вівці та кози разом. Скільки літрів молока надоїли від корови?). При розв'язуванні другої складеної задачі, за пам'яткою №3, учням пропонується вже у короткому записі виділити прості задачі (Наприклад: Школярі виростили 37 кг помідорів, огірків на 7 кг менше, ніж помідорів, а капусти на 20 кг більше, ніж огірків. Скільки кілограмів капусти виростили школярі?). Третя задача — задача в три дії — вводиться на основі порівняння з попередньою (Наприклад: Школярі виростили 37 кг помідорів, огірків на 7 кг менше, ніж помідорів, а капусти на 20 кг більше, ніж огірків. Скільки кілограмів овочів виростили школярі?).

При порівнянні другої та третьої задач учні встановлюють, що математична структура третьої задачі дещо ускладнена відносно структури другої задачі. Проте, як свідчить досвід, визначення у короткому запису простих задач не викликає в дітей труднощів, і вони відразу формулюють план розв'язування задачі. Діти дістають висновку про те, що кількість і порядок простих задач визначають план розв'язування.

Отже, якщо на короткому записі можна відразу виділити і встановити порядок простих задач, з яких складається складена

задача, у цьому випадку ми відразу переходимо до складання плану розв'язування та запису розв'язання і відповіді, інакше проводимо повний аналіз.

Конструювання складеної задачі з кількох простих задач

Мета — узагальнити поняття «складена задача», як задачі, що складається з кількох простих задач, порядок і кількість яких визначає план розв'язування; класифікувати складені задачі за видом останньої простої задачі, на прикладі задач на знаходження суми, остачі, збільшення (зменшення) числа на кілька одиниць, різницеве порівняння, знаходження зменшуваного.

Визначення простих задач за коротким записом складеної задачі

Такі завдання пропонуються з метою навчити дітей «бачити» прості задачі на короткому записі складеної задачі, і, встановивши порядок простих задач, формулювати план розв'язування задачі. На цьому етапі передбачається скорочення складної дії розв'язування задачі через виділення простих задач вже на короткому записі і перехід до формулювання плану розв'язування складеної задачі й запису розв'язання і відповіді.

Узагальнення математичних структур задач на знаходження остачі

Мета — узагальнити різні типи математичних структур складених задач на знаходження остачі, за допомогою складання задач на знаходження остачі з кількох простих, і виділення простих задач із задачі на знаходження остачі; підвести дітей до висновку, що в таких задачах остання проста задача — це задача на знаходження остачі.

1. У Олі було 6 купюр по 2 гривні. Вона купила книгу за 3 гривні. Скільки грошей залишилося в Олі?
2. В рулоні було 28 м тканини. Пошили два простирадла, витрачаючи на кожне по 8 м тканини. Скільки метрів тканини залишилося в рулоні?
3. У їдальню привезли 18 л соку в трилітрових банках. На обід витратили 3 банки соку. Скільки банок соку залишилося?
4. У двох банках 18 л соку, порівну в кожній. З однієї банки відлили 5 л соку. Скільки літрів соку залишилося в цій банці?

Узагальнення математичних структур задач на знаходження суми

Складена задача на знаходження суми отримується засобом перетворення складеної задачі на знаходження остачі: слова-ознаки відношення віднімання «було — залишилось» замінюються словами-ознаками відношення суми «було — стало». Н а п р и к л а д:

Мама дала Тетянці 5 гривень. Вона купила бублик та літрову пачку молока. Скільки грошей залишилось у Тетянки?

— Замінимо в короткому записі ключові слова. Розкажіть задачу.

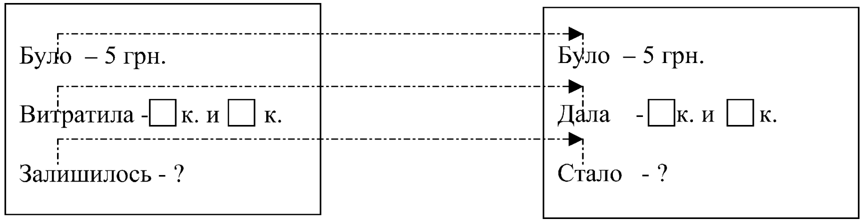


Рис. 4.24. Перетворення задачі на знаходження остачі у аналогічну задачу на знаходження суми

Діти, не розв'язуючи другу задачу, визначають, що ця зміна вплине на другу дію, — дія віднімання заміниться на дію додавання. Далі, через зміни в умовах задач та порівняння отриманих задач з попередньою, учні досліджують вплив цих змін на склад задачі, що розглядається, з простих задач та на її розв'язання. Учні встановлюють спільність усіх задач: остання проста задача — задача на знаходження суми, тому усі розглянуті задачі — це складені задачі на знаходження суми.

1. У Тетянки було 5 гривень, а у Наталки на 4 гривні більше. Скільки всього грошей у дівчинок?

2. У Тетянки було 5 гривень, у Наталки на 4 гривні більше, а у Іринки на 2 гривні менше, ніж у Наталки. Скільки у Наталки та Іринки разом?

3. З однієї вівці настригли 6 кг шерсті, а з двох інших по 5 кг шерсті. Скільки кілограмів шерсті настригли з трьох овець?

4. Тато купив 3 сітки картоплі по 2 кг в кожній та 1 кг моркви. Скільки кілограмів овочів купив батько?

5. Тато купив 3 сітки картоплі по 2 кг в кожній та 2 сітки моркви по 1 кг в кожній. Скільки всього кілограмів овочів купив тато?

Узагальнення математичних структур задач на знаходження невідомого доданка

Учням пропонується кілька взаємно пов'язаних складених задач на знаходження невідомого доданка, так що наступна задача являє собою ускладнення попередньої задачі; діти отримують різноманітні математичні структури задач на знаходження невідомого доданка. Н а п р и к л а д:

1. В трьох ящиках 32 кг винограду. Скільки кілограмів в третьому ящику, якщо в першому лежить 8 кг, а в другому 10 кг винограду?

2. В трьох ящиках 32 кг винограду. Скільки кілограмів в третьому ящику, якщо в першому та другому лежить по 9 кг винограду?

Порівнюючи кожну наступну задачу з попередньою, школярі досліджують, як ця зміна впливає на розв'язання задачі. Таким чином, ми продовжуємо вчити «бачити» склад з простих задач на короткому записі, скорочуючи міркування при розв'язуванні складених задач.

Узагальнення математичних структур задач на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць

Аналогічно попередньому. Учням пропонується задача на дворазове збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Далі формулювання попередньої задачі ускладнюється: задача складається з двох задач на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць і задачі на знаходження суми двох доданків.

Н а п р и к л а д:

1. У Тані 47 марок, а в Іри на 19 марок менше, а у Сашка на 34 марки більше, ніж у Іри. Скільки марок у Сашка?

2. У Тані 47 марок, а в Іри — 19 марок. У Сашка на 34 марки більше, ніж у Тані й у Іри разом. Скільки марок у Сашка?

Порівнявши цю задачу з попередньою, учні встановлюють їх відмінність і з'ясовують, як ця відмінність впливає на розв'язання другої задачі.

Наступна складена задача містить першу просту задачу на знаходження суми, а другу — на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Після її розв'язання умова задачі змінюється — задача на знаходження суми двох доданків замінюється на задачу на конкретний зміст добутку. Н а п р и к л а д:

3. Андрій виростив 32 білих кроля та 44 сірих, а Василь — на 23 кролі менше. Скільки кролів виростив Василь?

4. В Андрія 7 кліток із кроликами, по 3 кролика в кожній. У Василя — на 9 кроликів менше. Скільки кроликів у Василя?

Порівнявши обидві задачі і встановивши відмінність між ними, учні з'ясовують, як ця зміна впливає на розв'язання другої задачі, а потім розв'язують її. Пропонується третя задача, яка теж має той самий сюжет, що й попередня, але складається з простої задачі на конкретний зміст дії ділення та задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Наприклад:

5. В Андрія 36 кроликів, вони живуть у двох клітках, порівну в кожній. У Василя в одній клітці живе на 7 кроликів більше, ніж в Андрія в одній клітці. Скільки кроликів у Василя живе в одній клітці?

Порівнюємо цю задачу з попередньою і встановлюємо, як зміна умови задачі вплине на її розв'язання.

Далі порівнюємо усі розглянуті задачі, і визначаємо, що спільним в них є проста задача, що розв'язується останньою, — задача на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць. Учням можна повідомити, що розглянуті задачі — це складені задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць.

Складання і розв'язування обернених задач

Після розв'язання складеної задачі на знаходження суми з'ясовується, якими способами можна перевірити правильність розв'язання. Одним з цих способів є складання і розв'язання оберненої задачі. Таким чином, задача на знаходження суми перетворюється в обернену задачу на знаходження невідомого доданка, після розв'язання якої порівнюється знайдене число з відповідним числовим даним першої задачі, і учні впевнюються в тому, що задачу розв'язано правильно. Аналогічно працюємо над задачею на знаходження остачі.

Узагальнення математичних структур задач на різницеве порівняння

Мета — розглянути різні математичні структури складених задач на різницеве порівняння; виділити спільну властивість усіх цих задач, а саме наявність останньої простої задачі на різницеве порівняння. Складену задачу на різницеве порівняння учні одержують, як обернену до задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, і з'ясовують, як зміна шуканого вплине на розв'язання задачі. Інші математичні структури складених задач на різницеве порівняння розглядаються у порівнянні із задачами відомих математичних структур.

1. Склади і розв'яжи обернену задачу до задачі: Андрій виростив 32 білих кроля та 44 сірих кролі, а Василь — на 23 кролі менше. Скільки кролів виростив Василь?

2. Андрій виростив 32 білих кроля та 44 сірих кролі, а Василь 53. На скільки менше кролів виростив Василь?

3. В одному кошику 27 груш, а в другому 15. З другого кошика взяли 6 груш. На скільки більше стало груш в першому кошику, ніж у другому?

4. Порівняй задачі:

1) Перше число 26. Друге число 17. А третє число на 13 менше суми першого і другого чисел. Знайди третє число.

2) Перше число 26. Друге число 17. А третє число на 13 менше суми першого і другого чисел. Яке число більше: перше чи третє? На скільки більше?

5. Порівняй задачі:

1) В діжку можна налити 31 л води, а у бідон 13 л. Скільки всього літрів води можна налити в дві діжки і бідон?

2) В діжку можна налити 31 л води, а у бідон 13 л. На скільки літрів води більше вміщують дві діжки, ніж бідон?

6. У двох діжках міститься 62 л води, порівну в кожній, а в одному бідоні — 13 л. На скільки більше літрів води в одній діжці, ніж в одному бідоні?

Узагальнення математичних структур задач на знаходження частки

Аналогічно попереднім. Для порівняння пропонується проста задача на знаходження остачі та складена задача з тим самим сюжетом, яка містить просту задачу на знаходження остачі та просту задачу на конкретний зміст дії ділення. Наприклад:

До їдальні привезли 43 л соняшникової олії. На обід витратили 25 л. Скільки літрів олії залишилося?

До їдальні привезли 43 л соняшникової олії. На обід витратили 25 л, решту розлили в 3 банки порівну у кожну. Скільки літрів олії налили в кожну банку?

Порівнявши ці задачі, з'ясовуємо, чим вони відрізняються, та встановлюємо, як ця зміна вплине на розв'язання другої задачі.

Далі складена задача на конкретний зміст частки попередньої математичної структури порівнюється з задачею, яка складається з двох простих задач — задачі на знаходження суми та задачі на конкретний зміст дії ділення. Наприклад:

1) Мама зірвала 20 огірків. 8 огірків з'їли на обід, а решту мама засолила, розклавши їх у 4 банки порівну. Скільки огірків поклала мама в кожну банку?

2) Мама зірвала 20 огірків. 8 огірків зірвала дочка. Усі ці огірки розклали порівну в 4 банки і засолили. Скільки огірків поклали в кожну банку?

Після порівняння цих задач учні визначають їх відмінність та з'ясовують, як ця відмінність вплине на розв'язання задачі.

Докладніше про узагальнення поняття «складена задача» та процесу її розв'язування подано у роботах автора [495; 501].

31. Навчання міркування від числових даних до запитання задачі — синтезу

Учням пропонується для розв'язання задача нової математичної структури на збільшення або зменшення числа у кілька разів, яка містить першу просту задачу на збільшення або зменшення числа у кілька разів і другу просту задачу на знаходження суми:

На дослідній ділянці у господарстві посіяли 30 кг пшениці, жита — в 5 разів менше, ніж пшениці, а гречки — в 4 рази менше, ніж пшениці та жита разом. Скільки посіяли гречки?

Учні виконують повний аналіз і розбивають задачі на прості. Вчитель показує інший спосіб міркування — від числових даних до запитання задачі — синтез. Таким чином відбувається *попереднє ознайомлення з дією міркування від числових даних до запитання задачі*. До наступних задач учні отримують картки з незаповненими схемами синтезу, в яких вони повинні вставити числові дані та знаки арифметичних дій, *дія міркування від числових даних до запитання задачі* формується *в матеріалізованій формі*. Поступово учні запам'ятовують словесні конструкції, які застосовуються при синтезі, і ця дія набуває подальшого засвоєння у *формі голосного мовлення*. Зауважимо, що ми не припиняємо при розв'язуванні задач міркувати від запитання задачі до числових даних. Діти самостійно обирають спосіб міркувань. Але, як свідчить практика, при розв'язуванні задач в три та більше дій учні застосовують переважно синтез.

32. Складені задачі на знаходження трьох невідомих доданків за сумами двох та сумою трьох чисел

На етапі підготовчої роботи актуалізується уміння розв'язувати прості задачі на знаходження невідомого доданка та уміння розв'язувати складені задачі на знаходження невідомого третього доданка.

Ознайомлення з обговорюваним видом задач можна провести наступним чином. Розглядаємо дві послідовні задачі на знаходження невідомого доданку, а далі з них утворюється складена

задача на знаходження невідомого третього числа, на підставі перетворення якої отримується задача нового виду. Наприклад:

1. Сума двох чисел дорівнює 72. Знайдіть другий доданок, якщо перший доданок 24.

2. Сума двох чисел (II та III) дорівнює 76. Знайдіть третє число, якщо друге число 48.

3. Сума трьох чисел 100. Знайдіть третє число, якщо перше число 24, а друге число 48.

4. Сума першого та другого числа 72. Сума другого та третього числа 76. Знайдіть третє число, якщо перше число 24.

5. Сума трьох чисел 100. Знайдіть кожне число, якщо сума першого та другого числа 72, другого та третього числа — 76.

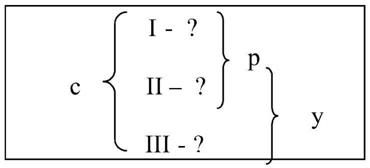
Для того, щоб діти усвідомили спосіб розв'язування задачі на знаходження трьох чисел за трьома сумами, пропонуємо порівнювати одержану задачу з попередніми, визначати, що потрібно зробити, щоб отримати одну з попередніх задач, яка розв'язується дуже просто. Отже, визначається спосіб розв'язування задач даної математичної структури.

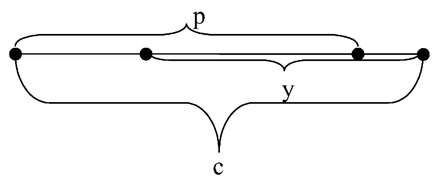
Для усвідомлення істотних ознак задач цього виду і узагальнення способу їх розв'язування учням пропонується завдання на складання задачі з тими ж самими числами, але з іншою ситуацією, наприклад: про ціну плаття, костюма та штанів. Учні записують задачу коротко, пояснюють числа задачі і складають план розв'язування задачі. Вчитель запитує: «Чи треба розв'язувати цю задачу? Може, розв'язання вже записано на дошці? Чому ці задачі мають однакові розв'язання?» Учні з'ясовують, що обидві задачі містять однакові числа і мають однакову структуру короткого запису, а значить і склад з простих задач, тому вони мають однакові розв'язання. Школярі «виправляють» лише пояснення до арифметичних дій.

Далі вчитель пропонує задачу про ціну костюма, плаття та штанів з іншими числами, і учні виконують зміни в короткому записі попередньої задачі, щоб одержати короткий запис даної задачі. Діти помічають, що обидві задачі мають однакові ключові слова, так само дані три суми (але різні числові значення), задачі мають однакову математичну структуру. Далі досліджується, як ця зміна вплине на розв'язання, — розв'язання зміниться, тому що числові дані інші, а план розв'язування — не зміниться, тому що ця задача має таку саму структуру, склад з простих задач. Школярі пояснюють план розв'язування і роблять висновок: якщо в запитання задачі входить слово «кожний», то вона містить кілька шуканих чисел. Якщо в задачі три шуканих числа треба знайти за трьома сумами, то вона розв'язуватиметься так:

1) із суми трьох чисел віднімемо суму першого та другого числа, отримаємо третє число;
2) із суми трьох чисел віднімемо суму другого та третього числа, отримаємо перше число;
3) із суми першого та другого числа віднімемо перше число, отримаємо друге число; або із суми другого та третього числа віднімемо третє число, отримаємо друге число.

Таким чином узагальнюється математична структура задач даного виду і формулюється узагальнений план розв'язування (рис. 4.25). На матеріалі цих задач ми здійснили *попереднє ознайомлення з діями визначення істотних ознак задачі та узагальнення її математичної структури, та узагальнення способу розв'язування задач даного виду*. Наступне опрацювання зазначених дій відбуватиметься на матеріалі задач з пропорційними величинами.





Розв'язання
(с – у) – перше число
(с – р) – третє число
р – (с – у) – друге число
або
у – (с – р) – друге число

Рис. 4.25. Опорна схема, схематичний рисунок та спосіб розв'язування задач на знаходження трьох чисел за сумами двох та сумою трьох доданків

Потім діти на підставі істотних ознак вчаться впізнавати задачі даного виду і застосовувати для них узагальнений спосіб розв'язування.

На етапі формування умінь розв'язувати задачі на знаходження трьох доданків за трьома сумами учні складають короткий запис задачі, «впізнають» її, розказують план розв'язування задачі, записують розв'язання і відповідь до задачі, виконують перевірку правильності розв'язання, додаючи знайдені числові значення трьох шуканих величин, і якщо отримують числове дане суми трьох чисел, то роблять висновок про правильність розв'язання задачі. На цьому ступені пропонуються різноманітні види завдань:

1) Запиши задачу коротко і зроби схематичний малюнок. Встанови, до якого виду вона належить. Згадай спосіб розв'язування таких задач. Розв'яжи задачу і зроби перевірку.
2) Зроби схематичний малюнок і поясни, про що дізнаємося, обчисливши значення даних виразів.
3) Оціни вірність розв'язання задачі, якщо є помилки, то виправи їх.
4) Постав запитання до даної умови і розв'яжи одержану задачу.
5) На які із запропонованих запитань можна відповісти за даною умовою?
6) До даного запитання добери умову з поданих.
7) Зміни запитання задачі так, щоб задача розв'язувалась двома діями.
8) Вибери з поданих числові дані і розв'яжи задачу.
9) Розв'яжи задачу і порівняй цю задачу з наступною (оберненою).

Докладно методику роботи над задачами цього виду подано в роботах автора [479; 500].

33. Складені задачі, що містять частини

Пропонуємо учням різноманітні математичні структури складених задач, які містять частини:

— задачі на знаходження остачі, які містять задачу на знаходження частини від числа (Наприклад: З дослідної ділянки зібрали 100 кг картоплі. П'яту частину відібрали для посадки на наступну весну, а решту здали в шкільну їдальню. Скільки кілограмів картоплі здали в їдальню?);

— задачі на знаходження суми, які містять дві прості задачі на знаходження частини від числа (Наприклад: В шкільному саду 60 дерев. Третина дерев — яблуні і чверть — груші. Скільки в саду яблунь і груш разом?);

— задачі на конкретний зміст дії ділення, що містять просту задачу на знаходження частини від числа (Наприклад: В парку 96 дерев. Третю частину цих дерев складають клени та липи. Скільки кленів і лип в парку, якщо їх там порівну?);

— задачі на збільшення числа на кілька одиниць, які містять просту задачу на знаходження частини від числа (Наприклад: Школярі запланували зробити для лісопарку 36 годівниць для птахів, а зробили на третину більше. Скільки годівниць зробили школярі?);

— задачі на знаходження остачі, які містять дві прості задачі на знаходження частини від числа та задачу на знаходження суми (Наприклад: В бочці 27 л води. Спочатку в бочку долили третю частину того, що в ній було, а потім відлили третину того, що в ній стало. Скільки літрів води залишилося в бочці?);

— задачі на знаходження частини від числа, які містять просту задачу на знаходження числа, яке у кілька разів більше чи менше за дане, та просту задачу на знаходження суми (Наприклад: В перший день виставку відвідали 120 школярів, а в другий — в 3 рази більше. Учні третіх класів складали шосту частину усіх відвідувачів. Скільки третьокласників відвідало виставку?).

Робота над задачами йде за пам'яткою № 3, тобто усі складові дії загального уміння розв'язувати задачі набувають подальшого засвоєння.

Докладно система завдань та методика роботи над задачами, які містять частини, подана в роботах автора [493; 500].

4.2.5. Формування уміння розв'язувати складені задачі в 4-му класі

У третьому класі ми сформували дію міркування від числових даних до запитання задачі — синтез і почали формувати дії визначення істотних ознак задач та узагальнення їх математичної структури та способу розв'язування, які набули подальшого засвоєння під час роботи над задачами з пропорційними величинами в 3-му класі. Таким чином, до четвертого класу всі складові дії загального уміння розв'язувати складені задачі практично мають бути засвоєні, тому на цьому етапі зосереджено увагу на формуванні умінь розв'язувати задачі певних видів. Водночас на задачах, які містять дроби, і на інших задачах першої групи відбувається подальше вдосконалення загального уміння. Розглядаючи методику роботи над складеними задачами першої групи в 4-му класі, обмежимося лише розглядом складених задач, які містять дроби:

Задачі, які містять знаходження дробу від числа

— задачі на знаходження дробу від відомого числа (Наприклад: Урок триває 45 хвилин. $\frac{3}{5}$ уроку учні писали самостійну роботу. Скільки часу вона тривала?).

Складені задачі, які містять знаходження дробу від відомого числа

— задачі на знаходження остачі, які містять знаходження дробу від відомого числа (Наприклад: У Оленки 14 гривень. На сніданок вона витратила $\frac{3}{7}$ грошей, що в неї були. Скільки коштував сніданок? Скільки грошей в неї залишилося?);

— задачі на знаходження остачі, в яких треба двічі знаходити дріб від відомого числа (Наприклад: В куску було 96 метрів тканини. На скатертини витратили $\frac{3}{8}$ цього куску, а на серветки — $\frac{5}{12}$ куску. Скільки метрів матерії залишилося у куску?);

— задачі на знаходження суми, в яких треба двічі знаходити дріб від відомого числа (Наприклад: У магазині було 720 кг рису. За перший день продали $\frac{2}{9}$, а за другий $\frac{3}{5}$ всього рису. Скільки кілограмів рису продали за два дні?);

— задачі на знаходження невідомого доданка, які містять знаходження дробу від відомого числа (Наприклад: На будівництво доставили 24000 штук цегли. Бій склав $\frac{2}{8}$ усієї цегли. Скільки було цілих цеглин?);

— задачі на знаходження невідомого доданка, в яких треба двічі знаходити дріб від відомого числа (Наприклад: Рибалки спіймали 240 т риби. Окуні склали $\frac{5}{24}$ всієї риби, судаки — $\frac{7}{12}$ всієї риби, а решта були коропчуки. Скільки було коропчуків?);

— задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів, які містять знаходження дробу від відомого числа (Наприклад: Розмелювали 3 т 600 кг пшениці. $\frac{4}{5}$ усієї пшениці становило борошно, манки було у 40 разів менше, решта — висівки. Скільки одержали манних крупів?);

— задачі на різницеве порівняння, в яких треба двічі знаходити дріб від відомого числа (Наприклад: Мама відрізала Олі $\frac{7}{10}$ м стрічки, а Лесі $\frac{4}{5}$ м. У кого з дівчаток коротша смужка і на скільки?);

— задачі на знаходження частки, які містять знаходження дробу від відомого числа (Наприклад: Іа-Іа випік до дня народження 46 пиріжків. $\frac{3}{23}$ усіх пиріжків він з'їв сам, а решту розклав порівну на 4 тарілки. Скільки пиріжків на кожній тарілці?);

— задачі, в яких треба знайти число, яке на дріб від даного числа більше чи менше (Наприклад: Буратіно вирішив купити для папи Карло новий будинок за 420 сольдо. Але поки він накопичував гроші, ціна будинку збільшилася на $\frac{2}{7}$. Скільки зараз повинен заплатити Буратіно за цей будинок? Скільки грошей треба йому додатково?).

Складені задачі, які містять знаходження дробу від невідомого числа

— задачі на знаходження суми, в яких треба двічі знаходити дріб від числа, в тому числі й від невідомого (Наприклад: При розмелюванні пшениці на борошно маса чистого борошна становить $\frac{9}{10}$ маси пшениці. Після випікання хліба припічка дорівнює $\frac{4}{10}$ маси борошна. Скільки хліба одержали з 5 тонн пшениці?);

— задачі на знаходження дробу від невідомого числа, які містять знаходження дробу від даного числа (Наприклад: Вихід вершків з молока становить $\frac{4}{25}$ маси молока, а вихід масла з вершків — $\frac{2}{9}$ маси вершків. Скільки масла можна одержати з 9 т молока?);

— задачі на знаходження невідомого доданка, в яких перша проста задача на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, друга — на знаходження площі прямокутника, третя — на знаходження дробу від невідомого числа (Наприклад: Довжина садиби 100 м, а ширина на 60 м менше. $\frac{3}{8}$ площі садиби займають будівлі, двір і сад, а решту — город. Яку площу займає город?);

— задачі на знаходження дробу від решти, які містять просту задачу на знаходження остачі (Наприклад: Фермер виростив і зібрав 1445 ц картоплі. 245 ц він залишив для годівлі тварин, а $\frac{5}{6}$ решти продав на базарі. Скільки центнерів картоплі продав фермер?);

— задачі на знаходження дробу від решти, які містять знаходження дробу від відомого числа та задачу на знаходження остачі (Наприклад: У майстерні було 2826 м тканини. $\frac{4}{9}$ тканини витратили на пошиття жіночих костюмів. На пошиття чоловічих костюмів витратили $\frac{4}{5}$ решти тканини. Скільки пішло на чоловічі костюми?);

— задачі на знаходження дробу від решти, які містять просту задачу на знаходження площі прямокутника і просту задачу на знаходження остачі (Наприклад: Розміри пришкільної ділянки, що має форму прямокутника, 125 м і 350 м. 14950 $м^2$ займає сад, а $\frac{2}{3}$ решти площі відведено для дослідних ділянок. Знайди площу дослідних ділянок.);

— задачі на знаходження дробу від решти, які містять просту задачу на конкретний зміст дії множення та просту задачу на знаходження остачі (Наприклад: Для школи завезли 1750 зошитів у пачках. 6 пачок, по 50 зошитів у кожній пачці, виділили для учнів початкових класів. $\frac{9}{10}$ решти зошитів продали учням старших класів. Скільки зошитів продали учням старших класів?).

Задачі, які містять знаходження числа за його дробом

— задачі на знаходження числа за його дробом (Наприклад: В кіоск привезли 240 зошитів в клітинку, це становило $\frac{2}{6}$ усіх зошитів. Скільки зошитів привезли в кіоск?);

— задачі на знаходження остачі, які містять знаходження числа за його дробом (Наприклад: Хлопчик прочитав 160 сторінок, що складає $\frac{4}{9}$ всієї книги. Скільки сторінок йому залишилося прочитати?);

— задачі на різницеве порівняння, які містять знаходження числа за його дробом (Наприклад: Тривалість життя лева 35 років, що складає $\frac{7}{10}$ життя ведмедя. На скільки років довше може жити ведмідь, ніж лев?);

— задачі, в яких треба кілька разів знаходити число за його дробом (Наприклад: Зріст Сашка 120 см, що складає $\frac{5}{6}$ росту Тараса. А зріст Оленки складає $\frac{3}{4}$ зросту Тараса. Який ріст у кожної дитини?);

Система завдань і методика роботи над складеними задачами, що містять дроби, подані в роботі автора [494]. Ці питання висвітлені також в роботі автора [502].

Таким чином, нами запропоновані програми підготовчої роботи до введення поняття «складена задача», ознайомлення з цим поняттям та формування уміння розв'язувати складені задачі в 2-му, 3-му та 4-му класах.

4.3. СИСТЕМА НАВЧАЛЬНИХ ЗАДАЧ З НАВЧАННЯ МОЛОДШИХ ШКОЛЯРІВ РОЗВ'ЯЗУВАТИ СКЛАДЕНІ ЗАДАЧІ, ЩО МІСТЯТЬ ЗНАХОДЖЕННЯ СУМИ АБО РІЗНИЦЕВЕ ЧИ КРАТНЕ ПОРІВНЯННЯ ДВОХ ДОБУТКІВ (ЧАСТОК), ТА ОБЕРНЕНІ ДО НИХ

4.3.1. Зміст і методика підготовчої роботи

На етапі підготовчої роботи до введення цих задач ми пропонуємо актуалізувати у молодших школярів уміння розв'язувати прості задачі з пропорційними величинами та перенести їх на задачі з пропорційними величинами на дві дії, що містять різницеве чи кратне відношення. Основну увагу при розв'язуванні задач зазначених видів слід приділити вдосконаленню уміння виділяти величини, що містяться в задачі (що було сформовано на матеріалі простих задач), формуванню уміння виділяти дискретні (допоміжні) величини задачі та їх числові значення, записувати задачу коротко в формі таблиці. Паралельно йде подальше опрацювання уміння зображати значення величини у вигляді довжини відрізка, інтерпретувати довжину відрізка як деяку величину, виражати один відрізок через інші, складати схематичний рисунок до задачі.

1. Актуалізація знань про пропорційні величини та вмінь розв'язувати прості задачі з пропорційними величинами

Пропонуємо учням згадати основні величини, які вони знають, і пов'язані з ними групи пропорційних величин. Встановлюємо зв'язок пропорційних величин та узагальнюємо окремі правила (див. рис. 4.16).

Перед розв'язанням задач діти визначають, які пропорційні величини містяться в задачі та їх числові значення, записують задачу коротко в формі таблиці, роблять схематичний малюнок і лише після цього розв'язують задачу. Перевіркою правильності розв'язання є складання і розв'язання обернених задач. Далі подаються завдання на складання задачі за даним схематичним рисунком. Причому спочатку школярам подаються задачі, які містять зазначені групи пропорційних величин, а потім — з іншими групами пропорційних величин.

Метою цих завдань є актуалізація різноманітних груп пропорційних величин, їх взаємозв'язків, а також актуалізація умінь виконання табличної форми короткого запису задач, що містять пропорційні величини, і схематичного рисунка.

2. Вдосконалення уміння виділяти величини, що містяться в задачі, та числові значення відповідних величин, записувати задачу коротко у вигляді таблиці

Уміння виділяти величини, що містяться в задачі, та записувати задачу коротко у вигляді таблиці було сформовано у формі «зовнішнього мовлення про себе» на матеріалі простих задач. Тому на задачах з пропорційними величинами це уміння повинно набути розумової форми, і для цього ми пропонуємо спеціальну роботу над **задачами, які містять відношення різницевого або кратного порівняння**.

Задачі, які містять різницеве відношення, — це перші складені задачі з пропорційними величинами, тому їх введення вимагає спеціально продуманої системи навчальних задач. Спочатку учням пропонуються дві підготовчі прості задачі, з яких далі складається задача нового виду. Наприклад:

1. Один тесляр може зробити за день 4 табуретки, а другий на 1 табуретку менше. Скільки табуреток за день може зробити другий тесляр?

2. Другий тесляр за день виготовляє □ табуреток. Скільки табуреток він виготовить за 3 дні?

Запиши коротко кожну задачу і зроби схематичний рисунок.
— Чим відрізняються короткі записи цих задач? В якій формі записується коротко перша задача? Друга задача?
3. Порівняй цю задачу з попередніми. Що цікавого ти помітив?

Один тесляр може зробити за день 4 табуретки, а другий на 1 табуретку менше. Скільки табуреток другий тесляр виготовить за 3 дні?

На матеріалі задач цього виду діти вперше зустрічаються з тим, що в задачі є кілька об'єктів — ключових слів і три пропорційні величини. Вчитель повідомляє їм, що в цьому випадку задача записується коротко в формі таблиці, яка містить три рядки, два з них для ключових слів, та чотирьох стовпчиків, три з них для трьох пропорційних величин. Далі в тексті задачі виділяються числові значення окремих величин і з'ясовується, до якого об'єкта (ключового слова) вони відносяться, і усе це записується в таблиці на відповідних місцях. За готовим коротким записом школярі пояснюють числа задачі і промовляють назви дискретних величин (наприклад, загальний виробіток другого тесляра, час роботи другого тесляра, продуктивність праці другого тесляра тощо). Далі здійснюється аналітичний пошук розв'язування, розбиття задачі на прості та формулювання плану розв'язування, запис розв'язання за діями або виразом і запис відповіді.

Перевірити правильність розв'язання вчитель радить шляхом складання і розв'язання оберненої задачі. Учні складають обернену задачу, вносять відповідні зміни у короткий запис прямої задачі, розбивають її на прості і порівнюють склад з простих задач оберненої та прямої задач; досліджують, як ця зміна вплине на розв'язання оберненої задачі, формулюють план її розв'язування. Отже, за допомогою складання і розв'язання обернених задач учні знайомляться з можливими математичними структурами задач, які містять різницеве відношення (рис. 4.26).

	Загальний	... 1	*кількість* / *час*
I		□	
II	**?**	?, на б.(м.) □	□

а

	Загальний	... 1	*кількість* / *час*
I		□	
II	□	?, на б.(м.) □	**?**

б

	Загальний	... 1	*кількість* / *час*
I		□	
		На?	
II	□	?	□

в

Рис. 4.26. Опорні схеми задач, що містять відношення різницевого порівняння

Учні складають задачі за поданими короткими записами і розв'язують їх усно. Далі у коротких записах змінюється відношення різницевого порівняння на відношення кратного порівняння, і учням пропонується встановити, що змінилося, та з'ясувати, як ця зміна вплине на розв'язання задачі. Таким чином, перетворюючи математичні структури задач, які містять різницеве відношення, у відповідні структури задач, які містять кратне відношення, учні знайомляться з задачами дещо іншої математичної структури — задачами з пропорційними величинами, які містять кратне відношення.

Потім іде робота над задачами, які містять кратне відношення. Школярі виділяють ключові слова та величини задачі, записують її коротко, розглядають поданий схематичний рисунок, розбивають задачу на підзадачі (прості задачі) і формулюють план розв'язування, після чого записують розв'язання. Дітям пропонується додаткове завдання: змінити умову або запитання задачі так, щоб змінилася перша або друга дія на задану. Таким чином здійснюється перетворення задачі, яка містить кратне відношення, у відповідну задачу, яка містить різницеве відношення. Крім того, перевірка правильності розв'язання задачі здійснюється шляхом складання і розв'язання обернених задач.

Отже, *уміння виділяти величини, які містяться в задачі, виділяти ключові слова і відповідні числові значення дискретних величин, записувати задачу у вигляді таблиці, складати схематичний рисунок задачі* набуває подальшого засвоєння у *розумовій формі*.

4.3.2. Задачі, що містять знаходження суми двох добутків та обернені до них

1. Формування уміння визначати істотні ознаки задачі та узагальнювати її математичну структуру. Формування уміння узагальнювати спосіб розв'язування задач даної математичної структури

Попереднє ознайомлення з дією визначення істотних ознак задачі та узагальнення її математичної структури було здійснено в 3-му класі при ознайомленні з задачами на знаходження трьох чисел за сумами двох та трьох доданків. Продовжити цю роботу слід при введенні задач на знаходження суми двох добутків.

Ознайомлення з задачами на знаходження суми двох добутків та оберненими до них

Ознайомлення з задачами даного виду здійснюється шляхом розв'язання системи навчальних задач: учням пропонуються дві прості задачі з пропорційними величинами на знаходження загальної величини, а потім вони поєднуються в одну складену задачу нового виду — на знаходження суми двох добутків. Наприклад:

1. Розв'яжи дві прості задачі. Чи пов'язані вони між собою?
   1) В магазин привезли 7 ящиків білого винограду по 8 кг в кожному. Скільки кілограмів білого винограду привезли до магазину?

   2) В магазин привезли 9 ящиків чорного винограду по 6 кг в кожному ящику. Скільки кілограмів чорного винограду привезли до магазину?

2. Порівняй задачу з попередніми. Що цікавого ти помітив?

В магазин привезли 7 ящиків білого винограду по 8 кг в кожному та 9 ящиків чорного винограду по 6 кг в кожному ящику. Скільки всього кілограмів винограду привезли до магазину?

Робота над задачею здійснюється за пам'яткою № 3 — учні визначають об'єкти задачі (ключові слова), величини, які містяться в задачі, значення цих величин і записують задачу коротко; після пояснення чисел задачі складається схематичний рисунок. Якщо після проведеної роботи учні можуть відразу перейти до розбиття задачі на підзадачі, то складається план розв'язання і діти переходять до його запису; в іншому разі учні виконують аналітичний або синтетичний пошук розв'язування задачі і лише після цього розбивають задачу на підзадачі і так далі.

Робота над задачею після її розв'язання передбачає її дослідження шляхом зміни величин задачі або числових даних з метою формування уміння узагальнювати математичну структуру задачі і спосіб її розв'язування. Пропонуємо учням розглянути короткий запис аналогічної задачі, яка містить ті самі числові дані, але інші величини, і визначити, як ця зміна вплине на розв'язання задачі (рис. 4.27).

	Вартість (грн)		Ціна (грн)	Кількість (шт.)
Л.	?	?	8 грн	7 шт.
М.	?		6 грн	9 шт.

Рис. 4.27. Короткий запис задачі, аналогічній задачі № 2, в якій змінено групу пропорційних величин

Учні впевнюються, що її розв'язувати немає необхідності: розв'язок ми вже маємо, лишилося лише змінити пояснення. Потім учням пропонується короткий запис аналогічної задачі з тими самими величинами, що й попередня, але з іншими числовими даними, і треба дослідити, як ця зміна вплине на план розв'язування задачі (рис. 4.28).

	Вартість (грн)	Ціна (грн)	Кількість (шт.)
Л.	?	9 грн	5 шт.
	?		
М.	?	4 грн	7 шт.

Рис. 4.28. Короткий запис задачі, аналогічній попередній задачі, в якій змінено числові дані

Школярі з'ясовують, що ця зміна вимагає змінити відповідні числа у арифметичних діях, а пояснення залишити тими самими. Але і в першому, і в другому випадках загальний план розв'язування задачі не змінюється. Отже, зміна величин задачі та зміна числових даних при заданих зв'язках між ними не впливають на спосіб розв'язування задачі: першою дією знаходимо значення загальної величини у першому випадку (дією множення), другою дією знаходимо значення загальної величини у другому випадку (дією множення), а третьою дією знаходимо суму значень загальних величин у двох випадках (дією додавання). Учні визначають істотні ознаки задач даної математичної структури та формулюють узагальнений план розв'язування (рис. 4.29).

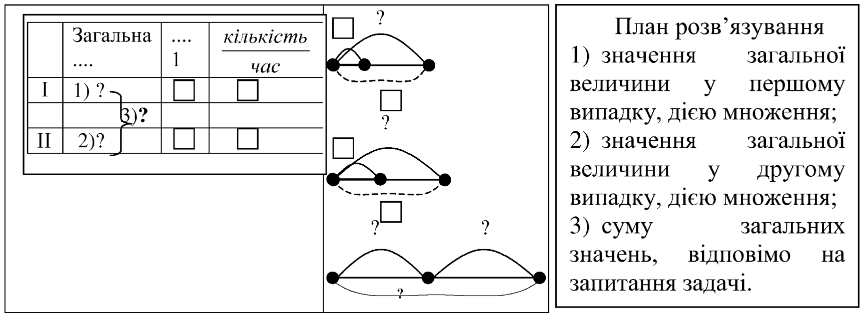


Рис. 4.29. Опорна схема та план розв'язування задач на знаходження суми двох добутків

Істотні ознаки задач даної математичної структури:

1) для першого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для другого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
3) шуканим є сума загальних значень величин для обох випадків.

Далі учні застосовують узагальнений план при розв'язуванні задач на знаходження суми двох добутків, а також складають і розв'язують чотири обернені задачі — дві на знаходження величини однієї одиниці (в першому та другому випадках) та дві — на знаходження кількості або часу (в першому та другому випадках). Наприклад:

Пряма задача. Хлопчик купив 7 олівців по 3 гривні за кожний та 4 ручки по 5 гривень. Скільки грошей заплатив хлопчик за всю покупку?

Перша обернена задача. Хлопчик купив 7 олівців по 3 грн за кожний та 4 ручки. Скільки грошей коштувала ручка, якщо за всю покупку хлопчик заплатив 41 грн?

Друга обернена задача. Хлопчик купив 7 олівців та 4 ручки по 5 грн за кожну ручку. Скільки коштує олівець, якщо за всю покупку він заплатив 41 грн?

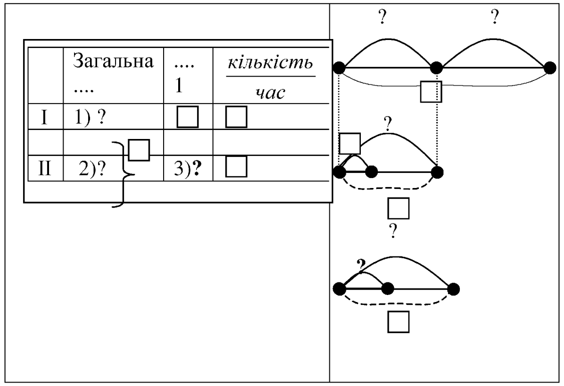
Третя обернена задача. Хлопчик купив олівців по 3 грн за кожний та 4 ручки по 5 грн за кожну ручку. Скільки олівців купив хлопчик, якщо за всю покупку він заплатив 41 грн?

Четверта обернена задача. Хлопчик купив 7 олівців по 3 грн за кожний та 4 ручки. Скільки грошей коштувала ручка, якщо за всю покупку хлопчик заплатив 41 грн?

Робота над оберненими задачами здійснюється за пам'яткою №3, тобто виконуються всі операції, що складають загальне уміння. Після розв'язання обернених задач діти порівнюють першу та другу, третю та четверту обернені задачі, і, змінюючи величини та числові дані (короткі записи «змінених задач» подаються в готовому вигляді), визначають спільні істотні ознаки в їх структурах і планах розв'язання та узагальнюють їх (рис. 4.30, рис. 4.31).

Істотні ознаки обернених задач на знаходження суми двох добутків, в яких шуканою є величина однієї одиниці:

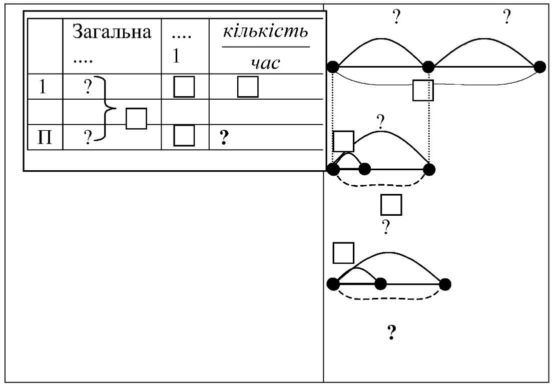
1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише кількість або час, а значення величини однієї одиниці є шуканим;
3) дано значення суми двох загальних величин.



План розв'язування

1) значення загальної величини в одному з випадків, дією множення;
2) значення загальної величини в іншому випадку, дією віднімання;
3) значення величини однієї одиниці, відповімо на запитання задачі, дією ділення.

Рис. 4.30. Опорна схема та план розв'язування обернених задач на знаходження суми двох добутків, в яких шуканою є величина однієї одиниці



План розв'язування

1) значення загальної величини в одному з випадків, дією множення;
2) значення загальної величини в іншому випадку, дією віднімання;
3) значення величини однієї одиниці, відповімо на запитання задачі, дією ділення.

Рис. 4.31. Опорна схема та план розв'язування обернених задач на знаходження суми двох добутків, в яких шуканою є кількість або час

Істотні ознаки обернених задач на знаходження суми двох добутків, в яких шуканою є кількість або час:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;

2) для іншого випадку дано лише значення величини однієї одиниці, а кількість або час є шуканим;
3) дано значення суми двох загальних величин.

На наступному етапі на основі порівняння між собою узагальненої математична структури і плану розв'язання прямої задачі та обернених задач, школярі узагальнюють математичну структуру таких задач, визначаючи їх істотні ознаки, та формулюють узагальнений план розв'язання (рис. 4.32).

	Загальна	 1	кількість / час
I	?	*а*	*в*
	р		
П	?	*с*	*к*

План розв'язування

1) значення загальної величини в одному з випадків;
2) значення загальної величини в іншому випадку;
3) відповімо на запитання задачі.

Рис. 4.32. Опорна схема задач на знаходження суми двох добутків та обернених до них

Або *а,* або *в,* або *с,* або *к,* або *р* — шукане число.

Істотні ознаки задач даної математичної структури:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано або значення двох величин — величини однієї одиниці та кількості, або однієї з них, тоді інша є шуканою;
3) сума значень загальних величин є шуканою або її значення дано.

Треба зазначити, що учням пропонуються узагальнені таблиці, істотні ознаки задач даної математичної структури та узагальнені плани розв'язування задач у готовому вигляді; від них вимагається їх розглянути, звернути увагу на узагальнені формулювання.

Таким чином здійснюється *етап попереднього ознайомлення* з дією *визначення істотних ознак задачі та узагальнення її математичної структури та з дією узагальнення способу розв'язування задачі даної математичної структури*.

Засвоєння цих дій у *матеріалізованій формі* відбувається під час ознайомлення з задачами на різницеве порівняння двох добутків та оберненими до них задачами.

4.3.3. Задачі на різницеве порівняння двох добутків та обернені до них

Ознайомлення з задачами на різницеве порівняння двох добутків та оберненими до них

Задачі нової математичної структури вводяться на основі перетворення задачі на знаходження суми двох добутків у задачу на різницеве порівняння двох добутків. Н а п р и к л а д:

Коню на день потрібно 8 кг вівса і 4 кг сіна. Скільки кілограмів вівса та сіна потрібно коню на тиждень?

Після розв'язання задачі відомого виду (на знаходження суми двох добутків) учням пропонується змінити запитання так, щоб остання дія стала дією віднімання. Н а п р и к л а д:

Коню на день потрібно 8 кг вівса і 4 кг сіна. На скільки більше вівса, ніж сіна потрібно коню на тиждень?

Діти вносять зміни у короткий запис попередньої задачі, а також у схематичний рисунок, і після цього розбивають її на підзадачі та формулюють кожну, складають план розв'язування і записують його. Далі йде робота з узагальнення математичної структури задачі та способу її розв'язування на основі зміни величин задачі та числових даних. На відміну від попереднього етапу, учні вже самі обирають групу пропорційних величин, замінюють назви у відповідних стовпчиках таблиці і вносять відповідні корективи у розв'язання задач, а також роблять висновки щодо плану розв'язування задач, що містять одні й ті самі величини, але різні числові дані (це здійснюється на картках з друкованою основою, де вже подана таблиця з даними числами, але без відповідних величин — рис. 4.33).

Самостійно порівнявши короткі записи розглянутих задач, діти складають узагальнену таблицю і на її основі формулюють істотні ознаки задач даної математичної структури. Порівнявши плани розв'язування цих задач, складають узагальнений план розв'язування (рис. 4.34).

Далі школярам пропонується порівняти короткі записи та плани розв'язування задач на знаходження суми двох добутків та на різницеве порівняння двох добутків і з'ясувати, що в них спільного та чим вони відрізняються, результатом такої роботи є узагальнений план розв'язування (рис. 4.35).

Істотні ознаки задач на знаходження суми/різницевого порівняння двох добутків:

1) для першого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для другого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
3) шуканим є сума/різниця загальних значень величин для обох випадків.

Картка з друкованою основою

	....		
	?	8	7
	на ?		
	?	4	7

Розв'язання:

1) 8 • 7 = 56 ________________________

2) 4 • 7 = 28 ________________________

3) 56 - 28 = 28 ________________________

Відповідь:________________________

Картка з друкованою основою

	....		
	?		
	на ?		
	?		

Розв'язання:

1) _ • _ = __ ________________________

2) _ • _ = __ ________________________

3) __ - __ = __ ________________________

Відповідь:________________________

Рис. 4.33. Зразок карток з друкованою основою

На наступному етапі учням пропонується розв'язати задачу на різницеве порівняння двох добутків, користуючись узагальненим планом, та скласти і розв'язати чотири обернені задачі. Н а п р и к л а д:

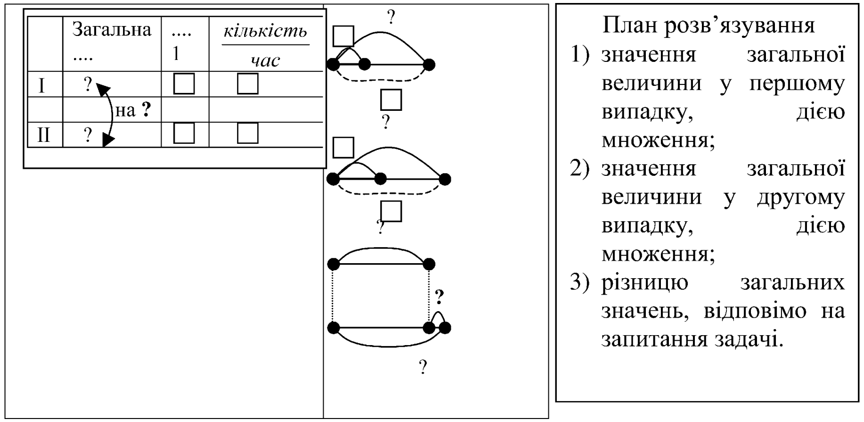


Рис. 4.34. Опорна схема та план розв'язування задач на різницеве порівняння двох добутків

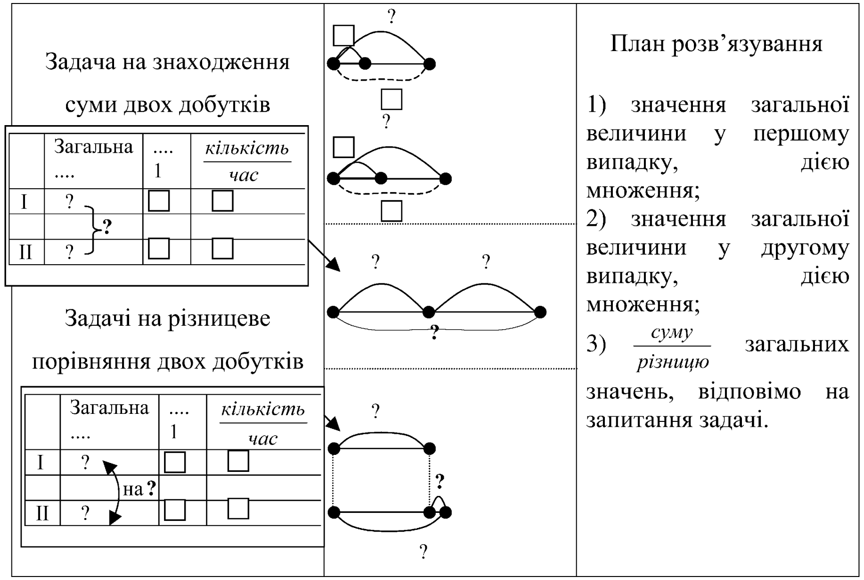


Рис. 4.35. Опорні схема та план розв'язування задач знаходження суми/різницевого порівняння двох добутків

Пряма задача. Майстер за годину виготовляє 6 деталей, а учень — 2 деталі. Майстер працював повний робочий день — 8 годин, а учень — 4 години. На скільки менше деталей за день зробив учень, ніж майстер?

Перша обернена задача. Майстер працював повний робочий день — 8 годин, а учень — 4 години. Учень виготовив на 40 деталей менше, ніж майстер. Скільки деталей за годину роботи виготовляв учень, якщо майстер за годину виготовляє 6 деталей?

Друга обернена задача. Майстер працював повний робочий день — 8 годин, а учень — 4 години. Учень виготовив на 40 деталей менше, ніж майстер. Скільки деталей за годину роботи виготовляв майстер, якщо учень за годину виготовляє 2 деталі?

Далі пропонується порівняти дві обернені задачі на знаходження величини однієї одиниці і узагальнити їх математичну структуру, визначити їх істотні ознаки та план розв'язування (рис. 4.36).

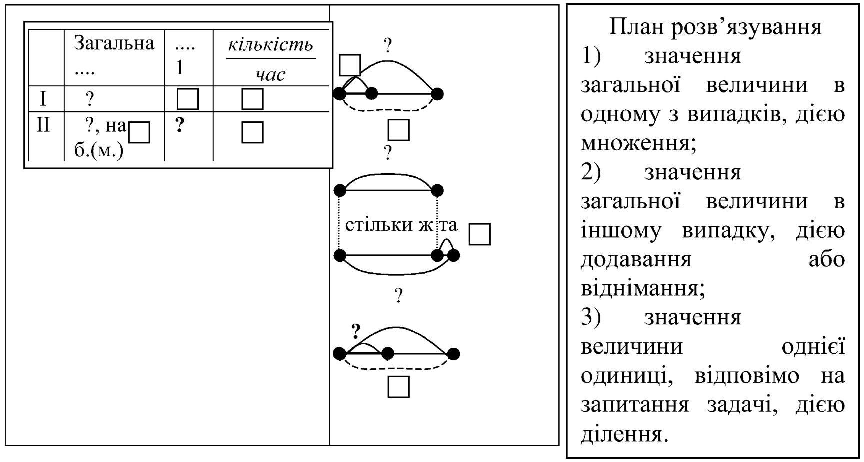


Рис. 4.36. Опорна схема та план розв'язування обернених задач на різницеве порівняння двох добутків, в яких шуканою є величина однієї одиниці

Істотні ознаки задач даної математичної структури:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише кількість або час, а значення величини однієї одиниці є шуканим;
3) дано значення різниці двох загальних величин

Можна порівняти розглянуту обернену задачу до задачі на різницеве порівняння двох добутків з відповідною оберненою задачею на знаходження суми двох добутків і узагальнити їх математичні структури, істотні ознаки та план розв'язування (рис. 4.37).

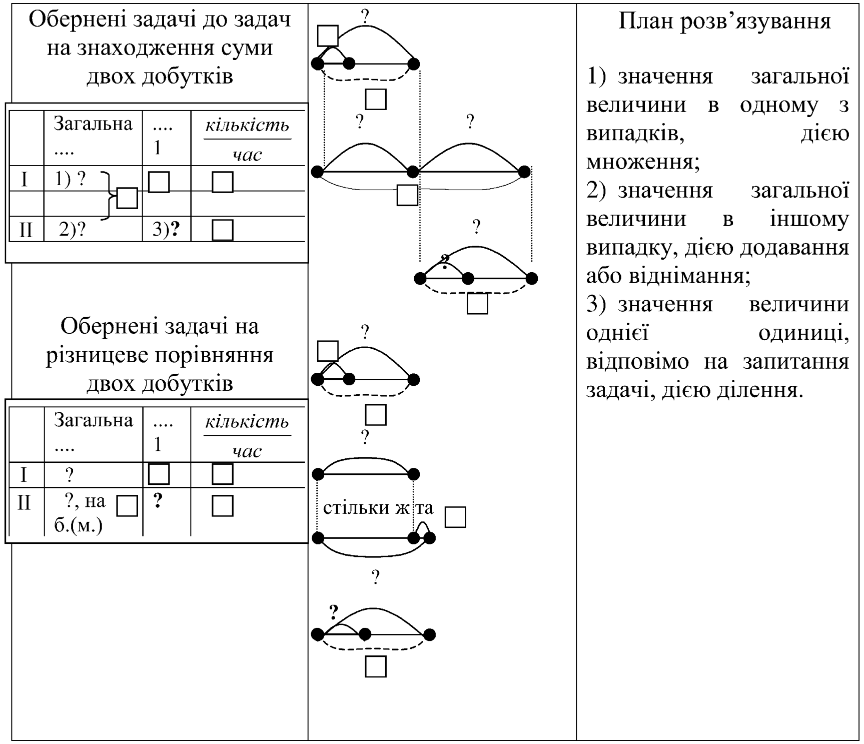


Рис. 4.37. Опорні схеми обернених задач на знаходження суми/різницевого порівняння двох добутків, в яких шуканою є величина однієї одиниці

Істотні ознаки задач даних математичних структур:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише кількість або час, а значення величини однієї одиниці є шуканим;
3) дано значення суми/різниці двох загальних величин.

Третя обернена задача. Майстер за годину виготовляє 6 деталей, а учень — 2 деталі. Учень виготовив на 40 деталей менше, ніж майстер. Скільки годин працював майстер, якщо учень працював 4 години?

Четверта обернена задача. Майстер за годину виготовляє 6 деталей, а учень — 2 деталі. Учень виготовив на 40 деталей менше, ніж майстер. Скільки годин працював учень, якщо майстер працював 8 годин?

Робота над оберненими задачами здійснюється за пам'яткою № 3. Після розв'язання, порівнявши дві обернені задачі до задач на різницеве порівняння двох добутків на знаходження часу або кількості, узагальнюємо їх математичну структуру та план розв'язування (рис. 4.38).

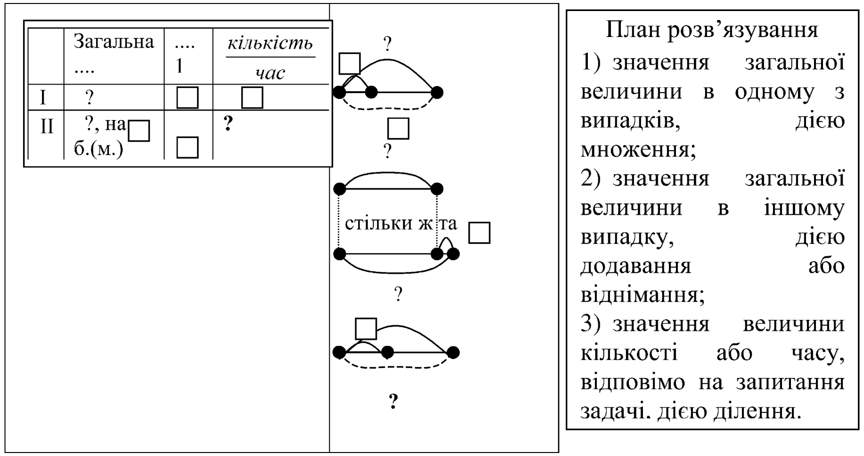


Рис. 4.38. Опорна схема та план розв'язування обернених задач на різницеве порівняння двох добутків, в яких шуканою є кількість або час

Істотні ознаки задач даної математичної структури:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише значення величини однієї одиниці, а кількість або час є шуканим;
3) дано значення різниці двох загальних величин.

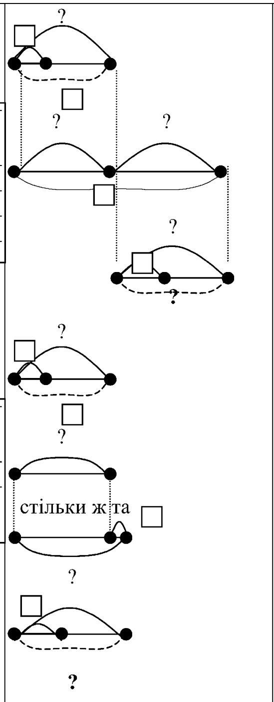
Порівнюючи обернені задачі на знаходження кількості або часу до задач на різницеве порівняння двох добутків та на знаходження суми двох добутків, узагальнюємо їх математичну структуру (рис. 4.39).

Обернені задачі до задач на знаходження суми двох добутків

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	1) ?	□	□
	□		
II	2)?	□	3)**?**

Обернені задачі на різницеве порівняння двох добутків

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	1) ?	□	□
II	2)?, на □ б.(м.)	□	3)**?**



План розв'язування

1) значення загальної величини в одному з випадків, дією множення;
2) значення загальної величини в іншому випадку, дією додавання або віднімання;
3) значення величини кількості або часу, відповімо на запитання задачі дією ділення.

Рис. 4.39. Опорні схеми та план розв'язування обернених задач на знаходження суми/різницевого порівняння двох добутків, в яких шуканою є кількість або час

Істотні ознаки задач даних математичних структур:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише значення величини однієї одиниці, а кількість або час є шуканим;
3) дано значення суми/різниці двох загальних величин.

На наступному етапі пропонуємо учням узагальнити математичну структуру задач на різницеве порівняння двох добутків та обернених до них (рис. 4.40).

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	***а***	***в***
II	?, на ***р*** б.(м.)	***с***	***к***

План розв'язування

1) значення загальної величини в одному з випадків;
2) значення загальної величини в іншому випадку;
3) відповімо на запитання задачі.

Рис. 4.40. Опорна схема та план розв'язування задач на різницеве порівняння двох добутків та обернених до них
Або *а*, або *в*, або *с*, або *к*, або *р* — шукане число.

Істотні ознаки задач даної математичної структури:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано або значення двох величин — величини однієї одиниці та кількості або однієї з них, тоді інша є шуканою;
3) різниця значень загальних величин є шуканою або її значення дано.

Можна запропонувати учням узагальнити математичні структури задач на знаходження суми або різницеве порівняння двох добутків та обернених до них і плани їх розв'язування (рис. 4.41).

Задачі на знаходження суми двох добутків та обернені до них

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	***а***	***в***
	} ***р***		
II	?	***с***	***к***

Задачі на різницеве порівняння двох добутків та обернені до них

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	***а***	***в***
II	?, на ***р*** б.(м.)	***с***	***к***

План розв'язування

1) значення загальної величини в одному з випадків;
2) значення загальної величини в іншому випадку;
3) відповімо на запитання задачі.

Рис. 4.41. Опорні схеми та план розв'язування задач на знаходження суми/різницевого порівняння двох добутків та обернених до них
Або *а*, або *в*, або *с*, або *к*, або *р* — шукане число.

Таким чином, на матеріалі задач на різницеве порівняння двох добутків та обернених до них відбувається *формування у матеріалізованій формі* дії *визначення істотних ознак задачі та узагальнення її математичної структури та дії узагальнення способу розв'язування задачі певної математичної структури*. Подальше опрацювання цієї дії у формі голосного мовлення відбувається на задачах на кратне порівняння двох добутків.

4.3.4. Задачі на кратне порівняння двох добутків та обернені до них

Задачі на кратне порівняння двох добутків вводяться на основі зміни запитання до задачі на різницеве порівняння двох добутків і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі.

Н а п р и к л а д:

Дві кози дали по 6 л молока, а три корови — по 8 л молока. Чи від кіз, чи від корів надоїли більше молока і на скільки?

Змінимо запитання задачі: «У скільки разів більше молока надоїли від корів, ніж від кіз?». Як ця зміна вплине на розв'язання задачі?

Отримавши задачу на кратне порівняння двох добутків і розв'язавши її, діти далі вивчають математичну структуру, змінюючи величини або числові дані задачі. Отримані задачі промовляються вголос, і школярі з'ясовують вплив цих змін на розв'язання задачі та план розв'язування. Далі узагальнюється математична структура задач на кратне порівняння двох добутків (рис. 4.42).

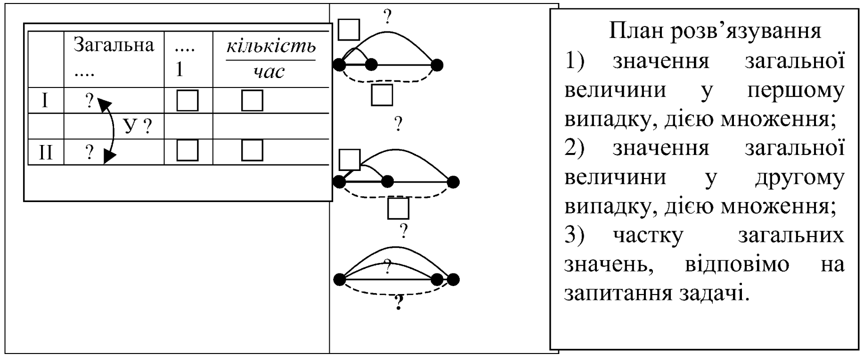


Рис. 4.42. Опорна схема та план розв'язування задач на кратне порівняння двох добутків

Істотні ознаки задач на кратне порівняння двох добутків:

1) для першого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для другого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
3) шуканим є частка загальних значень величин для обох випадків.

На основі порівняння узагальнюються математичні структури задач на різницеве та кратне порівняння та плани їх розв'язування (рис. 4.43).

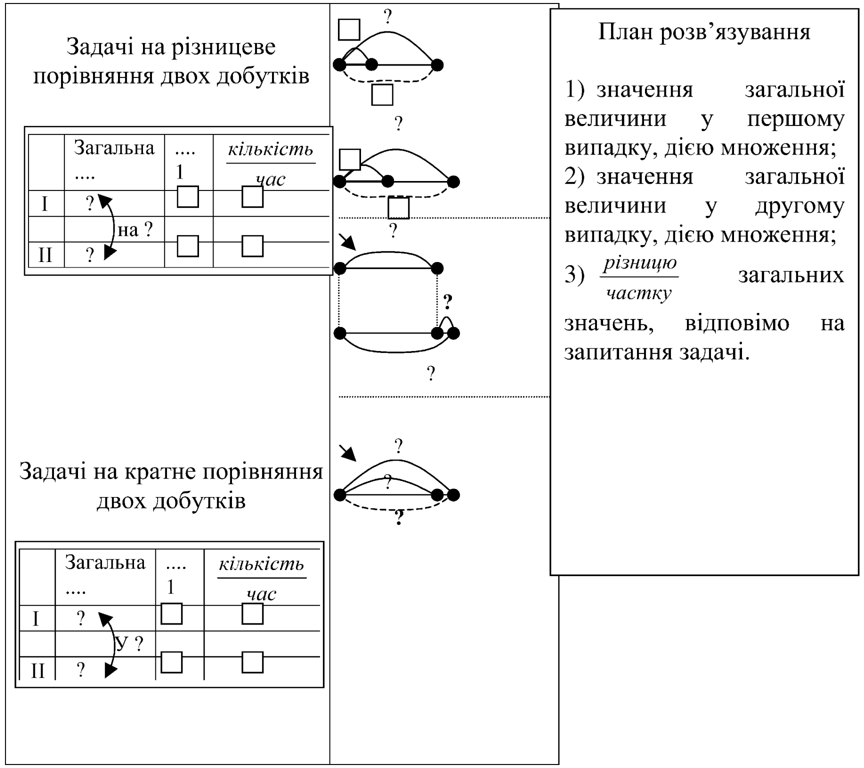


Рис. 4.43. Опорні схеми та план розв'язування задач на різницеве/кратне порівняння двох добутків

Істотні ознаки задач на різницеве та кратне порівняння двох добутків:
1) для першого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для другого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
3) шуканим є різниця/частка загальних значень величин для обох випадків.

У попередньому навчанні нами було узагальнено математичні структури задач на знаходження суми двох добутків та на різницеве порівняння двох добутків, тому можна піти далі і узагальнити усі три види математичних структур задач за їх істотними ознаками (рис. 4.44).

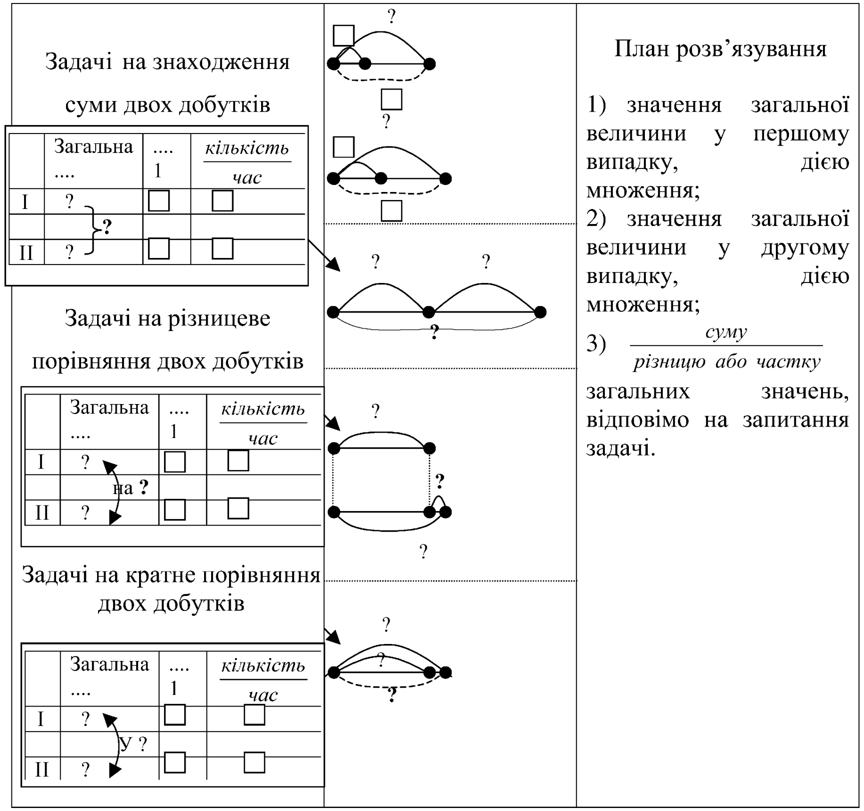


Рис. 4.44. Опорні схеми та план розв'язування задач на знаходження суми/різницевого чи кратного порівняння двох добутків

Істотні ознаки задач на знаходження суми/різницевого чи кратного порівняння двох добутків:
1) для першого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для другого випадку відомі значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
3) шуканим є сума/різниця чи частка загальних значень величин для обох випадків.

Подальша робота над задачами на кратне порівняння двох добутків зводиться до складання і розв'язання обернених задач, порівняння двох обернених задач на знаходження величини однієї одиниці вимірювання чи лічби. Результати узагальнення математичної структури та плану розв'язування таких задач подані на рисунку 4.45.

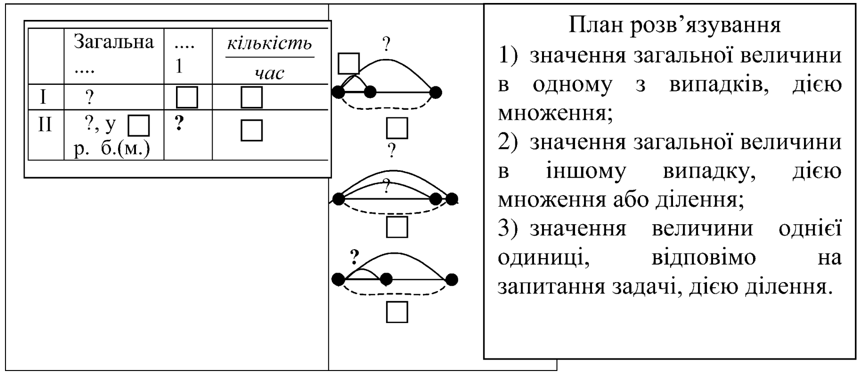


Рис. 4.45. Опорна схема та план розв'язування обернених задач на кратне порівняння двох добутків, в яких шуканою є величина однієї одиниці

Істотні ознаки задач даної математичної структури:
1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише кількість або час, а значення величини однієї одиниці є шуканим;
3) дано значення кратного відношення (частки) двох загальних величин.

Можна узагальнити відповідні математичні структури обернених задач на знаходження суми двох добутків, різницеве чи кратне порівняння двох добутків (рис. 4.46).

Обернені задачі до задач на знаходження суми двох добутків

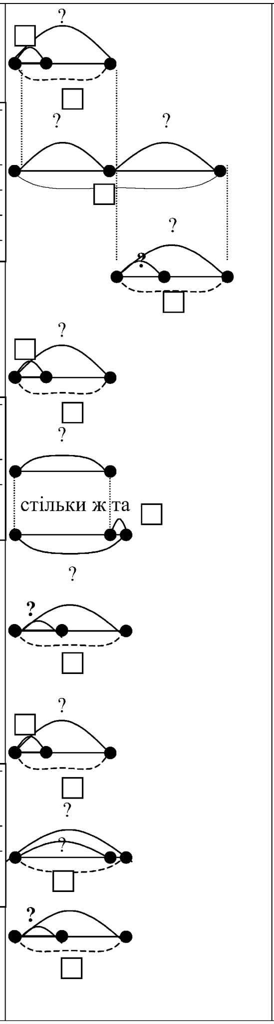
	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	1) ?	□	□
	} □		
II	2)?	3)**?**	□

Обернені задачі на різницеве порівняння двох добутків

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	□	□
II	?, на □ б.(м.)	**?**	□

Обернені задачі на кратне порівняння двох добутків

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	□	□
II	?, у □ р. б.(м.)	**?**	□



План розв'язування

1) значення загальної величини в одному з випадків, дією множення;
2) значення загальної величини в іншому випадку, дією $\frac{\textit{додавання}}{\textit{множення}}$ або $\frac{\textit{віднімання}}{\textit{ділення}}$;
3) значення величини однієї одиниці, відповімо на запитання задачі, дією ділення.

Рис. 4.46. Опорні схеми та план розв'язування обернених задач на знаходження суми/різницевого чи кратного порівняння двох добутків, в яких шуканою є величина однієї одиниці

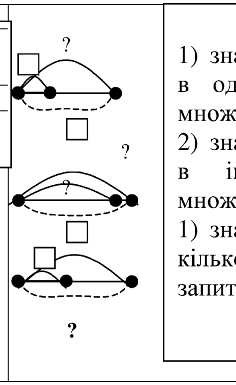
Істотні ознаки задач даних математичних структур:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;

2) для іншого випадку дано лише кількість або час, а значення величини однієї одиниці є шуканим;
3) дано значення суми/різницевого чи кратного відношення двох загальних величин.

При порівнянні двох обернених задач на знаходження кількості до задач на кратне порівняння двох добутків узагальнюємо їх математичні структури та плани розв'язування (рис. 4.47).

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	□	□
II	?, у □ р. б.(м.)	□	**?**



План розв'язування

1) значення загальної величини в одному з випадків, дією множення;
2) значення загальної величини в іншому випадку, дією множення або ділення;
1) значення величини кількості або часу, відповімо на запитання задачі, дією ділення.

Рис. 4.47. Опорна схема обернених задач на кратне порівняння двох добутків, в яких шуканою є кількість або час

Істотні ознаки задач даної математичної структури:

1) Для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) Для іншого випадку дано лише значення величини однієї одиниці, а кількість або час є шуканим;
3) Дано значення кратного відношення (частки) двох загальних величин.

При узагальненні можна піти далі, порівнявши математичні структури обернених задач на знаходження кількості або часу для задач на знаходження суми двох добутків, на різницеве чи кратне порівняння двох добутків (рис. 4.48).

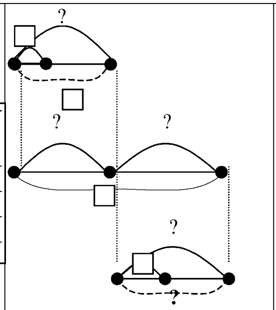
Істотні ознаки задач даних математичних структур:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише значення величини однієї одиниці, а кількість або час є шуканим;

3) дано значення суми/різницевого чи кратного відношення двох загальних величин.

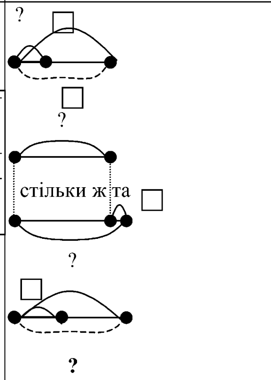
Обернені задачі до задач на знаходження суми двох добутків

	Загальна	 1	кількість
I	1) ?	□	□
	} □		
II	2)?	□	3)**?**



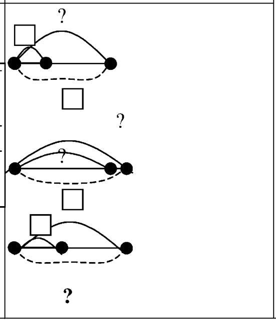
Обернені задачі на різницеве порівняння двох добутків

	Загальна	 1	кількість / час
I	1) ?	□	□
II	2)?, на □ б.(м.)	□	3)**?**



Обернені задачі на кратне порівняння двох добутків

	Загальна	 1	кількість / час
I	1) ?	□	□
II	2)?, у □ р. б.(м.)	□	3)**?**



План розв'язування

1) значення загальної величини в одному з випадків, дією множення;
2) значення загальної величини в іншому випадку, дією $\frac{\text{додавання}}{\text{множення}}$ або $\frac{\text{віднімання}}{\text{ділення}}$;
3) значення величини кількості або часу, відповімо на запитання задачі, дією ділення.

Рис. 4.48. Опорні схеми та план розв'язування обернених задач на знаходження суми/різницевого чи кратного порівняння двох добутків, в яких шуканою є кількість або час

При порівнянні прямої та обернених задач на кратне порівняння двох добутків здійснюється узагальнення задач даної математичної структури за їх істотними ознаками та формулюється загальний план розв'язування (рис. 4.49).

	Загальна	 1	кількість / час
I	?	***а***	***в***
II	?, у ***р*** р. б.(м.)	***с***	***к***

План розв'язування
1) значення загальної величини в одному з випадків;
2) значення загальної величини в іншому випадку;
3) відповімо на запитання задачі.

Рис. 4.49. Опорна схема та план розв'язування задач на кратне порівняння двох добутків та обернених до них.
Обернені задачі до задач на знаходження суми двох добутків.
Або *а*, або *в*, або *с*, або *к*, або *р* — шукане число

Істотні ознаки задач даної математичної структури:
1) для одного з випадків дані значення двох величин: величини однієї одиниці та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано або значення двох величин — величини однієї одиниці та кількості, або однієї з них, тоді інша є шуканою;
3) кратне відношення (частка) значень загальних величин є шуканою або її значення дано.

І, нарешті, можна порівняти узагальнені математичні структури усіх трьох видів задач та сформулювати узагальнений план розв'язування цих задач (рис. 4.50).

Істотні ознаки задач даних математичних структур:
1) для одного з випадків дані значення двох величин;
2) для іншого випадку дано або значення двох величин, або однієї з них, тоді інша є шуканою;
3) сума чи різниця, чи частка значень загальних величин є шуканою або її значення дано.

Запропонована методика навчання молодших школярів розв'язування задач на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків реалізується через систему завдань. Ця система завдань і методика роботи над ними подана у роботі автора [476].

Задачі на знаходження суми двох добутків та обернені до них

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	***а***	***в***
	} ***р***		
II	?	***с***	***к***

Задачі на різницеве порівняння двох добутків та обернені до них

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	***а***	***в***
II	?, на ***р*** б.(м.)	***с***	***к***

Задачі на кратне порівняння двох добутків та обернені до них

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	?	***а***	***в***
II	?, у ***р*** р. б.(м.)	***с***	***к***

План розв'язування
1) значення загальної величини в одному з випадків;
2) значення загальної величини в іншому випадку;
3) відповімо на запитання задачі.

Рис. 4.50. Опорні схеми задач на знаходження суми/різницевого чи кратного порівняння двох добутків та обернених до них. Задачі на кратне порівняння двох добутків та обернені до них. Або a або $в$ або c або $к$ або p — шукане число

Таким чином, згідно з описаною методикою відбувається формування *дії визначення істотних ознак математичної структури задачі та її узагальнення, і дії узагальнення способу розв'язування у формі голосного мовлення*. Зрозуміло, що не усі діти одночасно засвоюють ці дії у певній формі; їх подальше опрацювання здійснюється на матеріалі задач на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох часток.

4.3.5. Задачі на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох часток (кількості або часу)

Задачі на знаходження суми двох часток вводяться на основі порівняння з задачами на знаходження суми двох добутків і з'ясування впливу зміни тексту задачі на її розв'язання. Отже, учням пропонується перша задача на знаходження суми двох добутків, а друга задача — на знаходження суми двох значень кількості або часу. Наприклад:

1) Господарка привезла на базар 4 великих ящика помідорів по 9 кг у кожному і 8 маленьких ящиків по 4 кг у кожному. Скільки всього кілограмів помідорів привезла господарка на базар?

2) Господарка привезла на базар 36 кг помідорів у великих ящиках по 9 кг у кожному та 32 кг у маленьких ящиках по 4 кг у кожному. Скільки всього ящиків з помідорами привезла на базар господарка?

Учні визначають, що змінюються перші дві дії — множення змінюється на ділення, а третя дія лишається додаванням. Записавши вираз і прочитавши його, учні з'ясовують назву задач цієї математичної структури — задачі на знаходження суми двох часток.

Подальша робота відбувається шляхом зміни запитання другої задачі і отримання третьої задачі на різницеве порівняння двох часток. Наприклад:

3) Господарка привезла на базар 36 кг помідорів у великих ящиках по 9 кг у кожному та 32 кг у маленьких ящиках по 4 кг у кожному. На скільки більше маленьких ящиків з помідорами, ніж великих привезла на базар господарка?

Досліджується вплив зміни запитання на розв'язання задачі: змінилася третя дія — дія додавання замінюється дією віднімання. Ще раз змінюємо запитання третьої задачі і отримуємо четверту задачу на кратне порівняння двох часток. Наприклад:

4) Господарка привезла на базар 36 кг помідорів у великих ящиках по 9 кг у кожному та 32 кг у маленьких ящиках по 4 кг у кожному. У скільки разів більше маленьких ящиків, ніж великих привезла на базар господарка?

Вивчаємо вплив цієї зміни на розв'язання задачі: змінюється остання дія — дія віднімання замінюється на дію ділення. Порівнявши усі задачі (2, 3, 4) та їх розв'язання, діти узагальнюють математичну структуру таких задач на основі визначення істотних ознак і план розв'язування (рис. 4.51).

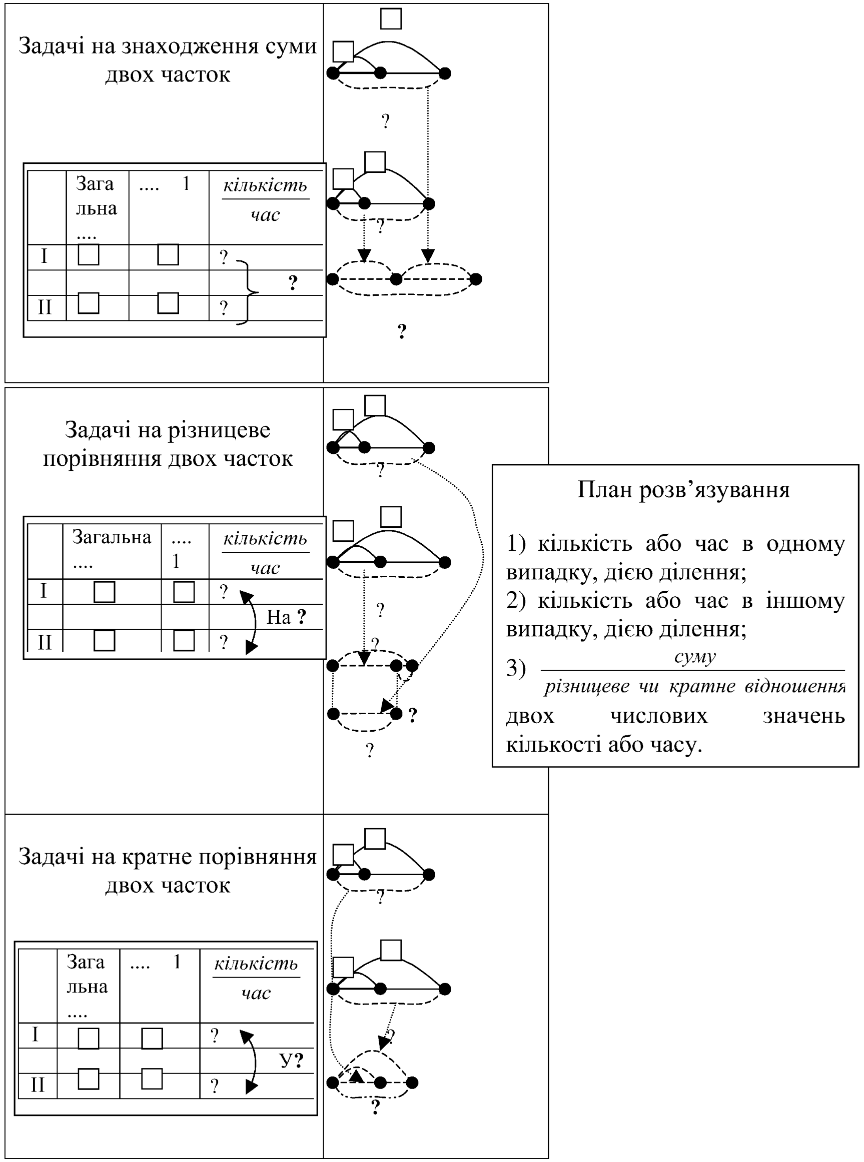


Рис. 4.51. Опорні схеми та план розв'язування задач на знаходження суми/різницевого чи кратного порівняння двох часток

Істотні ознаки задач даних математичних структур:
1) для першого випадку відомі значення двох величин: загальної величини та величини однієї одиниці виміру чи рахунку;
2) для другого випадку відомі значення двох величин: загальної величини та величини однієї одиниці виміру чи рахунку;
3) шуканим є сума/різницеве чи кратне відношення значень кількості або часу для обох випадків.

З'ясувавши, що перша та друга задачі не є оберненими, учні складають і розв'язують дві обернені задачі на знаходження величини однієї одиниці до задачі на знаходження суми двох часток (№ 2), узагальнюють їх математичні структури і плани розв'язувань (рис. 4.52).

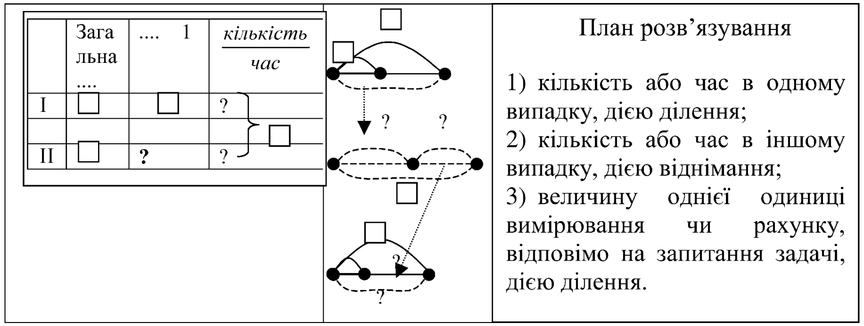


Рис. 4.52. Опорна схема та план розв'язування оберненої задачі на знаходження суми двох часток, в якій шуканою є величина однієї одиниці

Істотні ознаки:
1) для одного з випадків дані значення двох величин: загальної величини та величини однієї одиниці виміру чи лічби;
2) для іншого випадку дано лише значення загальної величини, а значення величини однієї одиниці є шуканим;
3) дано значення суми кількостей або часу в обох випадках.

Далі складаємо і розв'язуємо аналогічні обернені задачі на знаходження величини однієї одиниці до задач на різницеве порівняння двох часток (№ 3). Порівнявши математичні структури та розв'язання цих задач, робимо узагальнення (рис. 4.53).

Істотні ознаки:
1) для одного з випадків дані значення двох величин: загальної величини та величини однієї одиниці виміру чи рахунку;

2) для іншого випадку дано лише значення загальної величини, а значення величини однієї одиниці є шуканим;
3) дано значення різницевого відношення кількостей або часу в обох випадках.

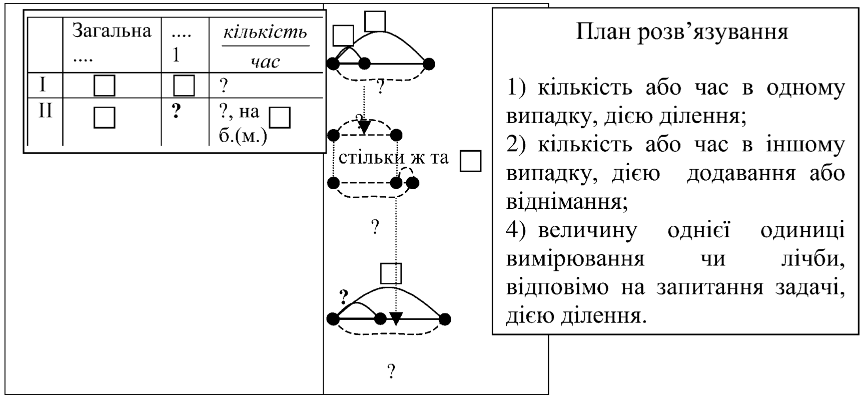


Рис. 4.53. Опорна схема та план розв'язування оберненої задачі на різницеве порівняння двох часток, в якій шуканою є величина однієї одиниці

Аналогічно працюємо по складанню і розв'язуванню обернених задач на кратне порівняння двох часток. Результати узагальнення математичної структури та плану розв'язування задач даної математичної структури подані на рисунку 4.54.

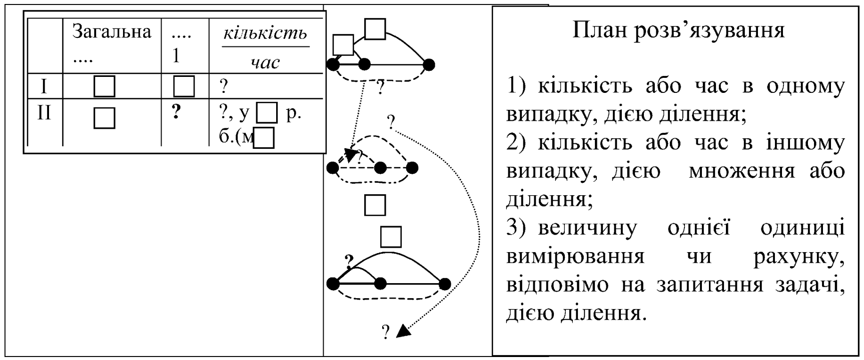


Рис. 4.54. Опорна схема та план розв'язування оберненої задачі на кратне порівняння двох часток, в якій шуканою є величина однієї одиниці

Істотні ознаки:
1) для одного з випадків дані значення двох величин: загальної величини та величини однієї одиниці виміру чи лічби;
2) для іншого випадку дано лише значення загальної величини, а значення величини однієї одиниці є шуканим;
3) дано значення кратного відношення кількостей або часу в обох випадках.

Порівнюючи узагальнені математичні структури розглянутих обернених задач, узагальнюємо їх план розв'язання (рис. 4.55).

Істотні ознаки задач даних математичних структур:
1) для одного з випадків дані значення двох величин: загальної величини та величини однієї одиниці виміру чи лічби;
2) для іншого випадку дано лише значення загальної величини, а значення величини однієї одиниці є шуканим;
3) дано значення суми/різницевого чи кратного відношення відношення кількостей або часу в обох випадках.

Таким чином, нами запропонована робота із перетворення задач однієї математичної структури в іншу, із порівняння аналогічних математичних структур задач, визначення їх спільних істотних ознак та узагальнення планів розв'язування. Під час цієї роботи можна очікувати, що в деяких учнів *дія визначення істотних ознак та узагальнення математичної структури задачі та дія узагальнення способу розв'язування задачі* набуває подальшого засвоєння в формі *зовнішнього мовлення про себе*. Решта учнів засвоює ці дії в формі голосного мовлення на матеріалі задач на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох часток (значень величини однієї одиниці виміру чи лічби).

Методику навчання молодших школярів розв'язування задач розглянутих типів подано у роботі автора [496].

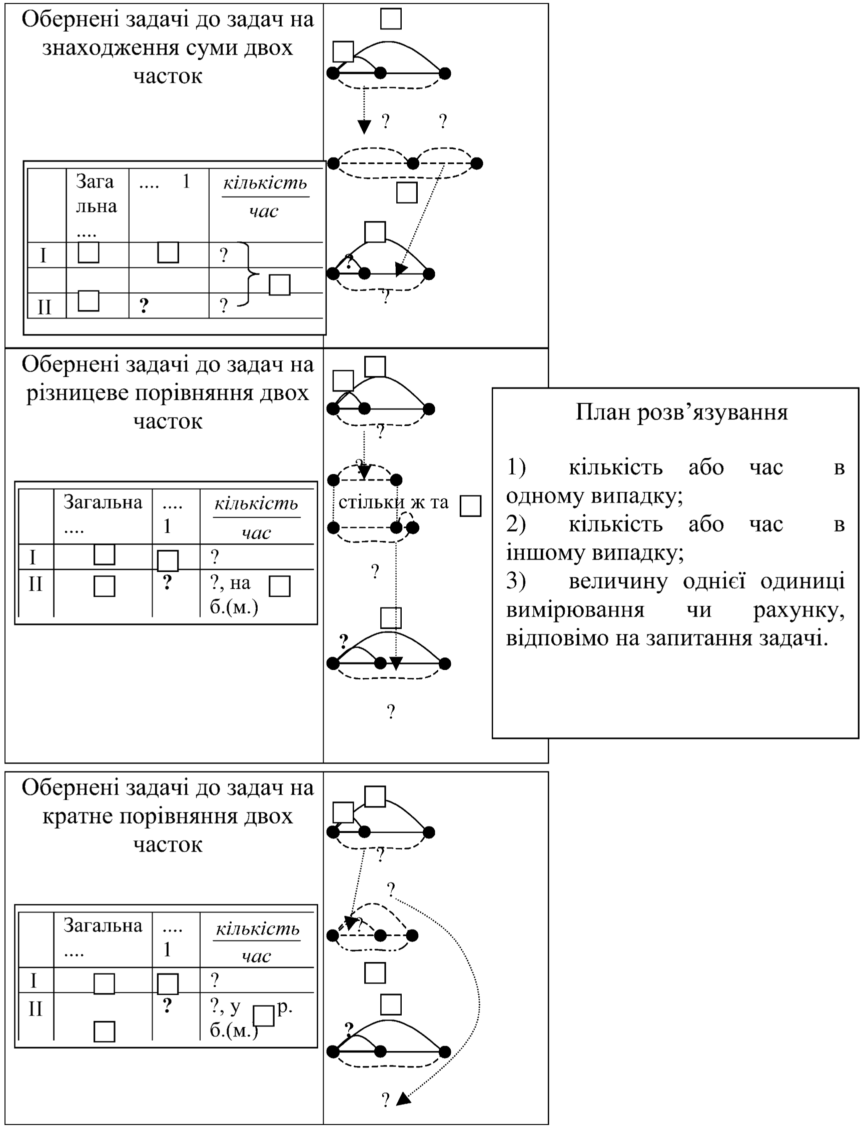


Рис. 4.55. Опорна схема та план розв'язування обернених задач на знаходження суми/різницевого чи кратного порівняння двох часток, в яких шуканою є величина однієї одиниці

4.3.6. Задачі на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох часток (значень величини однієї одиниці виміру або лічби)

Методика аналогічна описаній вище. Учням пропонуються дві задачі: перша — на різницеве порівняння двох кількостей, а друга — на різницеве порівняння значень величин однієї одиниці. Наприклад:

1) Господарка від кіз надоїли 10 л молока по 5 л від кожної, а від корів 30 л молока, по 10 л від кожної. На скільки більше корів, ніж кіз подоїла господарка?

2) Від двох кіз надоїли 10 л молока, а від трьох корів — 30 л молока. Коза чи корова дає молока більше і на скільки?

Учні записують обидві задачі коротко, розв'язують першу задачу і порівнюють другу задачу з першою. Визначають відмінності другої задачі від першої і з'ясовують, як ці відмінності впливають на розв'язання другої задачі: в цій задачі так само слід знайти різницеве відношення двох часток, але це інші частки, арифметичні дії та їх порядок у розв'язанні не змінюється, але змінюється їх зміст.

Подальше перетворення другої задачі йде шляхом зміни її запитання і отримання задачі на кратне порівняння двох часток (величин однієї одиниці), а потім й на знаходження суми двох часток (величин однієї одиниці).

3) Від двох кіз надоїли 10 л молока, а від трьох корів — 30 л молока. Коза чи корова дає молока більше і у скільки разів більше?

4) Від двох кіз надоїли 10 л молока, а від трьох корів — 30 л молока. Скільки літрів молока надоїли від корови і кози разом?

Порівнявши математичні структури та розв'язання 2—4-ї задач, узагальнюємо їх математичні структури та план розв'язування (рис. 4.56).

Істотні ознаки задач даних математичних структур:

1) для першого випадку відомі значення двох величин: загальної величини та кількості або часу;
2) для другого випадку відомі значення двох величин: загальної величини та кількості або часу;
3) шуканим є сума/різницеве чи кратне відношення значень величин однієї одиниці вимірювання або лічби для обох випадків.

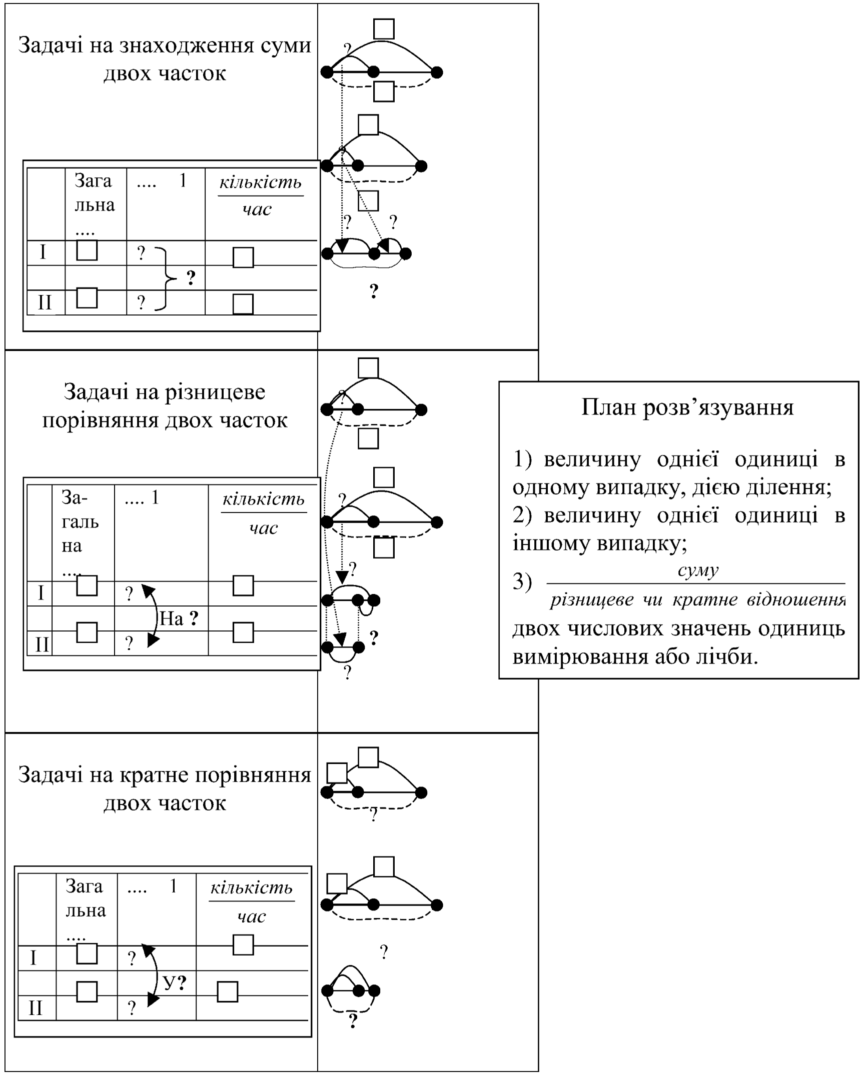


Рис. 4.56. Опорні схеми та план розв'язування задач на знаходження суми/різницевого чи кратного порівняння двох часток (величин однієї одиниці)

Далі складаємо і розв'язуємо по дві аналогічні обернені задачі до кожної з трьох задач (№ 3–4). Результати узагальнення математичних структур і планів розв'язування задач, обернених до задач на різницеве порівняння двох часток, на знаходження кількості або часу, подано на рисунку 4.57.

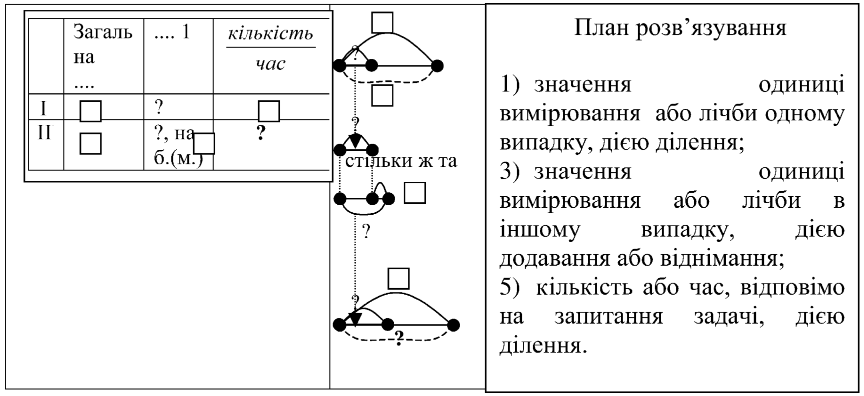


Рис. 4.57. Опорна схема оберненої задачі на різницеве порівняння двох часток, в якій шуканою є кількість або час

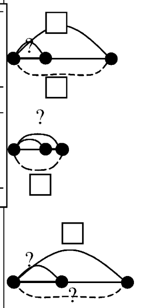
Істотні ознаки:
1) для одного з випадків дані значення двох величин: загальної величини та величини кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише значення загальної величини, а значення кількості або часу є шуканим;
3) дано значення різницевого відношення одиниці вимірювання або лічби в обох випадках.

Результати узагальнення математичної структури та плану розв'язання задач, обернених до задач на кратне порівняння, на знаходження кількості або часу подано на рисунку 4.58.

Істотні ознаки:
1) для одного з випадків дані значення двох величин: загальної величини та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише значення загальної величини, а значення кількості або часу є шуканим;
3) дано значення кратного відношення значень одиниць вимірювання або лічби в обох випадках.

Аналогічна робота з узагальнення математичної структури та плану розв'язування проводилася і для обернених задач до задач на знаходження суми двох часток, на знаходження кількості або часу. Результати цієї роботи подано на рисунку 4.59.

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	?	□
II	□	?, у □ р. б.(м.)	?

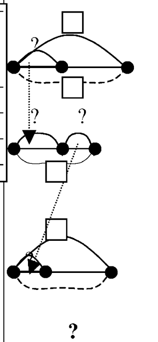


План розв'язування

1) значення одиниці вимірювання або лічби в одному випадку, дією ділення;
2) значення одиниці вимірювання або лічби в іншому випадку, дією множення або ділення;
3) кількість або час, відповімо на запитання задачі, дією ділення.

Рис. 4.58. Опорна схема оберненої задачі на кратне порівняння двох часток, в якій шуканою є кількість або час

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	? } □	□
II	□	?	?



План розв'язування

1) значення одиниці вимірювання або лічби в одному випадку, дією ділення;
6) значення одиниці вимірювання або лічби в іншому випадку, дією віднімання;
7) кількість або час, відповімо на запитання задачі, дією ділення.

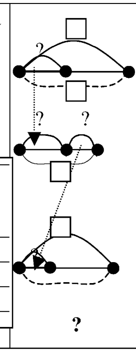
Рис. 4.59. Опорна схема оберненої задачі на знаходження суми двох часток, в якій шуканою є кількість або час

Істотні ознаки:
1) для одного з випадків дані значення двох величин: загальної величини та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише значення загальної величини, а значення величини кількості або часу є шуканим;
3) дано значення суми одиниць вимірювання величини або лічби в обох випадках.

Далі, на основі порівняння узагальнених математичних структур задач на знаходження кількості або часу до задач на знаходження суми двох часток або різницеве чи кратне порівняння двох часток, здійснюємо подальше узагальнення (рис. 4.60).

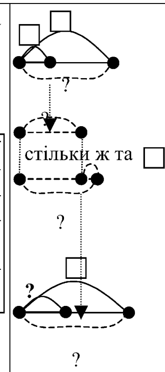
Обернені задачі до задач на знаходження суми двох часток

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	? } □	□
II	□	?	?



Обернені задачі до задач на різницеве порівняння двох часток

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	?	□
II	□	?, на □ б.(м.)	?



План розв'язування

1) значення величини однієї одиниці в одному випадку;
2) значення величини однієї одиниці в іншому випадку;
3) кількість або час, відповімо на запитання задачі.

Обернені задачі до задач на кратне порівняння двох часток

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	?	□
II	□	?, у □ р. б.(м.)	?

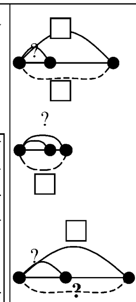


Рис. 4.60. Опорні схеми та план розв'язування обернених задач на знаходження суми/різницевого чи кратного порівняння двох часток, в яких шуканою є кількість або час

Істотні ознаки задач даних математичних структур:
1) для одного з випадків дані значення двох величин: загальної величини та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише значення загальної величини, а значення кількості або часу є шуканим;
3) дано значення суми/різницевого чи кратного відношення значень величини однієї одиниці лічби або вимірювання в обох випадках.

Аналогічна робота здійснюється і над оберненими задачами на знаходження значення загальної величини до задач на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох часток (рис. 4.61; 4.62; 4.63).

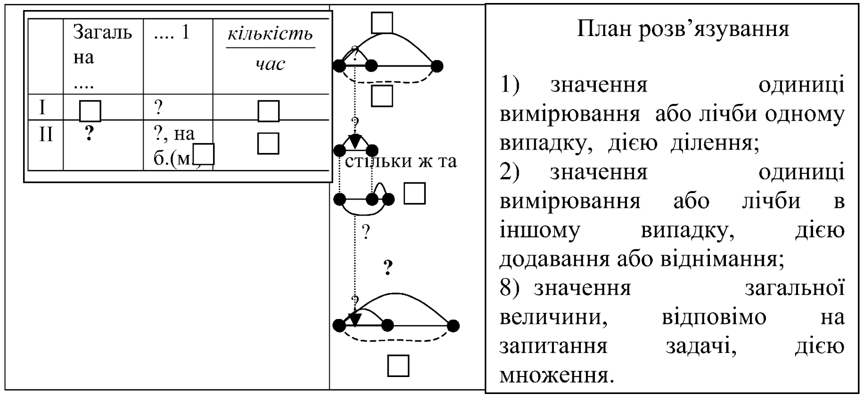


Рис. 4.61. Опорна схема оберненої задачі на різницеве порівняння двох часток, в якій шуканою є загальна величина

Істотні ознаки:
1) для одного з випадків дані значення двох величин: загальної величини та величини кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише значення кількості або часу, а значення загальної величини є шуканим;
3) дано значення різницевого відношення одиниць вимірювання або лічби в обох випадках.

Істотні ознаки:
1) для одного з випадків дані значення двох величин: загальної величини та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише значення кількості або часу, а значення загальної величини є шуканим;
3) дано значення кратного відношення значень одиниць вимірювання або лічби в обох випадках.

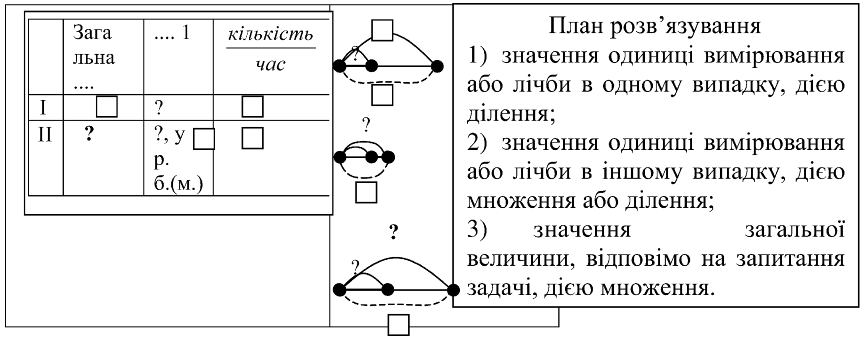


Рис. 4.62. Опорна схема оберненої задачі на кратне порівняння двох часток, в якій шуканою є загальна величина

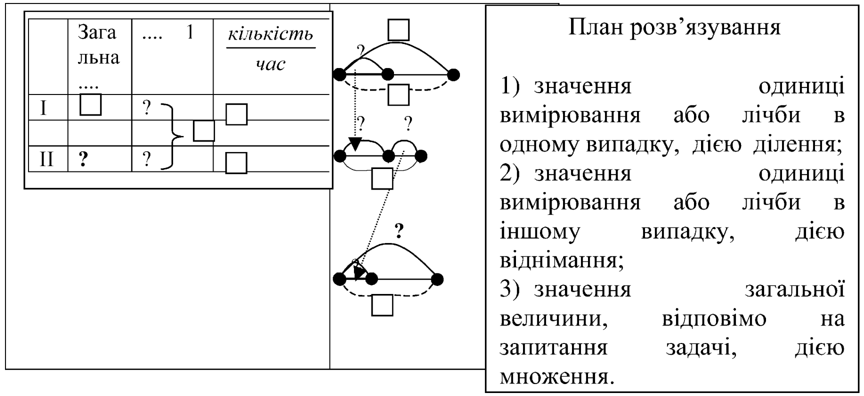


Рис. 4.63. Опорна схема оберненої задачі на знаходження суми двох часток, в якій шуканою є загальна величина

Істотні ознаки:
1) для одного з випадків дані значення двох величин: загальної величини та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише значення величини кількості або часу, а значення загальної величини є шуканим;
3) дано значення суми одиниць вимірювання величини або лічби в обох випадках.

Можна узагальнити задачі на знаходження значення загальної величини, які є оберненими до задач на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох часток (рис. 4.64).

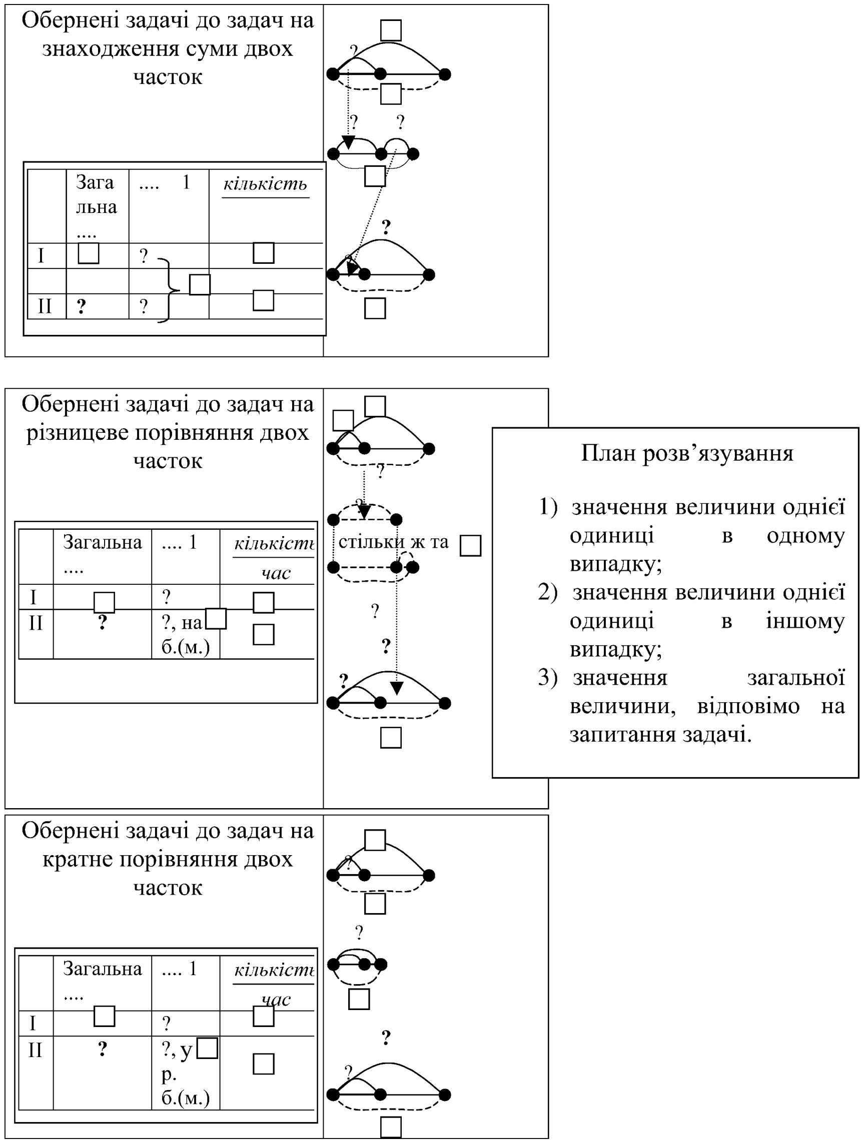


Рис. 4.64. Опорні схеми обернених задач на знаходження суми/різницевого чи кратного порівняння двох часток, в якій шуканою є загальна величина

Істотні ознаки задач даних математичних структур:

1) для одного з випадків дані значення двох величин: загальної величини та кількості або часу;
2) для іншого випадку дано лише значення кількості або часу, а значення загальної величини є шуканим;
3) дано значення суми/різницевого чи кратного відношення відношення значень величини однієї одиниці лічби або вимірювання в обох випадках.

Треба зазначити, що існує можливість подальшого порівняння та узагальнення усіх обернених задач до розглянутих трьох видів задач. Розглянемо їх спільні істотні ознаки:

1) для одного з випадків дано значення двох величин: загальної величини та кількості або часу;
2) для другого випадку дано лише одне зі значень цих величин, а інше є шуканим;
3) дано значення суми/різницевого чи кратного відношення відношення значень величини однієї одиниці вимірювання або лічби в обох випадках.

Тому усі вони мають спільний план розв'язання:

Першою дією дізнаємося про значення величини однієї одиниці вимірювання або лічби в одному з випадків.

Другою дією дізнаємося про значення величини однієї одиниці вимірювання або лічби в іншому випадку.

Третьою дією відповімо на запитання задачі.

Можна узагальнити спільні ознаки прямих і обернених задач на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох часток:

1) для одного з випадків дано значення двох величин;
2) для другого випадку дано лише одне зі значень цих величин, а інше є шуканим або для другого випадку також дані два значення цих величин;
3) дано значення суми/різницевого чи кратного відношення третьої величини або це значення є шуканим.

Такі задачі також розв'язуються за планом: першою дією дізнаємось про значення третьої величини в одному з випадків; другою дією дізнаємось про значення третьої у другому випадку; третьою дією відповімо на запитання задачі.

Практична реалізація розглянутої методики засобом системи навчальних задач подана у роботі автора [496].

Розділ 5

ФОРМУВАННЯ УМІНЬ РОЗВ'ЯЗУВАТИ СЮЖЕТНІ ЗАДАЧІ ПЕВНИХ ВИДІВ (ЩО МІСТЯТЬ ПРОПОРЦІЙНІ ВЕЛИЧИНИ)

5.1. СИСТЕМА НАВЧАЛЬНИХ ЗАДАЧ З ФОРМУВАННЯ У МОЛОДШИХ ШКОЛЯРІВ УМІНЬ РОЗВ'ЯЗУВАТИ «ТИПОВІ» ЗАДАЧІ, ЯКІ МІСТЯТЬ ОДНАКОВУ (СТАЛУ) ВЕЛИЧИНУ ДЛЯ ОБОХ ВИПАДКІВ

В попередніх параграфах нами було подано методику формування у молодших школярів загального уміння розв'язувати сюжетні задачі та динаміку опрацювання усіх складових його дій згідно з теорією поетапного формування розумових дій і понять П. Я. Гальперіна та Н. Ф. Тализіної. Отже, на цій базі існує можливість перейти до формування окремих умінь — умінь розв'язувати задачі певних видів.

5.1.1. Задачі на знаходження четвертого пропорційного

3-й клас

1. Підготовча робота до ознайомлення з задачами на знаходження четвертого пропорційного

На етапі підготовчої роботи слід актуалізувати знання груп пропорційних величин та взаємозв'язків між пропорційними величинами, уміння визначати в тексті задачі величини, навіть тоді, коли вони задані неявно, виходячи з найменування числових даних. Актуалізація зазначених знань і умінь здійснюється під час розв'язування простих задач з пропорційними величинами.

2. Ознайомлення з задачами на знаходження четвертого пропорційного

Задачі на знаходження четвертого пропорційного вводяться на основі розв'язання двох послідовних простих задач з пропорційними величинами і поєднання їх в одну складену задачу. Наприклад:

а) Маса 6 однакових гусей складає 30 кг. Яка маса 1 гуски?

б) Маса гуся 5 кг. Яка маса 4 таких самих гусей?

в) Маса 6 однакових гусей складає 30 кг. Яка маса 4 таких самих гусей?

Учні порівнюють складену задачу (*в*) з двома попередніми простими і визначають, що вона включає розглянуті дві прості задачі. Якщо після цього, відразу, учні можуть сформулювати план розв'язування задачі, то записуємо розв'язання. Інакше виконується повний розбір задачі за пам'яткою № 3.

3. Розв'язання задачі № 1 на знаходження четвертого пропорційного, в якій однакова величина є величиною однієї одиниці

Учням пропонується задача на знаходження четвертого пропорційного в готовому вигляді.

Задача № 1. Купили банани і апельсини по однаковій ціні. За 6 кг бананів заплатили 30 грн. Скільки коштує 4 кг апельсинів?

Робота над задачею йде за загальним планом. Але після пояснення чисел задачі діти роблять прикидку результату, що очікується: у відповіді отримаємо більше чи менше число за дане (за 30 грн)? При роботі над першою задачею здійснюється аналітичний пошук розв'язування задачі з розбиттям задачі на прості задачі і формулюванням плану розв'язування. Розв'язавши задачу і отримавши відповідь на її запитання, повертаємося до зробленої прикидки і підтверджуємо або скасовуємо її правильність.

4. Зміна групи пропорційних величин задачі і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

Далі йде робота над задачею після її розв'язання, а саме її дослідження. Учням пропонується в задачі № 1 змінити величини, наприклад, це буде загальна маса, маса 1 предмету, кількість предметів. Учні складають задачу, яка має таку саму математичну структуру, що й попередня. Далі з'ясовується, як ця зміна вплине на розв'язання: розв'язання задачі не змінюється, треба лише змінити пояснення до арифметичних дій; запис виразу не змінюється.

5. Зміна числових даних задачі і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

Пропонується змінити числові значення в задачі. Учні пропонують власні варіанти, а вчитель вибирає з них придатні. Діти впевнюються, що отримали задачу такої самої математичної структури, що й попередні. Далі досліджується вплив зміни, що сталася, на план розв'язування задачі. Учні доходять висновку, що від зміни величин та зміни числових даних план розв'язування задачі не змінюється.

На підставі порівняння текстів задач та їх розв'язків учні встановлюють: в кожній задачі є три величини, причому одна з них однакова. Невідомим є загальне значення величини. А також, в кожній задачі є два випадки. Ці задачі належать до одного виду, такі задачі називаються — задачі на знаходження четвертого пропорційного. Вони містять чотири числові значення величин, які перебувають у пропорційній залежності, три з них дані, а четверте є шуканим. Першою дією в таких задачах ми дізнаємося про однакову величину, бо не дізнавшись про неї, ми не зможемо відповісти на запитання задачі. Другою дією в таких задачах ми відповідаємо на запитання задачі, дізнаємося про загальне значення величини.

6. Складання і розв'язування обернених задач до задачі № 1

Щоб перевірити правильність розв'язання задачі № 1, складаємо і розв'язуємо обернену задачу на знаходження кількості або часу:

6 кг бананів коштують 20 грн Скільки можна купити кілограмів апельсинів на 20 грн, якщо ціна бананів і апельсинів однакова?

Учні вносять зміни у розв'язання прямої задачі і отримують розв'язання оберненої задачі. Порівнявши короткі записи прямої та оберненої задач, діти визначають спільні ознаки: в обох задачах є два випадки, обидві задачі містять три пропорційні величини, одна з яких однакова для обох випадків; стосовно першого випадку дані значення двох величин, а стосовно другого випадку — лише однієї, а значення другої величини є шуканим. Таким чином, обидві задачі містять чотири пропорційні числа, одне з яких є шуканим, — ці задачі називаються задачами на знаходження четвертого пропорційного. Відрізняються вони тим, що в першій задачі шуканим було значення величини, яка є загальною, — вона знаходиться дією множення; а в другій задачі шуканим є значення величини, яка знаходиться дією ділення. Вчитель повідомляє, що цю відмінність і покладено в основу класифікації таких задач: **задачі, в яких треба знайти значення загальної величини дією множення — це задачі I підвиду**; а **задачі, в яких шукана величина знаходиться дією ділення, — це задачі II підвиду**. Отже, ми не лише перевірили правильність розв'язання першої задачі, а й отримали задачу другого підвиду.

Далі порівнюються розв'язання прямої і оберненої задач, визначається спільне: **першою дією знаходимо значення однакової величини, другою дією відповідаємо на запитання задачі**.

Складаємо і розв'язуємо другу обернену задачу на знаходження загальної величини:

Скільки коштує 6 кг бананів, якщо за 4 кг апельсинів заплатили 20 грн? (Банани і апельсини продаються по однаковій ціні).

Виконавши зміни у короткому записі, учні встановлюють вид задачі на підставі аналізу її математичної структури. Після цього застосовують узагальнений план розв'язування.

Далі дослідження йде засобом порівняння другої оберненої задачі з прямою: в обох задачах шуканим є значення загальної величини, але шуканими є різні значення загально] величини — в прямій задачі ми шукали загальне значення в другому випадку, а в другій оберненій задачі — загальне значення в першому випадку. Але ці задачі розв'язуються за одним й тим самим планом та одними й тими самими арифметичними діями, але в прямій задачі однакову величину знаходять за даними першого випадку, а в другій оберненій — за двома числовими значеннями величин стосовно другого випадку. Узагальнюємо математичні структури цих задач та план розв'язедання (рис. 5.1).

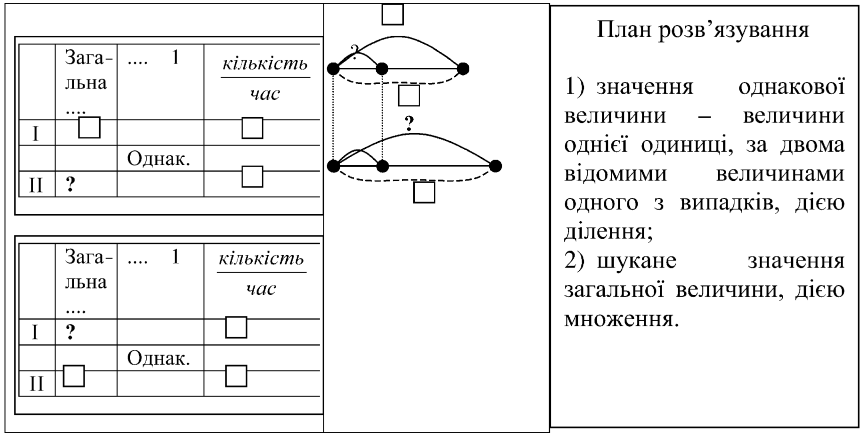


Рис. 5.1. Опорна схема та план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких шуканим є значення загальної величини

Складаємо третю обернену задачу на знаходження кількості в першому випадку:

Скільки кілограмів бананів можна купити на 30 грн, якщо на 20 грн можна купити 4 кг апельсинів? (Ціна бананів і апельсинів однакова).

Порівнюємо першу та третю обернені задачі. В цих задачах шуканою є кількість, але стосовно різних випадків. Щодо розв'язання, то в них однаковий план розв'язування та арифметичні дії, але однакову величину в першій оберненій задачі знаходили за даними двома величинами першого випадку, а в третій — другого. Результати узагальнення математичної структури розглянутих задач та планів їх розв'язування подані на рисунку 5.2.

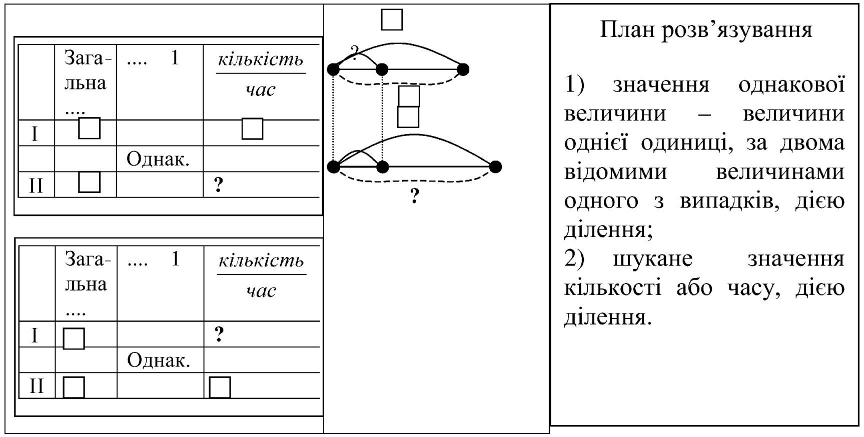


Рис. 5.2. Опорна схема та план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких шуканим є значення кількості або часу

Порівнюємо третю та другу обернені задачі. В кожній задачі є три пропорційні величини, два випадки, стосовно одного випадку дані два числових значення, стосовно другого — лише одне, інше є шуканим. Порівнюємо розв'язання: в них однакові перші дії; однакова величина в обох задачах знаходиться за двома даними, які стосуються другого випадку; вони відрізняються другими діями — в третій оберненій задачі остання дія множення, тому що знаходять загальну величину, а в четвертій — дія ділення, тому що знаходять кількість.

Узагальнюємо математичні структури цих задач та спосіб їх розв'язування (рис. 5.3).

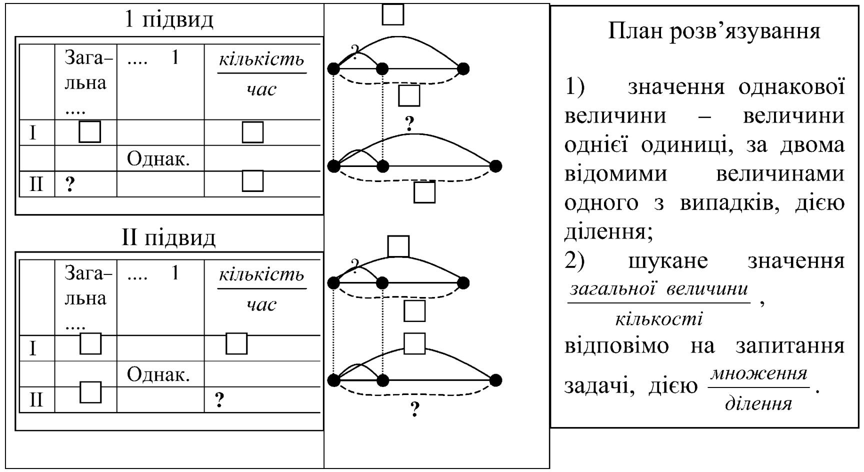


Рис. 5.3. Опорні схеми та план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є величина однієї одиниці

Істотні ознаки **задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є величина однієї одиниці**:

1) ці задачі містять два випадки;
2) ці задачі містять три пропорційні величини;
3) величина однієї одиниці виміру або лічби є однаковою для двох випадків;
4) стосовно однієї величини дані два числових значення;
5) стосовно іншої величини дано лише одне числове значення, а інше є шуканим.

4-й клас

7. Зміна однакової величини. Однаковою величиною стає загальна величина. Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі № 2

В задачі № 1 змінюємо однакову величину однієї одиниці виміру або лічби, однаковою стає значення загальної величини для обох випадків:

Задача 2. Вартість 6 кг бананів і 4 кг апельсинів однакова. Ціна кілограму бананів 2 грн. Яка ціна кілограму апельсинів?

Учні виконують зміни у короткому записі задачі № 1, формулюють задачу на знаходження величини однієї одиниці в другому випадку і роблять прикидку числового значення шуканої величини. Проаналізувавши математичну структуру одержаної задачі, учні доходять висновку, що вона має усі істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, тому це задача на знаходження четвертого пропорційного. Але, на відміну від попередніх задач, в цій задачі однаковою є загальна величина. Школярі згадують узагальнений спосіб розв'язання таких задач:

1) Першою дією дізнаємося про значення однакової величини, дією ділення.
2) Другою дією відповімо на запитання задачі, дією множення/ділення.

Далі досліджуємо, як ця зміна вплине на розв'язання задачі. В попередніх задачах однакова величина була величиною однієї одиниці, тому її знаходили дією ділення. В цій задачі однакова величина — загальна величина, а її знаходять дією множення. Тому в цій задачі першою дією дізнаємося про значення однакової величини дією множення, а другою дією відповімо на запитання задачі, дією ділення.

8. Зміна групи пропорційних величин задачі і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

Учням пропонується в задачі № 2 змінити величини. Учні складають задачу. Далі з'ясовується, як ця зміна вплине на розв'язання. Розв'язання задачі не змінюється, треба лише замінити пояснення до арифметичних дій. Запис виразу не змінюється.

9. Зміна числових даних задачі і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

Пропонується змінити числові значення в задачі. Учні пропонують власні варіанти, а вчитель вибирає з них придатні. Далі досліджується вплив цієї зміни на план розв'язування задачі. Діти доходять висновку, що від зміни величин та зміни числових даних план розв'язування задачі не змінюється: першою дією знаходимо значення однакової величини дією множення, другою дією відповідаємо на запитання задачі, дією ділення.

10. Складання і розв'язування обернених задач до задачі № 2

Складаємо обернену задачу на знаходження кількості в другому випадку, виконуємо зміни у короткому записі попередньої задачі.

Вартість 6 кг бананів і 4 кг апельсинів однакова. Ціна кілограму бананів 2 грн. Яка ціна кілограму апельсинів?

Робимо прикидку числового значення шуканої величини. Учні застосовують узагальнений план розв'язування задачі, записують розв'язання і з'ясовують, чи правильною була прикидка результату, що очікувався.

Далі дослідження йде засобом порівняння прямої та оберненої задач. Це обидві задачі на знаходження четвертого пропорційного: в обох є три пропорційні величини, два випадки, загальна величина є однаковою для обох випадків; для першого випадку дано два числові значення, а для другого — одне, інше є шуканим. Але в прямій задачі шуканим є значення величини однієї одиниці, а в оберненій — кількості або часу.

Порівнюючи розв'язання, діти впевнюються, що в них однакова перша дія, тому що однакову величину знаходять за даними відносно першого випадку; відрізняються вони другими діями — в двох задачах останні дії ділення, але в прямій задачі ми шукали величину однієї одиниці, а в оберненій — кількість або час.

Складаємо і розв'язуємо другу обернену задачу на знаходження кількості в першому випадку.

Скільки можна купити кілограмів бананів на ту саму суму, яку треба заплатити за 4 кг апельсинів?

Учні вносять зміни у короткий запис попередньої задачі, роблять прикидку числового значення шуканої величини і при розв'язанні застосовують узагальнений план розв'язування задачі.

Порівнюємо першу та другу обернені задачі: в них спільною є, зокрема, шукана кількість, але в першій — для другого випадку, а в другій — для першого випадку. Відповідно відрізняються розв'язання: в першій оберненій задачі значення однакової величини знаходять дією множення за даними першого випадку, а в другій оберненій задачі — за даними другого випадку; порядок та власне арифметичні дії лишаються тими самими (рис. 5.4).

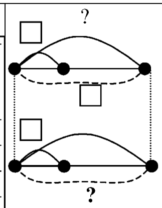
Складаємо і розв'язуємо третю обернену задачу на знаходження величини однієї одиниці в першому випадку.

Вартість 6 кг бананів і 4 кг апельсинів однакова. Ціна кілограму апельсинів 3 грн. Яка ціна кілограму бананів?

Робимо прикидку числового значення шуканої величини, учні застосовують узагальнений спосіб розв'язування і записують розв'язання. Порівнюємо третю обернену задачу з прямою: це задачі на знаходження четвертого пропорційного, в обох однаковою є загальна величина, в обох шуканою є величина однієї одиниці, але в прямій задачі стосовно другого випадку, а в третій оберненій задачі — стосовно першого випадку. Розв'язання відрізняються: хоча перша дія множення, але в прямій задачі однакову величину знаходять за двома числовими даними першого випадку, а в цій — за двома числовими даними, що відносяться до другого випадку. В обох задачах останні дії ділення, тому що знаходять величину однієї одиниці. Результати узагальнення математичної структури задач та плану розв'язування подано на рисунку 5.5.

	Зага-льна	 1	*кількість* / *час*
I		□	□
	Однак.		
II		□	?

	Зага-льна	 1	*кількість* / *час*
I		□	?
	Однак.		
II		□	□



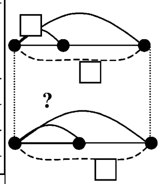
План розв'язування

1) значення однакової величини – значення загальної величини, за двома відомими величинами одного з випадків, дією множення;
2) шукане значення величини кількості або часу, відповідаємо на запитання задачі, дією ділення.

Рис. 5.4. Опорна схема та план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких шуканим є значення кількості

	Зага-льна	 1	*кількість* / *час*
I		□	□
	Однак.		
II		?	□

	Зага-льна	 1	*кількість* / *час*
I		?	□
	Однак.		
II		□	□



План розв'язування

1) значення однакової величини – загальної величини, за двома відомими величинами одного з випадків, дією множення;
2) шукане значення величини однієї одиниці, дією ділення.

Рис. 5.5. Опорна схема та план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких шуканим є значення величини однієї одиниці

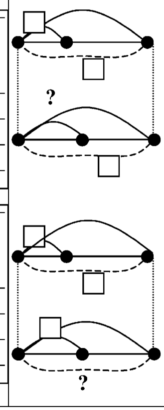
Порівнюємо розв'язання другої та третьої обернених задач. В них однакові перші дії, тому що однакова величина знаходиться

за двома числовими даними, які стосуються першого випадку. Відрізняються вони останніми діями, хоча останні дії в обох задачах ділення: в другій оберненій задачі ми знаходимо кількість або час, а в третій — величину однієї одиниці.

Узагальнюємо істотні ознаки математичних структур та план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є загальна величина (рис. 5.6):

	Зага-льна	 1	*кількість* / *час*
I		□	□
	Однак.		
II		?	□

	Зага-льна	 1	*кількість* / *час*
I		□	□
	Однак.		
II		□	?



План розв'язування

1) значення однакової величини – загальної величини, за двома відомими величинами одного з випадків, дією множення;
2) шукане значення $\frac{\textit{величини однієї одиниці}}{\textit{кількості}}$, відповімо на запитання задачі, дією ділення.

Рис. 5.6. Опорні схеми та план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є загальна величина

Істотні ознаки **задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є значення загальної величини**:
1) ці задачі містять два випадки;
2) ці задачі містять три пропорційні величини;
3) загальна величина є однаковою для двох випадків;
4) стосовно однієї величини дані два числових значення;
5) стосовно іншої величини дано лише одне числове значення, а інше є шуканим.

Існує можливість узагальнити математичні структури задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є величина однієї одиниці або загальна величина (рис. 5.7).

Істотні ознаки **задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є** величина однієї одиниці/загальна величина:
1) ці задачі містять два випадки;
1) ці задачі містять три пропорційні величини;
2) величина однієї одиниці/загальна величина є однаковою для двох випадків;

3) стосовно однієї величини дані два числових значення;

4) стосовно іншої величини дано лише одне числове значення, а друге є шуканим.

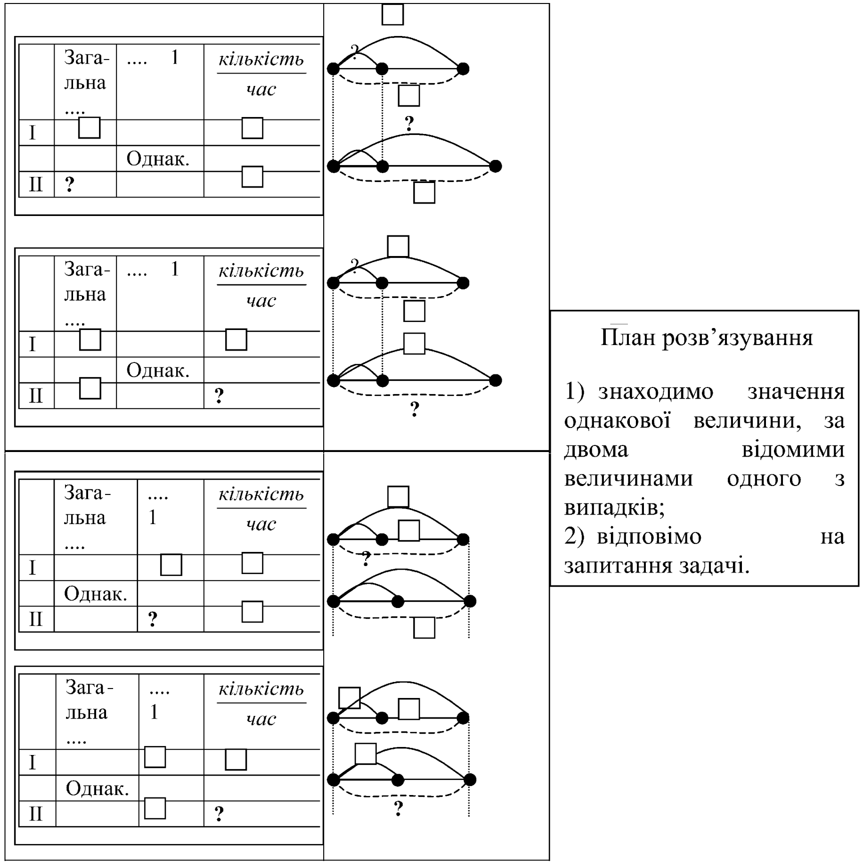


Рис. 5.7. Опорні схеми та план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є величина однієї одиниці/загальна величина

11. Зміна однакової величини. Однаковою величиною стає кількість. Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі № 3

В задачі № 1 змінюється однакова величина — однаковою величиною стає кількість.

Задача 3. Купили однакову кількість кілограмів бананів і апельсинів. За банани заплатили 12 грн. Скільки коштують апельсини, якщо ціна бананів 2 грн, а ціна апельсинів 3 грн?

Діти складають задачу на знаходження загальної величини в другому випадку, порівнюють її з попередніми і встановлюють, що вона має ті самі істотні ознаки, що й задачі на знаходження четвертого пропорційного, але в ній однакова величина — кількість. Робимо прикидку очікуваного результату і застосовуємо узагальнений спосіб розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного.

З'ясовуємо, як ця зміна вплинула на розв'язання задачі. В задачі № 1 однакова величина була величиною однієї одиниці, тому її знаходили дією ділення на рівні частини. В цій задачі однакова величина — кількість або час, її теж знаходять дією ділення, але це інший вид ділення — ділення на вміщення. Тому в цій задачі першою дією дізнаємося про значення однакової величини (кількості або часу) дією ділення, а другою дією відповімо на запитання задачі, дізнаємося про значення загальної величини в другому випадку, дією множення.

12. Зміна групи пропорційних величин задачі і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

Учням пропонується в задачі № 3 змінити величини, учні складають задачу і з'ясовують, як ця зміна вплине на розв'язання: розв'язання задачі не змінюється, треба лише замінити пояснення до арифметичних дій; запис виразу не змінюється.

13. Зміна числових даних задачі і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

Змінивши числові дані задачі і залишивши тими самими величини, досліджуємо вплив цієї зміни на план розв'язування задачі: від зміни величин та зміни числових даних план розв'язування задачі не змінюється.

14. Складання і розв'язування обернених задач до задачі № 3

Складаємо першу обернену задачу на знаходження величини однієї одиниці в другому випадку.

Купили однакову кількість кілограмів бананів і апельсинів. За банани заплатили 12 грн, а за апельсини 18 грн. Яка ціна апельсинів, якщо ціна бананів 2 грн?

Робимо прикидку очікуваного результату та застосовуємо узагальнений план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного. Порівнюємо розв'язання прямої та оберненої задач: в них однакова перша дія, тому що однакову величину знаходять по даним відносно першого випадку і в прямій, і в оберненій задачі. Відрізняються розв'язання другими діями: в прямій задачі це дія множення, тому що знаходять значення загальної величини, а в цій задачі — дія ділення, тому що знаходять величину однієї одиниці.

Складаємо і розв'язуємо другу обернену задачу на знаходження величини однієї одиниці в першому випадку.

Купили однакову кількість бананів і апельсинів. За банани заплатили 12 грн, а за апельсини 18 грн. Яка ціна бананів, якщо ціна апельсинів 3 грн?

Робимо прикидку очікуваного результату та застосовуємо узагальнений план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного.

Після розв'язання порівнюємо першу та другу обернені задачі. Спільним є те, що в обох задачах при наявності усіх істотних ознак задач на знаходження четвертого пропорційного шуканою є величина однієї одиниці, але в першій — шуканою є величина однієї одиниці в другому випадку, а в цій оберненій задачі — у першому випадку. Розв'язання містить одні й ті самі арифметичні дії, але в першій оберненій задач про однакову величину дізнаються за даними, які стосуються першого випадку, а в другій оберненій задачі — за даними другого випадку.

Узагальнюємо математичні моделі таких задач та спосіб їх розв'язування (рис. 5.8).

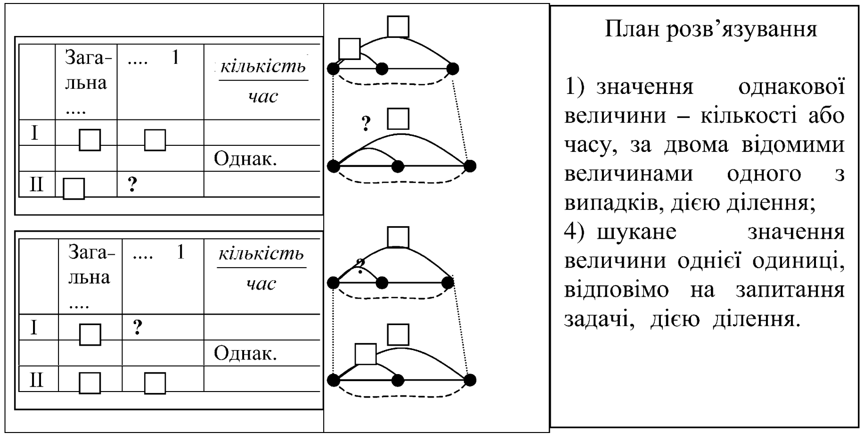


Рис. 5.8. Опорна схема та план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких шуканим є значення величини однієї одиниці

Складаємо і розв'язуємо третю обернену задачу на знаходження загальної величини в першому випадку.

Купили однакову кількість бананів і апельсинів по ціні 2 грн та 3 грн відповідно. Вартість апельсинів складає 18 грн. Знайти вартість бананів.

Робимо прикидку очікуваного результату та застосовуємо узагальнений план розв'язування. Після розв'язання задачі порівнюємо третю обернену задачу з прямою задачею. Крім спільних істотних ознак задач на знаходження четвертого пропорційного, в цих задачах шуканим є значення загальної величини, але в прямій — у другому випадку, а в третій оберненій — у першому випадку. Розв'язання відрізняються: хоча перша дія множення, але в прямій задачі однакову величину знаходять за двома числовими даними, які стосуються першого випадку, а в цій — за двома числовими даними, що стосуються другого випадку. В розв'язанні обох задач останніми є дії множення.

Узагальнимо математичні структури та способи розв'язання цих задач (рис. 5.9).

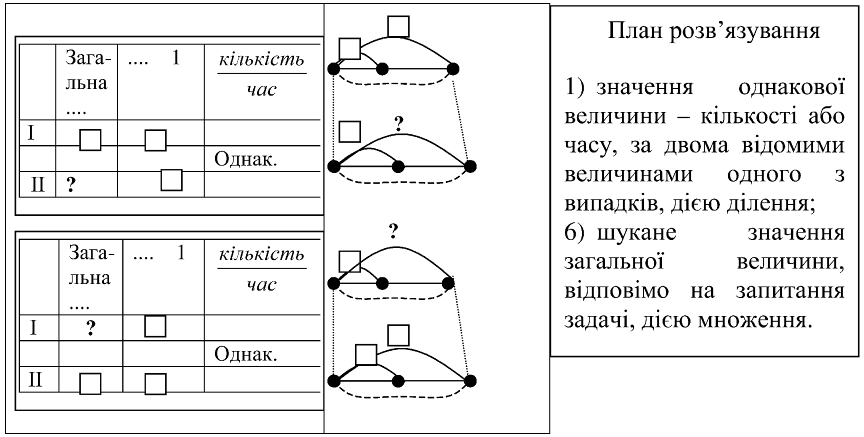


Рис. 5.9. Опорна схема та план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких шуканим є значення загальної величини

Порівнявши третю та другу обернені задачі, узагальнюємо математичні структури таких задач та плани розв'язування (рис. 5.10).

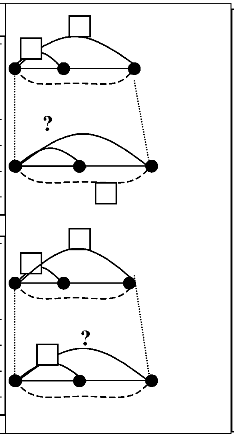
Таким чином, можна сформулювати істотні ознаки *задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є величина кількості або часу*:

1) ці задачі містять два випадки;

1) ці задачі містять три пропорційні величини;
2) величина кількості або часу є однаковою для двох випадків;
3) стосовно однієї величини дані два числових значення;
4) стосовно іншої величини дано лише одне числове значення, а інше є шуканим.

	Зага-льна	 1	*кількість* / *час*
I	□	□	
			Однак.
II	□	?	

	Зага-льна	 1	*кількість* / *час*
I	□	□	
			Однак.
II	?	□	



План розв’язування

1) значення однакової величини – кількості або часу, за двома відомими величинами одного з випадків, дією ділення;
8) шукане значення $\frac{\textit{величини однієї одиниці}}{\textit{загальної величини}}$, відповімо на запитання задачі, дією $\frac{\textit{ділення}}{\textit{множення}}$.

Рис. 5.10. Опорна схема та план розв’язування задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є величина кількості або часу

Можна узагальнити математичні структури усіх розглянутих задач на знаходження четвертого пропорційного та спосіб їх розв’язування (рис. 5.11, 5.12).

Задачі на знаходження четвертого пропорційного

I	*а*		*с*
		однакова	
II	*в*		?

Рис. 5.11. Опорна схема задач на знаходження четвертого пропорційного
Або *а* або *в* або *с* або *к* або *р* — шукане число

Істотні ознаки *задач на знаходження четвертого пропорційного*:
1) ці задачі містять два випадки;
2) ці задачі містять три пропорційні величини;

	Зага льна	 1	*кількість* / *час*
I	□		□
		Однак.	
II	?		□

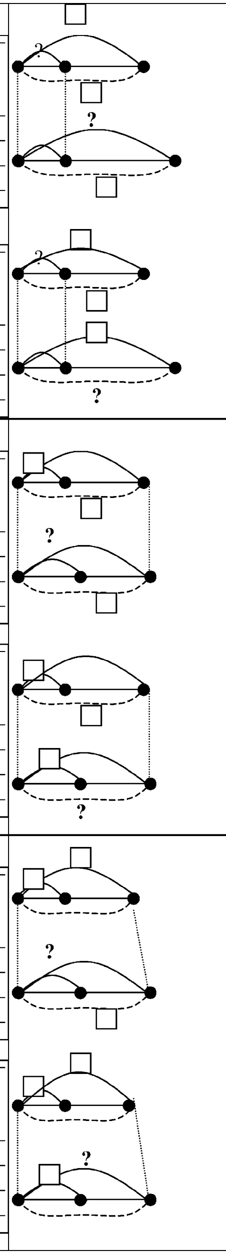
	Зага льна	 1	*кількість* / *час*
I	□		□
		Однак.	
II	□		?

	Зага льна	 1	*кількість* / *час*
I		□	□
	Однак.		
II		?	□

	Зага льна	 1	*кількість* / *час*
I		□	□
	Однак.		
II		□	?

	Зага льна	 1	*кількість* / *час*
I	□	□	
			Однак.
II	□	?	

	Зага льна	 1	*кількість* / *час*
I	□	□	
			Однак.
II	?	□	



План розв’язування

1) значення однакової величини, за двома відомими величинами одного з випадків;
2) відповімо на запитання задачі.

Рис. 5.12. Опорна схема та план розв’язування задач на знаходження четвертого пропорційного

3) одна з величин є однаковою для двох випадків;
4) стосовно однієї величини дані два числових значення;
5) стосовно іншої величини дано лише одне числове значення, а інше є шуканим.

15. Ознайомлення зі способом відношень

Учням пропонується задача на знаходження четвертого пропорційного на знаходження значення загальної величини, в якій однаковою є величина однієї одиниці, але яку не можна розв'язати способом знаходження однакової (сталої) величини, тому що не можна виконати ділення націло даних числових значень. Наприклад:

З 10 м тканини кравчиня пошила 3 скатертини. Скільки метрів тканини потрібно на 6 таких скатертин?

Учні «впізнають» задачу на знаходження четвертого пропорційного та згадують узагальнений план розв'язування, після чого пробують його застосувати... Виникає проблемна ситуація, яку допомагає розв'язати вчитель, пропонуючи зробити прикидку очікуваного результату, але не просто вказати шукане більше чи менше число за дане, а встановити у скільки разів воно більше чи менше за дане. Якщо учні не можуть зробити цей висновок, то вчитель радить виконати схематичний рисунок до задачі. Учні дістають висновку: шукане число буде у стільки разів більше/менше за дане числове значення цієї ж величини, у скільки разів відповідне йому числове значення іншої величини більше/менше за друге значення цієї ж величини. Ці міркування знаходять відображення у схематичному короткому записі (рис. 5.13).

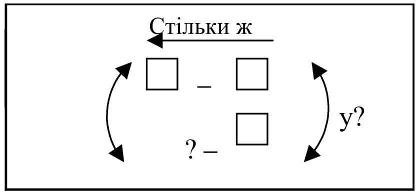


Рис. 5.13. Схематичний короткий запис задачі на знаходження четвертого пропорційного, що розв'язується способом відношень

Далі виконується аналітичний пошук розв'язування задачі та формулюється план розв'язування і записується розв'язання та відповідь до задачі.

Вчитель повідомляє, що цей спосіб розв'язування називається способом *відношень*. В математиці частку двох чисел інакше

називають відношенням. Для відповіді на запитання задачі ми знаходили відношення двох даних значень певної величини і робили висновок, що у такому ж відношенні знаходиться шукане число з даним значенням цієї ж величини. Спосіб відношень застосовується в тому випадку, коли не можна знайти значення однакової величини, або коли можна дізнатися, як відносяться одне до одного два числові дані однієї величини.

З метою подальшого усвідомлення умов, при яких застосовується спосіб відношень, учні змінюють числове значення у «звичайній» задачі, яка розв'язується способом знаходження однакової величини, з тим, щоб можна було б застосувати спосіб відношень.

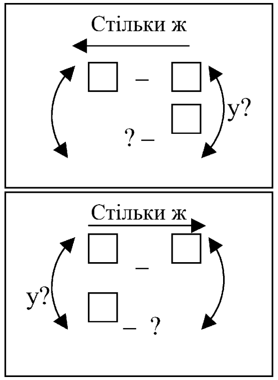
16. Зміна числових даних задачі № 1 з метою застосування способу відношень при її розв'язанні. Розв'язання отриманої задачі способом відношень

Задачу на знаходження четвертого пропорційного, в якій однаковою є величина однієї одиниці (№ 1), записуємо схематично, у формі пропорції. Робимо прикидку очікуваного результату, але дізнатися, у скільки разів більше чи менше шукане число за дане значення цієї ж величини, ми не можемо, тому що не можна здійснити ділення націло відомих числових значень іншої величини. Тому вчитель пропонує замінити одне з числових значень, щоб можна було про це дізнатися. Учні змінюють одне з даних чисел і розв'язують задачу способом відношень.

З метою узагальнення способу розв'язування змінюємо величини задачі та числові дані задачі і досліджуємо вплив цих змін на розв'язання задачі. Ці зміни не впливають на математичну структуру задачі: усі задачі — на знаходження четвертого пропорційного; ці зміни не впливають на план розв'язування задачі: першою дією дізнаємося про відношення двох відомих чисел, які є значеннями однієї величини, і робимо висновок, що в такому самому відношенні знаходиться й інша пара числових значень другої величини; другою дією відповідаємо на запитання задачі.

17. Складання і розв'язування обернених задач

Після складання обернених задач радимо учням з'ясувати, як ця зміна вплине на розв'язання задачі, і лише потім виконати розв'язання. Порівнюємо відповідну обернену задачу з прямою та відповідні дві обернені задачі між собою: в задачах, у яких шуканими є числові значення однієї й тієї самої величини, але у різних випадках, звертаємо увагу на різний характер відношень — «у стільки разів більше», «у стільки разів менше». Порівнявши усі ці задачі, узагальнюємо план розв'язування (рис. 5.14).



План розв'язування
Спосіб відношень

1) дізнатися, у скільки разів одне з даних чисел $\frac{\textit{більше}}{\textit{менше}}$ другого числа, відносно однієї величини. Зробити висновок, що у стільки ж разів шукане число $\frac{\textit{більше}}{\textit{менше}}$ за дане значення іншої величини.
2) відповісти на запитання задачі.

Рис. 5.14. Опорна схема та план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного. Спосіб відношень

Далі учням пропонується порівняти два способи розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного. Учні згадують, як вони розв'язували задачу № 1 та обернені до неї задачі першим способом, і встановлюють, що «ключем» до розв'язання було знаходження однакової величини, а у другому способі — «ключем» є числове значення і характер відношення двох відомих числових даних однієї з величин і висновок про таке саме відношення шуканого числа та відомого числового значення. Для знаходження однакової величини ми користувалися двома числовими даними різних величин стосовно одного з випадків, а для знаходження числового значення відношення ми користувалися двома числовими даними однієї й тієї самої величини.

18. Зміна числових даних задачі № 2, в якій однаковою є загальна величина, з метою можливості застосування способу відношень при її розв'язанні. Розв'язання отриманої задачі способом відношень

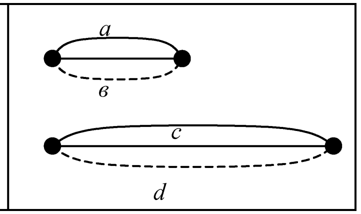
Робота йде аналогічно. Діти доходять висновку, що зміна однакової величини не впливає на план розв'язування задачі на знаходження четвертого пропорційного способом відношень.

19. Зміна числових даних задачі № 3, в якій однаковою є кількість або час, з метою застосування способу відношень при її розв'язанні. Розв'язання отриманої задачі способом відношень

Робота йде аналогічно. Діти доходять висновку, що і ця зміна однакової величини не впливає на план розв'язування задачі на знаходження четвертого пропорційного способом відношень.

20. З'ясування умов застосування способу знаходження однакової величини та способу відношень

Далі слід узагальнити можливі способи розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного. Результати узагальнення подані на рисунку 5.15.

Задачі на знаходження четвертого пропорційного *а – в* *c - d*	

де шуканим є або *а*, або *в*, або *с*, або *d*.

План розв'язування
Спосіб знаходження однакової величини

1) Першою дією знаходимо значення однакової величини за відомими значеннями двох величин стосовно одного з випадків.
2) Другою дією відповідаємо на запитання задачі.

План розв'язування
Спосіб відношень

1) Першою дією дізнаємося про числове значення відношення між двома відомими числовими даними одної з величин. Робимо висновок про числове значення і характер відношення між шуканим і числовим даним стосовно другої величини.
2) Другою дією відповідаємо на запитання задачі.

Рис. 5.15. Опорна схема та способи розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного

Учні розв'язують задачі двома способами і досліджують умови можливості застосовування кожного з них. Спосіб знаходження однакової величини не можна застосувати у тих випадках, коли неможливо здійснити ділення націло числових даних двох величин стосовно одного з випадків. Спосіб відношень не можна застосувати у тих випадках, коли неможливо здійснити ділення націло двох числових даних однієї величини.

21. Закріплення уміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного

Учні аналізують математичну структуру задачі, впізнають її, згадують узагальнений план їх розв'язування і застосовують його. Значну увагу на цьому етапі слід приділити розв'язанню задач двома способами: способом знаходження однакової величини та способом відношень; складанню і розв'язанню обернених задач — перетворенню задачі одного підвиду у задачу другого підвиду. На даному етапі пропонуємо учням задачі на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою величиною є загальна величина або кількість чи час.

Практичну реалізацію запропонованої загальної методики нами подано на підставі системи завдань, за допомогою яких здійснюється системно-структурний аналіз задач на знаходження четвертого пропорційного [484; 485]. Запропонована методика також подана у роботах автора [492; 501; 502].

5.1.2. Задачі на пропорційне ділення

1. Підготовча робота до введення задач на пропорційне ділення

Мета ***підготовчої роботи*** полягає в актуалізації знань, умінь та навичок, які необхідні при розв'язанні задач на пропорційне ділення, а саме:

- знання взаємозв'язку між основними групами величин, які знаходяться у пропорційній залежності;
- уміння розв'язувати задачі на знаходження четвертого пропорційного способом знаходження однакової величини:
  - — аналізуючи умову задачі виділяти однакову величину;
  - — складати короткий запис задачі в формі таблиці;
  - — при проведенні пошуку розв'язування задачі усвідомити наступне — для відповіді на запитання задачі треба знайти значення однакової величини, про яке можна дізнатися за даними числовими значеннями двох величин стосовно іншого випадку.

Всі перелічені знання та уміння актуалізуються під час розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного способом знаходження однакової величини.

Розв'язування задач нового виду — на пропорційне ділення — базується на чіткому умінні розв'язувати задачі на знаходження

четвертого пропорційного, тому що обидва види задач розв'язуються способом знаходження однакової величини, тобто для того, щоб відповісти на запитання задачі, треба знати значення однакової величини (наприклад: ціну, масу 1 ящика, продуктивність праці й тощо). Але в задачах на знаходження четвертого пропорційного однакову величину знаходимо за двома відомими величинами одного із випадків, про які йде мова в задачі. У задачах на пропорційне ділення нам не дані числові значення обох величин, відповідно якогось випадку, за якими можна дізнатися про однакову величину. У цих задачах однакову величину ми знаходимо за значеннями сум двох інших величин (за двома сумами), причому значення першої суми вже дано за умовою задачі, а другу суму слід знайти за даними значеннями кожного з випадків, про які йде мова в задачі. Тому на етапі підготовки учням пропонують спеціальні завдання на знаходження однакової величини за двома сумарними значеннями двох інших величин. Ці завдання повинні подаватися у системі, так, щоб кожне наступне завдання було дещо ускладненим відносно попереднього. Отже, перша задача — проста, в ній дані обидві суми; а наступні задачі — складені і передбачають знаходження сумарного значення однієї з величин. Наприклад:

1. За два дні продали 15 платтів, за них всього отримали 45 гривень. Знайти ціну плаття.
2. В одному класі 12 учнів, а в другому 15 учнів. Всього в учнів обох класів 135 підручників. Скільки підручників у одного учня, якщо кожен учень цих класів має однакову кількість підручників?

2. Ознайомлення з задачами на пропорційне ділення. Перетворення задачі № 1 на знаходження четвертого пропорційного у задачу № 2 на пропорційне ділення, в якій шуканими є два значення загальної величини

Учні розв'язують задачу на знаходження четвертого пропорційного на знаходження загальної величини, в якій однаковою є величина однієї одиниці, способом знаходження однакової (сталої) величини.

Задача № 1. Першого дня на базу привезли 2 вагони вугілля, маса якого 38 т. Другого дня привезли 3 таких самих вагони вугілля. Скільки вугілля привезли другого дня?

Після розв'язання цієї задачі вчитель пропонує знайти сумарне значення загальної величини і включити його в задачу, при цьому змінити вимогу — знайти значення загальної величини для кожного з двох випадків. Короткий запис задачі на знаходження четвертого пропорційного перетворюється у короткий запис нової задачі. За коротким записом складається задача на пропорційне ділення № 2. Однаковою є величина однієї одиниці.

Задача № 2. За два дні на базу привезли 95 т вугілля. В перший день привезли 2 вагони, а в другий день — 3 вагони. Скільки тонн вугілля привезли кожного дня, якщо маса 1 вагона була однаковою?

Вчитель повідомляє, що задача, яку складено, — це задача нового виду, на пропорційне ділення. Він зауважує, що в цих задачах запитання містить слово «кожен», і тому воно розпадається на два запитання. А якщо в задачі два запитання, тому одержимо і дві відповіді.

Робота над задачею йде за загальним планом. Учні пояснюють числа задачі, пояснюють, що означає однакова величина, яке запитання задачі та які два запитання воно включає. У зв'язку з тим, що задача містить два запитання, спочатку йде пошук розв'язування для відповіді на перше запитання задачі, а потім — на друге. Але перед аналізом робимо прикидку очікуваного результату — яке з шуканих чисел буде більшим (меншим) — на основі знання характеру зміни однієї величини у залежності від зміни другої величини при сталій третій величині. Після розв'язання задачі перевіряємо правильність зробленої прикидки. Перевірка розв'язання здійснюється засобом додавання знайдених числових значень і порівняння отриманого числа з даним числовим значенням суми.

Далі порівнюємо задачі на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення з метою дослідження впливу зміни умови задачі на її розв'язання. Задачу на пропорційне ділення ми отримали засобом перетворення задачі на знаходження четвертого пропорційного, яка має наступні істотні ознаки:

1) три пропорційні величини;
2) два випадки;
3) одна з величин (в даному випадку величина однієї одиниці) є однаковою для обох випадків;
4) стосовно одного випадку дано значення двох величин;
5) стосовно другого випадку дано числове значення однієї величини, а значення іншої величини є шуканим.

В задачі на знаходження четвертого пропорційного ми виконали наступні зміни: шуканими стали два числові значення однієї величини (загальної величини), але ми задали їх суму.

Таким чином, припускаємо, що істотні ознаки задач на пропорційне ділення наступні:

1) три пропорційні величини;
2) два випадки;
3) одна з величин є однаковою (у даному випадку величина однієї одиниці) для обох випадків;
4) стосовно однієї величини (у даній задачі — кількості або часу) дано два числові значення для обох випадків;
5) стосовно іншої величини (у даній задачі — загальної величини) два числові значення є шуканими, але дано їх суму.

Задачу на знаходження четвертого пропорційного ми розв'язували за планом:

1) знаходили значення однакової величини — величини однієї одиниці за двома відомими величинами у одному з випадків;
2) відповідали на запитання задачі, знаходили значення загальної величини.

З'ясовуємо: як зміна умови вплинула на розв'язання задачі? При розв'язанні задач на пропорційне ділення ми не можемо однакову величину знаходити за двома відомими величинами одного з випадків, однакову величину ми знаходимо за двома сумарними значеннями двох величин. Таким чином, зміна умови задачі вплинула на спосіб знаходження однакової величини. Тому задачу на пропорційне ділення ми розв'язували за планом:

1) знаходили суму даних числових значень іншої величини — кількості або часу;
2) знаходили однакову величину (величину однієї одиниці) за двома сумами;
3) відповідали на перше запитання задачі;
4) відповідали на друге запитання задачі.

Результати узагальнення математичних структур та планів розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення подано на рисунку 5.16.

Визначаємо спільне у розв'язанні задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення: для розв'язання обох задач треба знайти значення однакової величини.

Способи знаходження однакової величини:

1) за двома числовими значеннями двох величин одного з випадків;
2) за двома сумарними значеннями двох величин.

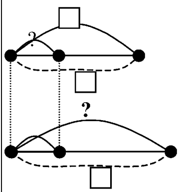
3. Зміна величин у задачі № 2 і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

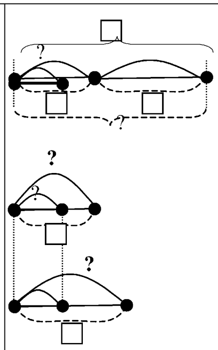
Робота йде аналогічно, як при навчанні розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного. Учні дістають висновку, Задачі на знаходження четвертого пропорційного

	Загальна	 1	кількість / час
I	$\boxed{}$		$\boxed{}$
		Однак.	
II	?		$\boxed{}$

Задачі на пропорційне ділення

	Загальна	 1	кількість / час
I	?		$\boxed{}$
	$\boxed{}$	Однак.	
II	?		$\boxed{}$





План розв'язування	План розв'язування
Спосіб знаходження однакової величини	Спосіб знаходження однакової величини
1) Значення однакової величини – величини однієї одиниці за двома числовими значеннями одного з випадків. 2) Шукане значення загальної величини, відповідаємо на запитання задачі.	1) Суму даних числових значень однієї з величин – кількості або часу. 2) Значення однакової величини – величини однієї одиниці за сумарними значеннями двох величин. 3) Шукане значення загальної величини, відповідаємо на перше запитання задачі. 4) Шукане значення загальної величини, відповідаємо на друге запитання задачі.

Рис. 5.16. Опорні схеми та плани розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення

що зміна величин у задачі не вплинула на математичну структуру задачі — вона лишилася тією самою, і на розв'язання задачі — запис розв'язання лишився тим самим, але змінилися пояснення.

4. Зміна числових даних задачі № 2 і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

Робота йде аналогічно, як при навчанні розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного. Учні дістають висновку, що при зміні числових даних математична структура задачі не змінилася; щодо розв'язання задачі, то залишилися ті самі арифметичні дії та їх порядок, тобто не змінився план розв'язування, а змінилися числа у рівностях.

Таким чином, проведена робота по дослідженню задачі підтвердила наявність визначених істотних ознак задачі на пропорційне ділення, які були припущені при співставленні задачі на пропорційне ділення та задачі на знаходження четвертого пропорційного. Крім, того зміна величин або числових даних задачі не вплинула на план розв'язування, він лишився тим самим.

5. Задача № 1. Знаходження сумарного значення кількості, включення його в задачу і вимога знайти значення кількості для кожного з двох випадків. Складається і розв'язується задача на пропорційне ділення № 3. Однаковою є величина однієї одиниці

В задачі № 1 на знаходження четвертого пропорційного відбуваються наступні зміни: значення кількості або часу для обох випадків стають шуканими, але дано їх суму; значення загальної величини відомі для обох випадків. Ці зміни виконуються у короткому записі задачі, і учні складають задачу за коротким записом.

Задача № 3. За два дні на базу привезли 5 вагонів вугілля. В перший день привезли 38 т вугілля, а в другий день — 57 т вугілля. Скільки вагонів вугілля привезли кожного дня, якщо маса 1 вагона була однаковою?

Далі аналізується математична структура задачі: ця задача, також має два випадки; три пропорційні величини, одна з яких є однаковою для обох випадків; стосовно однієї величини дані два числові значення, а для іншої — сумарне значення, а числові значення окремо для першого і для другого випадку є шуканими. Задача також має два запитання. Це задача того ж самого виду — на пропорційне ділення.

Згадуємо, за яким планом розв'язуються задачі на пропорційне ділення, і дещо його поправляємо. Після розв'язання задачі порівнюємо розв'язання обох задач: спільні дві перші дії — перша дія додавання, а друга дія ділення; відрізняються двома останніми діями — в задачі № 2 останні дві дії множення, а в задачі № 3 дві останні дії ділення. Для того, щоб відрізняти ці задачі, домовилися вважати задачі, в яких дві останні дії множення, задачами першого підвиду, а задачі, в яких дві останні дії ділення, — другого підвиду.

Порівнявши задачі № 2 та № 3, учні дістають висновку: щоб перетворити задачу одного підвиду у задачу іншого підвиду, треба:

— замінити шукані їх числовими значеннями і тому виключити їх сумарне значення;

— обидва числові дані іншої величини вважати шуканими, але задати їх сумарне значення.

Таким чином, якщо в задачі шуканими є значення загальної величини, то вони віднесені до задач першого підвиду, а якщо — кількості або часу, то маємо задачу другого підвиду. Задачі на знаходження четвертого пропорційного також поділяються на задачі I та II підвиду за цією ознакою. Тому існує можливість порівняти усі види задач на знаходження четвертого пропорційного та задачі на пропорційне ділення. В цих задачах спільним є два випадки, три пропорційні величини, і одна величина є однаковою для обох випадків; стосовно однієї з величин надано два числових значення. В задачах на знаходження четвертого пропорційного, щодо другої величини дано одне числове значення, а інше є шуканим; а в задачах на пропорційне ділення — для другої величини дано лише сумарне значення, а обидва значення цієї величини для кожного з випадків є шуканими. В задачах на знаходження четвертого пропорційного одне шукане, а в задачах на пропорційне ділення — два. Результати узагальнення математичних структур задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення подані на рисунку 5.17.

Спільні істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного та задач на пропорційне ділення:

1) Три величини.
2) Два випадки.
3) Одна з величин є однаковою для обох випадків.
4) Для однієї величини дано два числових значення.

Відмінні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного та задач на пропорційне ділення:

Для іншої величини дано одне числове значення, а друге є шуканим.	Для іншої величини обидва числові значення є шуканими, але дано їх суму.

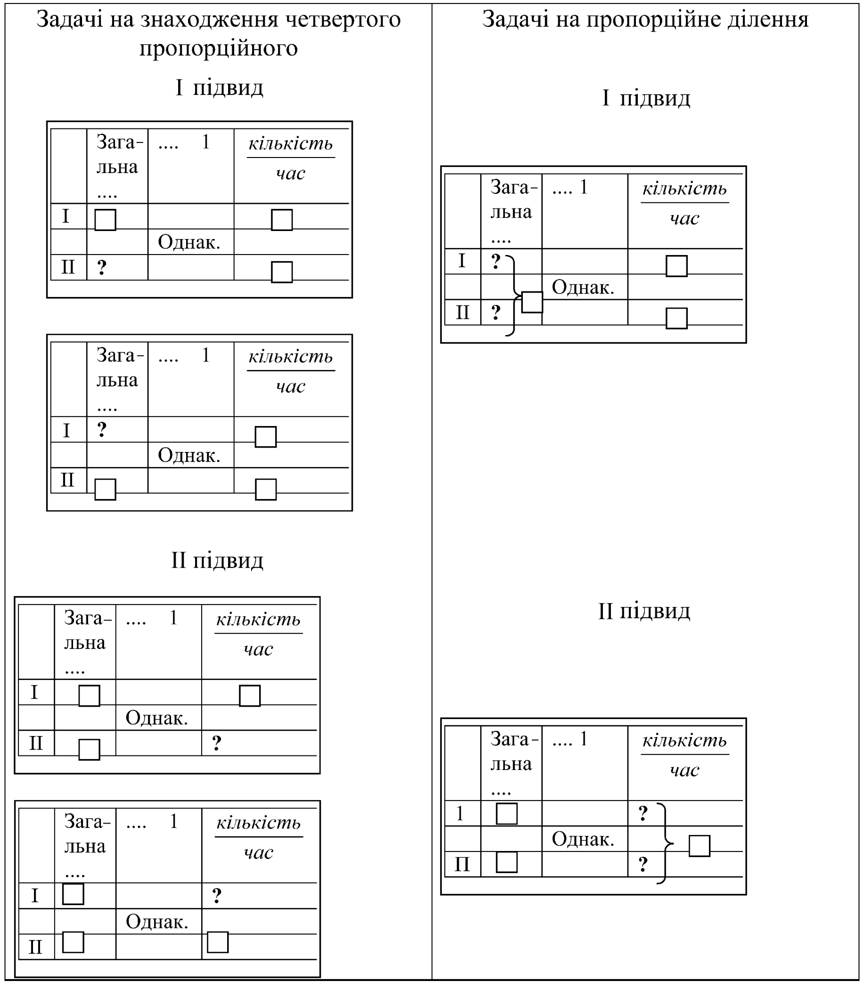


Рис. 5.17. Опорні схеми двох видів задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення

Порівнюємо розв'язання відповідних задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення. Вони відрізняються кількістю дій: задачі на знаходження четвертого пропорційного розв'язуються двома діями, а задачі на пропорційне ділення — чотирма діями. Вони відрізняються способом знаходження однакової величини: в задачах на знаходження четвертого пропорційного однакову величину знаходять за двома відомими числовими даними двох величин стосовно одного з випадків, в задачах на пропорційне ділення — за двома сумарними значеннями двох величин. Значення однакової величини в задачах на знаходження четвертого пропорційного знаходять в першій дії, а в задачах на пропорційне ділення — у другій, тому що першою дією слід відшукати значення другої суми.

6. Зміна величин у задачі № 3 і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

Виконавши зміну величин задачі, учні впевнюються, що ця зміна не вплинула на розв'язання задачі: розв'язання лишилося тим самим, але слід змінити пояснення.

7. Зміна числових даних задачі № 3 і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

Зміна числових даних задачі також не вплинула на план розв'язування: арифметичні дії та їх порядок лишився тим самим.

Після проведеної роботи існує можливість узагальнення математичної структури задач на пропорційне ділення та плану їх розв'язування (рис. 5.18).

Істотні ознаки задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є величина однієї одиниці вимірювання або лічби:

1) три пропорційні величини;
2) два випадки;
3) значення величини однієї одиниці є однаковим для обох випадків;
4) для однієї величини дано два числових значення для кожного випадку;
5) числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано їх сумарне значення.

8. Зміна однакової величини. Задача № 4. Однаковою величиною стає кількість. Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

В задачі № 2 змінюється однакова величина — однаковою величиною стає кількість. Діти складають задачу на знаходження загальної величини в обох випадках, порівнюють її з попередніми і встановлюють, що вона має ті самі істотні ознаки, що й задачі на пропорційне ділення, але в ній однакова величина — кількість. Робимо прикидку очікуваних результатів і застосовуємо узагальнений спосіб розв'язування задач на пропорційне ділення.

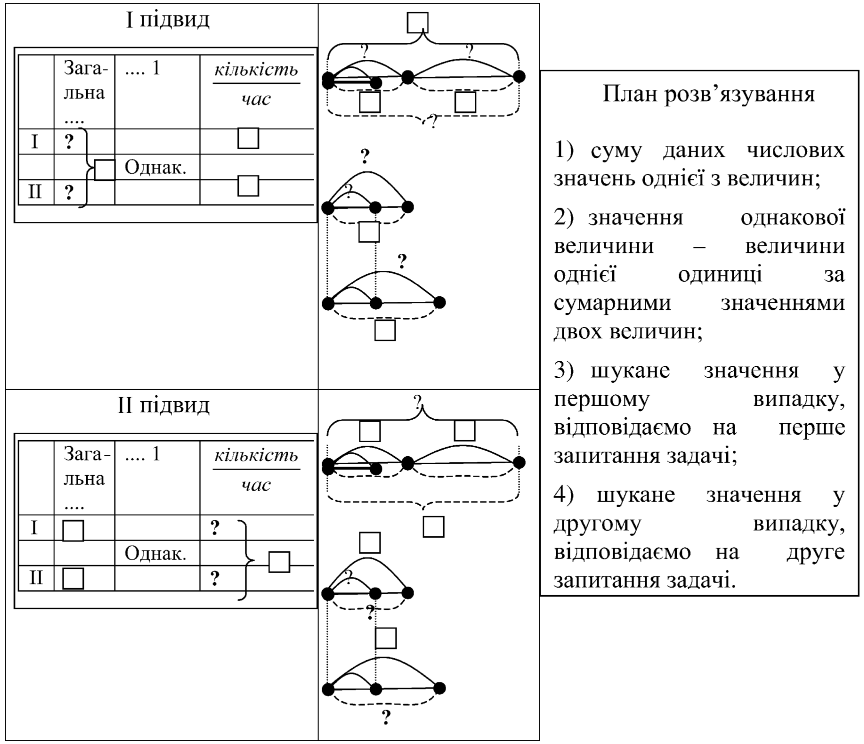


Рис. 5.18. Опорні схеми та план розв'язування задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є величина однієї одиниці

Задача № 4. На базу привезли 95 т вугілля у великих і маленьких вагонах. Маса маленького вагону 2 т, а великого 3 т. Скільки тонн вугілля привезли в маленьких вагонах і скільки тонн вугілля привезли у великих вагонах, якщо кількість маленьких і великих вагонів однакова?

З'ясовуємо, як ця зміна вплинула на розв'язання задачі. В задачі № 2 однакова величина була величиною однієї одиниці, тому її знаходили дією ділення (на рівні частини) сумарних значень двох інших величин. В цій задачі однакова величина — кількість або час, її теж знаходять дією ділення сумарних значень двох інших величин, але це інший вид ділення — ділення на вміщення. Тому в цій задачі першою дією також знайдемо суму двох числових даних однієї величини, другою дією дізнаємося про значення однакової величини (кількості або часу) — дією ділення за двома сумарними значеннями двох інших величин, а третьою та четвертою дією відповімо на перше та друге запитання задачі, дізнаємося про значення загальної величини в кожному випадку, дією множення.

9. Зміна величин у задачі № 4 і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

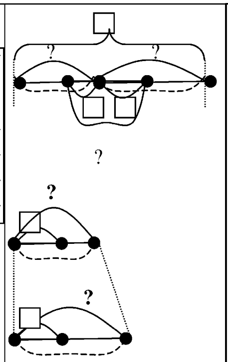
Зміна величин задачі не впливає на математичну структуру задачі та план її розв'язування, рівності лишаються майже тими самими, а слід змінити пояснення.

10. Зміна числових даних задачі № 4 і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

Змінивши числові дані задачі і залишивши тими самими величини, досліджуємо вплив цієї зміни на план розв'язування задачі: від зміни величин та зміни числових даних план розв'язування задачі не змінюється.

Узагальнюємо математичну структуру таких задач (рис. 5.19).

	Загальна	 1	кількість / час
I	?	□	Однак.
II	?	□	



План розв'язування
1) суму даних числових значень однієї з величин – величини однієї одиниці;
2) значення однакової величини – кількості або часу за сумарними значеннями двох величин;
3) шукане значення загальної величини у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі;
4) шукане значення загальної величини у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі.

Рис. 5.19. Опорна схема та план розв'язання задач на пропорційне ділення, в яких шуканими є значення загальної величини, а однаковою є величина кількості або часу

11. Перетворення задачі № 4 у задачу другого підвиду — задача № 5. Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

Знайдені при розв'язанні задачі № 4 числові значення загальної величини вважаються за дані, а дані числові значення величини однієї одиниці стають шуканими, але задається їх сума. Виконавши зміни у короткому записі задачі № 4, учні складають задачу другого підвиду.

Задача № 5. На базу привезли однакову кількість великих і маленьких вагонів з вугіллям. В маленьких вагонах привезли 38 т вугілля, а у великих 57 т вугілля. Скільки тонн вугілля в одному маленькому та в одному великому вагонах, якщо разом в них 5 т вугілля?

Порівнюємо цю задачу з попередніми і дістаємо висновку, що це задача на пропорційне ділення. Робимо прикидку очікуваних результатів і застосовуємо узагальнений план розв'язування, дещо уточнивши його.

Отже, ми отримали задачу на пропорційне ділення другого підвиду, в якій однаковою є величина кількості або часу. Ця зміна не викликала зміну математичної структури задачі (вона має ті самі істотні ознаки, що й попередня), а тому не змінився загальний план розв'язування.

12. Зміна величин у задачі № 5 і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

Зміна величин у задачі не впливає на математичну структуру задачі та план її розв'язування — рівності лишаються тими самими, слід замінити пояснення.

13. Зміна числових даних задачі № 5 і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

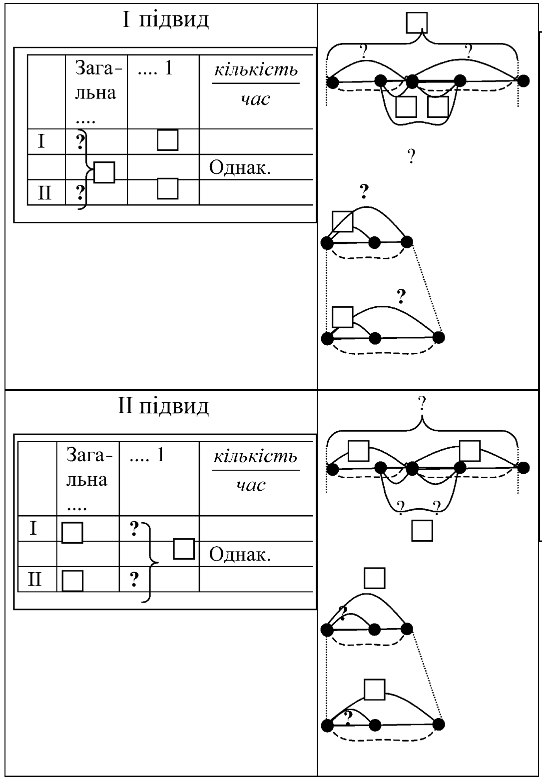
Пропонується змінити числові значення в задачі. Учні пропонують власні варіанти, а вчитель вибирає з них підходящі. Далі досліджується вплив цієї зміни на план розв'язування задачі. Діти дістають висновку, що від зміни величин та зміни числових даних план розв'язування задачі не змінюється:

першою дією знаходимо суму значень іншої величини — загальної величини,

другою дією знаходимо значення однакової величини кількості або часу за двома сумарними значеннями інших двох величин,

третьою та четвертою дією відповідаємо на перше та друге запитання задачі.

Порівнявши задачі першого та другого підвиду, узагальнюємо математичну структуру задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є кількість або час (рис. 5.20).



План розв'язування

Знаходимо:

1) суму даних числових значень однієї з величин;

2) значення однакової величини – кількості або часу за сумарними значеннями двох величин;

3) шукане значення у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі;

4) шукане значення у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі.

Рис. 5.20. Опорні схеми та план розв'язування задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є величина кількості або часу

Істотні ознаки задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є величина кількості або часу:

1) три пропорційні величини;
2) два випадки;
3) значення величини кількості або часу є однаковим для обох випадків;
4) для однієї величини дано два числових значення для кожного випадку;

5) числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано їх сумарне значення.

Після проведеної роботи існує можливість узагальнити математичні структури задач на пропорційне ділення, в яких однаковою величиною є величина однієї одиниці чи кількість або час (рис. 5.21).

Істотні ознаки задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є величина однієї одиниці чи кількості або часу:

1) три пропорційні величини;
2) два випадки;
3) одна з величин є однаковою для обох випадків;
4) для однієї величини дано два числових значення для кожного випадку;
5) числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано їх сумарне значення.

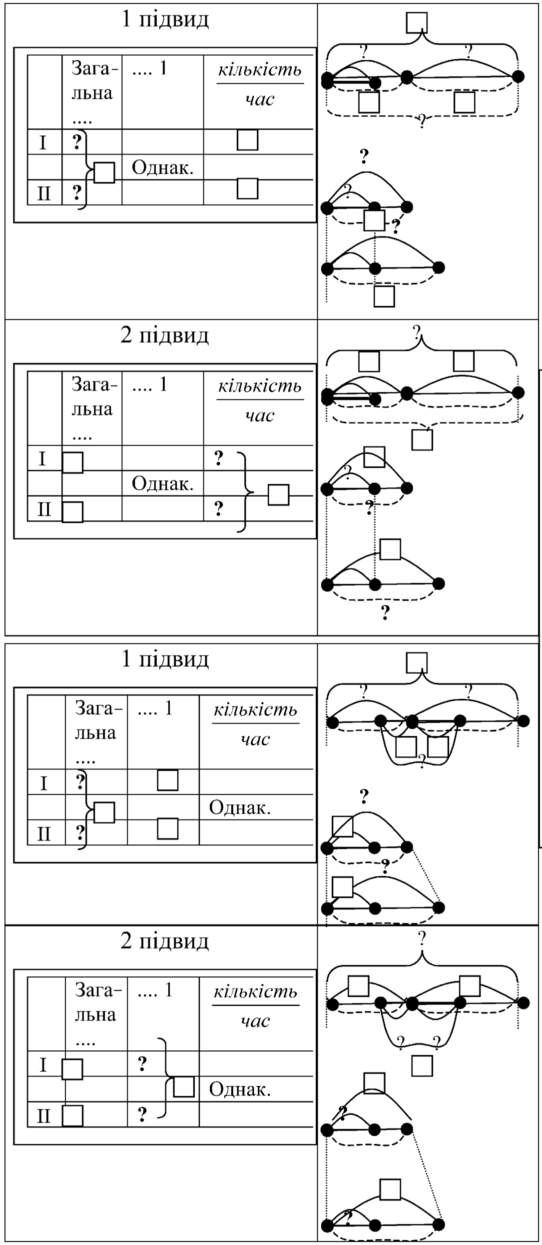
14. Зміна однакової величини. Однаковою величиною стає загальна величина. Задача № 6. Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

Змінивши у задачі № 2 однакову величину — величину однієї одиниці на загальну величину, отримуємо задачу, яку розв'язати способом знаходження однакової величини не можна.

Задача № 5. На базу привезли вугілля порівну у великих і маленьких вагонах. В одному маленькому вагоні перевозили по 2 т вугілля, а у великому — по 3 т. Скільки було великих і маленьких вагонів з вугіллям, якщо всього було 95 вагонів?

Таким чином, експериментуючи з задачею, ми сконструювали таку задачу на пропорційне ділення, яку арифметичним способом розв'язати не можна, вона розв'язується за допомогою дрібно-раціонального рівняння, і це можна бути здійснити лише в курсі алгебри 7-го класу. Подальше експериментування з такою структурою задачі ми проводити не будемо, тому що не маємо знань для її розв'язання.

Отже, ми дослідили задачі на пропорційне ділення, в яких однаковою була величина однієї одиниці або кількість чи час. Ми впевнилися, що зміна однакової величини не впливає на план розв'язування задачі. Крім того, ми склали задачу на пропорційне ділення, в якій однаковою є загальна величина, але знань в учнів початкової школи для її розв'язання немає. Між тим, як і в задачах на знаходження четвертого пропорційного, так і в задачах на пропорційне ділення, однаковою може бути величина



План розв'язування
Знаходимо:
1) суму даних числових значень однієї з величин;
2) значення однакової величини за сумарними значеннями двох величин;
3) шукане значення у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі;
4) шукане значення у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі.

Рис. 5.21. Опорні схеми та план розв'язування задач на пропорційне ділення, в яких однаковою є величина однієї одиниці чи кількості або часу

однієї одиниці або кількість чи час або загальна величина. Тому узагальнимо математичну структуру задач на пропорційне ділення, зіставивши її з математичною

структурою задач на знаходження четвертого пропорційного, і сформулюємо істотні ознаки таких задач (рис. 5.22).

<table>
<tr><td>Задачі на знаходження четвертого пропорційного
<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>I</td><td>a</td><td></td><td>в</td></tr><tr><td></td><td></td><td>Однак.</td><td></td></tr><tr><td>II</td><td>c</td><td></td><td>?</td></tr></table></td><td>Задачі на пропорційне ділення
<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>I</td><td>a</td><td></td><td>?</td><td rowspan="3">к</td></tr><tr><td></td><td></td><td>Однак.</td><td></td></tr><tr><td>II</td><td>c</td><td></td><td>?</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>План розв'язування
Спосіб знаходження однакової величини
1) Значення однакової величини за двома числовими значеннями одного з випадків.
2) Шукане значення, відповідаємо на запитання задачі.</td><td>План розв'язування
Спосіб знаходження однакової величини
1) Суму даних числових значень однієї з величин.
2) Значення однакової величини за сумарними значеннями двох величин.
3) Шукане значення, відповідаємо на перше запитання задачі.
4) Шукане значення, відповідаємо на друге запитання задачі.</td></tr>
</table>

Рис. 5.22. Узагальнені опорні схеми та плани розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення *а*, або *в*, або *с*, або *к*, або *р* — шукане число

Істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення:

1) Три пропорційні величини.
2) Два випадки.
3) Одна з величин є однаковою для обох випадків.
4) Для однієї з величин дано два числових значення для обох випадків.
5) Для другої величини дано лише одне числове значення, а інше є шуканим/обидва числові значення є шуканими, але дано їх суму.

Також можна *узагальнити розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного та на пропорційне ділення способом знаходження однакової величини*:

— знайти однакову величину за двома числовими значеннями стосовно одного з випадків/за двома сумарними значеннями;
— відповісти на запитання задачі.

15. Закріплення уміння розв'язувати задачі на пропорційне ділення

Учні аналізують математичну структуру задачі, «впізнають» її, згадують узагальнений план розв'язування і застосовують його. Значну увагу на цьому етапі слід приділити перетворенню задачі одного підвиду у задачу другого підвиду, перетворенню задачі на пропорційне ділення у задачу на знаходження четвертого пропорційного. На даному етапі пропонуємо учням задачі на пропорційне ділення, в яких однаковою величиною є кількість або час.

Практична реалізація розробленої методики на підставі системи завдань подана у роботі автора [490; 491]. Методика роботи над задачами на пропорційне ділення подана також у публікації автора [502].

5.1.3. Задачі на знаходження невідомих за двома різницями

1. Підготовча робота до ознайомлення з задачами на знаходження невідомих за двома різницями.

На ступені підготовчої роботи пропонуємо учням задачу на знаходження четвертого пропорційного, і після розв'язання перетворюємо цю задачу в задачу на пропорційне ділення, розв'язуємо отриману задачу та порівнюємо умови і розв'язки цих двох задач; робимо узагальнення:

Якщо в задачі є однакова для обох випадків величина, то для відповіді на запитання задачі треба знати значення однакової величини. Однакову величину знаходять по-різному:
а) за відомими значеннями двох величин, стосовно іншого випадку;
б) за значеннями сум двох інших величин, для обох випадків разом.

Зазначимо, що цей висновок буде нами застосований і при ознайомленні з задачами на знаходження невідомого за двома різницями, але в цьому випадку значення однакової величини ми будемо шукати іншим шляхом — за двома різницями.

Мета підготовчої роботи полягає в розв'язуванні спеціальних вправ, за допомогою яких усвідомлюється значення другої різниці. В даній системі задачі поступово ускладнюються: спочатку учням пропонується знайти значення однакової величини за двома даними різницями двох величин, у наступних завданнях значення другої різниці слід знайти. Наприклад:

1. Для дитячого садка купили по однаковій ціні іграшки: ляльки та машини. Ляльок купили на 3 більше, ніж машинок, і заплатили за них на 15 грн більше. Яка ціна ляльки та машини?
2. В перший день купили 5 коробок кольорових олівців. А другого дня 7 таких самих коробок кольорових олівців, і заплатили на 4 гривні більше. Скільки коштує одна коробка кольорових олівців?

З метою формування у дітей уміння знаходити значення однакової величини за двома різницями значень величин, стосовно двох випадків, слід пропонувати учням певну кількість задач розглянутого виду. Розв'язуючи такі задачі, треба поступово відлучатися від наочної ілюстрації різниць і добиватися того, щоб учні автоматично знаходили співвідношення різниць двох величин і визначали, що за ними можна знайти значення однакової величини. Розв'язки цих задач можна узагальнити, зробивши висновок: *«Однакову величину можна знайти за значеннями різниць інших величин, стосовно двох випадків».*

Під час розв'язування аналогічних задач у дітей повинно скластися таке уявлення: якщо в задачі не дано обидві різниці — одну з них слід визначити, і лише потім знайти значення однакової величини. Уміння визначати другу різницю, а потім за двома різницями знаходити однакову величину є складовою частиною уміння розв'язувати задачі на знаходження невідомого за двома різницями. Тому воно повинно бути засвоєним, як самостійна дія, засобом певної кількості вправ і узагальнення способу розв'язування.

Таким чином, *однакову величину знаходять по-різному:*
а) за відомими значеннями двох величин, стосовно іншого випадку;
б) за значеннями сум двох інших величин, для обох випадків разом (за двома сумами);
в) за значеннями різниць двох інших величин, стосовно двох випадків (за двома різницями).

2. Розв'язування задачі № 1 на пропорційне ділення (однаковою величиною є величина однієї одиниці; в задачі вимагається знайти загальну величину для кожного з випадків)

Діти «впізнають задачу» і згадують, а потім і застосовують узагальнений план розв'язування задач цього виду.

Задача № 1. У кіоску продали по однаковій ціні 12 синіх та 8 чорних ручок. За всі ручки одержали 16 грн. Скільки грошей одержали за кожний вид ручок?

3. Ознайомлення з задачами на знаходження невідомих за двома різницями. Перетворення задачі на пропорційне ділення № 1 у задачу на знаходження невідомих за двома різницями № 2. Однаковою є величина однієї одиниці

Перед розв'язанням задачі № 1 школярі роблять прикидку очікуваних результатів, а після її розв'язання вчитель пропонує дізнатися, на скільки більше чи менше одне значення шуканої — загальної величини за інше, тобто величину їх різницевого відношення. Знайдене число включається у наступну задачу. Отже, сума загальних величин замінюється їх різницею. Таким чином, отримуємо задачу на знаходження невідомих за двома різницями. Усі зміни спочатку виконуються на короткому записі, а потім складається задача.

Задача № 2. У кіоску продали по однаковій ціні 12 синіх та 8 чорних ручок. За сині ручки заплатили на 3 грн 20 к. більше, ніж за чорні. Скільки грошей одержали за кожний вид ручок?

Перед розв'язанням задачі учні порівнюють задачу нового виду з задачею на пропорційне ділення: ці задачі схожі тим, що обидві містять три пропорційні величини; до однієї з них дано два числових значення, а обидва значення іншої величини є шуканими; величина однієї одиниці є однаковою для обох випадків; відрізняються ці задачі тим, що в задачі на пропорційне ділення було дано значення суми загальних величин, а в цій — значення різниці.

Отже, в обох задачах є однакова для двох випадків величина. Для розв'язання задач, які містять однакову величину, «ключем» є знаходження її значення. Учні згадують відомі способи знаходження однакової величини:

1) за числовими значеннями двох величин стосовно одного з випадків;
2) за двома сумарними значеннями двох величин;
3) за двома різницями.

Діти встановлюють, чи можна в цій задачі застосувати один з цих способів. Застосовуємо третій спосіб знаходження однакової величини, тому що нам не дано значення двох величин стосовно одного з випадків або нам не дано сумарного значення однієї з величин, але нам дано різницю числових значень однієї величини у двох випадках. Отже, однакову величину знайдемо за

двома різницями. Таким чином, зміна умови задачі викликала застосування іншого способу знаходження однакової величини — за двома різницями.

Далі здійснюється повний аналіз, формулюється план розв'язування і записується розв'язання та відповідь задачі. Перевіркою розв'язання задачі є знаходження різниці знайдених чисел і порівняння отриманого значення з даним в умові задачі.

Після розв'язання задачі на знаходження невідомих за двома різницями порівнюємо дану задачу з задачею на пропорційне ділення з метою дослідження впливу зміни умови задачі на її розв'язання. Задачу на знаходження невідомих за двома різницями ми отримали шляхом перетворення задачі на пропорційне ділення, яка має наступні істотні ознаки:

1) Три пропорційні величини.
2) Два випадки.
3) Одна з величин є однаковою для обох випадків.
4) Для однієї величини дано два числові значення.
5) Для другої величини обидва значення є шуканими, але дано їх суму.

В задачі на пропорційне ділення ми виконали наступні зміни: ми змінили суму значень загальної величини на різницю.

Таким чином, істотні ознаки задач на знаходження невідомих за двома різницями наступні:

1) Три пропорційні величини.
2) Два випадки.
3) Одна з величин є однаковою для обох випадків.
4) Стосовно однієї величини дано два числових значення для обох випадків.
5) Стосовно іншої величини два числових значення є шуканими, але дано їх різницю.

Задачу на пропорційне ділення розв'язували за планом:

1) знаходили суму значень кількості або часу;
2) знаходили значення однакової величини — величини однієї одиниці за двома сумами;
3) відповідали на перше запитання задачі, знаходили значення загальної величини у першому випадку;
4) відповідали на друге запитання задачі, знаходили значення загальної величини у другому випадку.

З'ясовуємо, як зміна умови вплинула на розв'язання задачі. При розв'язанні задач на знаходження невідомих за двома різницями ми не можемо однакову величину знаходити за двома сумами, тому що нам не дано суму, але дано різницю, тому однакову величину ми знаходимо за двома різницями. Таким чином, зміна умови задачі вплинула на спосіб знаходження однакової величини. Тому задачу на знаходження невідомих за двома різницями ми розв'язували за планом:

1) знаходили різницю даних числових значень іншої величини — кількості або часу;
2) знаходили однакову величину (величину однієї одиниці) за двома різницями;
3) відповідали на перше запитання задачі;
4) відповідали на друге запитання задачі.

Порівнюючи розв'язання задач, діти встановлюють, що в обох задачах однакові дві останні дії, тому що в обох задачах одні й ті ж запитання та одна та сама однакова величина, яка потрібна для відповіді на обидва запитання задачі. Розв'язки відрізняються першими двома діями, тому що однакову величину знаходили по-різному: в першій задачі — за двома сумами, а в другій задачі — за двома різницями. Тому остання задача називається задачею на знаходження невідомих за двома різницями.

Узагальнюємо математичні структури задач на знаходження невідомих за двома різницями та задач на пропорційне ділення (рис. 5.23).

4. Зміна величин у задачі № 2 і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

Змінивши величини задачі, ми отримуємо також задачу на знаходження невідомих за двома різницями, яка містить ті самі числові дані. Тому ця зміна впливає на розв'язання задачі лише у сенсі зміни пояснень до арифметичних дій.

5. Зміна числових даних задачі № 2 і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

Зміна числових даних задачі не впливає на математичну структуру задачі. Отримана задача має усі перелічені істотні ознаки — це задача на знаходження невідомих за двома різницями. Розв'язання дещо змінюється: в ньому приймають участь інші числа, але арифметичні дії та їх порядок, пояснення до них не змінюються. Отже, зміна числових даних задачі не впливає на план розв'язування задачі.

Порівнявши дану задачу з попередніми задачами на знаходження невідомих за двома різницями, учні встановлюють, що вони відрізняються групою величин та числовими даними, але кожна з них містить: три величини, одна з яких є однаковою для обох випадків; стосовно однієї з величин дано числові значення

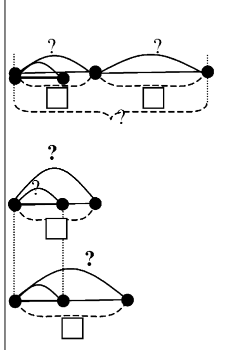
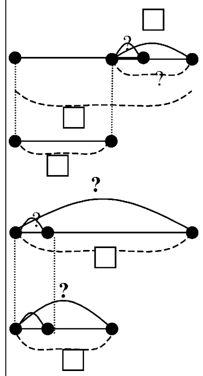
<table>
<tr>
<td>Задачі на пропорційне ділення
<table>
<tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість / час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>?</td><td></td><td>□</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>□ Однак.</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td>?</td><td></td><td>□</td></tr>
</table>
</td>
<td>Задачі на знаходження невідомих за двома різницями
<table>
<tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість / час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>?</td><td></td><td>□</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Однак.</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td>?, на б...... □</td><td></td><td>□</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Спосіб знаходження однакової величини</td>
<td>Спосіб знаходження однакової величини</td>
</tr>
<tr>
<td>1) Суму даних числових значень однієї з величин – кількості або часу.</td>
<td>1) Різницю даних числових значень однієї з величин – кількості або часу.</td>
</tr>
<tr>
<td>2) Значення однакової величини – величини однієї одиниці за сумарними значеннями двох величин.</td>
<td>2) Значення однакової величини – величини однієї одиниці за двома різницями.</td>
</tr>
<tr>
<td>3) Шукане значення загальної величини, відповідаємо на перше запитання задачі.</td>
<td>3) Шукане значення загальної величини, відповідаємо на перше запитання задачі.</td>
</tr>
<tr>
<td>4) Шукане значення загальної величини, відповідаємо на друге запитання задачі.</td>
<td>4) Шукане значення загальної величини, відповідаємо на друге запитання задачі.</td>
</tr>
</table>

Рис. 5.23. Опорні схеми та плани розв'язування задач на пропорційне ділення та на знаходження невідомих за двома різницями, в яких шуканим є значення загальної величини (однаковою є величина однієї одиниці)

для кожного випадку, а стосовно іншої — числові значення для кожного випадку є шуканими, але дано їх різницю. Таким чином, мають місце усі істотні ознаки, які було визначено при співставленні задачі на знаходження невідомих за двома різницями і задачі на пропорційне ділення.

Нами встановлено, що зміна групи пропорційних величин та зміна числових даних не вплинула на план розв'язування задачі. Учні формулюють узагальнений план розв'язування задач на знаходження невідомих за двома різницями.

6. Зміна характеру трактування даної різниці і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

З метою узагальнення математичної структури задачі та способу її розв'язування учням пропонується пояснити, що означає значення даної різниці двома способами. Далі досліджуємо, як зміниться розв'язання задачі, якщо характер трактування даної різниці «на... більше» зміниться і стане «на... менше» або навпаки. Учні роблять висновок, що від цієї зміни розв'язання не зміниться, треба дещо поправити пояснення до першої дії.

Проведена робота надає можливість узагальнити математичну структуру, істотні ознаки задач на знаходження невідомих за двома різницями та спосіб їх розв'язування. Отже висновки, що були зроблені при порівнянні задач на пропорційне ділення та на знаходження невідомих за двома різницями, набули підтвердження. Визначені ознаки задачі на знаходження невідомих за двома різницями не змінилися ні від зміни величин задачі, ні від зміни числових даних задачі, а також ні від зміни характеру трактування даної різниці; не змінився й план розв'язування.

7. Перетворення задачі у задачу другого підвиду. Задача № 3. Однаковою є величина однієї одиниці

Діти навчилися перетворювати задачу одного підвиду у задачу другого підвиду на матеріалі задач на пропорційне ділення: треба замінити шукані числа їх числовими значеннями, а відомі числа замінити знаками запитання, але слід дати про них додаткову відомість — їх суму. В задачі на знаходження невідомих за двома різницями додаткова відомість не сума, а різниця. У задачі на знаходження обох значень загальної величини замінюємо шукані їх числовими значеннями, а значення кількості або часу стають, навпаки, шуканими, але включаємо у задачу їх різницю. Усі зміни виконуються у короткому записі задачі, після чого учні складають задачу другого підвиду.

Задача № 3. У кіоску продали по однаковій ціні сині та чорні ручки. За сині ручки одержали 9 грн 60 к., а за чорні 6 грн 40 к. Скільки продали ручок кожного виду, якщо синіх продали на 4 більше, ніж чорних?

Далі аналізується математична структура задачі: ця задача, також має два випадки; три пропорційні величини, одна з яких є однаковою для обох випадків; стосовно однієї величини дані два числових значення, а для іншої — значення різниці, а числові значення окремо для першого і для другого випадку є шуканими. Задача також має два запитання. Це задача того ж самого виду — на знаходження невідомих за двома різницями.

Згадуємо, за яким планом розв'язуються задачі на знаходження невідомих за двома різницями, і дещо його змінюємо. Після розв'язання задачі порівнюємо розв'язання обох задач: спільні дві перші дії — перша дія віднімання, а друга дія ділення; відрізняються двома останніми діями — в попередній задачі останні дві дії множення, а в цій задачі дві останні дії ділення. Вчитель ще раз підкреслює: щоб відрізняти задачі на знаходження невідомих за двома різницями, домовилися вважати задачі, в яких дві останні дії множення, задачами I підвиду, а задачі, в яких дві останні дії ділення, — задачами II підвиду.

Можна порівняти усі види задач на знаходження четвертого пропорційного, задачі на пропорційне ділення та задачі на знаходження невідомих за двома різницями. В цих задачах спільним є два випадки, три пропорційні величини, і одна величина є однаковою для обох випадків; стосовно однієї з величин надано два числових значення. В задачах на знаходження четвертого пропорційного щодо другої величини дано одне числове значення, а інше є шуканим; а в задачах на пропорційне ділення/знаходження невідомих за двома різницями — для другої величини дано лише значення суми/різниці, а обидва значення цієї величини для кожного з випадків є шуканими. В задачах на знаходження четвертого пропорційного одне шукане, а в задачах на пропорційне ділення/знаходження невідомих за двома різницями — два. Результати цього узагальнення подані на рисунку 5.24.

Спільні істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, задач на пропорційне ділення та задач на знаходження невідомих за двома різницями:

1) Три величини.
2) Два випадки.
3) Одна з величин є однаковою для обох випадків.
4) Для однієї величини дано два числових значення.

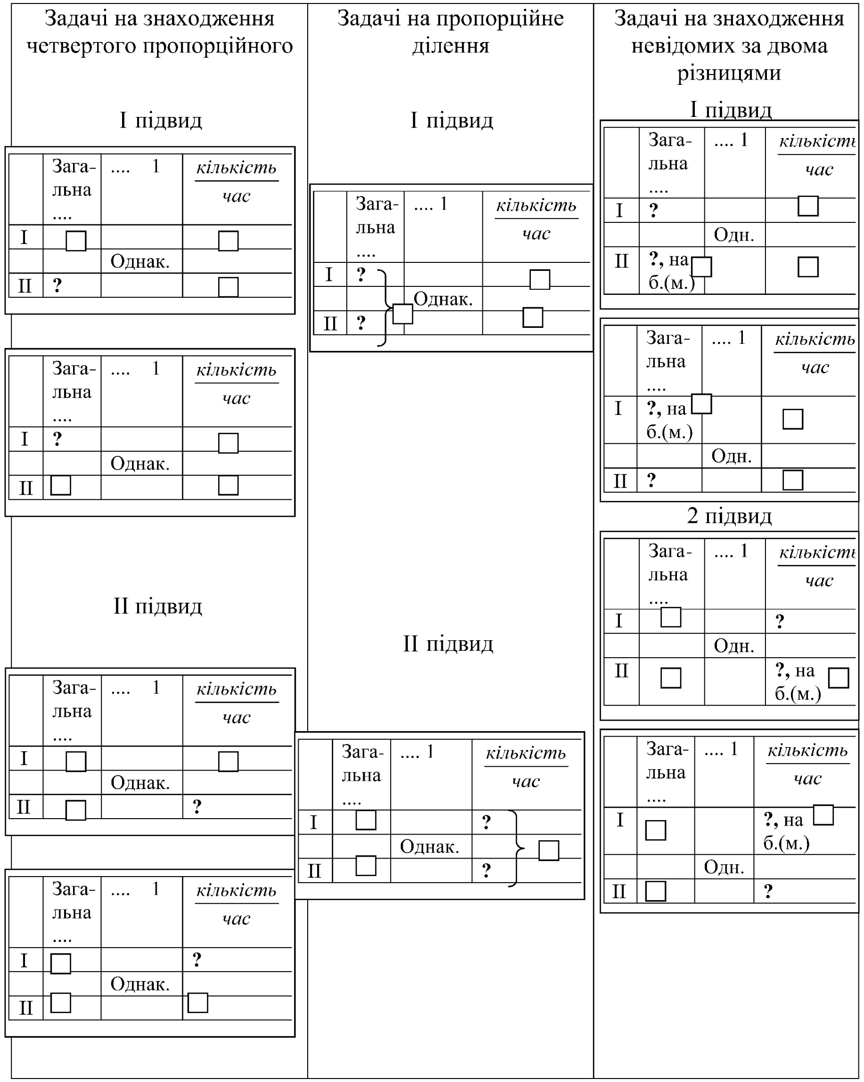


Рис. 5.24. Опорні схеми задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина однієї одиниці

Відмінні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, задач на пропорційне ділення та задач на знаходження невідомих за двома різницями:

Для іншої величини дано одне числове значення, а друге є шуканим	Для іншої величини обидва числові значення є шуканими, але дано їх	
	суму	різницю

8. Зміна величин у задачі № 3 і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

Робимо аналогічні висновки, що й при зміні величин у задачі № 2.

9. Зміна числових даних задачі № 3 і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

Робимо аналогічні висновки, що й при зміні числових даних у задачі № 2.

Порівнюємо цю задачу з попередніми. Вони відрізняються групами величин та числовими даними та даними різницями: в задачах першого підвиду дано значення різниці загальної величини, а самі ці значення є шуканими; в задачах другого підвиду дано різницю кількості або часу, і вони є шуканими. Спільним є те, що кожна задача містить по два випадки, три величини, одна з яких є однаковою для обох випадків; стосовно однієї з величин дано числові значення для кожного випадку, а стосовно іншої — числові значення для кожного випадку є шуканими, але дано їх різницю. Це задачі на знаходження невідомих за двома різницями. Задачі на знаходження невідомих за двома різницями містять однакову величину, тому «ключем» до їх розв'язання є знаходження значення однакової величини. Узагальнимо план розв'язування задач на знаходження невідомих за двома різницями 1-го та 2-го підвиду (рис. 5.25).

Істотні ознаки задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина однієї одиниці:

1) три пропорційні величини;
2) два випадки;
3) значення величини однієї одиниці є однаковою для обох випадків;
4) для однієї величини дано два числових значення для кожного випадку;
5) числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано значення їх різницевого відношення.

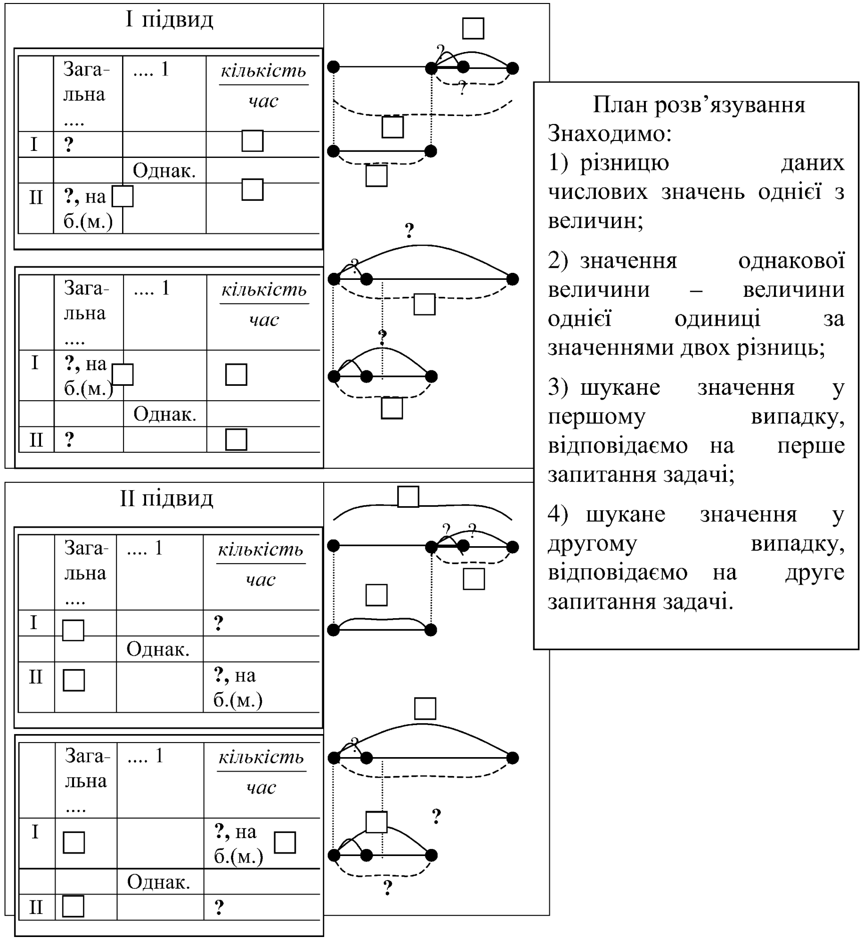


Рис. 5.25. Опорні схеми та план розв'язання двох підвидів задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких шуканим є значення кількості або часу (однаковою є величина однієї одиниці)

10. Зміна однакової величини. Задача № 4. Однаковою величиною стає кількість. Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

Діти розв'язують задачу на знаходження невідомих за двома різницями, в якій однаковою є величина однієї одиниці:

Для вікторини купили заохочувальні призи: набори фломастерів та олівців по однаковій ціні. За олівці заплатили 60 грн, а за фломастери 84 грн. Скільки купили наборів олівців та фломастерів окремо, якщо наборів фломастерів купили на 2 більше?

В цій задачі на знаходження невідомих за двома різницями змінюється однакова величина — однаковою величиною стає кількість. Таким чином складається наступна задача:

Задача № 4. Купили однакову кількість наборів фломастерів та олівців. За олівці заплатили 60 грн, а за фломастери 84 грн. Яка ціна набору олівців і набору фломастерів окремо, якщо ціна фломастерів на 2 грн більше?

Діти порівнюють її з попередніми і встановлюють, що вона має ті самі істотні ознаки, що й задачі на знаходження невідомих за двома різницями, але в ній інша однакова величина — кількість або час. Тому застосовуємо узагальнений спосіб розв'язування задач на знаходження невідомих за двома різницями.

З'ясовуємо, як ця зміна вплинула на розв'язання задачі. В попередній задачі однаковою величиною була величина однієї одиниці, тому її знаходили дією ділення на рівні частини значень різницевого відношення двох інших величин. В цій задачі однакова величина — кількість або час, її теж знаходять дією ділення, але це інший вид ділення — ділення на вміщення. Тому в цій задачі першою дією також знайдемо різницю двох числових даних однієї величини; другою дією дізнаємося про значення однакової величини (кількості або часу) — за двома значеннями різниць двох інших величин, арифметичною дією ділення; а третьою та четвертою діями відповімо на перше та друге запитання задачі, дізнаємося про значення величини однієї одиниці в кожному випадку, арифметичною дією ділення.

11. Зміна величин у задачі № 4 і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

Робимо аналогічні висновки, що й при зміні величин у задачах № 2 та № 3.

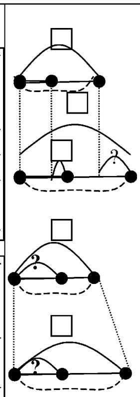
12. Зміна числових даних задачі № 4 і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

Робимо аналогічні висновки, що й при зміні величин у задачах № 2 та № 3.

Зміна величин та зміна числових даних задачі не вплинула на математичну структуру таких задач та план їх розв'язування, тому робимо узагальнення (рис. 5.26).

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	?	
			Однак.
II	□	?, на □ б.(м.)	

	Загальна	 1	*кількість* / *час*
I	□	?, на □ б.(м.)	
			Однак.
II	□	?	



План розв'язування

1) Різницю даних числових значень однієї з величин – загальної величини.

2) Значення однакової величини – кількості або часу за значеннями різниць двох величин.

3) Шукане значення величини однієї одиниці у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі.

4) Шукане значення величини однієї одиниці у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі.

Рис. 5.26. Опорні схеми та план розв'язування задач на знаходження невідомих за двома різницями на знаходження значень величини однієї одиниці, в яких однаковим є значення кількості або часу

Порівнюємо ці задачі з іншими задачами на знаходження невідомих за двома різницями. Визначаємо їх істотні ознаки та формулюємо узагальнений план розв'язування.

13. Зміна шуканих задачі. Шуканими стають значення загальної величини. Складається і розв'язується задача на знаходження невідомих за двома різницями № 5. Однаковою є величина кількості або часу

Учні розв'язують задачу на знаходження невідомих за двома різницями, в якій однаковою є величина кількості або часу та шуканими є обидва значення величини однієї одиниці:

Для шкільного свята купили кілька кілограмів бананів і стільки ж кілограмів яблук. Ціна бананів на 2 грн більше, ніж ціна яблук. Яка ціна бананів та яблук окремо, якщо за яблука заплатили 14 грн, а за банани 28 грн?

Знайдені при розв'язанні цієї задачі числові значення величини однієї одиниці вважаються за дані, а дані числові значення загальної величини стають шуканими, але задається їх різниця.

Виконавши зміни у короткому записі попередньої задачі, учні складають задачу на знаходження обох значень загальної величини при сталій кількості або часі.

Задача № 5. Для шкільного свята купили кілька кілограмів бананів і стільки ж кілограмів яблук. Ціна бананів 4 грн, ціна яблук 2 грн, за банани заплатили на 14 грн більше, ніж за яблука. Скільки заплатили за яблука і скільки заплатили за банани?

Порівнюємо цю задачу з попередніми і дістаємо висновку, що це задача на знаходження невідомих за двома різницями. Тому застосовуємо узагальнений план розв'язування, дещо уточнивши його. Досліджуємо, як ця зміна вплинула на розв'язання задачі: змінилася перша дія, тому що ми шукали значення іншої різниці, не змінилася друга дія, якою ми знаходили значення однакової величини; змінилися дві останні дії, тому що шуканими є значення загальної величини. Але в цілому план розв'язування не змінився.

14. Зміна величин у задачі № 5 і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

15. Зміна числових даних задачі № 5 і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

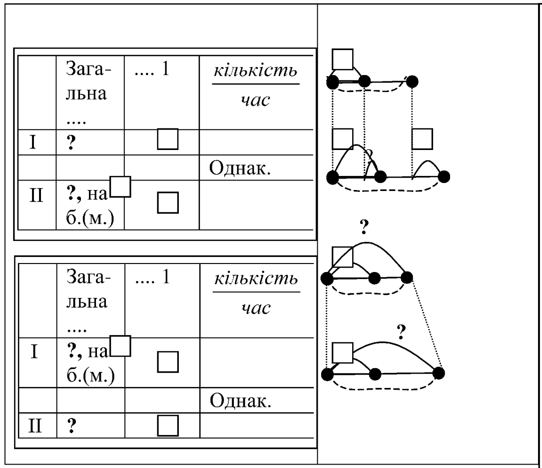
Ані зміна групи величин задачі, ані зміна числових даних задачі не вплинула на математичну структуру цієї задачі і на її план розв'язування. Отже узагальнюємо математичну структуру і план розв'язування задач на знаходження загальної величини при сталій кількості або часі (рис. 5.27).

Порівнюємо задачі № 4 та № 5. В цих задачах однаковою величиною є кількість або час, але в задачі № 4 шуканими були значення величини однієї одиниці, а в задачі № 5 — значення загальної величини. З'ясовуємо, як в залежності від цього змінюється план розв'язування задачі: першою дією ми знаходимо різницю двох числових даних, але це різні різниці; другою дією знаходимо значення однакової величини, а третьою та четвертою діями відповідаємо на запитання задачі, але це різні запитання (рис. 5.28).

Істотні ознаки задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина кількості або часу:

1) три пропорційні величини;
2) два випадки;
3) значення величини кількості або часу є однаковим для обох випадків;
4) для однієї величини дано два числових значення для кожного випадку;

5) числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано значення їх різниці.



План розв’язування

1) Різницю даних числових значень однієї з величин – величини однієї одиниці.

2) Значення однакової величини – кількості або часу за значеннями різницевих відношень двох величин.

3) Шукане значення загальної величини у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі.

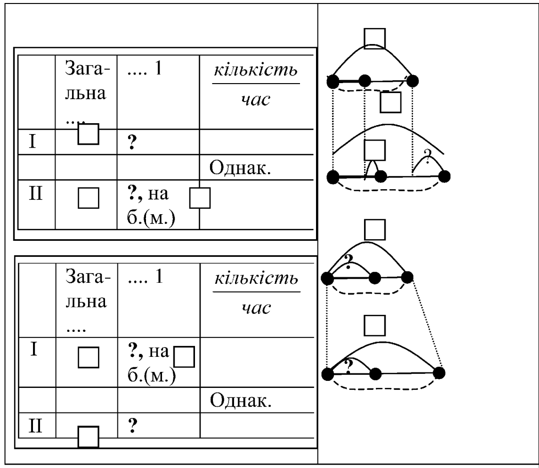
4) Шукане значення загальної величини у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі.

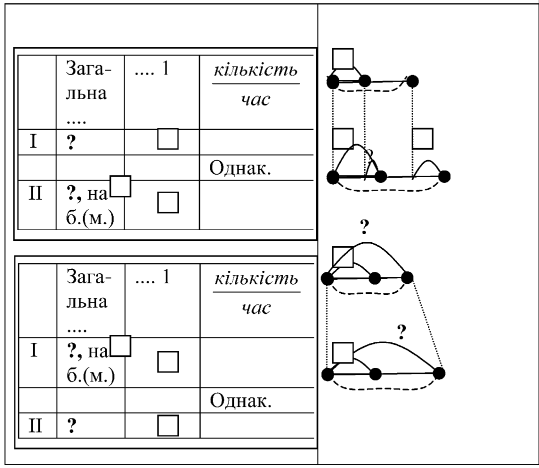
Рис. 5.27. Опорна схема та план розв’язування задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких шуканими є значення загальної величини (однаковою величиною є кількість або час)

Вчитель пропонує учням порівняти задачі, в яких однаковою величиною була кількість або час, з задачами, в яких однаковою величиною є величина однієї одиниці, та узагальнити їх істотні ознаки та план розв’язування (рис. 5.29).

Істотні ознаки задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина однієї одиниці чи кількості або часу:

1) три пропорційні величини;
2) два випадки;
3) одна з величин є однаковою для обох випадків;
4) для однієї величини дано два числових значення для кожного випадку;
5) числові значення іншої величини для обох випадків є шуканими, але дано значення їх різниці.





План розв’язування

1) Різницю даних числових значень однієї з величин.

2) Значення однакової величини – кількості або часу за значеннями двох різниць.

3) Шукане значення у першому випадку, відповідаємо на перше запитання задачі.

4) Шукане значення у другому випадку, відповідаємо на друге запитання задачі.

Рис. 5.28. Опорні схеми та план розв’язування задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина кількості або часу

16. Зміна однакової величини. Однаковою величиною стає загальна величина. Задача № 6. Дослідження впливу цієї зміни на розв’язання задачі

Учні розв’язують задачу на знаходження значень загальної величини, в якій однаковою є величина однієї одиниці.

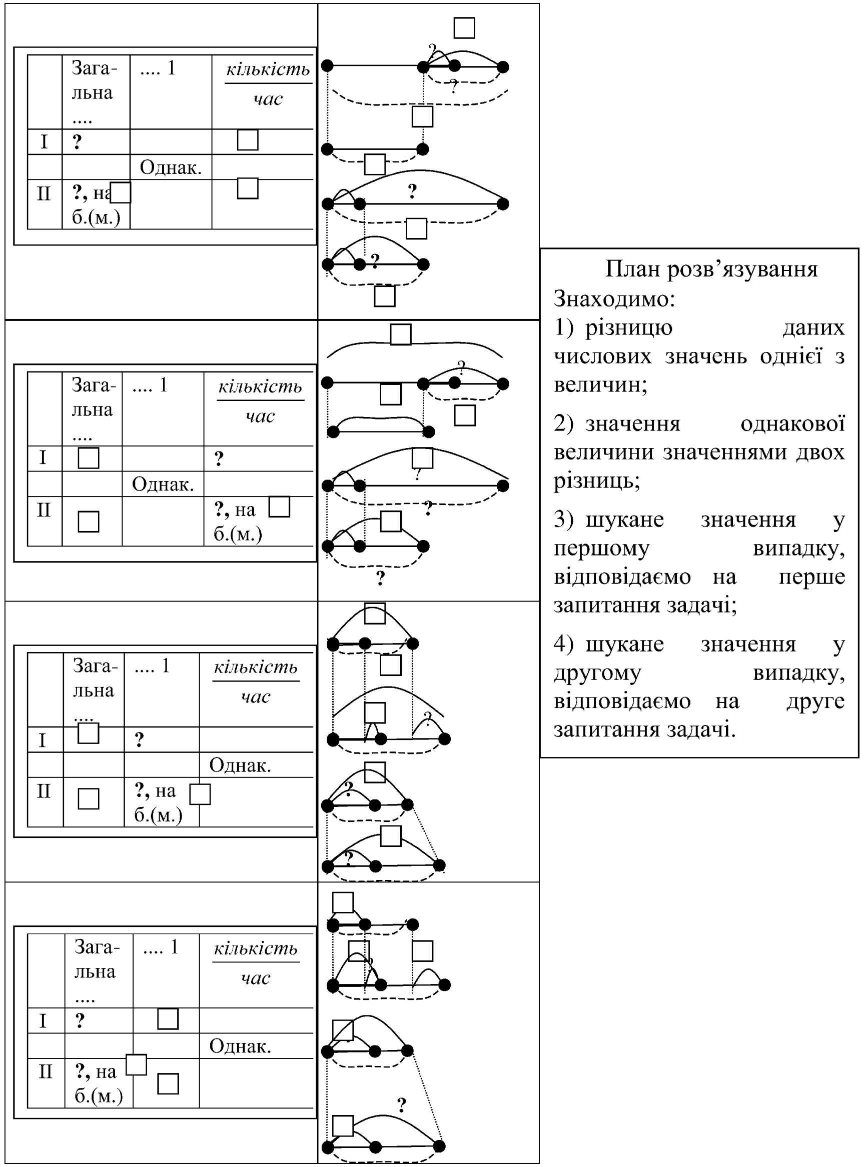


Рис. 5.29. Опорні схеми та план розв'язування задач на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є величина однієї одиниці чи кількості або часу

Купили 5 чайних сервізів та 3 сервізи для кави по однаковій ціні. За чайні сервізи заплатили на 192 грн більше, ніж за сервізи для кави. Скільки заплатили за чайні сервізи та сервізи для кави окремо?

Змінивши у цій задачі однакову величину — величину однієї одиниці на загальну величину, отримуємо задачу на знаходження обох значень величини однієї одиниці, яку розв'язати способом знаходження однакової величини не можна.

Задача № 6. П'ять чайних сервізів коштують стільки ж, скільки три сервізи для кави. Яка ціна чайного сервізу та сервізу для кави окремоє якщо ціна чайного сервізу на 22 грн менше, ніж сервізу для кави?

Таким чином, експериментуючи з задачею, ми сконструювали таку задачу на знаходження невідомих за двома різницями, яку арифметичним методом розв'язати не можна, вона розв'язується за допомогою дрібно-раціонального рівняння, і це можна бути здійснити лише в курсі алгебри 7-го класу. Отже, подальше експериментування з такою структурою задачі ми припиняємо, тому що діти не мають знань для її розв'язання.

І, нарешті, можна запропонувати учням зіставити узагальнені математичні структури задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення і на знаходження невідомих за двома різницями з метою узагальнення істотних ознак цих видів задач та способу їх розв'язування (рис. 5.30).

Істотні ознаки задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення та на знаходження невідомих за двома різницями:

1) три пропорційні величини;
2) два випадки;
3) одна з величин є однаковою для обох випадків;
4) для однієї з величин дано два числових значення для обох випадків;
5) для другої величини дано лише одне числове значення, а інше є шуканим/обидва числові значення є шуканими, але дано їх суму або різницю.

Також можна *узагальнити розв'язання задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення та на знаходження невідомих за двома різницями способом знаходження однакової величини*:

— знайти однакову величину за двома числовими значеннями стосовно одного з випадків/за двома сумами або різницями;
— відповісти на запитання задачі.

<table>
<tr>
<td>Задачі на знаходження четвертого пропорційного
<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>I</td><td>а</td><td></td><td>в</td></tr><tr><td></td><td></td><td>Однак.</td><td></td></tr><tr><td>II</td><td>с</td><td></td><td>?</td></tr></table></td>
<td>Задачі на пропорційне ділення
<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>I</td><td>а</td><td></td><td>?</td><td rowspan="3">к</td></tr><tr><td></td><td></td><td>Однак.</td><td></td></tr><tr><td>II</td><td>с</td><td></td><td>?</td></tr></table></td>
<td>Задачі на знаходження невідомих за двома різницями
<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>I</td><td>а</td><td></td><td>?</td></tr><tr><td></td><td></td><td>Однак.</td><td></td></tr><tr><td>II</td><td>с</td><td></td><td>?, на к б.(м.)</td></tr></table></td>
</tr>
<tr>
<td>План розв'язування
Спосіб знаходження однакової величини
1) Значення однакової величини за двома числовими значеннями одного з випадків.
2) Шукане значення, відповідаємо на запитання задачі.</td>
<td>План розв'язування
Спосіб знаходження однакової величини
1) Суму даних числових значень однієї з величин.
2) Значення однакової величини за сумарними значеннями двох величин.
3) Шукане значення, відповідаємо на перше запитання задачі.
4) Шукане значення, відповідаємо на друге запитання задачі.</td>
<td>План розв'язування
Спосіб знаходження однакової величини
1) Різницю даних числових значень однієї з величин.
2) Значення однакової величини за двома різницями.
3) Шукане значення, відповідаємо на перше запитання задачі.
4) Шукане значення, відповідаємо на друге запитання задачі.</td>
</tr>
</table>

Рис. 5.30. Опорні схеми та плани розв'язування задач, що містять однакову величину

17. Закріплення уміння розв'язувати задачі на знаходження невідомих за двома різницями

Учні аналізують математичну структуру задачі, «впізнають» її, згадують узагальнений план їх розв'язування і застосовують його. Значну увагу на цьому етапі слід приділити перетворенню задачі одного підвиду у задачу другого підвиду, перетворенню задачі на знаходження невідомих за двома різницями у задачу на пропорційне ділення або у задачу на знаходження четвертого пропорційного. На даному етапі пропонуємо учням задачі на знаходження невідомих за двома різницями, в яких однаковою є кількість або час.

Практична реалізація загальної методики здійснюється на основі системи завдань із дослідження математичної структури задач на знаходження невідомих за двома різницями і на узагальнення способів їх розв'язування, і подана у публікаціях автора [488; 489]. Розроблена методика також запропонована у роботі автора [502].

5.1.4. Задачі на подвійне зведення до одиниці

3-й клас

1. Підготовча робота до введення задач на подвійне зведення до одиниці

Задачі на знаходження четвертого пропорційного містять три пропорційні величини, одна з яких є однаковою для обох випадків. Нагадаємо, що одним із способів розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного є спосіб зведення до одиниці — спосіб знаходження однакової величини. До ускладнених задач на знаходження четвертого пропорційного, в яких однаковою є величина однієї одиниці, відносяться задачі на подвійне зведення до одиниці. Спільним в цих задачах є наявність однакової величини, але в задачах на знаходження четвертого пропорційного — це величина однієї одиниці виміру або лічби, а в задачах на подвійне зведення до одиниці — «подвійна одиниця».

Тому на етапі підготовчої роботи розв'язуються задачі на знаходження четвертого пропорційного, які записують коротко у вигляді пропорції. Перевіркою правильності розв'язання є складання і розв'язання обернених задач.

Також на етапі підготовчої роботи учні розв'язують прості задачі з пропорційними величинами на знаходження величини однієї одиниці, які містять зайве значення величини, яке не входить до групи трьох пропорційних величин і є сталим, і тому не впливає на розв'язання задачі. При розв'язанні цих задачі звертаємо увагу учнів саме на цю особливість і записуємо такі задачі коротко у вигляді пропорції двома способами — без зазначення зайвого числа та із його записом. Учні з'ясовують, що ця зміна не впливає на розв'язання задачі. Такі задачі є підготовчими до введення задач на подвійне зведення до одиниці.

2. Ознайомлення з задачами на подвійне зведення до одиниці (1 підвид)

Задачі нового виду вводяться на основі розв'язання двох послідовних простих задач на знаходження величини однієї одиниці, які містять зайве числове значення, що є сталим і для характеристики даних числових значень, і для характеристики шуканого числа. Наприклад, ці задачі містять величини: кількість овець, час, загальна маса сіна та величину, яка поєднує ці величини, — величину однієї одиниці — масу сіна на 1 день для усіх овець або масу сіна для однієї вівці на весь час. В першій задачі зайвим значенням (сталим) є кількість овець, а в другій — час. Наприклад:

а) На 3 дня 6 вівцям дають 36 кг сіна. Скільки сіна дають на 1 день 6 вівцям?

б) Шести вівцям на 1 день дають 12 кг сіна. Скільки сіна дають 1 вівці на 1 день?

Ці дві задачі поєднуються у складену задачу, яка містить чотири величини: кількість овець, час, загальна маса сіна та величину, яка поєднує ці величини, — величину подвійної одиниці — масу сіна на 1 день для 1 вівці.

Задача 1. На 3 дні 6 вівцям дають 36 кг сіна. Скільки сіна дають 1 вівці на день?

Учні порівнюють цю задачу з першою, встановлюють, що спільною в цих задачах є умова, але вони мають різні запитання. Порівнюючи цю задачу з другою, учні дістають висновку, що спільними в них є запитання, але різні умови. Діти помічають, що ця задача складається з двох попередніх простих задач. Це спостереження полегшує наступний аналітичний пошук розв'язування задачі. Після розв'язання ще раз пояснюємо, що ми знайшли першою дією, і показуємо це стрілочкою у короткому записі. При розв'язанні задач цього виду система стрілочок та дужок грає роль опорних смислових пунктів для запам'ятовування способу розв'язування, наприклад (рис. 5.31):

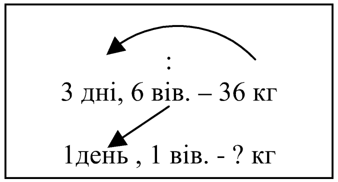


Рис. 5.31. Короткий запис задачі на подвійне зведення до одиниці з системою стрілочок, що вказують на спосіб розв'язування (1 спосіб)

Ця стрілочка означає, що першою дією дізналися про масу сіна для 6 овець на 1 день; дужка означає, що про це ми дізнаємося, якщо 36 поділимо на 3. При розв'язанні також застосовуємо стрілочку, яка «наштовхує» на другу дію:

:

1) 36 : 3 = 12 (кг) на 1 день 6 вівцям.

2) 12 : 6 = 2 (кг) на 1 день 1 вівці.

Ця стрілочка означає, що треба 12 поділити на 6, і тоді ми дізнаємося про величину «подвійної одиниці».

Задачі на подвійне зведення до одиниці передбачають два способи розв'язування. Засобом системи стрілочок і дужок можна показати інший спосіб розв'язування (рис. 5.32):

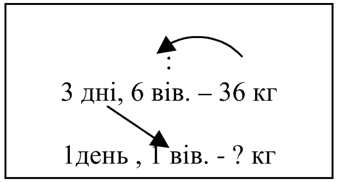


Рис. 5.32. Короткий запис задачі на подвійне зведення до одиниці з системою стрілочок, що вказують на спосіб розв'язування (2 спосіб)

Таким чином, першою дією дізнаємося про масу сіна для 1 вівці на 3 дні, розділивши 36 на 6.

Порівнюємо два способи розв'язування. Відмінним є те, що першою дією в першому способі ми дізналися про масу сіна на 1 день для 6 овець, а в другому — про масу сіна на 3 дні для 1 вівці. Спільним є те, що другою дією відповіли на запитання задачі — знайшли масу сіна для 1 вівці на 1 день (рис. 5.33).

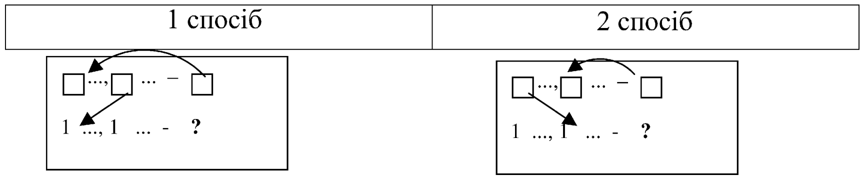


Рис. 5.33. Опорна схема задачі на подвійне зведення до одиниці з системою стрілочок, що вказують на способи розв'язування

Узагальнюємо перший та другий способи розв'язування:

В першій дії ми знайшли величину однієї одиниці (чи на **1 день** для 6 овець; чи на 3 дні для **1 вівці**).

В другій дії ми також знайшли величину однієї одиниці — на 1 день для 1 вівці. Таким чином, в цій задачі ми двічі наводили до одиниці.

3. Зміна величин у задачі і дослідження впливу цієї зміни на план її розв'язування

Учні змінюють ситуацію задачі. Припустимо, йдеться про витрату пального кількома тракторами. Учні складають задачу і дістають висновку, що у її розв'язанні немає необхідності, треба змінити лише пояснення. Отже, зміна величин задачі не впливає ні на перший, ні на другий способи розв'язування.

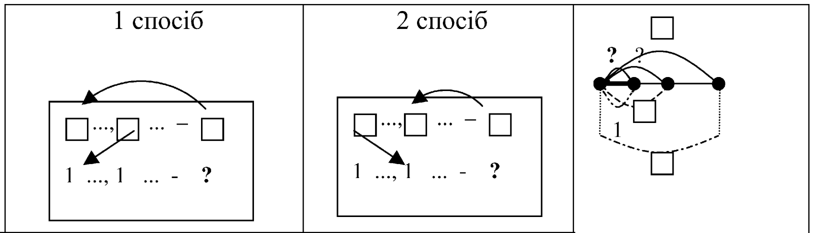
В першій дії ми знайшли величину однієї одиниці (чи на **1 годину** для 6 тракторів; чи на 3 години для **1 трактору**).

В другій дії ми також знайшли величину однієї одиниці — на 1 годину для 1 трактора. Таким чином, в цій задачі ми двічі наводили до одиниці.

4. Зміна числових даних задачі і дослідження впливу цієї зміни на план її розв'язування

Якщо зміна величин задачі не впливає на її розв'язання, то спробуємо дослідити, чи вплине на розв'язання задачі зміна числових даних. Отже, залишаємо тими самими величини, але змінюємо числові дані. Учні пропонують власні варіанти, але вчитель їх дещо поправляє, щоб можна було виконати послідовне ділення даного числа на два інші.

Після проведеної роботи учні узагальнюють математичну структуру задач на подвійне зведення до одиниці та способи їх розв'язання (рис. 5.34).



План розв'язування

1) Знаходимо величину однієї одиниці для певної кількості або часу;
2) знаходимо "подвійну одиницю" і відповідаємо на запитання задачі.

Рис. 5.34. Опорні схеми та плани розв'язування двома способами задачі на подвійне зведення до одиниці (І підвид)

Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці:

1) Чотири величини: кількість, час та загальне значення для даної кількості та часу, а також величина, яка поєднує усі ці величини, — «подвійна одиниця».
2) Дано загальне значення величини для даної кількості та часу.
3) Шуканим є значення величини «подвійної одиниці».

5. Складання і розв'язування оберненої задачі. Ознайомлення з задачами на подвійне зведення до одиниці (II підвид)

Пропонуємо учням розв'язати задачу, аналогічну попереднім, двома способами:

В зоопарку за 3 дні 5 моржам дали 30 кг риби. Скільки кілограмів риби треба 1 моржу на 1 день?

Далі діти складають обернену задачу, в якій запитується про числове значення величини, яке було дано в умові прямої задачі. Діти виконують зміни у короткому записі і формулюють задачу:

Задача 2. (II підвид). На 1 день 1 моржу дають 2 кг риби. Скільки кілограмів риби дадуть 5 моржам за 3 дні?

Порівнюємо цю задачу з попередніми і впевнюємося, що вони мають дуже схожі математичні структури. Вона також містить чотири величини, але запитується не про величину подвійної одиниці, а про значення загальної величини. Учні пробують застосувати два способи розв'язування задач аналогічної математичної структури (рис. 5.35).

Рис. 5.35. Опорні схеми задач на подвійне зведення до одиниці (II підвид)

Далі учні порівнюють розв'язання прямої і оберненої задач і встановлюють, що перша задача розв'язується двома діями ділення, а друга задача — двома діями множення. Вчитель повідомляє, що цю ознаку покладено в основу класифікації задач на подвійне зведення до одиниці: перша задача — задача I підвиду, а друга — задача II підвиду. Результати узагальнення подані на рисунку 5.36.

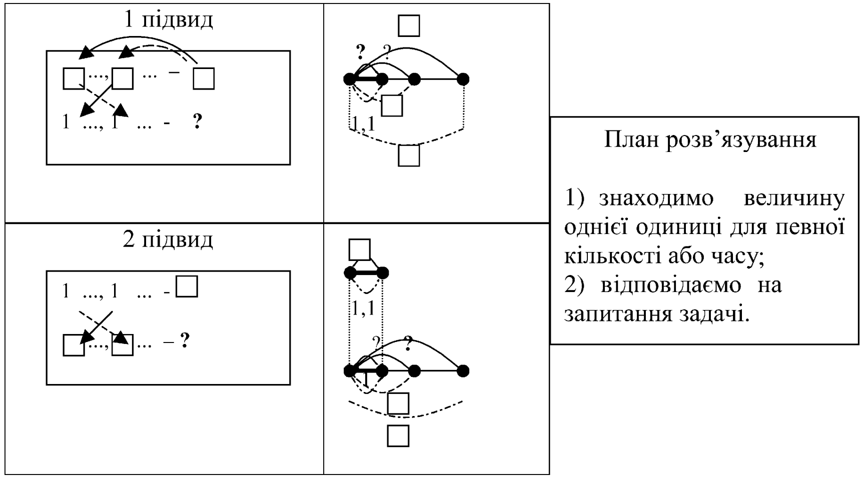


Рис. 5.36. Опорні схеми та план розв'язування задач на подвійне зведення до одиниці

Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці (І, ІІ вид):

1) Чотири величини: кількість, час та загальне значення для даної кількості та часу, а також величина, яка поєднує усі ці величини, — «подвійна одиниця».
2) Дано загальне значення для кількості та часу/значення подвійної одиниці.
3) Шуканим є значення подвійної одиниці/загальне значення для кількості та часу.

6. Зміна величин у задачі і дослідження впливу цієї зміни на план її розв'язування

Аналогічно пункту 3.

7. Зміна числових даних задачі і дослідження впливу цієї зміни на план її розв'язування

Аналогічно пункту 4.

Зміна величин задачі та числових даних задачі не змінила її математичної структури і не вплинула на узагальнений план розв'язування. Отже, визначені вище істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці і узагальнений план розв'язування набули підтвердження.

8. Складання інших обернених задач і дослідження впливу зміни умови на план розв'язування задач на подвійне зведення до одиниці

Учням пропонується задача на знаходження величини подвійної одиниці; вони спочатку складають короткий запис задачі, потім «впізнають» в цій задачі задачу на подвійне зведення до одиниці і роблять висновок, що дана задача такого ж самого виду; вона розв'язується двома способами (ставлять стрілочки і дужки) і розповідають план розв'язування за кожним з них. Наприклад:

Пряма задача. На 3 дні 8 коровам дають 48 кг сіна. Скільки кілограмів сіна дають одній корові на один день?

Далі складається перша обернена задача на знаходження загальної величини для певної кількості і часу (задача ІІ підвиду).

На 1 день 1 корові дають 2 кг сіна. Скільки кілограмів сіна дають 8 коровам на 3 дні?

Робота над цією задачею йде аналогічно попередній. Після її розв'язання учні узагальнюють плани двох способів розв'язування прямої і першої оберненої задачі. Дослідження задачі йде далі, і діти складають другу обернену задачу на знаходження кількості.

На 1 день 1 корові дають 2 кг сіна. Скільком коровам вистачить 48 кг сіна на 3 дні?

Виконавши зміни у короткому записі попередньої задачі, діти дістають висновку, що ця задача також містить подвійну одиницю, тому вона відноситься до задач на подвійне зведення до одиниці. Згадуємо узагальнений спосіб розв'язування попередніх двох задач і складаємо план розв'язування цієї задачі. Але учні стикаються з тим, що другу обернену задачу можна розв'язати лише одним способом.

Третя обернена задача. На 1 день 1 корові дають 2 кг сіна. На скільки днів вистачить 8 коровам 48 кг сіна?

Після розв'язання третьої оберненої задачі (одним способом) знов узагальнюємо план розв'язування усіх попередніх задач.

Після проведеної роботи існує можливість узагальнити усі розглянуті задачі на подвійне зведення до одиниці та узагальнити їх план розв'язування (рис. 5.37).

Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці:

1) Чотири величини: кількість, час та загальне значення для даної кількості та часу, а також величина, яка поєднує усі ці величини, — «подвійна одиниця».
2) Дано три числових значення даних величин.

3) Шуканим є одне з числових значень: або величини подвійної одиниці, або загальної величини, або кількості, або часу.

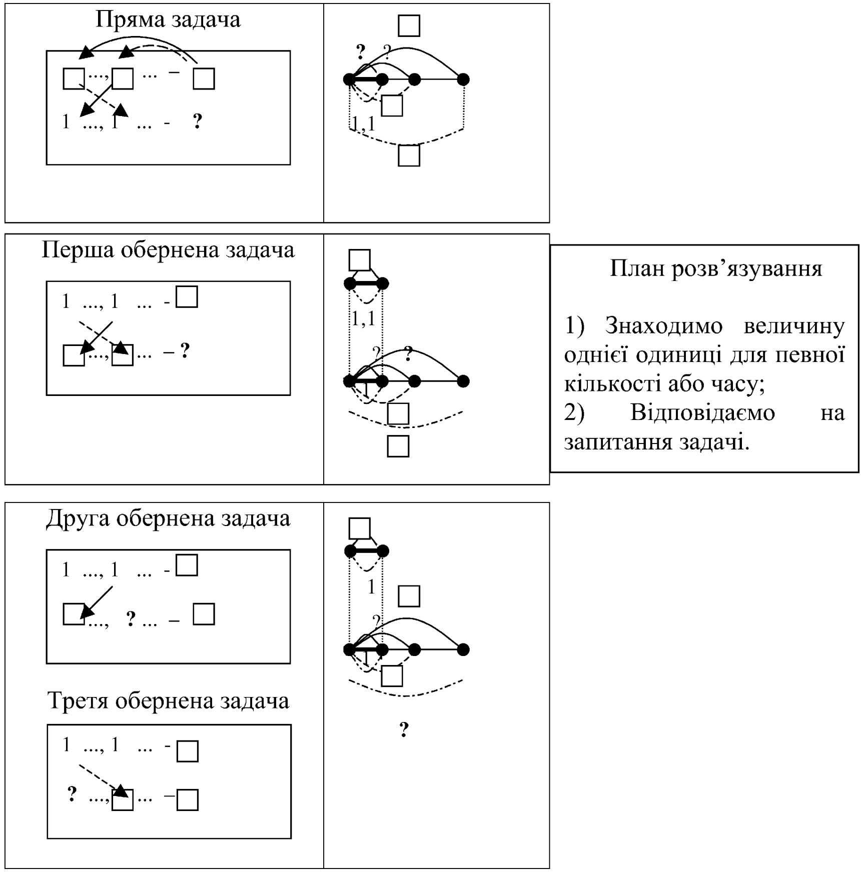


Рис. 5.37. Опорні схеми прямих та обернених задач на подвійне зведення до одиниці та план їх розв'язування

Треба зазначити, що цей елемент методики не є обов'язковим. Вчитель пропонує учням складати і розв'язувати обернені задачі залежно від рівня підготовленості класу; математичні структури таких задач відсутні у чинних підручниках математики для початкової школи.

9. Формування умінь розв'язувати задачі на подвійне зведення до одиниці

На етапі закріплення, прочитавши задачі, діти складають їх короткий запис, визначають вид задачі; роблять висновок про спосіб або способи розв'язування; ставлять стрілочки і розв'язують задачі. Після розв'язання по діях з поясненням записують розв'язок виразом.

Що стосується роботи над задачею після її розв'язання, то учні складають обернені задачі: задачу I підвиду перетворюють в задачу II підвиду і навпаки, а також можна запропонувати дітям скласти і розв'язати інші обернені задачі.

4-й клас

10. Розв'язання задачі № 1 на подвійне зведення до одиниці на знаходження величини подвійної одиниці

Учням пропонується задача на подвійне зведення до одиниці знайомої математичної структури (I підвид). Проаналізувавши її формулювання і записавши задачу коротко, діти визначають вид цієї задачі, згадують узагальнений план розв'язування та розв'язують задачу двома способами.

Задача 1. Два трактори за 4 год. роботи витратили 200 л бензину. Скільки палива витратить один трактор за одну годину?

11. Ускладнення задачі № 1. Ознайомлення з задачами на подвійне зведення до одиниці дещо ускладненої математичної структури. Задача № 2 (I підвид)

В задачі № 1 змінюємо запитання, шуканим стає величина однієї одиниці для іншого числового значення кількості або часу.

Задача 2. Два трактори за 4 години роботи витратили 200 л бензину. Скільки палива витратить один трактор за 5 годин?

Учні порівнюють цю задачу з попередньою і встановлюють, що вона є її продовженням. Отже ця задача має також два способи розв'язування: ставимо стрілочку і проводимо аналітичний пошук розв'язання, згідно першому способу. Звертаємо увагу дітей, на те що ключем до розв'язання задачі є величина «подвійної одиниці» — однакова величина. Далі ставимо дужку і пояснюємо другий спосіб розв'язування. Розв'язавши задачу іншим способом, порівнюємо обидва способи: в них спільні арифметичні дії та їх порядок, крім того, однакові останні дії і однакове пояснення до другої дії; відрізняються першими діями і поясненнями до них, а також другими діями. Учні показують стрілочками два способи розв'язування (рис. 5.38).

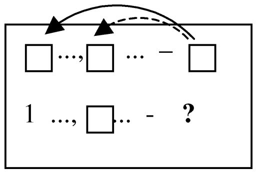


Рис. 5.38. Опорна схема задачі на подвійне зведення до одиниці з системою стрілочок, що вказують на способи розв'язування

Узагальнюємо перший та другий способи розв'язування:

В першій дії ми знайшли величину однієї одиниці для даної кількості або часу.

В другій дії ми знайшли величину «подвійної одиниці» — «ключ» до розв'язання задачі.

В третій дії ми знайшли величину однієї одиниці для іншого значення кількості або часу.

12. Зміна величин у задачі № 2 і дослідження впливу цієї зміни на її розв'язання

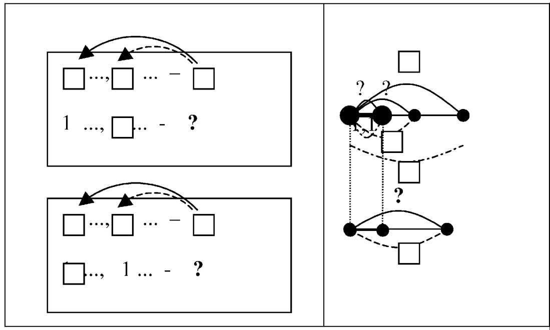
В попередній задачі замінюємо ситуацію задачі, змінюємо величини, а числові дані лишаємо тими самими. Учні складають задачу і з'ясовують, що розв'язувати її не треба — розв'язання двома способами вже є на дошці, слід змінити лише пояснення до арифметичних дій. Отже, зміна величин задачі не впливає ні на перший, ні на другий способи розв'язування.

13. Зміна числових даних задачі та дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування

В попередній задачі лишаємо тими самими величини, але змінюємо числові дані і з'ясовуємо, як від цього зміниться розв'язання, власне план розв'язування. У розв'язанні попередньої задачі учні змінюють відповідні числа і пояснення до першої дії. Але арифметичні дії та їх порядок не змінюються. Узагальнений план розв'язування також не змінився.

Повертаємося до схематичного короткого запису даної задачі. Змінюємо смислове значення одного з чисел у другому випадку і досліджуємо, як ця зміна вплине на розв'язання задачі. Розв'язання майже не змінюється, учні поправляють лише пояснення до останньої дії, загальний план розв'язування не змінився.

Отже, маємо можливість узагальнити математичну структуру розглянутих задач на подвійне зведення до одиниці та план їх розв'язання (рис. 5.39).



План розв'язування
1) величину однієї одиниці для даної кількості або часу;
2) величину "подвійної одиниці";
3) величину однієї одиниці для іншого значення кількості або часу, відповісти на запитання задачі.

Рис. 5.39. Опорні схеми та план розв'язування задач на подвійне зведення до одиниці (4-й клас)

Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці:

1) Чотири величини: кількість, час та загальне значення для даної кількості та часу, а також величина, яка поєднує усі ці величини, — подвійна одиниця.
2) Два випадки.
3) Величина подвійної одиниці однакова для обох випадків.
4) Для першого випадку дано числові значення кількості, часу і загальної величини.
5) Для другого випадку дано лише числові значення кількості/часу, а значення часу/кількості дорівнює 1.
6) Шуканим є величина однієї одиниці для значення кількості/часу у другому випадку.

14. Складання оберненої задачі до задачі на подвійне зведення до одиниці I підвиду. Ознайомлення з задачами на подвійне зведення до одиниці II підвиду. Задача № 3

Учням пропонується задача першого підвиду на знаходження величини однієї одиниці для даного значення часу:

Чотирма сівалками за 9 годин засіяли 108 га ячменю. Скільки гектарів ячменю можна засіяти 1 сівалкою за 20 годин?

Діти «впізнають» задачу, встановлюючи, що вона має усі істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці, тому вона розв'язується двома способами. Актуалізується узагальнений план розв'язування задач цього виду і записується розв'язання двома способами.

Після розв'язання цієї задачі складаємо обернену задачу на знаходження числового значення часу у другому випадку.

Задача № 3. Чотирма сівалками за 9 годин засіяли 108 га ячменю. За скільки годин можна засіяти 60 га однією такою сівалкою?

Учні змінюють короткий запис попередньої задачі так, щоб одержати короткий запис даної задачі (рис. 5.40).

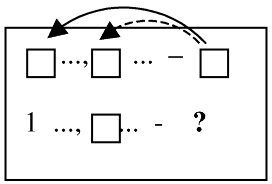


Рис. 5.40. Опорна схема задачі на подвійне зведення до одиниці з системою стрілочок, що вказують на способи розв'язування (II підвид)

Порівнюють ці задачі і дістають висновку, що вони мають схожу математичну структуру, тому вони мають схожі способи розв'язання. Учні ставлять стрілочки і розповідають спочатку розв'язування першим способом, а потім й другим. Після запису розв'язання учні порівнюють перший спосіб розв'язування прямої та оберненої задачі: вони схожі двома першими діями, відрізняються останньою дією — у прямій задачі остання дія множення, а в оберненій остання дія ділення. Аналогічних висновків школярі дістають, порівнявши другі способи розв'язування прямої і оберненої задач.

Отже ці дві задачі мають схожу математичну структуру, тому вони відносяться до одного виду. Але розв'язання цих задач відрізняються останніми діями, в першій задачі остання дія множення, а в другій — ділення, тому перша задача є задачею I підвиду, а друга — II підвиду.

Узагальнюємо математичні структури задач на подвійне зведення до одиниці і плани їх розв'язування (рис. 5.41).

Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці:

1) Чотири величини: кількість, час та загальне значення для даної кількості та часу, а також величина, яка поєднує усі ці величини, — подвійна одиниця.
2) Два випадки.
3) Величина подвійної одиниці однакова для обох випадків.

4) Для першого випадку дано числові значення кількості, часу і загальної величини.
5) Для другого випадку дано лише величину однієї одиниці для певного значення кількості/часу; або значення кількості/часу, а значення часу/кількості дорівнює 1.
6) Шуканою є величина кількості/часу або величина однієї одиниці для даного значення кількості/часу у другому випадку.

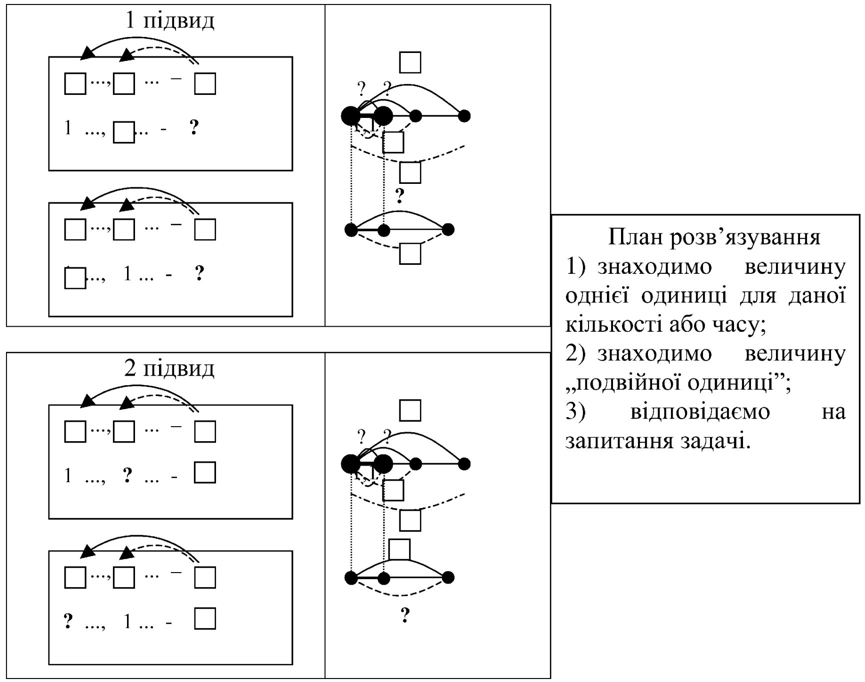


Рис. 5.41. Опорні схеми та план розв'язування задач двох підвидів на подвійне зведення до одиниці (4-й клас)

15. Зміна величин у задачі № 3 і дослідження впливу цієї зміни на розв'язування задачі

Робота йде аналогічно відповідній роботі над задачею № 2. Діти роблять висновок: зміна величин задачі не впливає на її розв'язання.

16. Зміна числових даних попередньої задачі і дослідження її впливу на план розв'язування задачі

Аналогічно пункту 13.

Від зміни величин задачі та від зміни числових даних задачі математична структура задачі на подвійне зведення до одиниці не змінилася; причому від цих змін узагальнений план розв'язування також не змінився. Отже, якщо задача матиме розглянуту математичну структуру, незалежно від того, які величини вона містить та які числові дані, це буде задача на подвійне зведення до одиниці, яка розв'язується двома способами за узагальненим нами планом.

17. Складання інших обернених задач і дослідження впливу зміни умови на план розв'язування задач на подвійне зведення до одиниці

Учням пропонується задача на знаходження величини одиниці для даного значення кількості або часу в другому випадку (І підвид):

Пряма задача. За 8 рейсів 3 машинами було перевезено 240 т вантажу. Скільки тонн вантажу можна перевезти однією машиною за 5 рейсів?

Школярі спочатку складають короткий запис задачі, потім «впізнають» в цій задачі задачу на подвійне зведення до одиниці; такі задачі розв'язуються двома способами (ставлять стрілочки), і розповідають план розв'язування за кожним з них. Далі складається перша обернена задача на знаходження кількості або часу у другому випадку (задача ІІ підвиду).

Перша обернена задача. За 8 рейсів 3 машинами було перевезено 240 т вантажу. За скільки рейсів можна перевезти однією машиною 50 т вантажу?

Робота над цією задачею йде аналогічно попередній. Після її розв'язання учні узагальнюють плани двох способів розв'язування прямої і першої оберненої задачі.

Дослідження задачі йде далі, і діти складають другу обернену задачу на знаходження загальної величини для даних значень кількості машин та кількості рейсів.

Друга обернена задача. За 5 рейсів 1 машиною було перевезено 50 т вантажу. Скільки тонн вантажу можна перевезти за 8 рейсів трьома машинами?

Виконавши зміни у короткому записі попередньої задачі, діти дістають висновку, що ця задача також на подвійне зведення до одиниці, тому вона розв'язується за узагальненим планом двома способами.

Після розв'язання другої оберненої задачі порівнюємо її розв'язання з попередніми — усі вони розв'язуються трьома діями і для розв'язання кожної треба знати «ключ» — величину «подвійної одиниці»; відрізняються вони тим, що в прямій та першій оберненій задачі для знаходження значення величини «подвійної одиниці» треба було виконати дві арифметичні дії — послідовно поділити загальне значення на дані значення кількості рейсів та кількості машин, а в другій оберненій задачі величину «подвійної одиниці» знаходимо першою дією, а для відповіді на її запитання треба виконати ще дві дії — послідовно помножити значення величини «подвійної одиниці» на значення кількості рейсів та кількості машин. Між тим, усі ці задачі розв'язуються трьома діями, і «ключем» до їх розв'язання є величина «подвійної одиниці».

Можна скласти ще дві обернені задачі, при їх розв'язанні діти стикаються з тим, що вони розв'язуються лише одним способом, але так само, як і інші задачі, трьома арифметичними діями, і «ключем» до їх розв'язання є значення «подвійної одиниці».

Третя обернена задача. За 5 рейсів 1 машиною було перевезено 50 т вантажу. За скільки рейсів можна перевезти трьома машинами 240 т вантажу?

Четверта обернена задача. За 5 рейсів 1 машиною було перевезено 50 т вантажу. Скількома машинами за 8 рейсів можна перевезти 240 т вантажу?

Після проведеної роботи існує можливість узагальнити усі розглянуті задачі на подвійне зведення до одиниці та узагальнити їх план розв'язування (рис. 5.42).

Істотні ознаки задач на подвійне зведення до одиниці:

1) Чотири величини: кількість, час/кількість та загальне значення для даної кількості та часу/кількості, а також величина, яка поєднує усі ці величини, — подвійна одиниця.
2) Два випадки.
3) Величина «подвійної одиниці» однакова для обох випадків.
4) Задача містить п'ять числових значень, причому чотири дані за умовою задачі, а п'яте є шуканим.

18. Перетворення задачі на знаходження четвертого пропорційного у задачу на подвійне зведення до одиниці. Дослідження взаємозв'язку цих задач

Як було зазначено вище, задачі на подвійне зведення до одиниці належать до ускладнених задач на знаходження четвертого

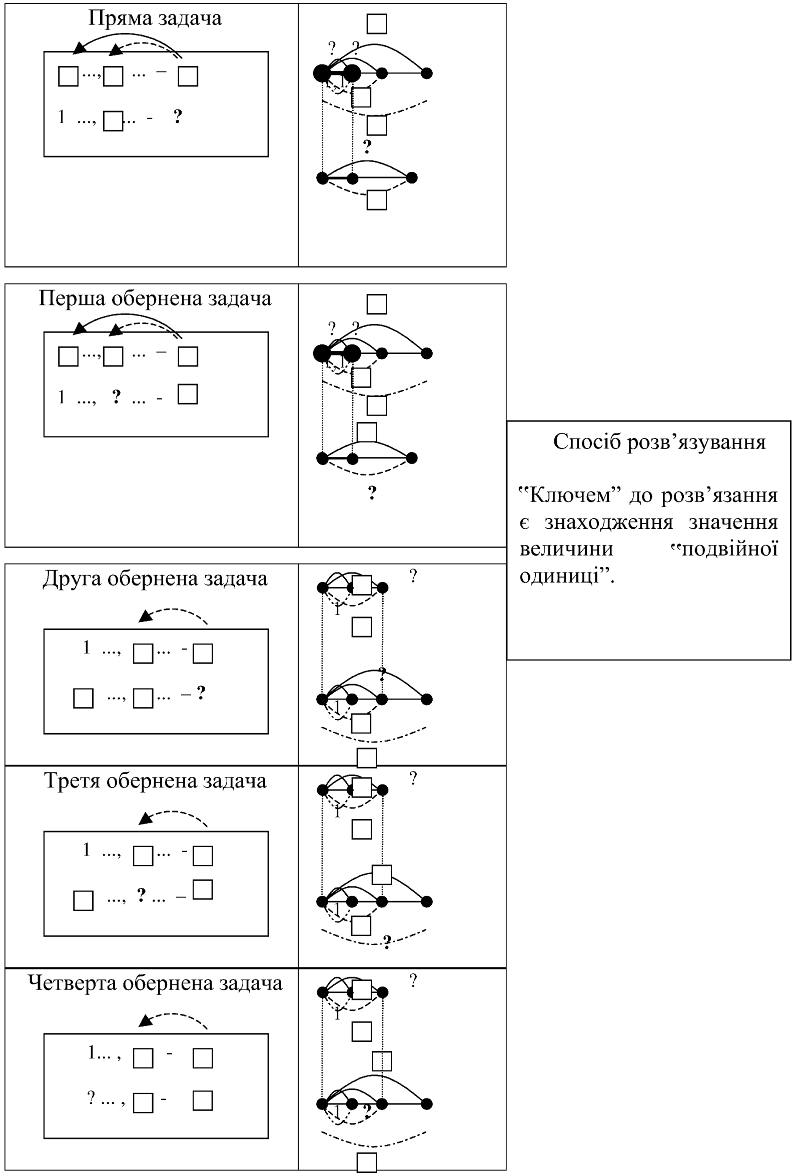


Рис. 5.42. Опорні схеми та план розв'язування прямих та обернених задач на подвійне зведення до одиниці (4-й клас)

пропорційного. Але, крім наявності в цих задачах величини однієї або «подвійної» одиниці, інших спільних ознак учні не встановили між задачами на знаходження четвертого пропорційного та на подвійне зведення до одиниці. Це пояснюється математичною структурою задач на подвійне зведення до одиниці, що пропонувалися в 3-му класі. В 4-му класі математична структура задач цього виду ускладнюється, і існує можливість перетворити задачу на знаходження четвертого пропорційного у задачу на подвійне зведення до одиниці, тим самим показавши взаємозв'язок між ними.

Тому учням пропонується для розв'язання задача на знаходження четвертого пропорційного, в якій однаковою є величина однієї одиниці, а шуканим є значення загальної величини.

За 3 рейси човняр перевіз через річку 18 чоловік. Скільки чоловік він зможе перевезти за 7 рейсів?

Діти «впізнають» задачу та застосовують узагальнений план розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного. Робота над задачею після її розв'язання полягає в ускладненні задачі на знаходження четвертого пропорційного, засобом введення значення ще однієї величини.

Записавши задачу на знаходження четвертого пропорційного у вигляді пропорції, діти зазначають, що «ключем» до розв'язання цієї задачі було знаходження однакової величини — величини однієї одиниці. Ускладнюємо цю задачу, увівши числове значення ще однієї величини: наприклад, в попередній задачі мова йшла про працю одного човняра, а в ускладненій — про роботу кількох човнярів. Зрозуміло, що у зв'язку з тим, що кількість човнярів збільшилася, збільшиться і значення загальної величини (кількості людей, що перевіз човняр) у стільки разів, у скільки разів збільшилася кількість човнярів. У попередній задачі замінюють числове значення загальної величини в першому випадку на знайдене число. Запитання задачі лишаємо тим самим, але підкреслюємо, що запитується про одного човняра.

За 3 рейси 2 човняра перевезли 36 чоловік. Скільки чоловік перевезе 1 човняр за 7 рейсів?

Порівнявши отриману задачу з попередньою, діти встановлюють, що в них описується одна й та сама ситуація, є спільні величини, але в першій задачі мова йшла тільки про одного човняра, а у другій задачі — в першому випадку працюють два човняри, а у другому лише один. Короткий запис задачі на знаходження четвертого пропорційного доповнюється відповідними числовими даними, і діти «впізнають» отриману задачу — задачу на подвійне зведення до одиниці. Згадується узагальнений план розв'язування задач цього виду, і школярі розв'язують одержану задачу двома способами.

Після розв'язання задачі учні порівнюють розв'язання задачі на подвійне зведення до одиниці та задачі на знаходження четвертого пропорційного, і дістають висновку: задача на подвійне зведення до одиниці розв'язується трьома діями, тому що введено значення ще однієї величини, а задача на знаходження четвертого пропорційного — двома; причому обидва розв'язання містять дві однакові дії. Можна стверджувати, що виконавши першу дію у розв'язанні задачі на подвійне зведення до одиниці, ми привели цю задачу до задачі на знаходження четвертого пропорційного. Спільним в обох задачах є наявність однакової величини — величини однієї одиниці в задачі на знаходження четвертого пропорційного і величини «подвійної одиниці» у задачі на подвійне зведення до одиниці. Спосіб розв'язування цих задач полягає у знаходженні значення величини однієї одиниці (зведення до одиниці) або значення величини «подвійної одиниці» (подвійне зведення до одиниці).

19. Закріплення умінь розв'язувати задачі на подвійне зведення до одиниці

На етапі закріплення умінь розв'язувати задачі на подвійне зведення до одиниці учні записують задачу коротко, «впізнають» задачу та актуалізують узагальнений план або спосіб розв'язування. Після розв'язання задачі перетворюють задачу одного підвиду у задачу другого підвиду, складають і розв'язують інші обернені задачі. Можна запропонувати учням перетворити задачу на знаходження четвертого пропорційного у задачу на подвійне зведення до одиниці та навпаки. Крім того, можлива постановка додаткового запитання до «стандартної» задачі на подвійне зведення до одиниці, яке вимагає виконання ще одної арифметичної дії. Математична структура таких задач має вигляд (див. рис. 5.43).

Практична реалізація розглянутої методики здійснюється на підставі системи завдань, яку запропоновано у роботі автора [480]. Розроблена методика також подана у публікаціях автора [501; 502].

Таким чином, ми запропонували методику навчання учнів розв'язування «типових» задач, які містять однакову величину. Ми визначили істотні ознаки задач:

— на знаходження четвертого пропорційного;
— на подвійне зведення до одиниці;

— на пропорційне ділення;
— на знаходження невідомих за двома різницями.

Спосіб розв'язування перелічених видів задач полягає у знаходженні значення однакової величини.

Зазначимо, що роботу над окремими задачами зазначених видів ми будували за планом: 1) логіко-семантичний аналіз тексту задачі; 2) моделювання задачної ситуації (таблиця, схематичний рисунок); 3) визначення істотних ознак математичної структури задачі і прикидки відповіді на основі залежності двох величин при сталій третій; 4) пошук розв'язування; 5) складання математичної моделі задачі; 6) розв'язання задачі; 7) перетворення задачі у обернену задачу або в задачу іншого виду чи підвиду; 8) дослідження впливу зміни умови задачі на її розв'язання.

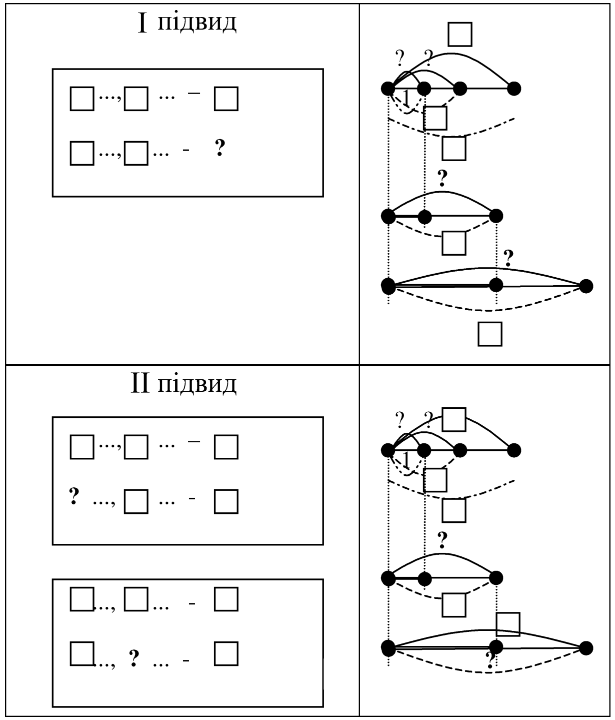


Рис. 5.43. Опорні схеми ускладнених задач на подвійне зведення до одиниці

Різноманіття «типових» задач, які містять пропорційні величини, не вичерпується розглянутими. Тому у наступному параграфі ми пропонуємо методику навчання молодших школярів розв'язування задач на спільну роботу і на рух, математичні структури та способи розв'язування яких мають також багато спільного.

5.2. СИСТЕМА НАВЧАЛЬНИХ ЗАДАЧ З ФОРМУВАННЯ УМІНЬ РОЗВ'ЯЗУВАТИ «ТИПОВІ» ЗАДАЧІ НА СПІЛЬНУ РОБОТУ ТА ЗАДАЧІ НА РУХ

5.2.1. Методика навчання розв'язувати задачі на спільну роботу

3-й клас

1. Підготовча робота до введення задач на спільну роботу

На цьому етапі слід актуалізувати знання групи пропорційних величин: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи та взаємозв'язок між цими величинами. Це можна зробити під час розв'язання простих та складених задач, що містять дану групу величин.

Ключем до розв'язання задач на спільну роботу є знаходження «продуктивності спільної праці» двох виконавців. Тому на етапі підготовчої роботи учні розв'язують прості задачі на знаходження спільної продуктивності. При цьому корисно ставити запитання: «Більше чи менше, ніж... (продуктивність одного виконавця), зроблять обидва виконавці, якщо працюватимуть разом?» або «Більше чи менше часу, ніж... (час роботи окремо одного з виконавців), витратять на працю обидва виконавця, якщо працюватимуть разом?». Наприклад:

1. Батько може скопати рядок за 30 хвилин, а син — за 40 хвилин. Якщо вони працюватимуть разом, для того, щоб скопати цей рядок, їм потрібно більше чи менше часу, ніж 30 хвилин? Ніж 40 хвилин?
2. Одна друкарка за годину друкує 5 сторінок, а інша — 4. Скільки сторінок надрукують за годину обидві друкарки?

2. Ознайомлення з задачами на знаходження часу спільної роботи, в яких дано продуктивність кожного виконавця. Задача № 1

Задача нової математичної структури являє собою продовження попередньої задачі на знаходження спільної продуктивності (2). В цій задачі треба знайти час роботи, за який обидва виконавці виконають певний обсяг роботи.

Задача № 1. Одна друкарка друкує за годину 5 сторінок, інша 4. Скільки годин вони повинні працювати разом, щоб надрукувати 72 сторінки?

Порівнявши цю задачу з попередньою, учні встановлюють, що вона є її продовженням, і досліджують, як ця зміна впливає на розв'язання задачі, — щоб відповісти на запитання цієї задачі, слід виконати ще одну арифметичну дію. Отже, першою дією (дією додавання) знайшли продуктивність спільної праці, а другою дією знайшли час спільної праці і відповіли на запитання задачі. Вчитель звертає увагу на те, що в цій задачі запитується про час спільної праці двох виконавців — це задача на спільну роботу. Учні визначають слова в тексті задачі, які вказують на те, що в ній йдеться про спільну роботу, — це слова «працюючи разом» або їх синоніми.

3. Зміна ситуації задачі № 1 і дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

Якщо в попередній задачі йшла мова про роботу двох друкарок (загальний виробіток — загальна кількість сторінок, продуктивність праці — кількість сторінок за 1 годину, час роботи), то пропонуємо учням змінити ситуацію задачі, припустимо, працюватимуть два насоси (загальний виробіток — загальна маса води, продуктивність праці — маса води за 1 годину, час роботи.). Учні складають задачу і встановлюють, що це також задача на спільну роботу, в якій слід знайти час спільної роботи, причому ця зміна не впливає на розв'язання задачі, слід «підправити» пояснення до арифметичних дій.

4. Зміна числових даних задачі і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

Зміна числових даних не впливає ні на математичну структуру задачі, ні на план її розв'язування. У запису розв'язання попередньої задачі слід змінити відповідні числа, а пояснення залишаться тими самими.

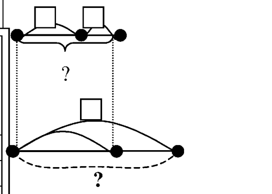
Узагальнюємо математичну структуру та план розв'язування задач на знаходження часу спільної роботи (рис. 5.44).

Істотні ознаки задач на спільну роботу:

1) три величини: загальний виробіток, продуктивність праці і час роботи;
2) три випадки: перший випадок стосується роботи першого виконавця, другий випадок стосується роботи другого виконавця, а третій — спільної роботи обох виконавців.

3) до перших двох випадків дано продуктивність роботи кожного виконавця;
4) до третього випадку дано загальний виробіток спільної праці, а час спільної праці є шуканим.

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I		□	
II		□	
IіII	□	?	?



План розв'язування

1. Знаходимо спільну продуктивність, дією додавання.
2. Знаходимо час спільної роботи дією ділення, відповідаємо на запитання задачі.

Рис. 5.44. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу

5. Зміна шуканого задачі № 1 і дослідження впливу цієї зміни на математичну структуру задачі та план її розв'язування

Діти складають обернену задачу на знаходження загального виробітку при спільній роботі (вносять зміни у короткий запис задачі № 1).

Перша обернена задача. Одна друкарка друкує за годину 5 сторінок, а інша 4 сторінки. Скільки сторінок вони надрукують за 8 годин, якщо працюватимуть разом?

З'ясовують, що математична структура задачі майже не змінилася: задача містить ті самі величини, три випадки, до перших двох випадків дано продуктивність кожного, до третього випадку дано час роботи, а загальний виробіток є шуканим. Це також задача на спільну роботу, тому що запитується про загальний виробіток при спільній роботі. Учні згадують узагальнений план розв'язування задач на спільну роботу і встановлюють, що ця зміна вплине на останню дію — останньою дією буде дія множення, тому що знаходять загальний виробіток.

Далі складаємо другу обернену задачу на знаходження продуктивності першого виконавця (вносимо зміни у короткий запис попередньої задачі).

Друга обернена задача. Дві друкарки, працюючи разом, за 8 год. надрукували 72 сторінки. Скільки сторінок за 1 год. друкує перша друкарка, якщо інша за 1 год. друкує 4 сторінки?

Отримуємо також задачу на спільну роботу: вона має ті самі істотні ознаки, що й попередні, але шуканою є продуктивність першого виконавця. Ця зміна впливає на розв'язання задачі так:

першою дією так само знаходимо продуктивність спільної роботи двох виконавців, але не за даними продуктивностей кожного, а за загальним виробітком при спільній праці та за часом спільної праці, дією ділення; другою дією відповідаємо на запитання задачі і знаходимо продуктивність першого виконавця дією віднімання.

Школярам пропонується скласти третю обернену задачу на знаходження продуктивності роботи другого виконавця і дослідити вплив цієї зміни на математичну структуру задачі та план її розв'язання. Після чого узагальнюється математична структура задач на спільну роботу та план їх розв'язування (рис. 5.45).

3-й клас

Пряма задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I		□	
II		□	
IіII	□	?	?

Перша обернена задача

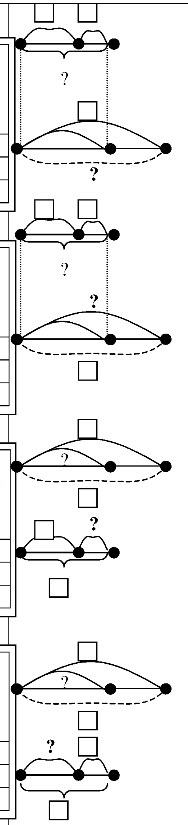
	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I		□	
II		□	
IіII	?	?	□

Друга обернена задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I		□	
II		?	
IіII	□	?	□

Третя обернена задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I		?	
II		□	
IіII	□	?	□



План розв'язування

1) знаходимо спільну продуктивність;

2) відповідаємо на запитання задачі.

Рис. 5.45. Опорні схеми та план розв'язування прямих та обернених задач на спільну роботу

Істотні ознаки задач на спільну роботу:

1) три пропорційні величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи;
2) три випадки: перший — стосується роботи першого виконавця, другий — роботи другого виконавця, а третій — спільної роботи двох виконавців;
3) дано продуктивності кожного виконавця, а шуканим є час спільної роботи/загальний виробіток при спільній роботі або дано загальний виробіток та час при спільній роботі, а шуканим є продуктивність праці одного з виконавців.

6. Закріплення уміння розв'язувати задачі на спільну роботу

На цьому етапі учні виконують логіко-семантичний аналіз формулювання задачі і «впізнають» задачі, далі згадують узагальнений план розв'язування задач на спільну роботу і застосовують його. Щодо роботи над задачею після її розв'язання — пропонуємо учням скласти і розв'язати кілька обернених задач, таким чином здійснюється подальше усвідомлення способів знаходження спільної продуктивності: спільна продуктивність з одного боку — це сума продуктивностей кожного виконавця, а з іншого — частка загального виробітку при спільній роботі і часу спільної роботи.

4-й клас

7. Підготовча робота до введення задач на спільну роботу більш складної математичної структури

Актуалізуємо уміння розв'язувати задачі, які містять величини: загальний виробіток, продуктивність праці та час роботи, різних математичних структур, в тому числі і на знаходження четвертого пропорційного. Крім того, учні згадують істотні ознаки та способи розв'язування задач на спільну роботу, які пропонувалися в 3-му класі.

Так само, як і в 3-му класі, на етапі підготовки пропонуємо учням задачі на знаходження спільної продуктивності, але не прості, а складені. В цих задачах не дано продуктивності роботи кожного виконавця, але відомий загальний виробіток та час роботи кожного з виконавців. Наприклад:

640 відер води перший насос може викачати за 8 хвилин, а другий викачує 420 відер води за 6 хвилин. Скільки відер води викачають за 1 годину обидва насоси, якщо працюватимуть разом?

Отже, на цьому етапі опрацьовуємо уміння знаходити спільну продуктивність за даними загального виробітку та часу роботи кожного виконавця — щоб знайти спільну продуктивність двох виконавців, треба: 1) знайти продуктивність першого; 2) знайти продуктивність другого; 3) знайти спільну продуктивність.

8. Ознайомлення з «типовими» задачами на спільну роботу

Учням спочатку пропонується підготовча задача на знаходження спільної продуктивності за даними загального виробітку (він однаковий для обох виконавців) та часу роботи кожного виконавця.

24 тонни води перший насос може викачати за 6 годин, а другий — за 3 години. Скільки тонн води викачають за 1 годину обидва насоси, якщо працюватимуть разом?

Діти згадують, як знаходиться спільна продуктивність, і формулюють план розв'язування цієї задачі. Далі в цій задачі змінюється запитання задачі, і шуканим стає час спільної роботи при тому самому загальному виробітку.

Задача 1. 24 т води перший насос може викачати за 6 годин, а другий — за 3 години. За скільки годин викачають цю воду обидва насоси, якщо будуть працювати разом?

Школярі порівнюють задачу № 1 з попередньою і встановлюють, що ця задача є її продовженням. Далі проводиться аналітичний пошук розв'язування і складається план розв'язування задачі; з'ясовується, як зміна запитання задачі вплинула на її розв'язання, — треба виконати ще одну арифметичну дію, щоб відповісти на запитання задачі.

9. Зміна ситуації задачі № 1 і дослідження впливу цієї зміни на математичну структуру задачі та розв'язання задачі

Аналогічно пункту 3.

10. Зміна числових даних задачі і дослідження впливу цієї зміни на математичну структуру та план розв'язування задачі

Аналогічно пункту 4.

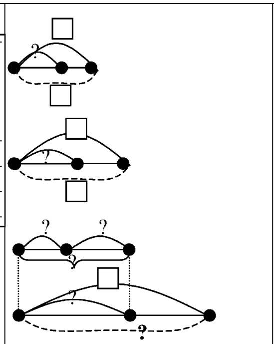
Після проведеної роботи учні порівнюють усі ці задачі і узагальнюють їх математичну структуру та план розв'язування (рис. 5.46).

Істотні ознаки задач:

1) три пропорційні величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи;

2) три випадки: перший стосується роботи першого виконавця, другий — роботи другого виконавця, а третій — спільної роботи обох виконавців;
3) для двох випадків (першого і другого) дано значення загальної продуктивності і часу роботи;
4) для одного з випадків (третього) дано значення загальної величини, а значення часу є шуканим.

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I	□	?	□
II	□	?	□
I і II	□	?	?



План розв'язування

1) знаходимо продуктивність першого виконавця;
2) знаходимо продуктивність другого виконавця;
3) знаходимо спільну продуктивність;
4) знаходимо час спільної роботи, відповідаємо на запитання задачі.

Рис. 5.46. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу, в яких шуканим є час спільної праці (4-й клас)

11. Зміна шуканого задачі № 1 та дослідження впливу цієї зміни на математичну структуру і план розв'язування задачі

Учням пропонується скласти і розв'язати обернену задачу на знаходження загального виробітку при спільній роботі. Вони виконують зміни у короткому записі прямої задачі і формулюють обернену задачу.

Перша обернена задача. 24 т води перший насос може викачати за 6 годин, а другий — за 3 години. Скільки тонн води викачають обидва насоси за 2 години, працюючи разом?

Далі з'ясовується, що одержана задача також відноситься до задач на спільну роботу і має аналогічний план розв'язування, але зміна шуканого впливає на четверту дію: остання дія в першій оберненій задачі — дія множення, тому що шуканим є загальний виробіток. Порівнявши плани розв'язування прямої та першої оберненої задачі, діти формулюють узагальнений план розв'язування.

Дослідження задачі йде далі: складаються і розв'язуються ще чотири обернені задачі — на знаходження часу роботи першого (другого) виконавця та на знаходження загального виробітку першого (другого) виконавця.

Друга обернена задача. 24 т води другий насос може викачати за 3 години. За скільки годин викачає цю воду перший насос, якщо, працюючи разом, цю воду вони викачують за 2 години?

Третя обернена задача. 24 т води другий насос може викачати за 3 години. Скільки тонн води викачає перший насос за 6 годин, якщо, працюючи разом, цю воду вони викачують за 2 години?

Четверта обернена задача. 24 т води перший насос може викачати за 6 годин. За скільки годин викачає цю воду другий насос, якщо, працюючи разом, цю воду вони викачують за 2 години?

П'ята обернена задача. 24 т води перший насос може викачати за 6 годин. Скільки тонн види викачає другий насос за 3 години, якщо, працюючи разом, цю воду вони викачують за 2 години?

Отримавши короткі записи обернених задач шляхом виконання змін у короткому записі попередньої задачі, діти встановлюють, що це так само задачі на спільну роботу. Ключем до розв'язання задач на спільну роботу є знаходження спільної продуктивності, але в 2—5 обернених задачах спільну продуктивність знаходять за даними загального виробітку при спільній роботі та за часом спільної роботи. Далі розв'язання йде традиційно — знаходимо продуктивність одного з виконавців за даними його загального виробітку та часу роботи. А продуктивність іншого виконавця знаходимо, як різницю знайдених числових значень, що надає нам можливість відповісти на запитання задачі.

Таким чином, порівнявши математичні структури прямої і обернених задач та плани їх розв'язування, узагальнюємо математичну структуру задач на спільну роботу та план розв'язування (табл. 5.1).

Істотні ознаки задач на спільну роботу:
1) три пропорційні величини: загальний виробіток, продуктивність праці, час роботи;
2) три випадки: перший стосується роботи першого виконавця, другий — роботи другого виконавця, третій — спільної роботи двох виконавців.
3) для двох випадків дано значення загального виробітку і часу роботи;
4) для іншого випадку дано лише одне числове значення (або загального виробітку, або часу роботи), а інше — є шуканим.

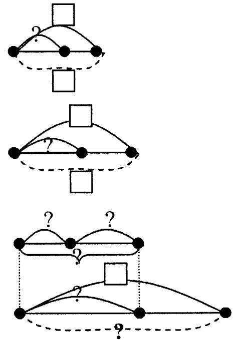
Таблиця 5.1

Опорні схеми та плани розв'язання прямих і обернених задач на спільну роботу (4-й клас)

	Опорна схема	Схематичний рисунок	План розв'язування

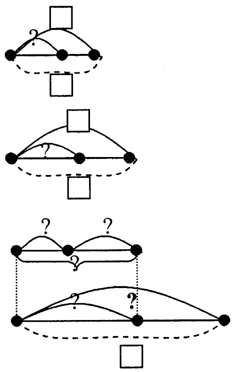
Пряма задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I	□	?	□
II	□	?	□
I і II	□	?	**?**



Перша обернена задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I	□	?	□
I	□	?	□
I і II	**?**	?	□



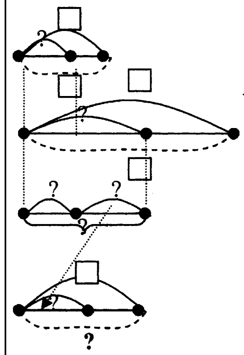
1) знаходимо продуктивність $\frac{\text{першого виконавця}}{\text{спільну}}$;

2) знаходимо продуктивність $\frac{\text{другого}}{\text{першого або другого}}$ виконавця;

	Опорна схема	Схематичний рисунок	План розв'язування

Друга обернена задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I	□	?	□
II	□	?	**?**
I і II	□	?	□

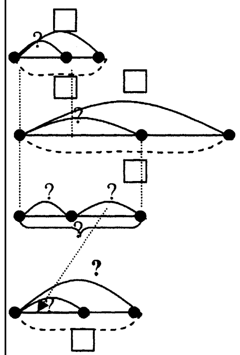


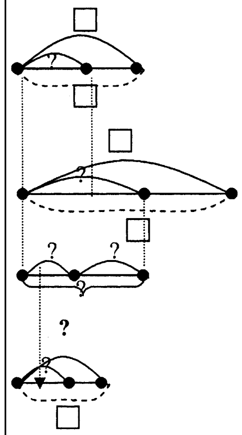
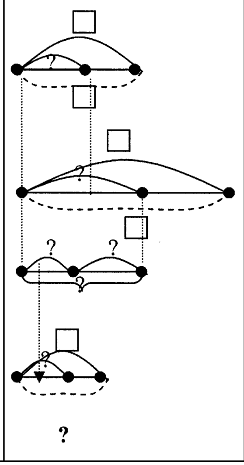
3) знаходимо продуктивність $\frac{\text{спільну}}{\text{другого або першого}}$;

4) відповідаємо на запитання задачі.

Третя обернена задача

	Загальний виробіток	Продуктивність праці	Час роботи
I	□	?	□
II	**?**	?	□
I і II	□	?	□



<table>
<tr><th></th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th><th>План розв'язування</th></tr>
<tr><td>Четверта обернена задача</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Загальний виробіток</th><th>Продуктивність праці</th><th>Час роботи</th></tr>
<tr><td>I</td><td>?</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td>I і II</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
</table>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>П'ята обернена задача</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Загальний виробіток</th><th>Продуктивність праці</th><th>Час роботи</th></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td>?</td><td>?</td></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td>I і II</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
</table>
</td><td></td><td></td></tr>
</table>

12. Закріплення уміння розв'язувати «типові» задачі на спільну роботу

Після аналізу формулювання задачі діти встановлюють, що це задача на спільну роботу, актуалізують узагальнений план розв'язування таких задач та застосовують його. З метою перевірки правильності розв'язання задачі школярі складають і розв'язують обернені задачі.

13. Ознайомлення з задачами на спільну роботу, в яких спільна продуктивність являє собою різницю продуктивностей двох виконавців

Учням пропонується розв'язати задачу на спільну роботу на знаходження часу спільної праці, в якій продуктивність спільної праці знаходять дією додавання.

18 т води перший насос може викачати за 6 год., а другий — за 3 год. За скільки годин викачають 18 т води обидва насоси, працюючи разом?

Причому школярам пропонується готове розв'язання, в якому час спільної праці знайшли додаванням часу роботи кожного виконавця. Діти пояснюють, що у задачах на спільну роботу можна додавати лише продуктивності кожного виконавця, а неможна додавати час їхньої роботи. Отже, увага учнів зосереджується на тому, що продуктивність спільної праці можна знайти дією додавання.

В наступній задачі виконавці «діють у протилежних напрямках» — через кран вода вливається, а через зливний отвір вода виливається.

За годину через верхній кран вливається 20 відер води, а через нижній кран за годину виливається 9 відер води. Скільки відер води наллється в бак за 1 годину? За 2 години? За 3 години?

Учням пропонується, спираючись на схематичний рисунок, визначити, як і на скільки змінюється загальна величина за одиницю часу у випадку роботи обох виконавців? Як змінюється загальна величина за певний час спільної роботи обох виконавців? Діти дістають висновку, що продуктивність спільної роботи знаходять:

1) додаванням продуктивностей роботи кожного виконавця, якщо обидва виконавця «працюють в одному напрямку — на один результат»;

2) відніманням продуктивностей роботи кожного виконавця, якщо обидва виконавця «працюють у протилежних напрямках — на протилежні результати».

Коли засвоєні способи знаходження продуктивності спільної праці і випадки, в яких вони застосовуються, учням пропонується «типова» задача на спільну роботу, в якій продуктивність спільної праці знаходиться дією віднімання.

Через кран у ванну за 1 хвилину вливається 20 л води, а через зливний отвір за 1 хвилину виливається 15 л води. За скільки хвилин наповниться ванна об'ємом 160 л якщо і кран, і зливний отвір будуть весь час відкриті?

З метою перевірки правильності розв'язання задачі пропонуємо учням скласти і розв'язати різноманітні обернені задачі.

Більш докладно методика навчання молодших школярів розв'язування задач на спільну роботу подана у публікаціях автора [483; 501; 502].

5.2.2. Задачі на рух в різних напрямках

1. Підготовча робота до ознайомлення з задачами на одночасний рух в різних напрямках (рух назустріч та рух у протилежних напрямках)

Мета — актуалізувати знання пропорційних величин: відстань, швидкість та час, взаємозв'язків між ними; спостереження за рухом двох тіл відносно одне одного.

Актуалізація знань учнів про пропорційні величини: відстань, швидкість та час здійснюється під час розв'язування простих та складених задач відомих дітям видів. Крім того, на цьому етапі треба повторити не лише взаємозв'язок між даними величинами, а й приділити певну увагу фізичному змісту швидкості.

На етапі підготовчої роботи також слід узагальнити і систематизувати уявлення дітей про рух назустріч та рух у протилежних напрямках. З цією метою учні спостерігають за рухом одного тіла відносно іншого і вчаться схематично зображати рух (рис. 5.47).

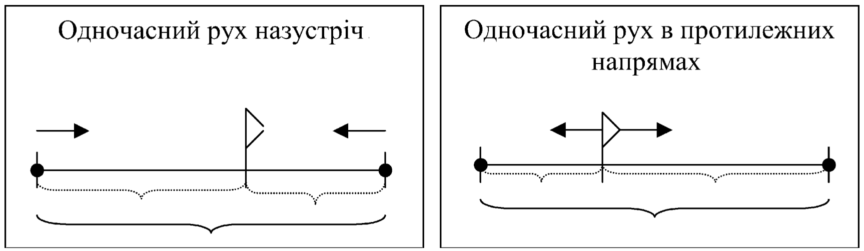


Рис. 5.47. Схематичне зображення одночасного руху назустріч та у протилежних напрямках

Спостерігаючи за одночасним рухом двох тіл, учні роблять висновки про характер зміни відстані між тілами під час руху назустріч та при русі в протилежних напрямах, про час руху обох тіл та про величину відстані між тілами на момент початку (закінчення) руху.

Спостереження за **одночасним рухом назустріч** дають підстави зробити такі **висновки**:

1. Відстань між тілами весь час зменшується.
2. Весь шлях складається зі шляху, який подолано першим тілом, та шляху, який подолало друге тіло.
3. Кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно і закінчили рухатися одночасно.

Спостереження за **одночасним рухом в протилежних напрямах** дають підстави зробити такі **висновки**:

1. Відстань між тілами весь час збільшується.
2. Весь шлях складається зі шляху, який подолано першим тілом, та шляху, який подолало друге тіло.
3. Кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно і закінчили рухатися одночасно.

Порівнюючи ці висновки, узагальнюємо їх.

Під час одночасного руху назустріч/в протилежних напрямах:
1. Відстань між тілами весь час зменшується/збільшується.
2. Весь шлях складається зі шляху, який подолано першим тілом, та шляху, який подолало друге тіло.
3. Кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно і закінчили рухатися одночасно.

Для усвідомлення зроблених висновків учням пропонують спеціальні завдання на знаходження часу руху кожного тіла, якщо відомий час зустрічі тіл; на знаходження часу руху одного з тіл, якщо відомий час руху другого тіла до зустрічі; на порівняння відстаней, що подолало кожне тіло, за умов однакових та різних швидкостей; на визначення характеру зміни відстані між тілами при їх одночасному русі назустріч та у протилежних напрямках, та визначення числового значення цієї зміни за одиницю часу. Наприклад:

1. Із двох міст одночасно назустріч вийшли два пішоходи і зустрілися через 3 години. Скільки часу рухався кожний пішохід?

2. З села в місто вийшов пішохід і в цей же час із міста назустріч йому виїхав мотоцикліст, який зустрів пішохода через 40 хвилин. Скільки часу рухався до зустрічі пішохід?

3. Два пішохода вийшли одночасно в протилежних напрямах і закінчили свій рух через 2 години. Скільки часу рухався кожний пішохід? Що можна сказати про відстань, яку пройшов кожний пішохід, якщо:
— вони рухалися з однаковою швидкістю;
— швидкість першого більше швидкості другого.

4. Два лижники вийшли одночасно назустріч один одному. Перший лижник йшов зі швидкістю 12 км/год, а другий — 14 км/год. Як змінюється відстань між лижниками? На скільки зменшиться відстань за 1-шу годину, за 2-гу годину?

5. Два велосипедисти виїхали одночасно з одного пункту в протилежних напрямах. Швидкість першого велосипедиста 5 м/с, а другого — 3 м/с. Як змінюється відстань між велосипедистами? На скільки збільшиться відстань за 1-шу секунду, за 2-гу секунду?

Після розв'язання задач, аналогічних останній, учні роблять висновок:

Якщо два тіла рухаються одночасно назустріч одне одному або в протилежних напрямах, то **відстань** між ними весь час **змінюється на одне й те саме число** одиниць, яке дорівнює **сумі відстаней, що долає кожне тіло за одиницю часу**.

З метою закріплення цього висновку учні розв'язують завдання на визначення характеру та числового значення зміни відстані між тілами за одиницю часу при одночасному русі назустріч або у протилежних напрямках, якщо дано швидкість кожного тіла; складають і розв'язують обернені задачі до них на знаходження швидкості; розв'язують завдання на знаходження швидкості одного з тіл за відомими швидкістю другого тіла та числовим значенням зміни відстані між тілами за одиницю часу. Наприклад:

6. Дві черепахи одночасно виринули назустріч одна одній. Швидкість першої черепахи 9 дм/хв, а швидкість другої черепахи 5 дм/хв. Як змінюється відстань між черепахами? На скільки дециметрів зменшується відстань між черепахами за кожну секунду?

7. Два лижники вийшли з одного селища одночасно в протилежних напрямах. Знайди швидкість другого лижника, якщо відома швидкість першого лижника 5 км/год. і відомо, що вони віддаляються за кожну годину на 12 км.

2. Ознайомлення учнів з задачами на одночасний рух назустріч та одночасний рух в протилежних напрямах. Задача № 1 на знаходження відстані при одночасному русі назустріч (І спосіб)

На етапі підготовки учні навчилися схематично зображати рух назустріч та у протилежних напрямках, робити висновки про зміну відстані, про час руху кожного тіла, про відстань, яку подолали тіла при русі назустріч або у протилежних напрямках; а також повторили взаємозв'язок між величинами: відстань, швидкість і час. Тому можна відразу запропонувати учням задачу нового виду (на знаходження відстані при одночасному русі назустріч) і провести роботу над нею за загальним планом (пам'яткою № 3).

Задача 1. Два лижника вийшли одночасно назустріч один одному з двох селищ і зустрілися через 3 години. Перший лижник йшов зі швидкістю 12 км/год., а інший — 14 км/год. Яка відстань між селищами?

Учні визначають, що в задачі йде мова про рух двох тіл, тому короткий запис її буде у формі рисунка, з'ясовують час початку руху та напрямок двох тіл, який показують стрілочками на рисунку; визначивши напрямок руху тіл, роблять відповідні висновки про зміну відстані між тілами, про час руху кожного тіла та про відстань, яку подолали обидва тіла під час руху; на рисунку записують відомі числові значення швидкості (над стрілочками) та часу руху; за коротким записом пояснюють числа задачі та її запитання. Після того, як учні визначили, яка величина є шуканою, з'ясовується, як шукана величина пов'язана з іншими величинами та «з чого «складається» її числове значення». Далі йдуть міркування від запитання задачі до числових даних, визначається план розв'язування задачі та записується її розв'язок і відповідь.

3. Зміна напрямку руху у задачі № 1 — тіла рухаються у протилежних напрямках. Дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

Задача на знаходження відстані при одночасному русі назустріч перетворюється у задачу на знаходження відстані при одночасному русі у різних напрямках. Учні виконують зміни у кресленні, роблять висновки щодо характеру зміни відстані між тілами за одиницю часу, про час, який витратило на рух кожне тіло, про відстань, яку подолали обидва тіла; порівнюють цю задачу з попередньою. Спільним у формулюванні цих задач є діючи особи; однакові значення величин: швидкостей та часу;

в обох задачах вимагається знайти відстань; тіла почали рухатися одночасно. Відмінним у формулюванні задач є те, що в першій тіла рухалися назустріч одне одному, а в другій — у протилежних напрямках. Далі з'ясовується, як ця зміна вплине на розв'язання задачі: арифметичні дії не змінюються! Учні узагальнюють план розв'язування задач на знаходження відстані при одночасному русі назустріч та у протилежних напрямках: якщо в задачі треба знайти відстань при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямах, то її розв'язують за планом:

Першою дією визначають відстань, яку пройшло перше тіло.

Другою дією визначають відстань, яку пройшло друге тіло.

Третьою дією визначають відстань, яку пройшли обидва тіла.

4. Заміна числових даних швидкостей тіл буквами та дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

Школярам пропонується задача, в якій значення швидкостей тіл подані буквами, і шуканою є відстань, але за умов двох варіантів руху — руху назустріч та руху у протилежних напрямках. Н а п р и к л а д:

Пішохід йде зі швидкістю ***а*** км/год., а вершник рухається зі швидкістю ***в*** км/год. Знайди:

а) відстань, яка буде між ними через 4 години, якщо вони вирушили одночасно з одного міста в протилежних напрямах;

б) відстань, яка була між ними на момент початку руху, якщо вони зустрілися через 4 години.

Діти виконують рисунок до кожного варіанту руху та розв'язують обидві задачі (рис. 5.48).

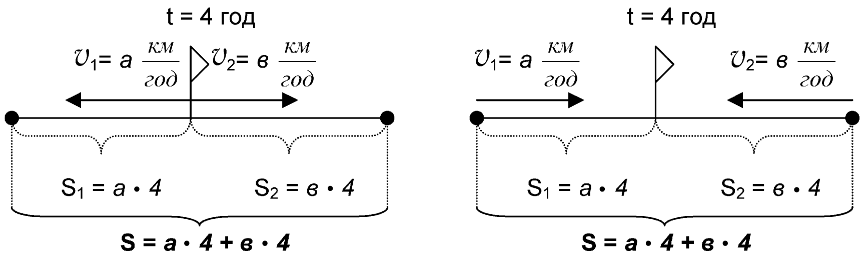


Рис. 5.48. Опорні схеми та математична модель задач на одночасний рух у різних напрямках, в яких шуканою є відстань

а, в — числові дані

Заміна числових значень буквами не вплинула на план розв'язування задач: першою дією знаходимо відстань, що подолало перше тіло, другою дією — відстань, що подолало друге тіло, і третьою дією знаходимо відстань, яку подолали обидва тіла.

5. Зміна шуканого в задачі № 1. Складання і розв'язання оберненої задачі на знаходження швидкості при одночасному русі назустріч (задача № 2). Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

Задачу на знаходження швидкості вводимо як обернену задачу на знаходження відстані.

З двох сіл виїхали одночасно назустріч один одному трактор та бричка з конем. Трактор рухався зі швидкістю 9 км/год., а швидкість брички 7 км/год. Чому дорівнює відстань між селами, якщо вони зустрілися через 2 години?

Отже, учні розв'язують задачу на знаходження відстані при одночасному русі назустріч, застосовуючи узагальнений план, і перевіряють правильність її розв'язання засобом складання і розв'язування оберненої задачі на знаходження швидкості (задача № 2).

Задача 2. З двох сіл, відстань між якими 32 км, одночасно назустріч один одному вирушили трактор та бричка з конем і зустрілися через 2 години. Чому дорівнює швидкість трактора, якщо швидкість брички 7 км/год.?

Учні виконують зміни у короткому записі прямої задачі, роблять відповідні висновки, пояснюють числові дані задачі та з'ясовують, як пов'язана шукана величина з іншими величинами, виконується аналітичний пошук розв'язування, формулюється план і записується розв'язання по діях з поясненням.

6. Зміна напрямку руху в задачі № 2 — тіла рухаються у протилежних напрямках. Дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

Школярі виконують зміни у короткому записі задачі № 2, пояснюють числові дані та роблять відповідні висновки; з'ясовують, чим ця задача відрізняється від попередньої та як вплине ця зміна на розв'язання задачі. Діти встановлюють, що розв'язання лишається тим самим, план розв'язування не змінюється, тому задачі на знаходження швидкості при одночасному русі назустріч та при одночасному русі у протилежних напрямках розв'язуються за планом:

Першою дією визначають відстань, яку пройшло перше тіло.

Другою дією визначають відстань, яку пройшло друге тіло. Третьою дією визначають швидкість.

7. Заміна числових даних швидкості одного з тіл та відстані буквами та дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

Пропонується задача, в якій значення швидкості одного тіла та відстані подані буквами і шуканою є швидкість іншого тіла за умов двох варіантів руху — руху назустріч та руху у протилежних напрямках.

Два велосипедиста вирушили одночасно, причому швидкість першого велосипедиста ***a*** км/год.. Знайдіть швидкість другого велосипедиста, якщо:

а) вони рухаються в протилежних напрямах і відстань через 5 годин після початку руху складала ***x*** км;

б) відстань на початку руху складала ***x*** км, а зустріч відбулася через 5 годин.

Діти виконують рисунок до кожного варіанту руху та розв'язують обидві задачі (рис. 5.49).

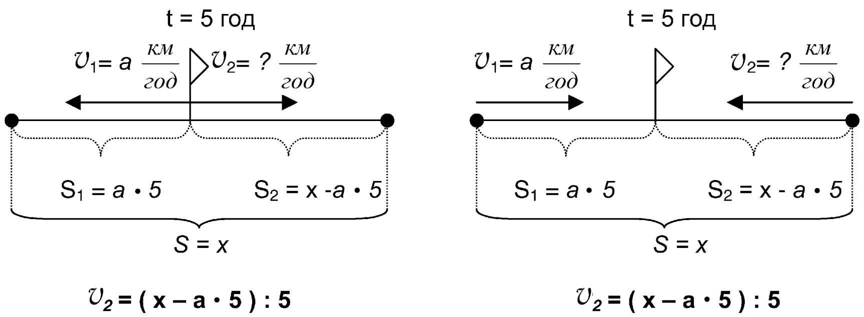


Рис. 5.49. Опорні схеми та математична модель задач на одночасний рух у різних напрямках, в яких шуканою є швидкість

a, *x* — числові дані

Заміна числових значень буквами не вплинула на план розв'язання задач: першою дією знаходимо відстань, що подолало одне тіло, другою дією — відстань, що подолало інше тіло і третьою дією знаходимо швидкість іншого тіла і відповідаємо на запитання задачі.

8. Узагальнення планів розв'язування задач на знаходження відстані та на знаходження швидкості при одночасному русі назустріч та у протилежних напрямках. Формулювання першого способу розв'язування цих задач

Порівнявши плани розв'язування задач на знаходження відстані і швидкості при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямках, робимо узагальнюючий висновок: якщо в задачі треба знайти відстань або швидкість при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямах, то цю задачу розв'язують за планом (див. рис. 5.50).

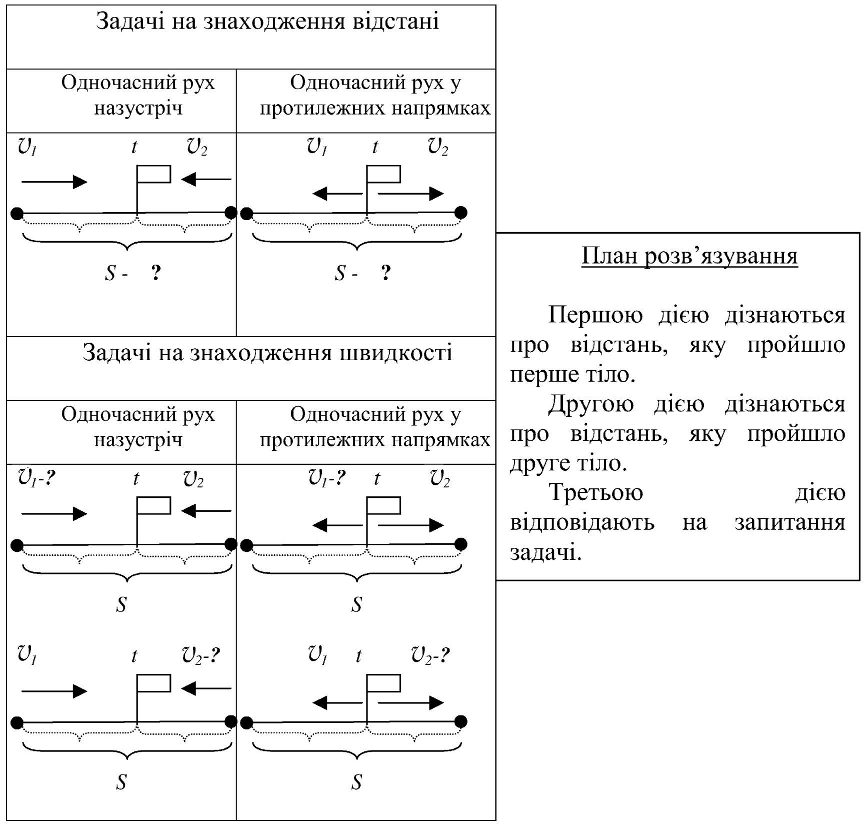


Рис. 5.50. Опорні схеми та план розв'язування задач на одночасний рух в різних напрямках, в яких шуканою є відстань або час (1 спосіб)

υ_1 — швидкість першого тіла, υ_2 — швидкість другого тіла, t — час спільного руху, S — відстань між тілами на момент початку або на момент закінчення руху

9. Ознайомлення з другим способом розв'язання задач на рух. Задача № 3 на знаходження відстані при одночасному русі на зустріч

Пропонуємо учням розв'язати задачу на знаходження відстані при одночасному русі назустріч відомим способом.

Задача 3. З двох селищ одночасно назустріч один одному вирушили хлопчик і дівчинка. Швидкість хлопчика 5 км/год., а швидкість дівчинки 4 км/год. Яка відстань між селищами, якщо вони зустрілися через 3 години після початку руху?

Робота над задачею після її розв'язання полягає у розв'язанні цієї задачі другим способом. Пропозиція вчителя розв'язати задачу другим способом викликає здивування в учнів і активізує пізнавальну активність. Складається проблемна ситуація, вихід з якої полягає у зверненні уваги учнів на характер зміни відстані при одночасному русі назустріч — відстань кожної години зменшується; згадуємо, як дізнатися про числове значення зміни відстані (це було опрацьовано на етапі підготовки до введення задач на рух). Отже, «ключ» до розв'язання задачі іншим способом знайдено — характер і числове значення зміни відстані за одиницю часу! Далі звертаємо увагу учнів на час руху обох тіл до зустрічі, що свідчить про те, «скільки разів» здійснювалося «зменшення, наближення», поки вони не зустрілися, тому, помноживши числове значення відстані, на яку наближалися тіла за одиницю часу, на час їх руху до зустрічі, дізнаємося про відстань, на яку вони наблизилися в результаті спільного руху, а тому й дізнаємося про шукану відстань. Розв'язання задачі другим способом передбачає ще й переформулювання запитання задачі — запитання «Яка відстань між пунктами, з яких почали рухатися тіла?» слід переформулювати так: «На яку відстань наблизилися тіла одне до одного під час їх спільного руху до зустрічі?».

10. Зміна напрямку руху в задачі № 3 — тіла рухаються у протилежних напрямках. Дослідження впливу цієї зміни на другий спосіб розв'язування

Далі учням пропонується перетворити попередню задачу на знаходження відстані при одночасному русі назустріч в задачу на одночасний рух в протилежних напрямах і розв'язати її двома способами. Виконавши зміни у короткому записі задачі № 3, учні пояснюють числові дані, роблять відповідні висновки, розв'язують задачу спочатку другим способом, переформулювавши запитання задачі. Далі здійснюються аналітичні міркування від запитання задачі до числових даних, складається план розв'язування і записується розв'язання по діях з поясненням.

Вчитель пропонує порівняти другі способи розв'язування цієї та попередньої задачі. Школярі помічають, що в них майже однакові розв'язання: однакові дії, але різні пояснення — в першій задачі тіла наближуються, а в другій — віддаляються; першою дією дізнаємося, на скільки тіла наближуються чи віддаляються, — на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу, а другою дією дізнаємося, на скільки тіла наблизилися чи віддалилися, — на скільки змінилася відстань між тілами за весь час руху.

Розв'язавши задачу першим способом, порівнюємо перші способи розв'язування цих двох задач — учні дістають висновку, що вони мають однакові розв'язання. Потім порівнюємо перший та другий спосіб розв'язування задач: першим способом ми розв'язали задачу трьома діями, а другий спосіб містить лише дві дії (див. табл. 5.2).

Таблиця 5.2

Способи розв'язування задач на одночасний рух в різних напрямках на знаходження відстані

1 спосіб	2 спосіб
Першою дією дізнаються про відстань, яку пройшло перше тіло. Другою дією дізнаються про відстань, яку пройшло друге тіло. Третьою дією дізнаються про всю відстань.	Першою дією дізнаються, на скільки змінюється відстань за одиницю часу. Другою дією дізнаються, на скільки змінилася відстань за весь час руху.

При **першому способі** розв'язування ми **розглядаємо** спочатку **окремо рух першого тіла та окремо рух другого тіла**. І лише після цього знаходимо, яку відстань обидва тіла подолали разом. При **другому способі** розв'язування ми **розглядаємо рух двох тіл одне відносно одного**: спочатку знаходимо, на скільки змінюється відстань за одиницю часу, а потім — як змінилася відстань за весь час руху.

11. Заміна числових даних швидкості буквами та дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

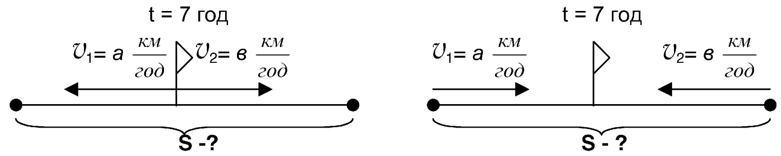
Школярам пропонується задача, в якій значення швидкостей тіл подані буквами і шуканою є відстань за умов двох варіантів руху — руху назустріч та руху у протилежних напрямках.

Вантажна машина їде зі швидкістю *а* км/год., а легкова машина зі швидкістю *в* км/год. Знайди:

а) відстань, яка буде між ними через 7 годин, якщо вони вирушили одночасно з одного міста в протилежних напрямах;

б) відстань, яка була між ними на момент початку руху, якщо вони зустрілися через 7 годин.

Діти виконують рисунок до кожного варіанту руху та розв'язують обидві задачі двома способами (див. рис. 5.51).



1 спосіб	2 спосіб
S = *а* • *7* + *в* • *7*	S = *(а* + *в)* • *7*

Рис. 5.51. Опорні схеми та математична модель двох способів розв'язання задач на одночасний рух у різних напрямках, в яких шуканою є відстань

а, в — числові дані

Як бачимо, вирази до першого та другого способів розв'язування цих задач зовсім однакові. Отже, заміна числових значень буквами не впливає на способи розв'язування задач на знаходження відстані при одночасному русі назустріч та у протилежних напрямках.

12. Зміна шуканого в задачі № 3. Складання і розв'язування оберненої задачі на знаходження швидкості при одночасному русі назустріч (задача № 4)

До попередньої задачі складається і розв'язується обернена задача на знаходження швидкості при одночасному русі в протилежних напрямках. Учні розв'язують цю задачу першим способом за пам'яткою.

Задача 4. З одного селища одночасно в протилежних напрямах вирушили хлопчик і дівчинка. Через 3 години відстань між ними складала 27 км. Яка швидкість хлопчика, якщо швидкість дівчинки 4 км/год.?

Далі вчитель звертає увагу на те, що при даному способі розв'язування ми розглядали рух тіл окремо одне від одного. Існує інший спосіб розв'язування, коли розглядається рух двох тіл одне відносно одного. При розв'язуванні задачі другим способом нас цікавить характер зміни відстані між тілами за одиницю часу та її числове значення. Отже, «ключ» до розв'язання цієї задачі той самий, що й для попередньої, — на скільки змінюється відстань за одиницю часу, але спосіб його знаходження інший. Якщо у задачі на знаходження відстані ми про це дізнавалися додаванням відстаней, що подолало кожне тіло за одиницю часу, то в даній задачі — діленням відстані, на яку віддалилися тіла, на час їх спільного руху. Знаючи, на скільки змінюється (збільшується) відстань за одиницю часу між тілами, і знаючи, скільки долає одне з тіл за одиницю часу, дією віднімання знаходимо, яку відстань долає інше тіло за одиницю часу, з цього робимо висновок про швидкість іншого тіла.

Таким чином, розв'язання задачі на знаходження швидкості при одночасному русі в протилежних напрямках передбачає також переформулювання запитання. Запитання: «Яка швидкість тала?», виходячи з фізичного змісту швидкості замінюється запитанням: «Яку відстань долає це тіло за одиницю часу?».

13. Зміна напрямку руху в задачі № 4 — тіла рухаються назустріч одне одному. Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

Припускаємо, що тіла рухалися назустріч одне одному, і з'ясовуємо, як ця зміна впливає на знаходження швидкості одного з тіл другим способом. У розв'язанні треба «поправити» лише пояснення до першої дії: «на скільки кілометрів **збільшується** відстань між тілами» слід замінити «на скільки кілометрів **зменшується** відстань між тілами». Отже, ця зміна майже не впливає на план розв'язування задачі: першою дією знаходимо, на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу, а другою дією знаходимо, яку відстань долає тіло за одиницю часу, і робимо висновок про його швидкість.

Порівнявши перші та другі способи розв'язування цих задач, узагальнюємо їх (див. табл. 5.3).

При **першому способі** розв'язування ми **розглядаємо** спочатку **окремо рух першого тіла та окремо рух другого тіла**. І лише після цього знаходимо шукану швидкість. При **другому способі** розв'язування ми **розглядаємо рух двох тіл одне відносно одного**: спочатку знаходимо, на скільки змінюється відстань за одиницю часу, а потім — скільки кілометрів проходить тіло за одиницю часу і робимо висновок про швидкість його руху.

Таблиця 5.3

Способи розв'язування задач на одночасний рух в різних напрямках, в яких шуканою є швидкість одного з тіл

1 спосіб	2 спосіб
Першою дією дізнаються про відстань, яку пройшло перше тіло. Другою дією дізнаються про відстань, яку пройшло друге тіло. Третьою дією дізнаються про швидкість.	Першою дією дізнаються, на скільки змінюється відстань за одиницю часу. Другою дією дізнаються, яку відстань проходить тіло за одиницю часу, тобто дізнаються про швидкість його руху.

14. Заміна числових даних швидкості одного з тіл та відстані буквами і дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

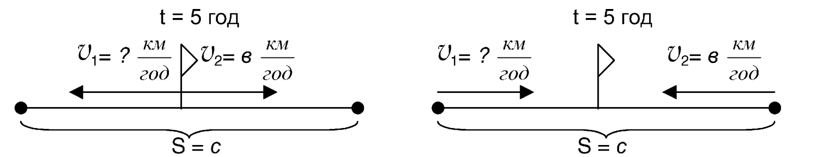
Пропонується задача, в якій значення швидкості одного тіла та відстані подані буквами і шуканою є швидкість іншого тіла за умов двох варіантів руху — руху назустріч та руху у протилежних напрямках.

Вершник і велосипедист вирушили одночасно. Знайти швидкість вершника, якщо швидкість велосипедиста *в* км/год., і:

а) якщо вони вирушили одночасно з одного міста в протилежних напрямах та через 5 годин відстань між ними склала *с* км;

б) якщо вони вирушили одночасно назустріч один одному з двох пунктів, відстань між якими с км, і зустрілися через 5 годин.

Діти виконують рисунок до кожного варіанту руху та розв'язують обидві задачі двома способами (рис. 5.52).



1 спосіб	2 спосіб
$\upsilon = (c - в \cdot 5) : 5$	$\upsilon = c : 5 - в$

Рис. 5.52. Опорні схеми та математична модель двох способів розв'язання задач на одночасний рух у різних напрямках, в яких шуканою є швидкість

с, в — числові дані

Математичні моделі першого та другого способів розв'язування цих задач зовсім однакові; заміна числових значень буквами не вплинула на розв'язання задач обома способами. Отже, напрямок руху (назустріч або у протилежних напрямках) не впливає на математичну модель задачі.

15. Узагальнення планів розв'язування задач на знаходження відстані та на знаходження швидкості при одночасному русі назустріч та у протилежних напрямках. Формулювання другого способу розв'язування цих задач

Порівнявши плани розв'язування задач на знаходження відстані і швидкості при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямках, робимо узагальнюючий висновок: якщо в задачі треба знайти відстань або швидкість при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямах, то цю задачу розв'язують двома способами (див. рис. 5.53).

16. Закріплення уміння розв'язувати задачі на знаходження відстані і швидкості при одночасному русі назустріч та у протилежних напрямках двома способами

На цьому етапі учням пропонуються різноманітні задачі на знаходження відстані та швидкості. Методика роботи над цими задачами складається за пам'ятками.

Пам'ятка (2 спосіб)

1. Про що йде мова в задачі?
2. Що відомо про час початку руху?
3. Як рухаються тіла?
4. Зробіть висновки.

   1) Відстань між тілами весь час збільшується/зменшується.

   2) Весь шлях складається зі шляху, який подолано першим тілом, та шляху, який подолало друге тіло.

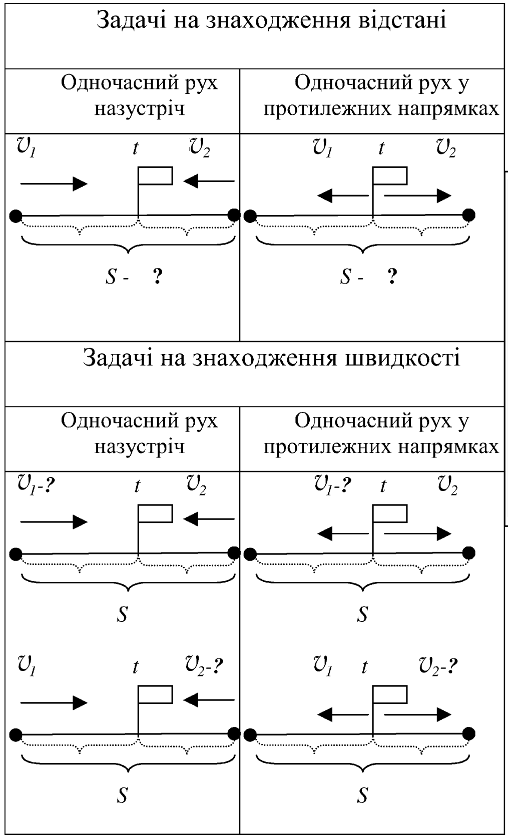
   3) Кожне тіло на рух витратило однаковий час, тому що вони почали рухатися одночасно і закінчили рухатися одночасно.
5. Складіть короткий запис задачі.
6. За коротким записом поясніть числа задачі.
7. Складіть план розв'язування задачі.

   Першою дією визначають на скільки збільшується/зменшується відстань між тілами за кожну годину.
   Другою дією відповідають на запитання задачі.

8. Запишіть розв'язання по діях з поясненням або виразом.

9. Запишіть відповідь до задачі.

10. Розв'яжіть задачу першим способом або складіть і розв'яжіть обернену задачу, (на знаходження відстані/швидкості) або перетворіть задачу у задачу на рух назустріч/рух в протилежних напрямах.



1 спосіб	2 спосіб
1) знаходимо відстань, яку пройшло одне тіло; 2) знаходимо відстань, яку подолало інше тіло; 3) відповідаємо на запитання задачі.	1) знаходимо, на скільки змінюється відстань за одиницю часу; 2) відповідаємо на запитання задачі.

Рис. 5.53. Опорні схеми та плани розв'язування задач на одночасний рух у різних напрямках двома способами:

v_1 — швидкість першого тіла; v_2 — швидкість другого тіла; t — час спільного руху; S — відстань між тілами на момент початку або на момент закінчення руху

Зазначимо, що треба звернути увагу учнів на те, що кожну задачу можна розв'язати двома діями, причому першою дією знаходимо, на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу, але в задачі на знаходження відстані ми це визначаємо дією додавання, а в задачі на знаходження швидкості — дією ділення.

17. Розв'язання задач на знаходження відстані при одночасному русі назустріч. Зміна шуканого задачі засобом складання і розв'язування оберненої задачі на знаходження часу (задача № 5). Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

Задачі на знаходження часу при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямах вводимо, як обернені задачі до задач на знаходження відстані.

Пряма задача. З Києва та Одеси одночасно назустріч один одному відправилися два автобуси. Швидкість першого автобуса 60 км/год., швидкість другого автобуса 90 км/год. Яка відстань між містами, якщо автобуси зустрілися через 3 години після початку руху?

Розв'язуємо пряму задачу другим способом, після її розв'язання складаємо обернену задачу на знаходження часу.

Задача № 5. З Києва та Одеси одночасно назустріч один одному відправилися два автобуси. Швидкість першого автобуса 60 км/год., швидкість другого автобуса 90 км/год. Через скільки годин вони зустрінуться, якщо відстань між містами 450 км?

Вносимо зміни у короткий запис, з'ясовуємо, як ця зміна вплине на розв'язання задачі: перша дія не змінюється — знаходимо, на скільки змінюється (скорочується) відстань між тілами за одиницю часу. Отже, «ключ» до розв'язання задачі на знаходження часу той самий, що й для задач на знаходження відстані та швидкості, — на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу. При чому її числове значення знаходять так само, як і у задачах на знаходження відстані, — додаванням числових значень відстаней, які долає кожне тіло за одиницю часу. Знаючи відстань, на яку повинні наблизитися тіла за весь час спільного руху, та знаючи, на скільки вони наближаються одне до одного за одиницю часу, можна дізнатися, «скільки разів вони повинні здійснити наближення, щоб зустрітися», про час зустрічі. Отже, змінюється друга дія — в цій задачі ми знаходимо час дією ділення.

На відміну від задач на знаходження відстані та на знаходження швидкості при одночасному русі в різних напрямках, задачі на знаходження часу руху розв'язуються лише одним способом — другим — **способом, коли розглядаємо рух двох тіл одне відносно одного**.

18. Зміна напрямку руху задачі № 5 — тіла рухаються у протилежних напрямках. Дослідження впливу цієї зміни на розв'язання задачі

За умовою попередньої задачі тіла зустрілися, продовжимо цю задачу — припустимо, тіла продовжили рух, але у протилежних напрямках. Учні вносять зміни у короткий запис попередньої задачі та формулюють отриману задачу. З'ясовують, чим відрізняються ці задачі і як ця зміна вплине на розв'язання задачі: змінюються пояснення до арифметичних дій, узагальнюємо план розв'язування задач на знаходження часу при одночасному русі назустріч та у протилежних напрямках:

Першою дією визначають, на скільки збільшується/зменшується відстань між тілами за кожну годину.

Другою дією — скільки разів в загальній відстані міститься по числу кілометрів, на яке змінюється відстань між поїздами за кожну годину, і робимо висновок про час руху.

19. Заміна числових даних швидкостей тіл та відстані буквами та дослідження впливу цієї зміни на план розв'язування задачі

Пропонується задача, в якій значення швидкостей тіл та відстані подані буквами і шуканим є час їх спільного руху за умов двох варіантів руху — руху назустріч та руху у протилежних напрямках.

Два пішоходи вирушили одночасно. Швидкість першого *а* км/год., а швидкість другого *в* км/год. Знайти час руху пішоходів, якщо:

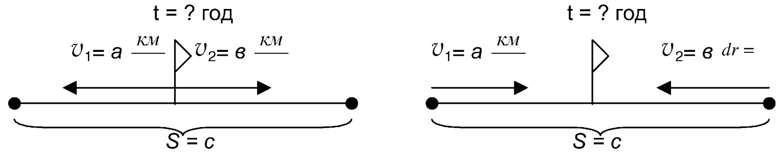
а) вони вирушили з одного міста в протилежних напрямах і віддалилися один від одного на *с км*;

б) вони вирушили назустріч один одному з двох пунктів, відстань між якими *с км*.

Діти виконують рисунок до кожного варіанту руху та розв'язують обидві задачі (рис. 5.54).

Математичні моделі цих задач однакові. Отже, задачі на знаходження часу руху при одночасному русі назустріч або в протилежних напрямах розв'язуються лише одним способом; і запропоновану пам'ятку для знаходження відстані і швидкості (другим способом) можна узагальнити і для знаходження часу.

Зазначимо, що треба звернути увагу учнів на те, що кожну задачу можна розв'язати двома діями, причому першою дією знаходимо, на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу, але в задачі на знаходження відстані і часу ми це визначаємо дією додавання, а в задачі на знаходження швидкості — дією ділення. Результати узагальнення подані на рисунку 5.55.



1 спосіб	2 спосіб
-	$t = c : (a + в)$

Рис. 5.54. Опорні схеми та математична модель двох способів розв'язання задач на одночасний рух у різних напрямках, в яких шуканим є час руху

а, в, с — числові дані

20. Формування умінь розв'язувати задачі на одночасний рух в різних напрямках двома способами

При формуванні умінь розв'язувати задачі на одночасний рух назустріч або в протилежних напрямах працюємо над задачами за пам'ятками і розв'язуємо задачі на знаходження відстані і швидкості двома способами, часу — одним способом, складаємо обернені задачі.

До задач ставимо творчі запитання, наприклад: «Чи могли тіла зустрітися на середині шляху? За яких умов? Якщо тіла після зустрічі продовжать свій рух, то яке тіло приїде у кінцевий пункт раніше?».

З метою ускладнення задач, на цьому етапі навчання, застосовують наступні прийоми:

- значення швидкостей пропонуються у різних одиницях вимірювання;
- вимагається дізнатися яка відстань буде між тілами через певний час при одночасному русі назустріч і через який час вони зустрінуться;
- у задачах на знаходження відстані і часу значення швидкості одного з тіл не дано, але дано різницеве відношення швидкостей обох тіл;
- одночасний рух у протилежних напрямках починається не з одного, а з різних пунктів;
- не дано час спільного руху, а сказано, о котрій годині розпочався рух та у котрій годині він закінчився;
- рух тіл розпочинається не одночасно.

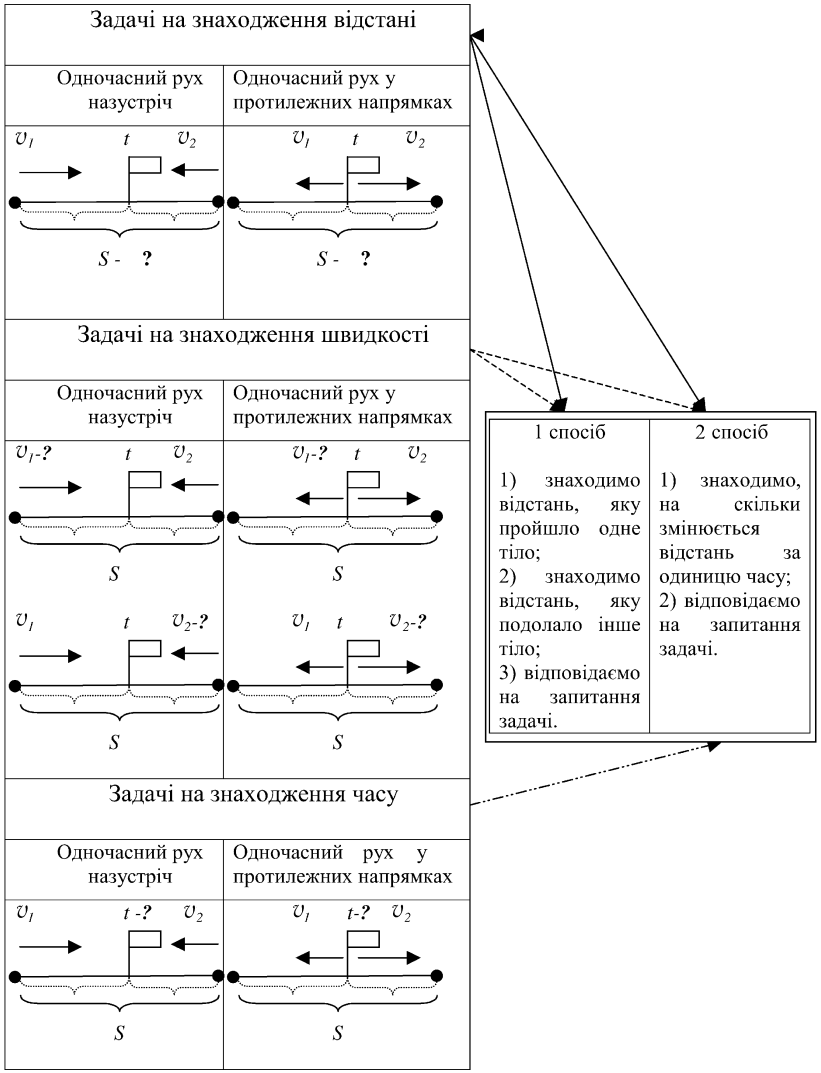


Рис. 5.55. Опорні схеми та план розв'язування задач на одночасний рух у різних напрямках двома способами

υ_1 — швидкість першого тіла; υ_2 — швидкість другого тіла; t — час спільного руху; S — відстань між тілами на момент початку або на момент закінчення руху

Більш докладно методика формування у молодших школярів умінь розв'язувати задачі на одночасний рух у різних напрямках подана у публікаціях автора [501; 502]. Система завдань, засобом яких реалізується запропонована методика, представлена у роботах автора [486; 487].

5.2.3. Узагальнення математичних структур та способів розв'язування задач на одночасний рух в різних напрямках і на спільну роботу

21. Складання задач на одночасний рух назустріч або у протилежних напрямках за таблицею або виразом

З метою подальшого усвідомлення спільного і відмінного у задачах на одночасний рух назустріч або в протилежних напрямах учням пропонуються завдання на складання задач за таблицями (рис. 5.56).

1

	відстань	швидкість	час
I		υ_1	
II		υ_2	
I і II	**?**	?	t

2

	відстань	швидкість	час
I		υ_1	
II		υ_2	
I і II	S	?	**?**

3

	відстань	швидкість	час
I		**?**	
II		υ_2	
I і II	S	?	t

4

	відстань	швидкість	час
I		υ_1	
II		**?**	
I і II	S	?	t

Рис. 5.56. Таблична форма короткого запису задач на одночасний рух в різних напрямках

За кожною з цих таблиць можна скласти дві задачі: задачу на одночасний рух назустріч і задачу на одночасний рух в протилежних напрямах; причому ці задачі мають однакову математичну модель.

Також пропонуємо учням, використовуючи дані таблиць, скласти задачі, які мають наступні математичні моделі:

$$1)\ \ S = \upsilon_1 \cdot t + \upsilon_2 \cdot t;\ \ S = (\upsilon_1 + \upsilon_2) \cdot t;$$

2) $t = S : (\upsilon_1 + \upsilon_2)$;

3) $\upsilon_1 = (S - \upsilon_2 \cdot t) : t;\ \upsilon_1 = S : t - \upsilon_2$

4) $\upsilon_2 = (S - \upsilon_1 \cdot t) : t;\ \upsilon_2 = S : t - \upsilon_1$

До цих виразів можна скласти одні й ті самі задачі: на зустрічний рух та рух в протилежних напрямах — це лише два способи їх розв'язування.

22. Зіставлення задач на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці являє собою суму продуктивностей виконавців, з задачами на одночасний рух в різних напрямках

Учням пропонуються для розв'язання пари задач з однаковими числовими даними, але перша задача — задача на рух, а друга задача — на спільну роботу.

1) З двох станцій виїхали одночасно назустріч один одному два товарних потяги і зустрілися через 5 годин. Перший потяг рухався зі швидкістю 29 км/год., а другий — 35 км/год. Яка відстань між станціями?

2) Два робітники виконали планове завдання за 5 годин, працюючи разом. Перший робітник виготовляв 29 деталей щогодини, а другий — 35 деталей щогодини. Скільки деталей становило планове завдання?

Школярі записують кожну задачу коротко в формі таблиці і, порівнюючи короткі записи, помічають схожість математичних структур цих задач. Після розв'язання задач двома способами, якщо це можливо, знов здійснюється порівняння і робиться висновок про те, що ці задачі мають однакові розв'язання.

Спочатку учням пропонуються пари задач на знаходження відстані при одночасному русі назустріч (у протилежних напрямках) та на знаходження продуктивності спільної праці. Потім — на знаходження часу руху при русі назустріч (при русі у протилежних напрямках) та на знаходження часу спільної праці. І, нарешті, на знаходження швидкості одного з тіл при русі назустріч (при русі у протилежних напрямках) та на знаходження продуктивності одного з виконавців.

Така робота надає можливість узагальнити математичну структуру та способи розв'язування задач на одночасний рух та задач на спільну роботу (рис. 5.57—5.59).

	заг. виробіток / *відстань*	*продукт. пр.* / *швидкість*	час
I		N_1 / υ_1	
II		**?**	
I і II	A / S	?	t

I спосіб	2 спосіб
$N_2 = (A - N_1 \cdot t) : t$ $\upsilon_2 = (S - \upsilon_1 \cdot t) : t$	$N_2 = A : t - N_1$ $\upsilon_2 = S : t - \upsilon_1$

	заг. виробіток / *відстань*	*продукт. пр.* / *швидкість*	час
I		**?**	
II		N_2 / υ_2	
I і II	A / S	?	t

1 спосіб	2 спосіб
$N_1 = (A - N_2 \cdot t) : t$ $\upsilon_1 = (S - \upsilon_2 \cdot t) : t$	$N_1 = A : t - N_2$ $\upsilon_1 = S : t - \upsilon_2$

I спосіб	2 спосіб
1) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ одного об'єкта для даного значення часу; 2) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ іншого об'єкта для даного значення часу; 1) знаходимо шукану $\frac{\text{продукт. пр.}}{\text{швидкість}}$	1) знаходимо $\frac{\text{продуктивність спільної праці}}{\text{на ск. змін. відстань за одиницю часу}}$; 2) знаходимо шукану $\frac{\text{продуктивність другого виконавця}}{\text{яку відстань яку долає тіло за одиницю часу; його швидкість}}$

Рис. 5.57. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух в різних напрямках, в яких шуканою є продуктивність другого виконавця або швидкість другого тіла:

N_1 — продуктивність праці першого виконавця; N_2 — продуктивність праці другого виконавця; A — загальний виробіток при спільній праці; υ_1 — швидкість першого тіла; υ_2 — швидкість другого тіла; t — час спільного руху або час спільної праці; S — відстань між тілами на момент початку або на момент закінчення руху

	$\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$	$\frac{\text{продукт. пр.}}{\text{швидкість}}$	час
I		$N_1 / \mathcal{V}_1$	
II		$N_2 / \mathcal{V}_2$	
I і II	?	?	t

I спосіб	2 спосіб
$A = N_1 \cdot t + N_2 \cdot t$	$A = (N_1 + N_2) \cdot t$
$S = \mathcal{V}_1 \cdot t + \mathcal{V}_2 \cdot t$	$S = (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) \cdot t$

1 спосіб	2 спосіб
1) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ першого об'єкта для даного значення часу; 2) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ другого об'єкта для даного значення часу; 3) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ першого та другого об'єктів при їх спільн$\frac{\text{ій праці}}{\text{ому русі}}$	1) знаходимо $\frac{\text{продуктивність спільної праці}}{\text{на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу}}$; 2) знаходимо $\frac{\text{загальний виробіток при спільній праці}}{\text{на скільки змінилась відстань між тілами за час їх спільного руху}}$.

Рис. 5.58. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух в різних напрямках, в яких шуканою є загальний виробіток при спільній праці або відстань

	$\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$	$\frac{\text{продукт. пр.}}{\text{швидкість}}$	час
I		$N_1 / \mathcal{V}_1$	
II		$N_2 / \mathcal{V}_2$	
I і II	A / S	?	?

I спосіб	2 спосіб
	$t = A : (N_1 + N_2)$ $t = S : (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)$

2 спосіб	
1) знаходимо $\frac{\text{продуктивність спільної праці}}{\text{на ск. змін. відстань між тілами за одиницю часу}}$;	2) знаходимо час спільн$\frac{\text{ої праці}}{\text{ого руху}}$

Рис. 5.59. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух в різних напрямках, в яких шуканою є час спільної праці або час руху

23. Узагальнення математичних структур та способів розв'язання задач на рух та на спільну роботу

Проведена робота надає можливість узагальнити математичні структури задач на одночасний рух в різних напрямках та задач на спільну роботу, визначити їх спільні істотні ознаки та узагальнити способи розв'язування. Так, порівнявши усі пари математичних структур можливих задач на одночасний рух в різних напрямках та на спільну роботу, учні формулюють спільні ознаки цих задач.

Істотні спільні ознаки задач на спільну роботу та на одночасний рух в різних напрямках. Ці задачі містять:

1) три пропорційні величини: загальний виробіток/відстань продуктивність праці/швидкість, час роботи/руху;

2) три випадки: перші два стосуються роботи/руху кожного з двох об'єктів, а третій — їх спільної роботи/руху;

3) чотири числові значення: продуктивність праці/швидкість першого об'єкта, продуктивність праці/швидкість другого об'єкта, загальний виробіток/загальна відстань при їх спільній праці/русі та час спільної роботи/руху; три з них дано, а одне є шуканим.

Математичну структуру задач на одночасний рух та на спільну роботу можна подати у вигляді узагальненої таблиці; ці задачі мають два способи розв'язування (рис. 5.60).

	$\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$	$\frac{\text{продукт. пр.}}{\text{швидкість}}$	час
I		$N_1 / \mathcal{V}_1$	
II		$N_2 / \mathcal{V}_2$	
I і II	A / S	?	t

1 спосіб	2 спосіб
$A = N_1 \cdot t + N_2 \cdot t$ $S = \mathcal{V}_1 \cdot t + \mathcal{V}_2 \cdot t$	$A = (N_1 + N_2) \cdot t$ $S = (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) \cdot t$
	$t = A : (N_1 + N_2)$ $t = S : (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)$
$N_1 = (A - N_2 \cdot t) : t$ $N_2 = (A - N_1 \cdot t) : t$ $\mathcal{V}_1 = (S - \mathcal{V}_2 \cdot t) : t$ $\mathcal{V}_2 = (S - \mathcal{V}_1 \cdot t) : t$	$N_1 = A : t - N_2$ $N_2 = A : t - N_1$ $\mathcal{V}_1 = S : t - \mathcal{V}_2$ $\mathcal{V}_2 = S : t - \mathcal{V}_1$

Рис. 5.60. Узагальнена таблиця та способи розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух в різних напрямках

24. Перетворення задачі на рух у задачу на спільну роботу. Перетворення задачі на спільну роботу у задачу на рух

Учням пропонуються три задачі на одночасний рух у різних напрямках: на знаходження відстані, на знаходження швидкості та на знаходження часу руху. Ці задачі школярі перетворюють відповідно у задачі на знаходження загального виробітку спільної праці, на знаходження продуктивності одного з виконавців та на знаходження часу спільної праці. При перетворенні задач на спільну роботу у задачі на одночасний рух в різних напрямках, до кожної задачі на спільну роботу учні складають по дві задачі на рух — на рух назустріч та на рух у протилежних напрямках. Вчитель вимагає записати розв'язання кожної задачі виразами, учні застосовують висновки, які були зроблені на попередньому етапі навчання, і складають до пари задач лише один вираз до кожного способу розв'язування.

25. Перетворення задачі на спільну роботу, в якій не дано продуктивності кожного виконавця, у відповідні задачі (ускладнені) на рух

Учням пропонується задача:

В басейні 2520 л води. Один насос може викачати цю воду за 21 хвилину, а другий — за 28 хвилин. За скільки хвилин викачають цю воду обидва насоси, працюючи разом?

Вони встановлюють, що це задача на спільну роботу на знаходження часу спільної праці, записують її коротко в формі таблиці і розв'язують її. Далі вчитель пропонує перетворити дану задачу у задачу на одночасний рух назустріч.

Відстань між будинками двох хлопчиків 2520 м. Перший хлопчик проходить цю відстань за 21 хвилину, а другий — за 28 хвилин. Через скільки хвилин хлопчики зустрінуться, якщо вони вирушать одночасно назустріч один одному?

Діти вносять зміни у короткий запис попередньої задачі, формулюють отриману задачу і з'ясовують, як зміна формулювання задачі вплине на її розв'язання: арифметичні дії не зміняться, але зміняться пояснення до них. Школярі формулюють план розв'язування задачі на знаходження часу зустрічі при одночасному русі назустріч і вносять зміни у розв'язання задачі на спільну роботу. Робота над задачею на цьому не припиняється — радимо учням за таблицею скласти задачу на одночасний рух у протилежних напрямках і дослідити, як ця зміна вплине на розв'язання задачі. Наприклад:

Шлях між будинками двох хлопчиків через школу 2520 м. Якщо вони одночасно виходять зі школи, то й одночасно приходять до дому. Два хлопчики одночасно вийшли зі школи і пішли у протилежних напрямках до власних будинків. Перший хлопчик проходить усю цю відстань за 21 хвилину, а другий — за 28 хвилин. Через скільки хвилин хлопчики будуть вдома?

При цьому розв'язання попередньої задачі майже не змінюється, треба змінити лише пояснення до третьої дії.

Далі визначається чим відрізняється розв'язання цих двох задач на рух від розв'язання звичайних задач на знаходження часу при одночасному русі. Задачі на знаходження часу ми розв'язували двома діями. Ці задачі дещо ускладнені — в них не дано швидкості кожного тіла, а дано для кожного з них час та відстань. Тому для розв'язання таких задач треба виконати додатково ще дві дії, щоб знайти швидкості кожного тіла.

Порівнявши розв'язання трьох задач (вирази), дістаємо висновку, що задачі на знаходження часу при спільній роботі та на знаходження часу руху при одночасному русі в різних напрямках мають одну й ту саму математичну структуру та одну математичну модель (рис. 5.61).

Далі пропонується задача на спільну роботу, в якій шуканим є загальний виробіток при спільній праці: Перша бригада проклала за 3 дні 120 м дороги, а друга 200 м за 4 дні. Скільки метрів дороги прокладуть за 2 дні обидві бригади, якщо працюватимуть разом?

Після розв'язування задачі двома способами радимо учням змінити величини та перетворити цю задачу у задачу на одночасний рух у протилежних напрямках.

Відстань між воротами спортивного майданчика становить 120 м. Хлопчик долає відстань між воротами за 3 хвилини, а дівчинка за 4 хвилини. Яка відстань буде між хлопчиком і дівчинкою через 2 хвилини, якщо вони вирушили одночасно у протилежних напрямках від центру майданчика?

Учні з'ясовують, як зміна формулювання впливає спочатку на перший спосіб, а потім й на другий спосіб розв'язування задачі, формулюють план розв'язування кожним способом і вносять зміни у розв'язання попередньої задачі. Складаємо ще одну задачу на рух — на одночасний рух назустріч.

Хлопчик долає відстань 120 м за 3 хвилини, а дівчинка за 4 хвилини. Від протилежних воріт спортивного майданчика одночасно назустріч один одному вирушили хлопчик і дівчинка і зустрілися через 2 хвилини. Яка відстань між воротами спортивного майданчику?

	$\frac{\textit{заг. виробіток}}{\textit{відстань}}$	$\frac{\textit{продукт. пр.}}{\textit{швидкість}}$	час
I	A/S	?	t_1
II	A/S	?	t_2
I і II	A/S	?	**?**

1 спосіб	2 спосіб
	$t = A : (A : t_1 + A : t_2)$ $t = S : (S : t_1 + S : t_2)$

2 спосіб
1) знаходимо $\frac{\text{продуктивність}}{\text{швидкість}}$ першого об'єкта; 2) знаходимо $\frac{\text{продуктивність}}{\text{швидкість}}$ другого об'єкта; 3) знаходимо $\frac{\text{продуктивність спільної праці}}{\text{на ск. змін. відстань між тілами за одиницю часу}}$; 4) знаходимо час спільн $\frac{\text{ої праці}}{\text{ого руху}}$

Рис. 5.61. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух в різних напрямках ускладненої структури, в яких шуканим є час спільної праці або спільного руху

Від цього перший спосіб розв'язування не змінюється, а у другому способі треба змінити пояснення лише до третьої дії.

Школярі встановлюють, чим відрізняються одержані задачі від «звичайних» задач на одночасний рух на знаходження відстані, в чому полягає ускладнення цих задач і як воно впливає на розв'язання задачі.

Порівнявши задачі на знаходження загального виробітку при спільній роботі та на знаходження відстані при одночасному русі в різних напрямках, діти дістають висновку, що вони мають одну й ту саму математичну структуру та одну математичну модель (рис. 5.62).

Після цього спочатку розв'язується задача на спільну роботу на знаходження часу самостійної праці одного з виконавців, а потім і задача на знаходження загального виробітку одного з виконавців.

	$\frac{\textit{заг. виробіток}}{\textit{відстань}}$	$\frac{\textit{продукт. пр.}}{\textit{швидкість}}$	час
I	A/S	?	t_1
II	A/S	?	t_2
I і II	**?**	?	t

1 спосіб	2 спосіб
$A = A : t_1 \cdot t + A : t_2 \cdot t$ $S = S : t_1 \cdot t + S : t_2 \cdot t$	$A = (A : t_1 + A : t_2) \cdot t$ $S = (S : t_1 + S : t_1) \cdot t$

1 спосіб	2 спосіб
1) знаходимо $\frac{\text{прод-сть}}{\text{швидкість}}$ першого об'єкта; 2) знаходимо $\frac{\text{прод-сть}}{\text{швидкість}}$ другого об'єкта; 3) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ першого об'єкта для даного значення часу спільно $\frac{\text{ї роботи}}{\text{го руху}}$; 4) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ другого об'єкта для даного значення часу спільно $\frac{\text{ї роботи}}{\text{го руху}}$; 5) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ першого та другого об'єктів при їх спільн $\frac{\text{ій праці}}{\text{ому русі}}$	1) знаходимо $\frac{\text{продуктивність}}{\text{швидкість}}$ першого об'єкта; 2) знаходимо $\frac{\text{продуктивність}}{\text{швидкість}}$ другого об'єкта; 3) знаходимо $\frac{\text{продуктивність спільної праці}}{\text{на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу}}$; 4) знаходимо $\frac{\text{загальний виробіток при спільній праці}}{\text{на скільки змінилась відстань між тілами за час їх спільного руху}}$.

Рис. 5.62. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух в різних напрямках, в яких шуканою є продуктивність одного з виконавців або швидкість одного з тіл

Обидва насоси викачали 4800 відер води за 15 годин роботи. За скільки годин викачає цю воду перший насос, якщо другий насос це може зробити за 24 години роботи?

Майстер і учень виготовили 286 деталей за 11 робочих годин. Скільки деталей може виготовити учень за 6 годин роботи, якщо майстер за 2 години робить 42 деталі?

Після розв'язання кожної задачі, так само, як і у попередніх випадках, учні перетворюють її у задачу на одночасний рух назустріч та у протилежних напрямках, узагальнюють їх математичні структури і способи розв'язування (див. рис. 5.63, 5.64).

	заг. виробіток / *відстань*	*продукт. пр.* / *швидкість*	час
I	A/S	?	**?**
II	A/S	?	t_2
I і II	A/S	?	t

1 спосіб	2 спосіб
	$t_2 = A : (A : t - A : t_2)$ $t_2 = S : (S : t - S : t_2)$

1 спосіб	2 спосіб
	1) знаходимо $\frac{\text{продуктивність спільної праці}}{\text{на ск. змін. відстань між тілами за одиницю часу}}$; 2) знаходимо $\frac{\text{продуктивність}}{\text{швидкість}}$ другого об'єкта; 3) знаходимо $\frac{\text{продуктивність}}{\text{швидкість}}$ першого об'єкта; 4) знаходимо час $\frac{\text{роботи}}{\text{руху}}$ першого об'єкта.

Рис. 5.63. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух в різних напрямках, в яких шуканим є час роботи одного з виконавців або час руху одного з тіл

	заг. виробіток / *відстань*	*продукт. пр.* / *швидкість*	час
I	**?**	?	t_1
II	A_2/S_2	?	t_2
I і II	A/S	?	t

1 спосіб	2 спосіб
	$A_1 = (A : t - A_2 : t_2) * t_1$ $S = (S : t - S_2 : t_1) * t_1$

1 спосіб	2 спосіб
	1) знаходимо $\frac{\text{продуктивність спільної праці}}{\text{на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу}}$; 2) знаходимо $\frac{\text{продуктивність}}{\text{швидкість}}$ другого об'єкта; 3) знаходимо $\frac{\text{продуктивність}}{\text{швидкість}}$ першого об'єкта; 4) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ першого об'єкта при відповідному значенні часу.

Рис. 5.64. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух в різних напрямках, в яких шуканим є загальний виробіток при спільній праці або відстань

З одного аеродрому одночасно в протилежних напрямках вилетіли два вертольоти, і через 15 хвилин відстань між ними становила 4800 м. За скільки хвилин може подолати цю відстань перший вертоліт, якщо другий вертоліт пролітає 4800 м за 24 хвилини?

З двох аеродромів, відстань між якими 4800 м, одночасно назустріч один одному вилетіли два вертольоти і через 15 хвилин зустрілися. За скільки хвилин може подолати відстань між аеродромами перший вертоліт, якщо другий вертоліт пролітає її за 24 хвилини?

5.2.4. Методика навчання розв'язування задач на рух в одному напрямку

1. Підготовча робота до ознайомлення з задачами на одночасний рух в одному напрямку

На ступені підготовчої роботи учні повинні:

1) спостерігати за рухом двох тіл в одному напрямку;
2) усвідомити, що коли швидкість тіла, що рухається позаду, більша/менша за швидкість тіла, що рухається попереду, то відбувається наближення/відстань одного тіла до/від другого.
3) зробити висновок: знайти, на скільки зменшується/збільшується відстань між тілами за одиницю часу, треба відніманням.

Підготовча робота розпочинається з визначення характеру зміни певної величини за одиницю часу (кількості людей, об'єму води, маси вугілля), тобто величини, яка не пов'язана з рухом двох тіл одне відносно одного.

Після спостереження учнями руху в одному напрямі (у випадках, коли швидкість тіла, що рухається позаду, більше або менше швидкості тіла, що рухається попереду) учні роблять висновок:

Якщо швидкість тіла, що рухається позаду більша/менша за швидкість тіла, що рухається попереду, то відстань між тілами весь час зменшується/збільшується.

Перше тіло наздогоняє/відстає від друге/ого тіло/а.

З метою закріплення цього висновку дітям пропонуються завдання на з'ясування умов, при яких одне діло наздоганяє інше або відстає від нього, або відстань між ними не змінюється.

Далі учням пропонуються завдання, які містять опис руху двох тіл в одному напрямку, і пропонується визначити характер зміни відстані між ними за одиницю часу і числове значення зміни відстані між тілами за одиницю часу. Наприклад:

Собака побігла за лисицею, яка знаходилася на відстані 120 м. Лисиця пробігає за хвилину 320 м. Чи зможе собака наздогнати лисицю, якщо буде пробігати 300 м за хвилину? Поясни відповідь.

Для формулювання правила знаходження числового значення зміни відстані між тілами, що рухаються в одному напрямку, учні розглядають ситуацію, коли два хлопчики починають бігти одночасно з одного пункту в одному напрямку з різними швидкостями. Виходячи з фізичного змісту швидкості, школярі визначають, яку відстань долає кожний хлопчик за одиницю часу, показуючи це відповідними відрізками, знаходять їх різницеве відношення. Отже, щоб дізнатися, на скільки одне тіло буде відставати від іншого або інше буде його випереджати, слід від більшого числового значення швидкості відняти менше. Для закріплення цього висновку пропонуються завдання:

Перша черепаха рухається за другою черепахою. Швидкість першої 8 дм/хв., швидкість другої — 6 дм/хв. Як змінюється відстань між черепахами? На скільки змінюється відстань між черепахами за кожну хвилину?

Також на етапі підготовчої роботи діти вчаться виконувати рисунки при одночасному русі в одному напрямку з різних пунктів (рис. 5.65).

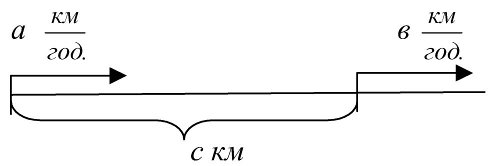


Рис. 5.65. Схематичний рисунок одночасного руху в одному напрямку з різних пунктів

а, в, с — числові дані задачі

З метою подолання вузького узагальнення слід пропонувати аналогічні завдання, на визначення характеру зміни відстані між тілами за одиницю часу та її числового значення, не лише у випадку руху в одному напрямку наздогін або з відставанням, а й на рух назустріч і в протилежних напрямах.

Далі корисно порівняти задачі на рух назустріч та рух в протилежних напрямах та на рух наздогін та рух з відставанням і узагальнити міркування при визначенні, на скільки змінюється відстань за одиницю часу. Учням пропонуються задачі з однаковими числовими даними, але заданими двома варіантами напрямку руху. Наприклад:

1. З пунктів А і В назустріч один одному/в протилежних напрямах вирушили два вершники. Швидкість першого вершника *а* км/год., а швидкість другого *в* км/год. Як змінюється відстань між вершниками? На скільки кілометрів вершники наближуються/віддаляються за кожну годину?

2. З пунктів А і В одночасно в одному напрямку вирушили два вершники. Швидкість першого вершника *а* км/год., а швидкість другого *в* км/год.; при чому $a > в$. Як могли рухатися вершники? Як змінюється відстань між вершниками? На скільки кілометрів вершники наближуються/віддаляються за кожну годину?

При цьому учні дістають висновків, що при русі назустріч/в протилежних напрямках відстань між тілами весь час зменшується/збільшується на суму числових значень швидкостей цих тіл, а при русі навздогін/з відставанням відстань між тілами весь час зменшується/збільшується на різницю числових значень швидкостей цих тіл (рис. 5.66).

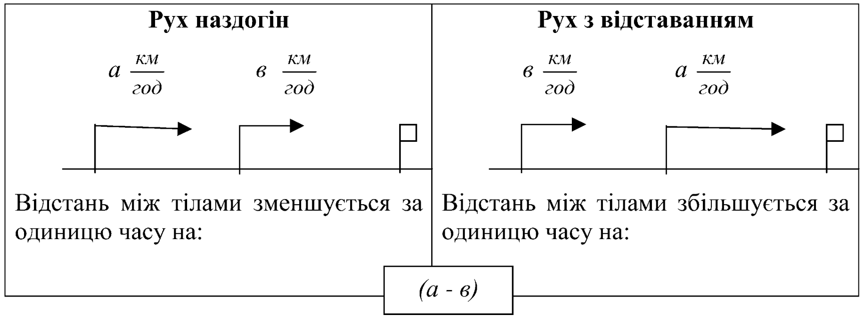


Рис. 5.66. Схематичний рисунок одночасного руху наздогін та з відставанням. Характер та числове значення зміни відстані між тілами за одиницю часу

а, в, с — числові дані задачі

1. Також слід звернути увагу школярів на однаковий характер зміни відстані між тілами за одиницю часу при одночасному русі назустріч та навздогін або при русі у протилежних напрямках та з відставанням. Цьому допоможе розв'язання задач з однаковими числовими даними, але двома варіантами напрямку руху. Наприклад:

1. З пунктів А і В назустріч один одному/наздогін вирушили одночасно два вершники. Швидкість першого вершника *а* км/год., а швидкість другого *в* км/год.; при чому $a > в$. Як змінюється відстань між вершниками? На скільки кілометрів вершники наближаються за кожну годину?

2. З пунктів А і В назустріч один одному/в протилежних напрямах вирушили одночасно два вершники. Швидкість першого вершника *а* км/год., а швидкість другого *в* км/год. Як змінюється відстань між вершниками? На скільки кілометрів вершники віддаляються за кожну годину?

Отже на етапі підготовчої роботи застосовується послідовне порівняння руху в різних напрямках і руху в одному напрямку: руху назустріч і руху наздогін, руху в протилежних напрямках і руху з відставанням; результати порівняння узагальнюються в буквеній формі. Крім того, використовується паралельне порівняння руху наздогін та руху з відставанням. Таким чином, після проведення запропонованої підготовчої роботи учні усвідомлюють, що рух в одному напрямку може відбуватися за двома варіантами: навздогін або з відставанням. Розглядаються умови здійснення того чи іншого варіанту; характер зміни відстані між тілами за одиницю часу за обома варіантами; спосіб знаходження цієї величини. Діти вчаться схематично зображати рух двох тіл в одному напрямку.

2. Ознайомлення з задачами на одночасний рух в одному напрямку. Задача № 1, яка передбачає два варіанти напрямку руху — назустріч та навздогін

Ознайомлення учнів із задачами на рух в одному напрямку цілком побудовано на порівнянні відомих учням видів задач — на рух в різних напрямках (назустріч та в протилежних напрямках) з задачами нового виду. Обидва види задач мають однакові способи знаходження відстані, часу та швидкості — і це учні усвідомлюють на підставі порівняння задач. Порівнюючи задачі, учні ще раз підкреслюють відмінність у знаходженні числового значення зміни відстані за одиницю часу при русі в різних та в одному напрямку. Таким чином здійснюється послідовне порівняння. Результати послідовного порівняння нами узагальнені в буквеній формі.

Отже, школярам пропонується умова з двома варіантами напрямку руху — назустріч та наздогін; рух починається з різних пунктів, дано відстань між пунктами та швидкості кожного тіла:

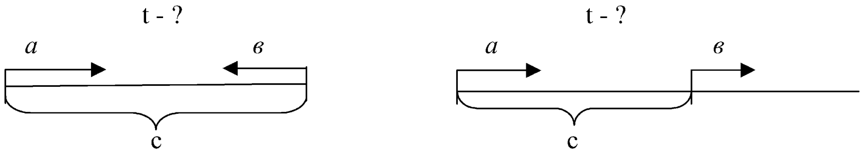
Задача 1. Відстань між пунктами А і В 108 км. З цих пунктів одночасно назустріч/наздогін один одному вирушили велосипедист і вершник. Швидкість вершника 12 км/год., а швидкість велосипедиста 15 км/год. На скільки кілометрів відстань скорочується за кожну годину? На скільки вони наблизяться один до одного за 3 години? Якою буде відстань між вершником і велосипедистом через 3 години?

3. Задача № 2 на знаходження часу з двома варіантами напрямку руху — назустріч та навздогін

Задача 2. Відстань між двома лижниками на момент початку руху складала 44 м. Вони почали рухатися одночасно назустріч/наздогін один одному. Швидкість першого лижника 12 м/хв. а швидкість другого 10 м/хв. Через скільки хвилин вони опиняться разом?

Оскільки учні вміють розв'язувати задачі на знаходження часу при одночасному русі назустріч, то спочатку розв'язується ця задача. Після її розв'язання розглядається інший варіант руху — наздогін, з'ясовується, як зміна напрямку вплине на розв'язання задачі. Відстань між тілами так само буде зменшуватися, але числове значення цієї зміни знаходять не додаванням, а відніманням, тому змінюється перша дія, а спосіб знаходження часу лишається тим самим.

Узагальнюємо спосіб знаходження часу руху при одночасному русі в різних та в одному напрямку (рис. 5.67).



Одночасний рух назустріч	Одночасний рух наздогін
$t = c : (a + в)$	$t = c : (a - в)$

Рис. 5.67. Спосіб знаходження часу руху при одночасному русі назустріч та наздогін

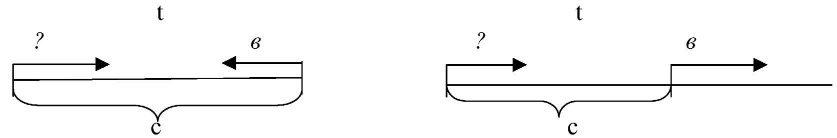
а, *в*, *с* — числові дані задачі

4. Задача № 3 на знаходження швидкості одного з тіл з двома варіантами напрямку руху — назустріч та навздогін

Задача 3. Відстань між двома чоловіками на момент початку руху була 600 м. Вони одночасно почали рухатися назустріч/наздогін і опинилися поряд через 2 хвилини. Яка швидкість другого чоловіка, якщо швидкість першого 170 м/хв.? (у випадку руху в одному напрямку другий рухається попереду першого.)

Працюємо над цією задачею аналогічно попередній. Розв'язавши задачу на одночасний рух назустріч, змінюємо напрямок руху і з'ясовуємо, що перша дія не змінюється і ми так само, як у попередній задачі, знаходимо числове значення зміни відстані за одиницю часу, але змінюється друга дія — віднімання заміняється додаванням. У іншому способі розв'язування так само змінюється друга дія, і відповідно, змінюються числа у третій дії.

Узагальнюємо способи знаходження швидкості при одночасному русі назустріч та наздогін (рис. 5.68).



Одночасний рух назустріч	*Одночасний рух наздогін*
1 спосіб $a = c : t - в$ 2 спосіб $a = (c - в * t) : t$	1 спосіб $a = c : t + в$ 2 спосіб $a = (c + в * t) : t$

Рис. 5.68. Спосіб знаходження швидкості одного з тіл при одночасному русі назустріч та наздогін

в, *с*, *t* — числові дані задачі

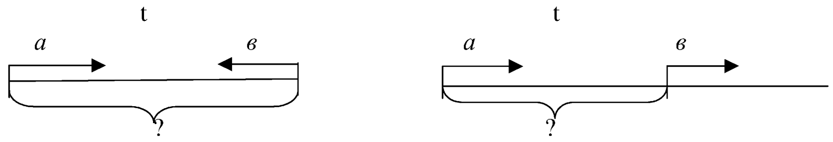
5. Задача № 4 на знаходження відстані між тілами на момент початку руху з двома варіантами напрямку руху — назустріч та навздогін

Задача 4. Два пішоходи почали рухатися одночасно назустріч/наздогін. Якою була відстань між ними на момент початку руху, якщо вони опинилися разом через 3 год., причому перший йшов зі швидкістю 5 км/год., а другий зі швидкістю 3 км/год.?

Робота над задачею відбувається аналогічно попереднім. Зміна напрямку руху впливає на першу дію, тому що числове значення зміни відстані за одиницю часу при русі навздогін знаходять не додаванням, а відніманням, тому треба замінити одне з чисел у останній — другій дії. При розв'язуванні задачі трьома діями змінюється остання дія — додавання замінюється відніманням.

Узагальнюємо способи знаходження швидкості при одночасному русі назустріч та наздогін (рис. 5.69).

Таким чином, на основі послідовного порівняння задач на одночасний рух назустріч та на одночасний рух наздогін нами визначено способи знаходження часу зустрічі, швидкості одного з тіл та відстані на момент початку руху у випадку, коли тіла рухаються в одному напрямку та одне тіло наближається до другого. Тепер існує можливість розглянути задачі на рух наздогін та з відставанням на основі паралельного порівняння.



Одночасний рух назустріч	Одночасний рух наздогін
1 спосіб $S = (a + в) * t$ 2 спосіб $S = a * t + в * t$	1 спосіб $S = (a - в) * t$ 2 спосіб $S = a * t - в * t$

Рис. 5.69. Спосіб знаходження відстані на момент початку руху при одночасному русі назустріч та наздогін

в, *а*, *t* — числові дані задачі

6. Задача № 4 на знаходження відстані на рух в одному напрямку, але за двома варіантами — наздогін та з відставанням

В умові задачі містяться числові дані: відстань на момент початку руху, швидкість кожного тіла та час їх спільного руху; дано значення часу спільного руху, але за цей час тіла не опиняються одне поруч з другим, навіть в умовах руху наздогін. Шуканою є відстань, яка буде між тілами через даний час.

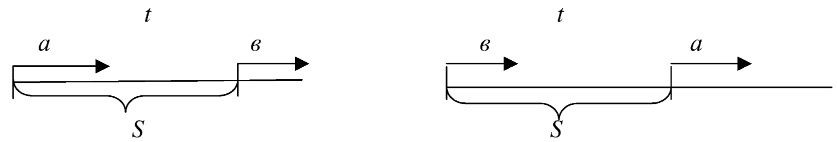
Задача 4. Два велосипедиста знаходяться на відстані 240 м один від одного. Швидкість першого велосипедиста 5 м/с., а швидкість другого 3 м/с. Вони почали рухатися одночасно в одному напрямі. Якою буде відстань між ними через 30 с., якщо вони рухаються так, що:

1) перший їде за другим;
2) другий їде за першим?

Спочатку розв'язується задача на рух наздогін. При першому способі учні визначають характер і числове значення зміни відстані за одиницю часу, дізнаються про числове значення зміни відстані за даний в умові задачі час, і третьою дією — про відстань, яку залишилося обом тілам подолати до зустрічі. При іншому способі першою дією дізнаємося, на скільки наближається одне тіло до другого за даний час, другою дією дізнаємося яку відстань залишилося скоротити першому, щоб дістатися другого; третьою дією — на скільки віддаляється друге тіло від першого за даний час; четвертою дією — про відстань між тілами через даний час.

Далі відбувається зміна напрямку руху у тіл: тепер друге тіло рухається за першим, відбувається рух з відставанням. З'ясовуємо, як ця зміна впливає на розв'язання задачі: в першому способі змінюється остання дія — віднімання замінюється додаванням; а другий спосіб майже не змінився — помінялися місцями числові значення швидкості в першій та третій діях.

Узагальнюємо способи знаходження відстані між тілами через певний час спільного руху при одночасному русі навздогін та з відставанням (рис. 5.70).



Одночасний рух навздогін	Одночасний рух з відставанням
1 спосіб $S - (a - в) \cdot t$ 2 спосіб $S - a \cdot t + в \cdot t$	1 спосіб $S + (a - в) \cdot t$ 2 спосіб $S - в \cdot t + a \cdot t$

Рис. 5.70. Спосіб знаходження відстані між тілами через певний час руху при одночасному русі наздогін та з відставанням

в, *а*, *t*, *S* — числові дані задачі

7. Складання і розв'язання оберненої задачі (№ 5) на знаходження відстані на момент початку руху до задачі № 4

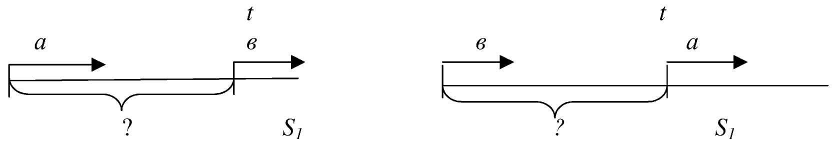
Учні пояснюють числа задачі № 4 до кожного варіанту руху і складають відповідно дві обернені задачі на знаходження відстані на момент початку руху.

Задача 5. Два велосипедиста почали рухатися одночасно в одному напрямі. Швидкість першого велосипедиста 5 м/с., а швидкість другого 3 м/с. Якою була відстань на момент початку руху, якщо через 30 с після початку руху відстань між ними була:

1) 180 м, причому перший їде за другим;
2) 300 м, причому другий їде за першим?

Робота йде аналогічно. Спочатку розв'язуємо задачу на рух навздогін. Першою дією дізнаємося про числове значення зміни відстані за одиницю часу, другою дією — про числове значення зміни відстані за час спільного руху тіл, третьою дією дізнаємось про відстань на момент початку руху. Зміна напрямку руху тіл — рух з відставанням — викликає відповідні зміни у поясненні до першої та другої дії (відстань між тілами не зменшується, а збільшується), змінюється третя дія — додавання замінюється відніманням.

Узагальнюємо спосіб знаходження відстані між тілами на момент початку руху при одночасному русі наздогін та з відставанням (рис. 5.71).



Одночасний рух навздогін	*Одночасний рух з відставанням*
$S_1 + (а - в) * t$	$S_1 - (а - в) * t$

Рис. 5.71. Спосіб знаходження відстані на момент початку руху при одночасному русі наздогін та з відставанням
в, а, t, S_1 — числові дані задачі

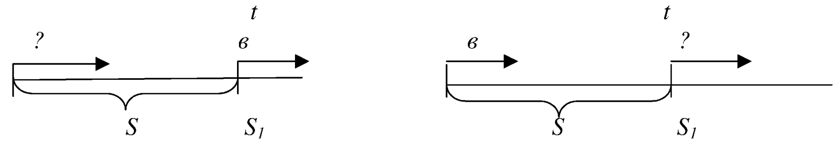
8. Складання і розв'язання оберненої задачі (№ 6) на знаходження швидкості одного з тіл до задачі № 4

Задача 6. Два велосипедиста знаходяться на відстані 240 м один від одного. Яка швидкість першого велосипедиста, якщо швидкість другого велосипедиста 3 м/с. Вони почали рухатися одночасно в одному напрямі, причому:

1) перший їде за другим, та через 30 с. після початку руху відстань між ними складала 180 м;
2) другий їде за першим, та через 30 с. після початку руху відстань між ними складала 300 м

Працюємо аналогічно. Зміна умов руху впливає лише на першу дію — в ній приймають участь інші числові дані, а план розв'язання не змінюється: першою дією дізнаємось про числове значення зміни відстані за час спільного руху; другою дією дізнаємось про відстань, яку подолало одне з тіл за час спільного руху; третьою дією — про відстань, яку подолало інше тіло за весь час руху; четвертою дією — знаходимо швидкість іншого тіла.

Узагальнюємо спосіб знаходження швидкості одного з тіл при одночасному русі наздогін та з відставанням (рис. 5.72).



Одночасний рух навздогін	*Одночасний рух з відставанням*
$(S - S_1 + в * t) : t$	$(S_1 - S + в * t) : t$

Рис. 5.72. Спосіб знаходження швидкості одного з тіл при одночасному русі наздогін та з відставанням
в, t, S, S_1 — числові дані задачі

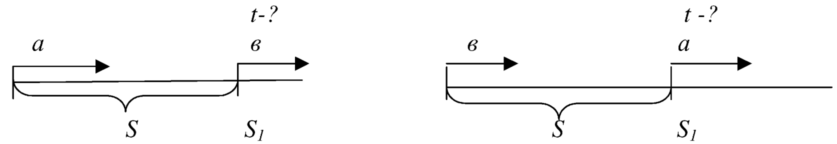
9. Складання і розв'язування оберненої задачі (№ 7) на знаходження часу спільного руху до задачі № 4

Задача 7. Два велосипедиста знаходяться на відстані 240 м один від одного. Швидкість першого велосипедиста 5 м/с., а швидкість другого велосипедиста 3 м/с. Через скільки секунд відстань між ними складатиме:

1) 180 м, якщо перший їде за другим;
2) 300 м, якщо другий їде за першим.

Працюємо аналогічно. Узагальнюємо плани розв'язування задач на знаходження часу спільного руху при одночасному русі наздогін та з відставанням: першою дією дізнаємося про числове значення зміни відстані між тілами за одиницю часу; другою дією дізнаємось про числове значення зміни відстані між тілами за час спільного руху; третьою дією — про час спільного руху.

Узагальнюємо спосіб знаходження часу спільного руху при одночасному русі наздогін та з відставанням (рис. 5.73).



Одночасний рух навздогін	*Одночасний рух з відставанням*
$(S - S_1) : (а - в)$	$(S_1 - S) : (а - в)$

Рис. 5.73. Спосіб знаходження часу спільного руху при одночасному русі наздогін та з відставанням
в, а, S, S_1 — числові дані задачі

10. Формування умінь розв’язувати задачі на одночасний рух в одному напрямку

Обов’язковими елементами при роботі над задачами на цьому етапі є визначення характеру зміни відстані між тілами за одиницю часу, числового значення цієї зміни — це «ключ» до розв’язання задачі. Якщо учні не пам’ятають способу розв’язування, то виконується аналітичний або синтетичний пошук розв’язування задачі.

На етапі роботи над задачею після її розв’язання діти складають і розв’язують обернені задачі або змінюють порядок прямування тіл і розв’язують отриману задачу.

Учням також пропонуються дещо ускладнені задачі на рух в одному напрямку, причому ускладнення йде за рахунок:

- зміни швидкості тіла, що рухається попереду, через певний час спільного руху двох тіл, при русі наздогін;
- неодночасного початку руху двох тіл з одного пункту;
- продовження руху наздогін після того, як тіло, що рухалося позаду, опинилося поруч з тілом, що рухалося попереду;
- введення різницевого або кратного відношення швидкостей двох тіл.

Таким чином, ми розглянули методику навчання молодших школярів розв’язування задач на рух в одному напрямку. Запропонована методика подана у публікаціях автора [481; 502].

5.2.5. Узагальнення математичних структур та способів розв’язування задач на одночасний рух в одному напрямку і на спільну роботу

11. Співставлення задач на спільну роботу на знаходження загального виробітку при спільній праці, в яких продуктивність спільної праці являє собою різницю продуктивностей виконавців, з задачами на одночасний рух наздогін на знаходження відстані між тілами на момент початку руху

Учням пропонуються для розв’язання пари задач з однаковими числовими даними, але перша задача — задача на рух наздогін, а друга задача — на спільну роботу.

1) З двох станцій виїхали одночасно пасажирський і товарний поїзд в одному напрямку. Пасажирський поїзд йшов за товарним. Пасажирський поїзд рухався зі швидкістю 70 км/год., а товарний — 50 км/год. Яка відстань між станціями, якщо пасажирський наздогнав товарний через 7 годин?

2) Через кран у бак вливається 70 відер води щогодини, а через зливний отвір виливається 50 відер води щогодини. Скільки відер води наллється у бак, якщо і кран, і зливний отвір будуть відкриті?

Школярі записують кожну задачу коротко в формі таблиці і, порівнюючи короткі записи, помічають схожість математичних структур цих задач. Після розв’язання задач двома способами, якщо це можливо, знов здійснюється порівняння і робиться висновок про те, що ці задачі мають однакові математичні моделі та аналогічні плани розв’язування.

Узагальнюємо математичні структури та способи розв’язування таких задач на знаходження відстані між тілами на момент початку руху та задач на знаходження продуктивності праці при спільній роботі (рис. 5.74).

	заг. виробіток / *відстань*	*продукт. пр.* / *швидкість*	час
I		N_1 / υ_1	
II		N_2 / υ_2	
I і II	?	?	t

I спосіб	II спосіб
$A = N_1 \cdot t - N_2 \cdot t$	$A = (N_1 - N_2) \cdot t$
$S = \upsilon_1 \cdot t - \upsilon_2 \cdot t$	$S = (\upsilon_1 - \upsilon_2) \cdot t$

1 спосіб	2 спосіб
1) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ першого об’єкта для даного значення часу; 2) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ другого об’єкта для даного значення часу; 3) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ першого та другого об’єктів при їх спільн $\frac{\text{ій праці}}{\text{ому русі}}$	1) знаходимо $\frac{\text{продуктивність спільної праці}}{\text{на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу}}$; 2) знаходимо $\frac{\text{загальний виробіток при спільній праці}}{\text{на скільки змінилась відстань між тілами за час їх спільного руху}}$.

Рис. 5.74. Опорні схеми та план розв’язування задач на спільну роботу та на одночасний рух в одному напрямку, в яких шуканим є загальний виробіток при спільній праці або відстань:

N_1 — продуктивність праці першого виконавця; N_2— продуктивність праці другого виконавця ($N_1 > N_2$); A — загальний виробіток при спільній праці; υ_1 — швидкість першого тіла; υ_2 — швидкість другого тіла ($\upsilon_1 > \upsilon_2$); t — час спільного руху або час спільної праці; S — відстань між тілами на момент початку або на момент закінчення руху

12. Узагальнення математичних структур і способів розв'язування задач на знаходження відстані між тілами на момент початку руху при одночасному русі навздогін або назустріч та на знаходження загального виробітку, якщо продуктивність спільної праці знаходять відніманням або додаванням

Перетворюємо задачу (1) на рух навздогін у задачу на одночасний рух назустріч. З'ясовуємо, як ця зміна вплине на розв'язання задачі: в першому способі зміниться третя дія — віднімання треба замінити додаванням; а у другому способі — зміниться перша дія, тому що числове значення зміни відстані при русі назустріч ми знаходимо додаванням. План розв'язування задач від виконаних змін не змінюється.

Перетворюємо дану задачу (2) на спільну роботу так, щоб продуктивність спільної праці знаходили дією додавання. Ця зміна не впливає на план розв'язування, він лишається тим самим.

Отже, задачі на знаходження відстані на момент початку руху при одночасному русі наздогін або назустріч та задачі на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання або додавання, мають однакові плани розв'язування (рис. 5.75).

13. Зіставлення задач на спільну роботу на знаходження часу спільної праці, в яких продуктивність спільної праці являє собою різницю продуктивностей виконавців, з задачами на одночасний рух навздогін на знаходження часу, через який одне тіло опиниться поруч з іншим

Аналогічно пункту 11.

1) З двох пристаней, відстань між якими 15 км, одночасно в одному напрямку поплили два човни. Перший плив зі швидкістю 10 км/год., а другий — 7 км/год. Через який час перший наздожене другого?

2) Бак вміщує 15 відер води. Через скільки годин може наповнитися цей бак, якщо кран і зливний отвір відриті. Через кран щогодини вливається 10 відер води, а через зливний отвір щогодини виливається — 7 відер води.

Узагальнюємо математичні структури та способи розв'язання задач на знаходження часу при одночасному русі наздогін та задач на знаходження часу спільної праці (рис. 5.76).

	$\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$	$\frac{\text{продукт. пр.}}{\text{швидкість}}$	час
I		N_1 / υ_1	
II		N_2 / υ_2	
I і II	?	?	t

1 спосіб	2 спосіб
$A = N_1 \cdot t \mp N_2 \cdot t$ $S = \upsilon_1 \cdot t \mp \upsilon_2 \cdot t$	$A = (N_1 \mp N_2) \cdot t$ $S = (\upsilon_1 \mp \upsilon_2) \cdot t$

1 спосіб	2 спосіб
1) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ першого об'єкта для даного значення часу; 2) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ другого об'єкта для даного значення часу; 3) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ першого та другого об'єктів при їх спільн$\frac{\text{ій праці}}{\text{ому русі}}$	1) знаходимо $\frac{\text{продуктивність спільної праці}}{\text{на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу}}$; 2) знаходимо $\frac{\text{загальний виробіток при спільній праці}}{\text{на скільки змінилась відстань між тілами за час їх спільного руху}}$.

Рис. 5.75. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух наздогін або назустріч, в яких шуканим є загальний виробіток при спільній праці або відстань

14. Узагальнення математичних структур і способів розв'язування задач на знаходження часу зустрічі при одночасному русі навздогін або назустріч та на знаходження часу спільної праці, якщо продуктивність спільної праці знаходять відніманням або додаванням

Перетворюємо задачу на рух навздогін (1) у задачу на одночасний рух назустріч. З'ясовуємо, як ця зміна вплине на розв'язання задачі: зміниться перша дія, тому що числове значення зміни відстані при русі назустріч ми знаходимо додаванням. План розв'язування задач від виконаних змін не змінюється.

	заг. виробіток / *відстань*	*продукт. пр.* / *швидкість*	час
I		N_1 / υ_1	
II		N_2 / υ_2	
I і II	*A / S*	?	?

1 спосіб	2 спосіб
	$t = A : (N_1 - N_2)$ $t = S : (\upsilon_1 - \upsilon_2)$

1 спосіб	2 спосіб
	1) знаходимо (продуктивність спільної праці / на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу); 2) знаходимо час спільн(ого руху / ої праці)

Рис. 5.76. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух наздогін, в яких шуканим є час спільної праці або час руху до зустрічі

Перетворюємо задачу (2) на спільну роботу так, щоб продуктивність спільної праці знаходили дією додавання. Ця зміна не впливає на план розв'язування, він лишається тим самим.

Порівнявши розв'язання задач, дістаємо висновок, що задачі на знаходження часу зустрічі при одночасному русі навздогін або назустріч та задачі на знаходження часу спільної роботи, в яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання або додавання, мають однакові плани розв'язування (рис. 5.77).

15. Зіставлення задач на спільну роботу на знаходження продуктивності одного з виконавців, в яких продуктивність спільної праці являє собою різницю продуктивностей виконавців, з задачами на одночасний рух навздогін на знаходження швидкості одного з тіл

Аналогічно пунктам 11, 13.

1) З двох селищ, відстань між якими 16 км, одночасно на уздогін вирушили два пішоходи і зустрілися через 4 години, перший йде за другим. Яка швидкість першого пішоходу, якщо швидкість другого 6 км/год.

2) Фрекен Бок повинна випекти 16 тортів, на цю роботу вона має 4 години. Скільки тортів повинна випікати щогодини фрекен Бок, якщо Карлсон щогодини «стягує» по 6 тортів?

	заг. виробіток / *відстань*	*продукт. пр.* / *швидкість*	час
I		N_1 / υ_1	
II		N_2 / υ_2	
I і II	*A / S*	?	?

1 спосіб	2 спосіб
	$t = A : (N_1 \mp N_2)$ $t = S : (\upsilon_1 \mp \upsilon_2)$

2 спосіб	
1) знаходимо (продуктивність спільної праці / на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу);	2) знаходимо час спільн(ого руху / ої праці)

Рис. 5.77. Опорні схеми та план розв'язання задач на спільну роботу та на одночасний рух наздогін або назустріч, в яких шуканим є час спільної праці або час руху до зустрічі

Узагальнюємо математичні структури та способи розв'язання задач на знаходження швидкості при одночасному русі на уздогін та задач на знаходження продуктивності одного виконавця при спільній праці (рис. 5.78):

	заг. виробіток / *відстань*	*продукт. пр.* / *швидкість*	час
I		?	
II		N_2 / υ_2	
I і II	*A / S*	?	*t*

I спосіб	II спосіб
$N_1 = (A + N_2 \cdot t) : t$	$N_1 = A : t + N_2$
$\upsilon_1 = (S + \upsilon_2 \cdot t) : t$	$\upsilon_1 = S : t + \upsilon_2$

1 спосіб	2 спосіб
1) знаходимо (заг. виробіток / відстань) другого об'єкта для даного значення часу; 2) знаходимо (заг. виробіток / відстань) першого об'єкта для даного значення часу; 3) знаходимо (продукт. пр. / швидкість) першого об'єкту.	1) знаходимо (продуктивність спільної праці / на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу); 2) знаходимо (продуктивність першого виконавця / яку відстань долає перше тіло за одиницю часу; його швидкість)

Рис. 5.78. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух наздогін, в яких шуканою є продуктивність або швидкість одного з виконавців

16. Узагальнення математичних структур і способів розв'язування задач на знаходження швидкості одного з тіл при одночасному русі навздогін або назустріч та на спільну роботу на знаходження продуктивності одного з виконавців, якщо продуктивність спільної праці знаходять відніманням або додаванням

Аналогічно пунктам 12, 14.

Задачі на знаходження швидкості одного з тіл при одночасному русі навздогін або назустріч та задачі на знаходження продуктивності одного з виконавців при спільній роботі, в яких продуктивність спільної праці знаходять дією віднімання або додавання, мають однакові плани розв'язування (рис. 5.79).

	заг. виробіток / відстань	продукт. пр. / швидкість	час
I		?	
II		N_2 / υ_2	
I і II	A / S	?	t

1 спосіб	2 спосіб
$N_1 = (A \pm N_2 \cdot t) : t$	$N_1 = A : t \pm N_2$
$\upsilon_1 = (S \pm \upsilon_2 \cdot t) : t$	$\upsilon_1 = S : t \pm \upsilon_2$

1 спосіб	2 спосіб
1) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ другого об'єкта для даного значення часу; 2) знаходимо $\frac{\text{заг. виробіток}}{\text{відстань}}$ першого об'єкта для даного значення часу; 5) знаходимо $\frac{\text{продукт. пр.}}{\text{швидкість}}$ першого об'єкту.	1) знаходимо $\frac{\text{продуктивність спільної праці}}{\text{на скільки змінюється відстань між тілами за одиницю часу}}$; 2) знаходимо $\frac{\text{продуктивність першого виконавця}}{\text{яку відстань долає перше тіло за одиницю часу; його швидкість}}$

Рис. 5.79. Опорні схеми та план розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух наздогін або назустріч, в яких шуканою є продуктивність одного з виконавців або швидкість одного з тіл

17. Узагальнення математичних структур та способів розв'язування задач на одночасний рух навздогін або назустріч та на спільну роботу, в яких продуктивність спільної праці знаходять відніманням або додаванням

Порівнюємо усі узагальнені математичні структури задач на одночасний рух наздогін або назустріч та на спільну роботу.

Усі задачі містять:

1) три пропорційні величини: загальний виробіток/відстань, продуктивність праці/швидкість, час роботи/руху;

2) три випадки: перші два стосуються роботи/руху кожного з двох об'єктів, а третій — їх спільної роботи/руху;

3) чотири числових значення: продуктивність праці/швидкість руху першого об'єкта, продуктивність праці/швидкість руху другого об'єкта, загальний виробіток/загальна відстань при їх спільній праці/русі та час спільної роботи/руху; три з них дано, а одне є шуканим.

Узагальнимо математичну структуру задач на одночасний рух навздогін або назустріч та задач на спільну роботу та способи розв'язування пар задач (див. рис. 5.80):

	заг. виробіток / відстань	продукт. пр. / швидкість	час
I		N_1 / υ_1	
II		N_2 / υ_2	
I і II	A / S	?	t

1 спосіб	2 спосіб
$A = N_1 \cdot t \mp N_2 \cdot t$ $S = \upsilon_1 \cdot t \mp \upsilon_2 \cdot t$	$A = (N_1 \mp N_2) \cdot t$ $S = (\upsilon_1 \mp \upsilon_2) \cdot t$
	$t = A : (N_1 \mp N_2)$ $t = S : (\upsilon_1 \mp \upsilon_2)$
$N_1 = (A \pm N_2 \cdot t) : t$ $N_2 = (A \pm N_1 \cdot t) : t$ $\upsilon_1 = (S \pm \upsilon_2 \cdot t) : t$	$N_1 = A : t \pm N_2$ $N_2 = A : t \pm N_1$ $\upsilon_1 = S : t \pm \upsilon_2$

Рис. 5.80. Опорна схема та способи розв'язування задач на спільну роботу та на одночасний рух назустріч та наздогін

• на знаходження відстані на момент початку руху або загального виробітку;

• на знаходження часу зустрічі або часу спільної праці;

• на знаходження швидкості або продуктивності одного з об'єктів.

5.2.6. Задачі на рух за течією та проти течії річки

Серед задач на рух виділяються ще й задачі на рух за течією та проти течії річки. Ці задачі спираються на поняття: власна швидкість катера ($v_{\text{власна}}$), швидкість течії річки($v_{\text{течії}}$), швидкість катера за течією річки ($v_{\text{за течією}}$) та швидкість катера проти течії річки ($v_{\text{проти течії}}$). Отже, ці поняття слід ввести, познайомити учнів з відповідними формулами та показати, як виконується рисунок до подібних задач.

Познайомити учнів з даними поняттями можна, залучивши досвід дітей по спостереженню за рухом маленького паперового кораблика у річці. Під час такого спостереження учні дістають висновків:

1) При русі катера за течією річки, течія ніби підштовхує катер, і його швидкість збільшується на швидкість течії;
2) При русі проти течії річки, течія заважає руху катера, його швидкість зменшується на швидкість течії.

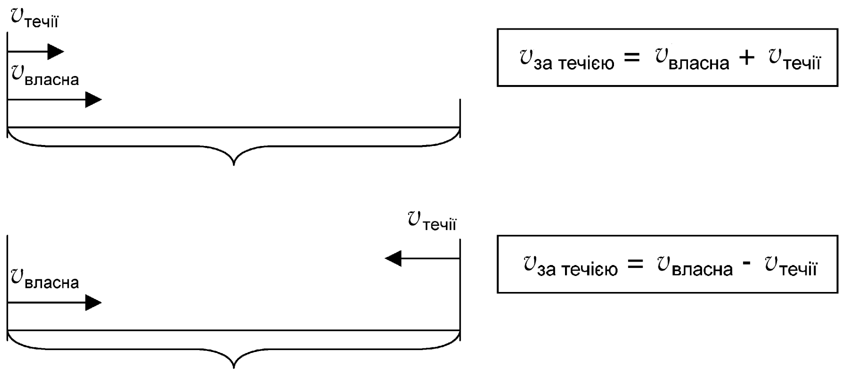


Рис. 5.81. Схематичне зображення руху за течією та проти течії річки:

$v_{\text{власна}}$ — власна швидкість катера, швидкість катера в стоячій воді; $v_{\text{течії}}$ — швидкість течії; $v_{\text{за течією}}$ — швидкість за течією; $v_{\text{проти течії}}$ — проти течії

Шуканим у задачах на рух за течією та проти течії річки може бути:

• час руху за течією або проти течії річки;
• відстань;
• швидкість течії річки;
• власна швидкість катеру.

Спосіб розв'язання задач цього виду полягає на знанні відповідних формул та умінні перетворювати їх. Наприклад, треба знайти швидкість течії, якщо дано швидкість за течією або проти течії та власну швидкість.

В формулі:

$$v_{\text{за течією}} = v_{\text{власна}} + v_{\text{течії}}$$

Сума 1 доданок 2 доданок

швидкість течії — це другий доданок. Щоб знайти другий доданок, треба від суми відняти перший доданок. Отже маємо:

$$v_{\text{течії}} = v_{\text{за течією}} - v_{\text{власна}}$$

В формулі:

$$v_{\text{проти течії}} = v_{\text{власна}} - v_{\text{течії}}$$

Різниця Зменшуване Від'ємник

швидкість течії — це від'ємник. Щоб знайти невідомий від'ємник, треба від зменшуваного відняти різницю. Отже, маємо:

$$v_{\text{течії}} = v_{\text{власна}} - v_{\text{проти течії}}$$

Складнішою є задача на знаходження швидкості течії за відомими швидкістю за течією річки та швидкістю проти течії річки.

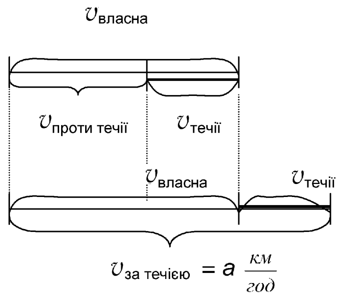


Рис. 5.82. Схематичне зображення співвіднесення значень величин пов'язаних з рухом та течією або проти течії

З рисунка бачимо, що швидкість човна за течією більше швидкості човна проти течії на подвійну швидкість течії. Тому маємо формулу:

$$v_{\text{течії}} = (v_{\text{за течією}} - v_{\text{проти течії}}) : 2.$$

Приклади роботи над задачами на рух за течією та проти течії річки подані у роботі автора [502].

Таким чином, ми запропонували методику навчання молодших школярів розв'язування задач на спільну роботу та на рух.

5.3. СИСТЕМА НАВЧАЛЬНИХ ЗАДАЧ З ФОРМУВАННЯ УМІНЬ РОЗВ'ЯЗУВАТИ «ТИПОВІ» ЗАДАЧІ НА ЗНАХОДЖЕННЯ СЕРЕДНЬОГО АРИФМЕТИЧНОГО

5.3.1. Зміст і методика підготовчої роботи

1. Підготовча робота до введення задач на знаходження середнього арифметичного. Правило знаходження середнього арифметичного кількох чисел

На етапі підготовки до введення задач нового виду пропонуємо ознайомити учнів з поняттям середнього арифметичного. Таким чином, метою підготовчої роботи є формування в учнів поняття про середнє арифметичне кількох чисел та правила знаходження середнього арифметичного.

Ознайомлення із середнім арифметичним відбувається під час практичної роботи: учні отримують дві палички і вчитель пропонує виміряти довжину кожної палички, а потім знайти, якою була б довжина паличок, якби вони були однаковими.

Після виконання завдання повідомляємо, що ми знаходили середню довжину паличок, а на «мові математики», знаходження середньої величини є знаходженням середнього арифметичного. Ознайомлюємо учнів із правилом знаходження середнього арифметичного двох чисел. Правило можна подати дітям у готовому вигляді:

> Щоб знайти середнє арифметичне двох чисел, треба їх суму поділити на 2.
>
> Середнє арифметичне двох чисел дорівнює їх полусумі:
>
> $$a + в : 2 = \frac{a + в}{2}.$$

Учні читають правило та разом із вчителем визначають порядок виконання дій при знаходженні середнього арифметичного двох чисел. Далі пропонуються спеціальні завдання на застосування цього правила: подаються вирази, записані двома способами (застосовуючи знак ділення — двокрапку та риску дробу); вимагається знайти середнє арифметичне двох чисел, коментуючи дії по кроках; розглядається випадок знаходження середнього арифметичного двох рівних чисел; пропонується порівняти середні арифметичні пар чисел, причому одне з чисел однакове (тут застосовується зміна суми в залежності від зміни одного з доданків).

Після виконання певної кількості вправ ми проводимо перенос правила знаходження середнього арифметичного двох чисел на інші випадки — знаходження середнього арифметичного 3-х, 4-х, 5-ти ...n чисел. Для цього пригадуємо правило знаходження середнього арифметичного двох чисел. З'ясовуємо, чому саме треба суму двох чисел ділити на 2, і визначаємо на скільки треба було б ділити суму чисел, якби доданків було 3 або 4...

Знаходимо середнє арифметичне чотирьох, п'яти і т. д. чисел. Якщо клас добре підготовлений, можна узагальнити це правило та запропонувати учням записати середнє арифметичне n чисел, позначаючи кожне число буквою a, але з індексом 1, 2, 3... n:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Формулюємо правило:

> Щоб знайти середнє арифметичне кількох чисел, треба їх суму поділити на кількість цих чисел.

Подаємо пам'ятку (порядок виконання дій при знаходженні середнього арифметичного кількох чисел):

Знаходження середнього арифметичного кількох чисел:

1. Знаходжу суму усіх чисел.
2. Підраховую кількість чисел.
3. Ділю суму чисел на їх кількість.

Проводимо закріплення, використовуючи завдання аналогічні знаходженню середнього арифметичного 2-х чисел. Корисними є завдання на знаходження суми кількох чисел, якщо дано їх середнє арифметичне. Засобом аналогічних завдань підводимо дітей до висновку:

Сума чисел дорівнює їх середньому арифметичному, яке помножено на кількість чисел.

Отже, до моменту ознайомлення учнів із задачами нового виду у дітей повинно бути сформованим уміння знаходити середнє арифметичне кількох чисел.

5.3.2. Задачі на застосування правила знаходження середнього арифметичного

2. Ознайомлення із задачами на застосування правила знаходження середнього арифметичного

Ознайомлення здійснюється на задачі на знаходження середньої температури за тиждень: Яка середня температура за тиждень, якщо протягом тижня термометр показував: 19, 20, 21, 22, 21, 20, 17 градусів?

Ситуація цієї задачі не є новою для учнів, на уроках природознавства вони ведуть календар природи, записуючи щоденну температуру повітря. Учні «перекладають» задачу на «мову математики»: знайти середню температуру за тиждень — це означає знайти середнє арифметичне 7 чисел, які показують щоденну температуру кожного дня тижня. Застосовуючи правило знаходження середнього арифметичного або провівши аналітичний або синтетичний пошук розв'язування задачі, складаємо вираз і відповідаємо на запитання задачі.

Далі пропонується аналогічна задача на знаходження середньої схожості насіння. Учні відразу перекладають її на мову математики, встановлюють, середнє арифметичне скількох чисел слід знайти, записують розв'язання виразом і відповідають на запитання задачі.

Подальше засвоєння уміння розв'язувати задачі на застосування правила знаходження середнього арифметичного відбувається на задачах наступних видів:

— задачі на знаходження середньої схожості (Для перевірки схожості насіння посадили у 3 ящики. У першому ящику проросло 93, в другому — 89, в третьому — 97 штук. Яка середня схожість насіння?);
— задачі на знаходження середньої температури (Знайди середню температуру за день, якщо в перший день вона складала 22°, а в другий — 20°);
— задачі на знаходження середньої маси (Маса одного кроля 2 кг, а маса другого — 3 кг. Знайди середню масу кролів.);
— задачі на знаходження середньої довжини (Довжина одного відрізка 12 см, а другого — 8 см. Знайди середню довжину відрізків.);

— задачі на знаходження середньої швидкості руху (За першу годину автомобіль пройшов 56 км, а за другу — 60 км. Яка середня швидкість руху автомобіля?);
— задачі на знаходження середньої врожайності (На двох ділянках, площею по 1 га вирощували кукурудзу. На першій ділянці врожайність становила 2 т з га, а на другій — 3 т з га. Яка середня врожайність кукурудзи на цих ділянках?).

Прочитавши задачу, учні впізнають її — «це задача на знаходження середнього арифметичного»; з'ясовують, середнє арифметичне яких чисел треба знайти в цій задачі, скільки таких чисел; і застосовують правило знаходження середнього арифметичного.

5.3.3. Ускладнені задачі на знаходження середнього арифметичного

3. Ознайомлення з ускладненими задачами на знаходження середнього арифметичного. Задача № 1 на знаходження середньої довжини

Спочатку учні розв'язують задачу на знаходження середньої довжини на застосування правила знаходження середнього арифметичного.

Тесляр розпиляв дошку на дві частини. Довжина однієї частини 2 м 30 см, а другої — 2 м 60 см. Якої довжини була б кожна частина, якби дошку розпиляли на дві рівні частини?

Після розв'язання цієї задачі аналізується вираз, який є розв'язком: що означає вираз, записаний у діленому, що означає дільник? На цій основі учні формулюють правило:

> Щоб знайти середню довжину, слід загальну довжину усіх частин поділити на загальну кількість частин.

Після цього ми перетворюємо задачу на ускладнену (задача № 1), або пропонуємо учням нову.

Задача № 1. Для в'язання узяли 3 клубочки пряжі по 20 м ниток та 5 клубочків по 12 м. Знайдіть середню довжину ниток в одному клубочку.

На відміну від попередньої задачі, де кожна частина або відрізок, або клубок мали різну довжину, в ускладненій задачі — серед них кілька частин або відрізків, або клубків мають однакову довжину. Записуємо задачу коротко в формі таблиці, визначаючи групу пропорційних величин; за таблицею пояснюємо числа задачі. З'ясовуємо, чим схожа ця задача на попередню, як ми попередню задачу «перекладали» мовою математики, чи можна аналогічно «перекласти» і цю задачу; середнє арифметичне яких і скількох чисел в ній слід знайти; виписуємо усі ці числа в рядок.

Дізнаємося, чим відрізняється ця задача від попередньої і як ця зміна вплине на розв'язання задачі: в цій задачі слід знайти середнє арифметичне не двох, а більше чисел, причому серед них є групи однакових чисел. Записуємо розв'язання виразом і виконуємо тотожні перетворення — суму однакових чисел замінюємо добутком. Аналізуємо перетворений вираз: що означає вираз, який записаний у діленому, у дільнику? Робимо висновок про знаходження середньої довжини (рис. 5.83).

$$\text{Середня довжина} = \frac{\text{Загальна довжина всіх частин}}{\text{Загальну кількість частин}}$$

Рис. 5.83. Схематичне подання правила знаходження середньої довжини

При розв'язуванні наступних задач на знаходження середньої довжини виконується аналітичний пошук розв'язання, і якщо учням важко записати відразу вираз, розв'язання записується по діях з поясненням.

4. Ускладнена задача (№ 2) на знаходження середньої маси

Ми пропонуємо розглядати задачі цього виду, як і задачі на знаходження середньої довжини, у порівнянні із простими задачами. Учні розв'язують задачу на знаходження середньої маси двох тіл:

Маса першого кроля 2 кг 200 г, а другого 1 кг 600 г. Знайди середню масу цих кролів.

Записують розв'язання виразом, аналізують його і пояснюють, що у діленому записано загальну масу двох тіл, а у дільнику — їх кількість. Отже, робимо висновок:

> Щоб знайти середню масу, слід загальну масу усіх тіл поділити на загальну кількість тіл.

Після розв'язання такої задачі ми перетворюємо її на ускладнену: тепер кілька тіл матимуть однакову масу.

Задача № 2. У господарки 4 білих кролі по 2 кг 200 г і 2 чорних кролі по 1 кг 600 г. Знайдіть середню масу одного кроля.

Після аналізу умови задачі ми проводимо бесіду, аналогічну як при роботі над задачами на знаходження середньої довжини. Порівнявши умови цієї і попередньої задачі, учні визначають, як ця зміна впливає на розв'язання задачі, і дістають висновку, що в цій задачі слід знайти середнє арифметичне не двох, а більше чисел; виписують ці числа, застосовуючи правило знаходження середнього арифметичного, складають вираз. Далі виконуємо тотожні перетворення виразу, замінюючи суму однакових доданків добутком. Аналізуючи вираз, з'ясовуємо, що означає кожний вираз, записаний у діленому та у дільнику, і формулюємо правило знаходження середньої маси (див. рис. 5.84).

$$\text{Середня маса} = \frac{\text{Загальна маса}}{\text{Загальну кількість}}$$

Рис. 5.84. Схематичне подання правила знаходження середньої маси

При розв'язуванні наступних задач на знаходження середньої маси виконується аналітичний пошук розв'язування, і якщо учням важко записати відразу вираз, розв'язання записується по діях з поясненням.

5. Ускладнена задача (№ 3) на знаходження середньої швидкості

Застосовуємо також підхід співставлення задачі на знаходження середньої швидкості на застосування правила знаходження середнього арифметичного та ускладненої задачі. Спочатку розв'язується задача на застосування правила: Першу годину автомобіль їхав з швидкістю 50 км/год., а за другу — 80 км/год. Яка середня швидкість руху автомобіля?

А потім вона дещо ускладнюється: на відміну від попередньої задачі, з даною швидкістю тіло рухалося не одну годину, а кілька годин.

Задача № 3. По асфальтовій дорозі автомобіль їхав 2 години зі швидкістю 80 км/год., по ґрунтовій дорозі він їхав 4 години зі швидкістю 50 км/год. Знайди середню швидкість автомобіля.

Здійснюється порівняння задач, учні встановлюють, що обидві задачі на знаходження середньої швидкості, тобто середнього арифметичного; з'ясовують, як знайшли середнє арифметичне двох чисел у попередній задачі і чи відомо в цій задачі, середнє арифметичне скількох чисел слід знайти? На основі фізичного змісту швидкості встановлюємо, яку відстань подолало тіло за кожну годину руху, виписуємо ці числа і визначаємо їх кількість. Записуємо вираз, спрощуємо його і аналізуємо запис виразу: у діленому записано вираз, що означає загальну відстань, яку подолала машина, а у дільнику — загальний час. Формулюємо правило знаходження середньої швидкості (рис. 5.85).

$$\text{Середня швидкість} = \frac{\text{Загальна відстань}}{\text{Загальний час}}$$

Рис. 5.85. Схематичне подання правила знаходження середньої швидкості

При розв'язуванні наступних задач на знаходження середньої швидкості виконується аналітичний пошук розв'язування, і, якщо учням важко записати відразу вираз, розв'язання записується по діях з поясненням.

6. Ускладнена задача (№ 4) на знаходження середньої врожайності

Як і у попередніх випадках, ми пропонуємо просту задачу на знаходження середньої врожайності: На двох ділянках по 1 га вирощували картоплю. З першої ділянки зібрали 13 т картоплі, а з другої — 18 т. Яка середня врожайність картоплі на ділянках?

Далі ускладнюємо цю задачу:

Задача № 4. З 20 га зібрали по 13 т картоплі з гектара, а з 5 га — по 18 т з гектара. Знайди середню врожайність картоплі на цих двох ділянках.

Спочатку визначаємо, що змінилося, і ставимо завдання «Як ця зміна вплине на розв'язання задачі?». Але перед тим сформулюємо правило знаходження середньої врожайності на основі аналогії із знаходженням середньої швидкості. Як знайти швидкість? Як знайти середню швидкість? Щоб знайти швидкість, треба відстань поділити на час. Щоб знайти середню швидкість, треба загальну відстань поділити на загальний час (див. рис. 5.86).

Порівнюємо, що спільного у знаходженні швидкості і середньої швидкості: в обох випадках ми ділимо відстань на час. Що відмінного: при знаходженні середньої швидкості ми ділимо загальне значення відстані на загальне значення часу. Згадуємо, як

знайти врожайність, — треба масу поділити на площу. Міркуючи за аналогією, формулюємо правило про знаходження середньої врожайності. Причому з'ясовуємо: чим будуть відрізнятися правила знаходження врожайності та середньої врожайності? При знаходженні середньої врожайності треба буде ділити загальне значення маси на загальну площу (рис. 5.87).

$$\text{Швидкість} = \frac{\text{Відстань}}{\text{Час}} \qquad \text{Середня швидкість} = \frac{\text{Загальна відстань}}{\text{Загальний час}}$$

Рис. 5.86. Схематичне подання правила знаходження швидкості та середньої швидкості

$$\text{Врожайність} = \frac{\text{Маса}}{\text{Площа}} \qquad \text{Середня врожайність} = \frac{\text{Загальна маса}}{\text{Загальна площа}}$$

Рис. 5.87. Схематичне подання правила знаходження врожайності та середньої врожайності

> Щоб знайти середню врожайність, необхідно загальну масу врожаю поділити на загальну площу

Потім повертаємось до розв'язування задачі: виконуємо аналітичний або синтетичний пошук розв'язування, складаємо план розв'язування записуємо розв'язання по діях або виразом.

При розв'язуванні наступних задач на знаходження середньої врожайності, якщо учням важко записати відразу вираз, розв'язання записується по діях з поясненням.

7. Ускладнена задача (№ 5) на знаходження середньої ціни

Щоб ввести правило знаходження середньої ціни, учні пригадують, як знаходили швидкість та середню швидкість; врожайність та середню врожайність; як знаходять ціну. Ставимо проблемне запитання: як знайти середню ціну? Робимо висновок по аналогії (див. рис. 5.88):

> Щоб знайти середню ціну, необхідно загальну вартість поділити на загальну кількість.

$$\text{Ціна} = \frac{\text{Вартість}}{\text{Кількість}} \qquad \text{Середня ціна} = \frac{\text{Загальна вартість}}{\text{Загальна кількість}}$$

Рис. 5.88. Схематичне подання правила знаходження ціни та середньої ціни

Далі учням пропонується задача № 5.

Задача 5. 3 кг цукерок по 23 грн змішали з 5 кг цукерок по 27 грн. Скільки коштуватиме 1 кілограм суміші?

Діти записують її коротко в формі таблиці, пояснюють числа задачі та застосовують зроблений висновок. Якщо учні здатні відразу записати розв'язання по діях з поясненням, то аналітичний або синтетичний пошук розв'язання задачі не проводиться. Аналогічно працюємо і над наступними задачами на знаходження середньої ціни.

8. Узагальнення способів знаходження середньої величини

Учні пригадують правила знаходження довжини одного відрізу та середньої довжини; маси одного предмету та середньої маси; швидкості і середньої швидкості, врожайності і середньої врожайності; ціни і середньої ціни (рис. 5.89)

Звертаємо увагу учнів на те, що довжина одного відрізу, маса одного тіла, швидкість, ціна, врожайність — це величина однієї одиниці. Ми знаходили середню величину однієї одиниці дією ділення суми значень загальної величини на суму значень кількості. Отже:

> Щоб знайти середню величину однієї одиниці, треба суму значень загальної величини розділити на суму значень кількості або часу.

9. Формування умінь розв'язувати задачі на знаходження середнього арифметичного

На цьому етапі учням пропонуються і задачі на застосування правила знаходження середнього арифметичного, і ускладнені задачі. Звертаючи увагу на вимогу знайти середню величину, учні констатують факт, що це задача на знаходження середнього арифметичного. Застосовуючи висновок: щоб знайти середню величину, треба суму загальних величин поділити на суму кількостей або значень часу, — діти записують розв'язання задачі по діях з поясненням або виразом.

$$\text{Довжина 1 ч.} = \frac{\text{Загальна довжина}}{\text{Кількість частин}} \qquad \text{Середня довжина} = \frac{\text{Загальна довжина всіх частин}}{\text{Загальну кількість частин}}$$

$$\text{маса 1 предмету} = \frac{\text{Загальна маса}}{\text{Кількість}} \qquad \text{Середня маса} = \frac{\text{Загальна маса}}{\text{Загальну кількість}}$$

$$\text{Швидкість} = \frac{\text{Відстань}}{\text{Час}} \qquad \text{Середня швидкість} = \frac{\text{Загальна відстань}}{\text{Загальний час}}$$

$$\text{Врожайність} = \frac{\text{Маса}}{\text{Площа}} \qquad \text{Середня врожайність} = \frac{\text{Загальна маса}}{\text{Загальна площа}}$$

$$\text{Ціна} = \frac{\text{Вартість}}{\text{Кількість}} \qquad \text{Середня ціна} = \frac{\text{Загальна вартість}}{\text{Загальна кількість}}$$

$$\text{Середня величина 1 одиниці} = \frac{\text{Сума значень загальної величини}}{\text{Суму значень кількості / часу}}$$

Рис. 5.89. Схематичне подання правил знаходження величини однієї одиниці та середньої величини однієї одиниці

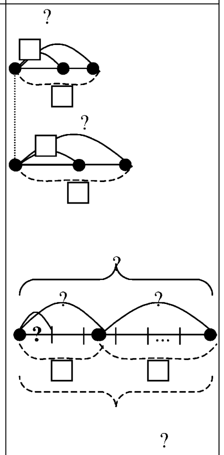
Порівнюючи різноманітні математичні структури задач на знаходження середнього арифметичного учні визначають їх істотні ознаки (див. таблицю 5.4).

Таблиця 5.4

Математичні структури задач на знаходження середнього арифметичного

<table>
<tr><th>Пор. №</th><th>Вид</th><th>Підвиди
Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Задачі на застосування правила знаходження середнього арифметичного</td><td>• задачі на знаходження середньої схожості;
• задачі на знаходження середньої температури;
• задачі на знаходження середньої маси;
• задачі на знаходження середньої довжини;
• задачі на знаходження середньої швидкості руху;
• задачі на знаходження середньої врожайності.

... 1-го ... – □
... 2-го ... – □
....
... n-го ... – □
Знайти середню ...</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Ускладнені задачі на знаходження середнього арифметичного, які містять пропорційні величини</td><td>• задачі на знаходження середньої швидкості;
• задачі на знаходження середньої врожайності;
• задачі на знаходження середньої ціни;
• задачі на знаходження середньої довжини;
• задачі на знаходження середньої маси.

<table><tr><th></th><th>Зага льна ....</th><th>.... 1</th><th>кількість / час</th></tr><tr><td>I</td><td>?</td><td>□</td><td>□</td></tr><tr><td>II</td><td>?</td><td>□</td><td>□</td></tr><tr><td>Сер.</td><td></td><td>?</td><td></td></tr></table></td><td>
</td></tr>
</table>

Істотні ознаки задач на знаходження середнього арифметичного:

1) ці задачі містять або кілька числових значень однієї й тієї самої величини, або містять значення трьох пропорційних величин і кілька випадків;
2) якщо задача містить групу пропорційних величин, то дані значення двох величин: величини однієї одиниці виміру чи лічби/ загальної величини та кількості або часу для кількох випадків;
3) в цих задачах шуканим є середнє значення або середнє значення величини однієї одиниці виміру або лічби.

А порівнюючи розв'язання, формулюють узагальнений план розв'язування задач на знаходження середнього арифметичного:

Спосіб розв'язування задач на знаходження середнього арифметичного

1) знаходимо суму значень загальної величини для усіх випадків;
2) знаходимо суму значень кількості або часу;
3) знаходимо середнє значення.

Таким чином, нами розглянуто усі «типові» задачі, що пропонуються в курсі початкової математики.

ПІСЛЯСЛОВО

Розв’язанню сюжетних задач традиційно належить значна роль у структурі змісту початкової математичної освіти. Результатом навчання математики в початковій школі повинно бути формування загального уміння розв’язувати сюжетні задачі (прості та складені на 2—4 дії, які є комбінаціями відомих видів простих задач), а також формування умінь розв’язувати задачі певних видів (задачі на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення, на знаходження невідомих за двома різницями, на подвійне зведення до одиниці, на спільну роботу, на рух). Наше дослідження показало, що досягнення цього результату можливо за умов теоретично обґрунтованої методичної системи навчання учнів початкової школи розв’язування сюжетних задач.

Розроблена методична система принципово відрізняється від існуючих тим, що:

• містить два обов’язкові компоненти — методику формування загального уміння та методику формування окремих умінь розв’язувати задачі певних видів, і реалізується протягом всього навчання у початковій школі. Методика формування загального уміння розв’язувати задачі реалізується через підсистеми, які передбачають таке формування відповідно на матеріалі простих задач і на матеріалі складених задач. Методика формування окремих умінь реалізується через три підсистеми — методику навчання розв’язування задач, що містять однакову (сталу) величину, методику навчання розв’язування задач на процеси (спільну роботу та на рух); методику навчання розв’язування задач на знаходження середнього арифметичного. У свою чергу, кожний із зазначених компонентів включає елементи ще нижчого порядку;

• теоретичну основу розробки методичної системи становлять діяльнісні теорії навчання — теорія поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна та теорія змістовних узагальнень В. В. Давидова (яка є складовою частиною теорії навчальної діяльності Д. Б. Ельконіна та В. В. Давидова);

• запропонована методична система забезпечує спеціальне формування окремих дій та операцій, що складають уміння розв’язувати задачі. Для формування загального уміння розв’язувати задачі опрацьовуються усі дії, які його складають, що відбувається на матеріалі простих і складених задач через застосування спеціальної системи навчальних задач. Зміст навчальних завдань полягає не у розв’язанні кожної задачі, а у виконанні певних дій, що відповідають аналізу задачного формулювання або пошуку розв’язування задачі. При формуванні окремих умінь розв’язувати задачі учні залучаються у дослідження задачі через зміни величин задачі або через зміни числових даних задачі, або через зміну шуканого (шуканих) задачі, або через зміну однакової (сталої) величини, якщо така є у задачі, або через зміну інших характеристик сюжету задачі. Таке всебічне дослідження задачі дозволяє учням узагальнити математичні структури задач певних видів і способи їх розв’язування. Також вивчаються умови застосування того або іншого способу розв’язування задачі тощо;

• при формуванні загального вміння відбувається ознайомлення учнів з моделюванням як задачного формулювання, так і процесу розв’язання задачі;

• в основі методичної системи лежать розроблені нами класифікації простих та складених (нетипових і типових) задач;

• нами змінено традиційний порядок уведення поняття задачі в 1-му класі — розширено коло питань підготовчої роботи, що дало змогу реалізувати етап ознайомлення з поняттям задачі на матеріалі простих задач перших п’яти (а не двох, як прийнято) видів;

• при навчанні розв’язування простих задач школярі знайомляться із словами-ознаками певних видів співвідношень (за Л. М. Фрідманом);

• ознайомлення з поняттям «складена задача» та процесом її розв’язування, а також формування уміння розв’язувати складені задачі проводиться на різноманітних математичних структурах задач, а не на складених задачах на знаходження різниці, що містять просту задачу на знаходження суми. Такий підхід спонукає учнів до засвоєння дій з розв’язування задачі, а не до заучування плану розв’язування задачі;

• складені задачі нової математичної структури вводяться на основі або порівняння з простими задачами, або продовження сюжету простої задачі, або зміни запитання простої задачі, або зміни умови чи запитання складеної задачі відомої математичної структури; таким чином, досліджується вплив цих змін на розв’язання задачі. Також застосовується й такий методичний прийом, коли задача нової структури подається без зіставлення з відомими структурами, що спонукає відтворення повного складу дій, які містить загальне уміння розв’язувати складені задачі;

• пропонованою методикою передбачено, що усі основні дії, які дозволяють учневі самостійно розв’язувати складені задачі, формуються до 4-го класу, тому в 4-му класі увага зосереджується на формуванні умінь розв'язувати задачі окремих видів, а загальне уміння розв'язувати складені задачі набуває подальшого засвоєння на прикладі задач нових математичних структур і задач, які містять дроби;

• методика формування умінь розв'язування задач певних видів будується на поданому нами трактуванні поняття окремого уміння розв'язувати задачі та на класифікації задач із пропорційними величинами;

• з метою зменшення об'єму навчального матеріалу, який підлягає запам'ятовуванню, усі «типові» задачі об'єднані у три групи: 1) задачі, що містять однакову величину; 2) задачі на спільну роботу та на рух (на процеси); 3) задачі на знаходження середньоарифметичного. Здійснено узагальнення істотних ознак і способів розв'язування певних груп задач;

• розроблено загальну методику навчання молодших школярів розв'язування задач кожної групи. Основною ідеєю цієї методики є всебічний аналіз задачі з метою визначення істотних ознак задач певної математичної структури та узагальнення плану розв'язування. Розроблена методика передбачає поступове узагальнення математичних структур та планів розв'язування задач в межах кожної групи.

• методична система реалізується через системи навчальних задач з формування у молодших школярів уміння розв'язувати задачі з 1-го по 4-й клас;

• в методичній системі реалізовано диференційований підхід до учнів, який стосується змісту навчального матеріалу, що пропонується дітям, а також диференціації дози допомоги під час опрацювання окремих дій з розв'язування задач;

Пропонована методична система навчання розв'язування сюжетних задач в курсі початкової математики може бути безпосередньо застосована вчителями на уроках математики, а також покладена в основу розробки нових підручників математики для початкової школи. Питання, які визначені як додаткові (для поглибленого вивчення математики за рахунок варіативного компоненту), можуть бути розглянуті в курсі математики 5-го класу, під час узагальнення і систематизації знань учнів за початкову школу.

Методична система навчання молодших школярів розв'язування сюжетних задач застосована у експериментальному навчанні. З метою визначення впливу на результативність розв'язання задач школярами, системи в цілому і окремих її елементів, формуючий експеримент мав чотири серії. Перша серія передбачала

застосування у експериментальному навчанні методики формування загального уміння розв'язувати задачі на матеріалі простих задач. У другій серії експериментальне навчання поширювалось ще й на формування загального уміння на матеріалі складених задач. Третьою серією, крім зазначених елементів, передбачено ще й формування умінь розв'язувати задачі певних видів, отже, застосована цілісна методична система навчання розв'язування сюжетних задач. Четверта серія мала на меті перевірку ефективності лише методики формування умінь розв'язувати «типові» задачі, що містять пропорційні величини.

В першій серії порівнювалися результати навчання у експериментальних класах E_1 і у контрольних класах К. У другій серії результати навчання у експериментальних класах E_2 порівнювались з класами, що приймали участь у першій серії — E_1, та контрольними класами К. У третій серії результати навчання в експериментальних класах E_3 співставлялися з результатами класів E_2 і контрольними класами К. У четвертій серії співставлялися результати експериментальних класів E_4 з класами E_3 та контрольними класами К.

Порівняльний аналіз отриманих експериментальних результатів дає підстави стверджувати, що більш значні зміни відбулися в класах E_3, де була застосована цілісна система, що передбачала формування загального уміння розв'язувати задачі на матеріалі простих і на матеріалі складених задач, а також формування умінь розв'язувати задачі певних видів, що містять пропорційні величини.

На момент експериментального навчання результати в експериментальних класах усіх серій майже однакові, однак, навіть після закінчення експериментальної роботи, ми продовжували досліджувати успішність навчання молодших школярів класів E_1 та E_2 з розв'язування задач наступних видів, і тут ми визначили нижчі результати. Таким чином, ми дістали таких висновків: формування загального уміння на матеріалі простих задач, без спеціального формування дій, що притаманні розв'язуванню складених задач, не дає високих результатів; але сформоване загальне уміння позитивно впливає на успішність розв'язання «типових» задач — в цьому випадку у експериментальних класах E_2 результати трошки нижчі за результати експериментальних класів E_3 та E_4. Найнижчі результати у контрольних класах К. Результати експериментального навчання надають можливість впевнитися, що розроблена експериментальна методична система дозволяє більш ніж 50% учнів засвоїти знання про задачі та методи і способи їх розв'язування на рівні частково-продуктивної діяльності.

Проведене дослідження не вичерпує усієї глибини проблеми навчання молодших школярів розв'язування сюжетних задач. Подальша її розробка може бути здійснена в плані дослідження можливості введення алгебраїчного методу розв'язування сюжетних задач в початковій школі та створення відповідних методик. Також вважаємо необхідним вивчення питання про факультативний курс з розв'язання нестандартних задач. Актуальним є питання підготовки студентів факультетів початкового навчання педагогічних вузів до формування в молодших школярів умінь розв'язування задач.

На розв'язання даної проблеми можуть здійснити істотний вплив розробка більш загальних проблем — забезпечення наступності між початковою та середньою школою в плані формування умінь розв'язувати задачі, створення загальної методичної системи навчання розв'язування сюжетних задач в курсі математики, а далі й алгебри.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Акофф Р.* О природе систем // Известия АН СССР. — 1971. — № 3. — С. 68–75.
2. *Актуальные* проблемы методики обучения математике в начальных классах / М. И. Моро, А. С. Пчелко, А. М. Пышкало, Н. А. Менчинская и др.; под ред. М. И. Моро, А. М. Пышкало. — М.: Педагогика, 1977. — 248 с.
3. *Александров И. И., Александров В. И.* Методы решения арифметических задач / Под ред. проф. И. К. Андронова. — М.: Учпедгиз, 1953. — 75 с.
4. *Александрова Э. И.* Математика. Учебник для 1 класса четырехлетней начальной школы (Система Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова): в 2-х кн. Кн. 2. — 2-е изд. — М.: Вита-Пресс, 2002. — 144 с.: ил.
5. *Александрова Э. И.* Математика. Учебник для 2 класса четырехлетней начальной школы (Система Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова): в 2-х кн. Кн. 1. — 2-е изд. — М.: Вита-Пресс, 2001. — 144 с.: ил.
6. *Александрова Э. И.* Математика. Учебник для 2 класса четырехлетней начальной школы (Система Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова): в 2-х кн. Кн. 2. — 2-е изд. — М.: Вита-Пресс, 2001. — 120 с.: ил.
7. *Александрова Э. И.* Математика. Учебник для 3 класса четырехлетней начальной школы (Система Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова): в 2-х кн. Кн. 1. — 2-е изд. — М.: Вита-Пресс, 2002. — 112 с.: ил.
8. *Александрова Э. И.* Математика. Учебник для 3 класса четырехлетней начальной школы (Система Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова): в 2-х кн. Кн. 2. — 2-е изд. — М.: Вита-Пресс, 2002. — 112 с.: ил.
9. *Александрова Э. И.* Методика обучения математике в начальной школе. 1 класс. (Система Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова): Пособие для учителя. — 2-е изд. — М.: Вита-Пресс, 2001. — 240 с.
10. *Александрова Э. И.* Методика обучения математике в начальной школе. 2 класс. (Система Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова): Пособие для учителя. — 2-е изд. — М.: Вита-Пресс, 2002. — 160 с.
11. *Александрова Э. И.* Методика обучения математике в начальной школе. 3 класс. (Система Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова): Пособие для учителя. — 2-е изд. — М.: Вита-Пресс, 2002. — 184 с.
12. *Александрова Э. И.* Методика обучения математике в начальной школе. 4 класс. (Система Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова): Пособие для учителя. — 2-е изд. — М.: Вита-Пресс, 2002. — 112 с.
13. *Александрова Э. И.* Как учить решать тестовые задачи? // Начальная школа. — 1999. — № 7. — С. 103–104.
14. *Антонова Г. П.* Различия в мыслительной деятельности школьников при решении задач // Типичные особенности умственной деятельности младших школьников / Под ред. С. Ф. Жуйкова. — М.: Просвещение, 1968. — С. 71–124.

15. *Антонова Г. П.* Индивидуальные особенности мыслительной деятельности младших школьников // Вопросы психологии. — 1965. — № 6. — С. 52—63.
16. *Аргинская И. И.* Математика. Методическое пособие к учебнику 1-го класса четырехлетней начальной школы. — М.: ЦОР 1, 2003. — 160 с.
17. *Аргинская И. И.* Математика. Методическое пособие к учебнику 2-го класса четырехлетней начальной школы. — М.: ЦОР 1, 2003. — 144 с.
18. *Аргинская И. И.* Математика. Методическое пособие к учебнику 3-го класса четырехлетней начальной школы. — М.: ЦОР 1, 2003. — 129 с.
19. *Аргинская И. И.* Математика. Методическое пособие к учебнику 4-го класса четырехлетней начальной школы. — М.: ЦОР, 2001. — 80 с.
20. *Аргинская И. И., Бененсон Е. П., Итина Л. С.* Математика. Учебник для 1 класса. В 5 частях. Издание 3-е, исправл. и дополн. — Самара: Корпорация "Федоров", Издательство "Учебная литература", 2003. Часть 1. — 64 с.: ил.
21. *Аргинская И. И., Бененсон Е. П., Итина Л. С.* Математика. Учебник для 1 класса. В 5 частях. Издание 3-е, исправл. и дополн. — Самара: Корпорация "Федоров", Издательство "Учебная литература", 2003. Часть 2. — 48 с.: ил.
22. *Аргинская И. И., Бененсон Е. П., Итина Л. С.* Математика. Учебник для 1 класса. В 5 частях. Издание 3-е, исправл. и дополн. — Самара: Корпорация "Федоров", Издательство "Учебная литература", 2003. Часть 3. — 64 с.: ил.
23. *Аргинская И. И., Бененсон Е. П., Итина Л. С.* Математика. Учебник для 1 класса. В 5 частях. Издание 3-е, исправл. и дополн. — Самара: Корпорация "Федоров", Издательство "Учебная литература", 2003. Часть 4. — 64 с.: ил.
24. *Аргинская И. И., Бененсон Е. П., Итина Л. С.* Математика. Учебник для 1 класса. В 5 частях. Издание 3-е, исправл. и дополн. — Самара: Корпорация "Федоров", Издательство "Учебная литература", 2003. Часть 5. — 32 с.: ил.
25. *Аргинская И. И., Ивановская Е. И.* Математика: Учебник для 2-го класса — 2-е изд., исправл. и дополн. — Самара: Корпорация "Федоров", Издательство "Учебная литература", 2003. — 192 с.: ил.
26. *Аргинская И. И., Ивановская Е. И.* Математика: Учебник для 3-го класса — 2-е изд., исправл. и дополн. — Самара: Корпорация "Федоров", Издательство "Учебная литература", 2003. — 192 с.: ил.
27. *Аргинская И. И., Ивановская Е. И.* Математика: Учебник для 4-го класса — 2-е изд., исправл. и дополн. — Самара: Корпорация "Федоров", Издательство "Учебная литература", 2003. — 192 с.: ил.
28. *Арженіков К. П.* Методика початкової арифметики: Пос. для учит. — К.: Рад. шк., 1939. — 254 с.
29. *Ариевич И. М. Вклад П. Я.* Гальперина в теорию деятельности: интегральный подход к обучению и развитию // Вопросы психологии. — 2002. — № 5. — С. 50—59.

30. *Арнольд И. В.* Принципы отбора и составления арифметических задач // Известия АПН РСФСР. — Вып. 6. — М., 1946. — С. 7—28.
31. *Артемов А. К.* Задачный подход к подготовке учителя к обучению математике // Начальная школа. — 2002. — № 2. — С. 114—118.
32. *Артемов А. К.* Обобщения в обучении математике // Начальная школа. — 1985. — № 11. — С. 66—67.
33. *Артемов А. К.* Обучение эвристическим приемам решения математических задач в начальных классах // Развитие личности в процессе обучения и воспитания. Межвуз. сб. науч. тр.; Под ред. А. С. Радионова и др. — Пенза: ПГПУ, 1997. — С. 82—91.
34. *Артемов А. К.* Развивающее обучение решению математических задач в начальных классах: Методические рекомендации. — Пенза, 1989. — 36 с.
35. *Артемов А. К.* Формирование обобщенных умений решать задачи // Начальная школа. — 1992. — № 2. — С. 30—34.
36. *Артемов А. К., Истомина Н. Б.* Теоретические основы методики обучения в начальных класах: Пособие для студентов фак. подг. учителей нач. классов заоч. отд-я. — М.: Изд-во "Институт практической психологии", Воронеж: НПО "МОДЭК", 1996. — 224 с.
37. *Артемов А. К.* Теоретико-методические особенности поиска способов решения математических задач // Начальная школа. — 1998. — № 11—12. — С. 48—54.
38. *Астряб О. М.* Принципи систематизації арифметичних задач. — К.: Рад. шк., 1939. — 55 с.
39. *Астряб О. М., Сергунова О. П.* Задачі в систематичному курсі арифметики // Нариси з методики викладання арифметики / Під ред. О. М. Астряба. — К.: Рад. шк., 1950. — С. 200—249.
40. *Афанасьев В. Г.* Системность и общество. — М.: Политиздат, 1980. — 368 с.
41. *Бабанский Ю. К.* Оптимизация процесса обучения: Метод. Основы. — М.: Педагогика, 1977. — 254 с.
42. *Бабанский Ю. К.* Проблема повышения педологических исследований. — М.: Педагогика, 1982. — 192 с.
43. *Багачева Г. И.* К методике обучения школьников IV—V классов анализу текстовых задач // Математика в школе. — 1984. — № 1. — С. 37—38.
44. *Балк М. Б., Балк Г. Д.* Поиск решения. — М.: Детская литература, 1983. — 144 с.
45. *Балл Г. А.* Норма деятельности — категория педагогическая // Педагогика. — 1992. — № 3—4. — С. 43—48.
46. *Балл Г. А.* О психологическом содержании понятия "задача" // Вопросы психологии. — 1970. — № 6. — С. 75—85.
47. *Балл Г. А.* О системе основных понятий теории задач // Теория задач и способов их решения. — Киев: ИК, 1974. — С. 57—68.
48. *Балл Г. А.* Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект. — М.: Педагогика, 1990. — 184 с.

49. *Балл Г. А., Чмут Т. К.* Разработка заданий развивающего характера на базе сюжетных математических задач // Учебный материал и учебные ситуации: Психологические аспекты / Под ред. Г. С. Костюка, Г. А. Балла. — К.: Рад. шк., 1986. — С. 94—113.
50. *Бантова М. А.* Анализ процесса решения простых арифметических задач // Педагогика и методика начального обучения. Научные доклады. 30-е Герценовские чтения. — Л., 1977. — С. 38—50.
51. *Бантова М. А.* Решение текстовых арифметических задач // Начальная школа. — 1989. — № 10—11. — С. 70—76.
52. *Бантова М. А., Бельтюкова Г. В.* Методика преподавания математики в начальных классах. — М.: Просвещение, 1984. — 335 с.
53. *Баринова О. В.* Дифференцированное обучение решению математических задач // Начальная школа. — 1999. — № 2. — С. 41—44.
54. *Баринова О. В.* Уровневая дифференциация в обучении младших школьников решению текстовых математических задач: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. — Саранск, 1999. — 187 с.
55. *Бевз Г. П.* Методика викладання математики: Навч. посібник. — Х.: Вид. група "Основа", 2003. — 96 с.
56. *Бевз Г. П.* Методика викладання математики: Навч. посібник. — 3-є вид., перероб. і доп. — К.: Вища шк., 1989. — 367 с.
57. *Бекбоев И. Б.* Научные основы разработки и обучения решению задач в системе непрерывного математического образования: Автореф. дис... д-ра пед. наук: 13.00.02 — Бишкек, 1994. — 84 с.
58. *Белошистая А. В.* Методический семинар: вопросы обучения решению задач // Начальная школа плюс До и После. — 2003. — № 11. — С. 50—55.
59. *Белошистая А. В.* Вопросы обучения решению задач (Методический семинар) // Начальная школа плюс До и После. — 2003. — № 3. — С. 73—79.
60. *Белошистая А. В.* Вопросы обучения решению задач // Начальная школа плюс До и После. — 2002. — № 11. — С. 64—67.
61. *Белошистая А. В.* Методический семинар: вопросы обучения решению задач // Начальная школа плюс До и После. — 2003. — № 12. — С. 52—56.
62. *Белошистая А. В.* Методический семинар: вопросы обучения решению задач // Начальная школа плюс До и После. — 2003. — № 1. — С. 66—71.
63. *Белошистая А. В.* Методический семинар: вопросы обучения решению задач // Начальная школа плюс До и После. — 2003. — № 4. — С. 13—22.
64. *Белошистая А. В.* Методический семинар: вопросы обучения решению задач // Начальная школа плюс До и После. — 2003. — № 7. — С. 35—38.
65. *Белошистая А. В.* Методический семинар: вопросы обучения решению задач // Начальная школа плюс До и После. — 2003. — № 11. — С. 50—55.
66. *Белошистая А. В.* Прием графического моделирования при обучении решению задач // Начальная школа. — 1991. — № 4. — С. 18—24.
67. *Бенерджи Р.* Теория решения задач. — М.: Мир, 1972. — 242 с.

68. *Березанская Е. С.* Методика арифметики: Учеб. пособие для учителей ср. школ. — М.: Учпедгиз, 1955. — 395 с.
69. *Беспалько В. П.* Слагаемые педагогической технологии. — М.: Педагогика, 1989. — 190 с.
70. *Блонский П. П.* Развитие мышления школьника // Избранные псих. и пед. сочинения. — Т. 2. — М.: Педагогика, 1979. — С. 5—117.
71. *Богданович М. В.* Математика: Підруч. для 1 кл. — К.: Освіта, 2001. — 128 с.
72. *Богданович М. В.* Математика: Підруч. для 2 кл. — К.: Освіта, 2002. — 160 с.
73. *Богданович М. В.* Математика: Підруч. для 3 кл. — К.: Освіта, 2003. — 160 с.
74. *Богданович М. В.* Математика: Підруч. для 4 кл. — К.: Освіта, 2004. — 159 с.
75. *Богданович М. В.* Математика: Підруч. для 4 кл. чотириріч. і 3 кл. триріч. почат. шк. — 2-ге вид. — К.: Освіта, 1995. — 240 с.
76. *Богданович М. В.* Математика: Підруч. для 1 кл. чотиріч. і 2 кл. триріч. почат. шк.: — 7-ме вид. — К.: Освіта, 1997. — 224 с.
77. *Богданович М. В.* Математика: Пробн. підруч. для 1 кл. триріч. почат. шк. — К.: Освіта, 1997. — 208 с.
78. *Богданович М. В.* Математика: Учеб. для 2 кл. четырехлет. нач. шк. — К.: Рад. шк., 1987. — 208 с.: ил.
79. *Богданович М. В.* Математика: Учеб. для 3 кл. четырехлет. нач. шк. — К.: Рад. шк., 1988. — 256 с.: ил.
80. *Богданович М. В., Козак М. В., Король Я. А.* Методика викладання математики в початкових класах. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2001. — 368 с.
81. *Богданович М. В., Кочина Л. П.* Математика: Учебник для 1 кл. четырехлетней начальной школы. — 3-е изд. — К.: Радянська школа, 1988. — 128 с.
82. *Богданович М. В., Кочина Л. П., Левшин М. М.* Математика: Підруч. для 4 кл. чотиріч. почат. шк. — К.: Рад. шк., 1989. — 287 с.
83. *Богданович М. В., Листопад Н. П.* Календарне планування з математики для 3(2) і 4(3) класів. — К.: Задруга, 1999. — 30 с.
84. *Богданович М. В.* Методика розв'язування задач в початкових класах. — К.: "Вища школа", 1990. — 183 с.
85. *Богданович М. В., Заїка А. М., Шпакова В. С.* Програма з математики для середньої загальноосвітньої школи (1—4 класи) // Початкова школа. — 2003. — № 9. — С. 14—17.
86. *Боголюбов А. Н.* Аналитико-синтетический метод решения задач в начальной школе // Пути повышения успеваемости по математике / Под ред. Н. А. Менчинской и В. И. Зыковой. — М.: Изд-во АПН РСФСР, 1955. — С. 38—67.
87. *Боголюбов А. Н.* Решение задач на движение в начальной школе. — М.: Изд-во АПН РСФСР, 1950. — 52 с.

88. *Богоявленский Д. Н., Менчинская Н. А.* Психология усвоения знаний в школе. — М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. — 347 с.
89. *Бородулько М. А., Стойлова Л. П.* Обучение решению задач и моделирование // Начальная школа. — 1996. — № 8. — С. 26—31.
90. *Боцманова М. Э.* Психология овладения графическим анализом при решении задач в начальной школе: Дис... канд. пед. наук (по психол.). — М., 1966. — 124 с.
91. *Брадис В. М.* Методика преподавания математики в средней школе: Учебное пособие для для студентов педагогических институтов / Под ред. А. А. Маркушевича. — 2-е изд. М.: Учпедгиз, 1951. — 503 с.
92. *Брадис В. М.* Математические задачи в школе // Математика в школе. — 1946. — № 1. — С. 33—39.
93. *Брунер Дж.* Процесс обучения / Под ред. А. Р. Лурия. — М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962. — 84 с.
94. *Брушлинский А. В.* Психология мышления и проблемное обучение. — М.: Знание, 1983. — 96 с.
95. *БСЭ*: в 30 т. — М.: Советская энциклопедия, 1976. — Т. 23: Сафлор — Соан. — 640 с.
96. *Бурда М. İ.* Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти // Педагогіка і психологія. — 1996. — № 1. — С. 40—45.
97. *Бурда М. İ.* Моделювання сюжетних задач // Розв'язування математичних задач в початкових класах: Зб. статей / Під ред. канд. пед. наук Т. М. Хмари. — К.: Рад. шк., 1986. — С. 41—47.
98. *Бусленко Н. П.* Моделирование сложных систем. — 2-е изд. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
99. *Бухарова Г. Д.* Теоретико-методологические основы обучения решению задач студентов вуза: Дис... доктора пед. наук: 13.00.01, 13.00.02 — Екатеринбург, 1996. — 249 с.
100. *Валеева И. А.* Особенности умственных действий младших школьников при решении эвристических задач // Начальная школа. — 1996. — № 3. — С. 37—44.
101. *Валитова С. Л.* Методические основы обучения поиску решения текстовых задач в 7—9 классах на основе формирования приемов учебной деятельности. — Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02. / Моск. пед. гос. ун-т — М., 1998. — 16 с.: табл.
102. *Вапняр Н. Ф.* Дифференцированные задания по математике // Начальная школа. — 1970. — № 12. — С. 22—26.
103. *Введенская Т. В., Ляшенко Е. И., Радченко В. П.* Математика: 5 кл.: Учимся решать задачи. — СПб.: Дидактика, 1996. — 67 с.
104. *Виленкин Н. Я., Сатволдиев А.* Метод сквозных задач в школьном курсе математики // Повышение эффективности обучения математике в школах / Сост. Г. Д. Глейзер. — М.: Просвещение, 1989. — С. 101—112.
105. *Виноградова Л. В., Тиликайнен В. Е.* Задачи на составление уравнений: (в помощь учителю математики) // Математика в школе. — 1994. — № 4. — С. 21—23.

106. *Возрастная* и педагогическая психология / Под ред. А. В. Петровского. — М.: Педагогика, 1979. — 288 с.
107. *Возрастная* и педагогическая психология / Под ред. М. В. Гомезо, М. В. Матюхиной, Т. С. Михальчик. — М.: Просвещение, 1984. — 256 с.
108. *Возрастные* возможности усвоения знаний (младшие классы школы) / Под ред. Д. Б. Эльконина, В. В. Давыдова. — М.: Просвещение, 1966. — 443 с.
109. *Войшвилло Е. К.* Понятие как форма мышления: Логико-гносеологический анализ. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 238 с.
110. *Волковский Д. А.* Методика арифметики в начальной школе: Пособие для учителя. — Изд 3-е. — М.: Учпедгиз, 1937. — 296 с.
111. *Воронов Д. Н.* Опыт систематизации типовых арифметических задач. — М.; Л.: Учпедгиз, 1939. — 73 с.
112. *Выготский Л. С.* Мышление и речь // Собрание сочинений: В 6 т. — Т. 2 / Под ред. В. В. Давыдова. — М.: Педагогика, 1982. — 504 с.
113. *Выготский Л. С.* Педагогическая психология / Под ред. В. В. Давыдова. — М.: Педагогика, 1991. — 479 с.
114. *Выготский Л. С.* Собр. соч.: В 6 т. / Под ред. Д. Б. Эльконина. — Т. 4. Детская психология. — М.: Педагогика, 1984. — 432 с.
115. *Гальперин П. Я.* Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий // Исследование мышления в советской психологии. — М.: Наука, 1966. — С. 236—277.
116. *Гальперин П. Я.* Психология: 4 лекции. — М.: Книжн. дом "Университет": Юрайт, 2000. — 111 с.
117. *Гальперин П. Я.* Введение в психологию: Учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по гуманитар. специальностям. — М.: Ун-т, 2000. — 329 с.
118. *Гальперин П. Я.* К исследованию интеллектуального развития ребенка // Вопросы психологии. — 1969. — № 1. — С. 18—22.
119. *Гальперин П. Я.* Метод срезов и метод поэтапного формирования // Вопросы психологии. — 1966. — № 4. — С. 128—135.
120. *Гальперин П. Я.* Методы обучения и умственное развитие ребенка. — М.: Изд-во МГУ, 1985. — 45 с.
121. *Гальперин П. Я.* Общий взгляд на учение о так называемом поэтапном формировании умственных действий, представлений и понятий // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 14. Психология. — 1998. — № 2. — С. 3—8.
122. *Гальперин П. Я.* Основные результаты исследований по проблеме "Формирование умственных действий и понятий". — М.: Просвещение, 1965. — 121 с.
123. *Гальперин П. Я.* Развитие исследований по формированию умственных действий // Психологическая наука в СССР. — М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. — Т. 1. — С. 441—469.
124. *Гальперин П. Я., Кабыльницкая С. Л.* Экспериментальное формирование внимания. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. — 99 с.

125. *Гаткевич Д. И.* О формировании общих способов решения задач у учащихся // Актуальные вопросы методики преподавания математики / Сб. научн. трудов. — М.: МГПИ им. В. И. Ленина, 1975. — С. 32—35.
126. *Гегель Г.* Сочинения: Энциклопедия философских наук. — М.; Л.: Гос. соц.-экон. изд-во, 1930. — Т. 1. — 367 с.
127. *Гергенова В. Е.* Текстовые задачи как средство формирования математических понятий и представлений у младших школьников: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. — М., 1989. — 159 с.
128. *Глой К.* Проблема последнего обоснования динамических систем // Вопросы философии. — 1994. — № 3. — С. 94—105.
129. *Глушков В. М.* Введение в кибернетику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1964. — 324 с.
130. *Голант В. Я.* Методы обучения в советской школе. — М.: Учпедгиз, 1957. — 151 с.
131. *Гора Т., Логачевська С.* Диференційований підхід до розв'язування текстових задач // Початкова школа. — 1998. — № 1. — С. 17—22.
132. *Горобец Т. К.* Особенности формирования у учащихся стратегии решения задач: Дис... канд. психол. наук: 21967. — К., 1970. — 266 с.
133. *Горчакова І. А.* Система математичних задач як засіб формування евристичної діяльності учнів основної школи: Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Національний педагогічний ун-т ім. М. П. Драгоманова. — К., 2002. — 19 с.
134. *Гранатов Г. Г.* Метод дополнительности в педагогическом мышлении (Методология развивающего образования): Дис… д-ра пед. наук: 13.00.01. — Челябинск, 1993. — 383 с.
135. *Гребенникова Н. А.* Ознакомление первоклассников с задачей // Начальная школа. — 1990. — № 10. — С. 34—37.
136. *Гребенникова Н. А.* Решение задач на зависимость величин разными способами // Начальная школа. — 1999. — № 2. — С. 45—50.
137. *Груденов Я. И.* Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1990. — 224 с.
138. *Груденов Я. И.* Психолого-педагогические основы методики обучения математике. — М.: Педагогика, 1987. — 160 с.
139. *Грязева Н. Н.* Творческие задачи по физике, как средство формирования познавательной деятельности учащихся: Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Челяб. гос. пед. ун-т. — Челябинск, 1996. — 17 с.: табл.
140. *Гузь Г. А.* Методика обучения учащихся решению задач с тремя взаимосвязанными величинами в курсе математики восьмилетней школы: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. — Ленинград, 1974. — 298 с.
141. *Гуревич В. Ю.* Формирование приемов поиска решения задач на уроках математики в 6-м классе: Автореф. дис... канд. пед. наук: 731 / АПН СССР, Научн.-исслед. ин-т содерж. и методов обучения — М., 1972. — 20 с.

142. *Гурова Л. Л.* Исследование мышления как решения задач: Дис... д-ра психол. наук: 19.00.07. — М., 1975. — 413 с.
143. *Гурова Л. Л.* Психологический анализ решения задач. — Воронеж: изд-во Воронеж. ун-та, 1976. — 327 с.
144. *Гурова Л. Л.* Функция наглядно-образных компонентов в решении задач // Вопросы психологии. — 1969. — № 5. — С. 19—23.
145. *Давыдов В. В.* Виды обобщения в обучении: Логико-психологические проблемы построения учебных предметов. — М.: Педагогика, 1972. — 424 с.
146. *Давыдов В. В.* Новый подход к пониманию структуры и содержания деятельности // Вопросы психологии. — 2003. — № 2. — С. 42—49.
147. *Давыдов В. В.* Проблемы развивающего обучения: Опыт теоретического и экспериментального психологического исследования. — М.: Педагогика, 1986. — 240 с.
148. *Давыдов В. В.* Психологическая теория учебной деятельности и методов начального обучения, основанных на содержательном обобщении. — Томск, 1992. — 112 с.
149. *Давыдов В. В.* Учебная деятельность: состояние и проблемы исследования // Вопросы психологии. — 1991. — № 6. — С. 5—14.
150. *Давыдов В. В.* Что такое учебная деятельность // Начальная школа. — 1999. — № 7. — С. 12—18.
151. *Давыдов В. В., Боданский Ф. Г.* Психологические исследования учебной деятельности младших школьников при обучении математике // Исследования интеллектуальных возможностей и учебной деятельности младшего школьника. — Ереван. 1976. — С. 17—28.
152. *Давыдов В. В., Горбов С. Ф., Микулина Г. Г., Савельева О. В.* Обучение математике. 2 класс: Методическое пособие. — М.: МИРОС, 1994. — 192 с.
153. *Давыдов В. В., Пушкин В. Н., Пушкина А. Г.* Зависимость развития мышления младших школьников от характера обучения // Вопросы психологии. — 1972. — № 6. — С. 124—132.
154. *Давыдов В. В., Эльконин Д. Б., Маркова А. К.* Основные вопросы современной психологии детей младшего школьного возраста / Проблемы общей, возрастной и педагогической психологии. — М., 1978. — С. 180—205.
155. *Далингер В. А.* Обучение учащихся решению текстовых задач методом составления уравнений: Пособие для учителя. — Омск, 1991. — 50 с.
156. *Данилов М. А., Есипов Б. П.* Дидактика. — М.: Изд-во АПН РСФСР, 1957. — 280 с.
157. *Денисов А. П.* Леонтій Филиппович Магницький. 1969. — 1739. — М.: Просвещение, 1967. — 143 с.
158. *Демидова Т. Е.* Обучение решению некоторых видов составных задач // Начальная школа плюс До и После. — 2003. — № 4. — С. 23—27.
159. *Демидова Т. Е., Тонких А. П.* Решение текстовых задач геометрическим методом в курсе математики начальной школы // Начальная школа плюс До и После. — 2003. — № 7. — С. 27—34.

160. *Державна* національна програма "Освіта" (Україна XXI століття). — К.: Райдуга, 1994. — 61 с.
161. *Державний* стандарт базової і повної освіти // Математика. — 2004. — № 12. — С. 1–6.
162. *Державний* стандарт початкової загальної освіти // Початкова школа. — 2001. — № 1. — С. 28–54.
163. *Джумаев К. К.* Изучение задач как путь осуществления дидактических целей решения их в школе: Дис... канд. пед. наук: 13.00.01. — Душанбе, 1973. — 184 с.
164. *Дзида Г. А.* Развитие умения решать физические задачи при обобщающе-систематизирующем повторении: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. — Челябинск, 1987. — 170 с.
165. *Дидактика* современной школы: Пособие для учителей / Под ред. В. А. Онищука. — Киев: Рад. шк., 1987. — 351 с.
166. *Дидактика* средней школы / Под ред. М. А. Данилова и М. Н. Скаткина. — М.: Просвещение, 1975. — 303 с.
167. *Дидактика* средней школы: Некоторые проблемы современной дидактики: Учебное пособие по спецкурсу для педагогических институтов / В. В. Краевский, И. Я. Лернер, М. Н. Скаткин и др.; Под ред. М. Н. Скаткина. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Просвещение, 1982. — 319 с.
168. *Дорофеев Г. В.* Проверка решения текстовых задач // Математика в школе. — 1983. — № 1. — С. 24–27.
169. *Драган З. П.* К методике решения задач в IV–X классе // Математика в школе. — 1983. — № 1. — С. 24–27.
170. *Дрозд В. Л., Уран М. А.* Задачник — практикум по решению арифметических задач: Учеб. пособие. — Минск: Вышэйшая школа, 1991. — 64 с.: ил.
171. *Дружинин В. В., Конторов Д. С.* Идея, алгоритм, решение. — М.: Воениздат, 1972. — 328 с.
172. *Дубинчук О. С.* Математика в 4 і 5 класах: Метод. посібник. — К.: Рад. шк., 1986. — 168 с.
173. *Дубровина И. В.* Изучение математических способностей детей младшего школьного возраста // Вопросы психологии способностей: Сб. ст. под ред. В. А. Крутецкого. — М.: Педагогика, 1973. — С. 3–60.
174. *Дусавицкий А. К.* Развивающее образование: теория и практика. — Харьков, 2002. — 146 с.
175. *Дяченко Л. В.* Психологічні особливості взаємодії вчителя і учнів молодших класів при розв'язанні "важких" мисленевих задач: Автореф. дис. на здобуття канд. психол. наук: 19.00.07. — Київ, 2001. — 22 с.
176. *Евтушевский В. А.* Методика арифметики. — 17-е изд., — Спб: Полубояринов, 1912. — 350 с.
177. *Емельянов С. В., Наппельбаум Э. Л.* Методы исследования сложных систем: Логика рационального выбора. — М.: ВИНИТИ, 1977. — 101 с.

178. *Епишева О. Б.* Общая методика преподавания математики в средней школе: Курс лекций: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. — Тобольск: Изд. ТГПИ им. Д. И. Менделеева, 1997. — 191 с.
179. *Ефимов Е. И.* Решатели интеллектуальных задач. — М.: Наука, 1982. — 320 с.
180. *Жалдак М. И., Горошко Ю. В., Винниченко Е. Ф.* Математика с компьютером: Пособие для учителей. — К.: РУНЦ "ДИНИТ", 2004. — 251 с.
181. *Забранский В. Я.* Дифференцированное обучение математике учащихся 5–6 классов основной школы: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. — К., 1990. — 174 с.
182. *Загородных К. А.* Обучение учащихся 2 класса приемам проверки текстовых задач: Метод. рекомендации для учителей. — Омск.: Изд-во ОмГУ, 2004. — 11 с.
183. *Загородных К. А.* Формирование приемов учебной деятельности учащихся 4–5 классов при обучении решению текстовых задач: Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02. / Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина. — М., 1989. — 16 с.
184. *Заде Л.* Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений // Математика сегодня. — М.: Мир, 1974. — С. 5–49. — (Новое в жизни, науке, технике. Сер. Математика, кибернетика; № 7).
185. *Заїка А., Богданович М.* Учням про задачу і процес її розв'язування // Початкова школа. — 1998. — № 3. — С. 12–16.
186. *Зайцев Л. В.* Теоретические основы обучения решению задач в начальных каласcах: Учебное пособие. — Л., 1983. — 98 с.
187. *Зак А. З.* Развитие теоретического мышления у младших школьников. — М.: Педагогика, 1984. — 152 с.
188. *Зак А. З.* Развитие умственных способностей младших школьников. — М.: Просвещение "Владос", 1994. — 186 с.
189. *Закон* України "Про освіту" // Освіта. — 1991. — 25 червня.
190. *Закон* України "Про внесення змін і доповнень до Закону Української РСР "Про освіту"". — К.: Видавництво "Генеза", 1996. — 36 с.
191. *Закон* України "Про загальну середню освіту" // Відомості Верховної Ради України. — 1999. — № 28.
192. *Занков Л. В., Занков В. В.* Методика преподавания математики в 1 классе. — М.: Дом педагогики, Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1998. — 96 с.
193. *Занков Л. В.* Избранные педагогические труды. — М.: Новая шк., 1996. — 432 с.
194. *Запорожец А. В.* Восприятие и действие / Под ред. А. В. Запорожца. — М.: Просвещение, 1965. — 240 с.
195. *Запорожец А. В.* Психология: Учебник для дошкольных педагогических училищ. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: Просвещение, 1965. — 240 с.

196. *Зинченко В. П.* П. Я. Гальперин: от действия с заданными свойствами к свободной мысли // Вопросы психологии. — 2002. — № 5. — С. 120—133.
197. *Зинченко В. П.* Проблемы психологии развития (читая О. Мандельштама) // Вопросы психологии. — 1992. — № 3—4. — С. 50—60.
198. *Зубова С. П.* Использование задач для выявления сформированности обобщений // Начальная школа. — 1991. — № 5. — С. 24—25.
199. *Игнатова Л. В.* Приемы установления зависимости между величинами в задачах // Начальная школа. — 1988. — № 2. — С. 49—52.
200. *Игнатьев В. А., Пчелко А. С., Шор Я. А.* Методика преподавания арифметики. — М.: Учпедгиз, 1956. — 244 с.
201. *Изатуллоев К.* Методика использования текстовых задач в обучении младших школьников математике: Дис... канд. пед. наук.: 13.00.02. — М., 1983. — 163 с.
202. *Изучение* трудных тем по математике в I—III класах: из опыта работы учителей г. Москвы / Сост. Н. Г. Уткина. — М.: Просвещение, 1982. — 159 с.
203. *Ильина Т. А.* Системно-структурный поход к исследованию педагогических явлений // Результаты новых исследований в педагогике. — М., 1977. — С. 14—28.
204. *Ильясов И. И.* Система эвристических примов решения задач. — М.: Изд-во Российского открытого университета, 1992. — 140 с.
205. *Истомина Н. Б.* Обучение решению задач // Начальная школа. — 1985. — № 1. — С. 42—45.
206. *Истомина Н. Б.* Математика. 1 класс: Учебник для четырехлетней начальной школы. — Смоленск: издательство „Ассоциация XXI век", 2002. — 176 с.
207. *Истомина Н. Б.* Математика. 2 класс: Учебник для четырехлетней начальной школы. — Смоленск: Издательство "Ассоциация XXI век", 2001. — 176 с.
208. *Истомина Н. Б.* Математика. 3 класс: Учебник для четырехлетней начальной школы. — Смоленск: Издательство "Ассоциация XXI век", 2000. — 176 с.
209. *Истомина Н. Б.* Математика. Учебник для 4 класса четырехлетней начальной школы. — Смоленск: Издательство "Ассоциация XXI век", 2001. — 240 с.
210. *Истомина Н. Б.* Методика обучения математике в начальных классах. — М.: Издательский центр "Академия", 2002. — 288 с.
211. *Истомина Н. Б.* Методические рекомендации к учебнику "Математика. 1 класс" (для четырехлетней начальной школы). — Смоленск, "Ассоциация XXI век", 2003. — 112 с.
212. *Истомина Н. Б.* Методические рекомендации к учебнику "Математика. 2 класс" (для четырехлетней начальной школы). — Смоленск, "Ассоциация XXI век", 2002. — 96 с.

213. *Истомина Н. Б.* Методические рекомендации к учебнику "Математика. 3 класс" (для четырехлетней начальной школы). — Смоленск, "Ассоциация XXI век", 2001. — 112 с.
214. *Истомина Н. Б.* Методические рекомендации к учебнику "Математика" для 4 класса четырехлетней начальной школы. — Смоленск, "Ассоциация XXI век", 2002. — 160 с.
215. *Истомина Н. Б.* Работа над составной задачей // Начальная школа. — 1988. — № 2. — С. 44—49.
216. *Истомина Н. Б., Латохина Л. Г., Шмырева Г. Г.* Практикум по методике преподавания математики в начальных классах: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по спец. № 2121 "Педагогика и методика начального обучения" — М.: Просвещение, 1986. — 176 с.
217. *Истомина Н. Б., Нефедова И. Б.* Математика. 1 класс: Учебник для трехлетней начальной школы. 4-е испр. изд. — М.: Linka-Press, 1996. — 222 с.
218. *Истомина Н. Б., Шикова Р. Н.* Методика обучения решению задач // Методика преподаваниям математики в начальных классах: Вопр. частной методики: Учеб. пособие для студентов-заочников II—IV курсов фак. подгот. учителей нач. классов / Н. Б. Истомина, Е. И. Мишарева, Р. Н. Шикова, Г. Г. Шмырева; Моск. гос. заоч. пед. ин-т. — М.: Просвещение, 1986. — С. 60—108.
219. *Истомина Н. Б., Шикова Р. Н.* Формирование умения решать задачи различными способами // Начальная школа. — 1985. — № 9. — С. 50—54.
220. *Истомина Н. Б., Нефедова И. Б.* Первые шаги в формировании умения решать задачи. Новые подходы // Начальная школа. — 1998. — № 11—12. — С. 42—48.
221. *Іванова Л. С.* Робота над задачами в 1—2 класах // Початкова школа. — № 5. — 1989. — С. 28—32.
222. *Ігнатенко М. Я., Соколенко Л. О.* Прикладні задачі в курсі математики // Рідна школа. — 1997. — № 5. — С. 58—59.
223. *Ігнатенко М. Я.* Методологічні та методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики: Автореф. дис... д-ра пед. наук: 13.00.02 / Український держ. пед. ун-т ім. М. П. Драгаманова. — К., 1997. — 47 с.
224. *Кабанова-Меллер Е. Н.* Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся. — М.: Просвещение, 1968. — 288 с.
225. *Кавун И. Н., Попова Н. С.* Методика преподавания арифметики: Учеб. пособие для учителей начальной школы и студ. пед. техников. — Изд. 3-е. — М.; Л.: Учпедгиз, 1934. — 114 с.
226. *Казько Е. С.* Методика обучения решению сюжетных задач в курсе математики 5—6 классов с использованием коллективной формы организации учебного процесса: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. / Рос. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена. — СПб., 1993. — 20 с.: табл.

227. *Казько Е. С.* Работа над текстом задачи с пропорциональными величинами // Начальная школа. — 1998. — № 5. — С. 70–72.
228. *Как решать* задачи в начальной школе / Под ред. Л. Р. Мирошниченко. — Киргизгосиздат, 1937. — 38 с.
229. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Метематическая теория систем: Пер. с англ. — М.: Мир, 1971. — 398 с.
230. *Калмыкова З. И.* Психологический анализ формирования понятия о типе задачи // Изв. АПН РСФСР, 1947. — № 12. — С. 139–154.
231. *Калмыкова З. И.* Процессы анализа и синтеза при решении арифметических задач // Психология усвоения знаний / Под ред. Н. А. Менчинской. — М.: Изд-во АПН РСФСР, 1954. — С. 206–232.
232. *Калмыкова З. И.* Психологические принципы развивающего обучения. — М.: Знание, 1979. — 48 с.
233. *Каменецкий С. Е., Орєхов В. П.* Методика решения задач по физике в средней школе: Книга для учителя. — 3-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 1987. — 356 с.
234. *Карлащук А. Ю.* Формування дослідницьких умінь школярів у процесі розв'язування математичних задач з параметрами: Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Національний педагогічний ун-т ім. М. П. Драгоманова. — К., 2001. — 19 с.
235. *Клейман Я. М.* Решение задач различными способами // Математика в школе. — 1987. — № 6. — С. 23–28.
236. *Кирсанов А. А.* Индивидуализация учебной деятельности как педагогическая проблема. — Казань: Изд-во Каз. ун-та, 1982. — 230 с.
237. *Клименченко Д. В.* К вопросу психологии мышления учащихся при решении задач // Математика в школе. — 1977. — № 3. — С. 26–29.
238. *Козелецкий Ю.* Психологическая теория решений. — М.: Прогресс, 1979. — 504 с.
239. *Колягин Ю. М.* Задачи в обучении математике. Ч. I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. — М.: Просвещение, 1977. — 148 с.
240. *Колягин Ю. М.* Задачи в обучении математике, ч. II. Обучение математике через задачи и обучение решению задач. — М.: Просвещение, 1977. — 144 с.
241. *Колягин Ю. М.* Математические задачи как средство обучения и развития учащихся средней школы: Автореф. дис... докт. пед. наук: 13.00.02. / Научн.-исслед. ин-т содерж. и методов обучения АПН СССР — М., 1977. — 55 с.
242. *Колягин Ю. М.* Методические проблемы применения задач в обучении математике // Преподавание алгебры и геометрии в школе. — М.: Просвещение, 1982. — С. 116–123.
243. *Колягин Ю. М., Балашов Ю. В.* Учись решать задачи: Пособие для учащихся 7–9 классов гимназии. — М.: Валент, 1995. — 154 с.

244. *Колягин Ю. М., Моро М. А.* Дальнейшее совершенствование начального математического образования // Начальная школа. — 1985. — № 12. — С. 2–7.
245. *Колягин Ю. М., Оганесян В. А.* Учись решать задачи. — М.: Просвещение, 1989. — 150 с.
246. *Кондаков Н. И.* Логический словарь. — М.: Наука, 1971. — 656 с.
247. *Кондильяк Э.* Трактат о системах, в которых вскрываются их недостатки и достоинства. — М.: Гос. соц.-экон. изд-во, 1978. — 195 с.
248. *Кордемский Б. А., Островский А. И.* Геометрия помогает арифметике. — М.: АО "Столетие", 1994. — 176 с.
249. *Коренберг В. Б.* Решение задачи, умение, навык // Вопросы психологии. — 1993. — № 2. — С. 80–85.
250. *Короткова Л. М.* Теория и методика обучения арифметике в гимназии: Автореф. дис... д-ра пед. наук: 13.00.02. / Ин-т общ. образования М-ва образования Рос. Федерации. — М., 2000. — 41 с.
251. *Корчевська О. П.* Навчання молодших школярів розв'язувати математичні завдання підвищеної складності: Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Національний педагогічний ун-т ім. М. П. Драгоманова. — К., 2000. — 20 с.
252. *Кострикина Н. П.* Как учить школьников IV–V классов решать задачи // Математика в школе. — 1987. — № 1. — С. 15–18.
253. *Костюк Г. С.* Избранные психологические труды / Под ред. Л. Н. Проколиенко; АПН СССР. — М.: Педагогика, 1988. — 301 с.
254. *Костюк Г. С.* Категория задачи и ее значение для психолого-педагогических исследований // Вопросы психологии. — 1977. — № 3. — С. 24–30.
255. *Костюк Г. С.* Психология: Пособие для студентов педвузов. — К.: Рад. шк., 1968. — 527 с.
256. *Кочина Л. П., Листопад Н. П.* Математика / Програми для середньої загальноосвітньої школи. 1–2 класи. — К.: Початкова школа, 2002. — С. 65–76.
257. *Кочина Л. П., Листопад Н. П.* Математика / Програми для середньої загальноосвітньої школи. 3–4 класи. — К.: Початкова школа, 2003. — С. 86–96.
258. *Кочина Л. П., Листопад Н. П.* Математика, 2 кл.: Проб. підручник для серед. загальноосвіт. шк. — К.: Літера ЛТД, 2002. — 160 с.
259. *Кочина Л. П., Листопад Н. П.* Математика, 3 кл.: Підручник для серед. загальноосвіт. шк. — К.: Літера ЛТД, 2003. — 176 с.
260. *Кочина Л. П., Листопад Н. П.* Математика, 4 кл.: Підручник для серед. загальноосвіт. шк. — К.: Літера ЛТД, 2004. — 176 с.: іл.
261. *Кочина Л. П., Листопад Н. П.* Математика: проб. підруч. для 1 кл. чотиріч. почат. шк. — К.: Літера: А. С. К., 2000. — 144 с.: іл.
262. *Крупич В. И.* Модель систематизации структур текстовых задач школьного курса математики // Задачи как цель и средство обучения математи-

ке учащихся средней школы. — Л.: ЛГПИ им. Герцена, 1981. — С. 13—25.
263. *Крупич В. И.* Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. — М.: Прометей, 1995. — 166 с.
264. *Крутецкий В. А.* Основы педагогической психологии. — М.: Просвещение, 1972. — 255 с.
265. *Крутецкий В. А.* Психология математических способностей школьников. — М.: Просвещение, 1968. — 432 с.
266. *Крутихина М. В.* Обучение элементам моделирования при решении сюжетных задач в курсе алгебры 8-летней школы как путь реализации прикладной направленности школьного курса математики. Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Ленингр. гос. пед. ин-т им. А. И. Герцена. — Л., 1986. — 16 с.
267. *Крыговская А. С.* Развитие математической деятельности учащихся и роль задач в этом развитии // Математика в школе. — 1966. — № 6. — С. 19—30.
268. *Крыжко Г. С.* Обучение учащихся начальных классов решению задач путем составления уравнений: Дис... канд. пед. наук: 13731. — К., 1969. — 182 с.
269. *Кузнецов В. И.* К вопросу о решении математических задач // Начальная школа. — 1999. — № 5. — С. 27—33.
270. *Кузнецов В. И.* Самостоятельная работа при решении задач на движение // Начальная школа. — 1977. — № 4. — С. 42—45.
271. *Кузнецов Э. И.* Новые информационные технологии и обучение математике // Математика в школе. — 1990. — № 5. — С. 5—8.
272. *Кузнецова Л. И., Перевощикова Е. Н.* Основы технологии развивающего обучения математике: Учебное пособие. — Н. Новгород: НГПУ, 1997. — 134 с.
273. *Кузьмин В. П.* Принципы системности в теории и методологии К. Маркса. — 3-е изд., доп. — М.: Политиздат, 1976. — 398 с.
274. *Кутергина Л. Н.* Психологические особенности формирования умственного действия раскрытия причинно-следственных связей у младших школьников: Автореф. дис... канд. психол. наук. / Ленингр. гос. пед. ин-т им. А. И. Герцена — Л., 1978. — 20 с.
275. *Лабарерре Сардуй, Альберто Феликс.* Формирование у учащихся способов преобразования задачи как основы ее решения (На материале школ Кубы): Автореф. дис... канд. психол. наук: 19.00.07. / АПН СССР, НИИ общ. и пед. психологии. — М., 1983. — 16 с.
276. *Лабораторные* и практические работы по методике преподавания математики: (Для физ.-мат. спец. / Е. И. Лященко и др.); Под ред. Е. И. Лященко. — М.: Просвещение, 1988. — 221 с.
277. *Ланда Л. Н.* О формировании у учащихся метода мыслительной деятельности при решении задач // Вопросы психологии. — 1959. — № 3. — С. 14—27.
278. *Ларичев О. И.* Наука и искусство принятия решений. — М.: Наука, 1979. — 200 с.

279. *Ларичев О. И.* Принятия решений как научное направление: Методологические проблемы // Системные исследования: Ежегодник. — М.: Наука, 1982. — С. 227—243.
280. *Латышев Л. А.* Руководство к преподаванию арифметики. — СПб., 1904. — 174 с.
281. *Лебедева Л. А.* Методика формирования математических умений и навыков у младших школьников на основе деятельностного подхода к обучению: Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Алматинский гос. ун-т им. Абая. — Алматы, 2002. — 29 с.: рис.
282. *Левенберг Л. Ш.* Вопросы использования графических изображений при решении математических задач в начальной школе: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. — Ташкент, 1972. — 245 с.
283. *Левенберг Л. Ш.* О решении задач на движение способом составления уравнения // Начальная школа. — 1974. — № 2. — С. 26—31.
284. *Левенберг Л. Ш.* Решение задач различными способами // Начальная школа. — 1980. — № 11. — С. 50—55.
285. *Левенберг Л. Ш.* Рисунки, схемы и чертежи в начальном курсе математики. — М.: Просвещение, 1978. — 126 с.
286. *Левин А. Н., Смирнова В. В.* О необходимости решения типовых задач // Математика в школе. — 1963. — № 1. — С. 58—60.
287. *Левитов Н. Д.* Психология труда. — М., 1963. — 463 с.
288. *Леонтьев А. Н.* Деятельность. Сознание. Личность. — 2-е изд. — М.: Политиздат, 1974. — 304 с.
289. *Леонтьев А. Н.* Избранные психологические произведения: В 2 т. — М.: Педагогика, 1983. — Т. 1. — 392 с.
290. *Леонтьев А. А.* Что такое деятельностный подход в образовании? // Начальная школа: Плюс — Минус — 2001. — № 1. — С. 3—6.
291. *Лернер И. Я.* Дидактические основы методов обучения. — М.: Педагогика, 1981. — 186 с.
292. *Лефевр В. И.* Поэтапное формирование умственных действий по решению физических задач: Дис... канд. пед. наук: 731. — М., 1968. — 230 с.
293. *Лисова М. И.* Обучение учащихся средней школы решению задач на многогранники: Автореф. дис... канд. пед. наук. — Вильнюс, 1985. — 20 с.
294. *Лишенко Г. П.* Совершенствование системы математических задач для начальных классов общеобразовательных школ: Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Научно-исследовательский институт педагогики Украинской ССР — Киев, 1990. — 22 с.
295. *Логачевська С.* Методичні рекомендації до посібників "Вчимося розв'язувати задачі" // Початкова школа. — 2003. — № 5. — С. 12—15.
296. *Логачевська С.* Методичні рекомендації до посібників "Вчимося розв'язувати задачі" // Початкова школа. — 2003. — № 3. — С. 27—31.
297. *Логачевська С., Каганець Т.* Методичні рекомендації до посібника "Вчимося розв'язувати задачі" 1—2(1) клас // Початкова школа. — 2000. — № 11. — С. 33—37.

298. *Логачевська С. П., Каганець Т. А.* Вчись розв'язувати задачі. Практичний посібник з математики для 3(2) класу. — К.: "Початкова школа", 2000. — 168 с.
299. *Логачевська С. П., Каганець Т. А.* Вчись розв'язувати задачі. Практичний посібник з математики для 4(3) класу. — К.: "Початкова школа", 2001. — 160 с.
300. *Логачевська С. П.* Дидактичні основи організації диференційованого навчання молодших школярів: Дис... канд. пед. наук: 13.00.01. — Кіровоград, 1998. — 183 л.
301. *Ломов Б. П.* К проблеме деятельности в психологии // Психологический журнал. — Т. 2. — 1981. — № 5. — С. 3–22.
302. *Лордкипанидзе Д. О.* Принципы, организация и методы обучения. — М.: Учпедгиз, 1957. — 172 с.
303. *Лук'янова С. М.* Розв'язування текстових задач арифметичними способами в основній школі: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. — К., 2005. — 236 с.
304. *Лунина Л. С.* Методика использования геометрического метода при обучении решению задач в курсе алгебры 6–8 классов: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. — Л., 1989. — 230 с.
305. *Лурия А. Р., Цветкова Л. С.* Нейропсихологический анализ решения задач: Нарушения процесса решения задач при локальных поражениях мозга. — М.: Просвещение, 1996. — 291 с.
306. *Лурье М. В., Александров Б. И.* Задачи на составление уравнений: Учеб. руководство. — 3-е изд., перераб. — М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 96 с.
307. *Лысенкова С. Н.* Методом опережающего обучения: Кн. для учителя: Из опыта работы. — М.: Просвещение, 1988. — 192 с.: ил.
308. *Люблинская А. А.* Теоретические основы современного начального обучения // Народное образование. — 1974. — № 4. — С. 112–117.
309. *Люблинская А. А.* Учителю о психологии младшего школьника. — М.: Просвещение, 1977. — 224 с.
310. *Людмилов Д. С., Людмилова С. Д.* Метод обучающих задач в преподавании математики // Математика в школе. — 1973. — № 5. — С. 38–41.
311. *Ляшенко Е. И.* Методика обучения математике в IV–V класах. — Минск: Народная асвета, 1976. — 222 с.
312. *Ляшенко Е. И., Радченко В. П., Фефилова Е. Ф.* Обучение решению сюжетных задач: Методические рекомендации / Под ред. Е. И. Лященко. — Архангельськ: Изд-во Поморского гос. пед. ин-та, 1992. — 52 с.
313. *Майер Ф. А.* Задачи, направленные на развитие функционального стиля мышления школьников // Роль и место задач в обучении математике. — М., 1973. — С. 76–128.
314. *Максименко С. Д., Максименко В. П.* Психологія сприймання та розуміння схематичного запису задачі // Розв'язування математичних задач в початкових класах: Зб. статей / Під ред. канд. пед. наук Т. М. Хмари. — К.: Рад. шк., 1986. — С. 19–22.
315. *Максимов Л. К.* Зависимость развития математического мышления школьников от характера обучения // Вопросы психологии. — 1979. — № 2. — С. 57–65.
316. *Малкова Т. В., Монахов В. М.* Математическое моделирование — необходимый компонент современной подготовки школьника // Математика в школе. — 1984. — № 3. — С. 46–49.
317. *Малыхина В. В.* Методика формирования у младших школьников умения решать текстовые задачи в системе развивающего обучения: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. — М., 1996. — 140 с.
318. *Малыхина В. В., Байрамукова П. У.* Схематический рисунок при решении задач // Начальная школа. — 1998. — № 11–12. — С. 56–57.
319. *Мамыкина М. Ю.* Работа над задачей. Система Л. В. Занкова // Начальная школа. — 2003. — № 4. — С. 63–67.
320. *Маркова А. К.* Формирование учебной деятельности и развитие школьника: Формирование учебной деятельности школьников / Под ред. В. В. Давыдова, И. Ю. Лопмшера, А. К. Марковой. — М.: Педагогика, 1982. — С. 21–28.
321. Мартынова А.И. Формирование приемов умственной деятельности у первоклассников (на материале решения задач): Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.01 / Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького. — К., 1982. — 17 с.
322. *Мартынова А. И., Скворцова С. А.* Формирование у младших школьников умений решать задачи на движение // Наша школа. — 1999. — № 1. — С. 126–134.
323. *Матвеева Л. А.* Кодирование, прогнозирование и перенос как свойства субъекта учебной деятельности в младшем школьном возрасте // Младший школьник как субъект педагогического воздействия. — Л., 1989. — С. 14–29.
324. *Матвеева Л. А.* Методология и методика развития субъекта учебной деятельности // Формирование младшего школьника как субъекта учебной деятельности. — Л., 1990. — С. 12–21.
325. *Матвеева Н. А.* Комбинированная вспомогательная модель задачи // Начальная школа: Плюс — Минус. — 2002. — № 1. — С. 68–69.
326. *Матвеева Н. А.* Обучение учащихся составлению текстовых задач // Начальная школа: Плюс — Минус. — 2002. — № 7. — С. 34–36.
327. *Матвеева Н. А.* Использование схематического чертежа при моделировании простых текстовых задач // Начальная школа. — 2002. — № 10. — С. 60–63.
328. *Матвеева Н. А.* Использование схемы при обучении учащихся решению задач // Начальная школа. — 1998. — № 11–12. — С. 58–60.
329. *Математика* в начальных классах. Ч. 1 / Под ред. К. И. Нешкова, А. М. Пышкало. — М.: Просвещение, 1968. — 192 с.

330. *Математика*. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. — К.: Навчальна книга, 2003. — 302 с.
331. *Математика*: Метод. пособие для учителей / Н. Г. Салмина, И. Фереро Навас / Под общ. ред. Н. Ф. Талызиной. — М.: Дидакт, 1994. — 116 с.
332. *Матюхина М. В.* Мотивация учения младших школьников. — М.: Педагогика, 1984. — 144 с.
333. *Матюшкин А. М.* Проблемные ситуации в мышлении и обучении. — М.: Педагогика, 1977. — 208 с.
334. *Махмутов М. И.* Проблемное обучение: Основные вопросы теории. — М.: Педагогика, 1975. — 368 с.
335. *Машбиц Е. И.* Психологические основы управления учебной деятельностью: Автореф. дис... д-ра психол. наук: 19.00.07 / АПН СССР, НИИ общ. и пед. психологии. — М., 1989. — 43 с.
336. *Машбиц Е. И.* Психолого-педагогические проблемы компьютеризации обучения. — М.: Педагогика, 1988. — 191 с.
337. *Мельничук Т. Й., Хмара Т. М.* Моделювання прямих та обернених задач // Розв'язування математичних задач в початкових класах: Зб. статей / Під ред. канд. пед. наук Т. М. Хмари. — К.: Рад. шк., 1986. — С. 47—51.
338. *Мендыгалиева А. К.* Система задач как средство развития младших школьников при обучении математике (на примере задач на движение): Дис... канд. пед. наук.: 13.00.02. — Санкт-Петербург, 1995. — 134 с.
339. *Менцис Я. Я.* О подготовке учащихся к составлению уравнений // Математика в школе. — 1973. — № 2. — С. 37—39.
340. *Менчинская Н. А.* Интеллектуальная деятельность при решении арифметических задач // Известия АПН РСФСР. — М.; Л., 1946. — С. 99—134.
341. *Менчинская Н. А.* О психологии решения арифметических задач // Советская педагогика. — 1940. — № 1. — С. 8—13.
342. *Менчинская Н. А.* Проблемы учения и умственного развития школьника: Избранные психологические труды. — М.: Педагогика, 1989. — 224 с.
343. *Менчинская Н. А.* Психология обучения арифметике. — М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1955. — 432 с.
344. *Менчинская Н. А., Моро М. И.* Вопросы методики и психологии обучения арифметике в начальных класах. — М.: Просвещение, 1965. — 224 с.
345. *Метельский Н. В.* Психолого-педагогические основы дидактики математики. — Минск: Вышэйшая школа, 1977. — 156 с.
346. *Методика* начального обучения математике / Под ред. А. А. Столяра и В. Л. Дрозда. — Минск: Вышэйш. шк., 1988. — 254 с.
347. *Методика* начального обучения математике / Под ред. Л. Н. Скаткина. — М.: Просвещение, 1972. — 320 с.

348. *Методика* начального обучения математике: Учеб. пособие для пед. ин-тов / В. Л. Дрозд, А. Т. Катасонова, Л. А. Латонин и др. — Минск: Вышэйшая школа, 1988. — 254 с.
349. *Методика* преподавания математики в средней школе: Общая методика: Учеб. пособие / А. Я. Блох и др.; Сост. Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. — М.: Просвещение, 1985. — 336 с.
350. *Методика* преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А. Я. Блох, Б. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др. / Сост. В. И. Мишин. — М.: Просвещение, 1987. — 416 с.
351. *Методические* рекомендации по решению учебных задач при обучении математике / Сост. Е. И. Лященко, В. Я. Прокофьева и др. — Л.: ЛГПИ, 1985. — 66 с.
352. *Методы* начального обучения математике. — М.: Просвещение, 1965. — 200 с.
353. *Методы* обучения математике / Под ред. А. А. Столяра. — Минск: Нар. асвета, 1981. — 191 с.: ил.
354. *Методы* обучения при формировании учений и навыков учащихся в начальных класах. Методические рекомендации / Под ред. А. Н. Зевина. — М., 1982. — 68 с.
355. *Миронюк М. В.* О развивающих функциях задач в обучении математике // Повышение эффективности обучения математике в школе: Книга для учителя. Из опыта работы / Сост. Г. Д. Глейзер. — М.: Просвещение, 1989. — С. 112—117.
356. *Мишарева Е. И.* Индивидуализация самостоятельной деятельности учащихся при обучении решению задач // Начальная школа. — 1982. — № 12. — С. 48—50.
357. *Мізюк В. А.* Формування вмінь учнів початкової школи розв'язувати текстові задачі: Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Національний педагогічний ун-т ім. М. П. Драгоманова. — К., 2000. — 19 с.
358. *Мізюк В.* Завдання для формування вмінь розв'язувати текстові задачі // Початкова школа. — 1998. — № 9. — С. 36—38.
359. *Моляко В. А.* Психология решения школьниками творческих задач. — К.: Рад. шк., 1983. — 95 с.
360. *Монахов В. М.* Обоснование методической системы обучения // Советская педагогика. — 1989. — № 1. — С. 28—33.
361. *Моро М. И., Бантова М. А., Бельтюкова Г. В.* Математика в 1 классе: Пособие для учителя трехлет. нач. шк. — 5-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 1989. — 158 с.
362. *Моро М. И., Бантова М. А., Бельтюкова Г. В.* Математика во 2 классе: Пособие для учителя трехлет. нач. шк. — 5-е изд. — М.: Просвещение, 1990. — 156 с.
363. *Моро М. И., Пышкало А. М.* Методика обучения математике в 1—3 классах. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Просвещение, 1978. — 336 с. с ил.

364. *Московченко В., Дудко Л.* Розв'язування математичних задач на рух // Початкова школа. — 2000. — № 11. — С. 37–40.
365. *Московченко В., Дудко Л.* Розв'язування математичних задач на рух // Початкова школа. — 2001. — № 2. — С. 21–23.
366. *Московченко В., Дудко Л.* Розв'язування математичних задач на рух // Початкова школа. — 2000. — № 12. — С. 14–15.
367. *Московченко В., Дудко Л.* Розв'язування математичних задач на рух // Початкова школа. — 2001. — № 3. — С. 43–44.
368. *Московченко В., Дудко Л.* Розв'язування математичних задач на рух // Початкова школа. — 2001. — № 6. — С. 25–27.
369. *Московченко В., Дудко Л.* Система математичних задач на рух // Початкова школа. — 2001. — № 12. — С. 42–45.
370. *Назарова И. Н.* Ознакомление с функциональной зависимостью при обучении решению задач // Начальная школа. — 1989. — № 1. — С. 42–46.
371. *Національна* доктрина розвитку освіти в Україні в XXI ст. // Освіта. — 2001. — № 54–55. — С. 4–5.
372. *Некрасова О. А.* Прием поиска логических основ условий текстовых математических задач в составе творческой деятельности учащихся // Начальная школа плюс До и После. — 2003. — № 7. — С. 39–42.
373. *Нечаев Н. Н.* А. Н. Леонтьев и П. Я. Гальперин: диалог во времени // Вопросы психологии. — 2003. — № 2. — С. 50–69.
374. *Нешков К. И., Семушин А. Д.* Функции задач в обучении // Математика в школе. — 1971. — № 3. — С. 7–9.
375. *Никитин Н. Н.* Решение арифметических задач в начальной школе. — Изд. 5-е. — М.: Учпедгиз, 1952. — 150 с.
376. *Никитина М. П.* О сознательном усвоении математических понятий // Начальная школа. — 2000. — № 3. — С. 39–42.
377. *Никифоров Н. Н.* К изучению темы "Решение задач с помощью уравнений" // Математика в школе. — 1994. — № 2. — С. 20–21.
378. *Никола Г., Талызина Н. Ф.* Формирование общих приемов решения арифметических задач // Управление познавательной деятельностью учащихся / Под ред. П. Я. Гальперина, Н. Ф. Талызиной. — М.: Изд-во МГУ, 1972. — С. 209–261.
379. *Новоселов Ф. П.* Методы и приемы решения простых и составных задач в начальной школе // Решение арифметических задач в начальной школе / Под ред. А. С. Пчелко. — М.; Л.: Учпедгиз, 1949. — С. 153–200.
380. *Носатов В. Т.* Психологические особенности анализа как основы теоретического обобщения (на материале умственной деятельности младших школьников) // Новые исследования в психологии. — М.: Педагогика, 1978. — С. 57–61.
381. *Ньюэлл А., Шоу Дж. С., Саймон Г. А.* Процессы творческого мышления // Психология мышления. — М.: Прогресс, 1965. — С. 500–530.
382. *Ньюэлл А., Шоу Дж. С., Саймон Г. А.* Эмпирические исследования машины "Логик-теоретик: пример изучения эвристики" // Вычислительные машины и мышление / Под ред. Э. Фейнбаумана и Дж. Фельдмана. — М.: Мир, 1967. — С. 113–145.
383. *Обучаем* по системе Л. В. Занкова / И. И. Аргинская, Н. Я. Дмитриева и др. — М.: Просвещение, 1991. — 238 с.
384. *Обучение* в 4 классе. Пособие для учителя четырехлет. нач. шк. Кн. 1. Математика. Русский язык, Чистописание. Чтение / М. И. Моро, М. А. Бантова и др.; Под ред. Б. И. Фоминых. — М.: Просвещение, 1989. — 351 с.
385. *Овчинникова В. С.* Как поставить перед учащимися учебную задачу // Начальная школа. — 2000. — № 2. — С. 73–77.
386. *Оганесян В. А., Колягин Ю. М., Луканкин Г. А.* Методика преподавания математики в средней школе. — М.: Просвещение, 1980. — 368 с.
387. *Оконь В.* Основы проблемного обучения. — М.: Просвещение, 1968. — 208 с.
388. *Орехов Ф. А.* Решение задач методом составления уравнений: Пособие для учителей восьмилетней школы. — М.: Просвещение, 1971. — 158 с.
389. *Освітні* технології: Навч.-метод. посіб. / О. М. Пєхота, А. З. Кіктенко, О. М. Любарська та ін. — К.: Видавництво А. С. К., 2003. — 255 с.
390. *Осинская В. Н.* Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике. — К., Радянська школа, 1989. — 190 с.
391. *Основы* дидактики / Под ред. Б. П. Есипова. — М.: Просвещение, 1967. — 272 с.
392. *Основы* методики начального обучения математике. Пособие для учителей / Под ред. А. С. Пчелко. — М.: Просвещение, 1965. — 376 с.
393. *Основы* технологии развивающего обучения математике: Учебное пособие. — Н. Новгород: НГПУ, 1997. — 134 с.
394. *Остякова В. И.* Решение задач с помощью уравнений в IV—V классах // Математика в школе. — 1973. — № 2. — С. 40–42.
395. *Павленко А. І.* Теоретичні основи методики навчання учнів складанню і розв'язуванню фізичних задач у середній школі: Дис... д-ра пед. наук: 13.00.02. — К., 1997. — 454 л.
396. *Панченко Л. Л.* Система задач як засіб навчання математичному моделюванню // Тр. Всеукраїнської науково-практичної конференції "Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики". — К.: НПУ ім. М. Д. Драгоманова, 2004. — С. 133–134.
397. *Пасічник І. Д.* Психологія операційних структур мислительної діяльності (генезис дії систематизації на математичному матеріалі): Дис... д-ра психол. наук: 19.00.07. — Рівне, 1993. — 261 л.
398. *Педагогика* / Под ред. Ю. К. Бабанского. — 2-е изд., доп. и перераб. — М.: Просвещение, 1988. — 478 с.
399. *Педагогика*: Учебное пособие для школьных педагогических училищ / Под ред Б. П. Осипова. — М.: Просвещение, 1967. — 436 с.
400. *Петерсон Л. Г.* Математика, 1 класс. Часть 1. — М.: Балласс; С-инфо, 2000. — 64 с.: ил.

401. *Петерсон Л. Г.* Математика, 1 класс. Часть 2. — М.: Баласс; С-инфо, 2000. — 64 с.: ил.
402. *Петерсон Л. Г.* Математика, 1 класс. Часть 3. — М.: Баласс; С-инфо, 2000. — 96 с.: ил.
403. *Петерсон Л. Г.* Математика, 1 класс. Методические рекомендации. Пособие для учителей. — М.: Баласс; С-инфо, 1996. — 224 с.: с ил.
404. *Петерсон Л. Г.* Математика, 2 класс. Часть 1. — М.: С-инфо; Баласс, 1996. — 112 с.: ил.
405. *Петерсон Л. Г.* Математика, 2 класс. Часть 1. — М.: Издательство "Ювента", 2002. — 80 с.: ил.
406. *Петерсон Л. Г.* Математика, 2 класс. Часть 2. — М.: С-инфо; Баласс, 1996. — 112 с.: ил.
407. *Петерсон Л. Г.* Математика, 2 класс. Часть 2. — М.: Издательство "Ювента", 2002. — 112 с.: ил.
408. *Петерсон Л. Г.* Математика, 2 класс. Часть 3. — М.: С-инфо; Баласс, 1996. — 112 с.: ил.
409. *Петерсон Л. Г.* Математика, 2 класс. Часть 3. — М.: Издательство "Ювента", 2002. — 112 с.: ил.
410. *Петерсон Л. Г.* Математика, 2 класс. Часть 4. — М.: С-инфо; Баласс, 1996. — 64 с.: ил.
411. *Петерсон Л. Г.* Математика, 2-й класс. Методические рекомендации. Пособие для учителей. — М.: Баласс; С-инфо, 1997. — 256 с.: с ил.
412. *Петерсон Л. Г.* Математика, 3 класс. Часть 1. — М.: С-инфо; Баласс, 1996. — 112 с.: ил.
413. *Петерсон Л. Г.* Математика, 3 класс. Часть 2. — М.: С-инфо; Баласс, 1996. — 128 с.: ил.
414. *Петерсон Л. Г.* Математика, 3 класс. Часть 3. — М.: С-инфо; Баласс, 1996. — 128 с.: ил.
415. *Петерсон Л. Г.* Математика, 3 класс. Часть 4. — М.: С-инфо; Баласс, 1996. — 96 с.: ил.
416. *Петерсон Л. Г.* Программа по математике для 3-х летней и 4-х летней начальной школы // Вестник образования. — 1997. — № 4. — С. 3–28.
417. *Пиаже Ж.* Психология интеллекта. Генезис числа у ребенка. Логика и психология. — М.: Просвещение, 1969. — 659 с.
418. *Платонов К. К., Голубева Г. Г.* Психология. — М., Высш. шк., 1973. — 256 с.
419. *Платонов К. К.* Краткий словарь системы психологических понятий. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1984. — 174 с.
420. *Побірченко Н. А.* Психологічні основи навчання математики в початкових класах: Метод. посібник. — К.: Рад. шк., 1985. — 64 с.
421. *Пойа Д.* Доклад, прочитанный на 46-м годичном собрании Американской математической ассоциации в Беркли 27 января 1963 года // Математика в школе. — 1964. — № 6. — С. 80–89.
422. *Пойа Д.* Как решать задачу. Пособие для учителей: Пер. с англ. В. Г. Звонаревой и Д. Н. Белла; Под ред. Ю. М. Гайдука. Изд. 2-е. — М.: Учпедгиз, 1961. — 207 с.
423. *Пойа Д.* Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание: Пер. с англ. В. С. Бермана / Под ред. И. М. Яглома. — М.: Наука, 1970. — 452 с.
424. *Поляк Г. П.* Обучение решению задач в начальной школе. — М.: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1950. — 248 с.
425. *Поляк Г. П.* Преподавание арифметики в начальной школе. — Метод. пособие для учителей. — М.: Учпедгиз, 1959. — 352 с.
426. *Пономарев Я. А.* Психология творчества и педагогика. — М.: Педагогика, 1976. — 280 с.
427. *Попова Н. С.* Методика преподавания арифметики. — Л.: Учпедгиз, 1955. — 402 с.
428. *Практикум* по методике начального обучения математике / В. Л. Дрозд, Л. П. Катасонова, Л. В. Савицкая, А. А. Столяр. — Минск: Вышэйшая школа, 1984. — 97 с.: ил.
429. *Психологические* возможности младших школьников в усвоении математики / Под ред. В. В. Давыдова. — М.: Просвещение, 1969. — 288 с.
430. *Психологический* словарь / Под ред. В. В. Давыдова, А. В. Запорожца, Б. Ф. Ломова и др. — М.: Педагогика, 1983. — 448 с.
431. *Психологический* словарь / Под ред. В. П. Зинченко, В. Г. Мещерякова. — 2-е изд., пераб. и доп. — М.: Педагогика-Пресс, 1996. — 440 с.: ил.
432. *Психология.* Словарь / Под ред. А. В. Петровского, М. Г. Ярошевского. — М.: Изд-во полит. литературы, 1990. — 495 с.
433. *Пути* и средства достижения прочности знаний в начальных классах: Пособие для учителя / Под ред. М. П. Кашина. — М.: Просвещение, 1978. — 239 с.
434. *Пути* повышения качества усвоения знаний в начальных классах / Под ред. Д. Н. Богоявленского и Н. А. Менчинской. — М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962. — 280 с.
435. *Пчелко А. С.* Актуальные вопросы преподавания арифметики // Начальная школа. — 1963. — № 3. — С. 71–74.
436. *Пчелко А. С.* Методика преподавания арифметики в начальной школе: Пособие для учителя. — 5-е изд. — М.: Учпедгиз, 1953. — 392 с.
437. *Радченко В. П.* Методика организации познавательной деятельности учащихся при решении задач по математике в 4–5 классах: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. — Л., 1987. — 186 с.
438. *Радченко В. П.* Текстовые задачи и развитие продуктивного мышления учащихся (на уроках математики) // Математика в школе. — 1993. — № 4. — С. 40–41.
439. *Радченко Е. В.* Построение системы текстовых задач курса математики IV–V кл.: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. — М., 1988. — 147 с.
440. *Радченко Е. В.* Решение текстових задач в IV–V класах // Математикак в школе. — 1987. — № 4. — С. 23–26.

441. *Раев А. И.* Управление умственной деятельностью младшего школьника. — Л.: Изд-во ЛГПИ, 1976. — 134 с.
442. *Регуш Л. А.* Развитие способностей прогнозирования в познавательной деятельности. — Л. : Изд-во ЛГПИ, 1983. — 84 с.
443. *Репкин В. В.* Учитель в системе развивающего обучения // Начальная школа. — 2003. — № 30. — С. 1–2
444. *Репьев В. В.* Общая методика преподавания математики: Пособие для студентов педагогических институтов. — М.: Учпедгиз, 1958. — 223 с.
445. *Решение* арифметических задач в начальной школе / Под ред. А. С. Пчелко. — М., 1949. — 86 с.
446. *Решение* задач по физике. Психолого-методический аспект / Н. Н. Тулькибаева, Л. М. Фридман, М. А. Драпкин, Е. С. Волович, Г. Д. Бухарова — Челябинск: Факел, 1995. — 119 с.
447. *Решетова З. А.* Структура ориетировочной деятельности и ее особенности при формировании теоретического мышления // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 14. Психология. — 1998. — № 2. — С. 14–20.
448. *Решетова З. А.* Организация деятельности усвоения и развитие учащегося // Вопросы психологии. — 2002. — № 5. — С. 70–78.
449. *Роганова Н. Ф.* Организация самостоятельной работы учащихся над задачей // Начальная школа. — 1988. — № 2. — С. 56–58.
450. *Рубинштейн С. Л.* О мышлении и путях его исследования. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — 147 с.
451. *Рубинштейн С. Л.* Основы общей психологии: — 2-е изд. — М.: Учпедгиз., 1946. — 704 с.
452. *Рудницкая В. Н.* Прием, облегчающий решение задач // Начальная школа. — 1981. — № 9. — С. 31–35.
453. *Рузин Н. К.* Задача как цель и средство обучения математике // Математика в школе. — 1980. — № 4. — С. 13–15.
454. *Рузин Н. К.* Познавательные и развивающие функции задач в обчении математике учащихся начальных классов средней школы: Дис... канд. пед. наук (731). — М., 1971. — 177 с.
455. *Савченко О. Я.* Сучасний урок у початкових класах. — К.: "Магістр-S", 1997. — 256 с.
456. *Сагатовский В. Н.* Структурный и генетический принципы расчленения объекта в системе философских категорий // Проблемы исследования систем и структур. — М., 1965. — С. 217–228.
457. *Садовский В. Н.* Основания общей теории систем: Логико-методологический анализ. — М.: Наука, 1974. — 276 с.
458. *Салмина Н. Г.* Виды и функции материализации в обучении. — М.: Изд-во МГУ, 1981. — 135 с.
459. *Салмина Н. П., Сохина В. П.* Обучение математике в начальной школе (на основе экспериментальной программы) / Под ред. П. Я. Гальперина. — М.: Педагогика, 1975. — 184 с.

460. *Саранцев Г. И.* О методике обучения школьников поиску решения математических задач // Преподавание алгебры и геометрии в школе / Сост. О. А. Боковнев. — М.: Просвещение, 1982. — С. 123–131.
461. *Саранцев Г. И.* Упражнения в обучении математике. — М.: Просвещение, 1995. — 240 с.
462. *Сафонова Л. А.* Обучение учащихся 1–8 классов решению текстовых задач в условиях преемственности изучения математики: Дис… канд. пед. наук: 13.00.02. — Саранск, 2000. — 207 с.
463. *Сафонова Л. А.* Обучение общим умениям решения текстовых задач в системе непрерывного образования // Интеграция образования. — 1999. — № 3. — С. 41–44.
464. *Свечников А. А.* Решение математических задач в 1–3 классах. — М.: Просвещение, 1976. — 160 с.
465. *Свищ М. А.* Развитие школьников в процессе обучения решению задач по альтернативным учебникам // Начальная школа. — 2000. — № 4. — С. 50–52.
466. *Селеменева Т. А.* Методика работы с разными формами представления данных при решении сюжетных задач: Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Рос. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена. — СПб., 1996. — 20 с.
467. *Семенов Е. Е.* Размышления об эвристиках: (Активизация познават. деятельности учащихся при решении математических задач) // Математика в школе. — 1995. — № 5. — С. 39–43.
468. *Семенов Е. М.* Арифметические упражнения как средство воспитания логического мышления учащихся восьмилетней школы (Решение арифметических задач, I–VI классы). Метод. пособие для учителя. — Свердловск, 1963. — 278 с.
469. *Семенов Е. М.* Развитие логического мышления учащихся в процессе решения арифметических задач: Автореф. дис... канд. пед. наук / АПН РСФСР. Научн.-исслед. ин-т общего и политехн. образования. — М., 1964. — 17 с.
470. *Семенова И. Н.* Роль и место сюжетных задач в развитии математического мышления и повышения качества знаний учащихся: (На материале алгебры и основ анализа): Автореф. дис… канд. пед. наук: 13.00.02. / Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина. — М., 1990. — 16 с.
471. *Силков В. В., Рибалко А. П.* Аналіз структури задачі // Розв'язування математичних задач в початкових класах: Зб. статей / Під ред. канд. пед. наук Т. М. Хмари. — К.: Рад. шк., 1986. — С. 19–22.
472. *Сікорський П.* Психолого-педагогічні проблеми навчання математики // Математика в школі. — 2004. — № 4. — С. 5–9.
473. *Скаткин Л. Н.* Обучение решению простых и составных арифметических задач. — М.: Учпедгиз, 1963. — 183 с.
474. *Скаткин Л. Н., Жикалкина Т. К.* Обучение решению задач с пропорциональными величинами: Учеб.-метод. пособие для студентов-заочников IV–V курсов фак-та подготовки учителей нач. классов. — М.: Просвещение, 1979. — 33 с.

475. *Скафа Е. И.* Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. — Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. — 439 с.
476. *Скворцова С. О.* Загальна методика навчання молодших школярів розв'язувати задачі, що містять знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків та обернені до них // Наука і освіта. — 2005. — № 1–2. — С. 141–148.
477. *Скворцова С. О.* Задачі на знаходження середнього арифметичного // Початкова школа. — 2002. — № 1. — С. 23–28.
478. *Скворцова С. О.* Задачі на знаходження середнього арифметичного // Початкова школа. — 2002. — № 2. — С. 31– 35.
479. *Скворцова С. О.* Задачі на знаходження трьох чисел за трьома сумами // Наша школа. — 2002. — № 5. — С. 67–70.
480. *Скворцова С. О.* Задачі на подвійне зведення до одиниці // Початкова школа. — 2003. — № 12. — С. 10–12.
481. *Скворцова С. О.* Задачі на рух в одному напрямку за чинним підручником "Математика 4(3)" М. В. Богдановича // Початкова освіта. — 2004. — № 11. — С. 2–7.
482. *Скворцова С. О.* Методика роботи над простими задачами на конкретний зміст добутку та частки з елементами теорії укрупнення дидактичних одиниць // Початкова освіта. — 2001. — № 11 (107). — С. 6–7.
483. *Скворцова С. О.* Методика розв'язування задач на спільну роботу // Наша школа. — 2002. — № 3. С. 25–31.
484. *Скворцова С. О.* Навчання молодших школярів розв'язуванню задач на знаходження четвертого пропорційного на підставі системного типу орієнтування // Наука і освіта. — 2004. — № 1. — С. 136–141.
485. *Скворцова С. О.* Навчання молодших школярів розв'язуванню задач на знаходження четвертого пропорційного на підставі системного типу орієнтування // Наука і освіта. — 2004. — № 2. — С. 149–155.
486. *Скворцова С. О.* Ознайомлення з задачами на рух назустріч та у протилежних напрямках // Початкова школа. — 2004. — № 10. — С. 23–27.
487. *Скворцова С. О.* Ознайомлення з задачами на рух назустріч та у протилежних напрямках // Початкова школа. — 2004. — № 11. — С. 9–10.
488. *Скворцова С. О.* Операційний бік процесу розв'язування математичних сюжетних задач (на матеріалі задач на знаходження невідомих за двома різницями) // Наша школа. — 2004. — № 4. — С. 83–89.
489. *Скворцова С. О.* Операційний бік процесу розв'язування математичних сюжетних задач (на матеріалі задач на знаходження невідомих за двома різницями) // Наша школа. — 2004. — № 5–6. — С. 26–31.
490. *Скворцова С. О.* Формування умінь розв'язувати задачі на пропорційне ділення // Початкова школа. — 1999. — № 4. — С. 16–19.
491. *Скворцова С. О.* Навчання молодших школярів розв'язуванню задач на пропорційне ділення на підставі теорії поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна та Н. Ф. Тализіної // Наша школа. — 2005. — № 4. — С. 45–50.

492. *Скворцова С. О.* Розвиток функціонального мислення молодших школярів під час роботи над задачами з пропорційними величинами // Початкова освіта. — 2001. — № 29. — С. 2–32.
493. *Скворцова С. О.* Система завдань з формування поняття про частини величини і дріб // Початкова освіта. — 2003. — № 9. — С. 1–16.
494. *Скворцова С. О.* Система завдань з формування поняття про частини величини і дріб // Початкова освіта. — 2003. — № 11. — С. 1–24.
495. *Скворцова С. О.* Узагальнення і систематизація знань учнів за 2 клас під час вивчення теми „Повторення матеріалу" // Початкова освіта. — 2001. — № 26–28. — С. 1–63.
496. *Скворцова С. О.* Загальна методика навчання молодших школярів розв'язувати задачі на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох часток та обернені до них // Наука і освіта. — 2005. — № 3–4. — С. 137–143
497. *Скворцова С. О.* Формування у молодших школярів свідомих понять про величини: відстань, швидкість та час // Наша школа. — 2003. — № 2. — С. 45–52.
498. *Скворцова С. О.* Формування у молодших школярів умінь розв'язувати складені задачі // Початкова освіта. — 2003. — № 4. — С. 1–16.
499. *Сковроцва С. О., Мартинова Г. І., Шевченко Т. О.* Математика в 1-му класі: Методичний посібник для студентів педагогічних вузів та вчителів початкових класів. — Одесса: Автограф, 2001. — 190 с.
500. *Скворцова С. О., Мартинова Г. І., Шевченко Т. О.* Математика в 2-му класі: Методичний посібник для студентів педагогічних вузів та вчителів початкових класів. — Одесса: Автограф, 2002. — 220 с.
501. *Скворцова С. О., Мартинова Г. І., Шевченко Т. О.* Математика в 3-му класі: Методичний посібник для студентів педагогічних вузів та вчителів початкових класів. — Одесса: Автограф, 2003. — 268 с.
502. *Скворцова С. О., Мартинова Г. І., Шевченко Т. О.* Математика в 4-му класі: Методичний посібник для студентів педагогічних вузів та вчителів початкових класів. — Одесса: Автограф, 2003. — 268 с.
503. *Скворцова С. О., Мартинова Г. І., Шевченко Т. О.* Робота над задачами в 1-му класі трирічної початкової школи // Початкова освіта. — 2000. — № 25–28. — С. 2–95.
504. *Слепкань З. И.* Психолого-педагогические основы обучения математике. — К.: Радянська школа, 1983. — 192 с.
505. *Слєпкань З.* Проблеми особистісно орієнтованої математичної освіти учнів середньої школи // Математика в школі. — 2003. — № 9. — С. 3–4.
506. *Слєпкань З. І.* Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. — К.: — Зодіак-ЕКО, 2000. — 512 с.: іл.
507. *Словарь* психолога-практика / Сост.: С. Ю. Головин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Мн.: Харвест, М.: АСТ, 2001. — 976 с.
508. *Слугин В. В.* Психологические особенности функций и способов формирования у младших школьников умения решать арифметические задачи: Дис... канд. психол. наук: 19.00.07. — Москва, 1995. — 125 с.

509. *Смирнова. С. И.* Использование чертежа при решении простых задач // Начальная школа. — 1998. — № 5. — С. 53–58.
510. *Смолеусова Т. В.* Этапы, методы и способы решения задачи // Начальная школа. — 2003. — № 12. — С. 62–67.
511. *Совершенствование* обучения младших школьников / Под ред. А. М. Пышкало. — М.: Педагогика, 1984. — 128 с.
512. *Соколов А. Н.* Графическое сопоставление логически предполагаемого и фактического хода решения задач // Вопросы психологии. — 1961. — № 6. — С. 77–92.
513. *Соснина Г. М.* Формирование самоконтроля в процессе овладения первоклассниками умением решать простые арифметические задачи: Дис... канд. пед. наук: 13.00.01. — Ленинград., 1979. — 185 с.
514. *Сохор А. М.* Объяснение в процессе обучения: Элементы дидактической концепции. — М.: Педагогика, 1988. — 124 с.
515. *Статкевич В. В.* О начальном обучении решению задач. — Минск: Народная асвета, 1970. — 208 с.: ил.
516. *Степанов О. М., Фібула М. М.* Основи психології і педагогіки: Посібник. — К.: Академвидав, 2003. — 504 с.
517. *Степанова М. А.* Место теории П. Я. Гальперина в психологической концепции деятельности // Вопросы психологии. — 2002. — № 5. — С. 28–41.
518. *Степанова М. А.* Представления о параметрах умственных действий в психологическом учении П. Я. Гальперина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 14. Психология. — 1998. — № 3. — С. 95–103.
519. *Степанова М. А.* Проблема обучения и развития в трудах Л. С. Выготского и П. Я. Гальперина // Вопросы психологии. — 2001. — № 4. — С. 106–114.
520. *Степанова М. А.* Теория П. Я. Гальперина и ее значение для практики современного образования // Вестник Московского университета. — Сер. 20. Педагогическое образование. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005. — № 1. — С. 82–101.
521. *Стефанова Г. П.* Формирование у учащихся обобщенного приема решения физических задач: Дис... канд. пед. наук. 13.00.02. — М., 1979. — 188 с.
522. *Стойлова Л. П., Пышкало А. М.* Основы начального курса математики (По специальности № 2001 "Преподавание в начальных классах общеобразовательной школы"). — М.: Просвещение, 1988. — 319 с.
523. *Столяр А. А.* Методы обучения математике. (Учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов и мат. фак. ун-тов). — Минск: Высшэйшая школа, 1966. — 190 с.
524. *Столяр А. А.* Педагогика математики. Курс лекций. Изд. 2-е, перераб. и доп. — Минск: Высшэйшая школа, 1974. — 384 с. ил.
525. *Талызина Н. Ф.* Деятельностный подход к механизмам обобщения // Вопросы психологии. — 2001. — № 3. — С. 3–15.

526. *Талызина Н. Ф.* Педагогическая психология: Учеб. пособие для студ. сред. пед. учеб. заведений. — М.: Издательский центр "Академия", 1998. — 288 с.
527. *Талызина Н. Ф.* Развитие П. Я. Гальпериным деятельностного подхода в психологии // Вопросы психологии. — 2002. — № 5. — С. 42–49.
528. *Талызина Н. Ф.* Формирование познавательной деятельности младших школьников: Книга для учителя. — М.: Просвещение, 1988. — 175 с.
529. *Тарасенкова Н. А.* Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики. — Черкаси: Відлуння-Плюс, 2002. — 400 с.
530. *Теоретические* основы методики обучения математике в начальных классах / Под ред. Н. Б. Истоминой. — М., 1996. — 224 с.
531. *Теоретические* основы содержания общего среднего образования / Под ред. В. В. Краевского, И. Я. Лернера. — М.: Педагогика. — 352 с.
532. *Теплов Б. М.* Способность и одаренность. Проблемы индивидуальных различий. — М.: Учпедгиз, 1961. — 229 с.
533. *Тихомиров О. К.* Структура мыслительной деятельности человека. — М.: Изд-во МГУ, 1969. — 304 с.
534. *Ткаченко Н. М.* Исследование дидактической эффективности обучения учащихся обобщенным способам решения физических задач: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. — Киев, 1982. — 159 с.
535. *Токарев А. В.* Система задач по физике, как средство формирования знаний и обобщенных учений и навыков: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. — М., 1983. — 200 с.
536. *Тонких А. П., Демидова Т. Е.* Алгебраическое решение на языке арифметики // Математика в школе. — 1999. — № 4. — С. 66–68.
537. *Тонких А. П., Демидова Т. Е.* Геометрический метод решения текстовых задач в курсе математики факультетов подготовки учителей начальных классов // Начальная школа. — 2000. — № 5. — С. 100–105.
538. *Тулькибаева Н. Н.* Методические основы обучения учащихся решению задач по физике: Дис... д-ра пед. нак: 13.00.02. — Челябинск, 1989. — 319 с.
539. *Тулькибаева Н. Н.* Теория и практика обучения учащихся решению задач. — Челябинск: Изд-во ЧГПУ, 2000. — 239 с.
540. *Тулькибаева Н. Н., Фридман Л. М., Драпкин М. А., Волович Е. С., Бухарова Г. Д.* Решение задач по физике: Психолого-методический аспект / Под ред. Н. Н. Тулькибаевой, М. А. Драпкина. — Челябинск, 1995. — 120 с.
541. *Туманов С. И.* Поиски решения задачи. — М.: Просвещение, 1969. — 280 с.: ил.
542. *Турецкий Е. Н.* Формирование у учащихся восьмилетней школы навыков алгебраического метода решения текстовых задач: Автореф. дис... канд. пед. наук: 732 / Ташк. гос. пед. ин-т им. Низами. — Душанбе, 1968. — 35 с.
543. *Унт И.* Индивидуализация и дифференциация обучения — М.: Педагогика, 1990. — 192 с.

544. *Уемов А. И.* Системный поход и общая теория систем. — М.: Мисль, 1978. — 272 с.
545. *Утепкалиев С.* Методика обучения младших школьников самостоятельному решению текстовых задач по матемаике: Дисс… канд. пед. наук: 13.00.02. — Атырау, 1998. — 176 с.
546. *Фаустова Н. П., Меркулова Т. В.* Использование учебных моделей при формировании у первоклассников понятий о задаче, ее структуре и умения решать простые арифметические задачи: (По данным пед. исслед.) // Современные подходы к учебно-воспитательному процессу. — М., 1995. — С. 92–103.
547. *Фаустова Н. П., Меркулова Т. В.* Моделирование как средство формирования умения решать арифметические задачи у младших школьников // Вопросы истории, теории и практики образовательного процесса. — Елец: ЕГУ, 2003. — Вып. 1. — С. 42–44.
548. *Федченко Л. Я.* Методика організації узагальнення і систематизації знань і вмінь учнів при навчанні математики: Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Національний педагогічний ун-т ім. М. П. Драгоманова. — К., 1998. — 18 с.
549. *Фефилова Е. Ф.* Обобщение и систематизация знаний и умений учащихся при решении сюжетных задач в девятилетней школе: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. — С.-Петербург, 1993. — 175 с.
550. *Филичев С. В., Чекмарев Я. Ф.* Руководство к решению арифметических задач. — М.; Л.: Учпедгиз, 1948. — 96 с.
551. *Философский* энциклопедический словарь / Гл. ред. Л. Ф. Ильичев, П. Н. Федосеев, С. М. Ковалев, В. Г. Панов. — М.: Сов. энциклопедия, 1983. — 840 с.
552. *Флейшман Б. С., Брусиловський П. М., Розернберг Г. С.* О методах математического моделирования сложных систем // Системные исследования: Методологические проблемы: Ежегодник. — М.: Наука, 1982. — С. 65–79.
553. *Фонин Д. С., Целищева И. И.* Моделирование как важное средство обучения решению задач // Начальная школа. — 1990. — № 3. — С. 33–37.
554. *Фридман Л. М.* Дидактические основы применения задач в обучении: Дис… д-ра пед. наук: 13.00.01 — М., 1971. — 423 с.
555. *Фридман Л. М.* Логико-психологический анализ школьных учебных задач. — М.: Педагогика, 1977. — 208 с.
556. *Фридман Л. М.* Методика обучения решению математических задач // Математика в школе. — 1991. — № 5. — С. 59–63.
557. *Фридман Л. М.* Методы формирования ориентировочной основы умственных действий по решению задач // Вопросы психологии. — 1975. — № 4. — С. 51–61.
558. *Фридман Л. М.* Наглядность и моделирование в обучении. — М.: Знание, 1984. — 144 с.

559. *Фридман Л. М.* Основы проблемологии. Серия "Проблемология". — М.: СИНТЕГ, 2001. — 228 с.
560. *Фридман Л. М.* Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. — М.: Просвещение, 1983. — 160 с.
561. *Фридман Л. М.* Сюжетные задачи по математике: История, теория, методика. — М.: Школьная пресса, 2002. — 208 с.
562. *Фридман Л. М., Асимов К. У.* Арифметические задачи и способы их решения: Руководство для учителя. — 2-е изд., перераб. и доп. — Душанбе: Ирфон, 1969. — 188 с.
563. *Фридман Л. М., Турецкий Е. Н.* Как научиться решать задачи. — 3-е изд., дораб. — М.: Просвещение, 1989. — 192 с.
564. *Харьковская В. Ф.* Индивидуальный подход к слабоуспевающим школьникам в процессе обучения: Дис... канд. пед. наук: 13.00.01. — М., 1974. — 212 с.
565. *Хмара Т. М., Журбенко Н. В.* Роль системи зразків виконання базових алгоритмів та задач в реалізації дидактичних функцій підручника з математики // Проблеми сучасного підручника. — К.: Педагогічна думка, 2003. — Вип. 4. — С. 95–99.
566. *Хмель В. П.* Формирование у школьников обобщенных приемов решения математических задач: Дис… канд. пед. наук: 13.00.02. — Киев, 1983. — 167 с.
567. *Ходаков Ю. В.* Преподавание химии в 7–8 классах: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1969. — 318 с.
568. *Царева С. Е.* Введение удобных единиц измерения как метод решения текстовых задач // Математика в школе. — 1997. — № 6. — С. 58–61.
569. *Царева С. Е.* Виды работы с задачами на уроке математики // Начальная школа. — 1990. — № 10. — С. 37–41.
570. *Царева С. Е.* Непростые простые задачи // Начальная школа. — 2005. — № 1. — С. 49–57.
571. *Царева С. Е.* Нестандартне виды работы с задачами на уроке как средство реализации современных педагогических концепций и технологий // Начальная школа. — 2004. — № 4. — С. 49–56.
572. *Царева С. Е.* Обучение решению задач // Начальная школа. — 1998. — № 1. — С. 102–107.
573. *Царева С. Е.* Обучение решению текстовых задач, ориентированное на формирование учебной деятельности младших школьников. — Новосибирск: Изд-во НГПУ, 1998. — 135 с.
574. *Царева С. Е.* Один из способов проверки решения задачи // Начальная школа. — 1998. — № 2. — С. 52–56.
575. *Царева С. Е.* Различные способы решения текстовых задач // Начальная школа. — 1991. — № 2. — С. 78–84.
576. *Царева С. Е.* Различные способы решения задач и различные формы записи решения // Начальная школа. — 1982. — № 2. — С. 78–84.
577. *Царева С. Е.* Формирование учебной деятельности младших школьников при обучении решению текстовых задач: Дис… канд. пед. наук: 13.00.02. — М., 1985. — 140 с.

578. *Целищева И. И.* Моделирование в процессе решения текстовых задач // Начальная школа. — 1996. — № 3. — С. 32—36.
579. *Цесаревич М., Такахара Я.* Общая теория систем: Математические основы. — М.: Мир, 1978. — 311 с.
580. *Цукарь А. Я.* Схематизация и моделирование при решении текстовых задач // Математика в школе. — 1998. — № 5. — С. 48—54.
581. *Цукерман Г. А.* Что развивает и чего не развивает учебная деятельность младших школьников? // Вопросы психологии. — 1998. — № 5. — С. 68—73.
582. *Чекмарев Я. Ф., Снигирев В. Т.* Методика преподавания арифметики. — М.: Учпедгиз, 1950. — 271 с.
583. *Чекренева Т. В.* Задачи на движение // Математика в школе. — 1994. — № 3. — С. 15—17.
584. *Человек* и вычислительная техника / Под ред. В. М. Гушкова. — К.: Наук. думка, 1971. — 294 с.
585. *Чичигин В. Г.* Методика преподавания арифметики: Для учительских институтов. — М.: Учпедгиз, 1949. — 320 с.
586. *Шамова Т. И.* Активизация учения школьников. — М.: Знание, 1979. — 96 с.
587. *Шапар В. Б.* Сучасний тлумачний психологічний словник. — Х.: Прапор, 2005. — 640 с.
588. *Шевкин А. В.* О задачах на "работу" и не только о них // Математика в школе. — 1993, № 6.
589. *Шевкин А. В.* Обучение решению текстовых задач в 5—6 классах: Кн. для учителя. — 3-е изд., испр. — М.: Рус. слово, 2002. — 207 с.
590. *Шевченко А.* Про роботу над задачами із "зайвими" даними // Початкова школа. — 1999. — № 7. — С. 28—30.
591. *Шикова Р. Н.* Использование моделирования в процессе обучения решению текстових задач // Начальная школа. — 2004. — № 12. — С. 32—41.
592. *Шикова Р. Н.* Методические недочеты при обучении решению задач // Начальная школа. — 1980. — № 11. — С. 47—49.
593. *Шикова Р. Н.* Подготовка будущих учителей к использованию текстовых задач в обучении математике младших школьников: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02. — М., 1989. — 176 с.
594. *Шикова Р. Н.* Решение задач на движение в одном направлении // Начальная школа. — 2000. — № 12. — С. 48—52.
595. *Шикова Р. Н.* Решение задач различными способами // Начальная школа. — 1979. — № 12. — С.
596. *Шикова Р. Н.* Способы разбора текстовых задач // Начальная школа. — 1986. — № 12. — С. 38—43.
597. *Шикова Р. Н., Бологова Е. И.* Формирование самоконтроля в процессе обучения младших школьников решению текстових задач // Начальная школа. — 2000. — № 1. — С. 37—40.
598. *Шикова Р. Н.* Методика обучения решению задач, связанных с движением тел // Начальная школа. — 2000. — № 5. — С. 30—37.

599. *Шикова. Р. Н.* Особенности работы над задачами по системе развивающего обучения Л. В. Занкова. // Начальная школа. — 1999. — № 4. — С. 84—86.
600. *Шкиль Н., Слепкань З.* О состоянии развития математического образования в Украине // Математика: Еженед. прил. к газ. "Первое сентября". — 1998. — № 2. — С. 1—2.
601. *Шмырева Г. Г.* Предупреждение ошибок в выборе арифметического действия при обучении решению задач // Начальная школа. — 1985. — № 10. — С. 37—40.
602. *Шорникова И. В.* Некоторые виды работ по преобразованию задач // Начальная школа. — 1991. — № 11. — С. 21—23.
603. *Шоферовська Л., Швець В.* Про введення в курс математики основної школи задач на цінні папери // Математика в школі. — 2004. — № 4. — С. 10—13.
604. *Шохор-Троцкий С. И.* Методика начального обучения математике. — М., 1924. — 202 с.
605. *Штофф В. А.* Моделирование и философия. — М.; Л.: Наука, 1966. — 301 с.
606. *Щедровицкий Г. П.* К анализу процессов решения задач // Доклады АПН РСФСР. — 1960. — № 5. — С. 25—28.
607. *Щепоткин А. А.* Алгоритм решения задач на тему "Работа" (на уроках математики) // Математика в школе. — 1993. — № 2. — С. 21—23.
608. *Эльконин Д. Б.* Психология обучения младших школьников. М.: Знание. 1974. — 64 с.
609. *Эрдниев П. М.* Взаимнообратные действия в арифметике. II—IV классы. — М.: Просвещение, 1969. — 335 с.: ил.
610. *Эрдниев П. М.* Математика. Экспериментальное учебное пособие для III класса. — М.: Педагогика, 1974. — 216 с.: ил.
611. *Эрдниев П. М.* Обучение математике в начальных классах. (Из опыта работы) М.: Просвещение, 1977. — 192 с.
612. *Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П.* Теория и методика обучения математике в начальной школе. — М.: Педагогика, 1988. — 208 с.
613. *Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П.* Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: Кн. для учителя. — М.: Просвещение, 1986. — 255 с.: ил.
614. *Эсаулов А. Ф.* Психология решения задач. — М.: Высш. школа, 1972. — 216 с.
615. *Ягупов В. В.* Педагогіка: Навч. посібник. — К.: Либідь, 2002. — 560 с.
616. *Якиманская И. С.* Разработка технологии личностно-ориентированного обучения // Вопросы психологии. — 1995. — № 2. — С. 31—42.
617. *Ярощук В. Л.* Психологический анализ процессов решения типовых арифметических задач / Изв. АПН РСФСР. — 1957. — Вып. 80. — С. 143—173.

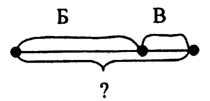
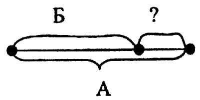
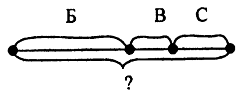
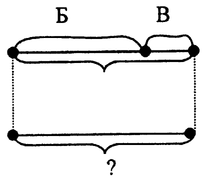
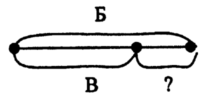
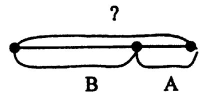
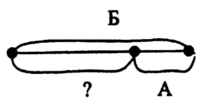
618. *Bertalaffy L*. von. An Outline of General System Teory // The British Journal for the Philosophy of Science. — Vol. 1. — 1950. — № 2. — P. 134—165.
619. *Klir J*. The General System as Methodological Tool // General Sys-tems, Vol. X., 1965. — P. 29—42.
620. *Klir J., Vallach M*. Gybernetic Modelling. — N. Y., 1967 (czech. ed — Praha, 1965). — 137 s.
621. *Meier B*. Nutzung erzieherischer Potenzen beim technischen Mod-ellbau // Polytechnische Bildung und Erzeihung. — 1983. — N 2/3. — S. 64—68.
622. *Schelten A*. Einfiirung in die Berufspadagogik: Zweite, durchgese-hene und erweiterte Aufl age. — Stuttgart: Steiner, 1994. — 307 s.
623. *Worterbuch*. Soziale Arbeit Herausgegeben von Dieter Kreft und Jngrid Mielenz. — Neuausgabe Edition sozial. — Beltz, 1988. — 670 s.

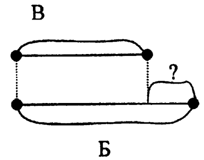
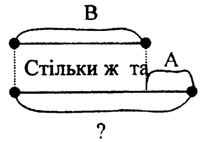
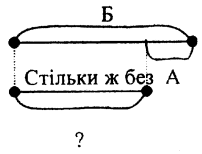
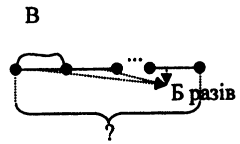
ДОДАТКИ

Додаток А

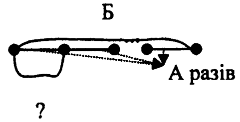
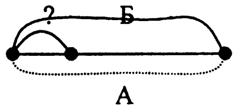
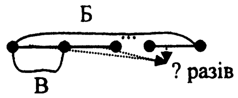
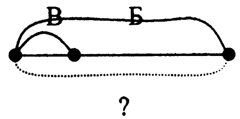
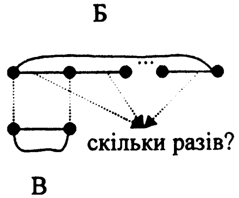
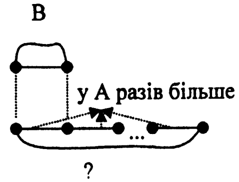
Таблиця А.1

Класифікація простих задач

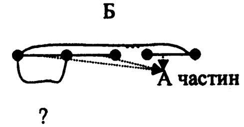
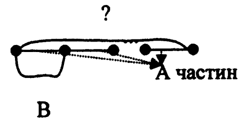
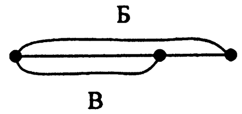
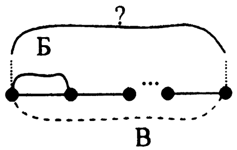
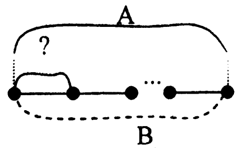
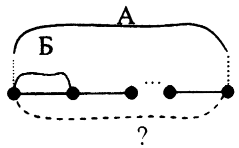
Тип задачі	Вид задачі	Схематичний рисунок
Співвідношення додавання Слова-ознаки співвідношення “всього” або його синоніми. Головний член співвідношення А той, у опис якого входить слово-ознака “всього” (це ціле). Головний член дорівнює сумі решти (звичайно двох) інших членів співвідношення. Модель-формула співвідношення: А = Б + В або А = Б + В + С	1. Задачі на знаходження суми двох доданків.	
	2. Задачі на знаходження невідомого доданка.	
	1. Задачі на знаходження суми трьох доданків.	
	2. Задачі на знаходження третього числа за сумою двох даних чисел.	
Співвідношення віднімання Слова-ознаки співвідношення “було — залишилося”. Головним членом А є той, в опис якого входить слово-ознака “залишилося”, він є різницею двох інших членів співвідношення Б і В, де Б той член, у опис якого входить слово-ознака “було” Модель-формула співвідношення: А = Б – В	1. Задачі на знаходження остачі.	
	2. Задачі на знаходження невідомого зменшуваного.	
	3. Задачі на знаходження невідомого від’ємника.	

Тип задачі	Вид задачі	Схематичний рисунок
Співвідношення різницевого порівняння Слова-ознаки співвідношення “на... менше (більше)”. Головний член співвідношення А той, у описі якого стоїть слово-ознака — прийменник “на”, цей член є різницею двох значень Б і В однієї й тієї самої величини, що порівнюються, де Б > В. Модель-формула співвідношення: Б – В = А	1. Задачі на різницеве порівняння.	
	2. Задачі на збільшення або зменшення числа на кілька	 
Співвідношення переходу від більшої одиниці рахунку або вимірювання до меншої Один і той самий об’єкт перерахований або виміряний двома різними одиницями — більшою і меншою. Головним членом А співвідношення є результат лічби або вимірювання об’єкта дрібними одиницями (В). Модель-формула співвідношення: А = В · Б.	1. Задачі на конкретний зміст добутку.одиниць.	

Продовження таблиці А.1

Тип задачі	Вид задачі	Схематичний рисунок
Співвідношення розбиття цілого на рівні частини Ознакою цього виду співвідношення є те, що Б розбито на А рівних частин, в кожній з яких “по” В одиниць. Головним членом співвідношення є А — результат розбиття Б на частини по В одиниць в кожній. Модель-формула співвідношення: А = Б : В	1. Задачі на конкретний зміст дії ділення: - ділення на рівні частини; - ділення на вміщення.	 або   або 
Співвідношення кратного порівняння Слова-ознаки співвідношення “у ...більше (менше)”, Головний член А співвідношення той, в опис якого входить частка “разів”, він є результатом кратного порівняння (відношення) двох значень Б і В однієї й тієї самої величини, при чому Б > В. Модель-формула співвідношення: Б : В = А, де А — відлучене число, більше за одиницю.	1. Задачі на кратне порівняння. 2. Задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів.	 

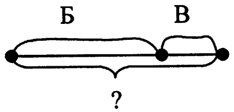
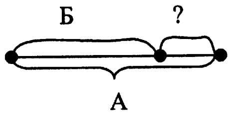
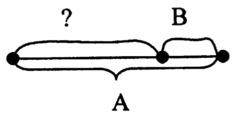
Закінчення таблиці А.1

Тип задачі	Вид задачі	Схематичний рисунок
Співвідношення частин і цілого Слова-ознаки співвідношення: ”складає... частину (частин, відсотків)... від”. Головний член А співвідношення той, у завдання якого входить слово-ознака ”частина (частин, відсотків)”. Модель-формула співвідношення: Б : В = А, Б<В. де А — відлучене число, менше за одиницю, або число відсотків.	1. Задачі на знаходження частини від числа. 2. Задачі на знаходження числа за його частиною. 3. Задачі на знаходження дробу, який одне число становить від іншого.	  
Співвідношення-залежність між значеннями різних величин Ознака співвідношення — явне завдання в умові задачі двох різних величин, які, пов’язані функціональною залежністю. Тоді в умові задачі явно або неявно задається й третя величина. Головним членом А є той, значення якого дорівнює добутку значень Б і В двох інших величин. Модель-формула співвідношення: А = Б • В	1. Задачі на знаходження значення загальної величини. 2. Задачі на знаходження величини однієї одиниці лічби або вимірювання. 3. Задачі на знаходження кількості або часу.	  

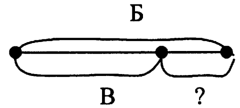
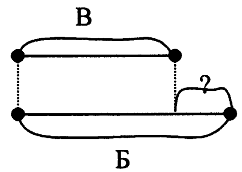
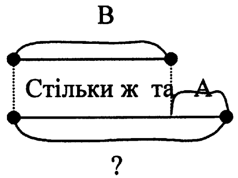
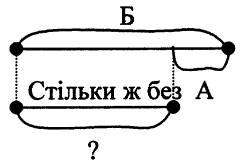
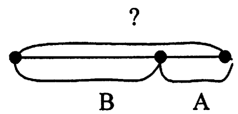
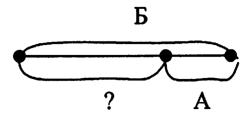
Додаток Б

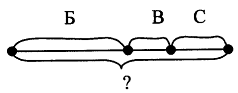
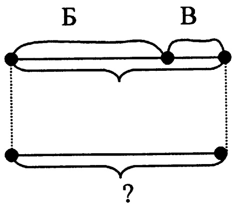
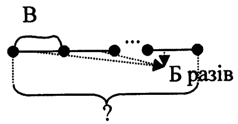
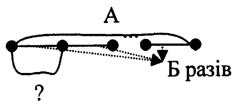
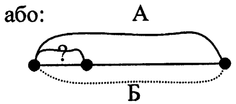
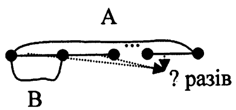
Таблиця Б.1

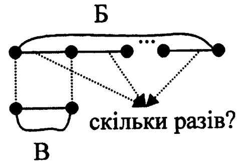
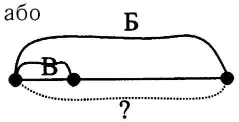
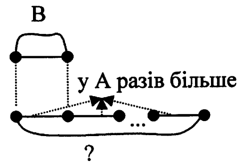
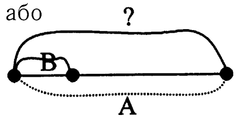
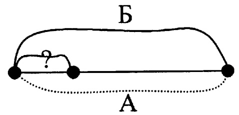
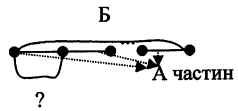
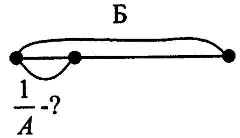
Послідовність розгляду видів задач за роками навчання

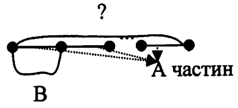
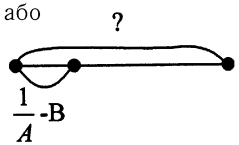
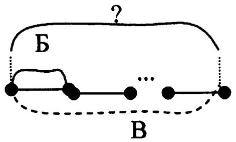
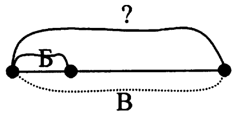
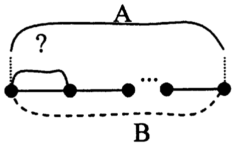
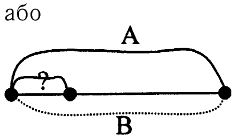
Клас	Вид задач	Опорна схема	Схематичний рисунок
1-й	1. Задачі на конкретний зміст суми двох доданків	**Долили Купили ... Було – Б ____ - В Стало - ?** **І – Б ІІ - В } ?**	
	2. Задачі на знаходження невідомого доданка	**І – Б ІІ - ? } А** **І – ? ІІ - В } А** **Долили Купили ... Було – Б ____ - ? Стало - А** **Долили Купили ... Було – ? ____ - В Стало - А**	 

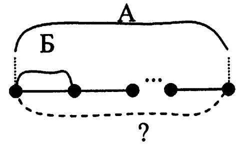
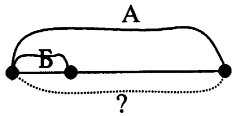
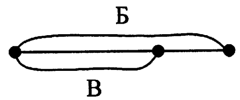
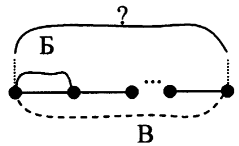
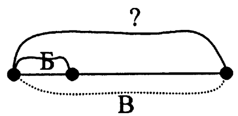
Продовження таблиці Б.1

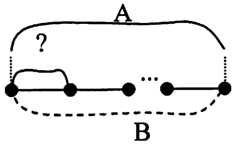
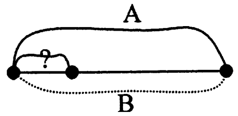
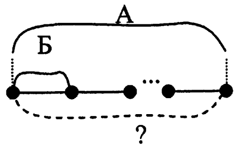
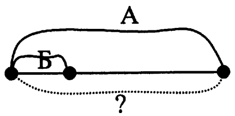
Клас	Вид задач	Опорна схема	Схематичний рисунок
	3. Задачі на знаходження остачі	**Пішли Відрізав ... Було – Б ____ - В Залиш. - ?**	
	4. Задачі на різницеве порівняння	**І – В ІІ - Б на ?**	
	5. Задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць	**І – В ІІ - ?, на А б.** **І – Б ІІ - ?, на А м.**	 
	6. Задачі на знаходження невідомого зменшуваного	**Пішли Відрізав ... Було – ? ____ - В Залиш. - А**	
	7. Задачі на знаходження невідомого від'ємника	**Пішли Відрізав ... Було – Б ____ - ? Залиш. - А**	

Клас	Вид задач	Опорна схема	Схематичний рисунок
2-й	1. Задачі на знаходження суми трьох доданків	I – Б II – В } ? III - С	
	2. Задачі на знаходження третього числа за сумою двох даних чисел	I – Б II – В } III - ?	
	3. Задачі на конкретний зміст добутку	По В взяти Б раз-?	
	4. Задачі на конкретний зміст дії ділення: - ділення на рівні частини;	А розд. на Б пор.-?	 або: 
	- ділення на вміщення	В А вміщ. по В-? А розділити по В-?	

Клас	Вид задач	Опорна схема	Схематичний рисунок
	5. Задачі на кратне порівняння	I – Б у ? II – В	 або 
	6. Задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів	I – В II - ?, у А р. б. I – Б II - ?, у А р. м.	 або  
3-й	1. Задачі на знаходження частини від числа	1 – Б $\frac{1}{A}$ - ? $\frac{1}{A}$ від Б - ?	 або 

Клас	Вид задач	Опорна схема	Схематичний рисунок
	2. Задачі на знаходження числа за його частиною	1 – ? $\frac{1}{A}$ - В $\frac{1}{A}$ складає В - ?	 або 
	3. Задачі на знаходження значення загальної величини (вартості, загальної довжини, загального об'єму, загальної маси, загального виробітку тощо)	Загальна … / … 1 … / Кількість ? / Б / В	 або 
	4. Задачі на знаходження величини однієї одиниці лічби або вимірювання (ціни, довжини 1 відрізу, об'єму 1 посудини, маси 1 предмету, продуктивності праці й тощо)	Загальна … / … 1 … / Кількість А / ? / В	 або 

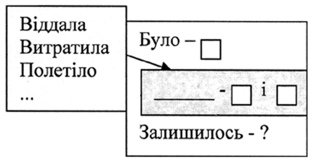
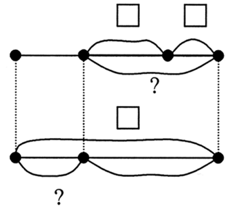
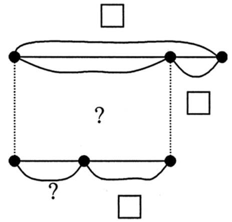
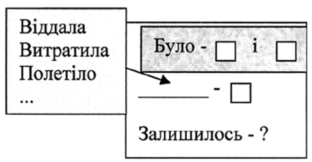
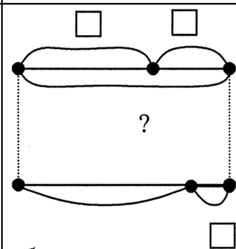
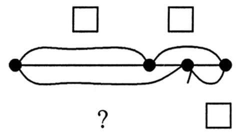
Клас	Вид задач	Опорна схема	Схематичний рисунок
	5. Задачі на знаходження кількості (куплених речей, відрізів, посудин, предметів) або часу роботи	Загальна … / … 1 … / Кількість А / Б / ?	 або 
4-й	1. Задачі на знаходження дробу, який одне число складає від іншого	1 – Б ? - В	
	2. Задачі на знаходження значення загальної величини (*відстані, площі прямокутника*)	*S* / *V* / *t* ? / Б / В *S* / *a* / *в* ? / Б / В	 або 

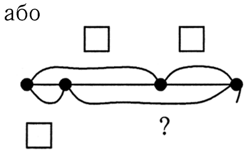
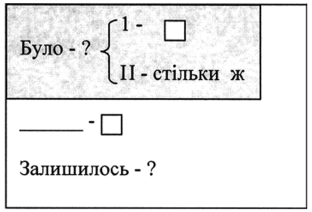
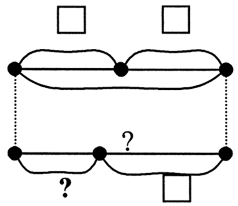
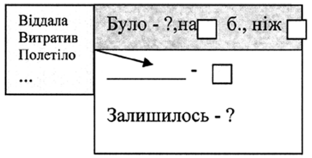
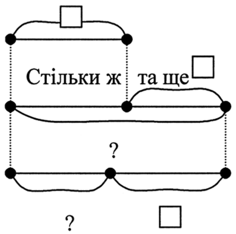
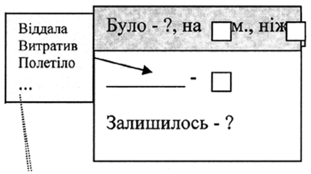
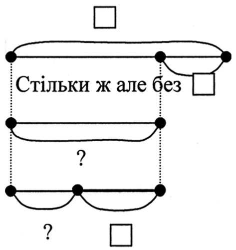
Клас	Вид задач	Опорна схема	Схематичний рисунок
	3. Задачі на знаходження величини однієї одиниці лічби або вимірювання (довжини сторони прямокутника, швидкості)	S | V | t А | ? | В	 або 
		S | a | $в$ А | ? | В	
	4. Задачі на знаходження кількості або *часу* (роботи, *руху*)	S | V | t А | Б | ?	 або 
		S | a | $в$ А | Б | ?	

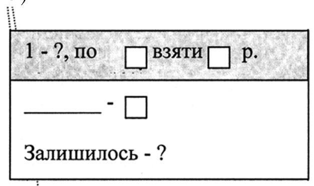
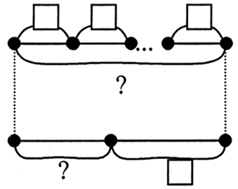
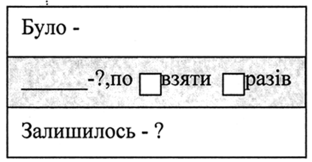
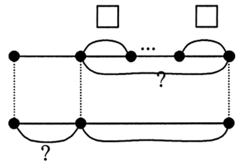
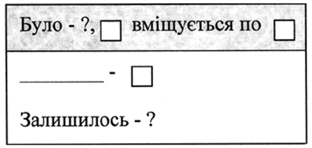
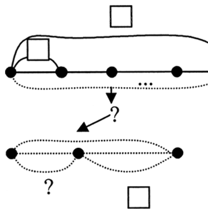
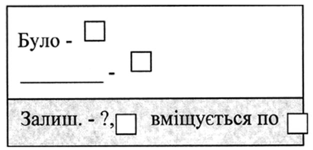
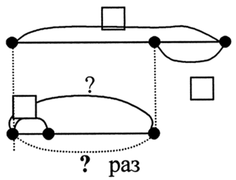
Додаток В

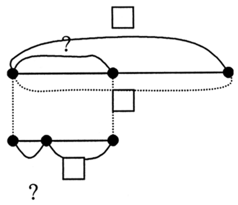
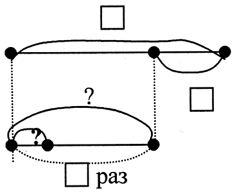
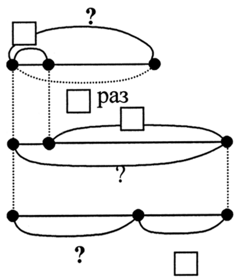
Таблиця В.1

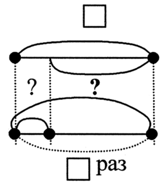
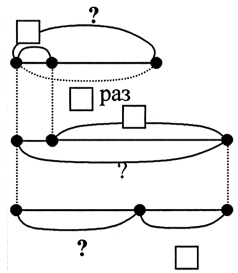
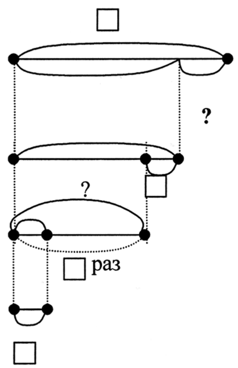
Класифікація задач першої групи на основі складу з простих задач

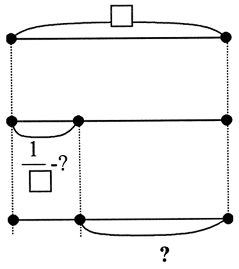
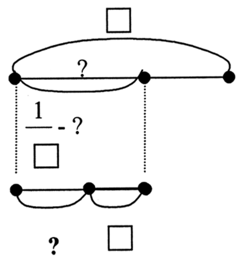
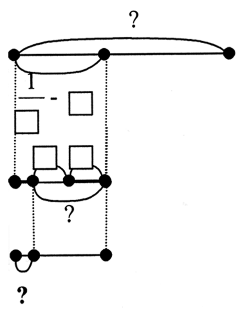
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
1. Задачі на знаходження остачі 1) які містять просту задачу на конкретний зміст суми (2-й клас);	а) 	 або 
	б) 	 або 

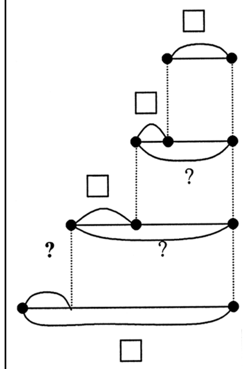
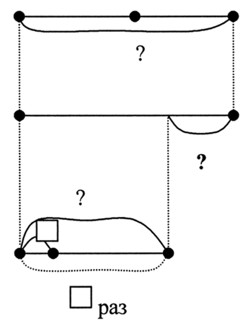
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
		або 
	в) 	
2) задачі, які містять задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць (2-й клас);	а) 	
	б) 	

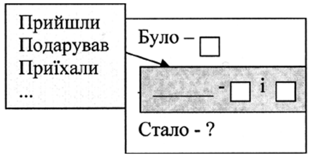
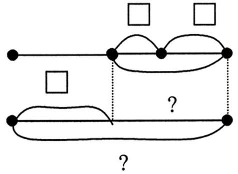
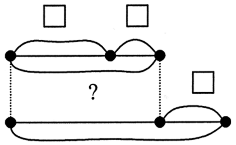
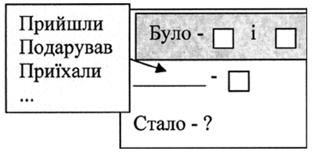
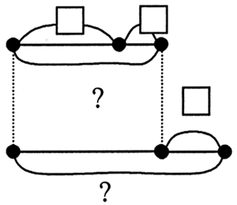
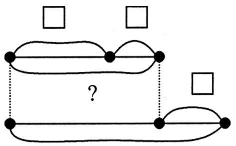
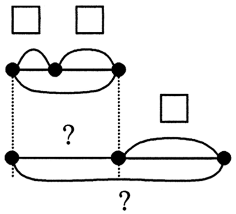
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
3) задачі, які містять просту задачу на конкретний зміст добутку (2-й клас);	а) 	
	б) 	
4) задачі, які містять просту задачу на конкретний зміст дії ділення (2-й клас);	а) 	
	б) 	

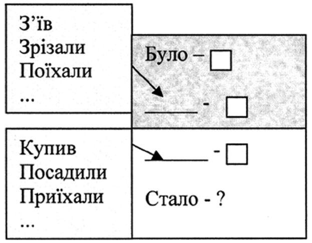
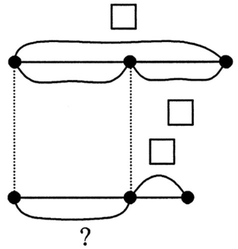
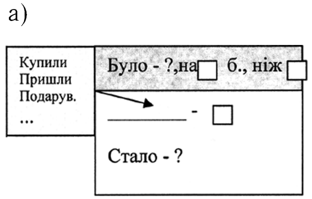
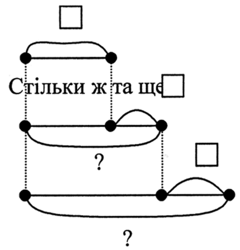
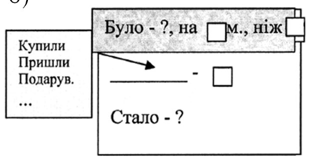
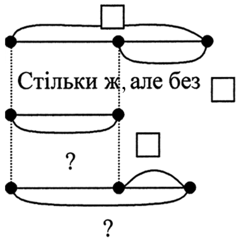
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
	в) Було в 1- ? □ розділити на □ пор. _______ - □ Залишилось - ?	
	г) Було - □ _______ - □ Залиш.- ?, □ розділити на □ пор.	
5) задачі, в яких перша проста задача на конкретний зміст дії множення, а друга — на знаходження суми (3-й клас);	а) Було – ? { 1 - ?, по □ взяти □ р. II - □ } _____ - □ Залишилось -?	

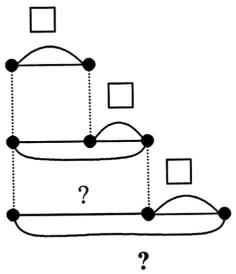
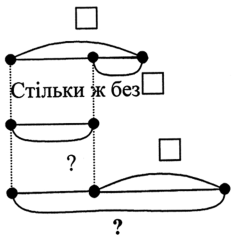
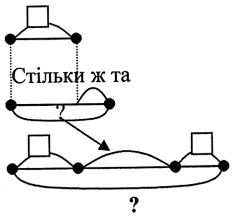
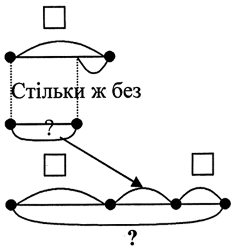
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
6) задачі, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа у кілька разів (3-й клас);	Було – □ ______ - ?, у □ р. м. Залишилось -?	
7) задачі, в яких перша проста задача на збільшення або зменшення числа у кілька разів, а друга — на знаходження суми (3-й клас);	Було – ? { 1 - ?, у □ р. б.(м.) II - □ } _____ - □ Залишилось -?	
	а) Було – ? { 1 - ?, у □ р. б.(м.) II - □ } _____ - □ Залишилось -?	

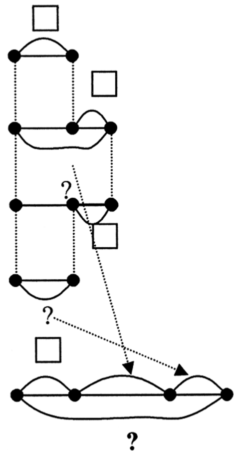
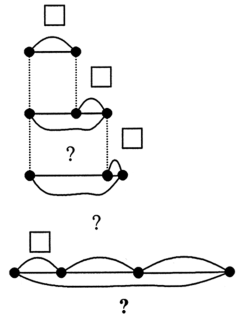
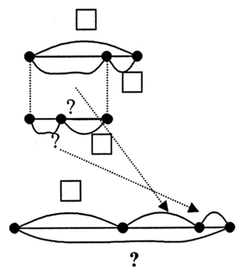
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
8) задачі, які містять знаходження частини від числа (3-й клас);	а) Було – $\square$ ______ - ?, $\frac{1}{\square}$ від $\square$ Залишилось -?	
	б) Було - ?, $\frac{1}{\square}$ від $\square$ ______ - $\square$ Залишилось -?	
9) задачі, які містять першу просту задачу на знаходження числа за його частиною, а другу просту задачу на знаходження суми (4-й клас);	Було - ?, $\frac{1}{\square}$ складає $\square$ ______ - ?, $\square$ і $\square$ Залишилось -?	

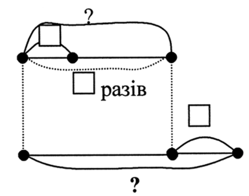
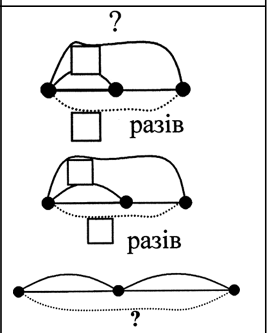
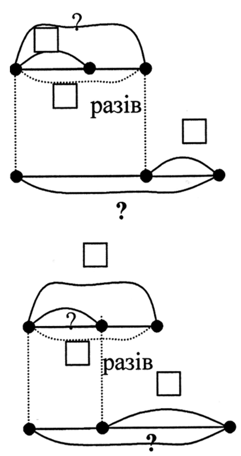
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
10) задачі, які містять першу просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, а другу — на знаходження суми (3-й клас).	а) Було – $\square$ I – $\square$ ______ - ? II - ?, на $\square$ б.(м.) Залишилось - ?	
11) задачі, які містять першу просту задачу на знаходження суми, другу — на конкретний зміст дії множення (3-й клас).	а) Було - $\square$ і $\square$ ______ - ?, по $\square$ взяти $\square$ раз Залишилось - ?	

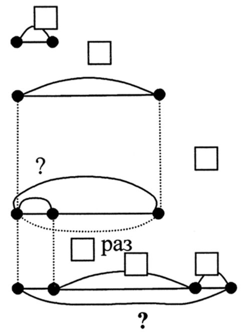
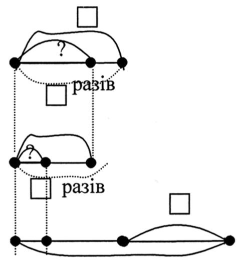
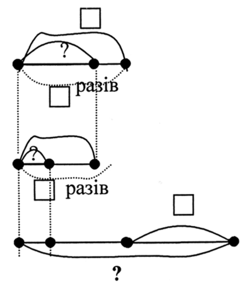
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
2. Задачі на знаходження суми 1) задачі, які містять задачу на знаходження суми (2-й клас);	а) 	 або 
	б) 	 або  або 

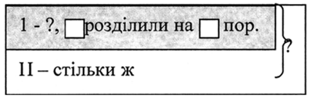
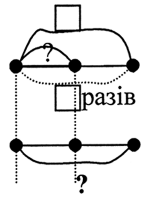
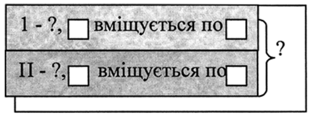
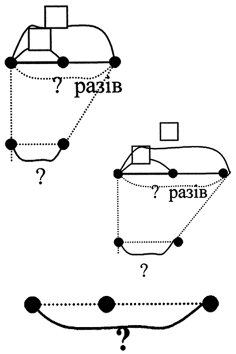
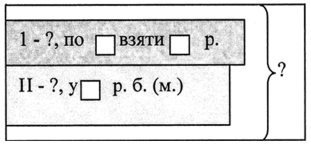
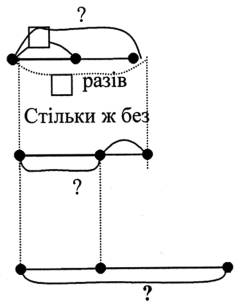
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
2) задачі, які містять просту задачу на знаходження остачі (2-й клас);		
3) задачі, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць (2-й клас);	а) 	
	б) 	

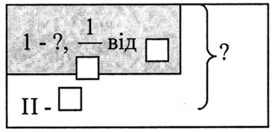
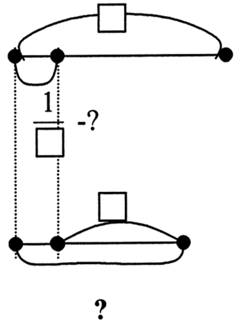
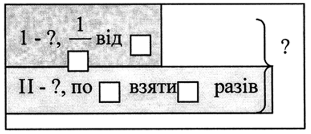
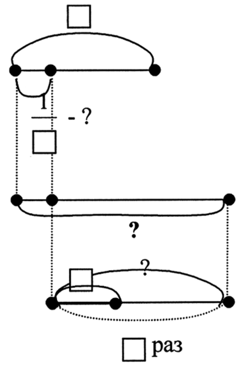
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
	в) 1 – □ II - ?, на □ б. ? 1 - □ це на □ м II - ? ?	
	г) 1 – □ II - ?, на □ м. ? 1 - □ це на □ б. II - ? ?	
	д) 1 – □ II - ?, на □ б. (м.), ніж 1 III -□ ? 1 – □ II - ?, на □ б. (м.), ніж 1 III -□ ?	 або 

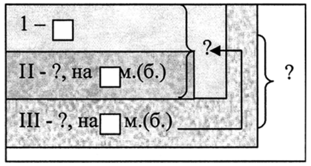
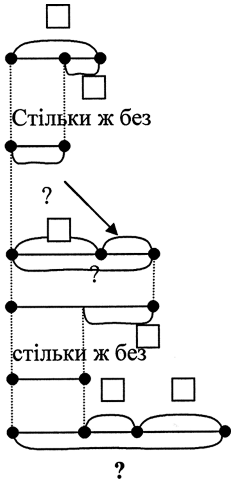
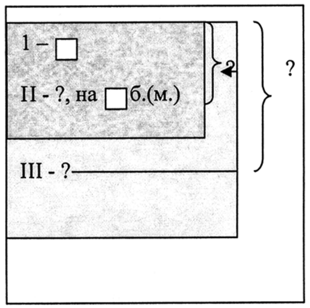
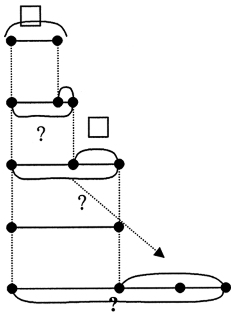
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
4) задачі, які містять дві прості задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць (2-й клас);	1 – □ II - ?, на □ б. , ніж 1 III - ?, на □ м., ніж II ? 1 – □ II - ?, на □ б. , ніж 1 III - ?, на □ б., ніж II ? 1 – □ II - ?, на □ м. , ніж 1 III - ?, на □ м., ніж II ? 1 – □ II - ?, на □ м. , ніж 1 III - ?, на □ м., ніж II ?	  

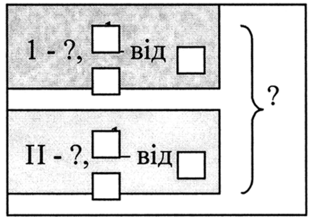
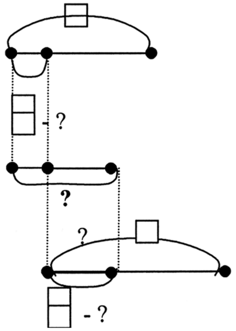
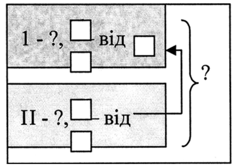
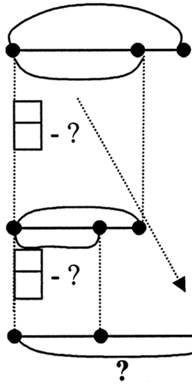
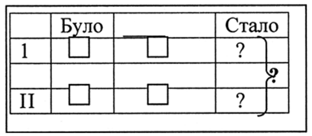
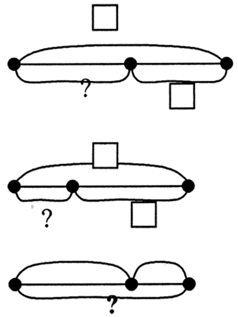
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
5) задачі, які містять задачу на конкретний зміст множення (2-й клас);	ж) 1 - ?, по □ взяти □ разів II - □ ?	
6) задачі, які містять дві прості задачі на конкретний зміст дії множення (2-й клас);	з) 1 - ?, по □ взяти □ разів II - ?, по □ взяти □ разів ?	
7) задачі, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа у кілька разів (2-й клас);	а) 1 – □ II - ?, в □ разів б. ? 1 – □ II - ?, в □ разів м. ?	

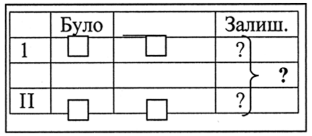
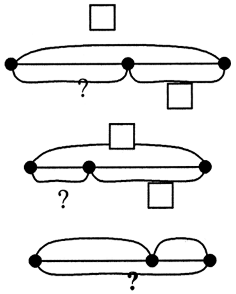
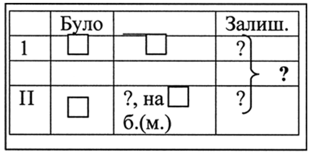
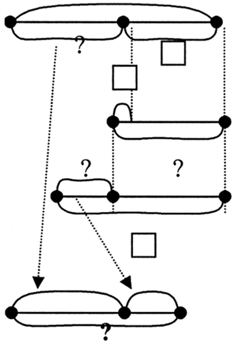
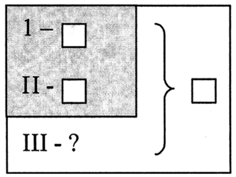
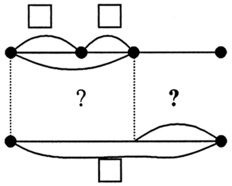
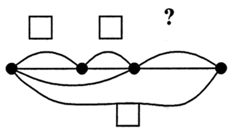
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
	1 – □ II – □ ? III - ?, в □ разів м.(б.), ніж II	
8) задачі, в яких перша проста задача на знаходження суми, а друга — на збільшення або зменшення числа у кілька разів (4-й клас);	1 – □ II – □ ? III - ?, в □ разів м.(б.) ?	
9) задачі, які містять дві прості задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів (3-й клас);	1 – □ II - ?, в □ р. м.(б.), ніж 1 III - ?, в □ р.б.(м.), ніж П ?	

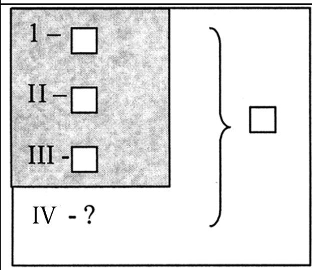
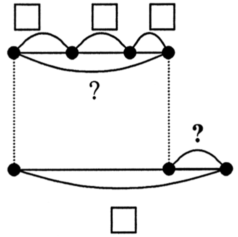
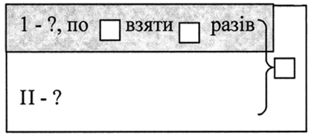
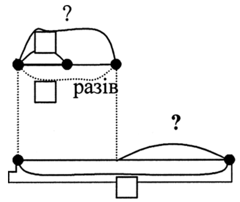
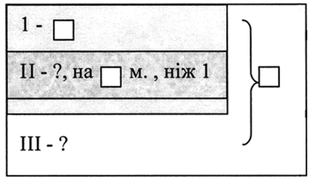
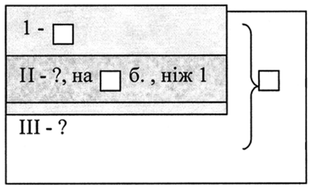
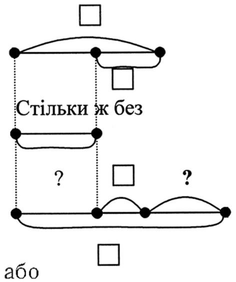
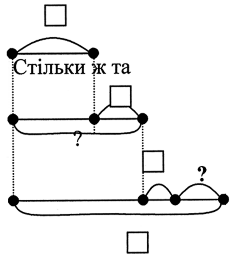
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
10) задачі, які містять просту задачу на конкретний зміст дії ділення (3-й клас);		
11) задачі, які містять дві прості задачі на конкретний зміст дії ділення (3-й клас);		
12) задачі, які містять першу просту задачу на конкретний зміст добутку, а другу — на збільшення або зменшення числа у кілька разів (3-й клас);		

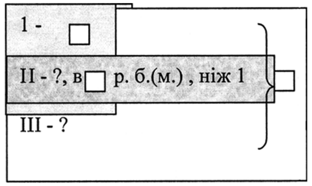
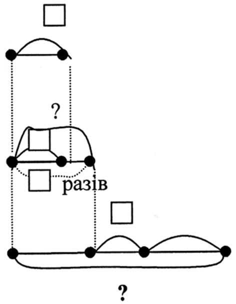
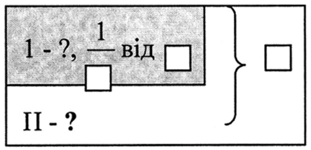
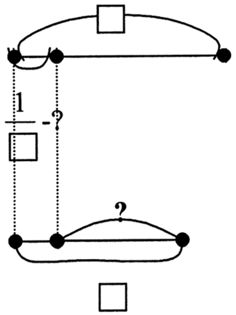
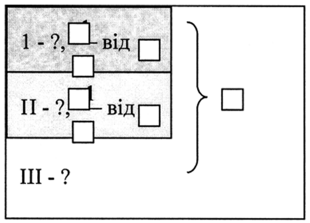
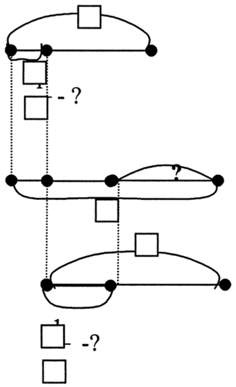
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
13) задачі, які містять знаходження частини від числа (3-й клас);		
14) задачі, в яких перша проста задача на знаходження частини від числа, а друга — на конкретний зміст дії множення (4-й клас);		

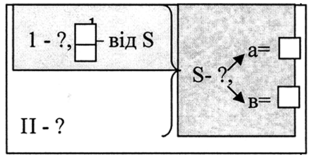
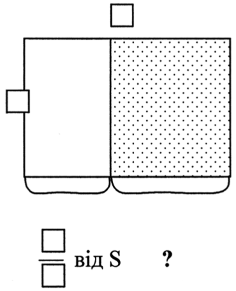
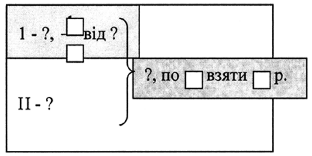
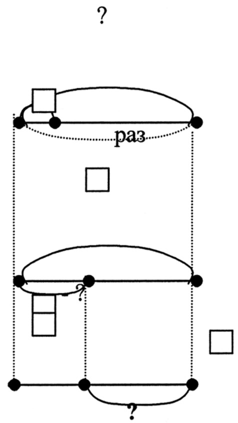
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
15) задачі, в яких 1-ша проста задача на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, 2-га — на знаходження суми, а 3-тя — на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць (4-й клас);		
16) задачі, які містять першу просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, а другу — на знаходження третього числа по сумі двох даних (3-й кл.);		

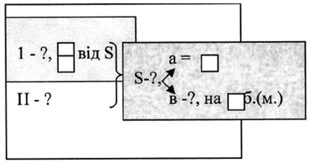
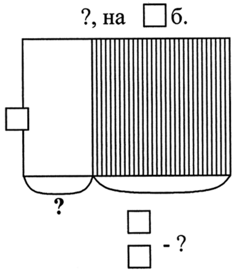
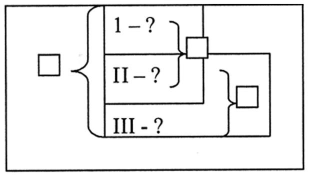
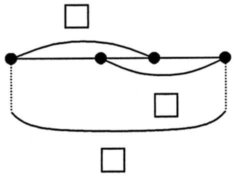
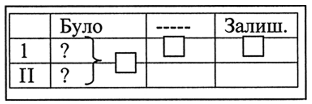
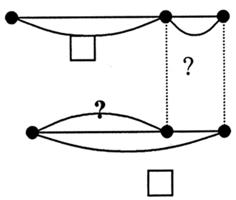
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
17) задачі, в яких 1-ша та 2-га проста задача на знаходження частини або дробу від числа, (4-й клас);		
		
18) задачі, в яких 1-ша та 2-га прості задачі — задачі на знаходження суми (3-й клас);		

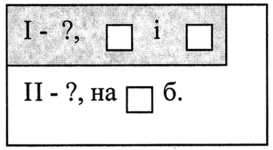
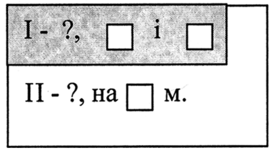
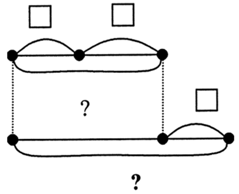
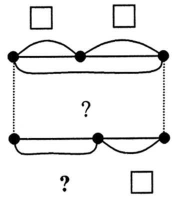
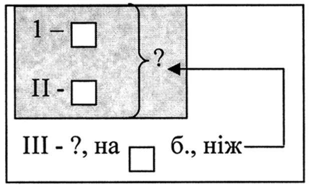
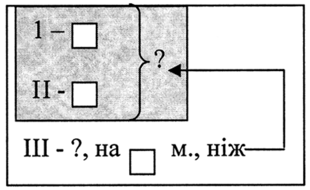
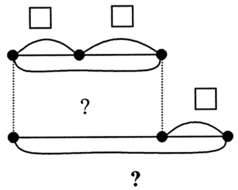
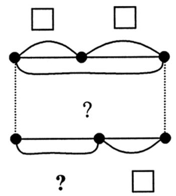
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
19) задачі, які містять дві прості задачі на знаходження остачі (3-й клас);		
20) задачі, в яких перша проста задача на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць, а дві наступні — задачі на знаходження остачі (3 кл.)		
3. Задачі на знаходження невідомого доданка 1) задачі, які містять просту задачу на знаходження суми (2-й клас);		 або 

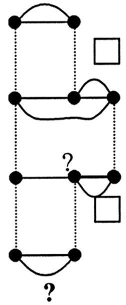
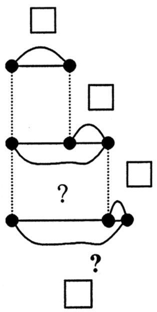
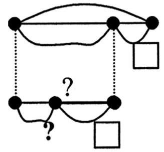
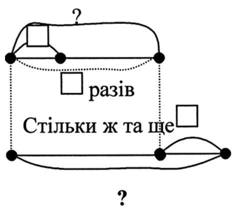
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
2) задачі, які містять просту задачу на знаходження суми трьох доданків (3-й клас);		
3) задачі, які містять просту задачу на конкретний зміст добутку (2-й клас);		
4) задачі, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць та задачу на знаходження суми (2-й клас);	 	 або 

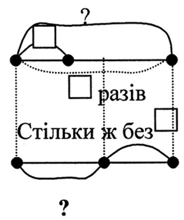
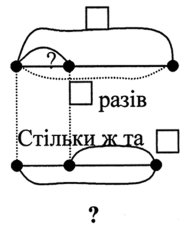
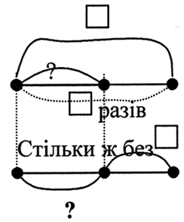
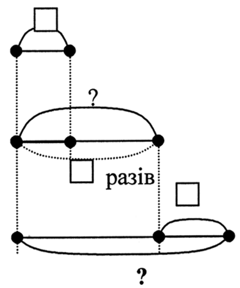
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
5) задачі, які містять просту задачу на збільшення числа у кілька разів та задачу на знаходження суми (3-й клас);		
6) задачі, які містять знаходження частини або дробу від числа (3-й, 4-й клас);		
7) задачі, які містять дві задачі на знаходження частини або дробу від числа (4-й клас);		

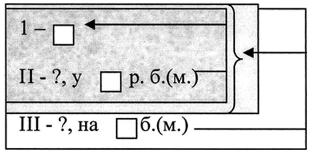
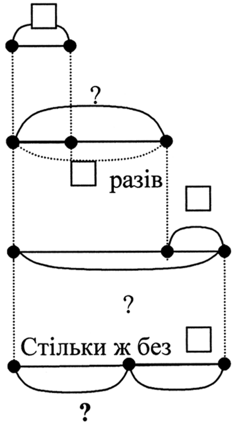
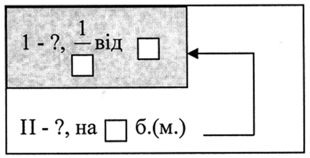
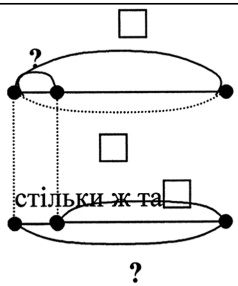
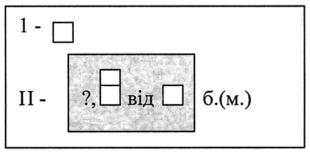
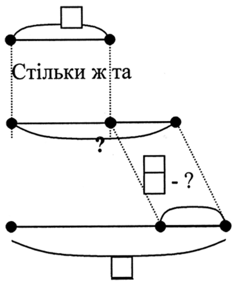
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
8) задачі, які містять 1-шу просту задачу на знаходження площі, а 2-гу просту задачу на знаходження дробу від числа (4-й клас);		
9) задачі, які містять 1-шу просту задачу на конкретний зміст добутку, а 2-у на знаходження дробу від числа (4-й клас);		

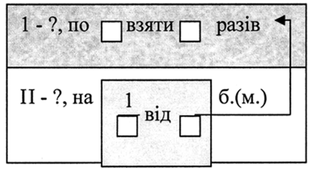
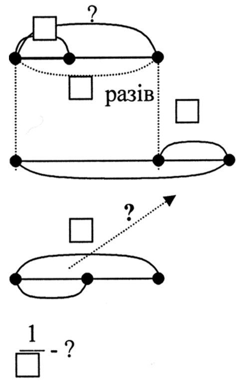
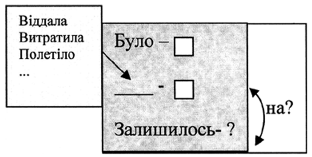
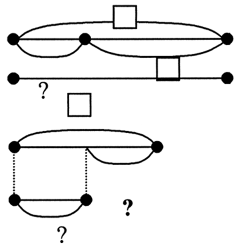
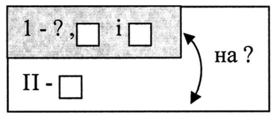
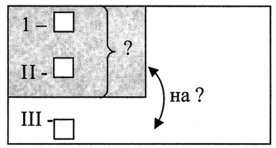
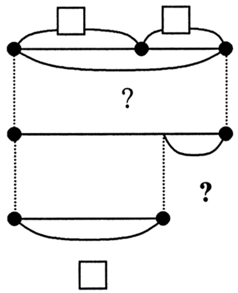
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
10) задачі, які містять першу просту задачу на обчислення площі прямокутника, а другу — на знаходження дробу від числа (4-й клас);		
11) задачі, які містять три прості задачі на знаходження трьох доданків (3-й та 4-й клас);		
12) задачі, які містять просту задачу на знаходження зменшуваного (3-й клас).		

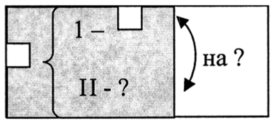
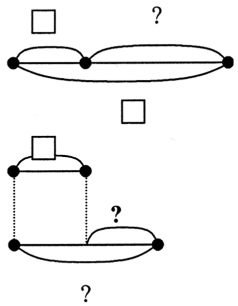
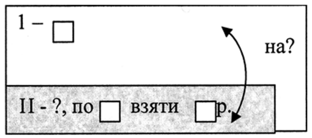
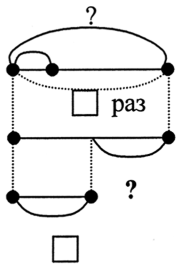
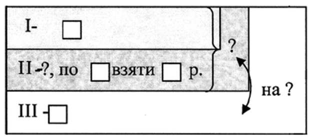
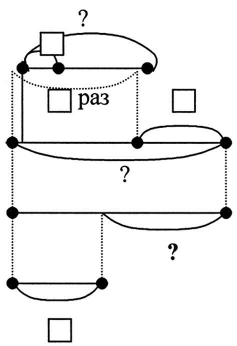
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
4. Задачі на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць 1) задачі, які містять просту задачу на знаходження суми (2-й клас);	а)  	 
	б)  	 

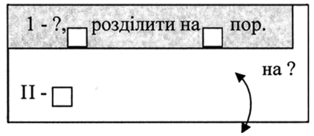
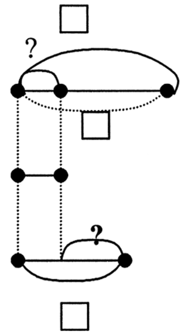
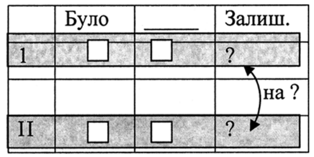
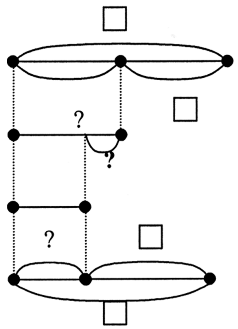
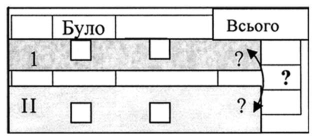
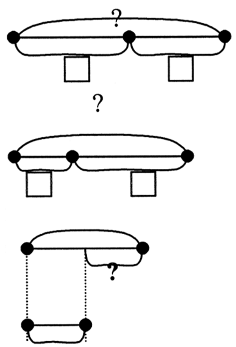
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
2) задачі, які складаються з двох простих задач на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць (2-й клас);	1 – □ II - ?, на □ б., ніж 1 III - ?, на □ м., ніж II	
	1 – □ II - ?, на □ б. , ніж 1 III - ?, на □ б. , ніж П	
	1 – □ II - ?, на □ м. , ніж 1 III - ?, на □ м. , ніж II	
3) задачі, які містять просту задачу на конкретний зміст добутку (2-й клас);	1 - ?, по □ взяти □ разів II - ? , на □б.	

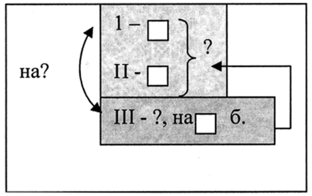
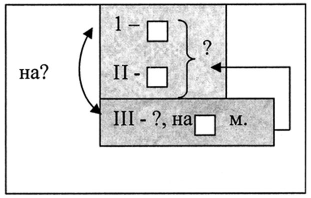
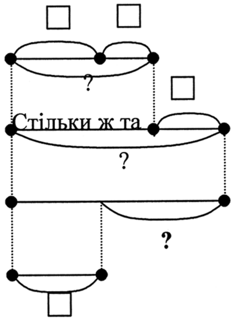
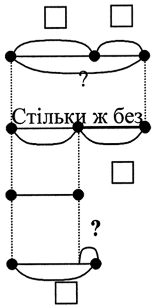
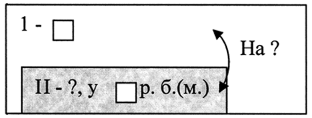
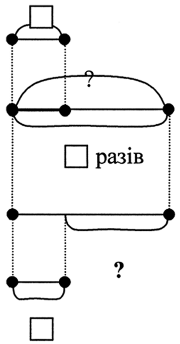
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
	1 - ?, розділити □ на □пор. II - ? , на □м.	
4) задачі, які містять просту задачу на конкретний зміст дії ділення (2-й клас);	1 - ?, розділити □ на □пор. II - ? , на □б.	
	1 - ?, розділити □ на □пор. II - ? , на □м.	
5) задачі, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа у кілька разів (3-й клас);	1 – □ II - ?, у □ р. б.(м.) III - ?, на □б.(м.)	

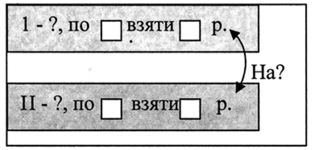
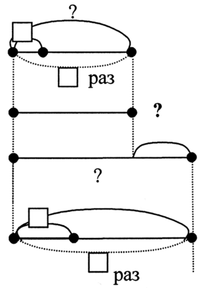
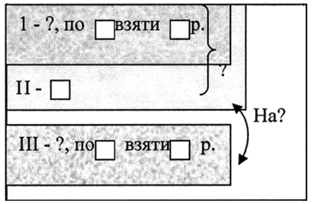
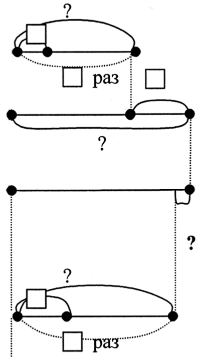
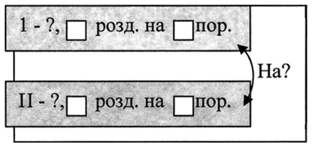
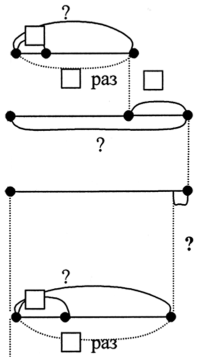
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
6) задачі, які містять першу просту задачу на збільшення чи зменшення числа у кілька разів, другу — на знаходження суми (3-й клас);		
7) задачі, які містять просту задачу на знаходження частини від числа (3-й клас);		
8) задачі, які містять задачу на знаходження частини або дробу від числа (3-й, 4-й клас);		

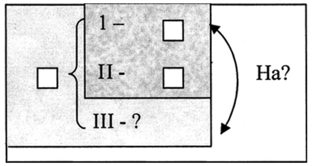
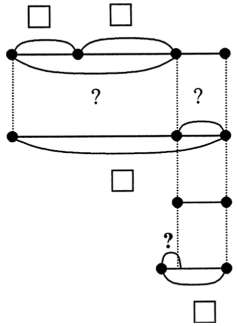
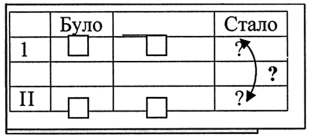
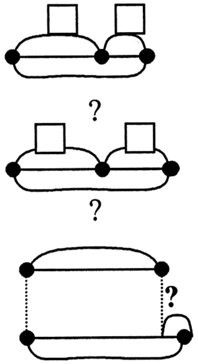
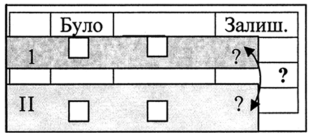
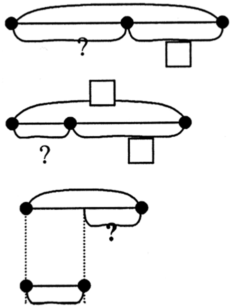
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
9) задачі, які містять просту задачу на конкретний зміст дії множення і задачу на знаходження частини числа (3-й клас).		
5. Задачі на різницеве порівняння 1) задачі, які містять просту задачу на знаходження остачі (2-й клас);	а) 	
2) задачі, які містять просту задачу на знаходження суми (2-й клас);	а)  б) 	

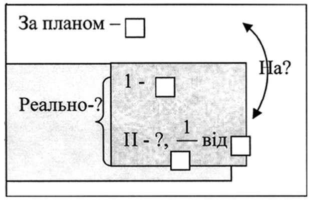
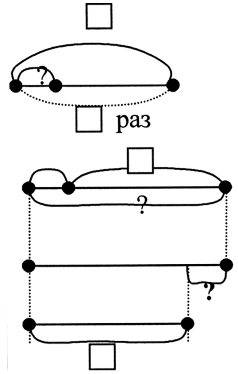
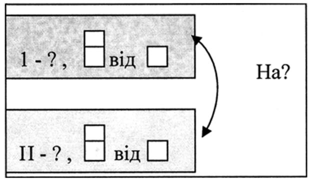
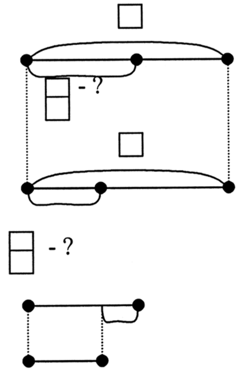
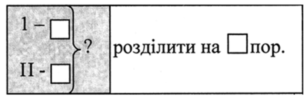
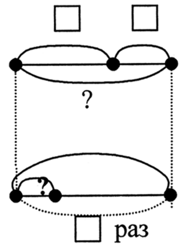
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
3) задачі, які містять просту задачу на знаходження невідомого доданка (2-й клас);		
4) задачі, які містять першу просту задачу на конкретний зміст дії множення (2-й клас);		
5) задачі, в яких перша проста задача на конкретний зміст дії множення, а друга проста задача на знаходження суми (2-й клас);		

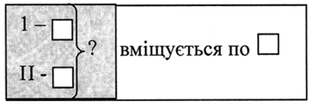
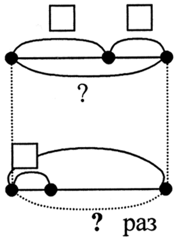
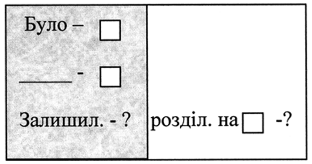
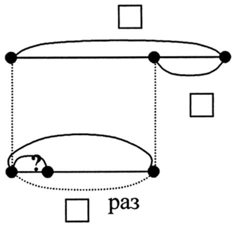
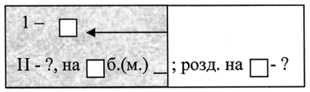
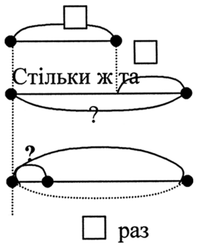
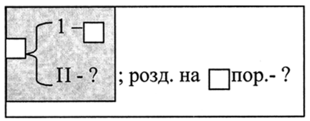
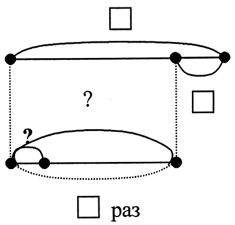
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
6) задачі, які містять просту задачу на конкретний зміст дії ділення (2-й клас);		
7) задачі, які складаються з двох простих задач на знаходження остачі (2-й клас);		
8) задачі, які містять дві прості задачі на знаходження суми (3-й клас);		

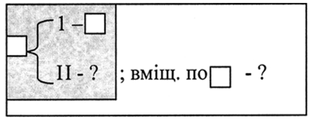
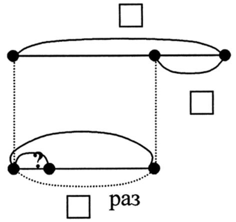
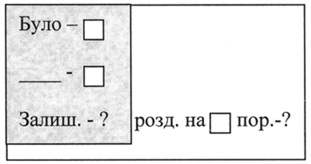
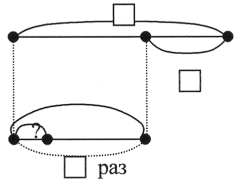
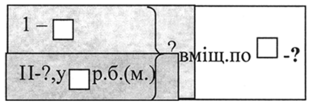
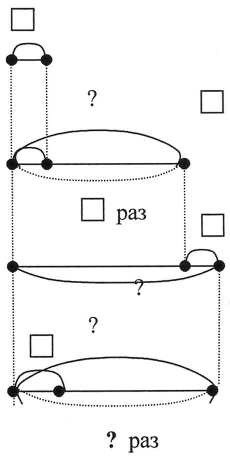
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
9) задачі, в яких перша проста задача на знаходження суми, а друга проста задача на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць (2-й клас);	 	 
10) задача, яка містить просту задачу на збільшення або зменшення числа у кілька разів (3-й клас);		

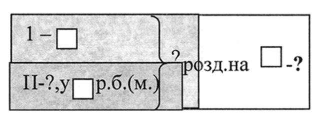
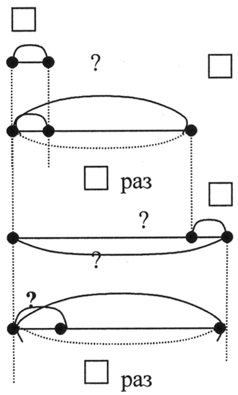
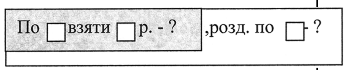
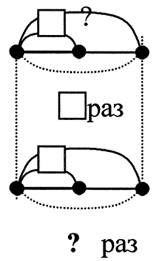
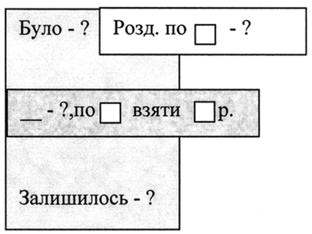
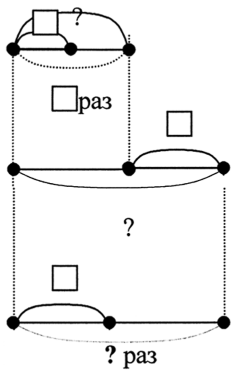
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
11) задачі, які містять дві прості задачі на конкретний зміст дії множення (3-й клас);		
12) задачі, які містять дві прості задачі на конкретний зміст добутку, просту задачу на знаходження суми (3-й клас);		
13) задачі, які містять дві задачі на конкретний зміст дії ділення (3-й клас);		

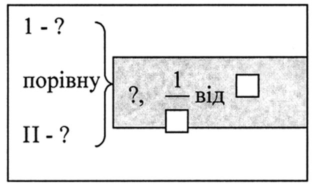
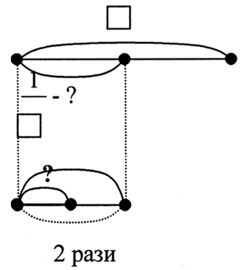
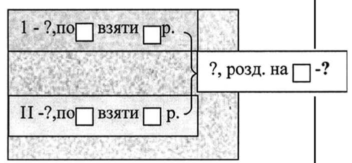
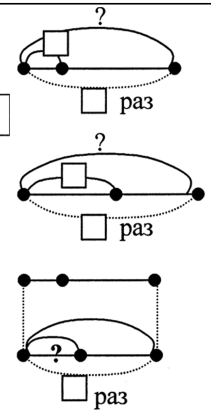
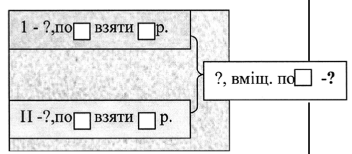
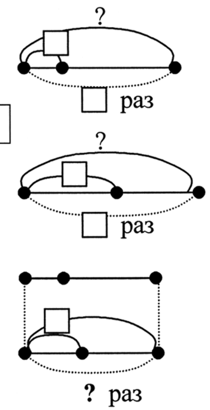
<table>
<tr><th>Вид складеної задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>14) задачі, в яких перша проста задача на знаходження суми, а друга — на знаходження невідомого доданка (4-й клас);</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>15) задачі, які містять дві прості задачі на знаходження суми (3-й клас);</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>16) задачі, які містять дві прості задачі на знаходження остачі (3-й клас);</td><td></td><td></td></tr>
</table>

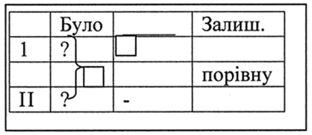
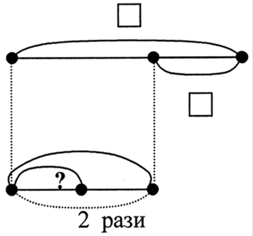
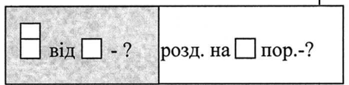
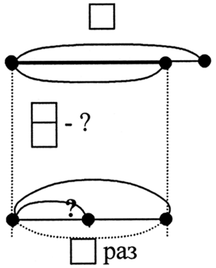
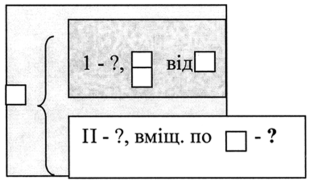
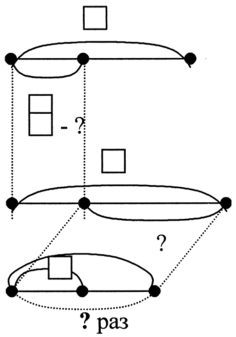
<table>
<tr><th>Вид складеної задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>17) задачі, в яких 1-ша проста задача на знаходження частини від числа, 2-га — на знаходження суми (4-й клас);</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>18) задачі, які містять перші дві задачі на знаходження дробу від числа (4-й клас).</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6. Задачі на знаходження частки
1) задачі, які містять просту задачу на знаходження суми (2-й клас);</td><td>а)
</td><td></td></tr>
</table>

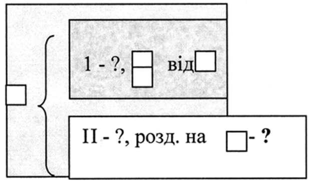
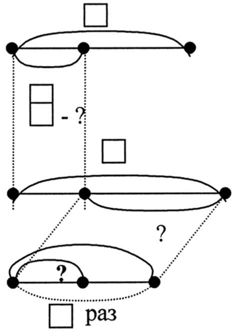
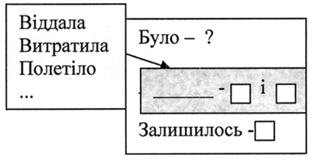
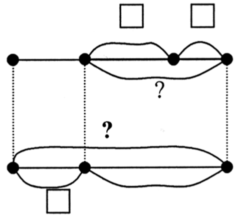
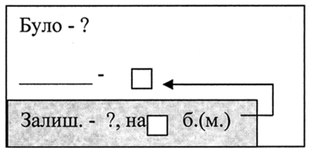
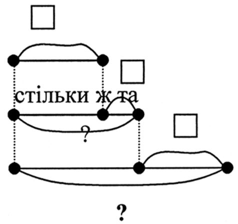
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
	б) 	
2) задачі, які містять просту задачу на знаходження остачі (2-й клас);		
3) задачі, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць (3-й клас);		
4) задачі, які містять просту задачу на знаходження невідомого доданка (3-й клас);	а) 	

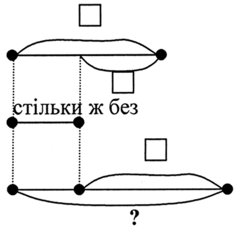
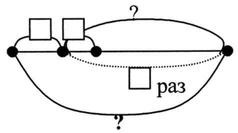
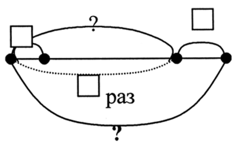
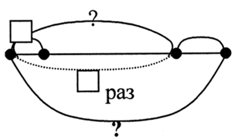
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
	б) 	
5) задачі, які містять просту задачу на знаходження остачі (3-й клас);		
6) задачі, в яких перша проста задача на збільшення або зменшення числа у кілька разів, а друга — на знаходження суми (3-й клас);		

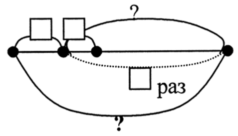
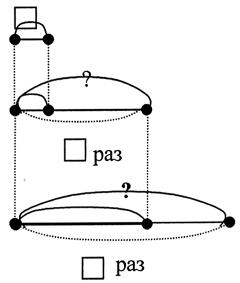
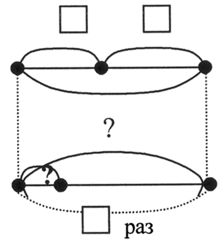
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
	б) 	
7) задачі, які містять просту задачу на конкретний зміст добутку (3-й клас);		
8) задачі, в яких перша проста задача на конкретний зміст добутку, а друга — на знаходження остачі (3-й клас);		

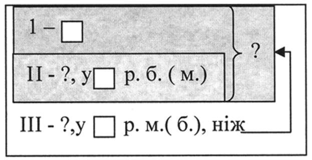
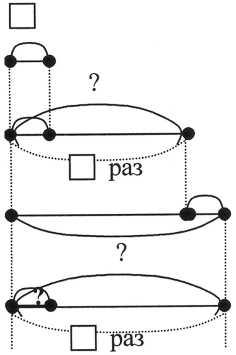
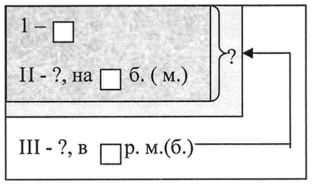
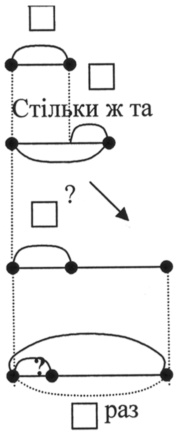
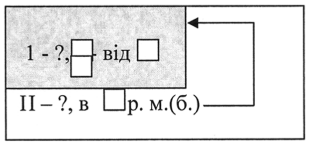
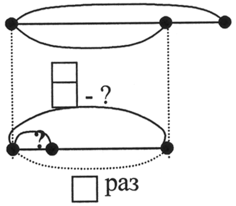
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
9) задачі, які містять просту задачу на знаходження частини від числа (3-й клас);		
10) задачі, які містять перші дві прості задачі на конкретний зміст добутку, а 3-тя проста задача — на знаходження суми (4-й клас);	а) 	
	б) 	

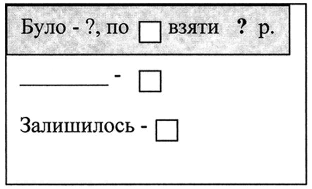
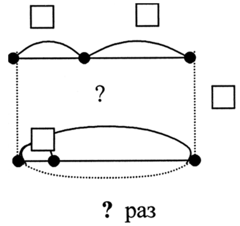
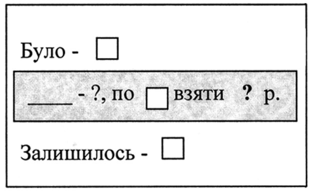
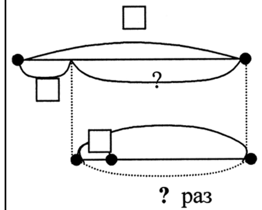
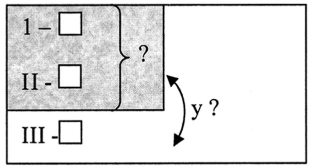
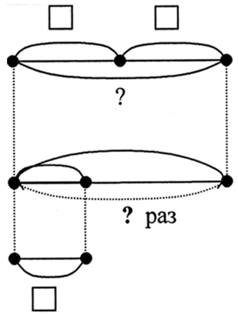
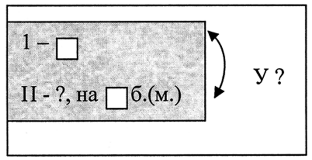
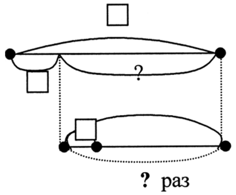
<table>
<tr><th>Вид складеної задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>11) задачі, які містять просту задачу на знаходження остачі (4-й клас);</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>12) задачі, які містять задачу на знаходження дробу від числа (4-й клас);</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>13) задачі, в яких перша задача на знаходження дробу від числа, а друга — на знаходження невідомого доданка (4-й клас).</td><td>а)

</td><td>
</td></tr>
</table>

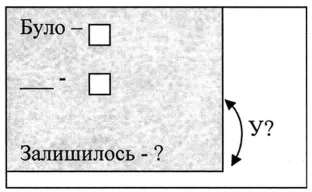
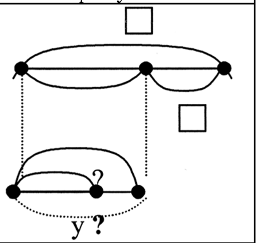
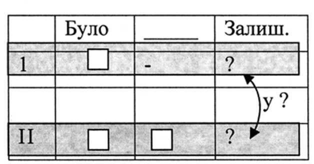
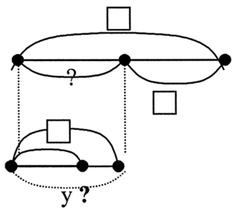
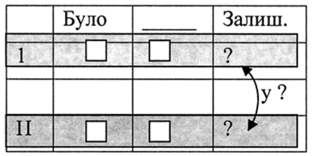
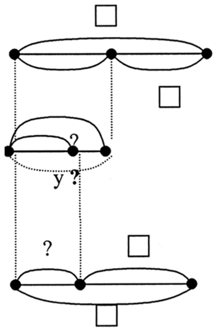
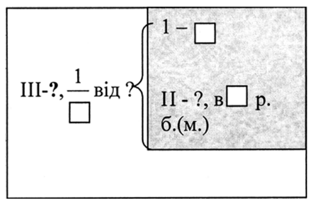
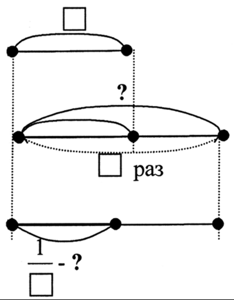
<table>
<tr><th>Вид складеної задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td></td><td>б)

</td><td>
</td></tr>
<tr><td>7. Задачі на знаходження невідомого зменшуваного
1) задачі, які містять просту задачу на знаходження суми (2-й клас);</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2) задачі, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць (2-й клас);</td><td>а)

</td><td>
</td></tr>
</table>

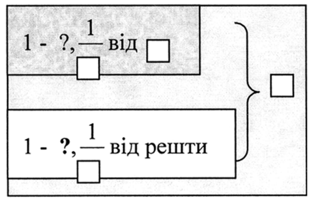
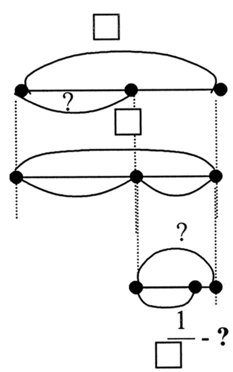
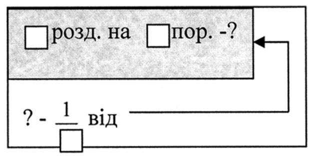
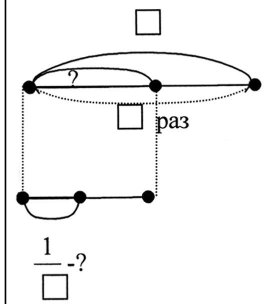
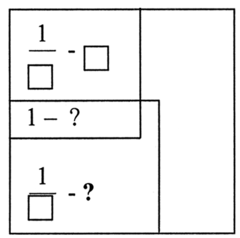
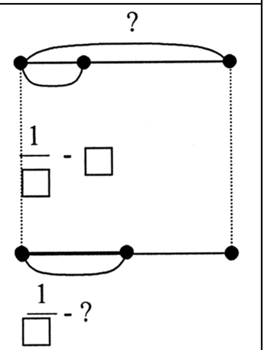
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
	б) Було - ? _____ - ?, на □м.(б.) Залишилось - □	
3) задачі, які містять просту задачу на знаходження добутку (3-й клас);	а) Було - ? ______ - ?, по □взяти □р. Залишилось - □	
	б) Було - ? _______ - □ Залиш. - ?, по□ взяти □р.	
4) задачі, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа у кілька разів (3-й клас).	а) _____ - ?, у разів б.(м.) Було - ? □ Залиш. - ?, у □разів б.(м.)	

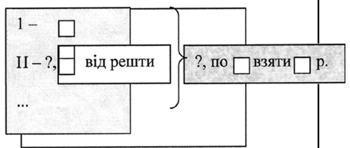
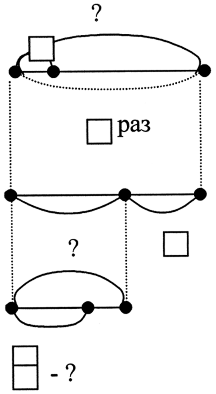
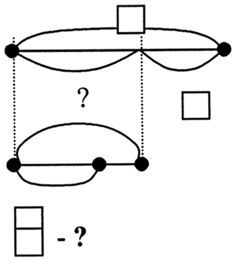
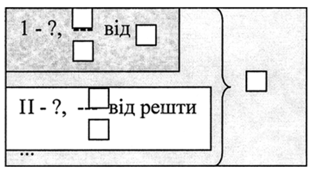
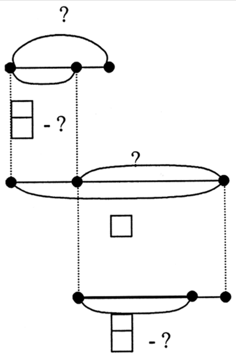
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
	б) Було - ? _____ - ?, у □ разів б.(м.) Залишилось - □	
8. Задачі на збільшення або зменшення числа у кілька разів 1) задачі, які складаються з двох задач на збільшення або зменшення числа на кілька одиниць (3-й клас);	1 – □ II - ?, у□ р. б. (м.) , ніж 1 III - ?, у □р. м. (б.) , ніж II	
2) задачі, які містять просту задачу на знаходження суми (3-й клас);	1 – □ II - □ } ? III - ?,в □ р. м.(б.), ніж	

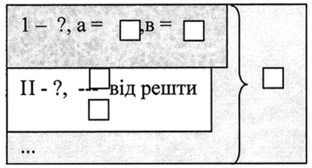
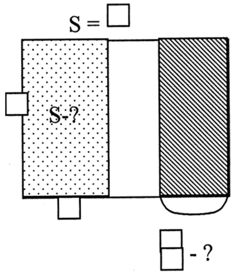
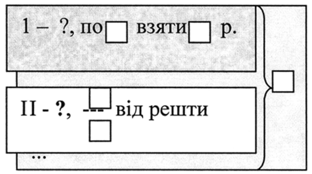
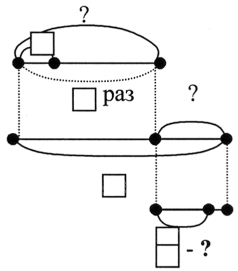
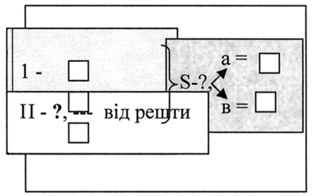
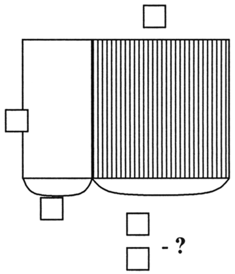
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
3) задачі, в яких перша проста задача на збільшення або зменшення числа у кілька разів, а друга — на знаходження суми;		
4) задачі, які містять 1-шу просту задачу на збільшення числа на кілька одиниць, а 2-гу просту задачу на знаходження суми (4-й клас);		
5) задачі, які містять просту задачу на знаходження дробу від числа.		

Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
9. Задачі на знаходження невідомого множника (3-й клас) 1) задачі, які містять просту задачу на знаходження невідомого зменшуваного (3-й клас);		
2) задачі, які містять просту задачу на знаходження невідомого відємника (3-й клас).		
10. Задачі на кратне порівняння 1) задачі, які містять просту задачу на знаходження суми (3-й клас);		
2) задачі, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа у кілька разів (3-й клас);		

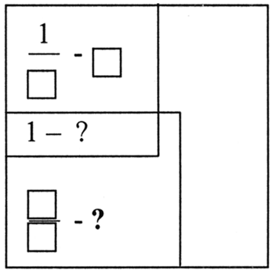
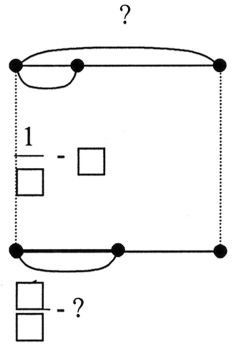
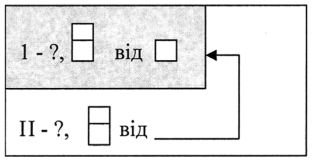
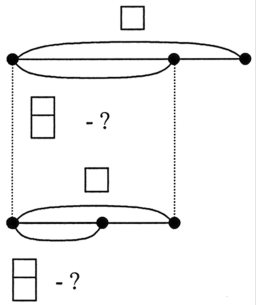
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
3) задачі, які містять просту задачу на знаходження остачі (3-й клас);	а) 	
	б) 	
4) задачі, які містять дві прості задачі на знаходження остачі (3-й клас).		
11. Задачі на знаходження частини від числа 1) задачі, які містять просту задачу на збільшення або зменшення числа у кілька разів (3-й клас);		

Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
2) задачі, в яких 1-ша проста задача на конкретний зміст добутку, 2-га — на знаходження невідомого доданка (4-й клас);		
3) задачі, які містять просту задачу на конкретний зміст дії ділення (4-й клас);		
4) задачі, які містять просту задачу на знаходження числа за його частиною (4-й клас).		

Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
12. Задачі на знаходження дробу від числа 1) задачі, в яких 1-ша проста задача на конкретний зміст добутку, 2-га — на знаходження невідомого доданка (4-й клас);		
2) задачі, які містять просту задачу на знаходження невідомого доданка (4-й клас);		
3) задачі, в яких перша проста задача на знаходження дробу від числа, а друга — на знаходження невідомого доданка (4-й клас);		

Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
4) задачі, в яких перша проста задача на обчислення площі прямокутника, а друга — на знаходження невідомого доданка (4-й клас);		
5) задачі, які містять першу просту задачу на конкретний зміст дії множення, другу — на знаходження невідомого доданка (4-й клас);		
6) задачі, в яких перша проста задача на знаходження площі прямокутника, а друга на знаходження невідомого доданка (4-й клас);		

Закінчення таблиці В.1

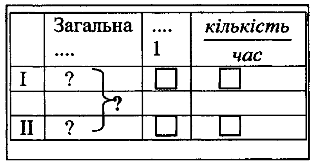
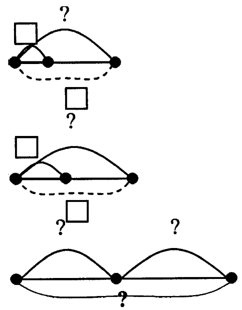
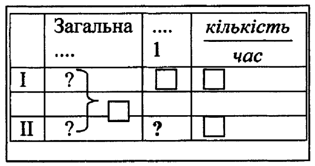
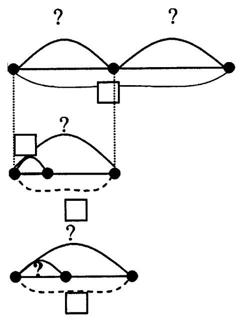
Вид складеної задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
7) задачі, які містять просту задачу на знаходження числа за величиною його частини (4-й клас);		
8) задачі, які містять задачу на знаходження дробу від числа (4-й клас).		

Додаток Г

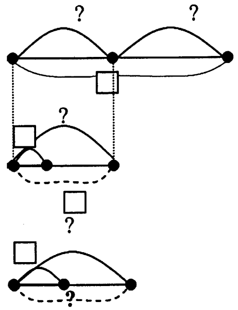
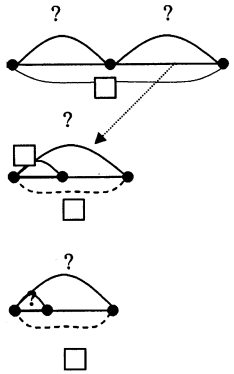
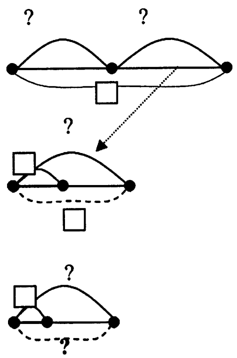
Таблиця Г.1

Класифікація складених задач з пропорційними величинами

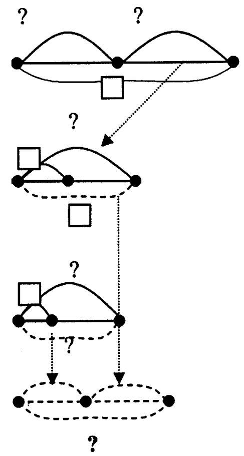
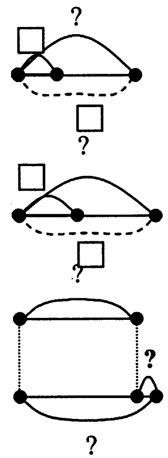
1) задачі, які містять знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків (часток) та обернені до них

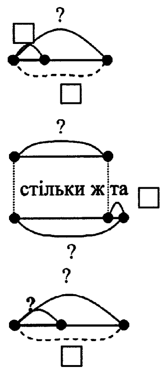
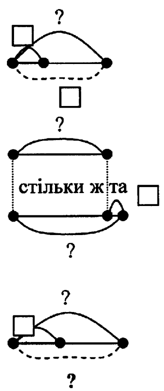
Вид задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
1. Задачі на знаходження суми двох добутків (3-й клас) пряма задача;		
1-ша обернена задача;		

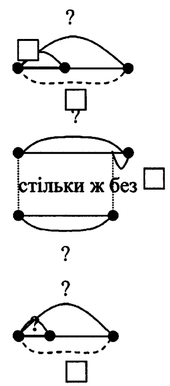
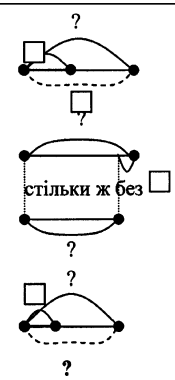
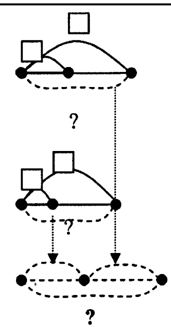
Продовження таблиці Г.1

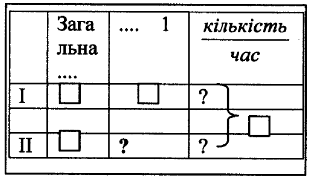
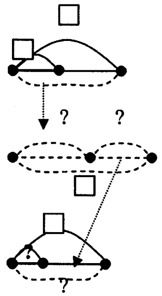
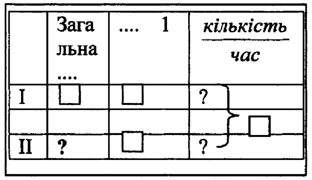
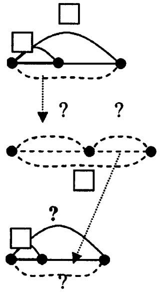
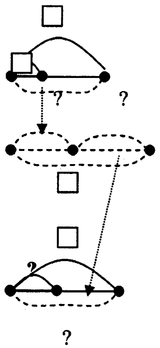
<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>2-га обернена задача;</td><td><table><tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість / час</td></tr><tr><td>I</td><td>?</td><td>□</td><td>□</td></tr><tr><td></td><td>□</td><td></td><td></td></tr><tr><td>II</td><td>?</td><td>□</td><td>?</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>3-тя обернена задача;</td><td><table><tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість / час</td></tr><tr><td>I</td><td>?</td><td>?</td><td>□</td></tr><tr><td></td><td>□</td><td></td><td></td></tr><tr><td>II</td><td>?</td><td>□</td><td>□</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>4-та обернена задача;</td><td><table><tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість / час</td></tr><tr><td>I</td><td>?</td><td>□</td><td>?</td></tr><tr><td></td><td>□</td><td></td><td></td></tr><tr><td>II</td><td>?</td><td>□</td><td>□</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

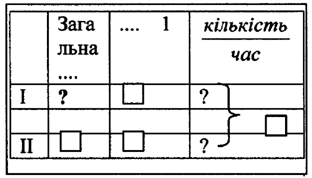
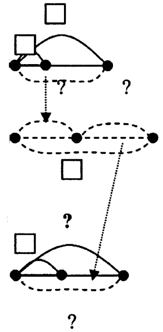
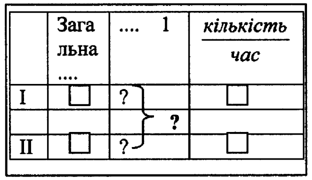
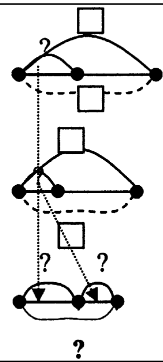
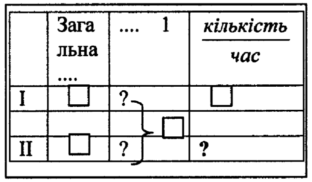
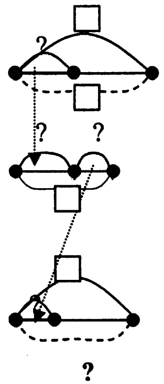
Продовження таблиці Г.1

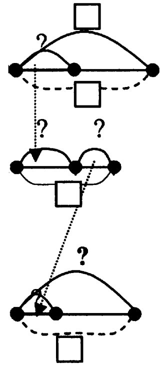
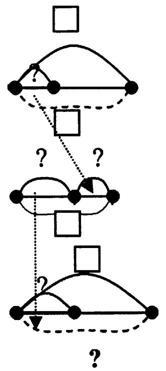
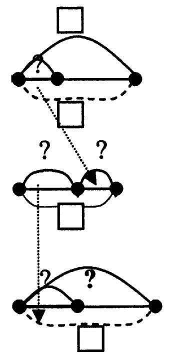
<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>ускладнена задача</td><td><table><tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість / час</td></tr><tr><td>I</td><td>?</td><td>□</td><td>□</td></tr><tr><td></td><td>□</td><td></td><td>?</td></tr><tr><td>II</td><td>?</td><td>□</td><td>?</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Задачі на різницеве порівняння двох добутків (3-й клас)
пряма задача;</td><td><table><tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість / час</td></tr><tr><td>I</td><td>?</td><td>□</td><td>□</td></tr><tr><td></td><td>на ?</td><td></td><td></td></tr><tr><td>II</td><td>?</td><td>□</td><td>□</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

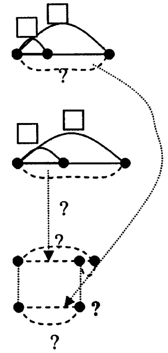
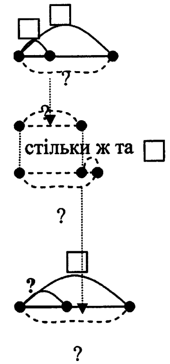
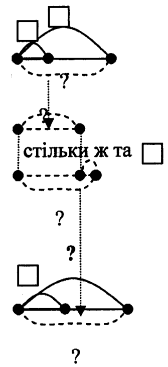
<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>1-ша обернена задача;</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість / час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>?</td><td>□</td><td>□</td></tr>
<tr><td>II</td><td>?, на □ б.(м.)</td><td>?</td><td>□</td></tr>
</table>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2-га обернена задача;</td><td></td><td>
</td></tr>
</table>

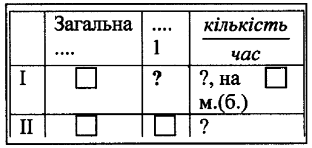
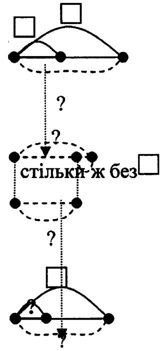
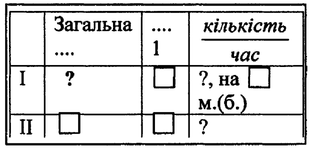
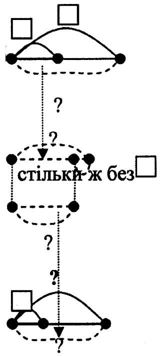
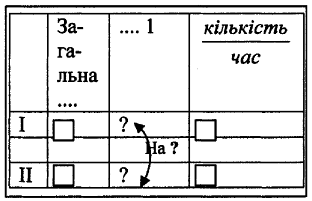
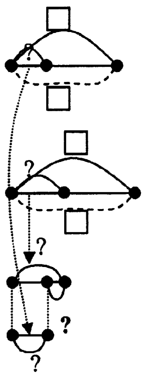
<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>3-тя обернена задача;</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість / час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>? , на □ м.(б.)</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td>II</td><td>?</td><td>□</td><td>□</td></tr>
</table>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4-та обернена задача.</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість / час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>? , на □ м.(б.)</td><td>□</td><td>?</td></tr>
<tr><td>II</td><td>?</td><td>□</td><td>□</td></tr>
</table>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3. Задачі на знаходження суми двох часток (3-й клас).
пряма задача;</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість / час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td>□</td><td>?</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>?</td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td><td>□</td><td>?</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
</table>

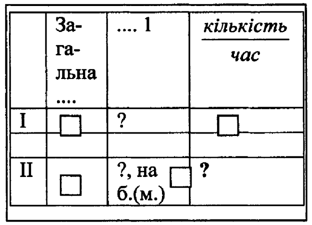
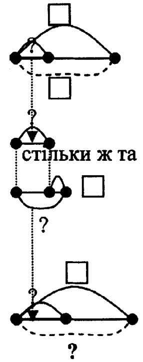
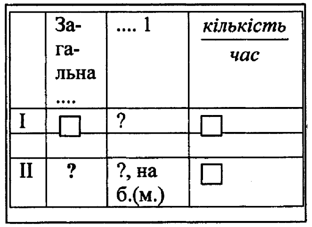
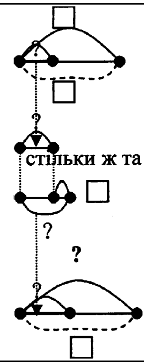
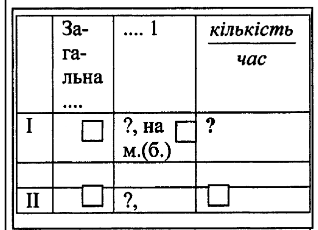
Вид задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
1-ша обернена задача;		
2-га обернена задача;		
3-тя обернена задача;		

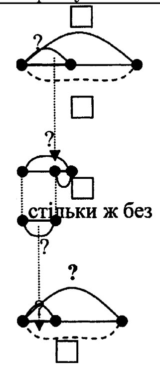
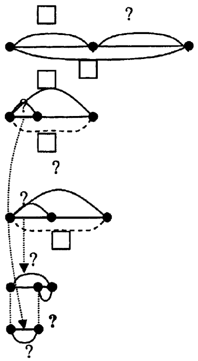
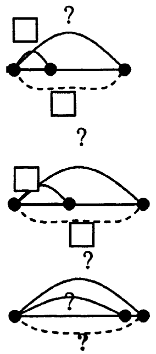
Вид задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
4-та обернена задача;		
пряма задача;		
1-ша обернена задача;		

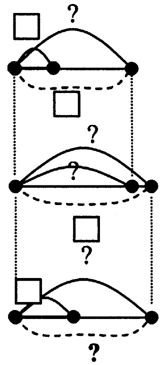
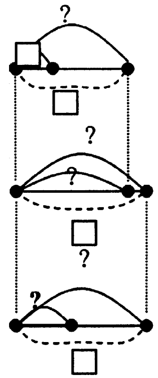
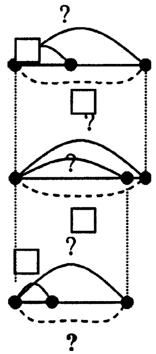
<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>2-га обернена задача;</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість
час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>□</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td>?</td><td>?</td><td>□</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>3-тя обернена задача;</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість
час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td>?</td><td>?</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>□</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>4-та обернена задача.</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість
час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>?</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>□</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
</table>

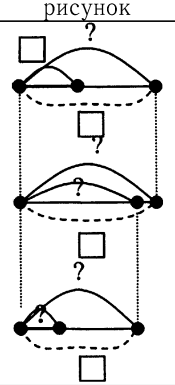
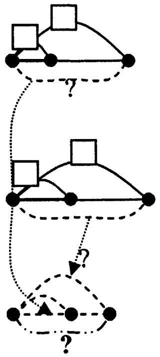
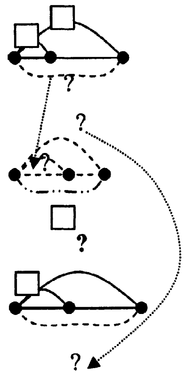
<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>4. Задачі на різницеве порівняння двох часток
(3-й клас)
пряма задача;</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість
час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td>□</td><td>?</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>На ?</td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td><td>□</td><td>?</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>1-ша обернена задача;</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість
час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td>□</td><td>?</td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td><td>?</td><td>?, на □ б.(м.)</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>2-га обернена задача;</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість
час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td>□</td><td>?</td></tr>
<tr><td>II</td><td>?</td><td>□</td><td>?, на □ б.(м.)</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
</table>

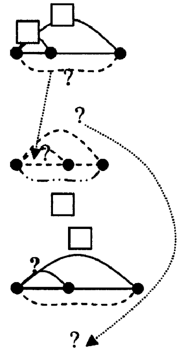
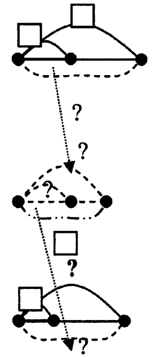
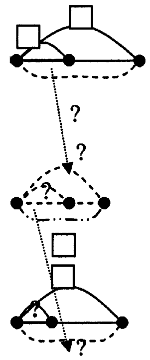
<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>3-тя обернена задача;</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4-та обернена задача;</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>пряма задача;</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

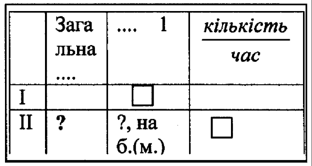
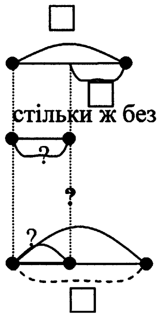
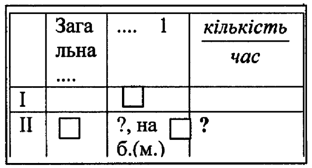
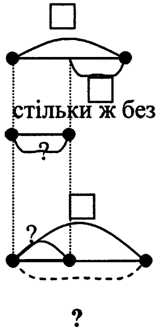
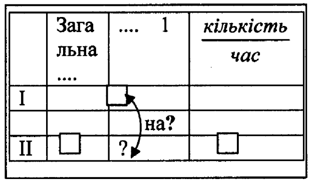
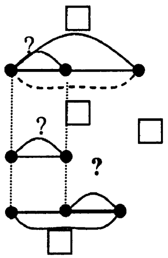
<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>1-ша обернена задача;</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2-га обернена задача;</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3-тя обернена задача;</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

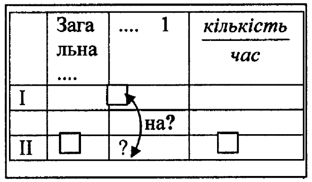
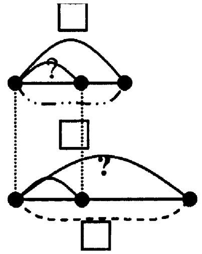
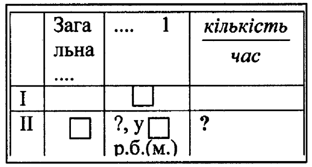
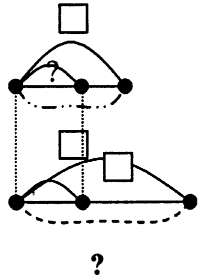
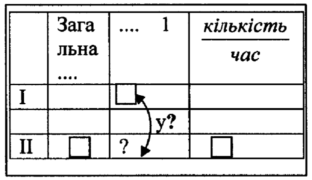
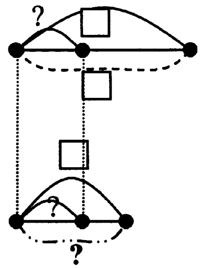
<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>4-та обернена задача;</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>За-га-льна ....</th><th>.... 1</th><th>кількість
час</th></tr>
<tr><td>I</td><td>?</td><td>?, на м.(б.) □</td><td>□</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td><td>?,</td><td>□</td></tr>
</table>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>пряма задача.</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>За-га-льна ....</th><th>.... 1</th><th>кількість
час</th></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td></td><td>□</td><td>На ?</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td>?</td><td>?</td><td>□</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>5. Задачі на кратне порівняння двох добутків (3-й клас)
пряма задача;</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Загальна ....</th><th>.... 1</th><th>кількість
час</th></tr>
<tr><td>I</td><td>?</td><td>□</td><td>□</td></tr>
<tr><td></td><td>У ?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td>?</td><td>□</td><td>□</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>1-ша обернена задача;</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Загальна ....</th><th>.... 1</th><th>кількість
час</th></tr>
<tr><td>I</td><td>?</td><td>□</td><td>□</td></tr>
<tr><td>II</td><td>?, у р. б.(м.)</td><td>□</td><td>?</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>2-га обернена задача;</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Загальна ....</th><th>.... 1</th><th>кількість
час</th></tr>
<tr><td>I</td><td>?</td><td>□</td><td>□</td></tr>
<tr><td>II</td><td>?, у р. б.(м.)</td><td>?</td><td>□</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>3-тя обернена задача;</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Загальна ....</th><th>.... 1</th><th>кількість
час</th></tr>
<tr><td>I</td><td>?, у р. м.(б.)</td><td>□</td><td>?</td></tr>
<tr><td>II</td><td>?,</td><td>□</td><td>□</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
</table>

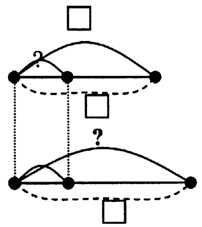
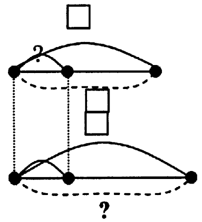
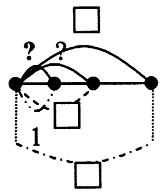
<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>4-та обернена задача.</td><td><table><tr><th></th><th>Загальна ....</th><th>.... 1</th><th>кількість
час</th></tr><tr><td>I</td><td>?, у р. м.(б.)</td><td>?</td><td>□</td></tr><tr><td>II</td><td>?,</td><td>□</td><td>□</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>6. Задачі на кратне порівняння двох часток (3-й клас)
пряма задача;</td><td><table><tr><th></th><th>Загальна ....</th><th>.... 1</th><th>кількість
час</th></tr><tr><td>I</td><td>□</td><td>□</td><td>?</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>У?</td></tr><tr><td>II</td><td>□</td><td>□</td><td>?</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>1-ша обернена задача;</td><td><table><tr><th></th><th>Загальна ....</th><th>.... 1</th><th>кількість
час</th></tr><tr><td>I</td><td>□</td><td>□</td><td>?</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>II</td><td>?</td><td>□</td><td>?, у □ р. б.(м.)</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>2-га обернена задача;</td><td><table><tr><th></th><th>Загальна ....</th><th>.... 1</th><th>кількість
час</th></tr><tr><td>I</td><td>□</td><td>□</td><td>?</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>II</td><td>□</td><td>?</td><td>?, у □ р. б.(м.)</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>3-тя обернена задача;</td><td><table><tr><th></th><th>Загальна ....</th><th>.... 1</th><th>кількість
час</th></tr><tr><td>I</td><td>?</td><td>□</td><td>?, у □ р. м.(б.)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>II</td><td>□</td><td>□</td><td>?,</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>4-та обернена задача.</td><td><table><tr><th></th><th>Загальна ....</th><th>.... 1</th><th>кількість
час</th></tr><tr><td>I</td><td>□</td><td>?</td><td>?, у □ р. м.(б.)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>II</td><td>□</td><td>□</td><td>?,</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>7. Задачі, які містять різницеве відношення (3-й клас)
пряма задача;</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>1-ша обернена задача;</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2-га обернена задача.</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>8. Задачі, що містять кратне відношення (3-й клас)
пряма задача;</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>1-ша обернена задача;</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2-га обернена задача.</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

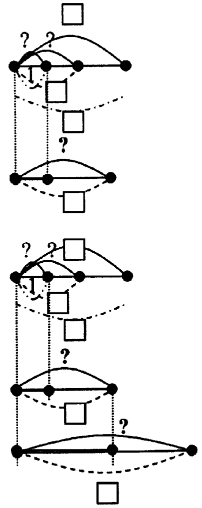
2) "*типові*" *задачі*

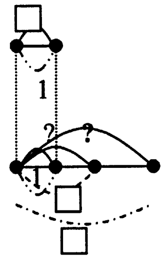
<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>1. Задачі на знаходження четвертого пропорційного (3-й, 4-й клас)
1-й вид</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість / час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td></td><td>□</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Однак.</td><td>□</td></tr>
<tr><td>II</td><td>?</td><td></td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість / час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>?</td><td></td><td>□</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Однак.</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>2-й вид</td><td>3-й, 4-й клас
<table>
<tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість / час □</td></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td></td><td>□</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Однак.</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td><td></td><td>?</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td></td><td>Загальна ....</td><td>.... 1</td><td>кількість / час</td></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td></td><td>?</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Однак.</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td><td></td><td>□</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>2. Задачі на подвійне зведення до одиниці (3-й, 4-й клас)
1-й вид</td><td>3-й клас
□...,□ ... − □
1 ..., 1 ... - ?</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td rowspan="3">2-й вид</td><td>4-й клас

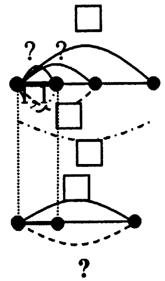
□...,□ ... − □
1 ..., □.. - ?

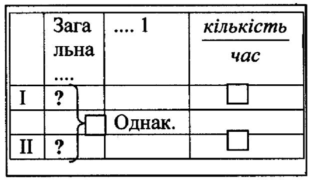
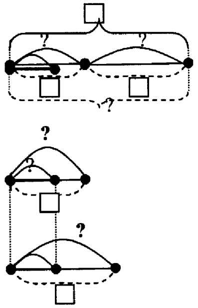
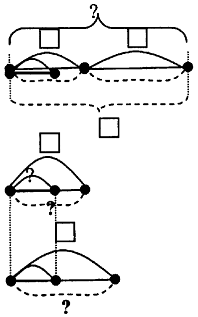
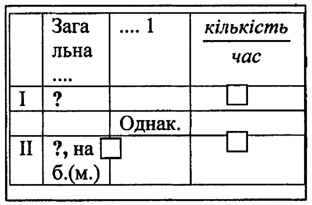
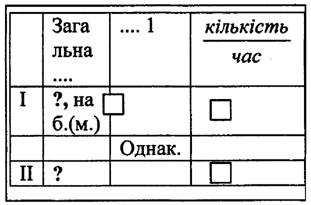
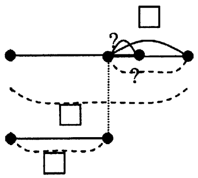
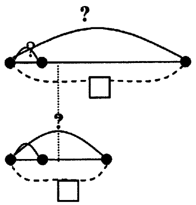
□...,□ ... − □
□..., 1 ... - ?

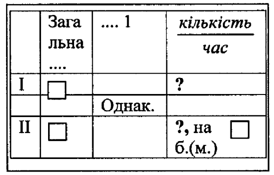
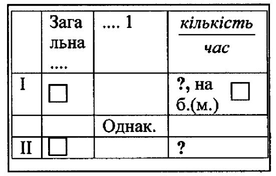
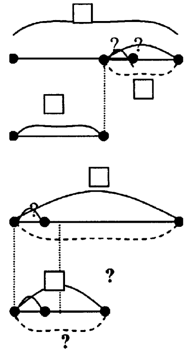
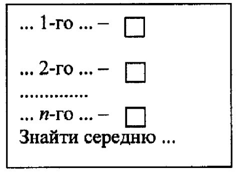
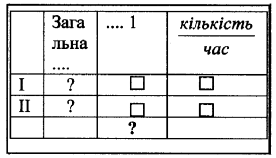
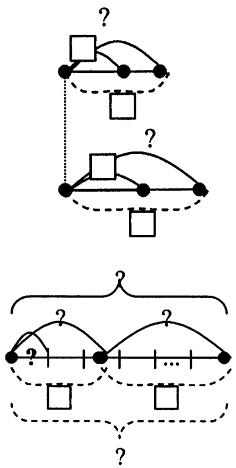
□...,□ ... − □
□...,□... - ?</td><td></td></tr>
<tr><td>3-й клас

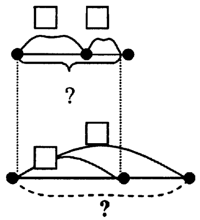
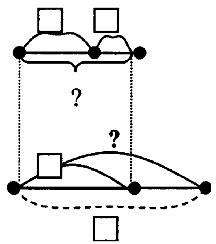
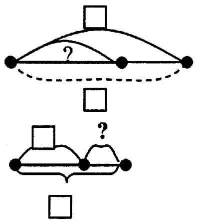
1 ..., 1 ... -□
□...,□... −?</td><td></td></tr>
<tr><td>4-й клас

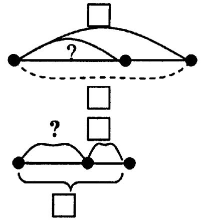
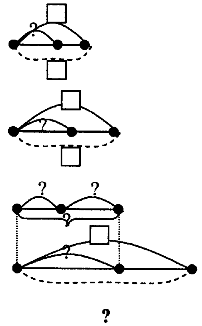
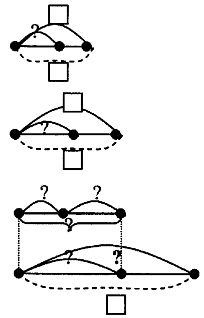
□...,□ ... − □
1 ..., ? ... - □

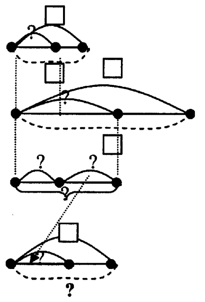
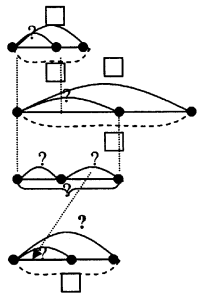
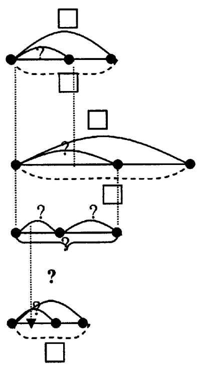
□...,□ ... − □
? ..., 1 ... - □</td><td></td></tr>
</table>

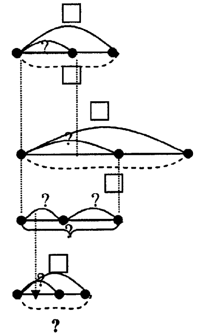
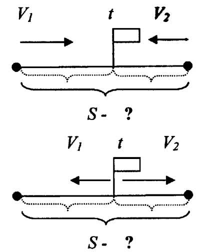
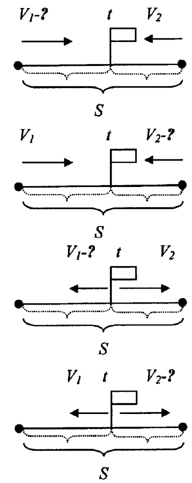
Вид задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
3. Задачі на пропорційне ділення (4-й клас) 1-й вид		
2-й вид		
4. Задачі на знаходження невідомих за двома різницями (4-й клас) 1-й вид		

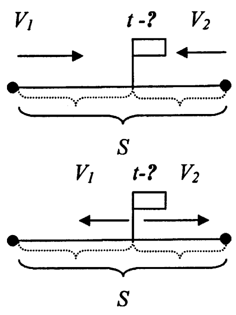
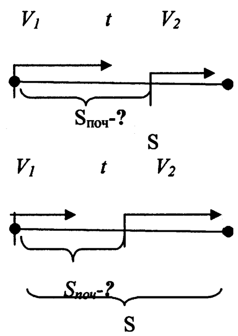
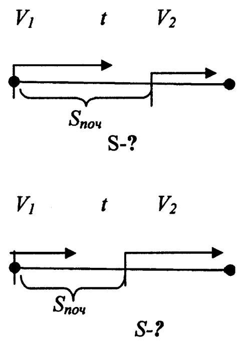
Вид задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
2-й вид		
5. Задачі на знаходження середнього арифметичного (4-й клас) Задачі на застосування правила знаходження середнього арифметичного		
Ускладнені задачі на знаходження середнього арифметичного, які містять пропорційні величини		

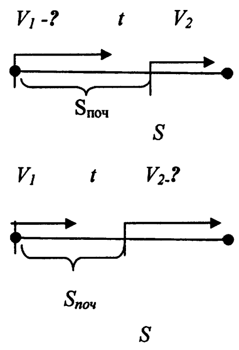
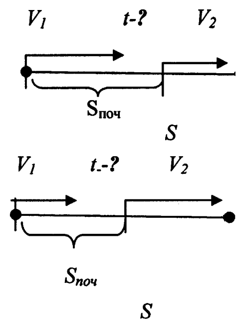
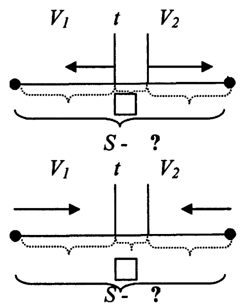
<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>6. Задачі на спільну роботу (3-й, 4-й клас)
пряма задача;</td><td>3-й клас
<table>
<tr><th></th><th>Зага-льний виро-біток</th><th>Продук-тивність праці</th><th>Час робо-ти</th></tr>
<tr><td>I</td><td></td><td>□</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td></td><td>□</td><td></td></tr>
<tr><td>IіII</td><td>□</td><td>?</td><td>?</td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>перша обернена задача;</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Зага-льний виро-біток</th><th>Продук-тивність праці</th><th>Час робо-ти</th></tr>
<tr><td>I</td><td></td><td>□</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td></td><td>□</td><td></td></tr>
<tr><td>IіII</td><td>?</td><td>?</td><td>□</td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>друга обернена задача;</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Зага-льний виро-біток</th><th>Продук-тивність праці</th><th>Час робо-ти</th></tr>
<tr><td>I</td><td></td><td>□</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td></td><td>?</td><td></td></tr>
<tr><td>IіII</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
</table></td><td></td></tr>
</table>

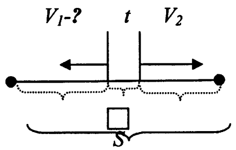
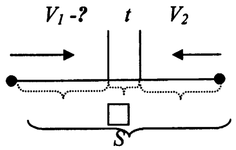
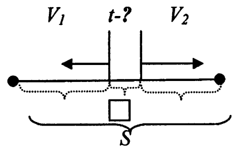
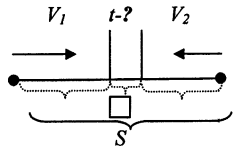
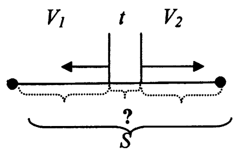
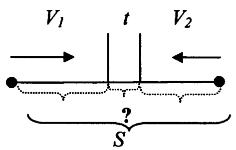
<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>третя обернена задача;</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Зага-льний виро-біток</th><th>Продук-тивність праці</th><th>Час робо-ти</th></tr>
<tr><td>I</td><td></td><td>?</td><td></td></tr>
<tr><td>II</td><td></td><td>□</td><td></td></tr>
<tr><td>IіII</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>пряма задача;</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Зага-льний виро-біток</th><th>Продук-тивність праці</th><th>Час робо-ти</th></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td>IіII</td><td>□</td><td>?</td><td>?</td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>перша обернена задача;</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>Зага-льний виро-біток</th><th>Продук-тивність праці</th><th>Час робо-ти</th></tr>
<tr><td>I</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td>II</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr>
<tr><td>IіII</td><td>?</td><td>?</td><td>□</td></tr>
</table></td><td></td></tr>
</table>

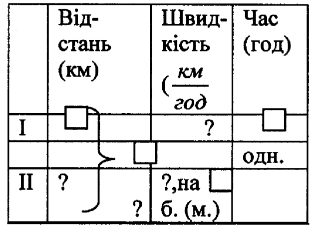
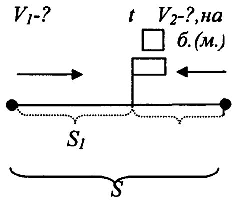
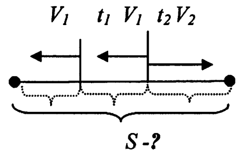
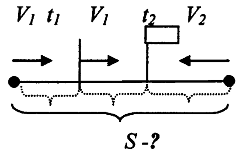
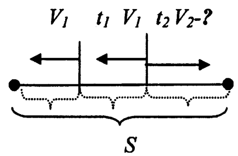
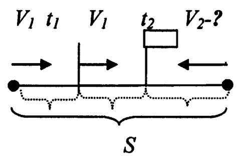
<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>друга обернена задача;</td><td><table><tr><th></th><th>Загальний виробіток</th><th>Продуктивність праці</th><th>Час роботи</th></tr><tr><td>I</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr><tr><td>II</td><td>□</td><td>?</td><td>?</td></tr><tr><td>IiII</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>третя обернена задача;</td><td><table><tr><th></th><th>Загальний виробіток</th><th>Продуктивність праці</th><th>Час роботи</th></tr><tr><td>I</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr><tr><td>II</td><td>?</td><td>?</td><td>□</td></tr><tr><td>IiII</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>четверта обернена задача;</td><td><table><tr><th></th><th>Загальний виробіток</th><th>Продуктивність праці</th><th>Час роботи</th></tr><tr><td>I</td><td>?</td><td>?</td><td>□</td></tr><tr><td>II</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr><tr><td>IiII</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Вид задачі</th><th>Опорна схема</th><th>Схематичний рисунок</th></tr>
<tr><td>п’ята обернена задача.</td><td><table><tr><th></th><th>Загальний виробіток</th><th>Продуктивність праці</th><th>Час роботи</th></tr><tr><td>I</td><td>□</td><td>?</td><td>?</td></tr><tr><td>II</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr><tr><td>IiII</td><td>□</td><td>?</td><td>□</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">7. Задачі на рух (4-й клас)
Одночасний рух в різних напрямках</td><td>Задачі на знаходження відстані</td><td></td></tr>
<tr><td>Задачі на знаходження швидкості</td><td></td></tr>
</table>

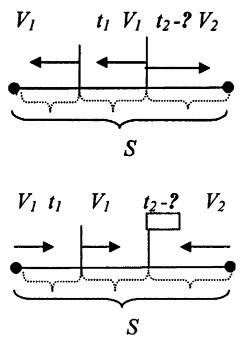
Вид задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
	Задачі на знаходження часу	
Одночасний рух в одному напрямку (рух навздогін та рух з відставанням)	- задачі на знаходження відстані на момент початку руху;	
	- знаходження відстані на момент закінчення руху;	

Вид задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
	- задачі на знаходження швидкості;	
	- задачі на знаходження часу руху;	
Задачі на рух в протилежних напрямках з різних пунктів. Задачі на зустрічний рух, але не до зустрічі.	- задачі на знаходження відстані на момент закінчення руху;	

Вид задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
	- задачі на знаходження швидкості;	
	- задачі на знаходження часу руху;	
	- задачі на знаходження відстані на момент початку руху;	

Вид задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
Задачі, які містять відношення різницевого порівняння		
Неодночасний рух	- задачі на знаходження відстані;	
	- задачі на знаходження швидкості;	

Закінчення таблиці Г.1

Вид задачі	Опорна схема	Схематичний рисунок
	- задачі на знаходження часу;	

Додаток Д
Структурні моделі простих та складених задач

1. Біля школи ростуть тополі і клен. Висота тополі 12 м, а висота клену — 8 м. На скільки метрів клен нижчий від тополі?

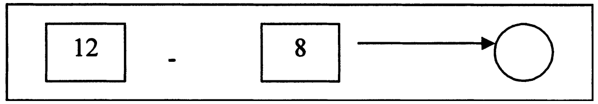


Рис. Д.1. Структурна схема простої задачі, в якій шуканим є головний член співвідношення, за Л. М. Фрідманом

2. Пішохід за 3 години пройшов 12 км. З якою швидкістю він йшов?

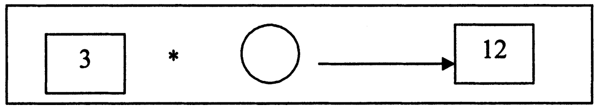


Рис. Д.2. Структурна схема простої задачі, в якій шуканим є другорядний член співвідношення, за Л. М. Фрідманом

3. Мандрівник їхав 3 години залізною дорогою і 2 години на пароплаві. Скільки кілометрів за годину він проїжджав по залізній дорозі і скільки на пароплаві, якщо відомо, що всього він проїхав 190 км і що поїзд за годину долав на 30 км більше, ніж пароплав?

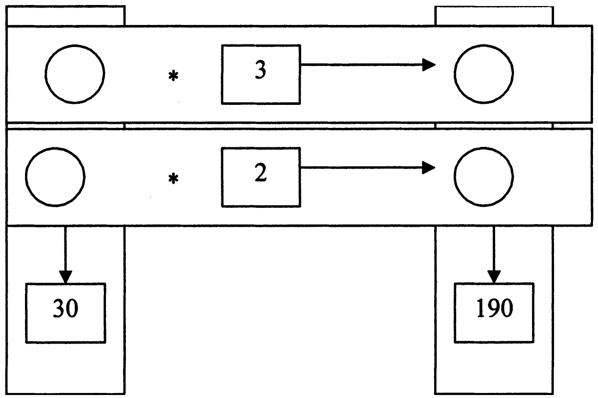


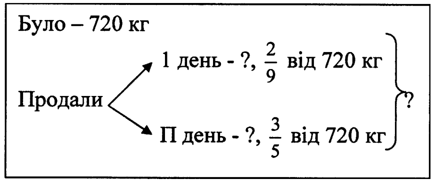
Рис. Д.3. Структурна схема складеної задачі за Л. М. Фрідманом

Додаток Е
Картки з диференційованою дозою допомоги учням при розв'язуванні задач

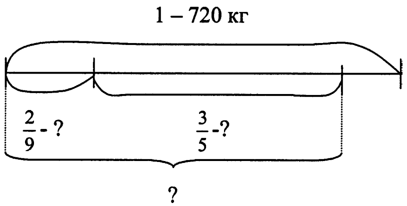
Задача. У магазині було 720 кг рису. За перший день продали $\frac{2}{9}$, а за другий $\frac{3}{5}$ всього рису. Скільки кілограмів рису продали за два дні?

I варіант

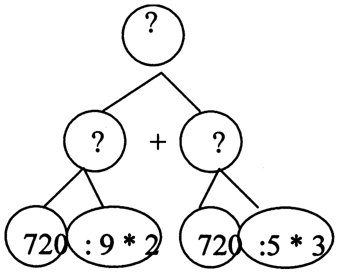
1. Розглянь короткий запис задачі.



2. Розглянь схему:



— обведи відрізок, що позначає масу рису, що продали у перший день; № як про це дізнатися?
— обведи відрізок, що позначає масу рису, що продали у другий день; як про це дізнатися?
— обведи відрізок, що позначає масу рису, що продали за два дні; як про це дізнатися?
2. Розглянь схему аналізу:



— склади план розв'язування задачі.
4. Запиши розв'язання по діях з поясненням.
5. Запиши відповідь.
6. Перевір себе!

Розв'язання

1) $720 : 9 \times 2 = 160$ (кг) рису продали в I день;
2) $720 : 5 \times 3 = 432$ (кг) рису продали в II день;
3) $160 + 432 = 592$ (кг) рису продали в I та II день.

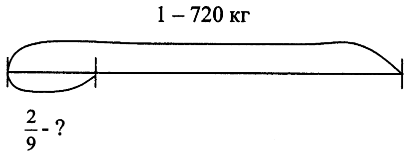
Відповідь: 592 кг рису продали за два дні.

Додаткове завдання

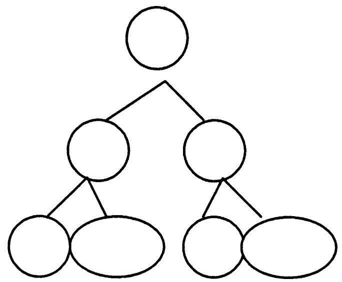
Дізнайся: скільки кілограмів рису залишилося?

II варіант

1. Запиши задачу коротко.
2. Добудуй схему:



3. Заповни схему аналізу:



4. Склади план розв'язування задачі.
5. Запиши розв'язання по діях з поясненням.
6. Запиши розв'язання виразом. Перевір себе:

$$170 : 9 \times 2 + 720 : 5 \times 3 = 592 \text{ (кг)}$$

7. Перевір себе! Відповідь: 592 кг.

Додаткове завдання

Постав додаткове запитання, щоб задача розв'язувалась чотирма діями.

III варіант

1. Склади схему задачі.
2. Розв'яжи задачу. Запиши розв'язання виразом.
3. Перевір себе! Відповідь: 592 кг.

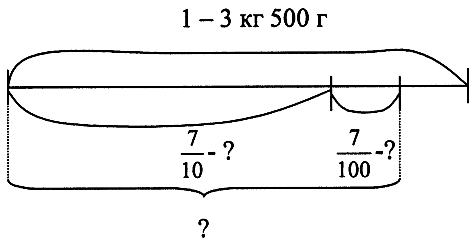
Додаткове завдання

4. Розв'яжи задачу з цією самою умовою, але із запитанням: "Скільки кілограмів рису залишилося?"

Задача. Кроль за день з'їдає 3 кг 500 г продуктів, з них трава становить $\frac{7}{10}$, а зерно $\frac{7}{100}$ всіх продуктів. Скільки разом трави и зерна з'їдає кроль за день?

I варіант

1. Розглянь схему:



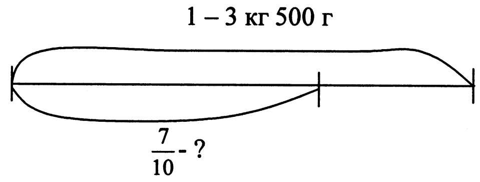
— обведи відрізок, який позначає скільки трави з'їдає кроль, як про це дізнатися? Обчисли це.
— обведи відрізок, який позначає скільки зерна з'їдає кроль, як про це дізнатися? Обчисли це.
— обведи відрізок, який позначає скільки трави і зерна з'їдає кроль, як про це дізнатися? Обчисли це.

3. За схемою склади план розв'язування задачі.
4. Перевір себе" Відповідь: 2695 кг = 2 т 695 кг.

Додаткове завдання

Дізнайся про масу решти продуктів.

II варіант



1. Добудуй схему:
2. За схемою склади план розв'язування задачі.
3. Запиши розв'язання по діях з поясненням.
4. Перевір себе! Відповідь: 2695 кг = 2 т 695 кг.

Додаткове завдання

Постав додаткове запитання, щоб задача розв'язувалась чотирма діями.

III варіант

1. Склади схему задачі.
2. Розв'яжи задачу. Запиши розв'язання виразом.
3. Перевір себе! Відповідь: 2695 г = 2 кг 695 г.

Додаткове завдання

4. Розв'яжи задачу з цією самою умовою, але із запитанням: "Скільки грамів складає решта продуктів?"
5. Порівняй цю задачу з попередньою. Чи це така сама за структурою задача? Розкажи план розв'язання таких задач.

Зміст

Передмова 3

Розділ 1. Сюжетні математичні задачі в контексті психолого-дидактичної теорії задач

1.1. Поняття «задача» в психології та дидактиці 6

1.1.1. Зміст поняття «задача» 6

1.1.2. Структура задачі 12

1.1.3. Класифікація задач 14

1.2. Поняття «сюжетна математична задача» 21

1.2.1. Математичні задачі 21

1.2.2. Сюжетні математичні задачі 22

1.2.3. Структура сюжетної задачі 27

1.3. Класифікація сюжетних задач початкового курсу математики 34

1.3.1. Класифікація простих задач 38

1.3.2. Класифікація складених задач 46

1.4. Діяльность з розв'язування задач 52

1.4.1. Сутність процесу розв'язування задач 52

1.4.2. Зовнішня структура процесу розв'язування задач 56

1.4.3. Психологічна структура діяльності з розв'язування задач 73

Розділ 2. Психолого-дидактичні засади формування умінь розв'язувати задачі

2.1. Проблема формування умінь розв'язувати сюжетні задачі в дидактиці математики 81

2.1.1. Зміст поняття «уміння розв'язувати задачі». Види умінь 81

2.1.2. Методичні підходи до формування умінь розв'язувати сюжетні задачі 90

2.2. Особистісно орієнтоване навчання розв'язування задач 99

2.2.1. Навчання розв'язування задач в системі розвивального навчання 120

2.2.2. Відмінності у розумовій діяльності молодших школярів при розв'язуванні задач 129

2.2.3. Диференціація у навчанні молодших школярів розв'язування задач 131

2.3. Процес формування умінь з точки зору діяльнісного підходу 138

2.3.1. Вимоги до процесу формування розумових дій, які забезпечують високу ефективність навчання навичкам та вмінням 138

2.3.2. Теорія поетапного формування розумових дій і понять (за П. Я. Гальперіним) 141

2.3.3. Орієнтувальна діяльність учнів під час розв'язування задач. Метод системно-структурного аналізу ... 150

2.3.4. Спільні підходи теорії поетапного формування розумових дій і понять та теорії розвивального навчання (за Д. Б. Ельконіним та В. В. Давидовим) ... 155

2.3.5. Застосування змістовних узагальнень при навчанні розв'язування задач 160

2.4. Операційний склад загального уміння розв'язувати задачі та уміння розв'язувати задачі певних видів 164

2.4.1. Аналіз існуючих трактувань операційного складу загального та окремого уміння розв'язувати задачі 164

2.4.2. Зміст етапів розв'язування задачі та дії, за допомогою яких вони реалізуються 172

2.4.3. Визначення операційного складу загального уміння та окремого уміння розв'язувати задачі 186

2.5. Навчання дій, що складають загальне уміння розв'язувати задачі 191

2.5.1. Навчання дій, що адекватні арифметичним способам розв'язування задач 191

2.5.2. Методичні прийоми формування дій, що складають загальне уміння розв'язування задач арифметичними способами на матеріалі простих задач 194

2.5.3. Дії, що складають загальне уміння розв'язування задач арифметичними способами на матеріалі складених задач 208

Розділ 3. Теоретичне обґрунтування методичної системи навчання молодших школярів розв'язування сюжетних задач

3.1. Загальна характеристика методичної системи навчання молодших школярів розв'язування задач арифметичними способами 215

3.1.1. Характеристика п’яти компонентів методичної системи за А. М. Пишкало 215
3.1.2. Будова системи з точки зору теорії проектування педагогічних систем 224
3.2. Методика формування в молодших школярів загального уміння розв’язувати сюжетні задачі 228
3.2.1. Методика формування загального уміння розв’язувати задачі на матеріалі простих задач 228
3.2.2. Методика формування загального уміння розв’язувати задачі на матеріалі складених задач 233
3.2.3. Методика формування загального уміння на матеріалі задач з пропорційними величинами на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків або часток 237
3.3. Методика формування в молодших школярів умінь розв’язувати сюжетні задачі певних видів 244
3.3.1. Методика формування окремих умінь розв’язувати задачі, що містять однакову (сталу) величину 254
3.3.2. Методика формування окремих умінь розв’язувати задачі на спільну роботу та на рух 262
3.3.3. Методика формування окремих умінь розв’язувати задачі на знаходження середнього арифметичного 270

Розділ 4. Формування загального уміння розв’язувати сюжетні задачі

4.1. Система навчальних задач з формування загального уміння у процесі навчання розв’язування простих задач 272
4.1.1. Зміст підготовчого етапу до введення поняття «задача» 272
4.1.2. Ознайомлення першокласників з поняттям «задача» 274
4.1.3. Закріплення поняття «задача». Формування умінь розв’язувати прості задачі в 1-му класі 286
4.1.4. Формування умінь розв’язувати прості задачі в 2-му класі 294
4.1.5. Формування уміння розв’язувати прості задачі в 3-му класі 313
4.1.6. Формування уміння розв’язувати прості задачі в 4-му класі 320

4.2. Система навчальних задач з формування загального уміння у процесі навчання розв’язування складених задач 323
4.2.1. Зміст і методика підготовчого етапу до введення поняття «складена задача» 323
4.2.2. Ознайомлення учнів 2-го класу з поняттям «складена задача» 327
4.2.3. Формування уміння розв’язувати складені задачі в 2-му класі 334
4.2.4. Формування уміння розв’язувати складені задачі в 3-му класі 350
4.2.5. Формування уміння розв’язувати складені задачі в 4-му класі 360
4.3. Система навчальних задач з навчання молодших школярів розв’язувати складені задачі, що містять знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох добутків (часток) та обернені до них 365
4.3.1. Зміст і методика підготовчої роботи 365
4.3.2. Задачі, що містять знаходження суми двох добутків та обернені до них 368
4.3.3. Задачі на різницеве порівняння двох добутків та обернені до них 374
4.3.4. Задачі на кратне порівняння двох добутків та обернені до них 382
4.3.5. Задачі на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох часток (кількості або часу) 391
4.3.6. Задачі на знаходження суми або різницеве чи кратне порівняння двох часток (значень величини однієї одиниці виміру або лічби) 397

Розділ 5. Формування умінь розв’язувати сюжетні задачі певних видів (що містять пропорційні величини)

5.1. Система навчальних задач з формування у молодших школярів умінь розв’язувати «типові» задачі, які містять однакову (сталу) величину для обох випадків 406
5.1.1. Задачі на знаходження четвертого пропорційного 406
5.1.2. Задачі на пропорційне ділення 426

5.1.3. Задачі на знаходження невідомих за двома різницями ... 442
5.1.4. Задачі на подвійне зведення до одиниці ... 461
5.2. Система навчальних задач з формування умінь розв'язувати «типові» задачі на спільну роботу та задачі на рух ... 480
5.2.1. Методика навчання розв'язувати задачі на спільну роботу ... 480
5.2.2. Задачі на рух в різних напрямках ... 492
5.2.3. Узагальнення математичних структур та способів розв'язування задач на одночасний рух в різних напрямках і на спільну роботу ... 511
5.2.4. Методика навчання розв'язування задачі на рух в одному напрямку ... 522
5.2.5. Узагальнення математичних структур та способів розв'язування задач на одночасний рух в одному напрямку і на спільну роботу ... 532
5.2.6. Задачі на рух за течією та проти течії річки ... 540
5.3. Система навчальних задач з формування умінь розв'язувати «типові» задачі на знаходження середнього арифметичного ... 542
5.3.1. Зміст і методика підготовчої роботи ... 542
5.3.2. Задачі на застосування правила знаходження середнього арифметичного ... 544
5.3.3. Ускладнені задачі на знаходження середнього арифметичного ... 545

Післяслово ... 554

Література ... 559

ДОДАТКИ

Додаток А. Класифікація простих задач ... 590
Додаток Б. Послідовність розгляду видів задач за роками навчання ... 600
Додаток В. Класифікація задач першої групи на основі складу з простих задач ... 607
Додаток Г. Класифікація складених задач з пропорційними величинами ... 655
Додаток Д. Структурні моделі простих та складених задач ... 685
Додаток Е. Картки з диференційованою дозою допомоги учням при розв'язуванні задач ... 686

Скворцова С. О.

С 427 Методична система навчання розв'язування сюжетних задач учнів початкових класів: Монографія. — Одеса: Астропринт, 2006. — 696 с.

ISBN 966-318-567-8.

У монографії викладено теоретико-методичні основи навчання учнів розв'язування сюжетних задач. Визначається зміст понять "загальне уміння розв'язувати задачі", "окреме уміння розв'язувати задачі". Виділяється операційний склад загального уміння розв'язувати прості та складені задачі. На основі визначених концептуальних теоретичних основ конструюється модель методичної системи навчання учнів розв'язування сюжетних задач в курсі математики початкової школи, що спрямована на формування загального уміння розв'язування задач та окремих умінь розв'язування задач певних видів. Методична система реалізується у 1—4-х класах загальноосвітньої школи, нею передбачено навчання молодших школярів розв'язування задач усіх математичних структур, що містяться у чинних підручниках.

Для науковців, аспірантів, студентів, вчителів і методистів.

С $\frac{4306010500—104}{318—2006}$ Без оголош.

ББК 74.262
УДК 373.3:51

Наукове видання

СКВОРЦОВА Світлана Олексіївна

МЕТОДИЧНА СИСТЕМА НАВЧАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЮЖЕТНИХ ЗАДАЧ УЧНІВ ПОЧАТКОВИХ КЛАСІВ

Монографія

Зав. редакцією *Т. М. Забанова*
Голов. редактор *Ж. Б. Мельниченко*
Технічні редактори *Р. М. Кучинська, Г. О. Куклєва*
Коректор *Т. В. Волніна*

Здано у виробництво 20.03.2006. Підписано до друку 31.07.2006.
Формат 60×84/16. Папір офсетний. Гарнітура Literaturnaja.
Ум. друк. арк. 40,46. Тираж 300 прим. Зам. № 420.

Видавництво і друкарня «Астропринт»
(Свідоцтво ДК № 1373 від 28.05.2003 р.)
65082, м. Одеса, вул. Преображенська, 24
Тел./факс: 726-98-82, 726-96-82, 37-14-25

www.fotoalbom.odessa.com